

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

1. ทำการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  เป็นผลตัวเลขที่ได้จากการโยน ของลูกเต๋าคู่ที่หนึ่งและสองตามลำดับ และกำหนดให้ผลลัพธ์ในการโยนลูกเต๋าทองสองอิสระกัน และให้

$$U = Y + X$$

$$V = Y - X$$

- 1.1) จงหา Joint PMF (Probability Mass Function)  $P_{X,Y}(x, y)$  ของ  $X$  และ  $Y$  (2 คะแนน)
- 1.2) จงหา Joint PMF  $P_{U,V}(u, v)$  ของ  $U$  และ  $V$  (2 คะแนน)
- 1.3) จงหา PMF  $P_U(u)$  ของ  $U$  (2 คะแนน)
- 1.4) จงหา Conditional PMF  $P_{V|U}(v | u)$  ของ  $V$  เมื่อกำหนด  $U$  (4 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

2. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีเหลือง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก

2.1) จงหาสูตรคำนวณค่า PMF  $P_X(x)$  เมื่อ  $x$  เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งที่ใช้ในการหยิบลูกบอลคราวละหนึ่งลูกแบบใส่คืนจนกว่าจะได้ทั้งลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีเหลืองอย่างน้อยสีละลูกจึงหยุด (5 คะแนน)

2.2) จงหา PMF  $P_Y(y)$  เมื่อ  $y$  เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งที่ใช้ในการหยิบลูกบอลคราวละหนึ่งลูกแบบไม่ใส่คืนจนกว่าจะได้ทั้งลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีเหลืองอย่างน้อยสีละลูกจึงหยุด (5 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

3. กำหนดให้ตัวแปรสุ่มแบบดิสครีต  $X$  และ  $Y$  มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probability Mass Function) ดังนี้

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k4^{-(2x+y)}, & x = 0,1,2,\dots; y = x, x+2, x+4, x+6, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 3.1) จงหาค่าคงที่  $k$  (2 คะแนน)  
3.2) จงหา Marginal PMF  $P_X(x)$  ของตัวแปรสุ่ม  $X$  (3 คะแนน)  
3.3) จงหา Marginal PMF  $P_Y(y)$  ของตัวแปรสุ่ม  $Y$  (3 คะแนน)  
3.4) จงหาค่าเฉลี่ยของ  $Y$  (2 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

4. กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแบบปาสคาล (Pascal random variable) ซึ่งมี PMF เป็นดังนี้

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, & x = k, k+1, k+2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.1 จงพิสูจน์ว่า  $E[X] = k/p$  (4 คะแนน)

4.2 จงพิสูจน์ว่า  $Var[X] = k(1-p)/p^2$  (6 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....

5. ทำการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญไปเรื่อย ๆ จนกว่าได้หัวติดต่อกัน 3 ครั้งหรือโยนจนครบ 8 ครั้งแล้วจึงหยุด กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่โยนเหรียญในแต่ละครั้งแล้วได้หัวเป็น  $p$  แต่ได้ก้อยเป็น  $1-p$  และการโยนเหรียญในแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน กำหนดให้  $X$  เป็นจำนวนครั้งที่ใช้ในการโยนเหรียญ

5.1) จงหาค่า PMF  $P_X(x)$  (7 คะแนน)

5.2) จงหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม  $X$  (3 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล ..... รหัสนักศึกษา ..... ตอนเรียนที่.....



6. นำข้อมูลมาเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาด (Error correction codes) ได้ชุดข้อมูลที่เข้ารหัส (เรียกว่าคำรหัส (Code word)) แล้วควรวละ 10 บิต จากนั้นทำการส่งคำรหัสดังกล่าวผ่านช่องสัญญาณที่เกิดความผิดพลาดแบบสุ่มกับแต่ละบิตที่ส่ง ด้วยค่าความน่าจะเป็น (ซึ่งเรียกว่า อัตราบิตผิดพลาด (Bit Error Rate: BER)) เท่ากับ 0.01

รหัสแก้ไขความผิดพลาดที่ใช้ สามารถช่วยให้ภาครับแก้ไขความผิดพลาดและถอดรหัสได้อย่างสมบูรณ์ ถ้ามีความผิดพลาดเกิดขึ้นไม่เกิน 2 บิต (จากจำนวนบิตทั้งหมด 10 บิตของแต่ละคำรหัส) แต่ถ้าเกิดความผิดพลาดตั้งแต่ 3 ถึง 4 บิต ภาครับสามารถถอดรหัสแต่ละชุดข้อมูลที่ได้รับ จนได้คำรหัสที่ถูกต้องสมบูรณ์เพียงร้อยละ 20 และถ้าเกิดความผิดพลาดเกินกว่านั้น ภาครับจะไม่สามารถแก้ไขความผิดพลาดที่เกิดกับคำรหัสนั้นได้

- 6.1) จงหาความน่าจะเป็นที่ภาครับจะถอดรหัสชุดข้อมูลที่ได้รับ กลับคืนเป็นคำรหัสที่ถูกต้องสมบูรณ์

(7 คะแนน)

- 6.2) ถ้าภาครับถอดรหัสชุดข้อมูลที่ได้รับไม่ได้ จงหาค่าความน่าจะเป็นที่มีข้อมูลผิดพลาด 3 หรือ 4 บิต

(3 คะแนน)