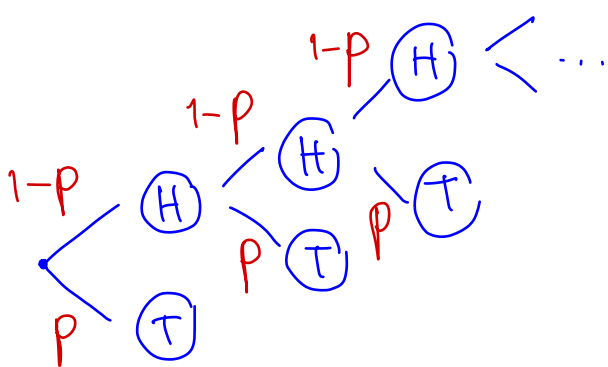


1. พิจารณาการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญ โดยที่จำนวนครั้งของการโยนเป็นอนันต์ (infinite) และในการโยนแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน (independent) โดยกำหนดให้ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกก้อยในการโยนแต่ละครั้งเป็น  $p$

- 1.1) กำหนดให้  $X$  เป็นจำนวนครั้งที่โยนเหรียญแล้วออกก้อยเป็นครั้งแรก จงคำนวณค่า  $E[X]$   
 1.2) จงคำนวณหาความน่าจะเป็น (ในเทอมของ  $p$ ) ที่ในการโยนเหรียญ 10 ครั้งแล้วออกก้อย 5 ครั้ง  
 1.3) จงคำนวณหาความน่าจะเป็น (ในเทอมของ  $p$ ) ที่ในการโยนเหรียญครั้งที่ 10 แล้วจะออกก้อยเป็นครั้งที่ 5

วิธีทำ

กำหนดให้ H แทน เหตุการณ์ที่โยนแล้วออกหัว  
 T แทน เหตุการณ์ที่โยนแล้วออกก้อย



กรณีที่

$$P[X=1] = p$$

$$P[X=2] = (1-p)p$$

$$P[X=3] = (1-p)^2 p$$

$\vdots$

$$P[X=x] = (1-p)^{x-1} p$$

ดังนั้น PMF ของ  $X$  คือ

$$P_X(X) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & , x=1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

และจากนิยามของ Expected Value จะได้

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x \in S_X} x P_X(X) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= p \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} \\
&= -p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (1-p)^x \\
&= -p \frac{d}{dp} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x \cdot \frac{(1-p)^{-1}}{(1-p)^{-1}} \\
&= -p \frac{d}{dp} \left[ (1-p) \cdot \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} \right] \\
&= -p \frac{d}{dp} \left[ 1-p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} \right] \\
&= -p \frac{d}{dp} \left[ \frac{1-p}{p} \right] \\
&= -p \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\therefore E[X] = \frac{1}{p} \quad \times$$

1.2 โยนเหรียญ 10 ครั้ง ออกก้อย 5 ครั้ง. unProb in p term.

นี้ X แทนจำนวนครั้งที่โยนเหรียญแล้วออกก้อย ในทศโยนทั้งหมด n ครั้ง  
 จาก Definition ของ Binomial RV จะได้ว่า

PMF ของ X คือ

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x=0,1,2,\dots,n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \checkmark$$

เพื่อหา Tail Area  $n=10$  และ  $x=5$  จงใช้

$$P_X(5) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^5 = 252 p^5 (1-p)^5 \quad \times$$

1.3) โยนเหรียญ 10 ครั้ง ออกก้อยครั้งที่ 5

ถ้า  $k$  แทน จำนวนครั้งที่ โยนเหรียญ แล้วออกก้อยในครั้งแรก

$J$  แทน จำนวนครั้งในการโยนเหรียญจนออกก้อยในครั้งที่  $k$

ตาม Definition ของ Pascal RV จะได้ PMF ของ  $J$  คือ.

$$P_J(j) = \begin{cases} \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k} & , j = k, k+1, \dots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

จากค่าแทน  $J = 10, K = 5$  จะได้ว่า

$$P_J(10) = \binom{9}{4} p^5 (1-p)^5 = 126 p^5 (1-p)^5$$



2. มีนักเรียน 10 คน โดยที่ 5 คนมาจากโรงเรียน A, 3 คนมาจากโรงเรียน B และ 2 คน มาจากโรงเรียน C สมมติให้นักเรียนคู่หนึ่งถูกเลือกอย่างสุ่มและอย่างเสมอภาคกัน (randomly and uniformly) จากเซตของคู่ นักเรียนที่เป็นไปได้ทั้งหมด กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนนักเรียนที่อยู่ในคู่ที่ถูกเลือก มาจากโรงเรียน A และ ให้  $b$  เป็นจำนวนนักเรียนที่อยู่ในคู่ที่ถูกเลือก มาจากโรงเรียน B (ดังนั้นค่า  $a$  และ  $b$  อยู่ในเซต  $\{0,1,2\}$ )

2.1) จงคำนวณ  $E[ab]$

2.2) ถ้านักเรียนที่เลือกอยู่โรงเรียนเดียวกัน จงหา conditional probability ที่ทั้งสองมาจากโรงเรียน A

จำนวนวิธีทั้งหมด

$$n(S) = C_{10,2} = \frac{10!}{2!8!} = 45 \text{ วิธี}$$

\*ใน C แทน สมาชิก School "C"

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้

$$E = \{ \overset{①}{aa}, ab, ac, bb, bc, cc \}$$

$$n_1(E) = \binom{5}{2} \binom{3}{0} \binom{2}{0} = 10 \Rightarrow P_1(E) = \frac{10}{45}$$

$$n_2(E) = \binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{0} = 15 \Rightarrow P_2(E) = \frac{15}{45}$$

$$n_3(E) = \binom{5}{1} \binom{3}{0} \binom{2}{1} = 10 \Rightarrow P_3(E) = \frac{10}{45}$$

$$n_4(E) = \binom{5}{0} \binom{3}{2} \binom{2}{0} = 3 \Rightarrow P_4(E) = \frac{3}{45}$$

$$n_5(E) = \binom{5}{0} \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 6 \Rightarrow P_5(E) = \frac{6}{45}$$

$$n_6(E) = \binom{5}{0} \binom{3}{0} \binom{2}{2} = 1 \Rightarrow P_6(E) = \frac{1}{45}$$

จงหา Joint PMF of  $P_{A,B}(a,b)$  คือ.

$$P_{A,B}(a,b) = \begin{cases} \frac{10}{45} & a=2, b=0 \\ \frac{15}{45} & a=1, b=1 \\ \frac{10}{45} & a=1, b=0 \\ \frac{3}{45} & a=0, b=2 \\ \frac{6}{45} & a=0, b=1 \\ \frac{1}{45} & a=0, b=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

②.1  $E[ab]$

ឡើយ  $D = g(A, B)$  ពាក្យពាក្យ ៖ ត្រូវ

$$E[D] = \sum_{a \in S_A} \sum_{b \in S_B} ab P_{A,B}(a,b)$$

$$= (2)(0) \left( \frac{10}{45} \right) + (1)(1) \left( \frac{15}{45} \right) + (1)(0) \left( \frac{10}{45} \right) + (0)(2) \left( \frac{3}{45} \right) \\ + (0)(1) \left( \frac{6}{45} \right) + (0)(0) \left( \frac{1}{45} \right)$$

$$\therefore E[D] = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$



2.2) หา  $X$  แทนเลขที่ออกที่  $X$  ได้  $X$  เป็นจำนวน 5. ได้ 5.1

an Conditional Joint PMF by an event 4.16

$$P_{A|X}(a,b) = \frac{P[(X=x, Y=y) \cap X]}{P[X]}$$

$$P[X] = \frac{1+3+10}{45}$$

$$\therefore P[X] = \frac{13}{45}$$

$$; P_{A|X}(a,b) = \frac{\frac{3}{45} \times \frac{10}{45}}{\frac{13}{45}} = \frac{2}{39} \times$$

$$P[E|D] = \frac{P[E \cap D]}{P[D]}$$

$$= \frac{P[E \cap D]}{P[D]}$$

$$P[D]$$

$$P[D] = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

$$\binom{10}{2}$$

หา  $A$  ออกได้

$$P[E] = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$$

3. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีเหลือง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก
- 3.1) ทำการทดลองสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละหนึ่งลูกแบบหยิบแล้วใส่คืน เป็นจำนวน 8 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบลูกบอลสีแดงได้ 2 ครั้ง และลูกบอลสีเหลืองได้ 4 ครั้ง นอกนั้นได้สีเขียว
- 3.2) ทำการทดลองสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละหนึ่งลูกแบบไม่ใส่คืน เป็นจำนวน 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบลูกบอลสีแดง สีเหลืองและสีเขียวได้อย่างละ 1 ครั้ง

3.1) จงหา ~~สูตร~~ Multinomial Coefficient

$$\binom{n}{n_0, \dots, n_{m-1}} = \frac{n!}{n_0! n_1! n_2! \dots n_{m-1}!}$$

ถ้า  $n=2$  หรือ  $n=1$  จะเป็น Binomial

ถ้าให้ จำนวนวิธีทั้งหมดในการสุ่มลูกบอลครั้งละ 1 ลูก 8 ครั้ง (ใส่คืน) คือ

$$\binom{8}{2, 4, 2} = \frac{8!}{2! 4! 2!} = 420 \text{ วิธี}$$

4. R แทน เหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีแดง  
Y แทน เหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีเหลือง  
G แทน เหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีเขียว

X แทน เหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้แดงแล้วเหลืองแล้วเขียว 2, 4, 2 ตามลำดับ

ถ้าได้  $P[R] = \frac{1}{6}, P[Y] = \frac{2}{6}$  และ  $P[G] = \frac{3}{6}$  ตามลำดับ

ดังนั้น Prob ของเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้แดง 2 แล้ว 4 หล.เขียว 2 คือ

$$P[X] = 420 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{2}{6}\right)^4 \times \left(\frac{3}{6}\right)^2$$

$$\therefore P[X] = \frac{35}{972} \approx 0.036$$

นี่คือสูตร Multinomial

3.2) sample space =  $\{ RY\textcolor{red}{Y}, RY\textcolor{red}{G}, R\textcolor{red}{G}Y, RGG, YRY, YRG, Y\textcolor{red}{Y}R, Y\textcolor{red}{Y}G, YGR, YGY, YGG, GRY, GRG, GYR, GYY, GYG, GGR, GGY, GGG \}$

outcomes =  $\{ RYG, RGY, YRG, YGR, GRY, GYR \}$

$$P[RYG] = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{120}$$

$$P[RGY] = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{120}$$

$$P[YRG] = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{120}$$

$$P[YGR] = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{120}$$

$$P[GRY] = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{120}$$

$$P[G Y R] = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{120}$$

$\therefore$  Probability of two boys is  $\frac{6 \times 6}{120} = \frac{3}{10}$  ~~10~~



4. กำหนด  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มดิสครีตแบบสม่ำเสมอ (uniform discrete random variable) ที่มีค่าเป็นไปได้เป็นเลขจำนวนเต็มตั้งแต่  $-4$  ถึง  $3$  และให้  $Y = X^2 + 2X + 3$

4.1) จงหา PMF (Probability Mass Function) ของ  $Y$  (6 คะแนน)

4.2) จงหาค่า  $E[Y]$  (4 คะแนน)

4.1) ให้น  $X$  แบบ Uniform discrete RV

กำหนด  $Y = \begin{cases} X^2 + 2X + 3, & -4 \leq X \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

PMF of  $Y$  คือ

$\frac{1}{8}$	$X = -4$	$Y = 11$
$\frac{1}{8}$	$X = -3$	$Y = 6$
$\frac{1}{8}$	$X = -2$	$Y = 3$
$\frac{1}{8}$	$X = -1$	$Y = 2$
$\frac{1}{8}$	$X = 0$	$Y = 3$
$\frac{1}{8}$	$X = 1$	$Y = 6$
$\frac{1}{8}$	$X = 2$	$Y = 11$
$\frac{1}{8}$	$X = 3$	$Y = 18$

$\Rightarrow P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{1}{8}, & y = 11 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}, & y = 6 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}, & y = 3 \\ \frac{1}{8}, & y = 2, 18 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

4.2) Find  $E[Y]$

Definition of Expected Value ค.คือ

$$E[Y] = \sum_{y \in S_Y} y P_Y(y)$$

จาก 4.1 ;

$$E[Y] = 11 \left( \frac{2}{8} \right) + 6 \left( \frac{2}{8} \right) + 3 \left( \frac{2}{8} \right) + 18 \left( \frac{1}{8} \right) + 2 \left( \frac{1}{8} \right)$$

$$\therefore E[Y] = 7.5$$