

МГТУ им. Баумана

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИЗУ АЛГОРИТМОВ

Москва, 2020

Оглавление

Лекция 1	2
Введение	2
Примеры анализа	3
Лекция 2	6
Примеры анализа	6
Классификация алгоритмов по типу трудоемкости	7
Лекция 2	9
Математические сведения	9
Метод классов эквивалентности	10

Лекция 1

Введение

1. Оценки качества

- Универсальность
 - Ресурсные
 - * трудоемкость
 - * память
 - ?
- Проблемно-ориентированность

2. Вход

$$D = \{d_i | i = 1, m\}$$

3. Длина входа

$$\mu_Z(D) = n, h = |D|$$

Пример:

$$|D| = 2n^2 + 1$$

$$\mu_Z(D) = n = \sqrt{\frac{|D|-1}{2}}$$

4. Трудоемкость

$f_A(D)$ – число элементарных операций принятой модели вычислений, (выполненных механизмом реализаций по механизму А) заданных алгоритмом А на входе D .

$$z \rightarrow A_1 A_2 \quad f_{A_1}(D) < f_{A_2}(D)$$

5. D_n

$$D_n = \{D \mid \mu_z(D) = n\}$$

Пример:

$$\beta(d_i) = 16$$

$$n = 10$$

$$|D_{10}| = 2^{160}$$

6. Лучший, худший и средний случаи

$$f_A^\vee \equiv^{def} \min_{D \in D_n} f_A(D) \quad - \text{ худший}$$

$$f_A^\wedge \equiv^{def} \max_{D \in D_n} f_A(D) \quad - \text{ лучший}$$

$$\bar{f}_A(n) = \sum_{D \in D_n} P(D) f_A(n) \quad - \text{ средний}$$

$P(D)$ — вероятность входа, $f_A(n)$ — трудоемкость

7. Память

$$V(D) = V_D + V_R + V_{dop} + V_{EXE} + V_{stack}$$

$$V_D = |D|$$

V_{EXE} - часть ASM кода?

$$V_A^\vee, V_A^\wedge(n), \bar{V}_A(n) \rightarrow V_{dop}$$

Примеры анализа

1. Объем

$$a \leftrightarrow b$$

$$\bullet \text{ Swap}(a, b)$$

$$t \leftarrow a$$

$$a \leftarrow b$$

$$b \leftarrow t$$

End

• $Swap2(a, b)$

$a \leftarrow a + b$

$b \leftarrow a - b$

$a \leftarrow a - b$

2. **for**

for $j \leftarrow 1$ to n

$j \leftarrow 1$

code

$j \leftarrow j + 1$

If $j \leq n$, goto code

3. **Sum**

$Sum(A, n; S)$

$s \leftarrow 0$

for $k \leftarrow 1$ to n

$s \leftarrow s + A[k]$

End

$$f_A^\vee(n) = f_A^\wedge(n) = f_A(n) = 1 + 1 + n(3 + 3) = 6n + 2$$

4. **MultMatr**

$MultMatr(A, B, n; C)$

for $i \leftarrow 1$ to n

for $j \leftarrow 1$ to n

$s \leftarrow 0$

for $k \leftarrow 1$ to n

$s \leftarrow s + A[i, k] * B[k, j]$

$C[i, j] \leftarrow s$

End

$$f_A(n) = 1 + n(3 + 1 + n(3 + 1 + 1 + n(3 + 7) + 3)) = 10n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

Лекция 2

Примеры анализа

1. Умножение матриц $\rightarrow f_A(D) = f_A(n)$

2. Возведение в степень $y = x^k$

$Pow(x, k; y)$

! Проверки $x, k | k \geq 1$

$y \leftarrow 1$

for $j \leftarrow 1$ to k

$y \leftarrow y + x$

End

? Вопрос

(a) $\mu_z(D) = 2$

(b) $f_A(D) = f_A(k) = 2 + k^1$

3. Max($A, n; M$)

$M \leftarrow A[1]$

for $j \leftarrow 2$ to n

if $M < A[j]$

then

$M \leftarrow A[j]$

End

Лучший, худший случаи:

$$f_A^\vee(n) =^{Max=a_1} 3 + (n - 1)(3 + 2) = 5n - 2$$

$$f_A^\wedge(n) = 3 + (n - 1)(3 + 2 + 2) = 7n - 4$$

Классификация алгоритмов по типу трудоемкости

1. Класс N

Количественно-зависимые

$$f_A(D) = f_A(\mu_z(D)) = f_A(n)$$

Матрично-векторные операции

2. Класс PR

Параметр-зависимые

$$f_A(D) = f_A(pr_1, pr_2, \dots, pr_k)$$

Стандартные функции по *eps*

3. Класс NPR

Количественно-параметрические алгоритмы

$$f_A(D) = f_A(n, pr_1, \dots)$$

Логическая конструкция

If...

then

...

else

...

4. Декомпозиция $f_A(D)$

$$\ln(x_1 + x_2)$$

(a) **АДДИТИВНО**

$$f_A(n, pr) = f_n(n) + g(pr)$$

$$f_A^\wedge(n) = f_n(n) + g^\wedge(n)$$

$$g^\wedge(n) - \max_{D \in D_n}(g(pr))$$

(b) **МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ**

$$f_A(D) = f_n(n) * g(pr)$$

5. **↯ (П.Д.Раймон)**

$$a < b \quad f(.) \prec g(.) \quad f(x)$$

$$f \prec g \equiv^{def} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0$$

$$f \asymp g \equiv^{def} \lim \dots = C \neq 0$$

6. **ПОДКЛАССЫ В NPR**

(a) *NPRL(Low)*

$$g^\wedge(n) \prec f_n(n)$$

$$f_n(n) = 17n^4 + \dots$$

(b) *NPRE(Eq...)*

$$g^\wedge(n) \asymp f_n(n)$$

(c) *NPRH(H...)*

$$g^\wedge \prec f_n(N)$$

Лекция 3

Математические сведения

1. Принцип Дирихле

P.D.L.Dirichle

$$A, B : |A| > |B|, f : FA \rightarrow B \Rightarrow f^{-1} \notin F$$

2. Отношение

$$A : R \subseteq AxA$$

Если

(a) $(a, a) \in R$ - рефлексивно

(b) $(a_1, a_2) \in R \Rightarrow (a_2, a_1) \in R$ - симметрично

(c) $(a_1, a_2) \in R$ и $(a_2, a_3) \in R \Rightarrow (a_1, a_3) \in R$ - транзитивно

$a + b + c \rightarrow R$, отношение эквивалентно.

3. Теория вероятностей

$$M_0 = \langle \Omega, p(\cdot), \sigma_\Omega \rangle$$

$$p(\emptyset) = 0, p(\Omega) = 1$$

Случайная величина $X : \Omega_0 \rightarrow R^1$

$$r = X(\omega)$$

$$P(X(\omega) = r^x) = \sum_{\omega: X(\omega)=r^x} P(\omega)$$

Математическое ожидание: $E(x) \equiv^{def} \sum_{i=1}^M x_i * P(X = x_i)$

Метод классов эквивалентности

1. Идея

NPR, PR

$$\Rightarrow M_0 = \langle \Omega_0 = D_n, P(.) : P(d) = \frac{1}{|D_n|} \rangle$$

Алгоритм $A \rightarrow f_A(D)$ - число

$$f_A(.) : D_n \rightarrow_{f_A(.)} N$$