แบบฝึกหัดท้ายบท

2.1 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ g(t) ต่อไปนี้

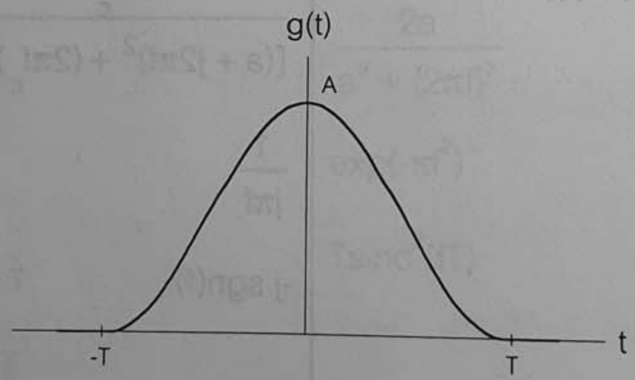
$$g(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}\{1+\cos[\pi t/T]\}, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

วิธีทำ

เราสามารถพรรณนา g(t) ได้ในรูปต่อไปนี้ (ดูลักษณะของสัญญาณในรูปที่ 2P.1)

$$g(t) = \frac{A}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + \frac{A}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$



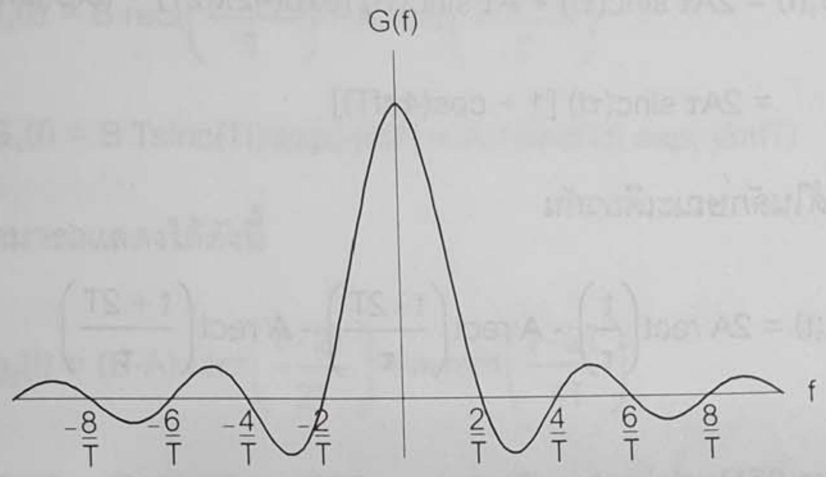
รูปที่ 2P.1 สัญญาณ raised cosine pulse

ทำการแปลงฟูริเยร์โดยอาศัยคุณสมบัติเชิงเส้น และคุณสมบัติการคูณกันทางเวลา ประกอบกับคู่การแปลงฟูริเยร์พื้นฐานตามตารางที่ 2.1

$$G(f) = \frac{A}{2}\,2T\mathrm{sinc}(2fT) + \frac{A}{2}\,\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right] * 2T\mathrm{sinc}(2fT)$$

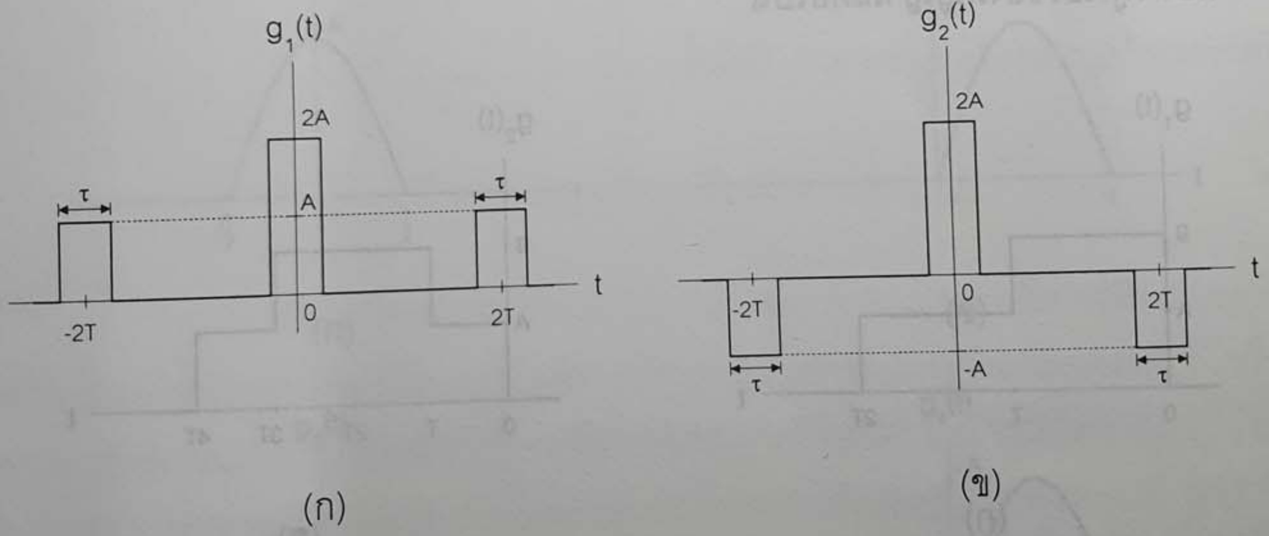
$$= \frac{AT}{2}\left[2\,\mathrm{sinc}(2fT) + \mathrm{sinc}(2fT-1) + \mathrm{sinc}(2fT+1)\right]$$

เมื่อนำ G(f) มาวาดเป็นกราฟจะมีลักษณะตามในรูปที่ 2P.2



รูปที่ 2P.2 สเปกตรัมของสัญญาณ raised cosine pulse

2.2 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ $g_1(t)$ และ $g_2(t)$ ในรูป 2P.3 ทั้งนี้กำหนดให้ $\tau << T$



รูปที่ 2P.3 สัญญาณรูปสี่เหลี่ยมสามลูก

วิธีทำ

เราสามารถพรรณนาสัญญาณ $g_1(t)$ ได้ในรูปต่อไปนี้

$$g_1(t) = 2A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) + A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-2T}{\tau}\right) + A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+2T}{\tau}\right)$$

ทำการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณนี้ได้

$$G_1(f) = 2A\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f) + A\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)\,[\exp(-j2\pi f2T) + \exp(j2\pi f2T)]$$

$$= 2A\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)\,[1 + \cos(4\pi fT)]$$

สำหรับ $g_2(t)$ ก็ทำได้ในลักษณะเดียวกัน

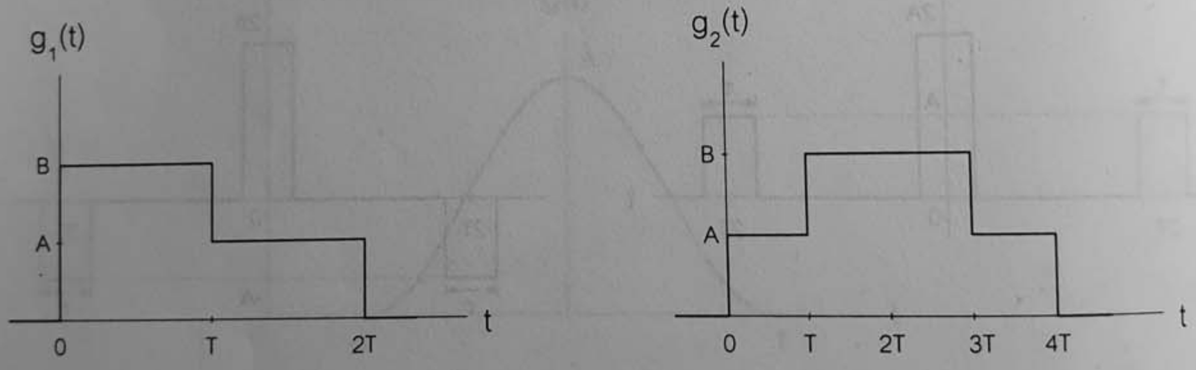
$$g_2(t) = 2A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) - A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-2T}{\tau}\right) - A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+2T}{\tau}\right)$$

และ

$$G_2(f) = 2A\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f) - A\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)\,[\exp(-j2\pi f2T) - \exp(j2\pi f2T)]$$

$$= 2A\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)\,[1 - \cos(4\pi fT)]$$

2.3 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณต่อไปนี้



(ก) (ข)

รูปที่ 2P.4 สัญญาณรูปเหลี่ยม $g_1(t)$ และ $g_2(t)$

วิธีทำ

$$g_1(t) = (B-A)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right)$$

$$G_1(f) = (B-A)\,T\mathrm{sinc}(Tf)\exp(-j\pi fT) + A\,2T\mathrm{sinc}(2Tf)\exp(-j2\pi fT)$$

หรือเขียน $g_1(t)$ ในอีกลักษณะหนึ่ง

$$g_1(t) = B\ \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + A\ \mathrm{rect}\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right)$$

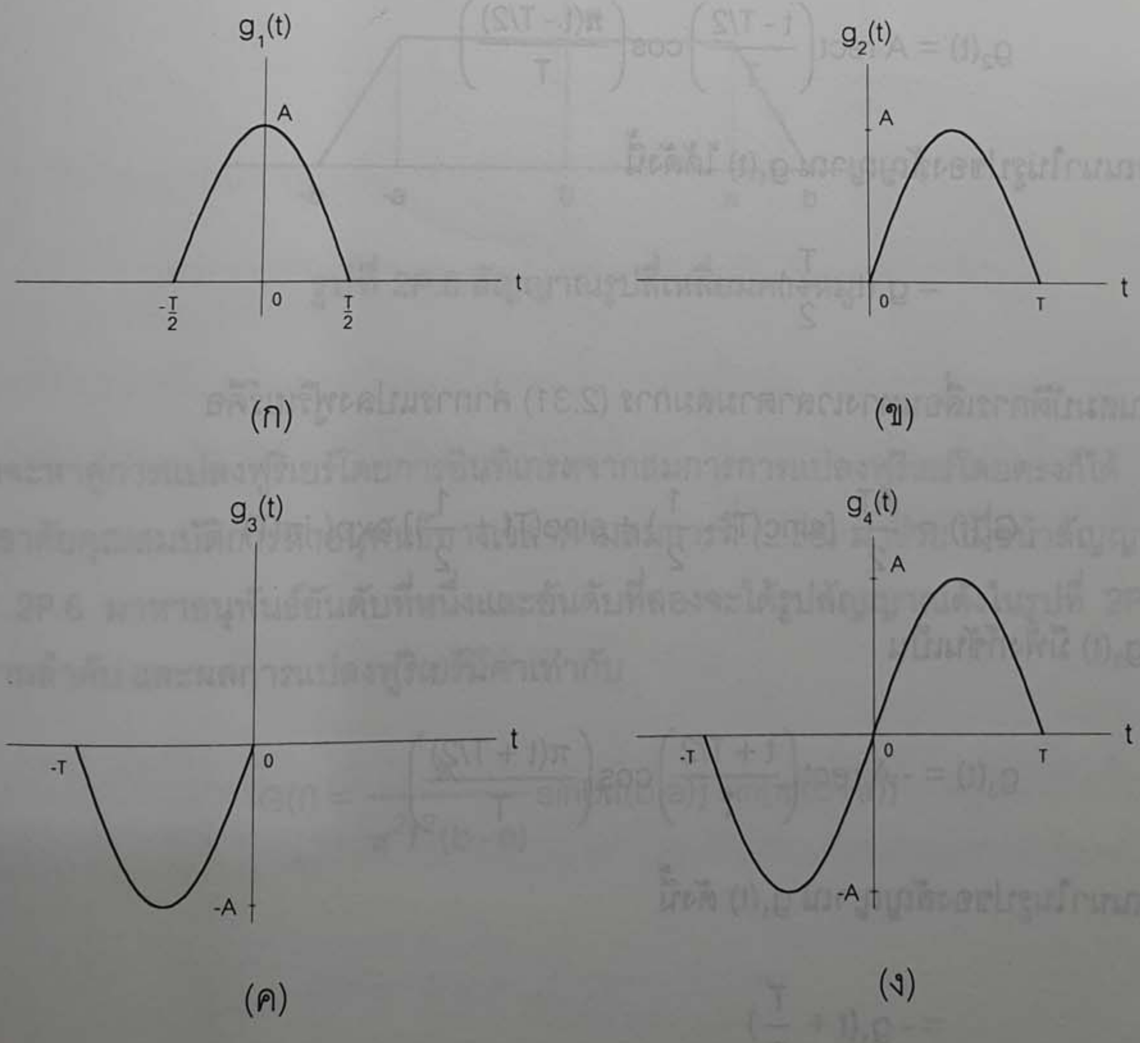
$$G_1(f) = B\ T\mathrm{sinc}(Tf)\ \exp(-j\pi fT) + A\ T\mathrm{sinc}(Tf)\ \exp(-j3\pi fT)$$

สัญญาณ $g_2(t)$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$g_2(t) = (B\text{-}A)\ \mathrm{rect}\left(\frac{t - 2T}{2T}\right) + A\ \mathrm{rect}\left(\frac{t - 2T}{4T}\right)$$

$$G_2(f) = (B\text{-}A)\ 2T\mathrm{sinc}(2Tf)\ \exp(-j4\pi fT) + A\ 4T\mathrm{sinc}(4Tf)\ \exp(-j4\pi fT)$$

2.4 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณต่อไปนี้



รูปที่ 2P.5 สัญญาณไซนูซอยด์ที่มีความกว้างจำกัด

วิธีทำ

เราสามารถแสดงสัญญาณ $g_1(t)$ ได้ในรูปต่อไปนี้

$$g_1(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

ค่าการแปลงฟูริเยร์คือ

$$G_1(f) = AT\,\mathrm{sinc}(Tf) * \frac{1}{2}\,[\delta(f - \frac{1}{2T}) + \delta(f + \frac{1}{2T})]$$

$$= \frac{AT}{2}\,[\mathrm{sinc}(Tf - \frac{1}{2}) + \mathrm{sinc}(Tf + \frac{1}{2})]$$

เราสามารถแสดงสัญญาณ $g_2(t)$ ได้ในรูปต่อไปนี้

$$g_2(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi(t - T/2)}{T}\right)$$

หรือพรรณนาในรูปของสัญญาณ $g_1(t)$ ได้ดังนี้

$$= g_1(t - \frac{T}{2})$$

อาศัยคุณสมบัติการเลื่อนทางเวลาตามสมการ (2.31) ค่าการแปลงฟูริเยร์คือ

$$G_2(f) = \frac{AT}{2}\,[\mathrm{sinc}(Tf - \frac{1}{2}) + \mathrm{sinc}(Tf + \frac{1}{2})]\,\exp(-j\pi fT)$$

สำหรับ $g_3(t)$ มีฟังก์ชันเป็น

$$g_3(t) = -\,A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t + T/2}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi(t + T/2)}{T}\right)$$

หรือพรรณนาในรูปของสัญญาณ $g_1(t)$ ดังนี้

$$= -\,g_1(t + \frac{T}{2})$$

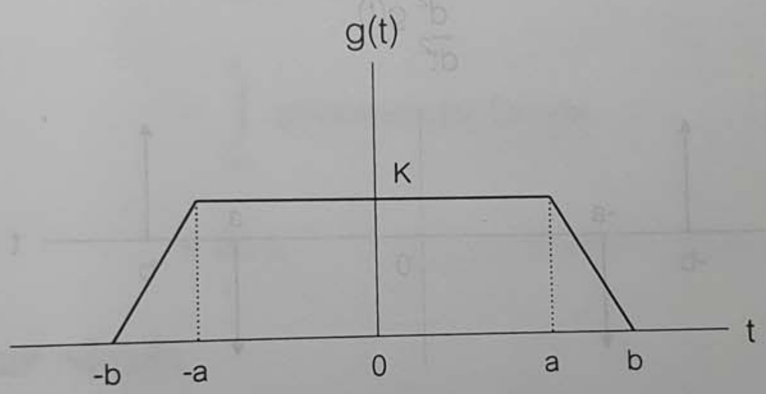
ค่าการแปลงฟูริเยร์คือ

$$G_3(f) = -\frac{AT}{2}\ [\mathrm{sinc}(Tf - \frac{1}{2}) + \mathrm{sinc}(Tf + \frac{1}{2})]\ \exp(j\pi fT)$$

และท้ายสุด $g_4(t)$ สามารถหาได้จากผลรวมระหว่าง $g_2(t)$ และ $g_3(t)$ เพราะฉะนั้นผลการแปลงฟูริเยร์ของ $g_4(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$G_4(f) = -\ jAT\ [\mathrm{sinc}(Tf - \frac{1}{2}) + \mathrm{sinc}(Tf + \frac{1}{2})]\ \sin(\pi fT)$$

2.5 จงหาคู่การแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณรูปสี่เหลี่ยมคางหมู g(t) ในรูปที่ 2P.6

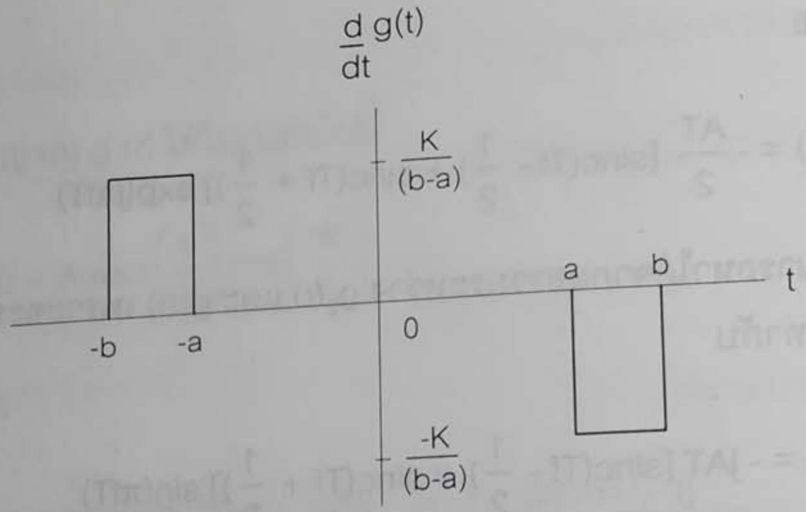


รูปที่ 2P.6 สัญญาณรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

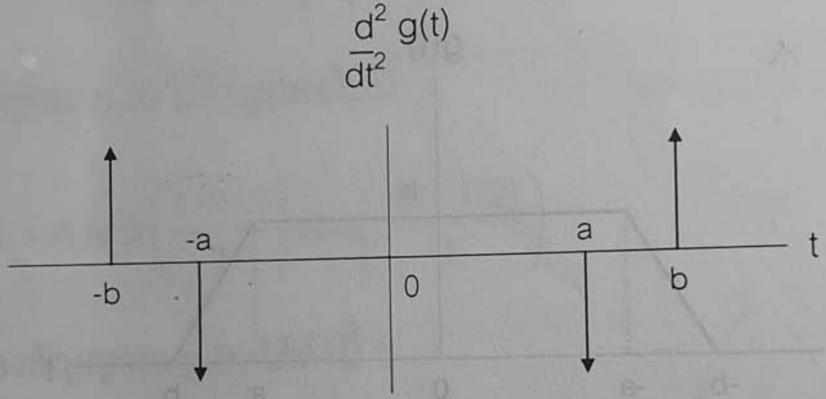
วิธีทำ

เราอาจจะหาคู่การแปลงฟูริเยร์โดยการอินทิเกรตจากสมการการแปลงฟูริเยร์โดยตรงก็ได้ หรือเราอาจจะอาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์ทางเวลาตามสมการที่ (2.38) มาช่วย เมื่อนำสัญญาณ g(t) ในรูปที่ 2P.6 มาหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองจะได้รูปสัญญาณดังในรูปที่ 2P.7 และ 2P.8 ตามลำดับ และผลการแปลงฟูริเยร์มีค่าเท่ากับ

$$G(f) = \frac{K}{\pi^2 f^2 (b - a)} \sin[\pi f(b\text{-}a)]\ \sin[\pi f(b+a)]$$



รูปที่ 2P.7 อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสัญญาณรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปที่ 2P.8 อนุพันธ์อันดับที่สองของสัญญาณรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

2.6 พิจารณาสัญญาณต่อเนื่อง g(t) ที่ประกอบขึ้นจากเส้นตรงจำนวนหนึ่ง เมื่อนำรูปสัญญาณนี้ไปหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาสองครั้งจะได้ฟังก์ชันเดลตาที่มีตัวประกอบถ่วงน้ำหนักคูณอยู่ โดยที่สามารถเขียนได้ในรูปต่อไปนี้

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t) = \sum_i k_i \delta(t - t_i)$$

โดยที่ k_i เป็นค่าที่บ่งถึงความแตกต่างของระดับความชันขององค์ประกอบเส้นตรงแต่ละเส้น จงแสดงว่าค่าการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ g(t) มีค่าเป็นดังนี้คือ

$$G(f) = -\frac{1}{4\pi^2 f^2}\sum_i k_i \exp(-j2\pi f t_i)$$

2.7 กำหนดให้สัญญาณ g(t) เป็นสัญญาณค่าจริงและมีคู่การแปลงฟูริเยร์เท่ากับ G(f) จงแสดงว่า

$$F[g(-t)] = G(-f) = G^*(f)$$

วิธีทำ

จากสมการที่ (2.1)

$$F[g(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(-t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(j2\pi fx)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-j2\pi(-f)x)\,dx$$

$$= G(-f)$$

หาก g(t) เป็นสัญญาณค่าจริงแล้ว

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(j2\pi fx)\,dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-j2\pi fx)\,dx\right]^*$$

$$= G^*(f)$$

เพราะฉะนั้น

$$F[g(-t)] = G(-f) = G^*(f)$$

2.8 จงแสดงว่าฟังก์ชัน g(t) ใด ๆ สามารถแยกออกเป็นองค์ประกอบ 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นสัญญาณคู่ (even) และส่วนที่เป็นสัญญาณคี่ (odd) ได้ดังนี้

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

โดย

$$g_e(t) = \frac{1}{2}[g(t) + g(-t)]$$

และ
$$g_o(t) = \frac{1}{2}[g(t) - g(-t)]$$

วิธีทำ

กำหนดให้ฟังก์ชัน g(t) สามารถแสดงได้เป็น

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

ดังนั้น

$$g(-t) = g_e(-t) + g_o(-t)$$

$$= g_e(t) - g_o(t)$$

จากความสัมพันธ์ของสองสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$g_e(t) = \frac{1}{2}[g(t) + g(-t)]$$

และ
$$g_o(t) = \frac{1}{2}[g(t) - g(-t)]$$

2.9 จงแยกฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย (unit step function) ออกเป็นองค์ประกอบสัญญาณคู่และคี่ จากนั้นหาค่าการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณแต่ละองค์ประกอบ

วิธีทำ

องค์ประกอบสัญญาณคู่ของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วยคือ

$$u_e(t) = \frac{1}{2}$$

และ

$$F[u_e(t)] = \frac{1}{2}\delta(f)$$

องค์ประกอบสัญญาณคี่ของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วยคือ

$$u_o(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

และ

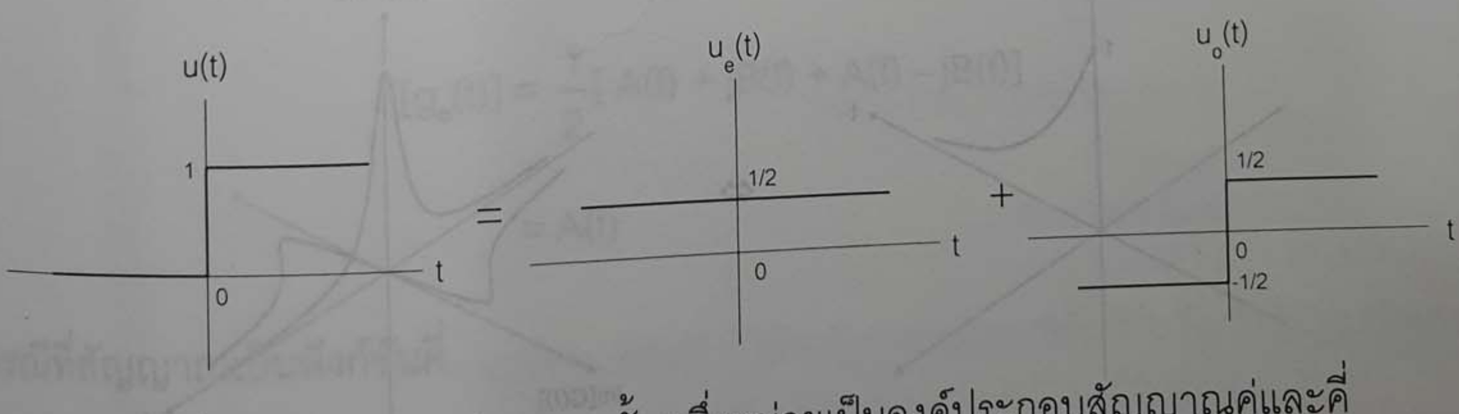
$$F[u_o(t)] = \frac{1}{j2\pi f}$$

ดูรูปที่ 2P.9 ประกอบ นั่นคือ

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

และ

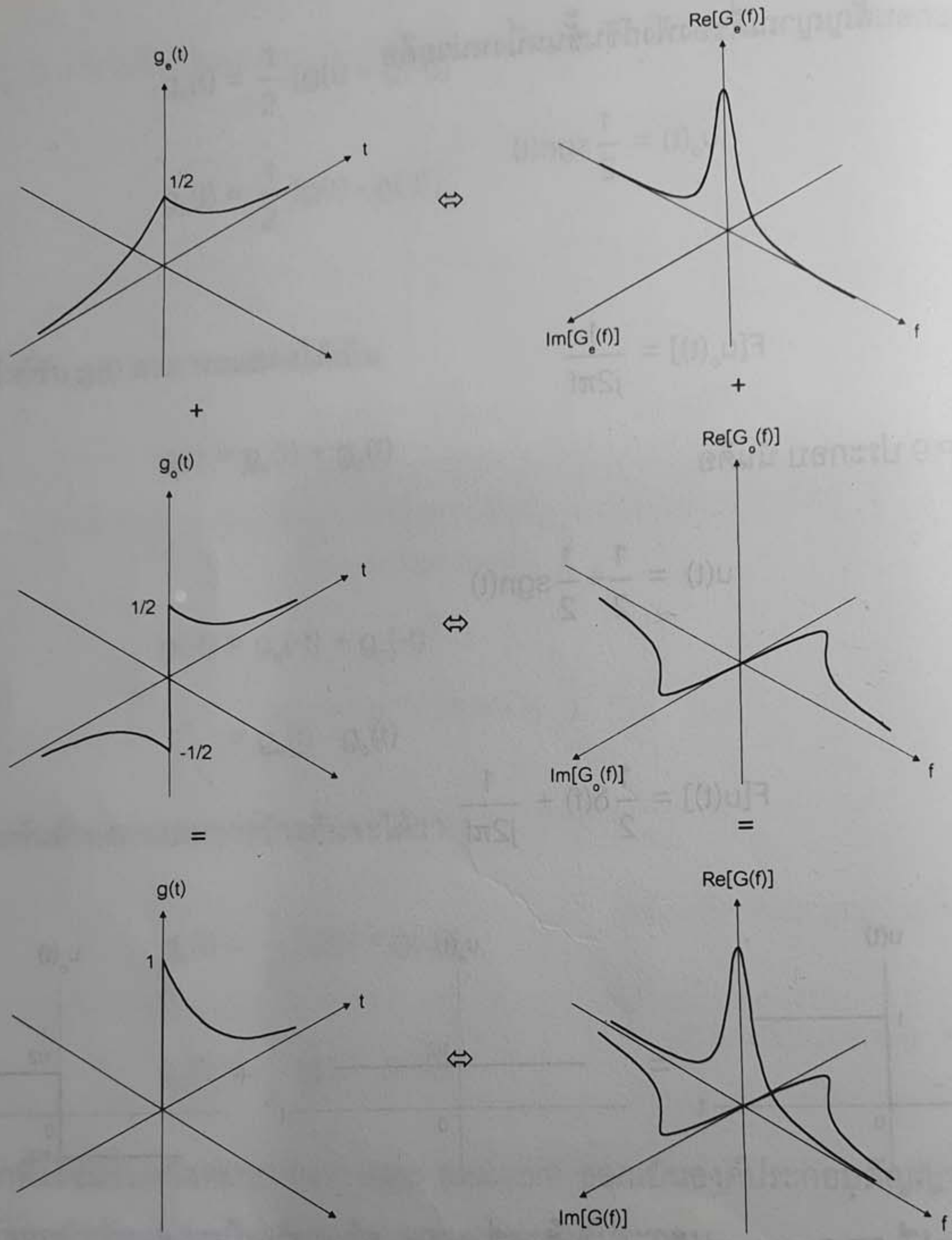
$$F[u(t)] = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$



รูปที่ 2P.9 การแยกสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วยเป็นองค์ประกอบสัญญาณคู่และคี่

2.10 จงแยกสัญญาณเอกซ์โพเนนเชียล g(t) ในรูปที่ 2P.10 ออกเป็นองค์ประกอบสัญญาณคู่และคี่ จากนั้นหาค่าการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณแต่ละองค์ประกอบ และของสัญญาณ g

(t)



รูปที่ 2P.10 การแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณเอกซ์โพเนนเชียลโดยการแยกเป็นองค์ประกอบสัญญาณคู่และคี่

2.11 กำหนดให้ $g(t)$ เป็นสัญญาณค่าจริง จงแสดงว่าถ้าสัญญาณ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่แล้ว คู่การแปลงฟูริเยร์ของ $g(t)$ จะเป็นฟังก์ชันค่าจริงเสมอ และหากสัญญาณ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่แล้ว คู่การแปลงฟูริเยร์ของ $g(t)$ จะเป็นฟังก์ชันค่าจินตภาพเสมอ

วิธีทำ

กำหนดให้คู่การแปลงฟูริเยร์ของ g(t) แสดงในรูปของ

$$F[g(t)] = G(f) = A(f) + jB(f)$$

จากความสัมพันธ์ในแบบฝึกหัดข้อ 2.7 ที่กล่าวว่าถ้า g(t) เป็นสัญญาณค่าจริงแล้ว

$$F[g(-t)] = G^*(f)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$F[g(-t)] = G^*(f) = A(f) - jB(f)$$

อาศัยความสัมพันธ์ในแบบฝึกหัดในข้อที่ 2.8

กรณีที่สัญญาณเป็นฟังก์ชันคู่

$$g_e(t) = \frac{1}{2}[g(t) + g(-t)]$$

$$F[g_e(t)] = \frac{1}{2}[A(f) + jB(f) + A(f) - jB(f)]$$

$$= A(f)$$

กรณีที่สัญญาณเป็นฟังก์ชันคี่

$$g_o(t) = \frac{1}{2}[g(t) - g(-t)]$$

$$F[g_o(t)] = \frac{1}{2}[A(f) + jB(f) - A(f) + jB(f)]$$

$$= jB(f)$$

จะเห็นว่าหากสัญญาณค่าจริงที่มีคุณลักษณะเป็นฟังก์ชันคู่ล้วน ๆ คู่การแปลงฟูริเยร์ก็จะเป็นฟังก์ชันค่าจริง และหากสัญญาณเป็นฟังก์ชันคี่ล้วน ๆ คู่การแปลงฟูริเยร์ก็จะเป็นฟังก์ชันค่าจินตภาพ

2.12 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณต่อไปนี้ และให้สังเกตถึงคุณลักษณะสัญญาณที่มีความสมมาตรแบบที่เป็นฟังก์ชันคู่และคี่ที่มีต่อคู่การแปลงฟูริเยร์ในเชิงว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริงหรือจินตภาพ

(ก) $g_1(t) = \delta(t+10) + 2\delta(t) + \delta(t-10)$

(ข) $g_2(t) = \delta(t+5) - \delta(t-5)$

(ค) $g_3(t) = \sum_{n=0}^{4}(n+1)\,\delta(t-2n)$

วิธีทำ

(ก)
$$G_1(f) = F[\delta(t+10) + 2\delta(t) + \delta(t-10)]$$
$$= \exp(j2\pi f10) + 2 + \exp(-j2\pi f10)$$
$$= 2 + 2\cos(2\pi f10)$$

สังเกตว่า $g_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ค่าการแปลงฟูริเยร์เป็นฟังก์ชันค่าจริง

(ข)
$$G_2(f) = F[\delta(t+5) - \delta(t-5)]$$
$$= \exp(j2\pi f5) - \exp(-j2\pi f5)$$
$$= 2j\sin(2\pi f5)$$

สังเกตว่า $g_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ค่าการแปลงฟูริเยร์เป็นฟังก์ชันค่าจินตภาพ

(ง)
$$G_3(f) = F[\sum_{n=0}^{4}(n+1)\,\delta(t-2n)]$$
$$= F[\delta(t) + 2\delta(t-2) + 3\delta(t-4) + 4\delta(t-6) + 5\delta(t-8)]$$
$$= 1 + 2\exp(-j2\pi f2) + 3\exp(-j2\pi f4) + 4\exp(-j2\pi f6) + 5\exp(-j2\pi f8)$$

สังเกตว่า $g_3(t)$ ไม่เป็นฟังก์ชันคี่หรือคู่เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง ค่าการแปลงฟูริเยร์เป็นฟังก์ชันที่มีทั้งค่าจริงและจินตภาพ

2.13 จงแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันเดลตาโดยอาศัยวิธีการลิมิตจาก

(ก) ฟังก์ชันรูปสี่เหลี่ยม ที่มีขนาดพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่งหน่วย

(ข) ฟังก์ชันรูปสามเหลี่ยม ที่มีขนาดพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่งหน่วย

(ค) ฟังก์ชันซิงก์ ที่มีขนาดพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

(ก) ฟังก์ชันเดลตาสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันรูปสี่เหลี่ยมได้ดังนี้

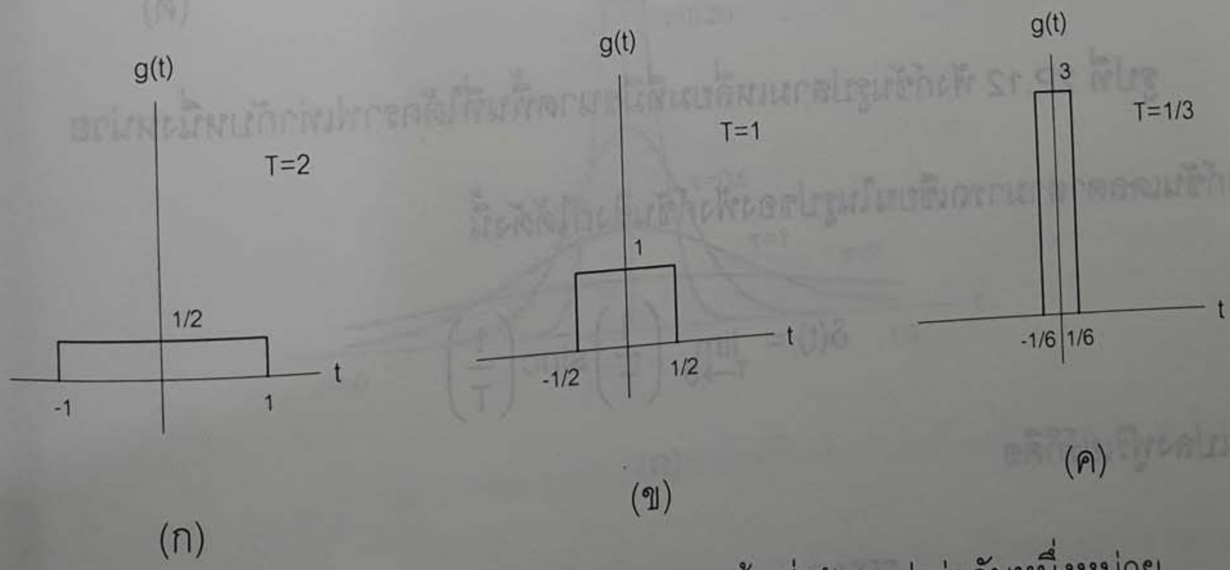
$$\delta(t) = \lim_{T\to 0}\left(\frac{1}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

ฉะนั้นค่าการแปลงฟูริเยร์ก็คือ

$$F[\delta(t)] = F[\lim_{T\to 0}\left(\frac{1}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)]$$

$$= \lim_{T\to 0}\mathrm{sinc}(Tf)$$

$$= 1$$



รูปที่ 2P.11 ฟังก์ชันรูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่งหน่วย

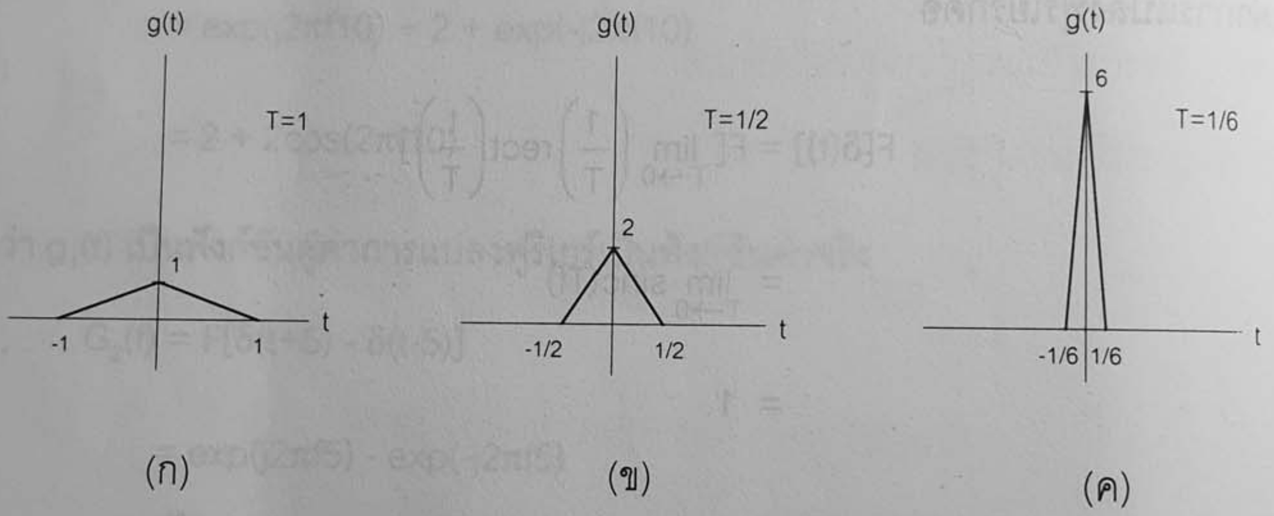
(ข) ฟังก์ชันเดลตาสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันรูปสามเหลี่ยมได้ดังนี้

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \begin{cases} \frac{1}{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right), & |t| \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

ฉะนั้นค่าการแปลงฟูริเยร์ก็คือ

$$F[\delta(t)] = \lim_{T\to 0} \text{sinc}^2(fT)$$

$$= 1$$



รูปที่ 2P.12 ฟังก์ชันรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่งหน่วย

(ค) ฟังก์ชันเดลตาสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันซิงก์ได้ดังนี้

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \left(\frac{1}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

ค่าการแปลงฟูริเยร์ก็คือ

$$F[\delta(t)] = \lim_{T\to 0} \text{rect}(Tf)$$

$$= 1$$

2.14 จงแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันเดลตาโดยอาศัยวิธีการลิมิตจากสัญญาณพัลส์แบบเกาส์ (Gaussian pulse) ที่พื้นที่ใต้กราฟมีขนาดเท่ากับหนึ่งต่อไปนี้

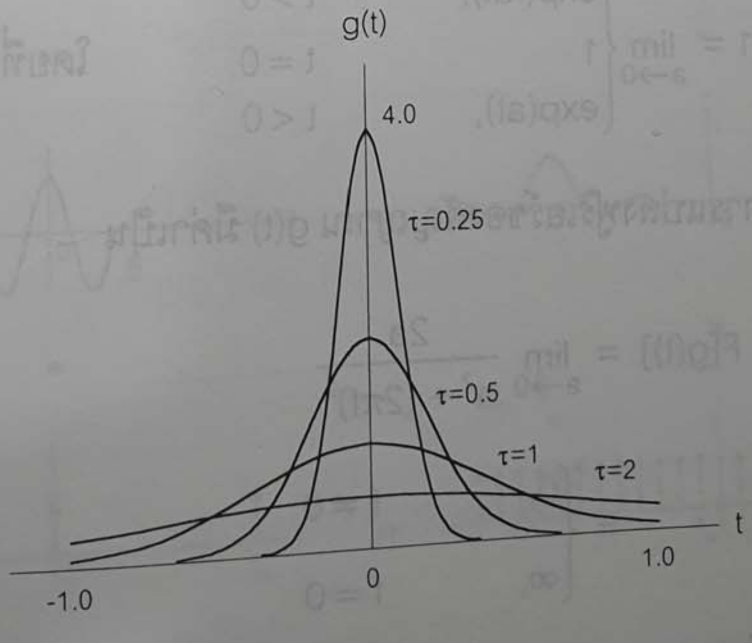
$$g(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{\pi t^2}{\tau^2}\right)$$

โดย τ เป็นค่าที่แปรเปลี่ยนได้เพื่อให้ได้รูปสัญญาณที่มีคุณลักษณะตามที่ต้องการ สังเกตว่าหาก τ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์มาก ๆ สัญญาณที่ได้จะกลายเป็นฟังก์ชันเดลตาเพราะพัลส์มีความกว้างลดลงเรื่อย ๆ และแอมพลิจูดก็เพิ่มสูงขึ้นโดยที่พื้นที่ใต้กราฟมีขนาดคงที่เท่ากับหนึ่ง ดูตัวอย่างรูปสัญญาณที่ τ ค่าต่าง ๆ ในรูปที่ 2P.13(ก)

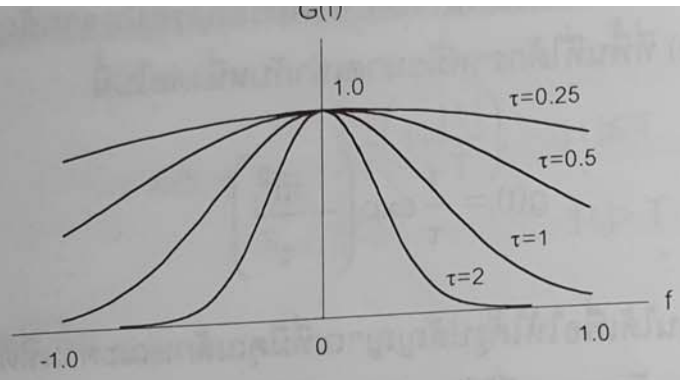
ส่วนสเปกตรัมของสัญญาณ g(t) ก็สามารถหาได้และมีค่าเท่ากับ

$$G(f) = \exp(-\pi\tau^2 f^2)$$

ดูสเปกตรัมของสัญญาณ g(t) ได้ในรูปที่ 2P.13(ข) ที่ τ ค่าต่าง ๆ กัน



(ก)



(ข)

รูปที่ 2P.13 (ก) สัญญาณพัลส์รูปเกาส์ (ข) สเปกตรัมความถี่

2.15 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณกระแสตรงโดยอาศัยวิธีการลิมิตจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลแบบสองด้าน

วิธีทำ

$$g(t) = 1 = \lim_{a\to 0}\begin{cases}\exp(-at), & t>0\\ 1 & t=0\\ \exp(at), & t<0\end{cases} \qquad \text{โดยที่ } a>0$$

จากสมการที่ (2.23) ค่าการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ g(t) มีค่าเป็น

$$F[g(t)] = \lim_{a\to 0}\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

$$= \begin{cases}0, & f\neq 0\\ \infty, & f=0\end{cases}$$

ผลที่ได้จะมีคุณลักษณะที่เหมือนกับฟังก์ชันเดลตาในโดเมนความถี่

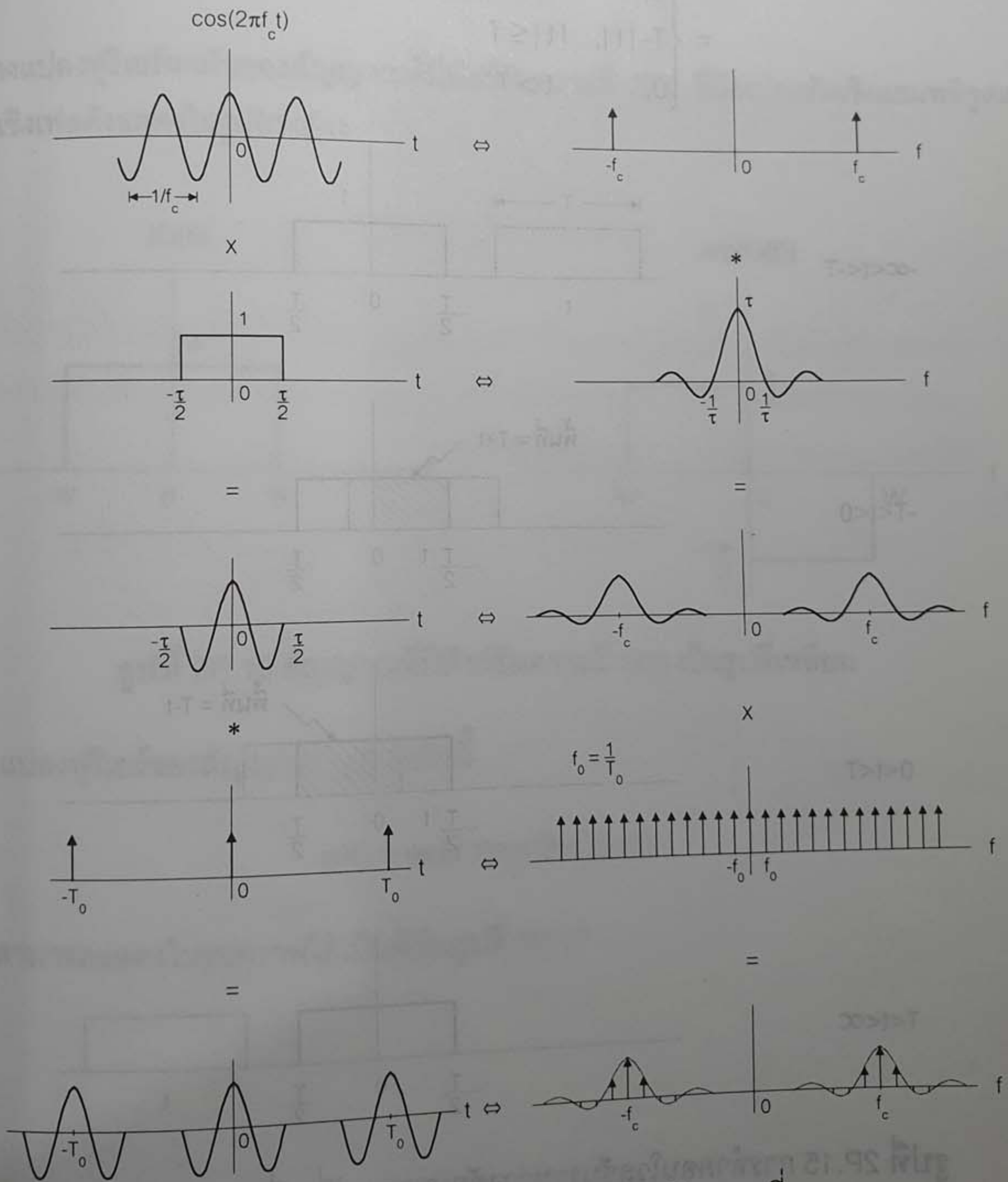
2.16 จงหาค่าการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ g(t) ต่อไปนี้

$$g(t) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT_0)\right] * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos(2\pi f_c t) \qquad \text{โดย } f_c >> 1/\tau$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-mT_0}{\tau}\right) \cos[2\pi f_c(t-mT_0)]$$

ค่าการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชัน g(t) มีค่าเท่ากับ

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{2} [\text{sinc}(nf_0-f_c)\tau + \text{sinc}(nf_0+f_c)\tau]\, \delta(f-nf_0)$$



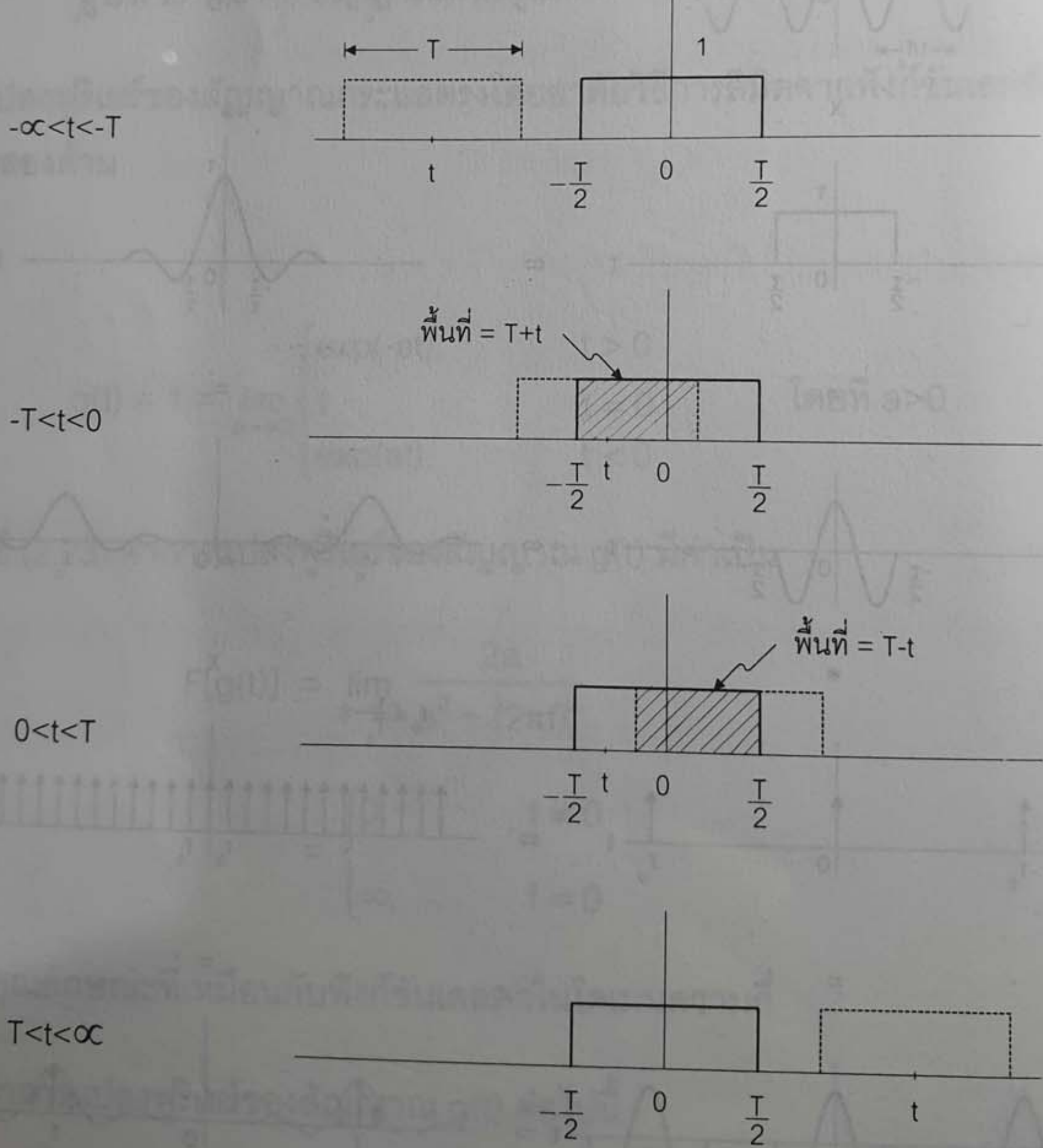
รูปที่ 2P.14 สัญญาณ g(t) สเปกตรัมความถี่

2.17 จงแสดงให้เห็นว่าสัญญาณรูปสามเหลี่ยม g(t) สามารถแสดงได้ในรูปของการทำคอนโวลูชันระหว่างสัญญาณรูปสี่เหลี่ยม 2 สัญญาณ จากนั้นอาศัยคุณสมบัติคอนโวลูชันทางเวลาในการหาค่าการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณรูปสามเหลี่ยมดังกล่าว

วิธีทำ

$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & t < -T \\ T - |t|, & |t| \le T \\ 0, & t > T \end{cases}$$



รูปที่ 2P.15 การทำคอนโวลูชันระหว่างสัญญาณรูปสี่เหลี่ยม 2 สัญญาณ

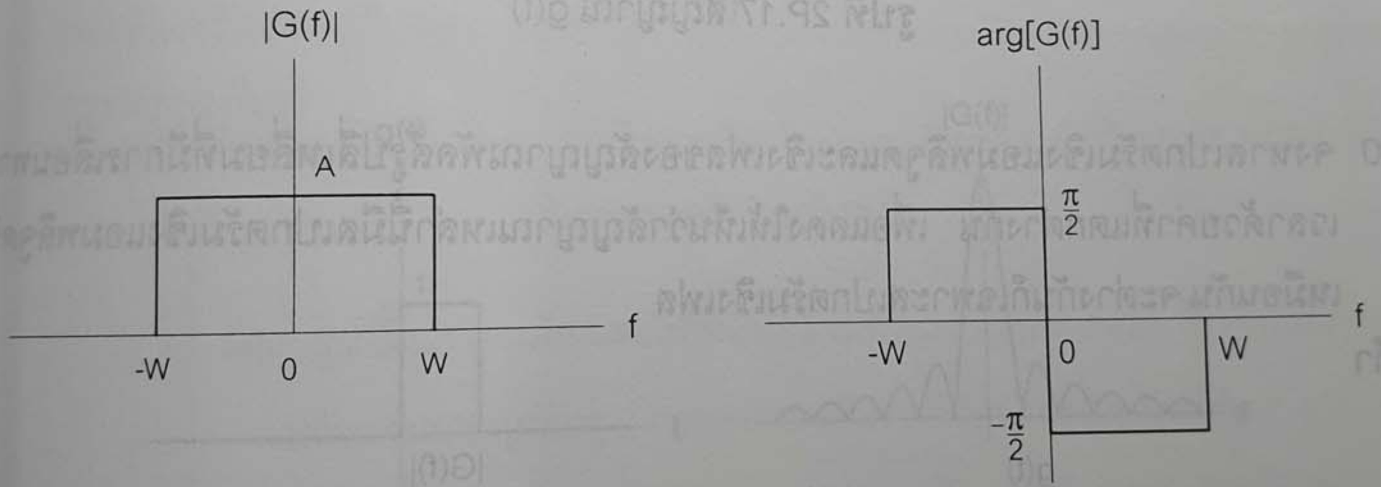
จากคู่การแปลงฟูริเยร์

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

และอาศัยคุณสมบัติการคอนโวลูชันทางเวลา จะได้ว่า

$$G(f) = T^2\mathrm{sinc}^2(fT)$$

2.18 จงแปลงฟูริเยร์ผกผันของสัญญาณที่มีฟังก์ชันความถี่ G(f) ที่มีสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดและเชิงเฟสดังแสดงในรูปข้างล่าง

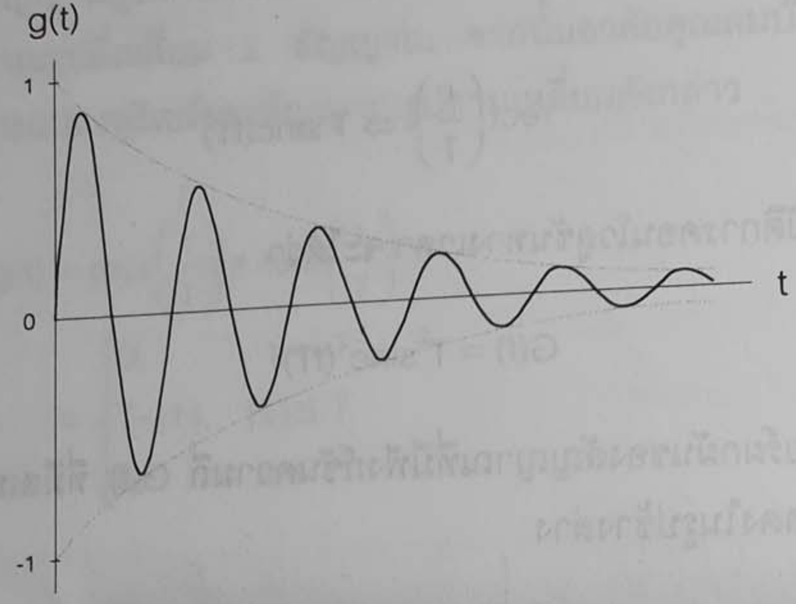


รูปที่ 2P.16 สัญญาณที่มีฟังก์ชันความถี่ G(f) เป็นรูปสี่เหลี่ยม

2.19 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ g(t) ต่อไปนี้

$$g(t) = \exp(-t)\sin(2\pi f_c t)u(t)$$

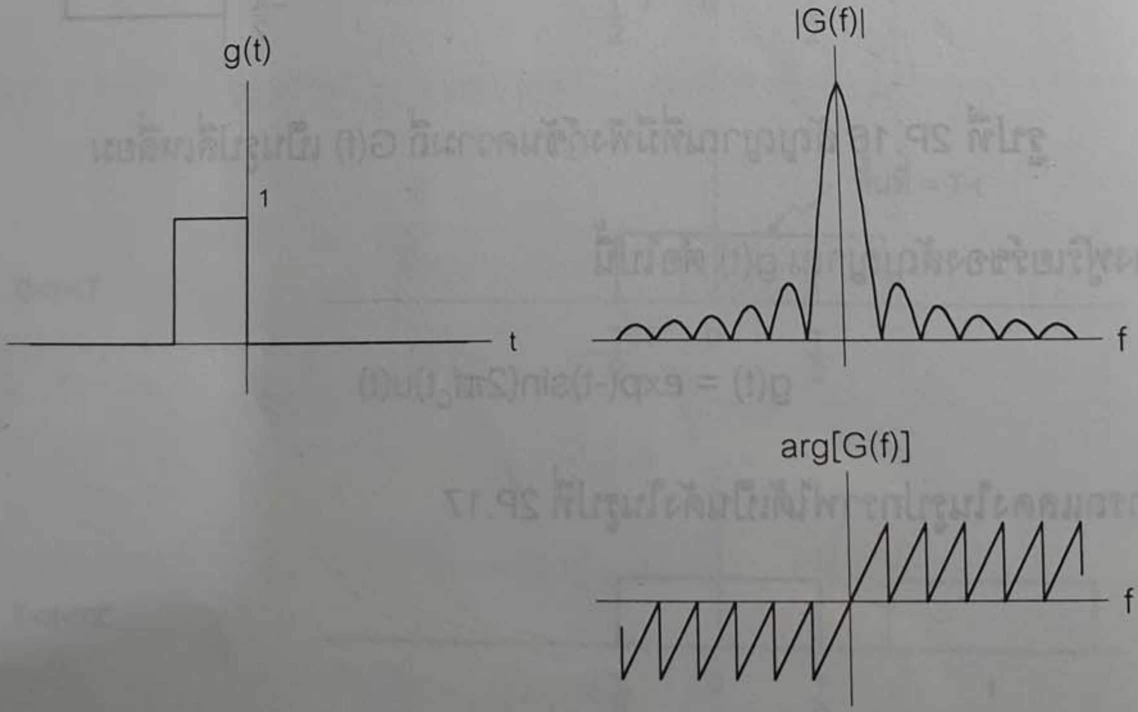
ซึ่งสามารถแสดงในรูปกราฟได้เป็นดังในรูปที่ 2P.17



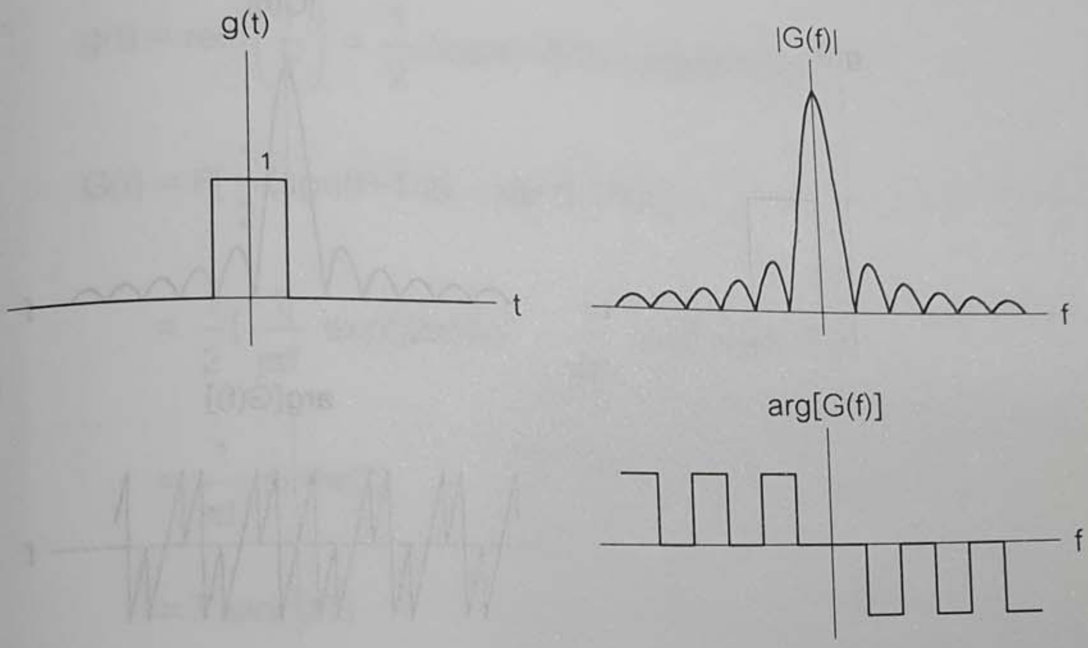
รูปที่ 2P.17 สัญญาณ g(t)

2.20 จงหาสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดและเชิงเฟสของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมที่มีการเลื่อนทางเวลาด้วยค่าที่แตกต่างกัน เพื่อแสดงให้เห็นว่าสัญญาณเหล่านี้มีสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดที่เหมือนกัน จะต่างกันก็เฉพาะสเปกตรัมเชิงเฟส

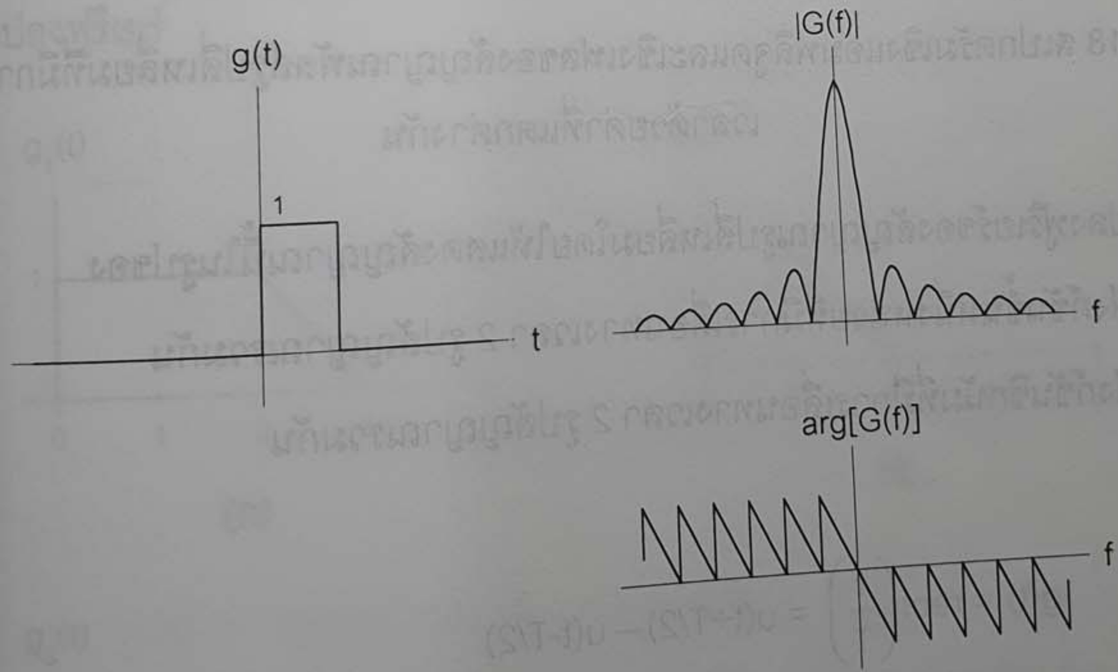
วิธีทำ



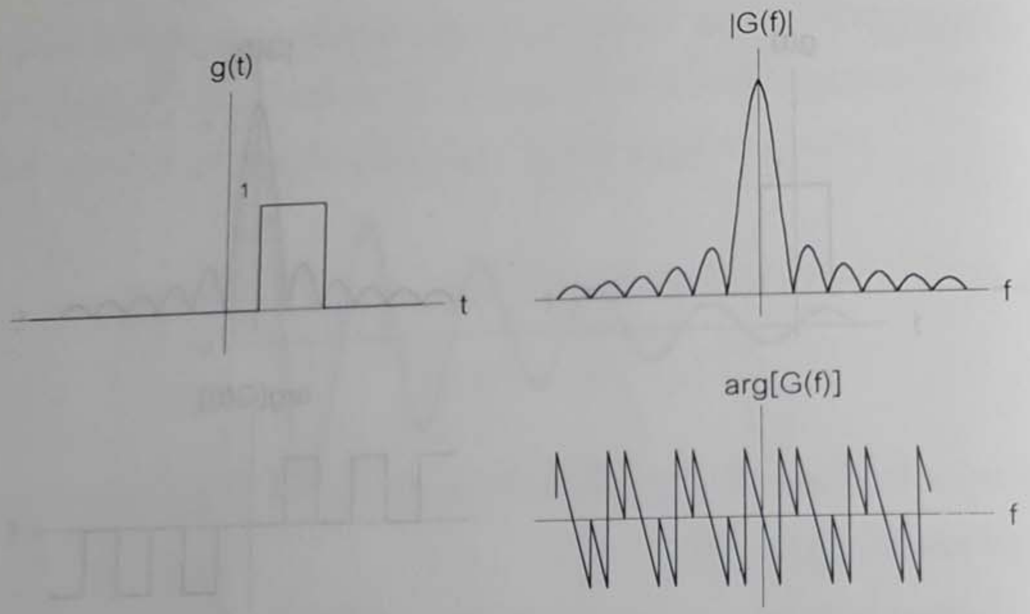
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 2P.18 สเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดและเชิงเฟสของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมที่มีการเลื่อนทางเวลาด้วยค่าที่แตกต่างกัน

2.21 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณรูปสี่เหลี่ยมโดยให้แสดงสัญญาณนี้ในรูปของ

(ก) ฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วยที่มีการเลื่อนทางเวลา 2 รูปสัญญาณรวมกัน

(ข) ฟังก์ชันซิกนัมที่มีการเลื่อนทางเวลา 2 รูปสัญญาณรวมกัน

วิธีทำ

(ก)
$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = u(t+T/2) - u(t-T/2)$$

$$G(f) = F[u(t+T/2) - u(t-T/2)]$$

$$= [\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}]\exp(j2\pi fT/2) - [\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}]\exp(-j2\pi fT/2)$$

$$= [\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}]\, 2j\sin(\pi fT) = \frac{1}{\pi f}\sin(\pi fT)$$

$$= T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

(ข) $g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{2}\,(\text{sgn}(t+T/2) - \text{sgn}(t-T/2))$

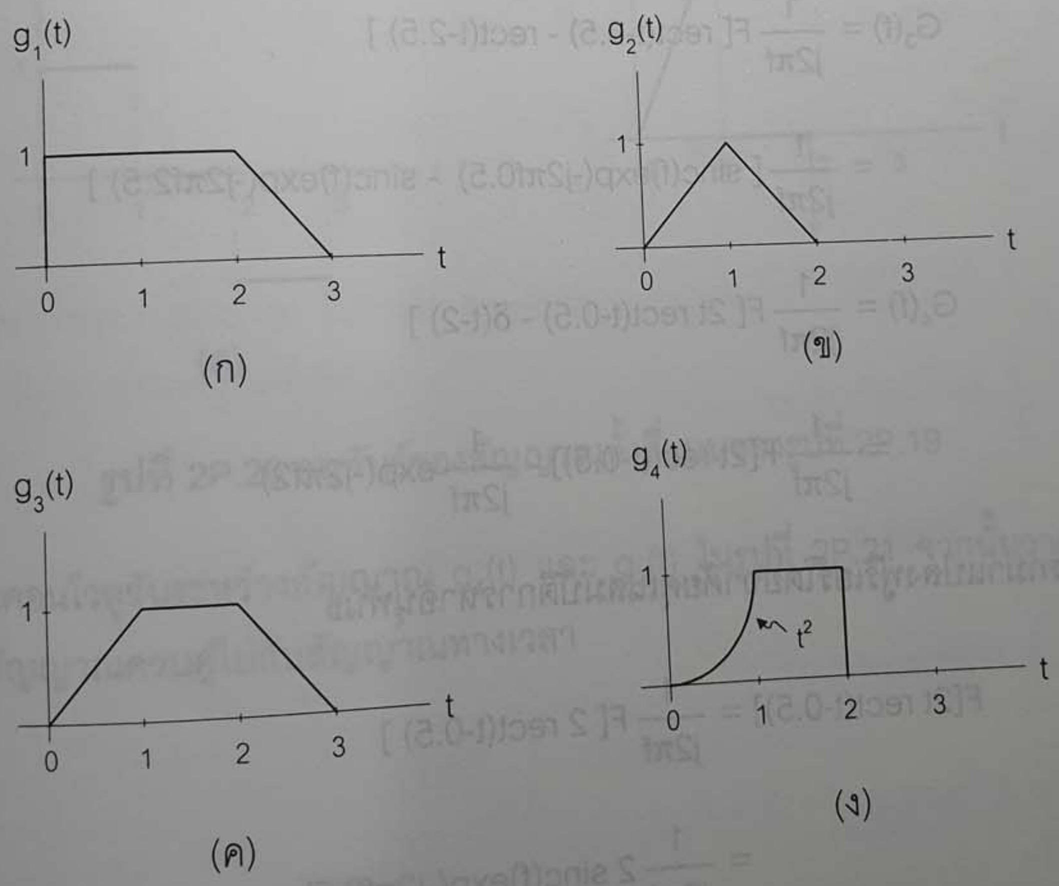
$$G(f) = F[\frac{1}{2}(\text{sgn}(t+T/2) - \text{sgn}(t-T/2))]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{j\pi f}\ \exp(j2\pi fT/2) - \frac{1}{j\pi f}\ \exp(-j2\pi fT/2)]$$

$$= \frac{1}{\pi f}\ \sin(\pi fT)$$

$$= T\ \text{sinc}(fT)$$

2.22 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณในรูป 2P.19 โดยอาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์ทางเวลาของการแปลงฟูริเยร์



รูปที่ 2P.19 สัญญาณสี่รูปแบบ

วิธีทำ

อาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์ของการแปลงฟูริเยร์

$$G(f) = \frac{1}{j2\pi f} F[\frac{d}{dt} g(t)]$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสัญญาณทั้งหมดจะได้เป็นสัญญาณดังในรูปที่ 2P.20

$$G_1(f) = \frac{1}{j2\pi f} F[\ \delta(t) - rect(t-2.5)\ ]$$

$$= \frac{1}{j2\pi f} [\ 1 - sinc(f)exp(-j2\pi f2.5)\ ]$$

$$G_2(f) = \frac{1}{j2\pi f} F[\ rect(t-0.5) - rect(t-1.5)\ ]$$

$$= \frac{1}{j2\pi f} [\ sinc(f)exp(-j2\pi f0.5) - sinc(f)exp(-j2\pi f1.5)\ ]$$

$$G_3(f) = \frac{1}{j2\pi f} F[\ rect(t-0.5) - rect(t-2.5)\ ]$$

$$= \frac{1}{j2\pi f} [\ sinc(f)exp(-j2\pi f0.5) - sinc(f)exp(-j2\pi f2.5)\ ]$$

$$G_4(f) = \frac{1}{j2\pi f} F[\ 2t\ rect(t-0.5) - \delta(t-2)\ ]$$

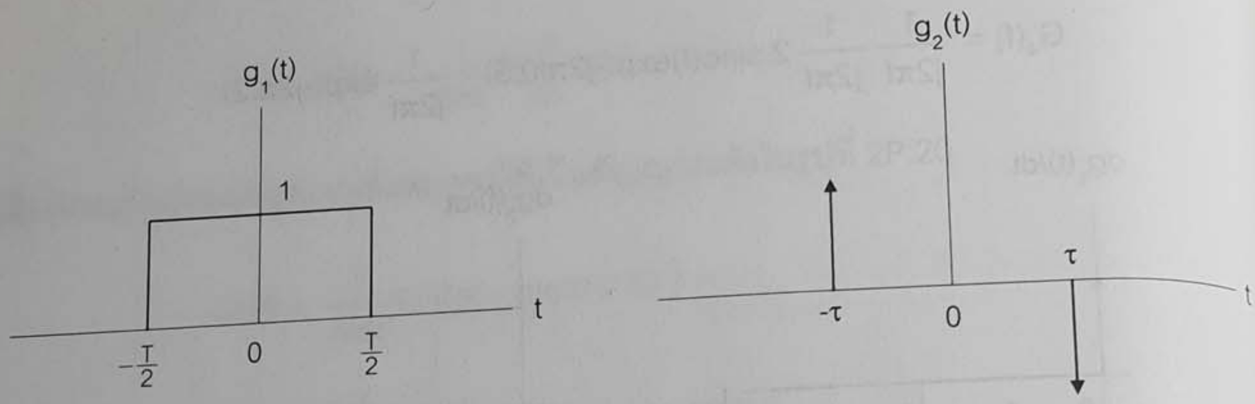
$$= \frac{1}{j2\pi f} F[2t\ rect(t-0.5)] - \frac{1}{j2\pi f} exp(-j2\pi f2)$$

แยกพจน์แรกมาแปลงฟูริเยร์โดยอาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์

$$F[2t\ rect(t-0.5)] = \frac{1}{j2\pi f} F[\ 2\ rect(t-0.5)\ ]$$

$$= \frac{1}{j2\pi f} 2\ sinc(f)exp(-j2\pi f0.5)$$

เพราะฉะนั้นจะได้



รูปที่ 2P.21 สัญญาณ $g_1(t)$ และ $g_2(t)$

2.24 จงหาค่าของการอินทิเกรตต่อไปนี้

(ก) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\exp(-2t)\, dt$

(ข) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(t+4)\, dt$

(ค) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)(t^2 + 2t - 1)\, dt$

(ง) $\int_{2}^{7} \delta(t-5)\exp(-t)\, dt$

(จ) $\int_{0}^{5} \delta(t+1)(t^2 - 3)\, dt$

(ฉ) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(1)}(t)/dt\, dt$

(ช) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2t)\exp(-t)\, dt$

(ซ) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(2)}(t-1)/dt\,(t^3 + 2t + 1)\, dt$

วิธีทำ

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันเดลตาในสมการที่ (2.64) จะได้ผลการอินทิเกรตดังต่อไปนี้

(ก) 1

(ข) 4

(ค) 14

(ง) exp(-5)

(จ) 0

(ฉ) 0

(ช) $\frac{1}{2}$

(ซ) 6

2.25 จงหา $y(t) = g_1(t) * g_2(t)$ โดย

$$g_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_0 \\ 0, & t \quad \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} [1 - 2|t|], & |t| < T_0/2 \\ 0, & t \quad \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

2.26 จงใช้เงื่อนไขของ Dirichlet ในการทดสอบว่าสัญญาณไซนูซอยด์ความถี่เดียว $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ มีคู่การแปลงฟูริเยร์หรือไม่

วิธีทำ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(2\pi f_0 t)|\, dt$$

$$= (\infty)2 \int_{-T/4}^{T/4} \cos(2\pi f_0 t)\, dt$$

$$= \infty$$

จะเห็นว่าสัญญาณไซนูซอยด์ความถี่เดียวไม่มีคุณสมบัติที่ตรงตามเงื่อนไขของ Dirichlet ถึงแม้ว่าจริง ๆ แล้วเราสามารถหาคู่การแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณนี้ได้

2.27 กำหนดให้คู่การแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ g(t) คือ G(f) จงหาค่าการแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณ $g(at-t_0)$

วิธีทำ

$$F[g(at-t_0)] = \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)\exp(-j2\pi ft_0/a)$$

2.28 จงแสดงว่าคุณสมบัติ sifting ของฟังก์ชันเดลตาในสมการ (2.60) สามารถนำมาใช้ในการหาความสัมพันธ์ตามสมการที่ (2.64) ดังนี้คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)/dt\, g(t)\, dt = (-1)^n g^{(n)}(t)/dt\,|_{t=t_0}$$

เครื่องหมาย $^{(n)}$ แทนการหาอนุพันธ์อันดับที่ n (ข้อเสนอแนะ: ใช้การอินทิเกรตแยกส่วน)

วิธีทำ

จากวิธีการอินทิเกรตแยกส่วน

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\, dv = uv - \int_{-\infty}^{\infty} v\, du$$

ให้ $u = g(t)$ และ $dv = \delta^{(n)}(t-t_0)/dt\, dt$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)/dt\, g(t)\, dt = g(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)/dt\, dt - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)/dt\, dt\ \ dg(t)$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(t-t_0)/dt\, g^{(1)}(t)/dt\, dt$$

อาศัยการทำอินทิเกรตแยกส่วนไปเรื่อย ๆ ทั้งหมด n รอบก็จะได้

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, g^{(n)}(t)\, dt$$

จากนั้นอาศัยคุณสมบัติ sifting ในสมการที่ (2.61) จะได้

$$= (-1)^n g^{(n)}(t)/dt\,|_{t=t_0}$$

2.29 จงหาผลการอินทิเกรตของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยอาศัยทฤษฎีพลังงานของเรย์ลี

(ก) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2}$

(ข) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{\left(a^2 + (2\pi f)^2\right)^2}$

(ค) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(Tf)\, df$

(ง) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^4(Tf)\, df$

วิธีทำ

(ก) จากทฤษฎีพลังงานของเรย์ลี

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)G^*(x)\, dx$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\, df$$

กำหนดให้

$$G(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

และ

$$G^*(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

เนื่องจาก

จากนั้นอาศัยคุณสมบัติ sifting ในสมการที่ (2.61) จะได้

$$= (-1)^n g^{(n)}(t)/dt\,|_{t=t_0}$$

2.29 จงหาผลการอินทิเกรตของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยอาศัยทฤษฎีพลังงานของเรย์ลี

(ก) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2}$

(ข) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{\left(a^2 + (2\pi f)^2\right)^2}$

(ค) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(Tf)\, df$

(ง) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^4(Tf)\, df$

วิธีทำ

(ก) จากทฤษฎีพลังงานของเรย์ลี

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)G^*(x)\, dx$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\, df$$

กำหนดให้

$$G(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

และ

$$G^*(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

เนื่องจาก

$$\exp(-at)u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-at)u(t)|^2 \, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} \exp(-2at) \, dt$$

$$= -\frac{1}{2a} \exp(-2at) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2a}$$

(ข) กำหนดให้

$$G(f) = G^*(f) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

เนื่องจาก

$$\exp(-a|t|) \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{\left(a^2 + (2\pi f)^2\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{2a} \exp(-a|t|)|^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{4a^2} [\int_{0}^{\infty} \exp(-2at) \, dt + \int_{-\infty}^{0} \exp(2at) \, dt$$

$$= \frac{1}{4a^2} [-\frac{1}{2a} \exp(-2at) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2a} \exp(2at) \Big|_{-\infty}^{0}]$$

$$= \frac{1}{4a^3}$$

(ค) กำหนดให้

$$G(f) = G^*(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

เนื่องจาก

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(Tf)\,df = \frac{1}{T^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{1}{T}$$

(ง) กำหนดให้

$$G(f) = G^*(f) = T\mathrm{sinc}^2(fT)$$

เนื่องจาก

$$\begin{cases} 1-\dfrac{|t|}{T}, & |t| < T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases} \Leftrightarrow T\mathrm{sinc}^2(fT)$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^4(Tf)\,df = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T} \left|1-\frac{|t|}{T}\right|^2 dt$$

$$= \frac{2T}{3}$$

2.30 จงแปลงฟูริเยร์ของสัญญาณต่อไปนี้

$$g(t) = \frac{\sin^2(5t)}{t}$$

วิธีทำ

แนะนำให้อาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ (2.39) มาช่วยในการแปลงฟูริเยร์

$$-j2\pi t g(t) \Leftrightarrow \frac{d}{df} G(f)$$

2.31 จงแปลงฟูริเยร์ผกผันของสัญญาณ G(f) ต่อไปนี้

$$G(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ 1/2 & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$