

МГТУ им. Баумана

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИЗУ АЛГОРИТМОВ

*Москва, 2020*

# Оглавление

<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
Введение . . . . .	2
Примеры анализа . . . . .	3
<b>Лекция 2</b>	<b>6</b>
Примеры анализа . . . . .	6
Классификация алгоритмов по типу трудоемкости . . . . .	7
<b>Лекция 3</b>	<b>9</b>
Математические сведения . . . . .	9
Метод классов эквивалентности . . . . .	10
<b>Лекция 4</b>	<b>11</b>
Поиск $max - f_A(n)$ . . . . .	11
<b>Лекция 5</b>	<b>14</b>
Сортировка вставками . . . . .	14
Сортировка индексами . . . . .	15

# Лекция 1

## Введение

### 1. Оценки качества

- Универсальность
  - Ресурсные
    - \* трудоемкость
    - \* память
  - ?
- Проблемно-ориентированность

### 2. Вход

$$D = \{d_i | i = 1, m\}$$

### 3. Длина входа

$$\mu_Z(D) = n, h = |D|$$

Пример:

$$|D| = 2n^2 + 1$$

$$\mu_Z(D) = n = \sqrt{\frac{|D|-1}{2}}$$

### 4. Трудоемкость

$f_A(D)$  – число элементарных операций принятой модели вычислений, (выполненных механизмом реализаций по механизму А) заданных алгоритмом А на входе  $D$ .

$$z \rightarrow A_1 A_2 \quad f_{A_1}(D) < f_{A_2}(D)$$

## 5. $D_n$

$$D_n = \{D \mid \mu_z(D) = n\}$$

Пример:

$$\beta(d_i) = 16$$

$$n = 10$$

$$|D_{10}| = 2^{160}$$

## 6. Лучший, худший и средний случаи

$$f_A^\vee \equiv^{def} \min_{D \in D_n} f_A(D) \quad - \text{ худший}$$

$$f_A^\wedge \equiv^{def} \max_{D \in D_n} f_A(D) \quad - \text{ лучший}$$

$$\bar{f}_A(n) = \sum_{D \in D_n} P(D) f_A(n) \quad - \text{ средний}$$

$P(D)$  — вероятность входа,  $f_A(n)$  — трудоемкость

## 7. Память

$$V(D) = V_D + V_R + V_{dop} + V_{EXE} + V_{stack}$$

$$V_D = |D|$$

$V_{EXE}$  - часть ASM кода?

$$V_A^\vee, V_A^\wedge(n), \bar{V}_A(n) \rightarrow V_{dop}$$

# Примеры анализа

## 1. Объем

$$a \leftrightarrow b$$

$$\bullet \text{ Swap}(a, b)$$

$$t \leftarrow a$$

$$a \leftarrow b$$

$$b \leftarrow t$$

*End*

•  $Swap2(a, b)$

$a \leftarrow a + b$

$b \leftarrow a - b$

$a \leftarrow a - b$

## 2. **for**

for  $j \leftarrow 1$  to  $n$

$j \leftarrow 1$

code

$j \leftarrow j + 1$

If  $j \leq n$ , goto code

## 3. **Sum**

$Sum(A, n; S)$

$s \leftarrow 0$

for  $k \leftarrow 1$  to  $n$

$s \leftarrow s + A[k]$

*End*

$$f_A^\vee(n) = f_A^\wedge(n) = f_A(n) = 1 + 1 + n(3 + 3) = 6n + 2$$

## 4. **MultMatr**

$MultMatr(A, B, n; C)$

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$

for  $j \leftarrow 1$  to  $n$

$s \leftarrow 0$

for  $k \leftarrow 1$  to  $n$

$s \leftarrow s + A[i, k] * B[k, j]$

$C[i, j] \leftarrow s$

*End*

$$f_A(n) = 1 + n(3 + 1 + n(3 + 1 + 1 + n(3 + 7) + 3)) = 10n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

# Лекция 2

## Примеры анализа

1. Умножение матриц  $\rightarrow f_A(D) = f_A(n)$

2. Возведение в степень  $y = x^k$

$Pow(x, k; y)$

! Проверки  $x, k | k \geq 1$

$y \leftarrow 1$

for  $j \leftarrow 1$  to  $k$

$y \leftarrow y + x$

*End*

? Вопрос

(a)  $\mu_z(D) = 2$

(b)  $f_A(D) = f_A(k) = 2 + k^1$

3. Max( $A, n; M$ )

$M \leftarrow A[1]$

for  $j \leftarrow 2$  to  $n$

if  $M < A[j]$

then

$M \leftarrow A[j]$

*End*

Лучший, худший случаи:

$$f_A^\vee(n) =^{Max=a_1} 3 + (n - 1)(3 + 2) = 5n - 2$$

$$f_A^\wedge(n) = 3 + (n - 1)(3 + 2 + 2) = 7n - 4$$

## **Классификация алгоритмов по типу трудоемкости**

### **1. Класс $N$**

Количественно-зависимые

$$f_A(D) = f_A(\mu_z(D)) = f_A(n)$$

Матрично-векторные операции

### **2. Класс $PR$**

Параметр-зависимые

$$f_A(D) = f_A(pr_1, pr_2, \dots, pr_k)$$

Стандартные функции по *eps*

### **3. Класс $NPR$**

Количественно-параметрические алгоритмы

$$f_A(D) = f_A(n, pr_1, \dots)$$

Логическая конструкция

*If...*

*then*

...

*else*

...

### **4. Декомпозиция $f_A(D)$**

$$\ln(x_1 + x_2)$$



(a) **АДДИТИВНО**

$$f_A(n, pr) = f_n(n) + g(pr)$$

$$f_A^\wedge(n) = f_n(n) + g^\wedge(n)$$

$$g^\wedge(n) - \max_{D \in D_n} (g(pr))$$

(b) **МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ**

$$f_A(D) = f_n(n) * g(pr)$$

5. **↯ (П.Д.Раймон)**

$$a < b \quad f(.) \prec g(.) \quad f(x)$$

$$f \prec g \equiv^{def} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0$$

$$f \asymp g \equiv^{def} \lim \dots = C \neq 0$$

6. **ПОДКЛАССЫ В NPR**

(a) *NPRL(Low)*

$$g^\wedge(n) \prec f_n(n)$$

$$f_n(n) = 17n^4 + \dots$$

(b) *NPRE(Eq...)*

$$g^\wedge(n) \asymp f_n(n)$$

(c) *NPRH(H...)*

$$g^\wedge \prec f_n(N)$$

# Лекция 3

## Математические сведения

### 1. Принцип Дирихле

P.D.L.Dirichle

$$A, B : |A| > |B|, f : FA \rightarrow B \Rightarrow f^{-1} \notin F$$

### 2. Отношение

$$A : R \subseteq AxA$$

Если

(a)  $(a, a) \in R$  - рефлексивно

(b)  $(a_1, a_2) \in R \Rightarrow (a_2, a_1) \in R$  - симметрично

(c)  $(a_1, a_2) \in R$  и  $(a_2, a_3) \in R \Rightarrow (a_1, a_3) \in R$  - транзитивно

$a + b + c \rightarrow R$ , отношение эквивалентно.

### 3. Теория вероятностей

$$M_0 = \langle \Omega, p(\cdot), \sigma_\Omega \rangle$$

$$p(\emptyset) = 0, p(\Omega) = 1$$

Случайная величина  $X : \Omega_0 \rightarrow R^1$

$$r = X(\omega)$$

$$P(X(\omega) = r^x) = \sum_{\omega: X(\omega)=r^x} P(\omega)$$

Математическое ожидание:  $E(x) \equiv^{def} \sum_{i=1}^M x_i * P(X = x_i)$

# Метод классов эквивалентности

## 1. Идея

$NPR, PR$

$$\Rightarrow M_0 = \langle \Omega_0 = D_n, P(.) : P(d) = \frac{1}{|D_n|} \rangle$$

Алгоритм  $A \rightarrow f_A(D)$  - число

$$f_A(.) : D_n \rightarrow_{f_A(.)} N$$

# Лекция 4

## Поиск $max$ - $\bar{f}_A(n)$

### 1. Декомпозиция $f_A$

$Max(A, n; M)$

$M \leftarrow A[1]$

for  $j \leftarrow 2$  to  $n$

    If  $M < A[j]$

    then

$M \leftarrow A[j]$

End

!Класс NPR  $f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g(D)$

$f_n(n) = 1 + (n - 1)(3 + 2) = 5n - 4$

$g(D) = 2Y_n$  ( $Y_n$  - сл вел = числу присв Max)

$Y_n \in [1, n] \Rightarrow \bar{f}_A(n) = E(f_n(n) + 2Y_n) = f_n(n) + 2E(Y_n)$

### 2. Применение метода классов

$n = n_0 \rightarrow$  экстраполяция на произвольную  $n$

$n_0 = 4$

$D \in D_4 \rightarrow "1"(min), "2"(min_2), "3"(max_2), "4"(max)$

$D_1234, \dots, D_2431, \dots, D_4321\} = 24$

$4xxx\}G \Rightarrow Y_4 = 1$

$$3xxx\}G \Rightarrow Y_4 = 2$$

$$2134 \rightarrow 3 \quad 1234 \rightarrow 4$$

$$2143 \rightarrow 2 \quad 1243 \rightarrow 3$$

$$2314 \rightarrow 3 \quad 1324 \rightarrow 3$$

$$2341 \rightarrow 3 \quad 1342 \rightarrow 3$$

$$2413 \rightarrow 2 \quad 1423 \rightarrow 2$$

$$2431 \rightarrow 2 \quad 1432 \rightarrow 2$$

$$P(Y_4 = 1) = \frac{6}{24}$$

$$P(Y_4 = 2) = \frac{11}{24}$$

$$P(Y_4 = 3) = \frac{6}{24}$$

$$P(Y_n = 4) = \frac{1}{24}$$

$$E(Y_n) = 1\frac{6}{24} + 2\frac{11}{24} + 3\frac{6}{24} + 4\frac{1}{24}$$

Р.грэхем

$$x^{\bar{k}} = h_k(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)$$

$$x^{\bar{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = 1x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

$$h_4(1) = 4! = 24$$

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n k \frac{S_n^{(k)}}{n!}$$

### 3. Метод математических ожиданий

Т.В. Теорема

Если  $Y = \sum_{i=1}^M x_i$  и  $E(x_i)$  - существует, то

$$E(Y) = E(\sum x_i) = \sum(E(x_i))$$

Из любого сходящегося ряда можно сделать распределение

$$!\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(z) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$P(x = k) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$$

$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum \frac{1}{k^2}$$

!  $x_j \rightarrow$  число переприсваиваний на  $j$ -ом шаге

$$X_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$Y_n = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$j=1 = \begin{cases} x_1 = 0, & P(.) = 0 \\ x_1 = 1, & P() = 1 \end{cases}$$

$$E(x_k) = 0(1 - \frac{1}{k}) + 1\frac{1}{k_n} = \frac{1}{k}$$

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n E(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \approx \ln n + \gamma$$

$$\bar{f}_{A_{max}} = 5n - 4 + 2 \ln n + 2\gamma$$

# Лекция 5

## Сортировка вставками

### 1. Идея

Ключ  $key$  и сдвигается до нужного

### 2. Текст

$SortIns(A, n)$

$A[0] \leftarrow MinType$

for  $i \leftarrow 2$  to  $n$

$key \leftarrow A[i]$

$j \leftarrow i - 1$

    while( $A[j] > k$ )

$A[j + 1] \leftarrow A[j]$

$j \leftarrow j - 1$

$A[j + 1] \leftarrow key$

End

### 3. Анализ $\bar{f}_A(n)$ (класс NPR)

$$f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g_{Pr}(D) = f_n(n) + 8Y_n$$

$Y_n$  - общее число проходов while

$$f_n(n) = 2 + 1 + (n - 1)(3 + 4 + 2 + 3) = 12n - 9$$

$$Y_n \in [0, ?]$$

4.  $\bar{f}_A(n)$

$$\bar{f}_A(n) = E(f_A(D \in D_n)) = E(f_n(n) + 8Y_n) = f_n(n) + 8E(Y_n)$$

$$?E(Y_n) = \sum_{k=0}^? kP(Y_n = k) \text{ (не подходит)}$$

Метод матожиданий  $\rightarrow Y_n = \sum_{i=2}^n X_i$ , где  $X_i$  - число проходов при  $i = i_{for}$

$$E(X_i) \rightarrow - \circ - \circ - \circ \dots \circ - \big|_0^i$$

$$(- \circ - \circ - \circ - \circ \big|_0^{i=4})$$

$$X_i = (i - 1)$$

$$X_i \in [0, i - 1] \quad P(X_i = k) = \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow E(X_i) = \sum_{k=0}^{i-1} k \frac{1}{i} = \frac{1}{i} (0 + 1 + 2 + \dots + (i - 2) + (i - 1)) = \frac{i-1}{2}$$

$$E(Y_n) = E(\sum X_i) = \sum_{i=2}^n (E(X_i)) = \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (n(n+1)/2 - 1) = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}$$

$$\bar{f}_A(n) = 12n - 9 + 8(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}) = 2n^2 + 10n - 9$$

## Сортировка индексами

1. Дано

$$(a) \quad A \rightarrow a_i \in N$$

$$(b) \quad a_i \neq a_j, i \neq j$$

2. Идея

$$B[1..Max(a_i)]$$

$$A = [7, 11, 3, 5], B = [0, 0, 1, -, 1, -, 1, -, -, -, 1]$$

$$!B[A[i]] \leftarrow 1$$

Используем элемент массива  $A$  как элемент массива  $B$

Цикл по  $n$

3. Сборка без if

$$k \leftarrow 1$$

for  $j \leftarrow 1$  to  $Max$

$$A[k] \leftarrow j$$

$$k \leftarrow k + B[j]$$

End

Сборка без if - отвратительная



### Модификации

Уберем (b)  $\rightarrow \leftarrow 1 \Rightarrow +1$

(a)  $N \rightarrow Z$

#### 4. Текст (с if)

$Sort(A, n, B, min, max)$

$L \leftarrow Max - Min + 1$

for  $j \leftarrow 1 to L$

$B[j] \leftarrow 0$

for  $i \leftarrow 1 to n$

$k \leftarrow A[i] - Min + 1$

$B[k] \leftarrow B[k] + 1$

$k \leftarrow 1$

for  $j \leftarrow 1 to L$

If  $B[j] \neq 0$

then

$m \leftarrow B[j]$

for  $s \leftarrow 1 to m$

$A[k] \leftarrow j + Min - 1$

$k \leftarrow k + 1$

End

End

End.

Анализ при  $m = 1 \Rightarrow f^{\wedge}$

$$f_A(n, L) = 5L + 11n + 5L + n(3 + 3 + 6) + C = 10L + 23n + C$$

#### 5. Сравнение $f_{A_1}^-(n) = 2n^2 + 10n$

$$f_{A_2}(n, L) = 10L + 23n$$

$$L = \frac{2n^2 - 13n}{10} = \frac{1}{5}n^2 - 1, 3n$$