МГТУ им. Баумана

Лекции по анализу алгоритмов

Москва, 2020

Оглавление

Лекция 1

Введение

1. **Оценки качества**

   - Универсальность
     - Ресурсные
       * трудоемкость
       * память
     - ?
   - Проблемно-ориентированность

2. **Вход**

   $D = \{d_i | i = 1, m\}$

3. **Длина входа**

   $\mu_Z(D) = n, h = |D|$

   Пример:

   $|D| = 2n^2 + 1$

   $\mu_Z(D) = n = \sqrt{\frac{|D|-1}{2}}$

4. **Трудоемкость**

   $f_A(D)-$ число элементарных операций принятой модели вычислений, (выполненных механизмом реализаций по механизму A) заданных алгоритмом A на входе D.

$z \to A_1A_2 \qquad f_{A_1}(D) < f_{A_2}(D)$

5. $\underline{D_n}$

   $D_n = \{D|\mu_z(D) = n\}$

   Пример:

   $\beta(d_i) = 16$

   $n = 10$

   $|D_{10}| = 2^{160}$

6. **Лудший, худший и средний случаи**

   $f_A^{\vee} \equiv^{def} min_{D \in D_n} f_A(D)$ - худший

   $f_A^{\wedge} \equiv^{def} max_{D \in D_n} f_A(D)$ - лучший

   $\bar{f}_A(n) = \sum_{D \in D_n} P(D) f_A(n)$ - средний

   $P(D)-$ вероятность входа, $f_A(n)-$трудоемкость

7. **Память**

   $V(D) = V_D + V_R + V_{dop} + V_{EXE} + V_{stack}$

   $V_D = |D|$

   V_{EXE} - часть ASM кода?

   $V_A^{\vee}, V_A^{\wedge}(n), \bar{V_A}(n) \to V_{dop}$

Примеры анализа

1. **Объем**

   $a \leftrightarrow b$

   - $Swap(a, b)$

     $t \leftarrow a$

     $a \leftarrow b$

     $b \leftarrow t$

     End

- $Swap2(a, b)$

  $a \leftarrow a + b$

  $b \leftarrow a - b$

  $a \leftarrow a - b$

2. **<u>for</u>**

   for $j \leftarrow 1$ to n

   $j \leftarrow 1$

   code

   $j \leftarrow j + 1$

   If $j <= n$, goto code

3. **<u>Sum</u>**

   $Sum(A, n; S)$

   $s \leftarrow 0$

   for $k \leftarrow 1$ to n

   $s \leftarrow s + A[k]$

   End

   $f_A^{\vee}(n) = f_A^{\wedge}(n) = f_A(n) = 1 + 1 + n(3 + 3) = 6n + 2$

4. **<u>MultMatr</u>**

   $MultMatr(A, B, n; C)$

   for $i \leftarrow 1$ to n

   for $j \leftarrow 1$ to n

   $s \leftarrow 0$

   for $k \leftarrow 1$ to n

   $s \leftarrow s + A[i, k] * B[k, j]$

   $C[i, j] \leftarrow s$

End

$f_A(n) = 1 + n(3 + 1 + n(3 + 1 + 1 + n(3 + 7) + 3)) = 10n^3 + 8n^2 + 4n + 1$

Лекция 2

Примеры анализа

1. **Умножение матриц** $\rightarrow f_A(D) = f_A(n)$
2. **Возведение в степень** $y = x^k$

   $Pow(x, k; y)$

   ! Проверки $x, k | k \geq 1$

   $y \leftarrow 1$

   for $j \leftarrow 1$ to k

   $\qquad y \leftarrow y + x$

   End

   ? Вопрос

   (a) $\mu_z(D) = 2$

   (b) $f_A(D) = f_A(k) = 2 + k^1$

3. **Max**$(A, n; M)$

   $M \leftarrow A[1]$

   for $j \leftarrow 2$ to n

   $\qquad$ if $M < A[j]$

   $\qquad\qquad$ then

   $\qquad\qquad M \leftarrow A[j]$

End

Лучший, худший случаи:

$f_A^{\vee}(n) =^{Max=a_1} 3 + (n-1)(3+2) = 5n - 2$

$f_A^{\wedge}(n) = 3 + (n-1)(3+2+2) = 7n - 4$

Классификация алгоритмов по типу трудоемкости

1. **Класс** N

   Количественно-зависимые

   $f_A(D) = f_A(\mu_z(D)) = f_A(n)$

   Матрично-векторные операции

2. **Класс** PR

   Параметр-зависимые

   $f_A(D) = f_A(pr_1, pr_2, ..., pr_k)$

   Стандартные функции по eps

3. **Класс** NPR

   Количественно-параметрические алгоритмы

   $f_A(D) = f_A(n, pr_1, ...)$

   Логическая конструкция

   $If...$

   $then$

   $...$

   $else$

   $...$

4. **Декомпозиция** $f_A(D)$

   $ln(x_1 + x_2)$

(a) Аддитивно

$f_A(n, pr) = f_n(n) + g(pr)$

$f_A^{\wedge}(n) = f_n(n) + g^{\wedge}(n)$

$g^{\wedge}(n)$ - $max_{D \in D_n}(g(pr))$

(b) Мультипликативность

$f_A(D) = f_n(n) * g(pr)$

5. **$\prec$ (П.Д.Раймон)**

$a < b \qquad f(.) \prec g(.) \qquad f(x)$

$f \prec g \equiv^{def} lim_{x \to \infty} \frac{f}{g} = 0$

$f \asymp g \equiv^{def} lim ... = C \neq 0$

6. **Подклассы в NPR**

(a) $NPRL(Low)$

$g^{\wedge}(n) \prec f_n(n)$

$f_n(n) = 17n^4 + ...$

(b) $NPRE(Eq...)$

$g^{\wedge}(n) \asymp f_n(n)$

(c) $NPRH(H...)$

$g^{\wedge} \prec f_n(N)$

Лекция 3

Математические сведения

1. **Принцип Дирихле**

   P.D.L.Dirichle

   $A, B : |A| > |B|, f : FA \to B \Rightarrow f^{-1} \notin F$

2. **Отношение**

   $A : R \subseteq AxA$

   Если

   (a) $(a, a) \in R$ - рефлексивно

   (b) $(a_1, a_2) \in R \Rightarrow$ - симметрично

   (c) $(a_1, a_2) \in R$ и $(a_2, a_3) \Rightarrow (a_1, a_2 \in R)$ - транзитивно

   $a + b + c \to R$, отношение эквивалентно.

3. **Теория вероятностей**

   $M_0 =< \Omega, p(.), \sigma_\Omega >$

   $p(0) = 0, p(\Omega) = 1$

   Случайная величина $X : \Omega_0 \to R^1$

   $r = X(\omega)$

   $P(X(\omega) = r^x) = \sum_{\omega:X(\omega)=r^x} P(\omega)$

   Математическое ожидание: $E(x) \equiv^{def} \sum_{i=1}^{M} x_i * P(X = x_i)$

Метод классов эквивалентности

1. **<u>Идея</u>**

   NPR, PR

   $\Rightarrow M_0 =< \Omega_0 = D_n, P(.) : P(d) = \frac{1}{|D_n|} >$

   Алгоритм $A \rightarrow f_A(D)$ - число

   $f_A(.) : D_n \rightarrow_{f_A(.)} N$

Лекция 4

Поиск max - $\bar{f}_A(n)$

1. **Декомпозиция f_A**

   $Max(A, n; M)$

   $M \leftarrow A[1]$

   for $j \leftarrow 2$ to n

   If $M < A[j]$

   then

   $M \leftarrow A[j]$

   End

   !Класс NPR $f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g(D)$

   $f_n(n) = 1 + (n-1)(3+2) = 5n - 4$

   $g(D) = 2Y_n$ (Y_n - сл вел = числу присв Max)

   $Y_n \in [1, n] \Rightarrow \bar{f}_A(n) = E(f_n(n) + 2Y_n) = f_n(n) + 2E(Y_n)$

2. **Применение метода классов**

   $n = n_0 \rightarrow$ экстраполяция на произвольную n

   $n_0 = 4$

   $D \in D_4 \rightarrow$ "1"(min), "2"(min_2), "3"(max_2), "4"(max)

   $D_1 234, ..., D_2 431, ..., D_4 321\} = 24$

   $4xxx\}G \Rightarrow Y_4 = 1$

$3xxx\}G \Rightarrow Y_4 = 2$

$2134 \to 3 \qquad 1234 \to 4$

$2143 \to 2 \qquad 1243 \to 3$

$2314 \to 3 \qquad 1324 \to 3$

$2341 \to 3 \qquad 1342 \to 3$

$2413 \to 2 \qquad 1423 \to 2$

$2431 \to 2 \qquad 1432 \to 2$

$P(Y_4 = 1) = \frac{6}{24}$

$P(Y_4 = 2) = \frac{11}{24}$

$P(Y_4 = 3) = \frac{6}{24}$

$P(Y_n = 4) = \frac{1}{24}$

$E(Y_n) = 1\frac{6}{24} + 2\frac{11}{24} + 3\frac{6}{24} + 4\frac{1}{24}$

Р.грэхем

$x^{\bar{k}} = h_k(x) = x(x+1)(x+2)...(x+k-1)$

$x^{\bar{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = 1x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$

$h_4(1) = 4! = 24$

$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{S_n^{(k)}}{n!}$

3. **Метод математических ожиданий**

Т.В. Теорема

Если $Y = \sum_{i=1}^{M} x_i$ и $E(x_i)$ - существует, то

$E(Y) = E(\sum x_i) = \sum(E(x_i))$

Из любого сходящегося ряда можно сделать распределение

$! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(z) = \frac{\pi^2}{6}$

$P(x = k) = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$

$E(x) = \sum^{\infty} k\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}\sum\frac{1}{k^2}$

$!x_j \to$ число переприсваиваний на j-ом шаге

$$X_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$j = 1 = \begin{cases} x_1 = 0, & P(.) = 0 \\ x_1 = 1, & P() = 1 \end{cases}$$

$$E(x_k) = 0(1 - \tfrac{1}{k}) + 1\tfrac{1}{k_n} = \tfrac{1}{k}$$

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} = H_n \approx \ln n + \gamma$$

$$\bar{f}_{A_{max}} = 5n - 4 + 2\ln n + 2\gamma$$

Лекция 5

Сортировка вставками

1. **<u>Идея</u>**

   Ключ key и сдвигается до нужного

2. **<u>Текст</u>**

   $SortIns(A, n)$

   $A[0] \leftarrow MinType$

   for $i \leftarrow 2$ to n

   key$\leftarrow A[i]$

   $j \leftarrow i - 1$

   while$(A[j] > k)$

   $A[j+1] \leftarrow A[j]$

   $j \leftarrow j - 1$

   $A[j+1] \leftarrow$ key

   End

3. **<u>Анализ $\bar{f}_A(n)$</u>** (класс NPR)

   $f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g_{Pr}(D) = f_n(n) + 8Y_n$

   Y_n - общее число проходов while

   $f_n(n) = 2 + 1 + (n-1)(3 + 4 + 2 + 3) = 12n - 9$

   $Y_n \in [0, ?]$

4. $\bar{f}_A(n)$
   $\bar{f}_A(n) = E(f_A(D \in D_n)) = E(f_n(n) + 8Y_n) = f_n(n) + 8E(Y_n)$
   $?E(Y_n) = \sum_{k=0}^{?} kP(Y_n = k)$(не подходит)
   Метод матожиданий $\rightarrow Y_n = \sum_2^n X_i$, где X_i - число проходов при $i = i_{for}$
   $E(X_i) \rightarrow - \circ - \circ - \circ ... \circ -|_0^i$
   $(- \circ - \circ - \circ - \circ |_0^{i=4})$
   $X_i = (i-1)$
   $X_i \in [0, i-1]$ $P(X_i = k) = \frac{1}{j}$
   $\Rightarrow E(X_i) = \sum_{k=0}^{i-1} k\frac{1}{i} = \frac{1}{i}(0 + 1 + 2 + ... + (i-2) + (i-1)) = \frac{i1}{2}$
   $E(Y_n) = E(\sum X_i) = \sum_2^n (E(X_i)) = \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}$
   $\bar{f}_A(n) = 12n - 9 + 8(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}) = 2n^2 + 10n - 9$

Сортировка индексами

1. **Дано**
   (a) $A \rightarrow a_i \in N$
   (b) $a_i \neq a_j, i \neq j$
2. **Идея**
   $B[1..Max(a_i)]$
   $A = [7, 11, 3, 5], B = [0, 0, 1, -, 1, -, 1, -, -, -, 1]$
   $!B[A[i]] \leftarrow 1$
   Используем элемент массива A как элемент массива B
   Цикл по n
3. **Сборка без if**
   $k \leftarrow 1$

   for $j \leftarrow 1$ to Max

      $A[k] \leftarrow j$

      $k \leftarrow k + B[j]$

   End
   Сборка без if - отвратительная

Модификации

Уберем (b) $\rightarrow\leftarrow 1 \Rightarrow +1$

(a) $N \rightarrow Z$

4. **Текст (с if)**

$Sort(A, n, B, min, max)$

$L \leftarrow Max - Min + 1$

for $j \leftarrow 1 to L$

$B[j] \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ to n

$k \leftarrow A[i] - Min + 1$

$B[k] \leftarrow B[k] + 1$

$k \leftarrow 1$

for $j \leftarrow 1$ to L

If $B[j] \neq 0$

then

$m \leftarrow B[j]$

for $s \leftarrow 1$ to m

$A[k] \leftarrow j + Min - 1$

$k \leftarrow k + 1$

End

End

End.

Анализ при $m = 1 \Rightarrow f^{\wedge}$

$f_A(n, L) = 5L + 11n + 5L + n(3 + 3 + 6) + C = 10L + 23n + C$

5. **Сравнение** $\bar{f}_{A_1}(n) = 2n^2 + 10n$

$f_{A_2}(n, L) = 10L + 23n$

$L = \frac{2n^2 - 13n}{10} = \frac{1}{5}n^2 - 1,3n$

Лекция 6

Теория сложности (вычислений)

1.