



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе № 1

Название: Программная реализация приближенного
аналитического метода и численных алгоритмов первого и
второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

Дисциплина: Моделирование

Студент

ИУ7-65Б

(Группа)

Д.О. Склифасовский

(Подпись, дата)

(И.О. Фамилия)

Преподаватель

В.М. Градов

(Подпись, дата)

(И.О. Фамилия)

Москва, 2020

Цель работы: получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутта).

1 Метод Пикара

$$\begin{aligned}y^{(1)} &= \frac{x^3}{3} \\y^{(2)} &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \\y^{(3)} &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} \\y^{(4)} &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \frac{4x^{27}}{3341878155} + \frac{82x^{19}}{37328445} + \frac{662x^{23}}{10438212015} \\&+ \frac{x^{31}}{109876902975}\end{aligned}$$

2 Метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \text{ где } f(x, y) = x^2 + y^2$$

3 Метод Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + h((1 - \alpha)k_1 + \alpha k_2)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha}k_1)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ or } 1$$

Результаты

x	1 approx	2 approx	3 approx	4 approx	euler	runge-kutta
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0
0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	4.16791	4.169168
0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00033	0.000333
0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00112	0.001125
0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00266	0.002667
0.25	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00520	0.005209
0.30	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00900	0.009004
0.35	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01430	0.014303
0.40	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02136	0.021360
0.45	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03043	0.030436
0.50	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04179	0.041793
0.55	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05570	0.055704
0.60	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07244	0.072451
0.65	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09233	0.092332
0.70	0.11	0.12	0.12	0.12	0.11566	0.115664
0.75	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14278	0.142791
0.80	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17408	0.174086
0.85	0.20	0.21	0.21	0.21	0.20996	0.209970
0.90	0.24	0.25	0.25	0.25	0.25091	0.250915
0.95	0.29	0.30	0.30	0.30	0.29745	0.297462
1.00	0.33	0.35	0.35	0.35	0.35023	0.350243
1.05	0.39	0.41	0.41	0.41	0.40999	0.410001
1.10	0.44	0.47	0.48	0.48	0.47762	0.477631
1.15	0.51	0.55	0.55	0.55	0.55420	0.554216
1.20	0.58	0.63	0.64	0.64	0.64108	0.641095
1.25	0.65	0.73	0.74	0.74	0.73993	0.739945
1.30	0.73	0.83	0.85	0.85	0.85288	0.852904
1.35	0.82	0.95	0.98	0.98	0.98272	0.982745
1.40	0.91	1.08	1.12	1.13	1.13312	1.133145
1.45	1.02	1.23	1.29	1.31	1.30905	1.309082
1.50	1.13	1.40	1.49	1.51	1.51745	1.517493
1.55	1.24	1.58	1.71	1.76	1.76828	1.768340
1.60	1.37	1.79	1.98	2.05	2.07642	2.076492
1.65	1.50	2.03	2.29	2.41	2.46508	2.465184
1.70	1.64	2.29	2.67	2.86	2.97276	2.972914
1.75	1.79	2.58	3.11	3.42	3.66827	3.668502
1.80	1.94	2.92	3.65	4.15	4.68797	4.688382
1.85	2.11	3.29	4.29	5.10	6.34614	6.346962
1.90	2.29	3.71	5.08	6.37	9.56580	9.567946
1.95	2.47	4.17	6.04	8.10	18.7405	18.75082
2.00	2.67	4.70	7.22	10.48	313.035	318.7335
2.05	2.87	5.29	8.67	13.83	None	None
2.10	3.09	5.95	10.46	18.61	None	None
2.15	3.31	6.68	12.68	25.50	None	None
2.20	3.55	7.51	15.43	35.57	None	None

Листинги

Листинг 1 – Метод Пикара

```

1 def pikar(approx, x):
2     approximation = {
3         1 : pow(x, 3) / 3.0,
4         2 : pow(x, 3) / 3.0 + pow(x, 7) / 63.0,

```

```

5      3 : pow(x, 3) / 3.0 + pow(x, 7) / 63.0 + 2 * pow(x, 11) /
        2079.0
6      + pow(x, 15) / 59535.0,
7      4 : pow(x, 3) / 3.0 + pow(x, 7) / 63.0 + 2 * pow(x, 11) /
        2079.0
8      + 13 * pow(x, 15) / 218295.0 + 82 * pow(x, 19) /
        37328445.0
9      + 662 * pow(x, 23) / 10438212015.0 + 4 * pow(x, 27) /
        3341878155.0
10     + pow(x, 31) / 109876902975.0
11 }
12 return approximation.get(approx, "Invalid")

```

Листинг 2 – Метод Эйлера

```

1 def euler(x, h):
2     y = 0
3     x0 = h
4     while (x0 < x + h / 2):
5         try:
6             y += h * (pow(y, 2) + pow(x0, 2))
7             x0 += h
8         except:
9             return 'None'
10    return y

```

Листинг 3 – Рунге-Кутта

```

1 def runge_kutta(x, h, alpha):
2     func = lambda x, u : pow(x, 2) + pow(u, 2)
3     y = 0
4     x0 = h
5     while (x0 < x + h / 2):
6         try:
7             k1 = func(x0, y)
8             k2 = func(x0 + h / (2 * alpha), y + h / (2 * alpha) *
                k1)

```

```

9         y += h * ((1 - alpha) * k1 + alpha * k2)
10        x0 += h
11    except:
12        return 'None'
13    return y

```

Ответы на вопросы

- 1) Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Обосновать свой ответ.

Ответ: при оценке значений до 2-й цифры после запятой:

- Для первого - $[0, 0.65]$
- Для второго - $[0, 1.05]$
- Для третьего - $[0, 1.35]$
- Для четвертого - $[0, 1.35]$

Из-за того, что нельзя точно гарантировать, что 4-ое приближение вычисляется верно (необходимо приближение более высокого порядка), интервалы 3-го и 4-го приближений одинаковые.

Интервалы разные, так как, чем больше приближение, тем точнее результат.

- 2) Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

Ответ: Численные методы работают итеративно, поэтому результаты зависят от величины шага. Необходимо выбирать такой шаг, при умень-

шении которого результат будет меняться незначительно. В данной задании таким шагом является 10^{-5} , так как значение не сильно отличается при шаге равном 10^{-6} . Доказательство:

h	Эйлера	Рунге-Кутта
10^{-3}	142.627	431.1348
10^{-4}	277.362	327.977
10^{-5}	313.035	318.7335
10^{-6}	317.245	317.8234

3) Какого значение функций при $x=2$, т.е. привести значение $u(2)$

Ответ:

x	1-е прибл.	2-е прибл.	3-е прибл.	4-е прибл.	Эйлера	Рунге-Кутта
2.00	2.67	4.70	7.22	10.48	313.035	318.7335