ชื่อ-นามสกุล ....นายโสภณ.......สุขสมบูรณ์........ รหัสนักศึกษา ....620101163788.... ตอนเรียนที่...1....

1. ทำการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นผลตัวเลขที่ได้จากการโยน ของลูกเต๋าที่หนึ่งและสองตามลำดับ และกำหนดให้ผลลัพท์ในการโยนลูกเต๋าทั้งสองอิสระกัน และให้

$$U = Y + X$$

$$V = Y - X$$

1.1) จงหา Joint PMF (Probability Mass Function) $P_{X,Y}(x,y)$ ของ X และ Y (2 คะแนน)

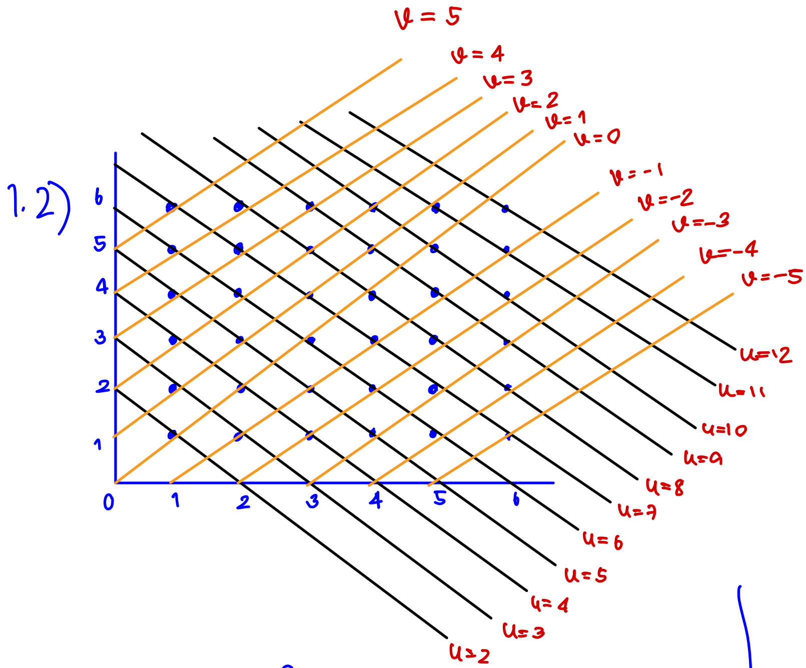
1.2) จงหา Joint PMF $P_{U,V}(u,v)$ ของ U และ V (2 คะแนน)

1.3) จงหา PMF $P_U(u)$ ของ U (2 คะแนน)

1.4) จงหา Conditional PMF $P_{V|U}(v|u)$ ของ V เมื่อกำหนด U (4 คะแนน)

1.1) $$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) &, x = 1,2,3,\dots,6\ ;\ y = 1,2,3,\dots,6 \\ 0 &, \text{otherwise} \end{cases}$$

1.2)



$$P_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{36} &, u = 2,12\ ;\ v = 0 \\ \frac{1}{36} &, u = 3,11\ ;\ v = -1,1 \\ \frac{1}{36} &, u = 4,10\ ;\ v = 0,2,-2 \\ \frac{1}{36} &, u = 5,9\ ;\ v = -3,-1,1,3 \\ \frac{1}{36} &, u = 6,8, v = -4,-2,0,2,4 \\ \frac{1}{36} &, u = 7, v = -5,-3,-1,1,3,5 \\ 0 &, \text{otherwise} \end{cases}$$

1.3) $$P_U(u) = \begin{cases} 1/36 &, u = 2,12 \\ 2/36 &, u = 3,11 \\ 3/36 &, u = 4,10 \\ 4/36 &, u = 5,9 \\ 5/36 &, u = 6,8 \\ 6/36 &, u = 7 \end{cases}$$

1.4 $$P_{V|U}(v|u) = \frac{P_{U,V}(u,v)}{P_U(u)}$$

$$P_{V|U}(v|u) = \begin{cases} 1 &, u = 2,12\ ;\ v = 0 \\ 1/2 &, u = 3,11\ ;\ v = 1,-1 \\ 1/3 &, u = 4,10\ ;\ v = 0,2,-2 \\ 1/4 &, u = 5,9\ ;\ v = -3,-1,1,3 \\ 1/5 &, u = 6,8\ ;\ v = -4,-2,0,2,4 \\ 1/6 &, u = 7, v = -5,-3,-1,1,3,5 \\ 0 &, \text{otherwise} \end{cases}$$

กิจกรรมกลุ่มครั้งที่ 3 ภาคการศึกษาที่ 1/2564 วิชา Communication Engineering Mathematics

จากข้อสอบกลางภาคครั้งที่ 1 ภาคการศึกษาที่ 1/2561 วิชา Communication Engineering Mathematics

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบุรณ์ รหัสนักศึกษา 6201011637188 ตอนเรียนที่ 1

2. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีเหลือง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก

2.1) จงหาสูตรคำนวณค่า PMF $P_X(x)$ เมื่อ x เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งที่ใช้ในการหยิบลูกบอลคราวละหนึ่งลูกแบบใส่คืนจนกว่าจะได้ทั้งลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีเหลืองอย่างน้อยสีละลูกจึงหยุด (5 คะแนน)

2.2) จงหา PMF $P_Y(y)$ เมื่อ y เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งที่ใช้ในการหยิบลูกบอลคราวละหนึ่งลูกแบบไม่ใส่คืนจนกว่าจะได้ทั้งลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีเหลืองอย่างน้อยสีละลูกจึงหยุด (5 คะแนน)

2.1) จาก Definition ของ Pascal

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^k & , x = k, k+1, \dots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

พิจารณาหาค่า p

$$p = \frac{\text{เหตุการณ์ที่หยิบได้แดง\&เหลืองอย่างละลูก}}{\text{เหตุการณ์ทั้งหมด}}$$

$$= \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{1}\binom{6}{1}} = \frac{1}{18}$$

$$\therefore P_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{1} \left(\frac{1}{18}\right)^2 \left(\frac{17}{18}\right)^{x-2} & , x = 2, 3, 4, \dots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

2.2) เนื่องจากเป็นการหยิบไม่ใส่คืน.

$$p = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{1}\binom{5}{1}} = \frac{2}{30}$$

$$\therefore \text{PMF } P_Y(y) = \begin{cases} \binom{y-1}{1} \left(\frac{2}{30}\right)^2 \left(\frac{28}{30}\right)^{y-2} & , y = 2, 3, 4, \dots, 6 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

ชื่อ-นามสกุล ....ชายโสภณ สุขสมบูรณ์.... รหัสนักศึกษา ....๖๒๐๑๐๗๗๖๓๗๘๘.... ตอนเรียนที่ ....1....

3. กำหนดให้ตัวแปรสุ่มแบบดิสครีต X และ Y มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probability Mass Function) ดังนี้

$$P_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} k4^{-(2x+y)}, & x=0,1,2,\ldots;\ y=x,x+2,x+4,x+6,\ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.1) จงหาค่าคงที่ k (2 คะแนน)

3.2) จงหา Marginal PMF $P_X(x)$ ของตัวแปรสุ่ม X (3 คะแนน)

3.3) จงหา Marginal PMF $P_Y(y)$ ของตัวแปรสุ่ม Y (3 คะแนน)

3.4) จงหาค่าเฉลี่ยของ Y (2 คะแนน)

3.1)

จาก Theorem : $$\sum_{x\in S_x}\sum_{y\in S_y} P_{X,Y}(x,y)=1$$

จะได้ว่า $$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=x,x+2,\ldots} k\cdot 4^{-(2x+y)}=1$$

$$k\sum_{x=0}^{\infty}4^{-2x}\cdot\sum_{y=x,x+2,\ldots}4^{-y}=1$$

$$k\sum_{x=0}^{\infty}4^{-2x}\cdot\left[\frac{1}{4^x}+\frac{1}{4^{x+2}}+\frac{1}{4^{x+4}}+\ldots\right]=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}4^{-2(n-1)}=1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\ldots$$

$$k\sum_{x=0}^{\infty}4^{-2x}\,\frac{1}{4^x}\left[1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right]=1$$

$$=\sum_{n-1=0}^{\infty}4^{-2(n-1)}$$

$$k\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{4^{3x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}4^{-2(n-1)}=1$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16}{15}$$

$$k\left[\frac{1}{1-\frac{1}{64}}\right]\left[\frac{16}{15}\right]=1$$

$$\therefore\ k=0.923$$

3.2) Maginal PMF $P_X(x)$

Theorem : $P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$

จะได้ว่า $P_X(x) = 0.923 \sum_y 4^{-(2x+y)}$ $*\ y = \frac{x}{3}$

$= 0.923 \sum_y 4^{-5y/3}$

$= 0.923 \left(\frac{1}{1-(1/4)^{5/3}} \right)$

$= 0.923\,(1.1101)$

$\therefore P_X(x) = 1.025$ ##

3.3) Maginal PMF $P_Y(y)$

$P_Y(y) = 0.923 \sum_x (1/4)^{2x} \sum_{y \le 3x} y(1/4)^y$

$= 0.923\,(4) \sum_x x\left(\frac{1}{4}\right)^{5x}$

$= 0.923\,(4) \left(\frac{1}{1-(1/4)^5} \right)$

$P_Y(y) = 3.6956$

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ ศุภสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 62010163988 ตอนเรียนที่ 1

4. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบปาสคาล (Pascal random variable) ซึ่งมี PMF เป็นดังนี้

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, & x = k, k+1, k+2, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.1 จงพิสูจน์ว่า $E[X] = k/p$ (4 คะแนน)

4.2 จงพิสูจน์ว่า $Var[X] = k(1-p)/p^2$ (6 คะแนน)

4.1) จาก Definition : $E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$

จะได้ว่า

$$E[X] = \sum_{x=k}^{\infty} x \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \quad \text{— (1)}$$

$$= \sum_{x=k}^{\infty} \frac{x(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!} p^k (1-p)^{x-k}$$

$$= \sum_{x=k}^{\infty} \frac{k\, x!}{k!(x-k)!} p^k (1-p)^{x-k}$$

$$= k \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x}{x-k} p^k (1-p)^{x-k}$$

ให้ $y = x-k$;

$$E[X] = kp^k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+k}{y} (1-p)^{x-k} \quad \text{— (2)}$$

จาก Identity ของ $\binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{k} (-1)^k$

$$;\quad \binom{y+k}{y} = \binom{-\cancel{y}-k+\cancel{y}-1}{y} (-1)^y$$

$$\therefore \binom{y+k}{y} = \binom{-(k+1)}{y} (-1)^y$$

แทนค่าใน (2) ;

$$E[X] = kp^k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-(k+1)}{y} (-1)^y (1-p)^y$$

From Binomial series

$$(1-x)^{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

จะได้ $$E[X] = kp^k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-(k+1)}{y} (1-p)^y$$

; $$E[X] = k\cancel{p^k}\,(1-(1-p))^{-(\cancel{k}+1)}$$

$$\therefore E[X] = \frac{k}{p} \quad \#$$

4.2) $$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

จาก $$E[X] = kp^k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+k}{y} (1-p)^y$$

จะได้ $$E[X^2] = kp^k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+k}{y} (y+k)(1-p)^y$$

จาก Definition : $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

; $$E[X^2] = kp^k \sum_{y=0}^{\infty} \left[(k+1)\binom{y+k}{k-1} + k\binom{y+k}{y} \right] (1-p)^k$$

$$= kp^k \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)\binom{y+k}{k-1} \right] (1-p)^k + kp^k \sum_{k=0}^{\infty} \left[k\binom{y+k}{y} \right] (1-p)^k$$

จาก Binomial series expansion จะได้ว่า

$$E(x^2) = \frac{k(1-k-p)}{p^2}$$

$$\therefore \ Var[X] = E[X^2] - E[X]$$

$$= \frac{k(1+k-p)}{p^2} - \frac{k^2}{p^2}$$

$$= \frac{k(1+k-p-k)}{p^2}$$

$$\therefore Var[X] = \frac{k(1-p)}{p^2} \quad \#$$

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 62010783988 ตอนเรียนที่ 1

Geometric Prob

5. ทำการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญไปเรื่อย ๆ จนกว่าได้หัวติดต่อกัน 3 ครั้งหรือโยนจนครบ 8 ครั้งแล้วจึงหยุด กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่โยนเหรียญในแต่ละครั้งแล้วได้หัวเป็น p แต่ได้ก้อยเป็น $1-p$ และการโยนเหรียญในแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน กำหนดให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ใช้ในการโยนเหรียญ

5.1) จงหาค่า PMF $P_X(x)$ (7 คะแนน)

5.2) จงหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X (3 คะแนน)

5.1) จาก Definition of Geometric RV

กรณีที่ 1

$$P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

กรณีที่ 2 ทำการโยน 8 ครั้ง ครบ

$$P[\text{โยน } 8 \text{ ครั้ง}] = \underbrace{p \times p \times p \times \dots \times p}_{8 \text{ ครั้ง}} = p^8$$

$$\therefore \quad P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} + p^8 & , x = 1, 2, 3, \dots, 8 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

5.2)

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x \, P_X(x)$$

$$= 36\left(((1-p)p)^{x-1} + p^8\right)$$

ชื่อ-นามสกุล นายโสภณ สุขสมบูรณ์ รหัสนักศึกษา 620101163188 ตอนเรียนที่ 1

6. นำข้อมูลมาเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาด (Error correction codes) ได้ชุดข้อมูลที่เข้ารหัส (เรียกว่าคำรหัส (Code word)) แล้วคราวละ 10 บิต จากนั้นทำการส่งคำรหัสดังกล่าวผ่านช่องสัญญาณที่เกิดความผิดพลาดแบบสุ่มกับแต่ละบิตที่ส่ง ด้วยค่าความน่าจะเป็น (ซึ่งเรียกว่า อัตราบิตผิดพลาด (Bit Error Rate: BER)) เท่ากับ 0.01

รหัสแก้ไขความผิดพลาดที่ใช้ สามารถช่วยให้ภาครับแก้ไขความผิดพลาดและถอดรหัสได้อย่างสมบูรณ์ ถ้ามีความผิดพลาดเกิดขึ้นไม่เกิน 2 บิต (จากจำนวนบิตทั้งหมด 10 บิตของแต่ละคำรหัส) แต่ถ้าเกิดความผิดพลาดตั้งแต่ 3 ถึง 4 บิต ภาครับสามารถถอดรหัสแต่ละชุดข้อมูลที่ได้รับ จนได้คำรหัสที่ถูกต้องสมบูรณ์เพียงร้อยละ 20 และถ้าเกิดความผิดพลาดเกินกว่านั้น ภาครับจะไม่สามารถแก้ไขความผิดพลาดที่เกิดกับคำรหัสนั้นได้

6.1) จงหาความน่าจะเป็นที่ภาครับจะถอดรหัสชุดข้อมูลที่ได้รับ กลับคืนเป็นคำรหัสที่ถูกต้องสมบูรณ์

(7 คะแนน)

6.2) ถ้าภาครับถอดรหัสชุดข้อมูลที่ได้รับไม่ได้ จงหาค่าความน่าจะเป็นที่มีข้อมูลผิดพลาด 3 หรือ 4 บิต

(3 คะแนน)