ชื่อ-นามสกุล ……………………………..…..... รหัสนักศึกษา …..………… ตอนเรียนที่……

1. ทำการทดลองโยนลูกเต๋าที่ไม่มีการถ่วงสองลูกพร้อมกัน โดยผลลัพธ์ในการโยนของลูกเต๋าทั้งสองเป็นอิสระกัน และกำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มของเลขที่ออกของลูกเต๋าที่แรกและลูกเต๋าที่สองตามลำดับ

1.1) จงหา Joint Probability Mass Function (PMF) $P_{XY}(x,y)$ ของตัวแปรสุ่ม X และ Y (2 คะแนน)

1.2) กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม U เป็นดังนี้

$$U = X^2 + Y$$

จงหา Probability Mass Function (PMF) $P_U(u)$ ของตัวแปรสุ่ม U (4 คะแนน)

1.3) Conditional PMF $P_{X|B}(x)$ ของตัวแปรสุ่ม X เมื่อ B คือเหตุการณ์ที่ $X+Y>3$ (4 คะแนน)

วิธีทำ

1.1) เนื่องจากผลของการโยนลูกเต๋าทั้งสองเป็นอิสระกันดังนั้น

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$$

$$= \begin{cases} 1/36, & x = 1,2,3,...,6, y = 1,2,3,...,6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1.2) เตรียมตารางค่าที่เป็นไปได้ของ U

X	ค่าของ $U = X^2+Y$					
	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$	$Y=6$
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31
6	37	38	39	40	41	42

จากตารางสามารถหา PMF ของ U ได้ดังนี้

$$P_U(u) = \begin{cases} 1/36. & u = 2,3,4 \\ 1/18, & u = 5,6,7, \\ 1/36, & u = 8,9, \\ 1/18, & u = 10, \\ 1/36, & u = 11,12,13,14,15, \\ 1/36, & u = 17,18,19,..,22, \\ 1/36, & u = 26,27,28,...,31, \\ 1/36, & u = 37,38,39,...,42, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1.3) $P(B) = P(X+Y>3) = 1 - P_{XY}(1,1) - P_{XY}(1,2) - P_{XY}(2,1)$

$= 1 - 3/36 = (36-3)/36 = 33/36$

$$P_{XY|B}(x,y \mid B) = \begin{cases} \dfrac{P_{XY}(x,y)}{P(B)}, & (x,y) \in B \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/33, & (x,y) \in B \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/33, & x = 1, y = 3,4,5,6 \\ 1/33, & x = 2, y = 2,3,4,5,6 \\ 1/33, & x = 3,4,5,6, y = 1,2,3,4,5,6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/33, & x = 1,2, y = 4-x, 5-x, \ldots, 6 \\ 1/33, & x = 3,4,5,6, y = 1,2,3,4,5,6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P_{X|B}(x \mid B) = \sum_y P_{XY|B}(x,y \mid B)$$

$$= \begin{cases} \sum_{y=4-x}^{6} 1/33, & x = 1,2 \\ \sum_{y=1}^{6} 1/33, & x = 3,4,5,6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (3+x)/33, & x = 1,2 \\ 6/33 = 2/11, & x = 3,4,5,6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. กำหนดให้เคาท์เตอร์ของธนาคารแห่งหนึ่งรองรับบริการฝากเงินและถอนเงินเท่านั้น โดยลูกค้าต้องกดบัตรคิว และมีเหตุการณ์เกิดขึ้นได้ดังต่อไปนี้

<u>เหตุการณ์แบบที่ 1</u> ลูกค้าฝากเงิน ด้วยความน่าจะเป็น 0.3 โดยระยะเวลาที่ใช้ในการฝากเงินมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ ตั้งแต่ 1 ถึง 4 นาที

<u>เหตุการณ์แบบที่ 2</u> ลูกค้าถอนเงิน ด้วยความน่าจะเป็น 0.6 โดยระยะเวลาที่ใช้ในการถอนเงินมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลโดยมีค่าเฉลี่ย 3 นาที

<u>เหตุการณ์แบบที่ 3</u> เมื่อถึงหมายเลขคิวที่เรียก ปรากฏว่าไม่มีลูกค้าหมายเลขคิวนั้นเข้าใช้บริการ ซึ่งเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็น 0.1 และทำให้เสียเวลา 0.5 นาที

2.1) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function: pdf) $f_X(x)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มของระยะเวลาที่เคาท์เตอร์ของธนาคารแห่งนี้ต้องใช้สำหรับแต่ละหมายเลขคิว (8 คะแนน)

<u>คำแนะนำ</u> ให้หาฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function: cdf) ของเหตุการณ์แต่ละแบบก่อน ทั้งนี้ให้ใช้ฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย (unit step function) โดยดัดแปลงตามความเหมาะสม แล้วหา cdf สุทธิจาก cdf ของเหตุการณ์แต่ละแบบ จากนั้นหา pdf จากอนุพันธ์ของ cdf (8 คะแนน)

2.2) จงหาค่าเฉลี่ยของระยะเวลาที่เคาท์เตอร์ของธนาคารแห่งนี้ต้องใช้สำหรับแต่ละหมายเลขคิว (2 คะแนน)

วิธีทำ

2.1) กำหนดให้ A_i เป็นเหตุการณ์แบบที่ i

$$
\begin{aligned}
F_{X|A_1}(x \mid A_1) &= \begin{cases} (x-1)/3, & 1 \le x < 4, \\ 1, & x \ge 4, \\ 0, & x < 1 \end{cases} \\
&= \frac{(x-1)}{3}[u(x-1) - u(x-4)] + u(x-4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{X|A_2}(x \mid A_2) &= \begin{cases} (1-e^{-x/3}), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
&= (1-e^{-x/3})u(x)
\end{aligned}
$$

$$
F_{X|A_3}(x \mid A_3) = u(x-0.5)
$$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) F_{X|A_i}(x \mid A_i) \\
&= P(A_1)F_{X|A_1}(x \mid A_1) + P(A_2)F_{X|A_2}(x \mid A_2) + P(A_3)F_{X|A_3}(x \mid A_3) \\
&= \frac{0.3}{3}(x-1)[u(x-1) - u(x-4)] + 0.3u(x-4) \\
&\quad + 0.6(1-e^{-x/3})u(x) + 0.1u(x-0.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} \\
&= 0.1\frac{d(x-1)}{dx}[u(x-1)-u(x-4)] + 0.1(x-1)\frac{d[u(x-1)-u(x-4)]}{dx} \\
&\qquad + 0.3\frac{du(x-4)}{dx} \\
&\qquad + 0.6\frac{d(1-e^{-x/3})}{dx}u(x) + 0.6(1-e^{-x/3})\frac{du(x)}{dx} \\
&\qquad + 0.1\frac{du(x-0.5)}{dx} \\
&= 0.1[u(x-1)-u(x-4)] + 0.1(x-1)[\delta(x-1)-\delta(x-4)] + 0.3\delta(x-4) \\
&\qquad + 0.2e^{-x/3}u(x) + 0.6(1-e^{-x/3})\delta(x) + 0.1\delta(x-0.5) \\
&= 0.1[u(x-1)-u(x-4)] + 0.2e^{-x/3}u(x) + 0.1\delta(x-0.5)
\end{aligned}
$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหา $f_X(x)$ ได้จาก

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) f_{X|A_i}(x \mid A_i) \\
&= P(A_1) f_{X|A_1}(x \mid A_1) + P(A_2) f_{X|A_2}(x \mid A_2) + P(A_3) f_{X|A_3}(x \mid A_3) \\
&= 0.3[u(x-1)-u(x-4)]/3 + 0.6e^{-x/3}u(x)/3 + 0.1\delta(x-0.5) \\
&= 0.1[u(x-1)-u(x-4)] + 0.2e^{-x/3}u(x) + 0.1\delta(x-0.5)
\end{aligned}
$$

2.2)

$$
\begin{aligned}
E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^{3} P(A_i) f_{X|A_i}(x \mid A_i)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|A_i}(x \mid A_i)\, dx = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) E[x \mid A_i] \\
&= P(A_1)E[x \mid A_1] + P(A_2)E[x \mid A_2] + P(A_3)E[x \mid A_3] \\
&= 0.3\times(1+4)/2 + 0.6\times 3 + 0.1\times 0.5 \text{ นาที} \\
&= 0.3\times 2.5 + 0.6\times 3 + 0.1\times 0.5 \text{ นาที} \\
&= 2.6 \text{ นาที}
\end{aligned}
$$

3. ทำการโยนเหรียญที่ไม่ถ่วง 3 เหรียญพร้อมกัน โดยโยนทั้งหมด 100 ครั้ง

3.1) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้ง 3 เหรียญออกหัวเหมือนกันในแต่ละครั้งที่โยน (2 คะแนน)

3.2) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้ง 3 เหรียญออกหัวเหมือนกันเป็นจำนวนครั้งตั้งแต่ 10 ครั้งหรือจนถึง 20 ครั้ง (2 คะแนน)

3.3) จงประมาณค่าความน่าจะเป็นในข้อ 3.2) โดยใช้ตารางข้อมูลการกระจายแบบ normal Gaussian (2 คะแนน)

3.4) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้ง 3 เหรียญออกหัวเหมือนกัน เป็นจำนวน 20 ครั้งพอดี (2 คะแนน)

3.5) จงประมาณค่าความน่าจะเป็นในข้อ 3.4) โดยใช้ตารางข้อมูลการกระจายแบบ normal Gaussian (2 คะแนน)

<u>หมายเหตุ</u> ข้อ 3.2) และ 3.4) ให้ติดสูตรไว้ ไม่ต้องคำนวณค่าเป็นตัวเลข

3.1) $p = 1/8$

3.2) $P[10 \le X \le 20] = \sum_{x=10}^{20} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{100-x} = \sum_{x=10}^{20} \binom{100}{x} (1/8)^x (7/8)^{100-x} = 0.8049$

3.3) $\mu = np \quad = 100/8 = 25/2$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100(1/8)(7/8)} = \frac{5}{4}\sqrt{7}$$

$$P[10 \le X \le 20] \approx \phi\left(\frac{20.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right) - \phi\left(\frac{9.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right) = \phi(2.41897) - \phi(-0.90711)$$

โดยที่เราสามารถหาค่าประมาณของ $\phi(2.41897)$ และ $\phi(-0.90711)$ ได้โดยการใช้ค่าจากตารางมาทำการ Interpolation ดังนี้

$$\phi(2.41897) \approx \phi(2.41) + (2.41897 - 2.41)\frac{\phi(2.42) - \phi(2.41)}{2.42 - 2.41}$$

$$= 0.992024 + (0.00897)\frac{0.992240 - 0.992024}{0.01} = 0.99222$$

$$\phi(-0.90711) \approx \phi(-0.91) + ((-0.90711) - (-0.91))\frac{\phi(-0.90) - \phi(-0.91)}{(-0.90) - (-0.91)}$$

$$= 0.181411 + (0.00289)\frac{0.184060 - 0.181411}{0.01} = 0.18218$$

$$P[10 \le X \le 20] \approx \phi\left(\frac{20.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right) - \phi\left(\frac{9.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right) = \phi(2.41897) - \phi(-0.90711)$$

$$= 0.99222 - 0.18218 = 0.81004$$

3.4) $P[X=20]=\binom{100}{20}(1/8)^{20}(7/8)^{100-20}=\binom{100}{20}(1/8)^{20}(7/8)^{80}=0.0107$

3.5) $P[X=20]\approx\phi\left(\dfrac{20.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right)-\phi\left(\dfrac{19.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right)=\phi(2.41897)-\phi(2.11660)$

$$\phi(2.11660)\approx\phi(2.11)+(2.11660-2.11)\frac{\phi(2.12)-\phi(2.11)}{2.12-2.11}$$

$$=0.982571+(0.00660)\frac{0.982997-0.982571}{0.01}=0.98285$$

$$P[X=20]\approx\phi\left(\frac{20.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right)-\phi\left(\frac{19.5-12.5}{5\sqrt{7}/4}\right)=0.99222-0.98285=0.00937$$

4. กำหนด joint pdf ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y เป็นดังนี้

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} ce^{-(2x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

4.1) จงหาค่าคงที่ c (2 คะแนน)

4.2) จงหาว่าตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y อิสระกันหรือไม่ (2 คะแนน)

4.3) จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $Y > X$ (3 คะแนน)

4.4) จงหา conditional joint pdf $f_{X,Y|B}(x,y)$ เมื่อ B คือเหตุการณ์ $Y > X$ (3 คะแนน)

5. ทำการโยนลูกเต๋าที่ไม่ถ่วงครั้งละหนึ่งลูกไปเรื่อย ๆ และให้ X_k เป็นตัวแปรสุ่มของตัวเลขที่ได้จากการโยนลูกเต๋าครั้งที่ k ทั้งนี้กระบวนการสุ่ม (random process) ของ X_k เป็นลำดับแบบ independent identically distributed (iid) random sequence และกำหนดให้ตัวแปรสุ่ม Y_k เป็นผลรวมสะสมของตัวเลขที่ได้ตั้งแต่การโยนลูกเต๋าครั้งแรกจนถึงการโยนครั้งที่ k ดังนี้

$$Y_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

5.1) จงหา $E[Y_k]$ (2 คะแนน)

5.2) จงหา autocorrelation $E[X_k X_{k+\eta}]$ ของ X_k (3 คะแนน)

5.3) จงหา autocorrelation $E[Y_k Y_{k+\eta}]$ ของ Y_k (5 คะแนน)

วิธีทำ

5.1)
$$\begin{aligned} E[Y_k] &= E[X_1 + X_2 + \ldots + X_k] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_k] = kE[X_1] \\ &= k(1+2+3+4+5+6)/6 \qquad k = 1,2,3,\ldots \\ &= 7k/2, \qquad k = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

5.2)
$$\begin{aligned} E[X_k X_{k+\eta}] &= \begin{cases} E[X_k]E[X_{k+\eta}], & \eta \neq 0, \eta > -k \\ E[X_k^2], & \eta = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 7^2/2^2, & k = 1,2,3,\ldots,\ \eta \neq 0,\ \eta > -k \\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2)/6, & k = 1,2,3,\ldots,\ \eta = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 49/4, & k = 1,2,3,\ldots,\ \eta \neq 0,\ \eta > -k \\ 91/6, & k = 1,2,3,\ldots,\ \eta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5.3) $E[Y_kY_{k+\eta}] = E[(X_1+X_2+...+X_k)(X_1+X_2+...+X_{k+\eta})]$

$$= E[\sum_{i=1}^{k} X_i \sum_{j=1}^{k+\eta} X_j] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+\eta} E[X_iX_j], \qquad k=1,2,3,...$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1, j\neq i}^{k+\eta} E[X_iX_j] + \sum_{i=1}^{k} E[X_i^2], & k=1,2,3,..., \eta \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1, j\neq i}^{k+\eta} E[X_iX_j] + \sum_{i=1}^{k+\eta} E[X_i^2], & k=1,2,3,..., -k<\eta<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [k(k+\eta)-k](49/4)+91k/6, & k=1,2,3,..., \eta \geq 0 \\ [k(k+\eta)-(k+\eta)](49/4)+91(k+\eta)/6, & k=1,2,3,..., -k<\eta<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 49k[k+\eta-1]/4+91k/6, & k=1,2,3,..., \eta \geq 0 \\ 49(k-1)(k+\eta)/4+91(k+\eta)/6, & k=1,2,3,...,-k<\eta<0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k[49(k+\eta)/4-49/4+91/6], & k=1,2,3,..., \eta \geq 0 \\ (k+\eta)[49k/4-49/4+91/6], & k=1,2,3,...,-k<\eta<0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k[49(k+\eta)/4+35/12], & k=1,2,3,..., \eta \geq 0 \\ (k+\eta)[49k/4+35/12], & k=1,2,3,...,-k<\eta<0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 7k[21(k+\eta)+5]/12, & k=1,2,3,..., \eta \geq 0 \\ 7(k+\eta)[21k+5]/12, & k=1,2,3,...,-k<\eta<0, \end{cases}$$

6. กำหนด joint pdf ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y เป็นดังนี้

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c, & 0\le x\le 4, 0\le y\le 8 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

6.1) จงหาค่าคงที่ c (2 คะแนน)

6.2) จงหา pdf $f_W(w)$ ของตัวแปรสุ่ม W เมื่อ $W=\max(X+1,Y)$ (4 คะแนน)

6.3) จงหา conditional joint pdf $f_{W|X}(w|x)$ (4 คะแนน)