นายโสฬส สุขสมบูรณ์ 620107631188 sec 1
Comm Eng Math.

HW08

3.1.2 The cumulative distribution function of the continuous random variable V is

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & v < -5, \\ c(v+5)^2 & -5 \le v < 7, \\ 1 & v \ge 7. \end{cases}$$

(a) What is c?
(b) What is $P[V > 4]$?
(c) $P[-3 < V \le 0]$?
(d) What is the value of a such that $P[V > a] = 2/3$?

a) เนื่องจากเป็น Continuous RV

$$F_V(7^-) = F_V(7^+)$$
$$c(7+5)^2 = 1$$
$$\therefore\ c = 1/144 \ \#$$

b)
$$P[V > 4] = 1 - P[V < 4]$$
$$= 1 - \frac{1}{144}[4+5]^2$$
$$\therefore P[V > 4] = \frac{63}{144} \ \#$$

c)
$$P[-3 < V \le 0] = F_V(0) - F_V(-3)$$
$$= \frac{25}{144} - \frac{4}{144}$$
$$\therefore P[-3 < V \le 0] = \frac{21}{144} \ \#$$

d)
$$P[V > a] = 2/3$$
$$1 - P[V < a] = 2/3$$
$$P[V < a] = 1/3$$
$$(a+5)^2 = \frac{144}{3}$$

EQN ;

นอกขอบเขตให้ค่า 0

$$a = \cancel{-11.928},\ 1.928$$

$\therefore\ a = 1.928$ อยู่ในช่วง $-5 \le a \le 7$

\#

3.2.2 The cumulative distribution function of random variable X is

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ (x+1)/2 & -1 \le x < 1, \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

Find the PDF $f_X(x)$ of X.

จาก ความสัมพันธ์ของ PDF & CDF

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

จะได้ว่า
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}(x+1)/2 & , -1 \le x < 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

หรือ
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , -1 \le x < 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \ \#$$

3.3.6 The cumulative distribution function of random variable V is

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & v < -5, \\ (v+5)^2/144 & -5 \le v < 7, \\ 1 & v \ge 7. \end{cases}$$

(a) What is $E[V]$?

(b) What is $\mathrm{Var}[V]$?

(c) What is $E[V^3]$?

หา $f_V(v)$ จากความสัมพันธ์

$$f_V(v) = \frac{d}{dx} F_V(v) \quad \text{—} (1)$$

$$f_V(v) = \frac{2(v+5)}{144} = \frac{v+5}{72} \quad , -5 \le v < 7$$

a) จาก $E[V] = \int_{-\infty}^{\infty} v\, f_V(v)\, dv$ — (2)

; $$E[V] = \frac{1}{72} \int_{-5}^{7} v(v+5)\, dv$$

$$= \frac{1}{72} \left[\frac{v^3}{3} + \frac{5v^2}{2} \right]_{-5}^{7}$$

$$= \frac{1}{72} \left[\frac{1421}{6} - \frac{125}{6} \right]$$

$\therefore E[V] = 3$ ##

b) จาก $\mathrm{Var}[V] = E[V^2] - (E[V])^2$ — (3)

พิจารณา $$E[V^2] = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_V(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{72} \int_{-5}^{7} v^2 (v+5)\, dv$$

$$= \frac{1}{72} \left[\frac{v^4}{4} + \frac{5v^3}{3} \right]_{-5}^{7}$$

$$E[V^2] = \frac{1}{72} \left[\frac{14063}{12} - \frac{625}{12} \right]$$

$\therefore E[V^2] = 15.553$ แทนค่าใน (3)

จาก $Var[V] = E[V^2] - (E[V])^2$

; $Var[V] = 15.553 - 3$

$\therefore Var[V] = 12.553$ #

c) $$E[V^3] = \int_{-\infty}^{\infty} v^3 f_V(v)\,dv$$

$$= \frac{1}{72}\int_{-5}^{7} v^3(v+5)\,dv$$

$$= \frac{1}{72}\left[\frac{v^5}{5} + \frac{5v^4}{4}\right]_{-5}^{7}$$

$\therefore E[V^3] = \frac{431}{5}$ หรือ 86.2 #

3.4.6 X is a uniform random variable with expected value $\mu_X = 7$ and variance $Var[X] = 3$. What is the PDF of X?

- เนื่องจากโจทย์กำหนดว่า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Uniform
- กำหนดให้ X อยู่ในช่วง $[a, b)$

จะได้ว่า $E[X] = \frac{a+b}{2}$ และ $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

นั่นคือ $E[X] = \frac{a+b}{2} = 7$ —(1) และ $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = 3$ —(2)

$a+b = 14$ —(1)

$(b-a)^2 = 36$ —(2)

$b-a = 6$ —(3) เนื่องจากค่า $Var[X] \geq 0$

แทน $b = 6+a$ ลงใน (1) ;

$2a = 8$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 10 \end{aligned}}$$

แทนลงใน (3) ;

เนื่องจาก X เป็น Uniform RV ดังนั้นค่า PDF $f_X(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{6}$

$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , 6 \le x \le 10 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad \#$$

3.5.5 The peak temperature T, in degrees Fahrenheit, on a July day in Antarctica is a Gaussian random variable with a variance of 225. With probability 1/2, the temperature T exceeds 10 degrees. What is $P[T > 32]$, the probability the temperature is above freezing? What is $P[T < 0]$? What is $P[T > 60]$?

โจทย์กำหนด T เป็น Gaussian RV ที่มีค่า $Var[T] = 225$, มี Prob $= 1/2$ ที่ $T = 10^\circ$

พิจารณา $P[T > 10] = 1 - P[T < 10]$

$$\frac{1}{2} = 1 - \Phi\left[\frac{10 - \mu_T}{15}\right]$$

เนื่องจาก $\Phi(Z) = 1/2$ เมื่อ $Z = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{10 - \mu_T}{15} = 0$$

เปิดตาราง Standard Normal CDF Table

$$\boxed{\therefore \mu_T = 10}$$

พิจารณา

$$P[T > 32] = 1 - P[T < 32]$$

$$= 1 - \Phi\left[\frac{32 - 10}{15}\right]$$

$$= 1 - \Phi[1.46]$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.46} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

$$= 1 - 0.9278$$

$$\therefore P[T > 32] = 0.0722 \quad \#$$

, $P[T<0] = \Phi\left[\frac{0-10}{15}\right]$

$= \Phi\left[-\frac{2}{3}\right]$

$= 1 - \Phi\left[\frac{2}{3}\right]$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2/3} e^{-u^2/2}\, du$

$= 1 - 0.7475$

$\therefore P[T<0] = 0.2525$ #

และ $P[T>60] = 1 - P[T<60]$

$= 1 - \Phi\left[\frac{60-10}{15}\right]$

$= 1 - \Phi\left[\frac{10}{3}\right]$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{10/3} e^{-u^2/2}\, du$

$\therefore P[T>60] = 0.000429 = 4.29 \times 10^{-4}$ #

3.6.8 With probability 0.7, the toss of an Olympic shot-putter travels $D = 60 + X$ feet, where X is an exponential random variable with expected value $\mu = 10$. Otherwise, with probability 0.3, a foul is committed by stepping outside of the shot-put circle and we say $D = 0$. What are the CDF and PDF of random variable D?

3.7.6 X is uniform random variable with parameters 0 and 1. Find a function $g(x)$ such that the PDF of $Y = g(X)$ is

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ให้ X แทน Uniform RV อยู่ในช่วง [0,1]

พิจารณา
$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & , 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

จากความสัมพันธ์ $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$ จะได้ว่า CDF $F_Y(y)$ คือ

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ y^3 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , 1 \ge 0 \end{cases}$$

พิจารณา $P[Y \le y] = P[g(x) \le y]$
$= y^3 \quad , 0 \le y < 1$

เนื่องจากเราต้องการทราบค่า $g(x)$ สมมติให้ $g(x) = \sqrt[3]{x}$;

$P[\sqrt[3]{x} \le y] = y^3$

$P[x \le y^3] = y^3$

นั่นคือ $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ทำให้สมการเป็นจริง #

3.8.3 For the experiment of spinning the pointer three times and observing the maximum pointer position, Example 3.5, find the conditional PDF given the event R that the maximum position is on the right side of the circle. What are the conditional expected value and the conditional variance?

ให้ R แทน maximum position ซึ่งอยู่ในช่วง $[0, \frac{1}{2}]$

จาก Ex. 3.5

$$P[R] = \int_0^{1/2} f_Y(y)\,dy = \int_0^{1/2} 3y^2\,dy = y^3 \Big|_0^{1/2}$$

$$\therefore P[R] = \frac{1}{8}$$

หาค่า Conditional PDF ของ $Y|R$;

$$f_{Y|R}(y) = \begin{cases} 24y^2 & ; 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

หา $E[Y|R] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|R}(y)\,dy = \int_0^{1/2} y\,(24y^2)\,dy = \frac{24y^4}{4} \Big|_0^{1/2}$

$$\therefore E[Y|R] = \frac{3}{8}$$

และ: $Var[Y|R] = E[Y^2|R] - (E[Y|R])^2 = \frac{3}{20} - \left(\frac{3}{8}\right)^2$

$$\therefore Var[Y|R] = \frac{3}{320}$$

$$E[Y^2|R] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|R}(y)\,dy = \int_0^{1/2} y^2 (24y^2)\,dy = \frac{24y^5}{5} \Big|_0^{1/2}$$

$\therefore E[Y^2|R] = \frac{3}{20}$ แทนค่าใน $Var[Y|R]$