

Quiz 2.3

Each time a modem transmits one bit, the receiving modem analyzes the signal that arrives and decides whether the transmitted bit is 0 or 1. It makes an error with probability p , independent of whether any other bit is received correctly.

- (1) If the transmission continues until the receiving modem makes its first error, what is the PMF of X , the number of bits transmitted?
- (2) If $p = 0.1$, what is the probability that $X = 10$? What is the probability that $X \geq 10$?
- (3) If the modem transmits 100 bits, what is the PMF of Y , the number of errors?
- (4) If $p = 0.01$ and the modem transmits 100 bits, what is the probability of $Y = 2$ errors at the receiver? What is the probability that $Y \leq 2$?
- (5) If the transmission continues until the receiving modem makes three errors, what is the PMF of Z , the number of bits transmitted?
- (6) If $p = 0.25$, what is the probability of $Z = 12$ bits transmitted?

36

Quiz 2.3

- Each time, modem transmits one bit, the receiver analyzes whether the bit is 0 or 1.
- The transmitted bit is error with Prob = p
 - If transmission until receiving the 1st error
 - $p=0.1$, $P[X=x]=?$
 - Transmitting 100 bits, and the number of errors is equal to Y bits
 - $p=0.01$, $P[Y \leq 2]=?$
 - Transmission continues until find 3 errors
 - $p=0.25$, $P[Z=12]=?$, where Z is the number of transmitted bits.

36

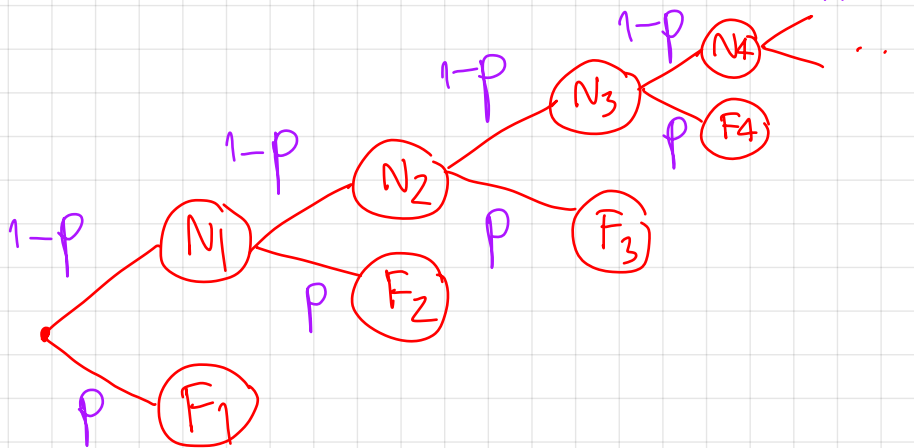
* โทษภัยที่พบ p คือ error with Prob.

① If the transmission until receiving its first error
what is the PMF of $X \Rightarrow$ Geometric RV

ถ้า X แทน จำนวนครั้งที่ทำการทดสอบจนพบข้อผิดพลาด

F แทน การทดลองที่ผิดพลาด

N แทน การทดลองที่ไม่ผิดพลาด



(Tree Diagram)

จากแผนภาพ พบว่า

$$P[X=1] = p$$

$$P[X=2] = (1-p)p$$

$$P[X=3] = (1-p)^2 p$$

$$P[X=4] = (1-p)^3 p$$

\vdots

$$P[X=x] = (1-p)^{x-1} p$$

จากการทดลองสรุปได้ว่า

รูปทั่วไปของค่าเหล่านี้จะเป็นที่เครื่องจะสังเกตเห็นคือ

$$P_X(x) = P[X=x] = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & ; x=1,2,\dots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

~~XX~~

Q) if $p=0.1$, Prob that $X=10$?, and Prob that $X \geq 10$?

Soln ภารกิจ 1 ;

$$\text{formula } P_X(X) = \begin{cases} p(1-p)^X & ; X=1,2,3,\dots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

แทน $X=10$, $p=0.1$;

$$P_X(10) = 0.1 (1-0.1)^{10}$$

$$\therefore P_X(10) = 0.0349 \quad \text{X}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ modem transmit ๑. เกิด Error ครั้งแรก จากการรับค่า 10 ครั้ง คือ 0.0349 ~~X~~

③ if the modem transmits 100 bits, what PMF of Y , the number of errors?

Sol_u ถ้าโมเด็มส่งข้อมูล: n แทนจำนวนบิตที่ส่งในครั้งเดียวของ Modem.
 Y แทนจำนวนบิตที่ Modem เกิดข้อผิดพลาด
ถ้า Binomial Random Variable ;

$$\text{formula : } P_Y(y) = \begin{cases} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} & ; y=0,1,2,3,\dots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

ดังนั้น แทน $n=100$;

$$P_Y(y) = \begin{cases} \binom{100}{y} p^y (1-p)^{n-y} & ; y=0,1,2,3,\dots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

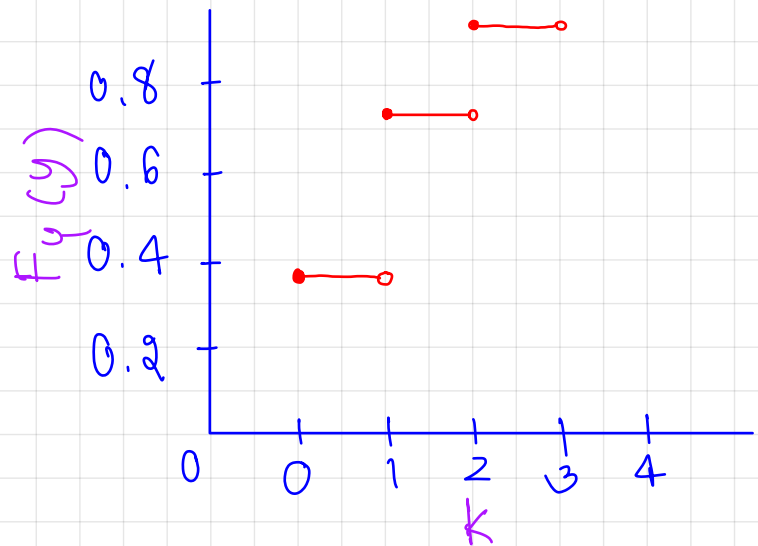
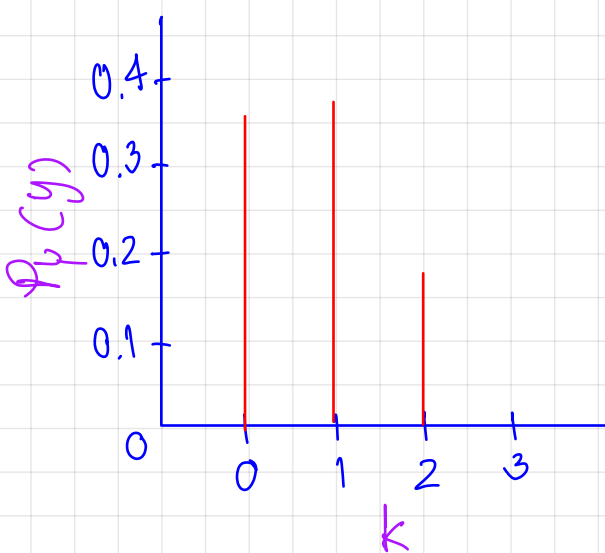
~~XX~~

④ if $p = 0.01$ and modem 100 bits, What $P_Y(2) = ?$ ^{PMT}
 and $P_Y(Y \leq 2)$ ^{CDF}
 in formula to ③ ;

$$P_Y(0) = \binom{100}{0} (0.01)^0 (1-0.01)^{100-0} = 0.366$$

$$P_Y(1) = \binom{100}{1} (0.01)^1 (1-0.01)^{100-1} = 0.3697$$

$$P_Y(2) = \binom{100}{2} (0.01)^2 (1-0.01)^{100-2} = 0.1849 \quad \text{X}$$



⑤ If transmission continues until receiving modem make 3 errors. What is $P_z(z)$, the number of bits transmitted?

Solv www Definition of Pascal Random Variable สูตรทวินาม
Formula:

$$P_z(z) = \begin{cases} \binom{z-1}{k-1} p^k (1-p)^{z-k} & ; z = k, k+1, k+2, \dots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

แทน $k=3$;

✓
A: 10 ✓

$$P_z(z) = \begin{cases} \binom{z-1}{2} p^3 (1-p)^{z-3} & ; z = 3, 4, 5, \dots \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

~~XX~~

⑥ If $p = 0.25$, $P_z(z=12)$

Solv www จากข้อ⑤ แทน $z=12$ และ $p=0.25$ ลงใน $P_z(z)$;

$$P_z(12) = \binom{11}{2} (0.25)^3 (1-0.25)^{12-3}$$

$$\therefore P_z(12) = 0.0645 \quad \text{XX}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ Modem transmits ๑: เกิด Error 3 ครั้งจากทวินาม
ค่า 12 ครั้ง คือ 0.0645 ~~XX~~