Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе № 2

Название: Алгоритмы умножения матриц

Дисциплина: Анализ алгоритмов

Студент ИУ7-55Б ______ Д.О. Склифасовский
(Группа) (Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподователь ______ Л.Л. Волкова
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Москва, 2020

Оглавление

Введение

Цель работы: изучение алгоритмов умножения матриц. В данной лабораторной работе рассматриваются 3 алгоритма:

1) стандартный алгоритм умножения матриц;
2) алгоритм Винограда;
3) модифицированный алгоритм Винограда.

Также требуется изучить рассчет сложности алгоритмов. В ходе лабораторной работы необходимо:

1) изучить алгоритмы умножения матриц;
2) оптимизировать алгоритм Винограда;
3) дать теоритическую оценку стандартного алгоритма умножения матриц, алгоритма Винограда и модифицированного алгоритма Винограда;
4) реализовать три алгоритма умножения матриц на одном из языков программирования;
5) сравнить алгоритмы умножения матриц.

1 Аналитическая часть

В данном разделе представлено математическое описание алгоритмов умножения матриц.

1.1 Стандартный алгоритм умножения матриц

Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов задает размер матрицы. Хотя исторически рассматривались, например, треугольные матрицы, в настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной формы, так как они являются наиболее удобными и общими. Умножение матриц — одна из основных операций над матрицами. Матрица, получаемая в результате операции умножения, называется произведением матриц. Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размером $[l * m]$ и $[m * n]$. В результате произведения матриц A и B получим матрицу C размером $[l * n]$, в которой:

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \qquad (i = 1, 2, ...l; j = 1, 2, ...n) \tag{1.1}$$

Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором; в этом случае говорят, что матрицы согласованы. В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка.

1.2 Алгоритм Винограда

Если посмотреть на результат умножения двух матриц, то видно, что каждый элемент в нем представляет собой скалярное произведение соответствующих строки и столбца исходных матриц. Можно заметить также, что такое умножение допускает предварительную обработку, позволяющую часть работы выполнить заранее.

Рассмотрим два вектора $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Их скалярное произведение равно:

$$V * W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4 \tag{1.2}$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$V * W = (v_1 + w_2)(v_2 + w_1) + (v_3 + w_4)(v_4 + w_3) - v_1 v_2 - v_3 v_4 - w_1 w_2 - w_3 w_4 \tag{1.3}$$

Менее очевидно, что выражение в правой части последнего равенства допускает предварительную обработку: его части можно вычислить заранее и запомнить для каждой строки первой матрицы и для каждого столбца второй. На практике это означает, что над предварительно обработанными элементами придется выполнять лишь первые два умножения и последующие пять сложений, а также дополнительно два сложения.

1.3 Вывод

Было представлено математическое описание стандартного алгоритма умножения матриц и алгоритма Винограда. Основное отличие - наличие предварительной обработки, а также количество операций умножения.

2 Конструкторская часть

В данном разделе представлены схемы разработанных алгоритмов. Также оценивается трудоемкость алгоритмов.

2.1 Разработка алгоритмов

На рисунке 1 изображена схема стандартного алгоритма умножения матриц.

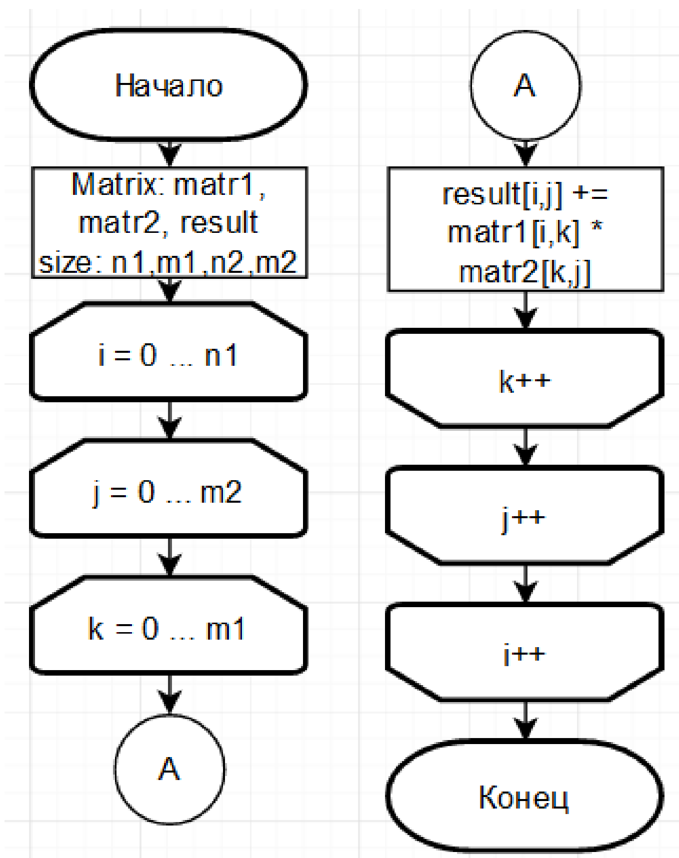

Рисунок 1. Схема стандартного алгоритма умножения матриц

На рисунке 2 изображена схема алгоритма Винограда.

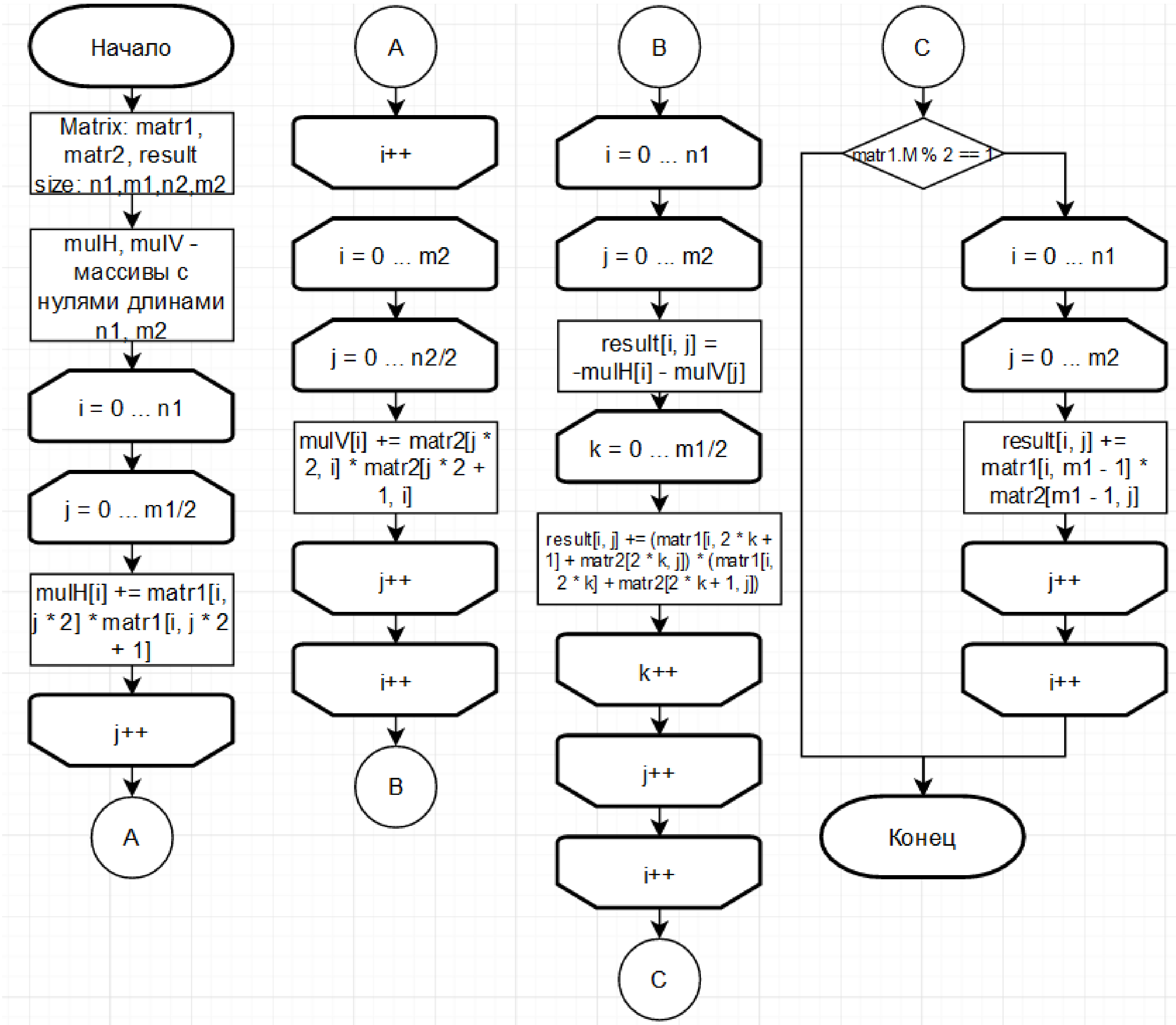

Рисунок 2. Схема алгоритма Винограда

На рисунке 3 изображена схема модифицированного алгоритма Винограда.

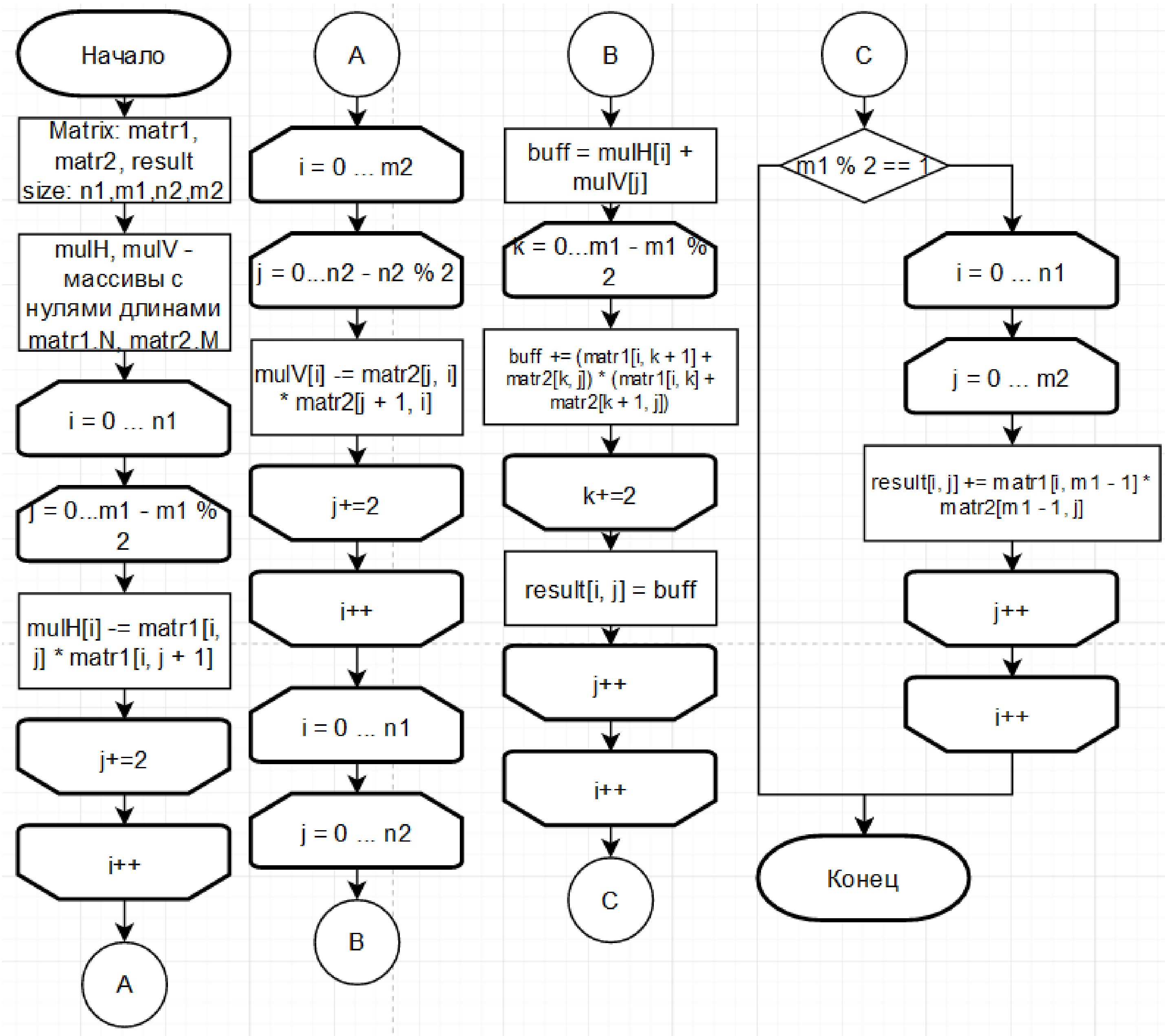

Рисунок 3. Схема модифицированного алгоритма Винограда

2.2 Модель трудоемкости

Модель трудоемкости для оценки алгоритмов:

1) стоимость базовых операций единица:

   $=, +, *, \simeq, <, >, \geq, \leq, ==, != , [], +=, -=, *=, /=, ++, --$;

2) стоимость цикла:

   $f_{for} = f_{init} + f_{comp} + M(f_{body} + f_{increment} + f_{comp})$

   Пример: $for(i = 0, i < M; i++)/*body*/$

   Результат: $2 + M(2 + f_{body})$;

3) стоимость условного оператора

   Пусть goto (переход к одной из ветвей) стоит 0, тогда

$$f_f = \begin{cases} min(f_A, f_B), & \text{лучший случай} \\ max(f_A, f_B), & \text{худший случай} \end{cases}$$

4) операция обращения к ячейки матрицы [i, j] имеет трудоёмкость равную двум.

2.3 Трудоемкость алгоритмов

Оценим трудоемкости алгоритмов.

2.3.1 Трудоемкость предварительной проверки

Таблица 2.1: Оценка веса

Код	Вес
int n1 = matr1.N;	2
int n2 = matr2.N;	2
int m1 = matr1.M;	2
int m2 = matr2.M;	2
if ((m1 != n2) || n1 == 0 || n2 == 0) return null;	5

2.3.2 Трудоемкость стандартного алгоритма

Подсчет: $1+1+n_1(2+1+1+m_2(2+1+1+m_1(2+8))) = 2+n_1(4+m_2(4+m_1 10)) = 2+n_1(4+4m_2+10m_1m_2) = 10n_1m_1m_2+4n_1m_2+4n_1+2$

2.3.3 Трудоемкость алгоритма Винограда

Подсчет:

Первый цикл: $2+n_1(2+3+\frac{m_1}{2}(3+10)) = 2+n_1(5+\frac{13}{2}m_1) = \frac{13}{2}n_1m_1+5n_1+2$

Второй цикл: $\frac{13}{2}m_2n_2+5m_2+2$

Третий цикл: $2+n_1(2+2+m_2(2+7+3+\frac{m_1}{2}(3+20))) = 2+n_1(4+m_2(12+\frac{23}{2}m_1)) = 2+n_1(4+12m_2+\frac{23}{2}m_2m_1) = \frac{23}{2}n_1m_2m_1+12n_1m_2+4n_1+2$

Условный оператор:

$$\begin{cases} 2, & \text{невыполнение} \\ 2+2+n_1(2+2+m_2(2+10)) = 12n_1m_2+4n_1+4, & \text{выполнение} \end{cases}$$

Результат:

$$\frac{23}{2}n_1m_2m_1 + \frac{13}{2}n_1m_1 + \frac{13}{2}m_2n_2 + 12n_1m_2 + 9n_1 + 5m_2 + 6+$$

$$\begin{cases} 2, & \text{невыполнение} \\ 12n_1m_2 + 4n_1 + 4, & \text{выполнение} \end{cases}$$

2.3.4 Трудоемкость модифицированного алгоритма Винограда

Подсчет:

Первый цикл: $\frac{11}{2}n_1m_1 + 4n_1 + 2$

Второй цикл: $10m_2Sn + 4m_2 + 5$

Третий цикл:

2.3.5 Вывод

В данном разделе были рассмотрены схемы алгоритмов умножения матриц, введена модель оценки трудоемкости алгоритма и были рассчитаны трудоемкости алгоритмов.

3 Технологическая часть

В данном разделе даны общие требования к программе, средства реализации и реализация алгоритмов.

3.1 Общие требования

Требования к вводу:

1) вводятся размеры матриц;
2) вводятся (или автоматически генерируются) матрицы.

Требования к программе:

1) при вводе неправильных размеров матриц программа не должна завершаться аварийно;
2) должно выполняться корректное умножение матриц.

3.2 Средства реализации

В качестве языка программирования был выбран C#, а средой разработки Visual Studio. Для замеров процессорного времени используется функция $Stopwatch$.

3.3 Сведения о модулях программы

Программа состоит из:

1) Program.cs - главный файл программы, в котором располагается точка входа в программу.

2) Matrix.cs - файл класса Matrix. Класс реализует матрицу размером $n * m$, а также он содержит методы для работы с матрицами.

3) Array.cs - файл класса Array. Класс реализует массив размером n, а также он содержит методы для работы с массивами.

4) MultMatr.cs - файл класса MultMatr. В нем находятся алгоритмы умножения матриц.

литература Виноград: http://www.algolib.narod.ru/Math/Matrix.html