ชื่อ-นามสกุล .นายโสภณ...สุขสมบูรณ์............. รหัสนักศึกษา 62010901639188 ตอนเรียนที่....1..

1. กำหนดให้ Joint Probability Mass Function (PMF) $P_{X,Y}(x,y)$ ของตัวแปรสุ่ม $X$ และ $Y$ เป็นดังนี้

$$P_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} k\cdot 2^{-x}\cdot 3^{-y}, & x=0,1,2,\ldots\ ; y=0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ $k$ เป็นค่าคงที่ และให้

$$U = X+Y$$

$$V = X-Y$$

1.1) จงหาค่าคงที่ $k$ (2 คะแนน)

1.2) จงหา Joint Probability Mass Function (PMF) $P_{U,V}(u,v)$ ของตัวแปรสุ่ม $U$ และ $V$ (3 คะแนน)

1.3) PMF $P_U(u)$ ของ ตัวแปรสุ่ม $U$ (2 คะแนน)

1.4) Conditional PMF $P_{X|B}(x)$ ของตัวแปรสุ่ม $X$ เมื่อ $B$ คือเหตุการณ์ที่ $U$ น้อยกว่า 5 (3 คะแนน)

1.1) From Theorem : $\sum_{x\in S_x}\sum_{x\in S_y} P_{X,Y}(x,y) = 1$

จะได้ $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} k\cdot 2^{-x}\cdot 3^{-y} = 1$

$$k\sum_{x=0}^{\infty} 2^{-x}\sum_{y=0}^{\infty} 3^{-y} = 1$$

$$k\left(\frac{1}{1-1/2}\right)\left(\frac{1}{1-1/3}\right) = 1$$

$$\boxed{\therefore\ k = \frac{1}{3}}$$

1.2) โดยกำหนดให้ $u = x + y \quad —(1)$

$v = x - y \quad —(2)$

$(1)+(2)$ ; $x = \dfrac{u+v}{2}$ และ $(1)-(2)$ ; $y = \dfrac{u-v}{2}$

จาก

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k \cdot 2^{-x} \cdot 3^{-y} & , x = 0,1,2,\ldots \; ; \; y = 0,1,2,\ldots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

เนื่องจาก $\dfrac{u+v}{2}$ และ $\dfrac{u-v}{2}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ตามนิยามของความน่าจะเป็น.

จะได้ $$P_{U,V}(u,v) = \begin{cases} k \cdot 2^{-(u+v)/2} \cdot 3^{-(u-v)/2} & , u = 0,1,2,\ldots \; ; \; v = -u, -u+2, -u+4, \ldots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

---

1.3) $P_U(u) = \sum_{y \in S_Y} P_{X,Y}(u-y, y) \quad , u = 0,1,2,\ldots$

$$P_U(u) = \sum_{y=0}^{\infty} P_{X,Y}(u-y,y)$$

$k$

$$= \frac{1}{3} \sum_{y=0}^{u} 2^{-(u-y)} \cdot 3^{-y}$$

$$= \frac{1}{3} 2^{-u} \sum_{y=0}^{u} 2^{y} \cdot 3^{-y}$$

$$= \frac{1}{3} 2^{-u} \sum_{y=0}^{u} \left(\frac{2}{3}\right)^{y}$$

$$= \frac{1}{3} 2^{-u} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{u+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{-u} \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{u+1}\right]$$

$$\therefore P_U(u) = \begin{cases} 2^{-u}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{u+1}\right] & , u = 0,1,2,\ldots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

ให้ B แทน เหตุการณ์ที่ $u < 5$

เนื่องจาก $u = x + y \Rightarrow x + y < 5$

พิจารณา $P(B) = P(x+y<5)$

$$= \sum_{x \in [0,4]} \sum_{y \in [0,4-x]} P_{x,y}(x,y)$$

$$= \sum_{x=0}^{4} \sum_{y=0}^{4-x} k \cdot 2^{-x} \cdot 3^{-y}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{x=0}^{4} \sum_{y=0}^{4-x} 2^{-x} \cdot 3^{-y}$$

$$= \frac{1}{3}\Big[ 2^{0}\left(3^{0}+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+3^{-4}\right) + 2^{-1}\left(3^{0}+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}\right)$$

$$+ 2^{-2}\left(3^{0}+3^{-1}+3^{-2}\right) + 2^{-3}\left(3^{0}+3^{-1}\right) + 2^{-4}\left(3^{0}\right)\Big]$$

$$P(B) = \frac{1}{3}\left[ \frac{121}{81} + \frac{20}{27} + \frac{13}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} \right]$$

$$\therefore \quad P(B) = 0.9416$$

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

if $A \subset B$

$P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

$x \in [0,4]$

$y \in [0, 4-x]$

พิจารณา $P_{x|B}(x) = \sum_{y=0}^{4-x} P_{x,y}(x,y|B)$

$$= \frac{\sum_{y=0}^{4-x} P_{x,y}(x,y)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{y=0}^{4-x} 2^{-x} \cdot 3^{-y}}{3(0.9416)}$$

$$= \frac{2^{-x}}{2.8248} \sum_{y=0}^{4-x} 3^{-y}$$

$$= \frac{2^{-x}}{2.8248} \cdot \frac{1-(1/3)^{(4-x)+1}}{1-1/3}$$

$$P_{X|B}(x) = \frac{2^{-x}}{2.8248} \cdot \frac{1-(1/3)^{5-x}}{2/3}$$

$$= \frac{2^{-x}}{1.8832}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}\right]$$

$$\therefore\ P_{X|B}(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{-x}}{1.8832}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-x}\right] & ,\ 0,1,2,3,4 \\ 0 & ,\ \text{otherwise} \end{cases}$$

#

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 62010163[illegible] ตอนเรียนที่ 1

2. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีเหลือง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก ทำการทดลองหยิบลูกบอลอย่างสุ่มโดยไม่ใส่คืนจนกว่าได้ลูกบอลสีแดงแล้วจึงหยุด

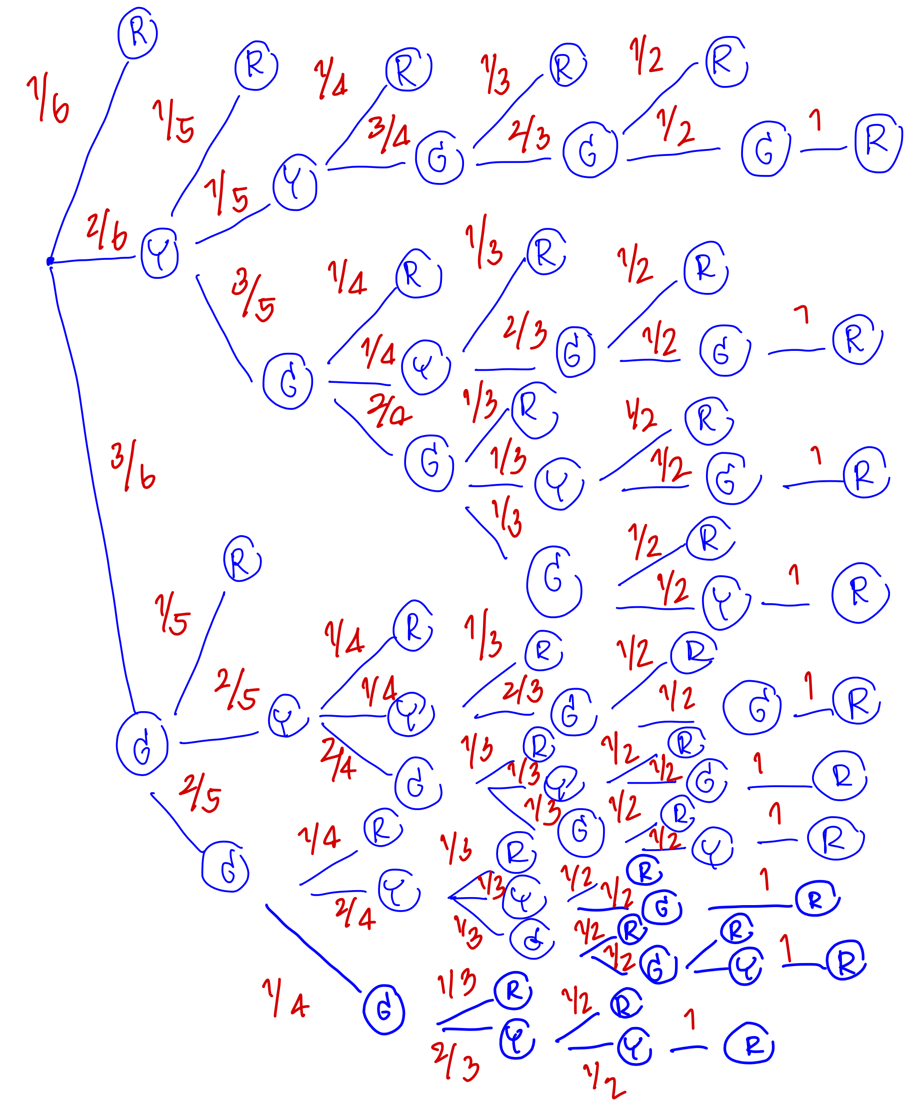
2.1) จงหา PMF $P_{X,Y}(x,y)$ เมื่อ $X$ และ $Y$ เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนลูกบอลสีเหลืองและลูกบอลสีเขียวที่หยิบได้ตามลำดับ (7 คะแนน)

2.2) จงหาค่าเฉลี่ยของจำนวนลูกบอลสีเขียวที่หยิบได้ (3 คะแนน)

ให้ R แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีแดง

Y แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีเหลือง

2.1) G แทนเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ลูกบอลสีเขียว



สามารถสรุป เป็น Table ได้ดังนี้.

| $P_{X,Y}(x,y)$ | $y=0$ | $y=1$ | $y=2$ | $y=4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | $1/6$ | $1/10$ | $1/20$ | $1/60$ |
| $x=1$ | $1/15$ | $1/20$ | $1/30$ | $1/60$ |
| $x=2$ | $1/60$ | $1/60$ | $1/60$ | $1/60$ |

2.2 $E[Y]$

จากสูตร $E[Y] = \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} y\, P_{X,Y}(x,y)$

$$= \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{3} y\, P_{X,Y}(x,y)$$

$$= 1\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60}\right) + 2\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}\right) + 4\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}\right)$$

$$\therefore E[Y] = \frac{31}{60}$$

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ ภู่ปลั่งบูรณ์ รหัสนักศึกษา 62010116318 8 ตอนเรียนที่ 1

3. ผลิตภัณฑ์จากโรงงานหนึ่งประกอบด้วยส่วนประกอบ 2 อย่าง โดยส่วนประกอบทั้งสองมีการจัดซื้อจากผู้ขายและมีอัตราของเสียเป็นดังตารางต่อไปนี้

| ส่วนประกอบที่ 1 | | |
|---|---|---|
| ผู้ขาย | สัดส่วนที่จัดซื้อ | อัตราของเสีย |
| A1 | 20% | 5% |
| A2 | 30% | 4% |
| A3 | 50% | 2% |

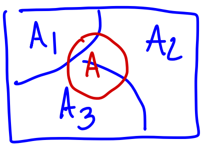
| ส่วนประกอบที่ 2 | | |
|---|---|---|
| ผู้ขาย | สัดส่วนที่จัดซื้อ | อัตราของเสีย |
| B1 | 60% | 2% |
| B2 | 10% | 10% |
| B3 | 30% | 5% |

กำหนดให้การประกอบของโรงงานไม่มีความผิดพลาด ผลิตภัณฑ์จะเสียถ้าส่วนประกอบที่ 1 หรือส่วนประกอบที่ 2 เสียเท่านั้น นอกจากนี้การใช้ส่วนประกอบทั้งสองจากแหล่งที่จัดซื้อมามีการใช้คละกันอย่างสม่ำเสมอ และการเสียของส่วนประกอบจากแต่ละแหล่งเป็นอิสระแก่กัน

3.1) จงหาความน่าจะเป็นที่ผลิตภัณฑ์นี้จะเสีย (5 คะแนน)

3.2) ถ้าพบผลิตภัณฑ์เสีย จงหาความน่าจะเป็นที่ผลิตภัณฑ์ชิ้นที่เสียนี้จะมีส่วนประกอบที่ 2 มาจากผู้ขาย B2 (5 คะแนน)

3.1)




กำหนดให้ A แทน เหตุการณ์ที่ส่วนประกอบที่ 1 เสีย

B แทน เหตุการณ์ที่ส่วนประกอบที่ 2 เสีย

$A_i$ แทน ส่วนประกอบที่ 1 จากผู้ผลิต i

$B_i$ แทน ส่วนประกอบที่ 2 จากผู้ผลิต i

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(A|A_i)$$

$$= (0.2)(0.05) + (0.3)(0.04) + (0.5)(0.02)$$

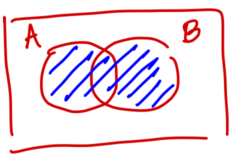
$$\therefore P(A) = 0.032$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(B|B_i)$$

$$= (0.6)(0.02) + (0.1)(0.1) + (0.3)(0.05)$$

$$= 0.037$$

เนื่องจากโจทย์กำหนดว่า A&B independent




$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.032 + 0.037 - (0.032)(0.037)$$

$$= 0.0678$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ส่วนประกอบจะเสีย คือ 0.0678 //

3.2 ชิ้นส่วนที่ 2 เสียหากผู้ผลิต $B_2$

$$P(B_2 | A \cup B) = \frac{P(B_2, A \cup B)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(B_2 A \cup B_2 B)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(B_2 A) + P(B_2 B) - P(B_2 A B)}{P(A \cup B)}$$

* A & B indepedent *

$$= \frac{P(B_2)P(A) + P(B|B_2)P(B_2) - P(B|B_2)P(B_2)P(A)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{(0.1)(0.032) + (0.01) - (0.07)(0.037)(0.032)}{0.0678}$$

$$\therefore P(B_2 | A \cup B) = 0.1945$$

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 62010706 31188 ตอนเรียนที่ 1

4. จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 ถ้า $P(A) = 0.5$ $P(B) = 0.2$ และ $P(A \cap B) = 0.1$ จงหาค่า probability ของ $A \cup B$, $A' \cup B$ และ $A \cap B'$ (4 คะแนน)

4.2 ถ้า $P(A) = 0.4$ $P(A \cup B) = 0.6$ และ $P(A|B) = 0.5$ จงหาค่า $P(B)$ (2 คะแนน)

4.3 ถ้า $B \subset A$ และ $P(A) = 1/3$ และ $P(B) = 1/4$ จงหา $P(A|B)$ และ $P(B|A)$ (3 คะแนน)

วิธีทำ Theorem: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4.1)

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.2 - 0.1$$

$$\therefore P(A \cup B) = 0.6 \quad \#$$

Theorem : $P(A') = 1 - P(A)$

Theorem : if A & B independent , Then

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

$$= 1 - 0.5 + 0.2 - (1-0.5)(0.2)$$

$$= 0.5 + 0.2 - 0.1$$

$$\therefore P(A' \cup B) = 0.6 \quad \#$$

$$P(A \cap B') = P(A)P(B')$$

$$= P(A)(1 - P(B))$$

$$= 0.5(1 - 0.2)$$

$$= 0.4 \quad \#$$

4.2) ถ้า $P(A) = 0.4$ , $P(A \cup B) = 0.6$ และ $P(A|B) = 0.5$ จงหา $P(B)$

① หา $P(AB)$ จาก Theorem : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

; $0.6 = 0.4 + P(B) - P(AB)$

$\therefore \quad P(AB) = P(B) - 0.2 \quad — (1)$

จาก Formula : $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \quad — (2)$

แทน (1) ใน (2) ;

$$P(A|B) = \frac{P(B) - 0.2}{P(B)}$$

แทนค่า จากที่โจทย์กำหนด จะได้

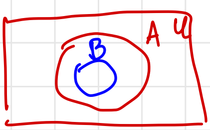
$$0.5 = \frac{P(B) - 0.2}{P(B)}$$

$$0.5\,P(B) = P(B) - 0.2$$

$$0.5\,P(B) = 0.2$$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{2}{5} \text{ หรือ } 0.4$$

4.3) ถ้า $B \subset A$ และ $P(A) = \frac{1}{3}$ และ $P(B) = \frac{1}{4}$ จงหา $P(A|B)$ และ $P(B|A)$




$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$$

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ ศุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 620107163188 ตอนเรียนที่ 1

5. ทำการโยนลูกเต๋าจนกว่าจะได้ผลลัพท์เป็น หนึ่ง

5.1 จงหา PMF $P_X(x)$ เมื่อ $X$ คือจำนวนครั้งที่ใช้ในการโยนลูกเต๋าจนได้ผลลัพท์เป็นหนึ่ง (2 คะแนน)

5.2 จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลลัพท์เป็นสองเป็นจำนวนสองครั้ง (3 คะแนน)

5.3 จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลลัพท์เป็นสองเป็นจำนวนสองครั้ง และเป็นสามเป็นจำนวนหนึ่งครั้ง (3 คะแนน)

5.4 ถ้าทราบว่าใช้จำนวนครั้งในการโยนลูกเต๋าเท่ากับห้าครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลลัพท์เป็นสองเป็นจำนวนสองครั้ง (2 คะแนน)

ให้ X แทนจำนวนครั้งที่ใช้ในการโยนลูกเต๋า ซึ่งมีความสำเร็จ $p = 1/6$

จาก Definition of Geometric RV ;

5.1)

$$P_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} & , x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

5.2) ให้ A แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋าออกสอง

$$P_A(a) = \sum_{x=1}^{\infty} P_{A|X}(a|x)\, P_X(x) \quad \text{—(1)}$$

โดยที่ $P_{A|X}(a|x)$ คือ Prob ที่จะได้ลูกเต๋าออก 2 เป็นจำนวน a ครั้งจากการโยนทั้งหมด x ครั้ง แล้วออกเลข 1

$$P_{A|X}(a|x) = \begin{cases} \binom{x-1}{a}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1-a} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{a} & , a = 0, 1, 2, \ldots x-1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{—(2)}$$

แทน (2) ใน (1) ;

$$P_A(a) = \sum_{x=a+1}^{\infty} \binom{x-1}{a}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1-a}\left(\frac{1}{5}\right)^{a}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right) \quad \text{—(3)}$$

แทน $a = 2$ ใน (3);

$$P_A(2) = \sum_{x=3}^{\infty} \binom{x-1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1-a} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{6} = 0.125$$

5.3) ให้ B แทนจำนวนครั้งที่โยนลูกเต๋าได้แต้ม 3

$$P_{A,B}(a,b) = \sum_{x=1}^{\infty} P_{A,B|x}(a,b|x)\, P_X(x) \quad \text{— (4)}$$

โดยที่

$$P_{A,B|x}(a,b|x) = \begin{cases} \binom{x-1}{a,b} \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1-a-b} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{a} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{b} & , a,b = 0,1,2,\ldots \ ;\ x \geq a+b+1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P_{A,B}(a,b) = \sum_{x=a+b+1}^{\infty} \binom{x-1}{a,b} \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1-a-b} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{a} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{b} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$ ##

5.4) $\binom{4}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{2} = \frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{16}{25} \times \frac{1}{25} = \frac{96}{625}$ ##