Лабораторная работа №8

Научное программирование

Николаев Дмитрий Иванович, НПМмд-02-24

Содержание

# 1 Цель работы

Целью работы является изучение собственных значений и собственных векторов матриц, а также моделирование цепей Маркова на языках программирования Octave и Julia.

# 2 Теоретическое введение

## 2.1 Собственные значения и собственные векторы

Собственные значения и собственные векторы играют важную роль в линейной алгебре и математической физике. Для матрицы уравнение собственных значений записывается как:

где — собственное значение, а — собственный вектор матрицы . Эти понятия используются для решения задач динамических систем, квантовой механики, обработки сигналов и др.

## 2.2 Цепи Маркова

Рассмотрим последовательность случайных событий при соблюдении следующих условий:

* конечное число состояний;
* через определённые промежутки времени проводится наблюдение и регистрируется состояние системы;
* вероятность перехода в каждое из состояний или остаться в том же состоянии зависит только от текущего состояния.

Такая система называется **цепью Маркова**. Наша задача — предсказать вероятности состояний системы.

Цепи Маркова описывают системы, где переход между состояниями определяется вероятностями, зависящими только от текущего состояния. Матрица переходов описывает вероятность перехода между состояниями, и её можно использовать для предсказания будущих состояний системы. Математически состояние системы через шагов определяется как:

где — начальный вектор вероятностей. Цепи Маркова применяются в теории вероятностей, экономике, биоинформатике и многих других областях.

# 3 Выполнение лабораторной работы

Следуя указаниям из [1], выполним лабораторную работу на Octave и Julia.

## 3.1 Octave

### 3.1.1 Собственные значения и векторы

Зададим матрицу :

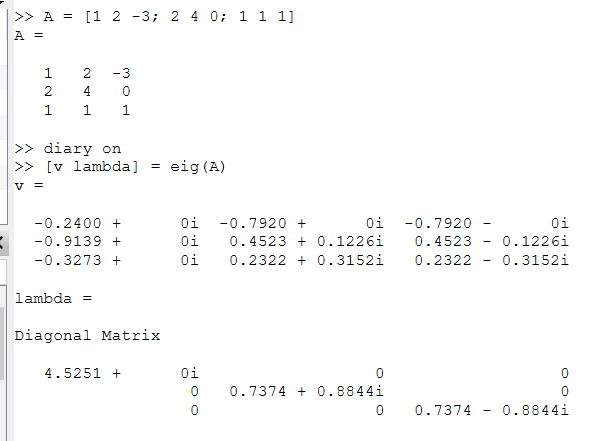
Необходимо найти собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Для нахождения используется команда eig с двумя выходными аргументами. Синтаксис:

[v, lambda] = eig(A)

Первый элемент результата — матрица, столбцы которой представляют собой собственные векторы, а второй результат — диагональная матрица с собственными значениями на диагонали.

A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]  
[v, lambda] = eig(A)

Результаты ([??]):

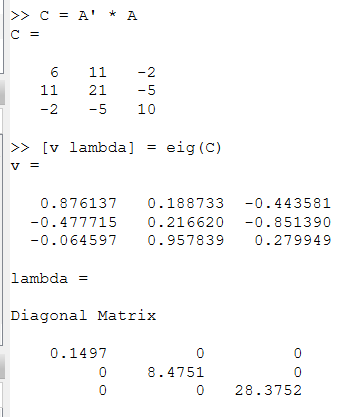


Собственные значения и векторы матрицы A на Octave

Для того, чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями, мы можем создать симметричную матрицу (имеющую действительные собственные значения) путём умножения (слева) матрицы на транспонированную матрицу:

C = A' \* A  
[v, lambda] = eig(C)

Результаты ([??]):

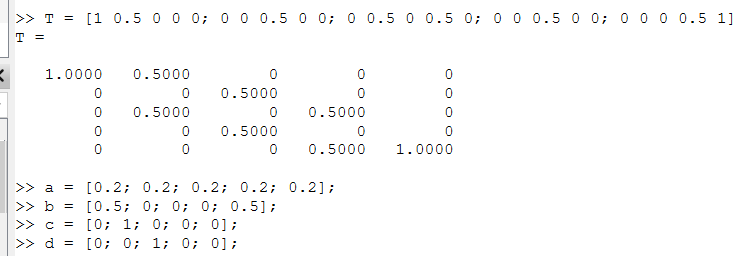


Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A’\*A на Octave

Диагональные элементы матрицы являются собственными значениями, а соответствующие столбцы матрицы — собственными векторами. Каждому собственному значению соответствует бесконечное семейство собственных векторов. Типичные собственные векторы, полученные в Octave, нормированы на единицу.

### 3.1.2 Цепи Маркова: Случайное блуждание

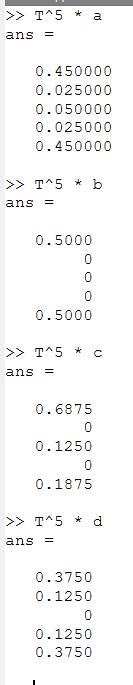
Модель случайного блуждания была реализована с использованием матрицы переходов и нескольких начальных состояний ([??]).



Матрицы переходных вероятностей и начальные состояния на Octave

Мы хотим предсказать местоположение после ходов, что делается путём перемножения матрицы переходов . Вектор вероятности после периодов получается следующим образом:

Пусть , , , . Найдём вектора вероятностей после 5 шагов:



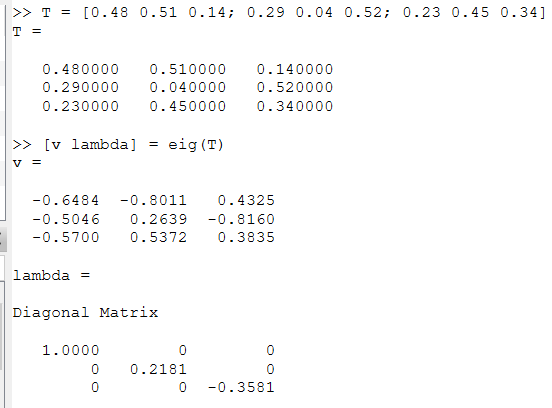
Вектора вероятностей после 5 шагов на Octave

### 3.1.3 Цепи Маркова: Равновесное состояние

Состояние является равновесным, если . Каждая цепь Маркова имеет хотя бы одно равновесное состояние. Пусть — матрица переходов для цепи Маркова, тогда является собственным значением . Если — собственный вектор для с неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1, то является равновесным состоянием.

Найдём вектор равновесного состояния для матрицы переходов :

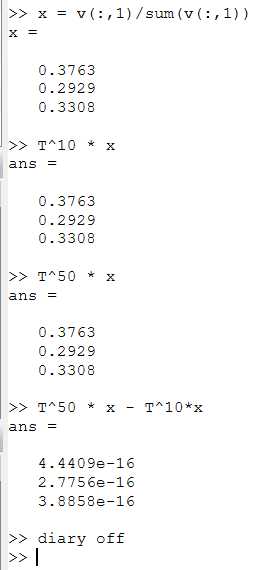
и её собственные значения вместе с собственными векторами ([??]):



Собственные значения и векторы матрицы переходных вероятностей T на Octave

После нормализации собственного вектора соответствующего , получим

Проверим, действительно ли полученныф вектор является равновесным состоянием ([??]).

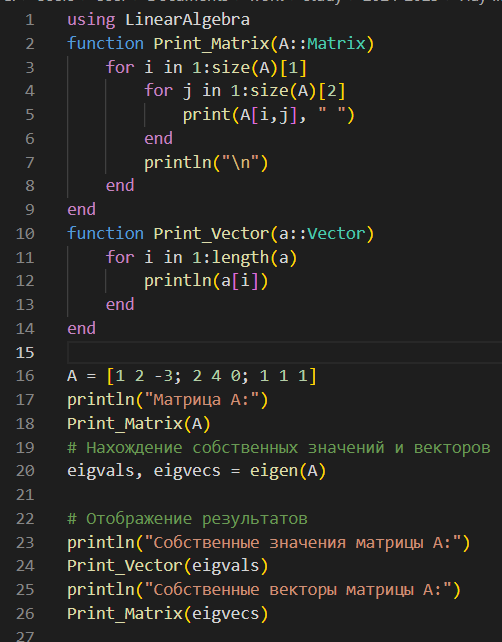


Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей T на Octave

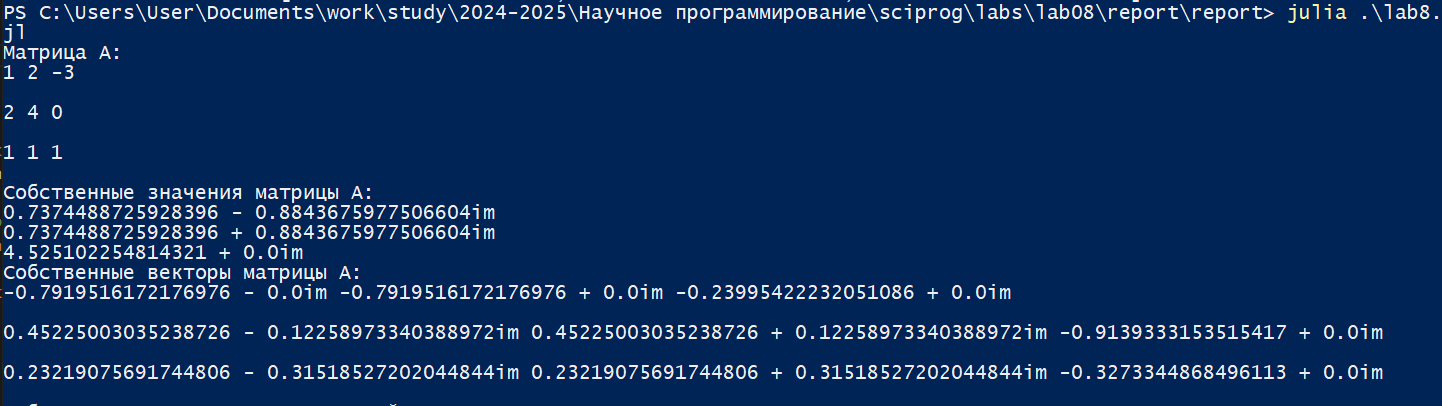
Получили, что вектор является равновесным состоянием.

## 3.2 Julia

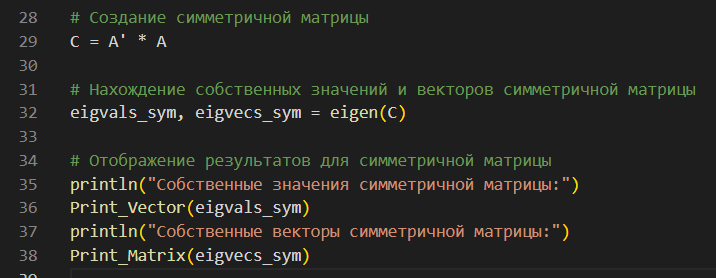
Повторим вышеописанные шаги на языке Julia. Найдём собственные значения и вектора матрицы ([??,??]) и полученной из неё симметричной матрицы ([??,??]), вероятностное распределение через 5 шагов при разных начальных состояних ([??,??]), а также найдём равновесное состояние цепи Маркова ([??,??]).



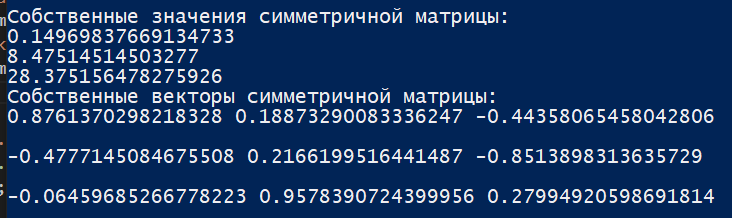
Собственные значения и векторы матрицы A на Julia (1/2)



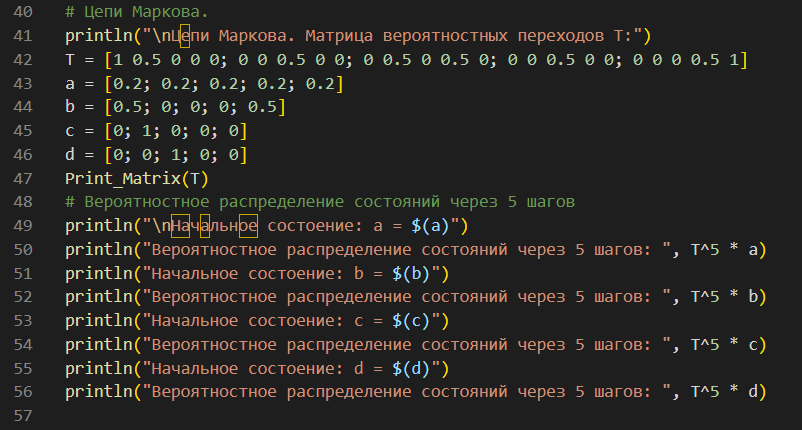
Собственные значения и векторы матрицы A на Julia (2/2)



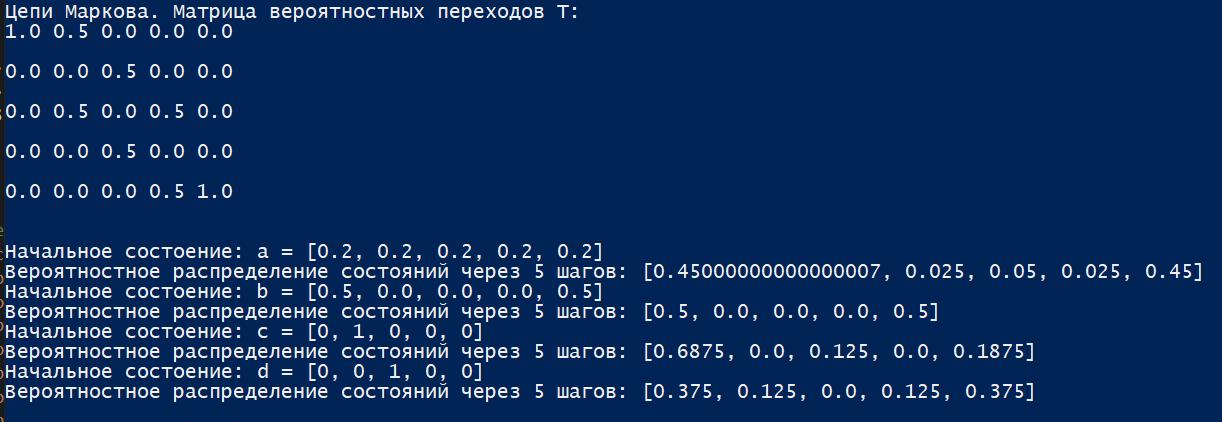
Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A’A на Julia (1/2)



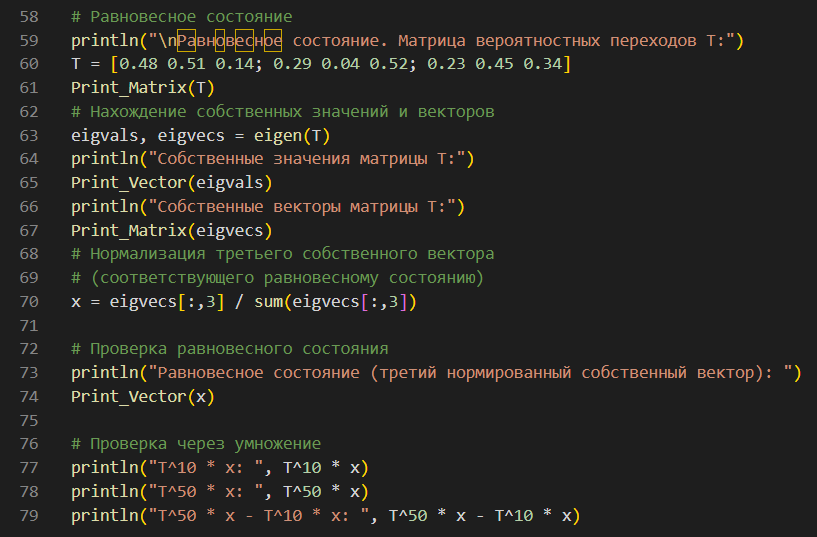
Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A’A на Julia (2/2)



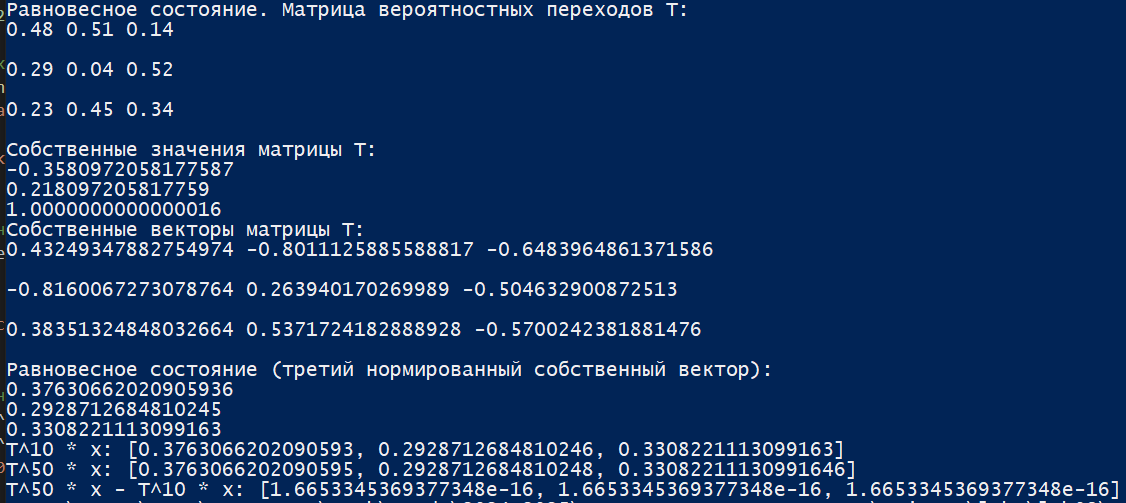
Вектора вероятностей после 5 шагов на Julia (1/2)



Вектора вероятностей после 5 шагов на Julia (2/2)



Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей на Julia (1/2)



Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей на Julia (2/2)

# 4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я изучил возможности вычисления собственных значений и собственных векторов матриц, а также моделирования цепей Маркова на языках программирования Octave и Julia.

# Список литературы

1. Кулябов Д. С. Лабораторная работа №8. Задача на собственные значения [Электронный ресурс]. RUDN, 2024. URL: <https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/2372912/mod_resource/content/2/README.pdf>.