Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе № 2

Название: Алгоритмы умножения матриц

Дисциплина: Анализ алгоритмов

Студент	ИУ7-55Б		Д.О. Склифасовский
	(Группа)	(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)
Преподователь			Л.Л. Волкова
		(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)

Москва, 2020

Оглавление

Введение

Цель работы: изучение алгоритмов умножения матриц. В данной лабораторной работе рассматриваются 3 алгоритма:

1) стандартный алгоритм умножения матриц;
2) алгоритм Винограда;
3) модифицированный алгоритм Винограда.

Также требуется изучить рассчет сложности алгоритмов. В ходе лабораторной работы необходимо:

1) изучить алгоритмы умножения матриц;
2) оптимизировать алгоритм Винограда;
3) дать теоритическую оценку стандартного алгоритма умножения матриц, алгоритма Винограда и модифицированного алгоритма Винограда;
4) реализовать три алгоритма умножения матриц на одном из языков программирования;
5) сравнить алгоритмы умножения матриц.

1 Аналитическая часть

В данном разделе представлено математическое описание алгоритмов умножения матриц.

1.1 Стандартный алгоритм умножения матриц

Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов задает размер матрицы. Хотя исторически рассматривались, например, треугольные матрицы, в настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной формы, так как они являются наиболее удобными и общими. Умножение матриц — одна из основных операций над матрицами. Матрица, получаемая в результате операции умножения, называется произведением матриц. Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размером $[l * m]$ и $[m * n]$. В результате произведения матриц A и B получим матрицу C размером $[l * n]$, в которой:

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \qquad (i = 1, 2, ...l; j = 1, 2, ...n) \tag{1.1}$$

Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором; в этом случае говорят, что матрицы согласованы. В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка.

1.2 Алгоритм Винограда

Если посмотреть на результат умножения двух матриц, то видно, что каждый элемент в нем представляет собой скалярное произведение соответствующих строки и столбца исходных матриц. Можно заметить также, что такое умножение допускает предварительную обработку, позволяющую часть работы выполнить заранее.

Рассмотрим два вектора $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Их скалярное произведение равно:

$$V * W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4 \tag{1.2}$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$V * W = (v_1 + w_2)(v_2 + w_1) + (v_3 + w_4)(v_4 + w_3) - v_1 v_2 - v_3 v_4 - w_1 w_2 - w_3 w_4 \tag{1.3}$$

Менее очевидно, что выражение в правой части последнего равенства допускает предварительную обработку: его части можно вычислить заранее и запомнить для каждой строки первой матрицы и для каждого столбца второй. На практике это означает, что над предварительно обработанными элементами придется выполнять лишь первые два умножения и последующие пять сложений, а также дополнительно два сложения.

1.3 Вывод

Было представлено математическое описание стандартного алгоритма умножения матриц и алгоритма Винограда. Основное отличие - наличие предварительной обработки, а также количество операций умножения.

2 Конструкторская часть

В данном разделе представлены схемы разработанных алгоритмов. Также оценивается трудоемкость алгоритмов.

2.1 Разработка алгоритмов

На рисунке 1 изображена схема стандартного алгоритма умножения матриц.

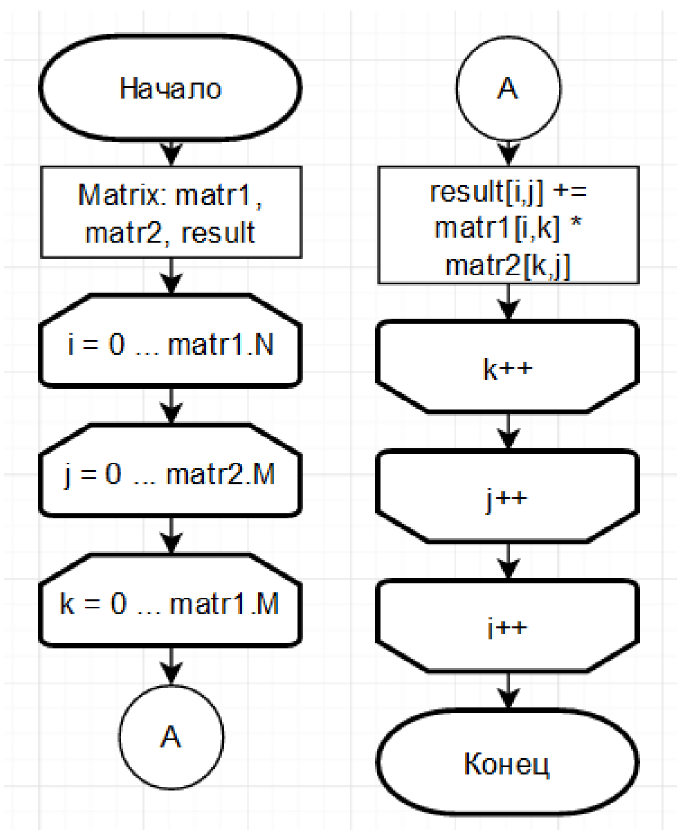

Рисунок 1. Схема стандартного алгоритма умножения матриц

На рисунке 2 изображена схема алгоритма Винограда.

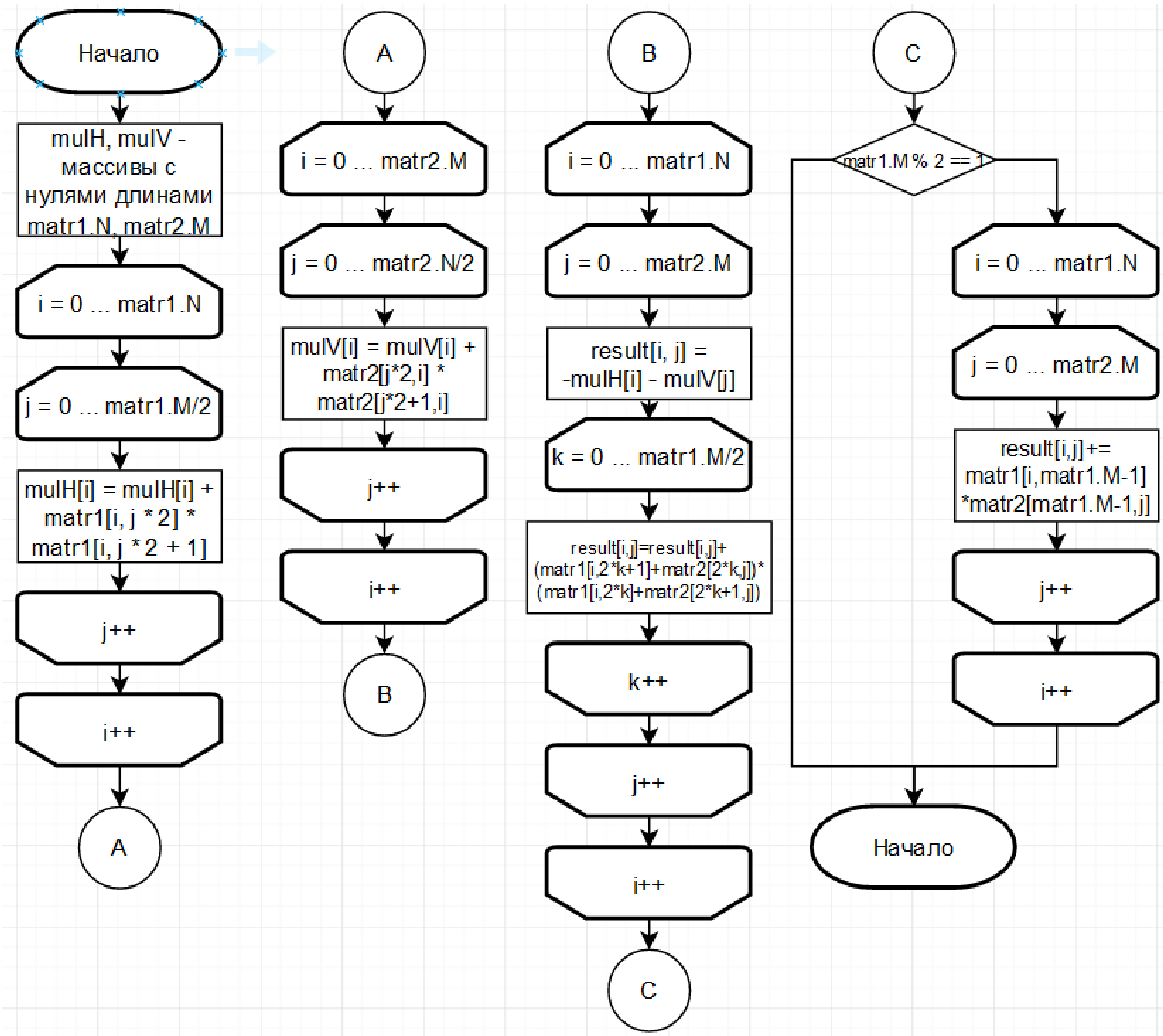

Рисунок 2. Схема алгоритма Винограда

На рисунке 3 изображена схема модифицированного алгоритма Винограда.

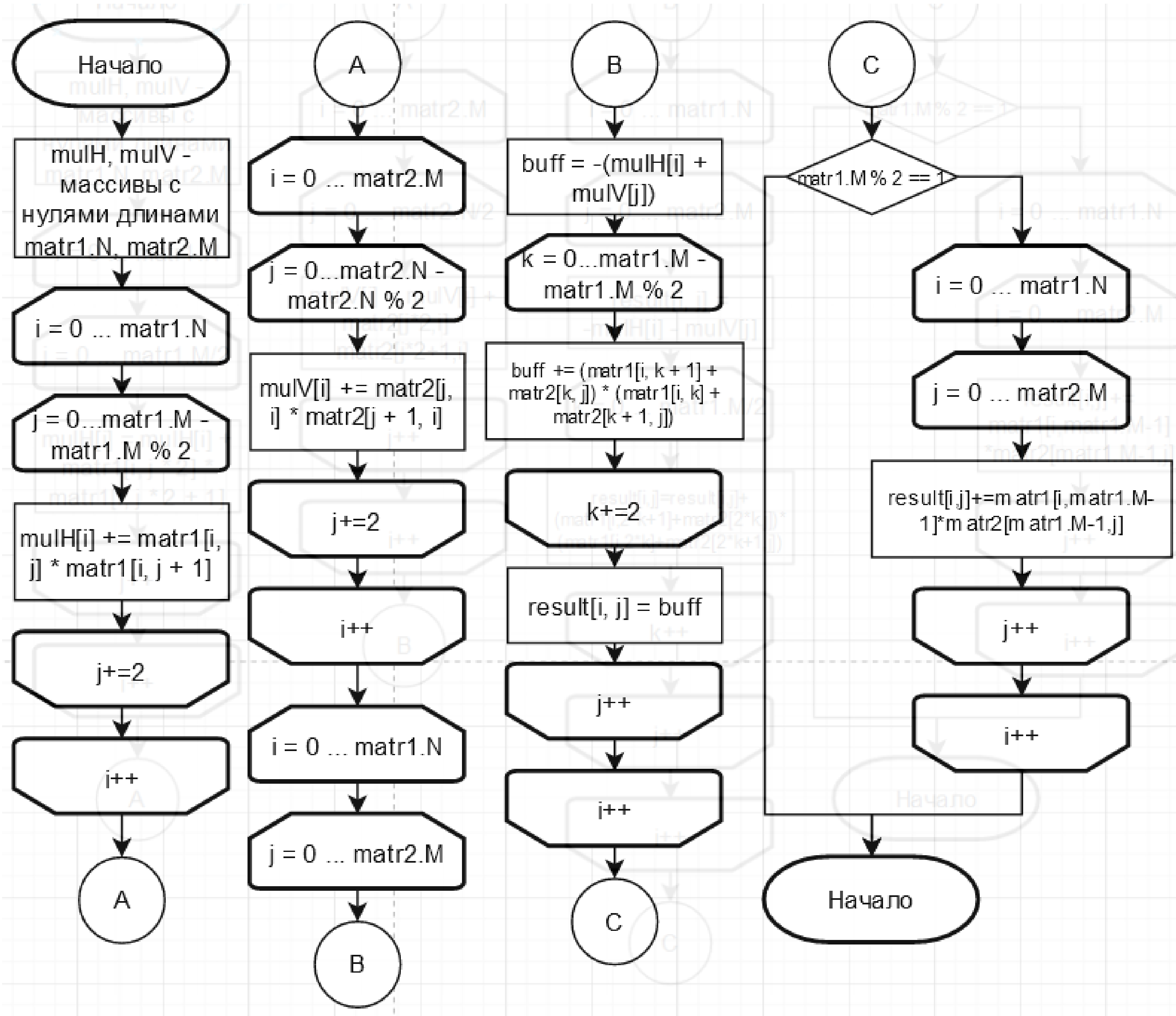

Рисунок 3. Схема модифицированного алгоритма Винограда

2.2 Трудоемкость алгоритмов

Модель трудоемкости для оценки алгоритмов:

1) стоимость базовых операций единица:

   $=, +, *, \simeq, <, >, \geq, \leq, ==, != , [], +=, -=, *=, /=, ++, --;$

2) стоимость цикла:

   $f_{for} = f_{init} + f_{comp} + M(f_{body} + f_{increment} + f_{comp})$

   Пример: $for(i = 0, i < M; i++)/ * body * /$

   Результат: $2 + M(2 + f_{body});$

3) стоимость условного оператора

   Пусть goto (переход к одной из ветвей) стоит 0, тогда

$$f_f = \begin{cases} min(f_A, f_B), & \text{лучший случай} \\ max(f_A, f_B), & \text{худший случай} \end{cases}$$

4) операция обращения к ячейки матрицы [i, j] имеет трудоёмкость равную двум.

литература Виноград: http://www.algolib.narod.ru/Math/Matrix.html