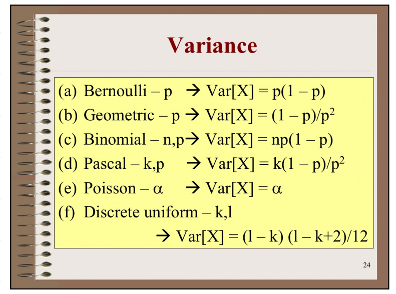
HW04 : Proof



a. Bernoulli

กำหนดให้ X แทน Bernoulli RV ที่มี Probability of success p

$$\text{PMF} = P_X(x) = \begin{cases} p & ; x=1 \\ 1-p & ; x=0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

expected value : $E[X] = \mu_X = p$

and definition of Variance : $Var[X] = E[(X-\mu_X)^2]$

เนื่องจาก $E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$

$$= \sum_{x \in S_X} (x-\mu_X)^2 P_X(x)$$

$$= (1-p)^2 p + (0-p)^2 (1-p)$$

$$= (1-p)^2 p + (1-p) p^2$$

$$= (1-p) p [1-\cancel{p} + \cancel{p}]$$

$\therefore E[X] = (1-p)p$

เพราะฉะนั้น ค่า $Var[X]$ of Benoulli คือ $(1-p)p$

6. Geometric

ให้ X แทน Geometric RV ที่มี Prob of success p

PMF of X $= P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & ; x = 1,2,3,\dots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$

- expected value : $E[X] = \mu_X = \frac{1}{p}$

and definition of $Var[X] = E[(X-\mu_X)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$ — (1)

พิจารณา

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 P_X(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^{x-1}$$

$$= p\sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-p)^{x-1}$$

$$= p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dp}\left[-x(1-p)^x\right] \qquad \left(-\frac{d}{dp}x(1-p)^x = x^2(1-p)^{x-1}\frac{d}{dp}(1-p)\right)$$

$$= -p\frac{d}{dp}\sum_{x=1}^{\infty}\left[x(1-p)^x\right]$$

$$= -p\frac{d}{dp}\sum_{x=1}^{\infty}\left[x(1-p)^x\right] \times \frac{(1-p)}{(1-p)} \times \frac{p}{p} \qquad \left(\text{เพื่อให้อยู่ในรูป } E[X] = \sum_{x\in S_X} xP_X(x)\right)$$

$$= -p\frac{d}{dp}\frac{(1-p)}{p}\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}\left[x(1-p)^{x-1}p\right]}_{E[X]}$$

$$= -p\frac{d}{dp}\frac{(1-p)}{p} \times \frac{1}{p} \qquad \left(E[X] = \frac{1}{p}\right)$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)$$

$$= -\cancel{p}\left(\frac{-2}{p^{\cancel{3}\,2}} + \frac{1}{p^{\cancel{2}\,1}}\right)$$

$$\therefore E[X^2] = \frac{2-p}{p^2} \quad \text{— (2)}$$

b. Geometric (Cont.)

พิจารณา $E[X] = \frac{1}{p} \Rightarrow (E[X])^2 = \frac{1}{p^2}$ — (3)

แทน (2), (3) ใน (1) ;

$$Var[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$\therefore Var[X] = \frac{1-p}{p^2} \quad \#$$

เพราะฉะนั้น Variance of Geometric คือ $\frac{1-p}{p^2}$ ※

---

c. Binomial

ให้ X แทน Binomial RV ที่มี Prob of success p

$$\text{PMF of } X = P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

- expected Value : $E[X] = np$
- Definition of $Var[X] = E([X-\mu_X]^2) = E[X^2] - (E[X])^2$ — (1)
- Definition of $E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x P_X(x)$

พิจารณา $E[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 P_X(x)$

$$x^2 + 0 = x^2 + (x - x) = (x^2 - x) + x = x(x-1) + x$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) P_X(x) + \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} x P_X(x)}_{E[X]}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} \cancel{x(x-1)} \frac{n!}{\cancel{x(x-1)}(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} + np$$

Binomial (Cont.)

$$E[X^2] = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} + np$$

$$= n(n-1) \sum_{x=2}^{\infty} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} \cdot p^2 (1-p)^{n-x} + np$$

$P_X(x)$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{\infty} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} (1-p)^{n-x} + np$$

$$= n(n-1)p^2 (1) + np \qquad \left[\sum_{x \in S_X} P_X = 1 \right]$$

$$\therefore E[X^2] = n(n-1)p^2 + np \quad —(2)$$

และจาก $E[X] = np \Rightarrow (E[X])^2 = n^2p^2 \quad —(3)$

แทน (2), (3) ใน (1);

$$Var[X] = E[X^2] \quad (E[X])^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$= \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2}$$

$$\therefore Var[X] = np(1-p)$$

เพราะฉะนั้น ค่า Variance of Binomial คือ $np(1-p)$

d. Pascal

ให้ X แทน Pascal RV ที่มี Prob of success p

- PMF of X = $P_X(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$; $x = k, k+1, \dots$

- Expected Value : $E[X] = \frac{k}{p}$

- $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ — (1)

พิจารณา $E[X^2]$

จาก Definition of $E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$

จะได้ $$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 P_X(x)$$

$$= \sum_{x=k}^{\infty} [x^2 - x + x] \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$$

Negative Binomial E[X]

$$= \sum_{x=k}^{\infty} [x(x-1)] \frac{(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!} p^k (1-p)^{x-k} + \sum_{x=k}^{\infty} x P_X(x)$$

$$= \frac{k(1-p)}{p^2} + \frac{k}{p}$$

$$\therefore E[X^2] = \frac{k(1-p) + k^2}{p^2} \quad \text{— (2)}$$

แทน (2) ใน (1) ;

$$Var[X] = \frac{k(1-p) + k^2}{p^2} - \left(\frac{k}{p}\right)^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

$\therefore$ ค่า Variance of Pascal คือ $\frac{k(1-p)}{p^2}$ ※

Poisson		
occurrence in a period	$\dfrac{(\lambda T)^x e^{-(\lambda T)}}{x!}$	$x = 0,1,2\ldots$
	0	Otherwise

e. Poisson

ให้ X แทน Poisson RV

λ แทน อัตราเฉลี่ยต่อช่วงเวลา

T แทน คาบเวลา และ $\alpha = \lambda T$

- Expected Value : $E[X] = \alpha$
- $Var[X] = E[(X-\mu_X)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \leftarrow (1)$

จาก Definition ของ expected value

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$$

จะได้ว่า $E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 P_X(x)$

$$E[X^2 - X + X] = \sum_{x \in S_X} [x^2 - x + x] P_X(x)$$

$$E[X(X-1) + X] = \sum_{x \in S_X} [x(x-1) + x] P_X(x)$$

$$E[X(X-1)] + E[X] = \sum_{x \in S_X} [x(x-1)] P_X(x) + \underbrace{\boxed{\sum_{x \in S_X} x P_X(x)}}_{E[X]} \leftarrow (2)$$

พิจารณา $E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1)] \dfrac{(\lambda T)^x e^{-\lambda T}}{x!}$

$$= e^{-\lambda T} \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{(\lambda T)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda T} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\cancel{x(x-1)}(\lambda T)^x}{\cancel{x(x-1)}(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda T} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^x}{(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda T} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{(\lambda T)^x}{(x-2)!} \times \frac{(\lambda T)^{-2}}{(\lambda T)^{-2}}$$

$$= \frac{(\lambda T)^2}{e^{-\lambda T}} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$= \frac{(\lambda T)^2}{e^{\lambda T}} \sum_{X-2=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{X-2}}{(X-2)!}$$

ให้ A แทน $X-2$;

$$E[X(X-1)] = e^{2-\lambda T} \sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{A}}{A!}$$

เนื่องจาก $\sum_{A=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ เป็น Maclaurin series ของ e^x

จะได้ว่า $E[X(X-1)] = \cancel{e^{-\lambda T}} \cdot (\lambda T)^2 \cdot \cancel{e^{\lambda T}}$

$$\therefore \quad E[X(X-1)] = (\lambda T)^2 = \alpha^2 \quad —(3)$$

แทน (3) ใน (2) ;

$$E[X^2] = \alpha^2 + \alpha \quad —(4)$$

แทน (4) ใน (1) ;

$$Var[X] = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2$$

$$\therefore \quad Var[X] = \alpha$$

เพราะฉะนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ค่า Variance of Poisson มีค่าเท่ากับ α #

f. Discrete Uniform.

ให้ X แทน Uniform RV

j, k แทน จำนวนเต็ม ซึ่ง $k<j$

- กำหนด $P_X(x) = \frac{1}{(j-k+1)}$; $x = k, k+1, \dots, j$
- Expected Value : $E[X] = \frac{(j+k)}{2}$

จาก Definition ของ Variance คือ $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ —(1)

พิจารณา $E[X^2]$

จาก Definition ของ Expected Value คือ $E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$

จาก $E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$

จะได้ $E[X^2] = \sum_{x=k}^{j} x^2 P_X(x)$

$$E[X^2] = \sum_{x=k}^{j} x^2 \left(\frac{1}{j-k+1}\right)$$

$$E[X^2] = \frac{1}{j-k+1} \sum_{x=k}^{j} x^2 \quad \text{—(2)}$$

ให้ $y = x-k+1 \rightarrow x = y+k-1$ แทนใน(2);

$$E[X^2] = \frac{1}{j-k+1} \sum_{y=1}^{j-k+1} (y+k-1)^2$$

$$= \frac{1}{j-k+1} \sum_{y=1}^{j-k+1} (y^2 + 2y(k-1) + (k-1)^2)$$

$$= \frac{1}{j-k+1} \left[\sum_{y=1}^{j-k+1} y^2 + 2(k-1) \sum_{y=1}^{j-k+1} y + (k-1)^2 \sum_{y=1}^{j-k+1} 1 \right]$$

$$= \frac{1}{j-k+1} \left[\frac{(j-k+1)(j-k+2)(2j-2k+3)}{6} + \frac{2(k-1)(j-k+1)(j-k+2)}{2} + (k-1)^2 (j-k+1) \right]$$

f. Discrete Uniform (ต่อ)

$$E[X^2] = \frac{1}{\cancel{j-k+1}}\left[\frac{(j-\cancel{k+1})(j-k+2)(2j-2k+3)+6(k-1)(j-\cancel{k+1})(j-k+2)}{6} + (k-1)^2(\cancel{j-k+1})\right]$$

$$= \frac{(j-k+2)(2j-2k+3)+6(k-1)(j-k+2)}{6} + (k-1)^2 \quad \text{—} (3)$$

พิจารณา $\quad (E[X])^2 = \left[\left(\frac{j+k}{2}\right)\right]^2 \quad \leftarrow (4)$

แทน (3), (4) ใน (1) ;

สมการกำลังสองสมบูรณ์

$$Var[X] = \frac{(j-k+2)(2j-2k+3)+6(k-1)(j-k+2)}{6} + \left[(k-1)^2 - \left[\left(\frac{j+k}{2}\right)\right]^2\right]$$

$$= \frac{(j-k+2)(2j-2k+3)+6(k-1)(j-k+2)}{6} + \left(k-1+\frac{j+k}{2}\right)\left(k-1-\frac{j+k}{2}\right)$$

$$= \frac{(j-k+2)(2j-2k+3)+6(k-1)(j-k+2)}{6} + \left(\frac{3k+j-2}{2}\right)\left(\frac{k-j-2}{2}\right)$$

$$= \frac{2(j-k+2)(2j-2k+3)+12(k-1)(j-k+2)+3(3k+j-2)(k-j-2)}{12}$$

$$= \frac{2(j-k+2)(2j-2k+3)-3(3k+j-2)(j-k+2)+12(k-1)(j-k+2)}{12}$$

$$= \frac{(4j-4k+6-9k-3j+6)(j-k+2)+12(k-1)(j-k+2)}{12}$$

$$= \frac{(13k+j+12)(j-k+2)+12(k-1)(j-k+2)}{12}$$

$$= \frac{(13k+j\cancel{+12}+12k-\cancel{12})(j-k+2)}{12}$$

$\therefore \; Var[X] = \dfrac{(j+k)(j-k+2)}{12}$; โดยที่ $k<j$ #

ดังนั้น ค่า Variance of Discrete Uniform คือ $\dfrac{(j+k)(j-k+2)}{12}$ #