HW02

Quiz 1.10

- A memory module has 9 chips (work even one of the chips is defective)
- Each chip has n transistors (work if n of them work)
- Each transistor works with probability p
- P[C] = probability of a chip works = ?
- P[M] = probability of a memory module works = ?

① จงหา P[C]

เนื่องจาก Chip จะทำงานเมื่อ transistors ทุกตัวทำงาน

ดังนั้น $P[C] = p^n$ โดยที่ n คือจำนวน transistors

② จงหา P[M]

เนื่องจาก มีเพียงเหตุการณ์เดียวที่ memory module ไม่ทำงานคือ chip เสียทุกตัว

เหตุการณ์ที่ chip ทุกตัวเสีย

ดังนั้น $P[M] = 1 - P[S_{c_{0,9}}]$

$$= 1 - \binom{9}{0} p^0 (1-p)^{9-0}$$

$$P[M] = 1 - (1)(1-p)^9$$

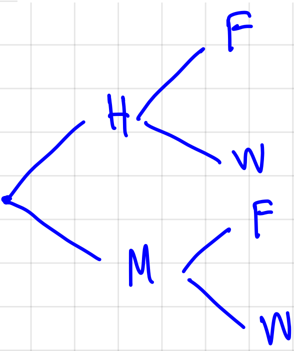
$$\therefore \quad P[M] = 1 - (1-p)^9 \quad \#\#$$

1.3.2 There are two types of cellular phones, handheld phones (H) that you carry and mobile phones (M) that are mounted in vehicles. Phone calls can be classified by the traveling speed of the user as fast (F) or slow (W). Monitor a cellular phone call and observe the type of telephone and the speed of the user. The probability model for this experiment has the following information: $P[F] = 0.5$, $P[HF] = 0.2$, $P[MW] = 0.1$. What is the sample space of the experiment? Calculate the following probabilities:

จงหา ⓐ P[W], ⓑ P[MF], ⓒ P[H]

โจทย์กำหนด : $P[F] = 0.5$, $P[HF] = 0.2$, และ $P[MW] = 0.1$

$S = \{HF, HW, MF, MW\}$



ⓑ

จาก $P[F] = P[HF] + P[MF]$

; $0.5 = 0.2 + P[MF]$

$\therefore \quad P[MF] = 0.3$

ⓐ

จาก $P[W] = P[HW] + P[MW]$

หา $P[HW]$

$P[HW] = 1 - P[HW]'$

$= 1 - P[HF] - P[MW] - P[MF]$

$= 1 - 0.2 - 0.1 - 0.3$

; $P[HW = 0.4$

$\therefore \quad P[W] = 0.4 + 0.1 = 0.5$

ⓒ $P[H] = P[HF] + P[HW]$

$= 0.2 + 0.4$

$\therefore \quad P[H] = 0.6$

1.4.3 The basic rules of genetics were discovered in mid-1800s by Mendel, who found that each characteristic of a pea plant, such as whether the seeds were green or yellow, is determined by two genes, one from each parent. Each gene is either dominant d or recessive r. Mendel's experiment is to select a plant and observe whether the genes are both dominant d, both recessive r, or one of each (hybrid) h. In his pea plants, Mendel found that yellow seeds were a dominant trait over green seeds. A yy pea with two yellow genes has yellow seeds; a gg pea with two recessive genes has green seeds; a hybrid gy or yg pea has yellow seeds. In one of Mendel's experiments, he started with a parental generation in which half the pea plants were yy and half the plants were gg. The two groups were crossbred so that each pea plant in the first generation was gy. In the second generation, each pea plant was equally likely to inherit a y or a g gene from each first generation parent. What is the probability $P[Y]$ that a randomly chosen pea plant in the second generation has yellow seeds?

กำหนด g = green peas, y = yellow peas

Sample space = $S = \{yy, yg, gy, gg\}$

* เนื่อง y ข่ม g ทำให้ลำดับไม่มีผลต่อสี

จงหา Prob ของ 2nd gen. ที่มีเมล็ดสีเหลือง

$Y = \{yy, yg, gy\}$

จาก $P[Y] = \dfrac{n[Y]}{n[S]}$

1st gen | gy × yg

↓

2nd gen. | yg gg yy yg

จะได้ $\boxed{P[Y] = 3/4}$ #

1.4.5 Use Theorem 1.7 to prove by induction the *union bound*: For any collection of events $A_1, \ldots, A_n$,

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n] \le \sum_{i=1}^{n} P[A_i].$$

formula: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

พิจารณา $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2]$

(axiam of probability)

จากสมบัติของ $P[A \cap B] \geq 0$ และ

ดังนั้น $P[A_1 \cup A_2] \leq P[A_1] + P[A_2]$

$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] \leq P[A_1] + P[A_2] + P[A_3]$

$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n] \leq P[A_1] + P[A_2] + \ldots + P[A_n]$

เนื่องจาก $P[A_1] + P[A_2] + \ldots + P[A_n] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$

นั่นคือ $P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n] \leq \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$ เป็นจริง #

1.5.4 From Problem 1.4.3, what is the conditional probability of yy, that a pea plant has two dominant genes given the event Y that it has yellow seeds?

ให้ A แทนเหตุการณ์ ได้ลักษณะเด่นทั้งสองตัว หรือก็คือ yy

จาก $Y = \{yy, yg, gy, gg\}$ จะได้ $P[AY] = P[yy] = \dfrac{n[yy]}{n[S]} = \dfrac{1}{4}$

จะได้ว่า $\boxed{P[A|Y] = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}}$ #

1.6.6 (Continuation of Problem 1.4.3) One of Mendel's most significant results was the conclusion that genes determining different characteristics are transmitted independently. In pea plants, Mendel found that round peas are a dominant trait over wrinkled peas. Mendel crossbred a group of (rr, yy) peas with a group of (ww, gg) peas. In this notation, rr denotes a pea with two "round" genes and ww denotes a pea with two "wrinkled" genes. The first generation were either (rw, yg), (rw, gy), (wr, yg), or (wr, gy) plants with both hybrid shape and hybrid color. Breeding among the first generation yielded second-generation plants in which genes for each characteristic were equally likely to be either dominant or recessive. What is the probability $P[Y]$ that a second-generation pea plant has yellow seeds? What is the probability $P[R]$ that a second-generation plant has round peas? Are R and Y independent events? How many visibly different kinds of pea plants would Mendel observe in the second generation? What are the probabilities of each of these kinds?

Punnett – square Method

	ry	rg	wy	wg
ry	rryy	rryg	rwyy	rwyg
rg	rrgy	rrgg	rwgy	rwgg
wy	wr	wryg	wwyy	wwyg
wg	wr	wrgg	wwgy	wwgg

* r ข่ม w และ y ข่ม g *

กำหนด $P[Y]$ = Prob of yellow peas | $P[R]$ = prob of round peas

$P[G]$ = Prob of green peas | $P[W]$ = prob of wrinkled peas

(1)

$G = \{rrgg, wrgg, rwgg, wwgg\}$

$P[G] = 4/16 = 1/4$

จะได้ $P[Y] = 1 - P[G]$

ดังนั้น $P[Y] = 3/4$

(2) $W = \{wwyy, wwgg, wwgy, wwgg\}$

$P[W] = 4/16 = 1/4$

จะได้ $P[R] = 1 - P[W]$

ดังนั้น $P[R] = 3/4$

เงื่อนไขคือ $P[RY] = P[YR] = P[Y]P[R]$ (เนื้อหาบท2)

(3) จงพิสูจน์ว่า Y & R ต่างเป็นอิสระต่อกัน (Independent)

$GW = \{rrgg, wrgg, wwyy, wwgy, rwgg, wwgg, wwgg\}$

$P[GW] = 7/16 \Rightarrow P[RY] = 1 - 7/16 = 9/16$

เนื่องจาก $P[RY] = P[YR] = 9/16$

และ $P[Y]P[R] = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 9/16$

ตามเงื่อนไขการเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น Y & R เป็นอิสระต่อกัน

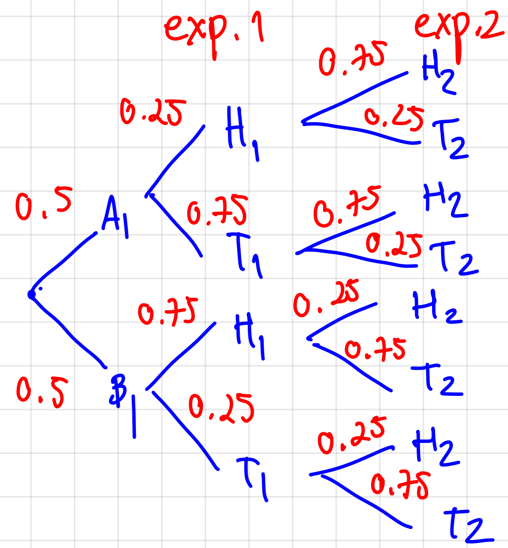
1.7.7 You have two biased coins. Coin A comes up heads with probability $1/4$. Coin B comes up heads with probability $3/4$. However, you are not sure which is which so you flip each coin once, choosing the first coin randomly. Use H_i and T_i to denote the result of flip i. Let A_1 be the event that coin A was flipped first. Let B_1 be the event that coin B was flipped first. What is $P[H_1H_2]$? Are H_1 and H_2 independent? Explain your answer.

โจทย์กำหนด $P[H_{i,A}] = 1/4$ และ $P[H_{i,B}] = 3/4$

ให้ A_1 แทนเหตุการณ์ที่จะ flip ได้ A coin ครั้งแรก

B_1 แทนเหตุการณ์ที่จะ flip ได้ B coin ครั้งแรก

จงหา $P[H_1H_2]$, H_1 & H_2 เป็นอิสระต่อกันหรือไม่.



พิจารณาจากแผนภาพ จะได้

$$P[H_1H_2] = P[A_1H_1H_2] + P[A_2H_1H_2]$$
$$= (0.5)(0.25)(0.75) + (0.5)(0.75)(0.25)$$

$\therefore P[H_1H_2] = 0.1875$ #

พิจารณาว่า H_1 & H_2 เป็นอิสระต่อกันหรือไม่.

$$P[H_1] = P[A_1H_1H_2] + P[A_1H_1T_2] + P[B_1H_1H_2] + P[B_1H_1T_2]$$
$$= 0.1875 + (0.5)(0.25)(0.25) + (0.5)(0.75)(0.75)$$

$\therefore P[H_1] = 1/2$

$$P[H_2] = P[A_1H_1H_2] + P[A_1T_1H_2] + P[B_1H_1H_2] + P[B_1T_1H_2]$$
$$= 0.1875 + (0.5)(0.75)(0.75) + (0.5)(0.25)(0.25)$$

$\therefore P[H_2] = 1/2$

จากเงื่อนไขการเป็นอิสระต่อกันคือ $P[H_1H_2] = P[H_1]P[H_2]$

เนื่องจาก $P[H_1]P[H_2] = 0.25 \neq 0.1875 = P[H_1H_2]$

ดังนั้น H_1 & H_2 ไม่เป็นอิสระต่อกัน #

1.8.3 Shuffle a deck of cards and pick two cards at random. Observe the sequence of the two cards in the order in which they were chosen.

(a) How many outcomes are in the sample space?

(b) How many outcomes are in the event that the two cards are the same type but different suits?

(c) What is the probability that the two cards are the same type but different suits?

(d) Suppose the experiment specifies observing the set of two cards without considering the order in which they are selected, and redo parts (a)–(c).

a) $P_{52,2} = \dfrac{52!}{(52-2)!} = $ 2562 outcomes. ∦

b) $52 \times 1 \times P_{3,1} = 52 \times 1 \times \dfrac{3!}{1!(2)!} = $ 156 outcomes.

c) $n[S] = 2652$

formula: $P[E] = \dfrac{n[E]}{n[S]}$

$P[\text{same type but diff suit}] = \dfrac{156}{2652} = \dfrac{1}{17}$ ∦

ไม่สนใจลำดับ

d) (a) $C_{52,2} = \dfrac{52!}{2!(52-2)!} = $ 1326 outcomes

(b) $52 \times 1 \times \dfrac{P_{3,1}}{2!} = \dfrac{52 \times 3!}{2!1!2!} = $ 78 outcomes

(c) $P[\text{same type but diff suit}] = \dfrac{78}{1326} = \dfrac{1}{17}$ ∦

1.9.2 The Boston Celtics have won 16 NBA championships over approximately 50 years. Thus it may seem reasonable to assume that in a given year the Celtics win the title with probability $p = 0.32$, independent of any other year. Given such a model, what would be the probability of the Celtics winning eight straight championships beginning in 1959? Also, what would be the probability of the Celtics winning the title in 10 out of 11 years, starting in 1959? Given your answers, do you trust this simple probability model?

① ความน่าจะเป็นที่ BC จะคว้าแชมป์ 8 สมัย ติดต่อปี 1959

สมมติว่า BC ได้แชมป์ 1 ครั้ง/ปี

$P[8 \text{ สมัยติด}] = \underbrace{(0.32) \times (0.32) \times \dots \times (0.32)}_{8 \text{ times.}}$

$\therefore P[8 \text{ สมัยติด}] = (0.32)^8 = 0.0001995$ ∦

② ความน่าจะเป็นที่ BC จะชนะจาก 10 ใน 11 ปี

formula: $P[S_{k,n}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

k แทนปีชนะ
n แทนทั้งหมด

$P[S_{10,11}] = \binom{11}{10} (0.32)^{10} (1-0.32)^{11-10}$

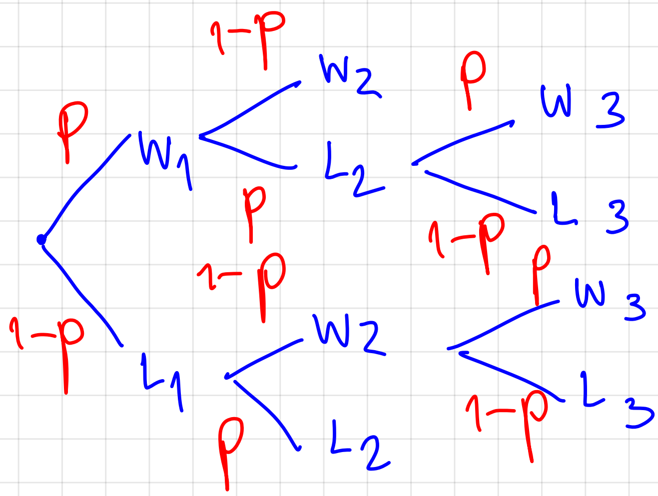
$\therefore P[S_{10,11}] = 0.000084$ ∦

③ ความน่าจะเป็นนี้ เชื่อถือได้หรือไม่. : ไม่ได้ เพราะจากอัตราที่ต่ำเกินไป

Prob

1.9.4 In a game between two equal teams, the home team wins any game with probability $p > 1/2$. In a best of three playoff series, a team with the home advantage has a game at home, followed by a game away, followed by a home game if necessary. The series is over as soon as one team wins two games. What is $P[H]$, the probability that the team with the home advantage wins the series? Is the home advantage increased by playing a three-game series rather than one-game playoff? That is, is it true that $P[H] \geq p$ for all $p \geq 1/2$?

ให้ p แทน prob ของโอกาสที่ทีมเย้าจะชนะจาก BO3



จะได้

$$P[H] = P[W_1W_2] + P[W_1L_2W_3] + P[L_1W_2W_3]$$

$$= p(1-p) + p^3 + p(1-p)^2$$

$$\therefore P[H] = p[(1-p) + p^2 + (1-p)^2]$$ ※

โจทย์ถามว่า ทีมเย้ามีโอกาสชนะ BO3 มากกว่า BO1 หรือไม่ หรือก็คือ $P[H] \geq p$ สำหรับ $p \geq 1/2$

จากด้านบน แทนค่าใน $P[H] \geq p$;

$$\cancel{p}[(1-p)+p^2+(1-p)^2] \geq \cancel{p}$$

$$1-p+p^2+(1-p)^2 \geq 1$$

$$p^2+1-2p+p^2-p \geq 0$$

$$2p^2-3p+1 \geq 0$$

$$p \geq \frac{1}{2}, 1$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq p \leq 1}$$

เนื่องจาก Probability มีค่าไม่เกิน 1 ※

จะเห็นว่า $P[H] \leq p$ ที่ช่วง $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ และทีมเย้ามีโอกาสชนะอยู่ p ดังนั้น ทีมเย้า (Home team) มีโอกาสชนะจาก BO3 น้อยกว่า BO1 ※