นายโสภณ สุขสมบูรณ์
62010716311188 sec.1 Commu Math
(PSV)

④ กำหนด Joint PDF

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-2y} & ; -1 \le x \le 1 ; y \ge 0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

4.1) $c = ?$

จาก Theorem : $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = 1$

$$; \int_{0}^{\infty}\int_{-1}^{1} ce^{-2y}\,dx\,dy = 1$$

$$c\int_{0}^{\infty} e^{-2y}\left(x\Big|_{-1}^{1}\right) dy = 1$$

$$2c\int_{0}^{\infty} e^{-2y}\,dy = 1$$

$$\frac{2c}{-2}\, e^{-2y}\Big|_{0}^{\infty} = 1$$

$$-c\left[\frac{1}{e^{2y}}\right]_{0}^{\infty} = 1$$

$$-c[0-1] = 1$$

$$\therefore c = 1 \quad \#$$

4.2) จาก Theorem : $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

$$; f_Y(y) = \int_{-1}^{1} e^{-2y}\,dx$$

$$= e^{-2y} \cdot x\Big|_{-1}^{1}$$

$$\therefore f_Y(y) = 2e^{-2y} \quad \#$$

4.3) X & Y are independent ?

เนื่องจากข้อ 4.2) & 4.3) เราได้ทำการหา $f_{X,Y}(x,y)$ และ $f_Y(y)$ แล้ว

และ X & Y จะ Independent ก็เมื่อ

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

พิจารณา $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2y}\,dy$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2y} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-2y}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}[0-1]$$

$$= \frac{1}{2} \quad \#$$

$$\therefore f_{X,Y}(x,y) = e^{-2y} = \frac{1}{2}(2e^{-2y}) = f_X(x) f_Y(y)$$

สรุปว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน #

4.4 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $Y \leq X+1$

$$P[Y \leq X+1] = \int_0^{\infty}\int_{-1}^{y-1} e^{-2y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2y}\, x \Big|_{-1}^{y-1}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} y e^{-2y}\,dy$$

ให้ $u = y$ & $dv = e^{-2y}\,dy$

$du = dy$ & $v = -\frac{1}{2}e^{-2y}$

$$\int y e^{-2y}\,dy = -\frac{1}{2} y e^{-2y} + \frac{1}{2}\int e^{-2y}\,dy$$

$$\therefore \int_0^{\infty} y e^{-2y}\,dy =$$

$$\left[-\frac{1}{2} y e^{-2y} - \frac{1}{4} e^{-2y}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e^{2y}} - 0 - 0 - \frac{1}{2}(1)\right)$$

$$= -1/4\,(e^{-2y}-1) \quad \#$$

$$\therefore P[Y \leq X+1] = \begin{cases} -1/4\,(e^{-2y}-1) ; & y \geq 0 ;\ -1 \leq x \leq y-1 \\ 0 ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.5 $P_{X,Y|A}(x,y|A) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P(A)}$ (Independent)

เนื่องจาก $A = y \leq x+1$ ซึ่งคำนวณหาจากข้อ 4.4 แล้ว

$$; P_{X,Y|A}(x,y|A) = \begin{cases} \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P(A)} & ; x,y \in A \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4e^{-2y}}{(e^{-2y}-1)} & ; -1 \leq x \leq y-1 ; y \geq 0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$