

МГТУ им. Баумана

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИЗУ АЛГОРИТМОВ

Москва, 2020

Оглавление

Лекция 1	2
Введение	2
Примеры анализа	3
Лекция 2	6
Примеры анализа	6
Классификация алгоритмов по типу трудоемкости	7
Лекция 3	9
Математические сведения	9
Метод классов эквивалентности	10
Лекция 4	11
Поиск $max - f_A(n)$	11
Лекция 5	14
Сортировка вставками	14
Сортировка индексами	15

Лекция 1

Введение

1. Оценки качества

- Универсальность
 - Ресурсные
 - * трудоемкость
 - * память
 - ?
- Проблемно-ориентированность

2. Вход

$$D = \{d_i | i = 1, m\}$$

3. Длина входа

$$\mu_Z(D) = n, h = |D|$$

Пример:

$$|D| = 2n^2 + 1$$

$$\mu_Z(D) = n = \sqrt{\frac{|D|-1}{2}}$$

4. Трудоемкость

$f_A(D)$ – число элементарных операций принятой модели вычислений, (выполненных механизмом реализаций по механизму А) заданных алгоритмом А на входе D .

$$z \rightarrow A_1 A_2 \quad f_{A_1}(D) < f_{A_2}(D)$$

5. D_n

$$D_n = \{D \mid \mu_z(D) = n\}$$

Пример:

$$\beta(d_i) = 16$$

$$n = 10$$

$$|D_{10}| = 2^{160}$$

6. Лучший, худший и средний случаи

$$f_A^\vee \equiv^{def} \min_{D \in D_n} f_A(D) \quad - \text{ худший}$$

$$f_A^\wedge \equiv^{def} \max_{D \in D_n} f_A(D) \quad - \text{ лучший}$$

$$\bar{f}_A(n) = \sum_{D \in D_n} P(D) f_A(D) \quad - \text{ средний}$$

$P(D)$ — вероятность входа, $f_A(n)$ — трудоемкость

7. Память

$$V(D) = V_D + V_R + V_{dop} + V_{EXE} + V_{stack}$$

$$V_D = |D|$$

V_{EXE} - часть ASM кода?

$$V_A^\vee, V_A^\wedge(n), \bar{V}_A(n) \rightarrow V_{dop}$$

Примеры анализа

1. Объем

$$a \leftrightarrow b$$

$$\bullet \text{ Swap}(a, b)$$

$$t \leftarrow a$$

$$a \leftarrow b$$

$$b \leftarrow t$$

End

- $Swap2(a, b)$

$$a \leftarrow a + b$$

$$b \leftarrow a - b$$

$$a \leftarrow a - b$$

2. **for**

for $j \leftarrow 1$ to n

$j \leftarrow 1$

code

$j \leftarrow j + 1$

If $j \leq n$, goto code

3. **Sum**

$Sum(A, n; S)$

$s \leftarrow 0$

for $k \leftarrow 1$ to n

$s \leftarrow s + A[k]$

End

$$f_A^\vee(n) = f_A^\wedge(n) = f_A(n) = 1 + 1 + n(3 + 3) = 6n + 2$$

4. **MultMatr**

$MultMatr(A, B, n; C)$

for $i \leftarrow 1$ to n

for $j \leftarrow 1$ to n

$s \leftarrow 0$

for $k \leftarrow 1$ to n

$s \leftarrow s + A[i, k] * B[k, j]$

$C[i, j] \leftarrow s$

End

$$f_A(n) = 1 + n(3 + 1 + n(3 + 1 + 1 + n(3 + 7) + 3)) = 10n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

Лекция 2

Примеры анализа

1. Умножение матриц $\rightarrow f_A(D) = f_A(n)$

2. Возведение в степень $y = x^k$

$Pow(x, k; y)$

! Проверки $x, k | k \geq 1$

$y \leftarrow 1$

for $j \leftarrow 1$ to k

$y \leftarrow y + x$

End

? Вопрос

(a) $\mu_z(D) = 2$

(b) $f_A(D) = f_A(k) = 2 + k^1$

3. Max($A, n; M$)

$M \leftarrow A[1]$

for $j \leftarrow 2$ to n

if $M < A[j]$

then

$M \leftarrow A[j]$

End

Лучший, худший случаи:

$$f_A^\vee(n) =^{Max=a_1} 3 + (n - 1)(3 + 2) = 5n - 2$$

$$f_A^\wedge(n) = 3 + (n - 1)(3 + 2 + 2) = 7n - 4$$

Классификация алгоритмов по типу трудоемкости

1. Класс N

Количественно-зависимые

$$f_A(D) = f_A(\mu_z(D)) = f_A(n)$$

Матрично-векторные операции

2. Класс PR

Параметр-зависимые

$$f_A(D) = f_A(pr_1, pr_2, \dots, pr_k)$$

Стандартные функции по *eps*

3. Класс NPR

Количественно-параметрические алгоритмы

$$f_A(D) = f_A(n, pr_1, \dots)$$

Логическая конструкция

If...

then

...

else

...

4. Декомпозиция $f_A(D)$

$$\ln(x_1 + x_2)$$

(a) **АДДИТИВНО**

$$f_A(n, pr) = f_n(n) + g(pr)$$

$$f_A^\wedge(n) = f_n(n) + g^\wedge(n)$$

$$g^\wedge(n) - \max_{D \in D_n} (g(pr))$$

(b) **МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ**

$$f_A(D) = f_n(n) * g(pr)$$

5. **↯ (П.Д.Раймон)**

$$a < b \quad f(.) \prec g(.) \quad f(x)$$

$$f \prec g \equiv^{def} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0$$

$$f \asymp g \equiv^{def} \lim \dots = C \neq 0$$

6. **ПОДКЛАССЫ В NPR**

(a) *NPRL(Low)*

$$g^\wedge(n) \prec f_n(n)$$

$$f_n(n) = 17n^4 + \dots$$

(b) *NPRE(Eq...)*

$$g^\wedge(n) \asymp f_n(n)$$

(c) *NPRH(H...)*

$$g^\wedge \prec f_n(N)$$

Лекция 3

Математические сведения

1. Принцип Дирихле

P.D.L.Dirichle

$$A, B : |A| > |B|, f : FA \rightarrow B \Rightarrow f^{-1} \notin F$$

2. Отношение

$$A : R \subseteq AxA$$

Если

(a) $(a, a) \in R$ - рефлексивно

(b) $(a_1, a_2) \in R \Rightarrow (a_2, a_1) \in R$ - симметрично

(c) $(a_1, a_2) \in R$ и $(a_2, a_3) \in R \Rightarrow (a_1, a_3) \in R$ - транзитивно

$a + b + c \rightarrow R$, отношение эквивалентно.

3. Теория вероятностей

$$M_0 = \langle \Omega, p(\cdot), \sigma_\Omega \rangle$$

$$p(\emptyset) = 0, p(\Omega) = 1$$

Случайная величина $X : \Omega_0 \rightarrow R^1$

$$r = X(\omega)$$

$$P(X(\omega) = r^x) = \sum_{\omega: X(\omega)=r^x} P(\omega)$$

Математическое ожидание: $E(x) \equiv^{def} \sum_{i=1}^M x_i * P(X = x_i)$

Метод классов эквивалентности

1. Идея

NPR, PR

$$\Rightarrow M_0 = \langle \Omega_0 = D_n, P(.) : P(d) = \frac{1}{|D_n|} \rangle$$

Алгоритм $A \rightarrow f_A(D)$ - число

$$f_A(.) : D_n \rightarrow_{f_A(.)} N$$

Лекция 4

Поиск max - $\bar{f}_A(n)$

1. Декомпозиция f_A

$Max(A, n; M)$

$M \leftarrow A[1]$

for $j \leftarrow 2$ to n

 If $M < A[j]$

 then

$M \leftarrow A[j]$

End

!Класс NPR $f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g(D)$

$f_n(n) = 1 + (n - 1)(3 + 2) = 5n - 4$

$g(D) = 2Y_n$ (Y_n - сл вел = числу присв Max)

$Y_n \in [1, n] \Rightarrow \bar{f}_A(n) = E(f_n(n) + 2Y_n) = f_n(n) + 2E(Y_n)$

2. Применение метода классов

$n = n_0 \rightarrow$ экстраполяция на произвольную n

$n_0 = 4$

$D \in D_4 \rightarrow "1"(min), "2"(min_2), "3"(max_2), "4"(max)$

$D_1234, \dots, D_2431, \dots, D_4321\} = 24$

$4xxx\}G \Rightarrow Y_4 = 1$

$$3xxx\}G \Rightarrow Y_4 = 2$$

$$2134 \rightarrow 3 \quad 1234 \rightarrow 4$$

$$2143 \rightarrow 2 \quad 1243 \rightarrow 3$$

$$2314 \rightarrow 3 \quad 1324 \rightarrow 3$$

$$2341 \rightarrow 3 \quad 1342 \rightarrow 3$$

$$2413 \rightarrow 2 \quad 1423 \rightarrow 2$$

$$2431 \rightarrow 2 \quad 1432 \rightarrow 2$$

$$P(Y_4 = 1) = \frac{6}{24}$$

$$P(Y_4 = 2) = \frac{11}{24}$$

$$P(Y_4 = 3) = \frac{6}{24}$$

$$P(Y_n = 4) = \frac{1}{24}$$

$$E(Y_n) = 1\frac{6}{24} + 2\frac{11}{24} + 3\frac{6}{24} + 4\frac{1}{24}$$

Р.грэхем

$$x^{\bar{k}} = h_k(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)$$

$$x^{\bar{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = 1x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

$$h_4(1) = 4! = 24$$

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n k \frac{S_n^{(k)}}{n!}$$

3. Метод математических ожиданий

Т.В. Теорема

Если $Y = \sum_{i=1}^M x_i$ и $E(x_i)$ - существует, то

$$E(Y) = E(\sum x_i) = \sum(E(x_i))$$

Из любого сходящегося ряда можно сделать распределение

$$!\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(z) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$P(x = k) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$$

$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum \frac{1}{k^2}$$

! $x_j \rightarrow$ число переприсваиваний на j -ом шаге

$$X_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$Y_n = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$j = 1 = \begin{cases} x_1 = 0, & P(.) = 0 \\ x_1 = 1, & P() = 1 \end{cases}$$

$$E(x_k) = 0(1 - \frac{1}{k}) + 1\frac{1}{k_n} = \frac{1}{k}$$

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n E(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \approx \ln n + \gamma$$

$$\bar{f}_{A_{max}} = 5n - 4 + 2 \ln n + 2\gamma$$

Лекция 5

Сортировка вставками

1. Идея

Ключ key и сдвигается до нужного

2. Текст

$SortIns(A, n)$

$A[0] \leftarrow MinType$

for $i \leftarrow 2$ to n

$key \leftarrow A[i]$

$j \leftarrow i - 1$

 while($A[j] > k$)

$A[j + 1] \leftarrow A[j]$

$j \leftarrow j - 1$

$A[j + 1] \leftarrow key$

End

3. Анализ $\bar{f}_A(n)$ (класс NPR)

$$f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g_{Pr}(D) = f_n(n) + 8Y_n$$

Y_n - общее число проходов while

$$f_n(n) = 2 + 1 + (n - 1)(3 + 4 + 2 + 3) = 12n - 9$$

$$Y_n \in [0, ?]$$

4. $\bar{f}_A(n)$

$$\bar{f}_A(n) = E(f_A(D \in D_n)) = E(f_n(n) + 8Y_n) = f_n(n) + 8E(Y_n)$$

$$?E(Y_n) = \sum_{k=0}^? kP(Y_n = k) \text{ (не подходит)}$$

Метод матожиданий $\rightarrow Y_n = \sum_{i=2}^n X_i$, где X_i - число проходов при $i = i_{for}$

$$E(X_i) \rightarrow - \circ - \circ - \circ \dots \circ - \big|_0^i$$

$$(- \circ - \circ - \circ - \circ \big|_0^{i=4})$$

$$X_i = (i - 1)$$

$$X_i \in [0, i - 1] \quad P(X_i = k) = \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow E(X_i) = \sum_{k=0}^{i-1} k \frac{1}{i} = \frac{1}{i} (0 + 1 + 2 + \dots + (i - 2) + (i - 1)) = \frac{i-1}{2}$$

$$E(Y_n) = E(\sum X_i) = \sum_{i=2}^n (E(X_i)) = \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (n(n+1)/2 - 1) = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}$$

$$\bar{f}_A(n) = 12n - 9 + 8(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}) = 2n^2 + 10n - 9$$

Сортировка индексами

1. Дано

$$(a) \quad A \rightarrow a_i \in N$$

$$(b) \quad a_i \neq a_j, i \neq j$$

2. Идея

$$B[1..Max(a_i)]$$

$$A = [7, 11, 3, 5], B = [0, 0, 1, -, 1, -, 1, -, -, -, 1]$$

$$!B[A[i]] \leftarrow 1$$

Используем элемент массива A как элемент массива B

Цикл по n

3. Сборка без if

$$k \leftarrow 1$$

for $j \leftarrow 1$ to Max

$$A[k] \leftarrow j$$

$$k \leftarrow k + B[j]$$

End

Сборка без if - отвратительная

Модификации

Уберем (b) $\rightarrow \leftarrow 1 \Rightarrow +1$

(a) $N \rightarrow Z$

4. Текст

$Sort(A, n, B, min, max)$

$L \leftarrow Max - Min + 1$

for $j \leftarrow 1 to L$

$B[j] \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1 to n$

$k \leftarrow A[i] - Min + 1$

$B[k] \leftarrow B[k] + 1$

$k \leftarrow 1$

for $j \leftarrow 1 to L$

If $B[j] \neq 0$

then

$m \leftarrow B[j]$

for $s \leftarrow 1 to m$

$A[k] \leftarrow j + Min - 1$

$k \leftarrow k + 1$

End

End

End.

Анализ при $m = 1 \Rightarrow f^{\wedge}$

$$f_A(n, L) = 5L + 11n + 5L + n(3 + 3 + 6) + C = 10L + 23n + C$$

5. Сравнение $f_{A_1}^-(n) = 2n^2 + 10n$

$$f_{A_2}(n, L) = 10L + 23n$$

$$L = \frac{2n^2 - 13n}{10} = \frac{1}{5}n^2 - 1, 3n$$