

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

1. ทำการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นผลตัวเลขที่ได้จากการโยน ของลูกเต๋าคู่ที่หนึ่งและสองตามลำดับ และกำหนดให้

$$W = X + Y$$

$$V = \min(X, Y)$$

เมื่อ $\min(X, Y)$ คือค่าที่น้อยที่สุดที่เลือกมาจากค่า X และค่า Y

- 1.1) จงหา Joint PMF (Probability Mass function) $P_{X,Y}(x, y)$ ของ X และ Y (2 คะแนน)
- 1.2) จงหา PMF $P_W(w)$ ของ W (3 คะแนน)
- 1.3) จงหา PMF $P_V(v)$ ของ V (3 คะแนน)
- 1.4) จงหา Conditional PMF $P_{W|B}(w)$ ของ W เมื่อ B คือเหตุการณ์ที่ $X > Y$ (2 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

2. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 2 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก ทำการทดลองหยิบลูกบอลอย่างสุ่มทีละสองลูก โดยใส่ลูกบอลกลับคืนลงในกล่องอย่างสุ่มเพียงลูกเดียวในการหยิบแต่ละครั้ง การทดลองจะสิ้นสุดเมื่อหยิบลูกบอลจากกล่องจนครบสามครั้ง

2.1) จงหา PMF $P_U(u)$ เมื่อ U เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งที่หยิบลูกบอลได้สีแดงด้วยกัน (7 คะแนน)

2.2) จงหาค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งที่หยิบลูกบอลได้สีแดงด้วยกัน (3 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

3. ทำการส่งและรับบิตข้อมูลซึ่งประกอบด้วยบิตหนึ่งและบิตศูนย์ ผ่านช่องสัญญาณพบว่าความผิดพลาดในการส่งบิตหนึ่งเป็น 0.20 ในขณะที่ความผิดพลาดในการส่งบิตศูนย์เป็น 0.10 และปรากฏว่าที่ปลายทางโอกาสที่ได้รับบิตหนึ่งเท่ากับ 0.6 และโอกาสที่ได้รับบิตศูนย์เท่ากับ 0.4

3.1) จงหาความน่าจะเป็นที่ต้นทางจะส่งบิตหนึ่ง (5 คะแนน)

3.2) ถ้าปลายทางได้รับบิตหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่ต้นทางส่งบิตศูนย์ (5 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

4. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินาม (binomial random variable) ซึ่งมี PMF ดังนี้

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 4.1 จงพิสูจน์ว่า $E[X] = np$ (4 คะแนน)

- 4.2 จงพิสูจน์ว่า $Var[X] = np(1-p)$ (6 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

5. ทำการโยนเหรียญคราวละ 3 เหรียญพร้อมกันไปเรื่อย ๆ จนกว่าเหรียญทั้งสามจะออกผลลัพธ์เป็นหัวทั้งสามเหรียญ ครบสองครั้ง จึงจะหยุด และกำหนดให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ใช้ในการโยนเหรียญ

5.1) จงบอกว่า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบใด (1 คะแนน)

5.2) จงหา PMF $P_X(x)$ จากความรู้ที่ได้ในข้อ 5.1) (2 คะแนน)

5.3) จงหาสูตรสำหรับการคำนวณค่า Joint PMF $P_{XY}(x, y)$ เมื่อ Y คือจำนวนครั้งที่โยนเหรียญทั้งสามเหรียญจนได้ผลลัพธ์เป็นหัวทั้งสามเหรียญครั้งแรก (3 คะแนน)

5.4) จงหา Marginal PMF $P_X(x)$ จาก Joint PMF $P_{XY}(x, y)$ ที่ได้จากข้อ 5.3) โดยใช้สูตร

$$P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x, y)$$

ว่าผลลัพธ์ $P_X(x)$ ที่ได้ตรงกับ $P_X(x)$ ที่ได้จาก 5.2) หรือไม่ (4 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

6. ทีมนักสู้ 2 ทีมคือทีม A และทีม B มีนักสู้ทีมละ 2 คน โดยทีม A ประกอบด้วยนักสู้ A1 และ A2 และทีม B ประกอบด้วยนักสู้ B1 และ B2 และกำหนดให้ความน่าจะเป็นที่นักสู้ในทีม A แต่ละคนจะชนะนักสู้ในทีม B เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

	B1	B2
โอกาสที่ A1 จะชนะ	0.5	0.7
โอกาสที่ A2 จะชนะ	0.6	0.4

ในการแข่งขันกำหนดให้นักสู้หนึ่งคนจากแต่ละทีม รวมเป็นสองคนทำการประลองกันในแต่ละครั้ง โดยผลการประลองมีแพ้และชนะเท่านั้น (ไม่มีเสมอ) ถ้านักสู้คนใดแพ้ให้ทำการคัดออกแล้วนำนักสู้ในลำดับถัดไปของทีมเข้าทำการประลองกับนักสู้ที่ชนะในครั้งก่อน ทีมจะแพ้เมื่อนักสู้ทั้งหมดในทีมแพ้ นักสู้ในแต่ละทีมจะต้องประลองตามลำดับก่อนหลัง โดยลำดับของนักสู้ในแต่ละทีมถูกสุ่มเลือกจากการจับฉลาก และโอกาสที่นักสู้จะชนะตามตารางข้างต้นไม่มีการเปลี่ยนแปลงและไม่ขึ้นกับผลการต่อสู้ในครั้งก่อน

- 6.1) จงคำนวณโอกาสที่ทีม A จะชนะทีม B (6 คะแนน)
- 6.2) จงคำนวณจำนวนครั้งเฉลี่ยที่ต้องใช้ในการประลองจนเสร็จสิ้น (4 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

ชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ตอนเรียนที่.....

7. โยนลูกเต๋านึ่งลูกไปจนกว่าได้ผลลัพธ์เป็น 4 เป็นจำนวนสองครั้ง หรือได้ผลลัพธ์เป็น 2 จึงจะหยุด
กำหนดให้ X เป็นจำนวนครั้งในการโยนลูกเต๋า

7.1) จงหา PMF $P_X(x)$ ของ X (5 คะแนน)

7.2) จงหาค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งที่ใช้ในโยนลูกเต๋า $E[X]$ (5 คะแนน)