

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

1. ทำการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  เป็นผลตัวเลขที่ได้จากการโยนลูกเต๋าที่หนึ่งและสองตามลำดับ และกำหนดให้

$$W = \max(X + 1, Y)$$

เมื่อ  $\max(a, b)$  คือค่าที่มากที่สุดที่เลือกจากค่า  $a$  และ  $b$

- 1.1) จงหาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นร่วม (joint Probability Mass Function (PMF))  $P_{X,Y}(x, y)$  ของตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  (1 คะแนน)
- 1.2) จงหาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (PMF)  $P_W(w)$  ของ  $W$  (4 คะแนน)
- 1.3) จงหาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional PMF)  $P_{W|B}(w)$  ของ  $W$  เมื่อกำหนดเงื่อนไข  $B$  ว่าเป็นเหตุการณ์ที่  $X > Y$  (5 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

2. นักเรียนแต่ละคนแบกกระเป๋าสัมภาระจำนวน  $X$  กระเป๋าต่อคน โดย  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มดิสครีตแบบสม่ำเสมอ (uniform discrete random variable) ที่มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 2 และกำหนดให้กระเป๋แต่ละใบมีน้ำหนักเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแบบสม่ำเสมอ (uniform continuous random variable) ที่มีค่าตั้งแต่ 2 ถึง 3 กิโลกรัม ทั้งนี้กำหนดให้จำนวนกระเป๋าและน้ำหนักของกระเป๋าเป็นอิสระแก่กัน และให้  $W$  เป็นน้ำหนักรวมของกระเป๋าที่นักเรียนแต่ละคนแบก

- 2.1) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF)  $F_W(w)$  ของ  $W$  (4 คะแนน)  
2.2) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (PDF)  $f_W(w)$  ของ  $W$  (4 คะแนน)  
2.3) จงหาค่าเฉลี่ย  $E[W]$  ของ  $W$  (2 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

3. ระบบอัตโนมัติระบบหนึ่งประกอบด้วยระบบย่อยสองระบบทำงานขนานกันอย่างอิสระ ระบบจะเสียก็ต่อเมื่อระบบย่อยทั้งสองเสีย โดยอายุการใช้งานของระบบย่อยแต่ละระบบมีการแจกแจงต่อเนื่องแบบเอกซ์โพเนนเชียล (exponential continuous random variable) ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2 ปี และ 4 ปี ตามลำดับ กำหนดให้  $X$  และ  $Y$  เป็นอายุการใช้งานของระบบย่อยที่หนึ่งและระบบย่อยที่สองตามลำดับ และ  $W$  เป็นอายุการใช้งานของระบบอัตโนมัติ

- 3.1) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วม (Joint PDF)  $f_{X,Y}(x, y)$  ของ  $X$  และ  $Y$  (2 คะแนน)
- 3.2) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF)  $F_W(w)$  ของ  $W$  (4 คะแนน)
- 3.3) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (PDF)  $f_W(w)$  ของ  $W$  (3 คะแนน)
- 3.4) จงหาค่าเฉลี่ย  $E[W]$  ของ  $W$  (1 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

4. ทำการโยนลูกเต๋ารั้งละสองลูก เป็นจำนวนทั้งหมด 100 ครั้ง และสังเกตผลรวมของตัวเลขที่ได้จากการโยนลูกเต๋านี้ในแต่ละครั้ง

4.1) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมในแต่ละครั้งมากกว่า 5 (1 คะแนน)

4.2) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมในแต่ละครั้งมากกว่า 5 เป็นจำนวนครั้งตั้งแต่ 40 ครั้งหรือจนถึง 70 ครั้ง (3 คะแนน)

4.3) จงประมาณค่าความน่าจะเป็นในข้อ 4.2) โดยใช้ตาราง cumulative standard normal distribution (2 คะแนน)

4.4) จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมในแต่ละครั้งมากกว่า 5 เป็นจำนวน 60 ครั้งพอดี (2 คะแนน)

4.5) จงประมาณค่าความน่าจะเป็นในข้อ 4.4) โดยใช้ตาราง cumulative standard normal distribution (2 คะแนน)

หมายเหตุ ข้อ 4.2) และ 4.4) ให้ติดสูตรไว้ ไม่ต้องคำนวณค่าเป็นตัวเลข

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

5. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วม (joint PDF) ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง  $X$  และ  $Y$  เป็นดังนี้

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 \\ c, & -2 \leq x \leq 0, -4 \leq y \leq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 5.1) จงหาค่าคงที่  $c$  (2 คะแนน)  
5.2) จงหาว่าตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง  $X$  และ  $Y$  อิสระกันหรือไม่ (2 คะแนน)  
5.3) จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์  $Y \geq 2X$  (1 คะแนน)  
5.4) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วมแบบมีเงื่อนไข (conditional joint PDF)  $f_{X,Y|A}(x,y)$  ของตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  เมื่อกำหนดเงื่อนไข  $A$  ว่าเป็นเหตุการณ์ที่  $Y \geq 2X$  (2 คะแนน)  
5.5) จงหา  $E[X + Y | A]$  เมื่อ  $A$  คือเหตุการณ์ที่  $Y \geq 2X$  (3 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

6. ให้  $X_k$  เป็นลำดับแบบ Independent Identically Distributed (IID) random sequence ที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอที่มีค่าต่อเนื่องตั้งแต่  $-1$  ถึง  $1$  หรือมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (PDF) เป็นดังนี้

$$f_{X_k}(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่  $k$  เป็นดัชนีเวลาที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม และกำหนดให้ตัวแปรสุ่ม  $Y_k$  เป็นผลรวมสะสมของ  $X_k$  ดังนี้

$$Y_k = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k$$

- 6.1) จงคำนวณค่าเฉลี่ย  $E[Y_k]$  ของ  $Y_k$  (2 คะแนน)
- 6.2) จงหาอัตสหสัมพันธ์ (autocorrelation)  $E[X_k X_{k+\eta}]$  ของ  $X_k$  เมื่อ  $\eta$  มีค่าเป็นจำนวนเต็ม (2 คะแนน)
- 6.3) จงหาอัตสหสัมพันธ์  $E[Y_k Y_{k+\eta}]$  ของ  $Y_k$  (6 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

7. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วม (joint PDF) ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง  $X$  และ  $Y$  เป็นดังนี้

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-(x+2y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

และกำหนดให้  $W = Y - X$

- 7.1) จงหาค่าคงที่  $c$  (1 คะแนน)  
7.2) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF)  $F_W(w)$  ของตัวแปรสุ่ม  $W$  (7 คะแนน)  
7.3) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (PDF)  $f_W(w)$  ของตัวแปรสุ่ม  $W$  (2 คะแนน)



ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

8. ทำการส่งสัญญาณ  $X$  ผ่านช่องสัญญาณซึ่งให้เอาต์พุต  $Y$  ดังสมการต่อไปนี้

$$Y = X + N$$

โดยที่  $N$  เป็นสัญญาณรบกวนที่มีค่าอิสระจากสัญญาณ  $X$  และ  $N$  เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแบบสม่ำเสมอที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f_N(n) = \begin{cases} 1/2, & -1 \leq n \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 8.1) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional PDF)  $f_{Y|X}(y | x)$

(2 คะแนน)

- 8.2) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (PDF)  $f_Y(y)$  ถ้าสัญญาณ  $X$  มีค่าเป็นไปได้คือ  $-10$  และ  $10$  ด้วยความน่าจะเป็น  $0.4$  และ  $0.6$  ตามลำดับ

(5 คะแนน)

- 8.3) จงหาค่าเฉลี่ยของ  $Y$

(3 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

9. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีเหลือง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก

9.1) จงหาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (PMF)  $P_X(x)$  ของ  $X$  เมื่อ  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งที่ใช้ในการหยิบลูกบอลคราวละสองลูกแบบใส่คืนจนกว่าจะหยิบได้ลูกบอลสีเหมือนกันในการหยิบคราวเดียวกันจึงจะหยุด (5 คะแนน)

9.2) จงหาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (PMF)  $P_Y(y)$  ของ  $Y$  เมื่อ  $Y$  เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งที่ใช้ในการหยิบลูกบอลคราวละสองลูกแบบไม่ใส่คืนจนกว่าจะหยิบได้ลูกบอลสีเหมือนกันในการหยิบคราวเดียวกันหรือลูกบอลหมดจึงจะหยุด (5 คะแนน)