ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 6201011631188 ตอนเรียนที่ 1

1. พิจารณาการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญ โดยที่จำนวนครั้งของการโยนเป็นอนันต์ (infinite) และในการโยนแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน (independent) โดยกำหนดให้ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกก้อยในการโยนแต่ละครั้งเป็น p

1.1) กำหนดให้ X เป็นจำนวนครั้งที่โยนเหรียญแล้วออกก้อยเป็นครั้งแรก จงคำนวณค่า E[X]

1.2) จงคำนวณหาค่าความน่าจะเป็น (ในเทอมของ p) ที่ในการโยนเหรียญ 10 ครั้งแล้วออกก้อย 5 ครั้ง

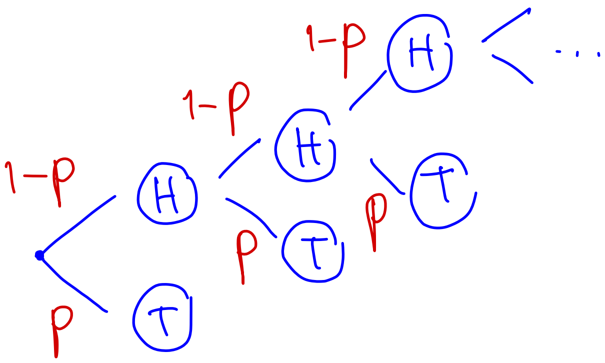
1.3) จงคำนวณหาค่าความน่าจะเป็น (ในเทอมของ p) ที่ในการโยนเหรียญครั้งที่ 10 แล้วจะออกก้อยเป็นครั้งที่ 5

1.1

วิธีทำ

กำหนดให้ H แทน เหตุการณ์ที่จะโยนเหรียญออกหัว

T แทน เหตุการณ์ที่จะโยนเหรียญออกก้อย



กรณีที่

$$P[X=1] = p$$

$$P[X=2] = (1-p)p$$

$$P[X=3] = (1-p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P[X=x] = (1-p)^{x-1} p$$

ดังนั้น PMF ของ X คือ

$$P_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

และจาก นิยามของ Expected Value จะได้

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p$$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1}$$

$$E[X] = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}$$

$$= -p\sum_{x=1}^{\infty}\frac{d}{dp}(1-p)^{x}$$

$$= -p\frac{d}{dp}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x}\cdot\frac{(1-p)^{-1}}{(1-p)^{-1}}$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left[(1-p)\cdot\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}\right]$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left[1-p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}\right]$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left[\frac{1-p}{p}\right]$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\cancelto{0}{-1}\right)$$

$$\therefore\ E[X] = \frac{1}{p}$$

1.2 โยนเหรียญ 10 ครั้ง ออกก้อย 5 ครั้ง. หาProb in p term.

ให้ X แทนจำนวนครั้งที่โยนเหรียญแล้วออกก้อย ในการโยนทั้งหมด n ครั้ง

จาก Definition ของ Binomial RV จะได้ว่า

PMF ของ X คือ

$$P_X(x) = \begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}, & x = 0,1,2,\dots,n\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

เนื่องจากโจทย์กำหนด $n=10$ และ $x=5$ จะได้ว่า

$$P_X(5) = \binom{10}{5}p^{5}(1-p)^{5} = 252\,p^{5}(1-p)^{5}$$

(1.3) โยนเหรียญ 10 ครั้ง ออกก้อยครั้งที่ 5

ให้ K แทน จำนวนครั้งที่โยนเหรียญแล้วออกก้อยเป็นครั้งแรก

J แทน จำนวนครั้งในการโยนเหรียญจนออกก้อยในครั้งที่ k

จาก Definition ของ Pascal RV จะได้ว่า PMF ของ J คือ.

$$P_J(j) = \begin{cases} \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k} & , j = k, k+1, \ldots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

โจทย์กำหนด $J = 10$, $K = 5$ จะได้ว่า

$$P_J(10) = \binom{9}{4} p^5 (1-p)^5 = 126 p^5 (1-p)^5$$

#

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 62010637188 ตอนเรียนที่ 1

2. มีนักเรียน 10 คน โดยที่ 5 คนมาจากโรงเรียน A, 3 คนมาจากโรงเรียน B และ 2 คน มาจากโรงเรียน C สมมติให้นักเรียนคู่หนึ่งถูกเลือกอย่างสุ่มและอย่างเสมอกัน (randomly and uniformly) จากเซตของคู่นักเรียนที่เป็นไปได้ทั้งหมด กำหนดให้ a เป็นจำนวนนักเรียนที่อยู่ในคู่ที่ถูกเลือก มาจากโรงเรียน A และ ให้ b เป็นจำนวนนักเรียนที่อยู่ในคู่ที่ถูกเลือก มาจากโรงเรียน B (ดังนั้นค่า a และ b อยู่ในเซต {0,1,2})

2.1) จงคำนวณ E[ab]

2.2) ถ้านักเรียนที่เลือกอยู่โรงเรียนเดียวกัน จงหา conditional probability ที่ทั้งสองมาจากโรงเรียน A

จำนวนวิธีทั้งหมด

$$n(S) = C_{10,2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45 \text{ วิธี}$$

*ให้ c แทน สมาชิกจาก School "C"

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}}$$

เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้

$$E = \{ \overset{1}{aa}, ab, ac, bb, bc, cc \}$$

$$n_1(E) = \binom{5}{2}\binom{3}{0}\binom{2}{0} = 10 \Rightarrow P_1(E) = \frac{10}{45}$$

$$n_2(E) = \binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{0} = 15 \Rightarrow P_2(E) = \frac{15}{45}$$

$$n_3(E) = \binom{5}{1}\binom{3}{0}\binom{2}{1} = 10 \Rightarrow P_3(E) = \frac{10}{45}$$

$$n_4(E) = \binom{5}{0}\binom{3}{2}\binom{2}{0} = 3 \Rightarrow P_4(E) = \frac{3}{45}$$

$$n_5(E) = \binom{5}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 6 \Rightarrow P_5(E) = \frac{6}{45}$$

$$n_6(E) = \binom{5}{0}\binom{3}{0}\binom{2}{2} = 1 \Rightarrow P_6(E) = \frac{1}{45}$$

จะได้ Joint PMF of $P_{A,B}(a,b)$ คือ.

$$P_{A,B}(a,b) = \begin{cases} \frac{10}{45} & a=2,\ b=0 \\ \frac{15}{45} & a=1,\ b=1 \\ \frac{10}{45} & a=1,\ b=0 \\ \frac{3}{45} & a=0,\ b=2 \\ \frac{6}{45} & a=0,\ b=1 \\ \frac{1}{45} & a=0,\ b=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2.1 $E[ab]$

ให้ $D = g(A,B)$ จากทฤษฎี จะได้ว่า

$$E[D] = \sum_{a \in S_A} \sum_{b \in S_B} ab\, P_{A,B}(a,b)$$

$$= (2)(0)\left(\frac{10}{45}\right) + (1)(1)\left(\frac{15}{45}\right) + (1)(0)\left(\frac{10}{45}\right) + (0)(2)\left(\frac{3}{45}\right)$$

$$+ (0)(1)\left(\frac{6}{45}\right) + (0)(0)\left(\frac{1}{45}\right)$$

$$\therefore E[D] = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

2.2

ให้ X แทนเหตุการณ์ที่สุ่มได้นักเรียนจาก รร. เดียวกัน.

จาก Conditional Joint PMF by an event จะได้ว่า

$$P_{A,B|X}(a,b) = \frac{P[(X=x, Y=y) \cap X]}{P[X]}$$

$$P[X] = \frac{1+3+10}{45}$$

$$\therefore P[X] = \frac{13}{45}$$

$$\therefore P_{A,B|X}(a,b) = \frac{\frac{3}{45} \times \frac{10}{45}}{\frac{13}{45}} = \frac{2}{39}$$

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 62010163788 ตอนเรียนที่ 1

3. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีเหลือง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก

3.1) ทำการทดลองสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละหนึ่งลูกแบบหยิบแล้วใส่คืน เป็นจำนวน 8 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบลูกบอลสีแดงได้ 2 ครั้ง และลูกบอลสีเหลืองได้ 4 ครั้ง นอกนั้นได้สีเขียว

3.2) ทำการทดลองสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละหนึ่งลูกแบบ**ไม่**ใส่คืน เป็นจำนวน 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบลูกบอลสีแดง สีเหลืองและสีเขียวได้อย่างละ 1 ครั้ง

3.1) จากทฤษฎีของ Mutinomial Coefficient

$$\binom{n}{n_0, \dots, n_{m-1}} = \frac{n!}{n_0!\, n_1!\, n_2! \dots n_{m-1}!}$$

จะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดในการสุ่มลูกบอลครั้งละ 1 ลูก 8 ครั้ง (ใส่คืน) คือ

$$\binom{8}{2, 4, 2} = \frac{8!}{2!\,4!\,2!} = 420 \text{ วิธี}$$

ให้ R แทน เหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีแดง

Y แทน เหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีเหลือง

G แทน เหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีเขียว

X แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ แดง, เหลือง เขียวเป็น 2, 4, 2 ตามลำดับ

จะได้ $P[R] = \frac{1}{6}$, $P[Y] = \frac{2}{6}$ และ $P[G] = \frac{3}{6}$ ตามลำดับ

ดังนั้น Prob ของเหตุการณ์ที่จะสุ่มหยิบได้แดง 2 เหลือง 4 และเขียว 2 คือ

$$P[X] = 420 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{2}{6}\right)^4 \times \left(\frac{3}{6}\right)^2$$

$$\therefore P[X] = \frac{35}{972} \approx 0.036$$

3.2) sample space = { RYY, RYG, RGY, RGG, YRY, YRG, YYR, YYG, YGR, YGY, YGG, GRY, GRG, GYR, GYY, GYG, GGR, GGY, GGG }

outcomes = { RYG, RGY, YRG, YGR, GRY, GYR }

$P[RYG] = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{120}$

$P[RGY] = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{120}$

$P[YRG] = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{120}$

$P[YGR] = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{120}$

$P[GRY] = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{120}$

$P[GYR] = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{120}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้คือ $6 \times \frac{6}{120} = \frac{3}{10}$ #

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 6201011637188 ตอนเรียนที่ 1

4. กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มดิสครีตแบบสม่ำเสมอ (uniform discrete random variable) ที่มีค่าเป็นไปได้เป็นเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ – 4 ถึง 3 และให้ $Y = X^2 + 2X + 3$

4.1) จงหา PMF (Probability Mass Function) ของ Y (6 คะแนน)

4.2) จงหาค่า E[Y] Prob ของ X แต่ละตัวเท่ากัน (4 คะแนน)

4.1) ให้ X แทน Uniform discrete RV

$$\text{กำหนด}\quad Y = \begin{cases} x^2+2x+3 & , -4 \le x \le 3 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

1/8 $x=-4$ } $Y=11$
1/8 $x=2$
1/8 $x=-3$ } $Y=6$
1/8 $x=1$
1/8 $x=-2$ } $Y=3$
1/8 $x=0$
1/8 $x=-1$ $Y=2$
1/8 $x=3$ $Y=18$

PMF of Y คือ

$$\Rightarrow P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}+\frac{1}{8} & , y=11 \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8} & , y=6 \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8} & , y=3 \\ \frac{1}{8} & , y=2, 18 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$ ##

4.2) Find E[Y]

จาก Definition ของ Expected Value จะได้ว่า

$$E[Y] = \sum_{y \in S_y} y\, P_Y(y)$$

จากข้อ 4.1 ;

$$E[Y] = 11\left(\frac{2}{8}\right) + 6\left(\frac{2}{8}\right) + 3\left(\frac{2}{8}\right) + 18\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\therefore E[Y] = 7.5$$ ##