บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

เนื้อหา

- **ความเสถียรภาพ**
- **ความไว**
- **การขจัดการรบกวน**
- **ค่าผิดพลาดของระบบ**

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงคุณลักษณะที่สำคัญของระบบได้แก่

- ความเสถียรภาพ ซึ่งนิยามจะเกี่ยวข้องโดยตรงกับการตอบสนองชั่วครู่ และระบบที่ควบคุมได้ต้อง***เสถียร*** *(stable)* เสมอ,

- ความไวซึ่งแสดงถึงความทนทานต่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ต่างๆ ในระบบ

- การขจัดการรบกวน แสดงถึงความสามารถของระบบควบคุมที่ไม่ตอบสนองต่ออินพุตอื่น ๆ ที่ไม่ต้องการ

- ความละเอียดในสถานะอยู่ตัว หมายถึง ความผิดพลาดของผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัวเมื่อเทียบกับอินพุตของระบบซึ่งเป็นสิ่งสำคัญของการควบคุม

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

- **ความเสถียรภาพในที่นี้เป็นไปตามนิยามของ*ความเสถียรภาพ BIBO (bounded-input, bounded-output stability)* กล่าวคือ ระบบจะเสถียรถ้า ทุกๆ สัญญาณอินพุตขอบเขตทำให้เกิดสัญญาณเอาต์พุตขอบเขตในทุกเวลา**
- ***ในระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (linear time-invariant system) จะเสถียรตามนิยาม BIBO ก็ต่อเมื่อ โพลทุกตัวของระบบ หรือ รากทุกตัวของสมการลักษณะเฉพาะจะต้องอยู่ฝั่งซ้ายของระนาบ s***

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ผลตอบสนองทางเวลาประกอบขึ้นจากผลรวมระหว่าง**การตอบสนองชั่วครู่**และ**การตอบสนองในสถานะอยู่ตัว** โดยเทอมการตอบสนองในสถานะอยู่ตัวนี้มีอีกชื่อหนึ่งว่า การตอบสนองบังคับ (forced response) จะมีรูปแบบตามสัญญาณอินพุต ดังนั้นถ้าอินพุตเป็นสัญญาณขอบเขต (bounded signal) การตอบสนองบังคับก็จะเป็นขอบเขตด้วย ดังนั้นการที่เอาต์พุตจะเป็นสัญญาณขอบเขต <u>จึงขึ้นอยู่กับการตอบสนองชั่วครู่</u>

รูปแบบของเทอมการตอบสนองชั่วครู่จะ<u>ขึ้นอยู่กับตำแหน่งโพลของระบบ</u>และโดยถ้าโพลอยู่ฝั่งซ้ายของระนาบ s เทอมเอกซ์โพเนนเชียลจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปและเข้าสู่ศูนย์ทำให้ผลตอบสนองทางเวลาเป็นสัญญาณขอบเขต

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเสถียรหรือไม่ $T(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$

วิธีทำ จากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบจะได้สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$$

ดังนั้นโพลของระบบคือ $s = -1, -2$

ซึ่งทั้งหมดอยู่ฝั่งซ้ายของระนาบ s ระบบจึงเสถียร

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเสถียรหรือไม่

$$T(s) = \frac{s+2}{s^3 + 2s^2 - 11s - 12}$$

วิธีทำ จากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบจะได้สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$s^3 + 2s^2 - 11s - 12 = (s+1)(s-3)(s+4) = 0$$

ดังนั้นโพลของระบบคือ $s = -1, 3, -4$

มีโพล 1 ตัว คือ อยู่ฝั่งขวาของระนาบ s เพราะฉะนั้นระบบจึงไม่เสถียร

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเสถียรหรือไม่

$$T(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

วิธีทำ จากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบจะได้สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$s^2 + 4 = (s + j2)(s - j2) = 0$$

ดังนั้นโพลของระบบคือ $s = \pm j2$ อยู่บนแกนจินตภาพ ดังนั้นระบบจึงไม่เสถียร

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

การแก้สมการลักษณะเฉพาะซึ่งเป็นสมการโพลิโนเมียล เพื่อให้ได้รากของสมการหรือตำแหน่งโพลของระบบจะทำได้ยากขึ้นถ้าระบบมีอันดับมากกว่าสอง ทั้งที่การตรวจสอบว่าระบบมีความเสถียรภาพเป็นอย่างไร ไม่จำเป็นต้องทราบถึงตำแหน่งโพล แต่ต้องทราบว่ามีโพลอยู่ที่ฝั่งขวาหรือบนแกนจินตภาพหรือไม่

วิธีการของ***เราธ์-เฮอร์วิทส์*** *(Routh-Hurwitz)* สามารถตรวจสอบว่ามีโพลอยู่ที่ฝั่งขวาหรือบนแกนจินตภาพหรือไม่ โดยนำสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) มาสร้างเป็นอาร์เรย์ของเราธ์ (Routh array)

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

วิธีการของเราธ์-เฮอร์วิทส์ (Routh-Hurwitz)

จากโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial)

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

นำสัมประสิทธิ์มาสร้างอาร์เรย์ของเราธ์ (Routh array) โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}$$

เมื่อ

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

วิธีการของเราธ์-เฮอร์วิทส์ (Routh-Hurwitz) (ต่อ)

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ปัญหาที่อาจเกิดในสร้างอาร์เรย์นี้ มีได้ 2 กรณี คือ

- กรณีที่ 1 คอลัมน์แรกของอาร์เรย์พบค่า 0

โดยแถวที่พบตัวแรกมีค่าเป็น 0 และมีบางตัวในแถวไม่เป็น 0 กรณีนี้ให้แทนค่า 0 ด้วยตัวแปร ε

โดย $\varepsilon \to 0^+$ และทำการคำนวณสร้างอาร์เรย์ต่อไปโดยติดในเทอมของ ε

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 8 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 3 & \\
s^2 & -6/\varepsilon & 10 & \\
s^1 & 3 & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

- กรณีที่ 2 เกิดแถวของ 0

กรณีนี้แถวบนที่อยู่ติดกับแถวของ 0 จะเป็นโพลิโนเมียลช่วย (auxiliary polynomial) ซึ่งเป็นส่วนประกอบของโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะ ให้นำโพลิโนเมียลช่วยมาทำอนุพันธ์เทียบกับ s และแทนลงในแถวที่เป็น 0 ทั้งแถวแทน กรณีที่มีโพลิโนเมียลช่วยนี้อาจมีรากของสมการอยู่บนแกนจินตภาพได้

$$Q(s) = s^4 - 5s^2 + 4$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & -5 & 4 \\
s^3 & 0 & 0 & \\
s^2 & -5/2 & 4 & \\
s^1 & -18/5 & & \\
s^0 & 4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 4 & -10
\end{array}
$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

- จากอาร์เรย์ของเราธ์ที่ได้ ***จำนวนรากของสมการลักษณะเฉพาะที่อยู่ฝั่งขวาของระนาบ s จะเท่ากับจำนวนครั้งการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมน์แรกของอาร์เรย์*** ดังนั้นสำหรับการตรวจสอบเสถียรภาพของระบบสามารถสรุปได้ว่า ***ระบบจะเสถียรเมื่อสมาชิกในคอลัมน์แรกของอาร์เรย์ต้องไม่มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย และต้องเป็นกรณีไม่พบ 0 ในคอลัมน์แรกเลย***

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}
$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง จากโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะจงพิจารณาว่าจะมีจำนวนรากเท่าไรที่อยู่ฝั่งซ้าย, อยู่ฝั่งขวา และบนแกนจินตภาพ

$$Q(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

วิธีทำ จาก$Q(s)$สร้างอาร์เรย์ของเราธ์ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 11 \\
s^2 & 6 & 6 \\
s^1 & 10 & \\
s^0 & 6 &
\end{array}
$$

เมื่อ $b_1 = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 11\\ 6 & 6\end{vmatrix} = 10$ และ $c_1 = -\frac{1}{10}\begin{vmatrix}6 & 6\\ 10 & 0\end{vmatrix} = 6$

จะเห็นว่าไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมน์แรก ดังนั้นรากทั้งสามจะอยู่ฝั่งซ้ายทั้งหมด

Note: $Q(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+1)(s+2)(s+3) = 0$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง จากโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะจงพิจารณาว่าจะมีจำนวนรากเท่าไรที่อยู่ฝั่งซ้าย, อยู่ฝั่งขวา และบนแกนจินตภาพ

$$Q(s) = s^4 - 4s^3 - 7s^2 + 22s + 24$$

วิธีทำ จาก$Q(s)$สร้างอาร์เรย์ของเราธ์ได้ดังนี้

s^4	1	-7	24
s^3	-4	22	
s^2	$-3/2$	24	
s^1	-42		
s^0	24		

จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมน์แรกสองครั้ง คือ จาก 1 เป็น -4 และจาก -42 เป็น 24 แสดงว่า มีรากของสมการ 2 ตัวที่อยู่ฝั่งขวาของระนาบ s และรากอีก 2 ตัวจึงอยู่ฝั่งซ้าย

Note: $Q(s) = s^4 - 4s^3 - 7s^2 + 22s + 24 = (s+1)(s+2)(s-3)(s-4) = 0$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง จากโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะจงพิจารณาว่าจะมีจำนวนรากเท่าไรที่อยู่ฝั่งซ้าย, อยู่ฝั่งขวา และบนแกนจินตภาพ

$$Q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 10$$

วิธีทำ จาก$Q(s)$สร้างอาร์เรย์ของเราธ์ได้ดังนี้

s^5	1	2	8
s^4	2	4	10
s^3	ε	3	
s^2	$-6/\varepsilon$	10	
s^1	3		
s^0	10		

จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมน์แรกสองครั้งคือจากค่าε เป็น $-6/\varepsilon$ และจากค่า$-6/\varepsilon$เป็น 3 แสดงว่ามีรากของสมการ 2 ตัวที่อยู่ฝั่งขวา ดังนั้นรากอีก 3 ตัวจึงอยู่ฝั่งซ้าย

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง จากโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะจงพิจารณาว่าจะมีจำนวนรากเท่าไรที่อยู่ฝั่งซ้าย, อยู่ฝั่งขวา และบนแกนจินตภาพ

$$Q(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

วิธีทำ จาก $Q(s)$ สร้างอาร์เรย์ของเราธ์ได้ดังนี้

s^4	1	3	2
s^3	3	3	
s^2	2	2	
s^1	0	0	
s^0	2		

จะเห็นว่าเกิดแถวที่เป็น 0 ทั้งแถวคือแถว s^1

ดังนั้นแถว s^2 จึงเป็นโพลิโนเมียลช่วย จะได้

$$Q_a(s) = 2s^2 + 2$$

$$\frac{dQ_a(s)}{ds} = 4s$$

$$\therefore c_1 = 4$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ดังนั้นจะได้อาร์เรย์ของเราธ์ดังนี้ จะเห็นว่าไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมน์แรก

s^4	1	3	2
s^3	3	3	
s^2	2	2	
s^1	4		
s^0	2		

แสดงว่าไม่มีรากของสมการที่อยู่ฝั่งขวาของระนาบ s เลย แต่เนื่องจากมีโพลิโนเมียลช่วย

$$Q_a(s) = 2s^2 + 2$$

ดังนั้นจะได้ว่า $2s^2 + 2 = 0$

$\therefore s = \pm j$ เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะที่อยู่บนแกนจินตภาพ 2 ตัวดังนั้นรากอีก 2 ตัวจึงอยู่ฝั่งซ้าย

Note: $Q(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = Q_a(s)Q_r(s) = 0$; $Q_r(s) = \frac{Q(s)}{Q_a(s)} = \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 1$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง จากโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะจงพิจารณาว่าจะมีจำนวนรากเท่าไรที่อยู่ฝั่งซ้าย, อยู่ฝั่งขวา และบนแกนจินตภาพ

$$Q(s) = s^4 - 5s^2 + 4$$

วิธีทำ จาก$Q(s)$สร้างอาร์เรย์ของเราธ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & -5 & 4 \\
s^3 & 0 & 0 & \\
s^2 & -5/2 & 4 & \\
s^1 & -18/5 & & \\
s^0 & 4 & &
\end{array}$$

จะเห็นว่าโพลิโนเมียลช่วยเหมือนกับโพลิโนเมียลลักษณะเฉพาะ คือ

$$Q_a(s) = s^4 - 5s^2 + 4$$

$$\frac{dQ_a(s)}{ds} = 4s^3 - 10s$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมน์แรกสองครั้ง คือจากค่า 4 เป็น -5/2 และจากค่า -18/5 เป็น 4 แสดงว่า มีรากของสมการ 2 ตัวอยู่ฝั่งขวา ถึงแม้จะมีโพลิโนเมียลช่วย แต่ก็ไม่ได้แสดงถึงรากที่อยู่บนแกนจินตภาพ ดังนั้นรากอีก 2 ตัวจึงอยู่ต้องฝั่งซ้าย

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & -5 & 4 \\
s^3 & 4 & -10 & \\
s^2 & -5/2 & 4 & \\
s^1 & -18/5 & & \\
s^0 & 4 & &
\end{array}$$

ตรวจสอบโดยการแก้สมการลักษณะเฉพาะ

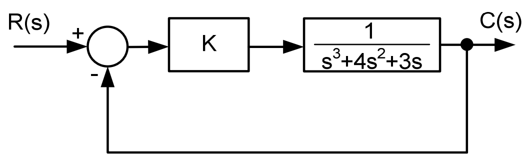
$$Q(s) = s^4 - 5s^2 + 4 = (s+1)(s+2)(s-1)(s-2) = 0$$

$$\therefore s = -1, -2, 1, 2$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง จากระบบควบคุมในรูปจงหาช่วงของค่า ***K*** ที่ทำให้ระบบเสถียร



วิธีทำ ฟังก์ชันถ่ายโอนรวมของระบบ

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s^3+4s^2+3s+K}$$

ดังนั้นสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$Q(s)=s^3+4s^2+3s+K=0$$

s^3	1	3
s^2	4	K
s^1	$(12-K)/4$	
s^0	K	

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ระบบจะเสถียรเมื่อสมาชิกในคอลัมน์แรกไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย

ดังนั้นระบบจะเสถียรเมื่อ $\frac{12-K}{4}>0$

และ $K>0$

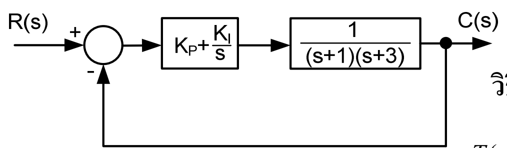
$$\therefore\ 0<K<12$$

s^3	1	3
s^2	4	K
s^1	$(12-K)/4$	
s^0	K	

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความเสถียรภาพ

ตัวอย่าง บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมในรูป จงหาบริเวณของค่า K_P และ K_I บนระนาบ ที่ทำให้ระบบเสถียร



วิธีทำ ฟังก์ชันถ่ายโอนรวมของระบบคือ

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 4s^2 + (3+K_P)s + K_I}$$

ดังนั้นสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + (3+K_P)s + K_I = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3+K_P \\ s^2 & 4 & K_I \\ s^1 & (12+4K_P-K_I)/4 & \\ s^0 & K_I & \end{array}$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

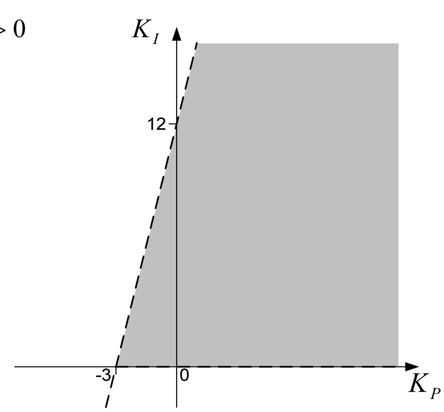
ความเสถียรภาพ

ระบบจะเสถียรเมื่อสมาชิกในคอลัมน์แรกไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย

ดังนั้นระบบจะเสถียรเมื่อ $\frac{12+4K_P-K_I}{4} > 0$

และ $K_I > 0$

จากเงื่อนไขข้างต้นสามารถสร้างบริเวณของค่า K_P และ K_I บนระนาบ $K_P K_I$ ที่ทำให้ระบบเสถียรได้ดังรูป



บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความไว

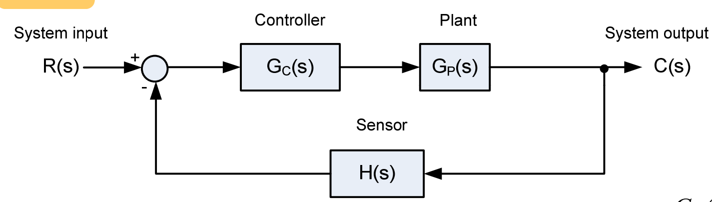
- นิยาม **ความไวในระบบควบคุม หมายถึง อัตราส่วนของเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันถ่ายโอนรวม *T*(s) ต่อเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ *b* ในฟังก์ชันถ่ายโอนรวม** เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$S_b^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta b/b} = \frac{\Delta T(s)}{\Delta b}\frac{b}{T(s)} = \frac{\partial T(s)}{\partial b}\frac{b}{T(s)}$$

- จากนิยามจะเห็นว่าค่าความไวมีค่าใกล้ศูนย์จะดี เพราะนั่นหมายถึงฟังก์ชันถ่ายโอนรวมจะไม่เปลี่ยนแปลงถึงแม้จะมีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ในฟังก์ชันถ่ายโอนก็ตาม

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความไว



จากระบบควบคุมป้อนกลับในรูปจะมีฟังก์ชันถ่ายโอนรวม $T(s) = \frac{G_C(s)G_P(s)}{1+G_C(s)G_P(s)H(s)}$

พิจารณาความไวของระบบ

$$S_{G_P}^T = \frac{\partial T}{\partial G_P}\frac{G_P}{T} = \frac{(1+G_CG_PH)G_C - G_CG_P(G_CH)}{(1+G_CG_PH)^2}\frac{G_P}{G_CG_P/(1+G_CG_PH)}$$

$$\therefore\ S_{G_P}^T = \frac{1}{1+G_CG_PH}$$

จะเห็นว่า จะมีค่าใกล้ศูนย์เมื่ออัตราขยายวงรอบมีค่ามากๆ

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความไว

- ดังนั้นการออกแบบระบบควบคุมป้อนกลับจึงต้องเลือกตัวควบคุมให้มีค่าอัตราขยายมาก ๆ ณ ความถี่ทำงานของระบบควบคุม เช่น ถ้าอินพุตของระบบเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดซึ่งเป็นค่าคงที่เมื่อเวลามากกว่าศูนย์ เปรียบเสมือนระบบควบคุมทำงานที่ความถี่ศูนย์หรือดีซี ถ้าใช้ตัวควบคุมที่มีตัวอินทิเกรตผสม เช่น ตัวควบคุมแบบ PID ซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

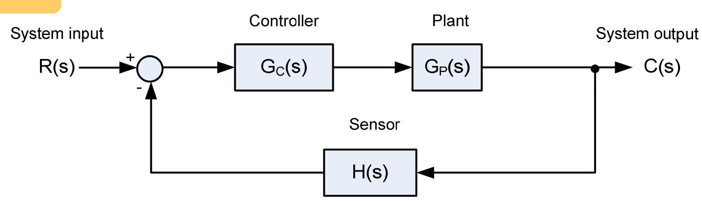
จะมีอัตราขยายที่ความถี่ศูนย์หรือดีซีเท่ากับ

$$\left|G_C(j0)\right| = \left|K_P + \frac{K_I}{j0} + K_D(j0)\right| = \infty$$

จะทำให้ $S_{G_P}^T \to 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของพลานต์ไม่มีผลต่อฟังก์ชันถ่ายโอนรวม

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความไว



พิจารณาความไวของระบบเมื่อเทียบกับเซ็นเซอร์จะได้ว่า

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H}\frac{H}{T} = \frac{-G_C G_P (G_C G_P)}{(1+G_C G_P H)^2}\frac{H}{G_C G_P/(1+G_C G_P H)} = \frac{-G_C G_P H}{1+G_C G_P H}$$

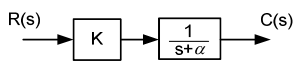
จะเห็นว่า S_H^T จะมีค่าใกล้ศูนย์เมื่ออัตราขยายวงรอบ $G_C G_P H$ มีค่าใกล้ศูนย์ซึ่งไม่สามารถทำได้ในทางปฏิบัติ **ดังนั้นเพื่อไม่ให้เกิดผลกระทบต่อการควบคุมจึงต้องเลือกเซ็นเซอร์ที่มีคุณภาพสูงที่ไม่แปรเปลี่ยนตามสิ่งแวดล้อม**

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

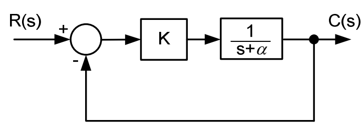
ความไว

ตัวอย่าง จากบล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมในรูป(ก) และ (ข)

ถ้าค่าปกติของ$K = 30$และ$\alpha = 2$ จงหาค่าS_K^T และ S_α^T ที่ความถี่ดีซีของระบบทั้งสอง



(ก)



(ข)

วิธีทำ ระบบควบคุมวงรอบเปิดรูป (ก)

ฟังก์ชันถ่ายโอนรวม $T(s) = \dfrac{K}{s+\alpha}$

$$S_K^T = \frac{\partial T}{\partial K}\frac{K}{T} = \frac{1}{s+\alpha}\cdot\frac{K}{K/(s+\alpha)} = 1$$

$$\therefore S_K^T(j0) = 1$$

$$S_\alpha^T = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{\alpha}{T} = -\frac{K}{(s+\alpha)^2}\cdot\frac{\alpha}{K/(s+\alpha)}$$

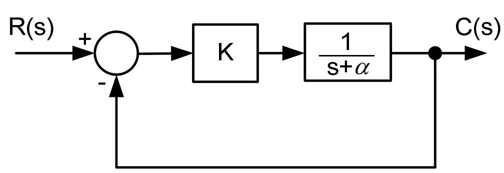
$$= -\frac{\alpha}{s+\alpha} = -\frac{2}{s+2} \qquad \therefore S_\alpha^T(j0) = -1$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความไว

วิธีทำ ระบบควบคุมวงรอบเปิดรูป (ข)

ฟังก์ชันถ่ายโอนรวม



$$T(s) = \frac{K}{s+\alpha+K}$$

$$S_K^T = \frac{\partial T}{\partial K}\frac{K}{T} = \frac{(s+\alpha+K)-K}{(s+\alpha+K)^2}\cdot\frac{K}{K/(s+\alpha+K)} = \frac{s+\alpha}{s+\alpha+K} = \frac{s+2}{s+32}$$

(ข)

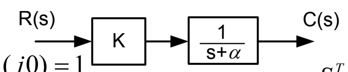
$$\therefore S_K^T(j0) = \frac{j0+2}{j0+32} = \frac{1}{16}$$

$$S_\alpha^T = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{\alpha}{T} = -\frac{K}{(s+\alpha+K)^2}\cdot\frac{\alpha}{K/(s+\alpha+K)} = -\frac{\alpha}{s+\alpha+K} = -\frac{2}{s+32}$$

$$\therefore S_\alpha^T(j0) = -\frac{2}{j0+32} = -\frac{1}{16}$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

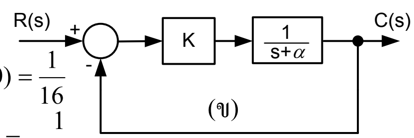
ความไว



$S_K^T(j0) = 1$

$S_\alpha^T(j0) = -1$

(ก)



$S_K^T(j0) = \dfrac{1}{16}$

$S_\alpha^T(j0) = -\dfrac{1}{16}$

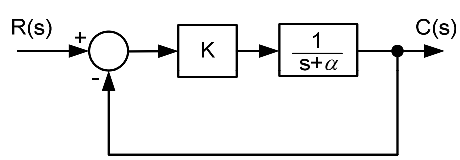
(ข)

จะเห็นว่า ณ ความถี่ดีซี ความไวของระบบในรูป(ก)เมื่อเทียบ K, α จะมีค่าเป็น 1 และ -1 ตามลำดับ ดังนั้นคุณลักษณะของระบบขึ้นอยู่กับพลานต์และตัวควบคุมโดยตรง ถ้าเกิดการเปลี่ยนแปลงในระบบก็จะทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนรวมเปลี่ยนไปด้วยในสัดส่วนที่เท่ากัน แต่หลังจากทำเป็นระบบควบคุมป้อนกลับในรูป(ข) ความไวจะลดลงเหลือเพียง $\frac{1}{16}$ และ$-\frac{1}{16}$ ตามลำดับ ทำให้ระบบควบคุมมีการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันถ่ายโอนรวมเนื่องจากพารามิเตอร์ทั้งสองน้อยกว่ากรณีของระบบในรูป(ก)

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ความไว

ตัวอย่าง จากระบบควบคุมป้อนกลับในรูป



ถ้าเปลี่ยนตัวควบคุมจาก $G_C(s) = K$ เป็น

$$G_C(s) = K\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

จงหาค่าความไว S_K^T และS_α^T ที่ความถี่ดีซีของระบบ ถ้าค่าปกติของ $K = 30$ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ ฟังก์ชันถ่ายโอนรวม $T(s) = \dfrac{Ks + K}{s^2 + (K+\alpha)s + K}$

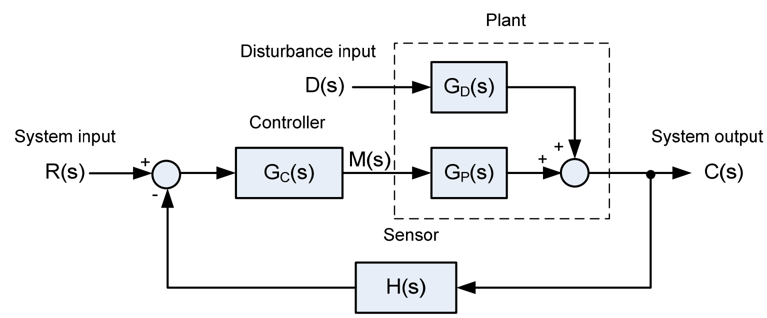
$$S_K^T = \frac{\partial T}{\partial K}\frac{K}{T} = \frac{s(s^2 + (\alpha+1)s + \alpha)}{(s+1)(s^2 + (K+\alpha)s + K)} \qquad \therefore S_K^T(j0) = 0$$

$$S_\alpha^T = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{\alpha}{T} = -\frac{\alpha s}{s^2 + (K+\alpha)s + K} \qquad \therefore S_\alpha^T(j0) = 0$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

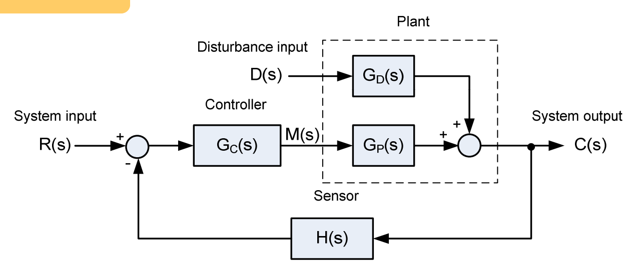
การขจัดการรบกวน

- โดยปกติพลานต์ที่ควบคุมจะมีการรบกวนอยู่ด้วย ดังนั้นเพื่อศึกษาการขจัดการรบกวนจึงเพิ่มอินพุตการรบกวน, เข้าไปในพลานต์ ดังรูป



บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

การขจัดการรบกวน



ดังนั้นเอาต์พุตระบบคือ

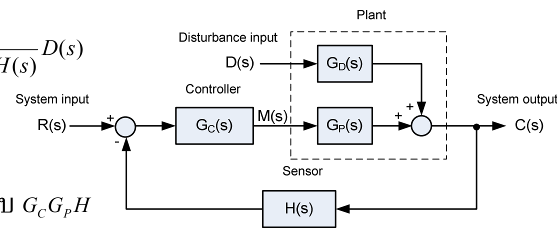
$$C(s)=\frac{G_C(s)G_P(s)}{1+G_C(s)G_P(s)H(s)}R(s)+\frac{G_D(s)}{1+G_C(s)G_P(s)H(s)}D(s)$$

การขจัดการรบกวนจึงหมายถึงการขจัดเทอม $\frac{G_D(s)}{1+G_C(s)G_P(s)H(s)}D(s)$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

การขจัดการรบกวน

วิธีการขจัดเทอม $\frac{G_D(s)}{1+G_C(s)G_P(s)H(s)}D(s)$



1. เทอมของการรบกวนจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่ออัตราขยายวงรอบ $G_C G_P H$ มีค่ามากๆ ดังนั้นการออกแบบระบบควบคุมป้อนกลับจึงต้องเลือกตัวควบคุมG_Cให้มีค่าอัตราขยายมาก ๆ ณ ความถี่ทำงานของระบบควบคุม

2. ทำการลดค่าอัตราขยายของเทอม G_D

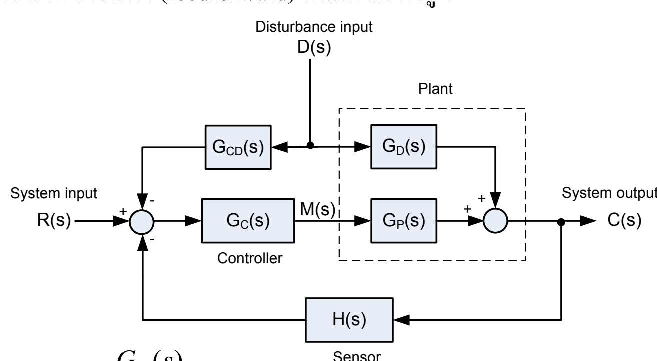
3. ทำการลดขนาดของการรบกวน $D(s)$ ที่จะเข้ามาในระบบ

4. กรณีที่สามารถวัดอินพุตการรบกวนได้อาจใช้วิธีการป้อนไปข้างหน้า (feedforward)

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

การขจัดการรบกวน

- วิธีการป้อนไปข้างหน้า (feedforward) มีลักษณะดังรูป

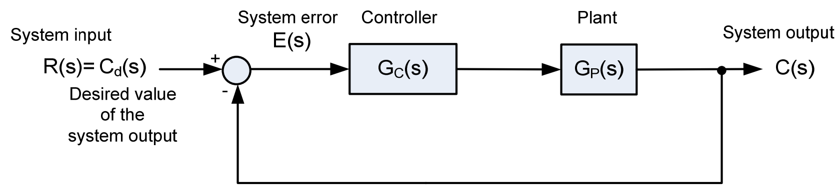


โดยที่ $G_{CD}(s)=\frac{G_D(s)}{G_C(s)G_P(s)}$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

- ในหัวข้อนี้จะเป็นการหาค่าความแตกต่างระหว่างเอาต์พุตระบบ $c(t)$ กับค่าต้องการของเอาต์พุตระบบ (desired value of the system output) $c_d(t)$ เรียกว่าค่าผิดพลาดของระบบ (system error) $e(t)$

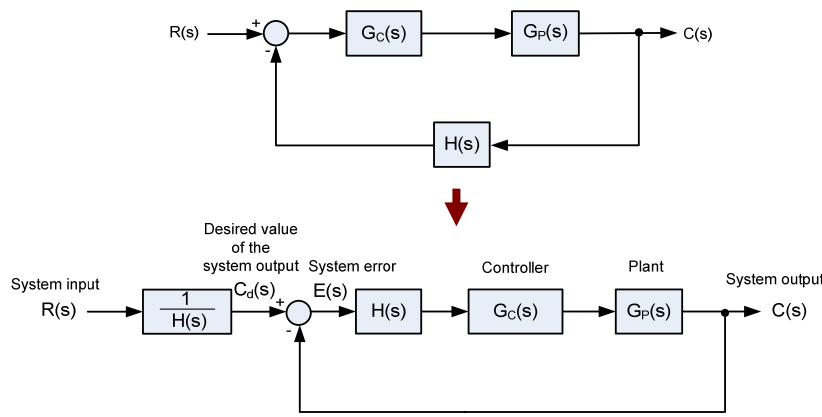


ระบบควบคุมป้อนกลับเท่ากับหนึ่ง (unity feedback control system)

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

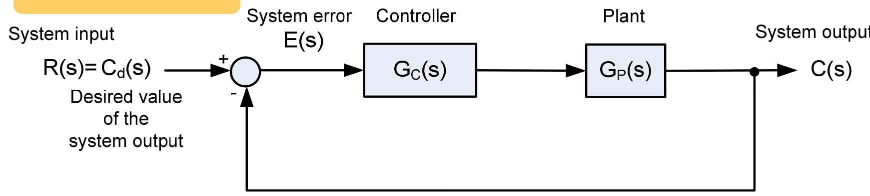
ค่าผิดพลาดของระบบ

ในกรณีที่เป็นระบบควบคุมป้อนกลับทั่วไป เราสามารถแปลงให้เป็นระบบควบคุมป้อนกลับเท่ากับหนึ่ง ได้ดังนี้



บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ



จากรูปสามารถหาค่าผิดพลาดของระบบได้ดังนี้

$$E(s) = C_d(s) - C(s) = R(s) - C(s) = \frac{1}{1 + G_C(s)G_P(s)} R(s)$$

จากทฤษฎีบทค่าสุดท้ายหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวได้

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)}$$

เรียกเทอม $G_C(s)G_P(s)$ ว่า***ฟังก์ชันวงรอบเปิด*** *(open loop function)* ซึ่งจะนำไปใช้กำหนด***ชนิดระบบ*** *(system type)*, ***N*** = จำนวนโพลของฟังก์ชันวงรอบเปิดที่จุดกำเนิด

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

ตัวอย่าง จากฟังก์ชันวงรอบเปิดต่อไปนี้มีชนิดระบบ(N)เป็นเท่าไร

1.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{3s+8}{s^3+3s^2+2s}$ 2.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+6}$

3.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{10}{s^2(s+6)(s+1)}$ 4.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{2s}{s^3+5s^2+10s}$

วิธีทำ

1.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{3s+8}{s^3+3s^2+2s} = \dfrac{3s+8}{s(s+1)(s+2)}$

มีโพล 1 ตัวที่จุดกำเนิด ดังนั้น ชนิดระบบ = 1

2.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+6} = \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$

จะเห็นว่ามีไม่มีโพลที่จุดกำเนิดเลย ดังนั้น ชนิดระบบ = 0

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

3.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{10}{s^2(s+6)(s+1)}$

จะเห็นว่ามีโพล 2 ตัวที่จุดกำเนิด ดังนั้น ชนิดระบบ = 2

4.) $G_C(s)G_P(s) = \dfrac{2s}{s^3+5s^2+10s} = \dfrac{2}{s^2+5s+10}$

จะเห็นว่ามีไม่มีโพลที่จุดกำเนิดเลย ดังนั้น ชนิดระบบ = 0

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

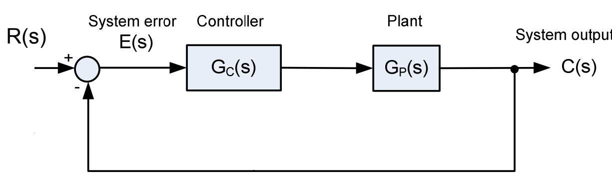
ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย: อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

$r(t) = u(t) \quad \therefore R(s) = \dfrac{1}{s}$ แทนลงในสมการหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวได้ว่า

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s)}{1+G_C(s)G_P(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

เมื่อ $K_p = \lim_{s\to 0} G_C(s)G_P(s)$

K_p คือค่าคงที่ผิดพลาดตำแหน่ง (position error constant)



บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

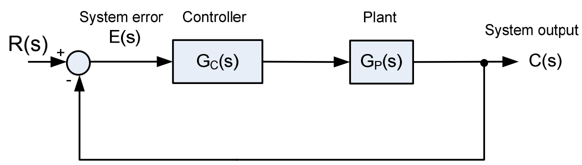
ผลตอบสนองลาดเอียงหนึ่งหน่วย: อินพุทระบบเป็นฟังก์ชันลาดเอียงหนึ่งหน่วย

$r(t) = tu(t) \quad \therefore R(s) = \frac{1}{s^2}$ แทนลงในสมการหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวได้ว่า

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^2)}{1+G_C(s)G_P(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sG_C(s)G_P(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG_C(s)G_P(s)} = \frac{1}{K_v}$$

เมื่อ $K_v = \lim_{s\to 0} sG_C(s)G_P(s)$

K_v คือค่าคงที่ผิดพลาดความเร็ว (velocity error constant)



บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

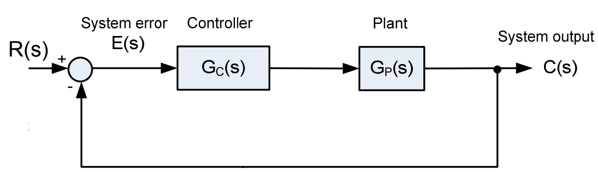
ผลตอบสนองพาราบอริค: อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันพาราบอริค

$r(t) = \frac{1}{2}t^2u(t) \quad \therefore R(s) = \frac{1}{s^3}$ แทนลงในสมการหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวได้ว่า

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^3)}{1+G_C(s)G_P(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G_C(s)G_P(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2G_C(s)G_P(s)} = \frac{1}{K_a}$$

เมื่อ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2G_C(s)G_P(s)$

K_a คือ ค่าคงที่ผิดพลาดความเร่ง (acceleration error constant)



บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

สรุป: **ค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวในกรณีอินพุตระบบและชนิดระบบแบบต่าง ๆ สามารถแสดงได้ดังตาราง**

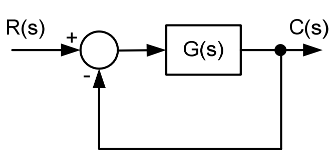
		$R(s)$		Error
N	1/s	1/s^2	1/s^3	constants
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	$K_p = \lim_{s\to 0} G_C G_P$
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞	$K_v = \lim_{s\to 0} s G_C G_P$
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G_C G_P$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

ตัวอย่าง พิจารณาระบบควบคุมในรูปจงหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวสำหรับ

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}$$



a.) อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

b.) อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันลาดเอียงหนึ่งหน่วย

วิธีทำ ฟังก์ชันวงรอบเปิด

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)} \quad \therefore N = 0$$

a.) $K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2}{(s+1)(s+4)} = 0.5$

$$\therefore e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+0.5} = \frac{2}{3}$$

b.)

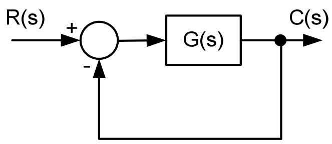
จากตาราง $e_{ss} = \infty$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

ตัวอย่าง พิจารณาระบบควบคุมในรูปจงหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวสำหรับ

$$G(s) = \frac{4(s+2)}{s^2(s+6)}$$



a.) อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

b.) อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันลาดเอียงหนึ่งหน่วย

วิธีทำ ฟังก์ชันวงรอบเปิด

$$G(s) = \frac{4(s+2)}{s^2(s+6)} \quad \therefore N = 2$$

a.)

จากตาราง $e_{ss} = 0$

b.)

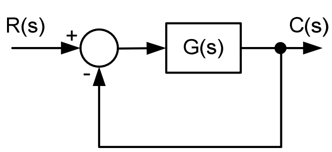
จากตาราง $e_{ss} = 0$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

ค่าผิดพลาดของระบบ

ตัวอย่าง พิจารณาระบบควบคุมในรูปจงหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวสำหรับ

$$G(s) = \frac{6s^2+s+5}{s^3+4s}$$



a.) อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

b.) อินพุตระบบเป็นฟังก์ชันลาดเอียงหนึ่งหน่วย

วิธีทำ ฟังก์ชันวงรอบเปิด

$$G(s) = \frac{6s^2+s+5}{s^3+4s} = \frac{6s^2+s+5}{s(s^2+4)}$$

$$\therefore N = 1$$

a.) จากตาราง $e_{ss} = 0$

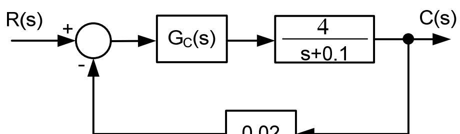
b.) $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{6s^2+s+5}{s(s^2+4)} = \frac{5}{4}$

$$\therefore e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{4}{5}$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

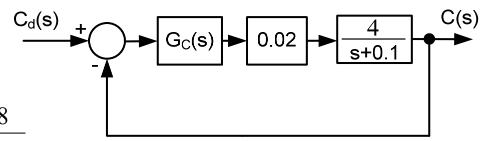
ค่าผิดพลาดของระบบ

ตัวอย่าง ระบบควบคุมป้อนกลับในรูป ถ้าอินพุตระบบเป็นค่าคงที่เท่ากับ 50 จงหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวเมื่อ $G_C(s) = 10$



วิธีทำ

ทำระบบให้มีการป้อนกลับเท่ากับหนึ่งได้ดังรูป



ดังนั้นฟังก์ชันวงรอบเปิดคือ

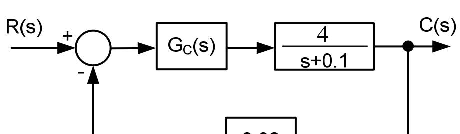
$$G_C(s)G_P(s)H(s) = \frac{0.08}{s+0.1}G_C(s) \quad = \frac{0.8}{s+0.1}$$

$$\therefore N = 0 \qquad K_p = \lim_{s\to 0}\frac{0.8}{s+0.1} = 8 \qquad \therefore e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}(50) = \frac{50}{1+8} = \frac{50}{9} = 5.56$$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

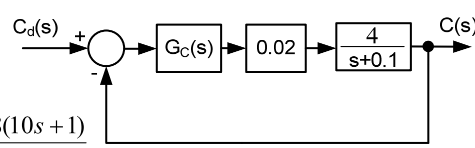
ค่าผิดพลาดของระบบ

ตัวอย่าง ระบบควบคุมป้อนกลับในรูป ถ้าอินพุตระบบเป็นค่าคงที่เท่ากับ 50 จงหาค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวเมื่อ $G_C(s) = 10 + \frac{1}{s}$



วิธีทำ

ทำระบบให้มีการป้อนกลับเท่ากับหนึ่งได้ดังรูป



ดังนั้นฟังก์ชันวงรอบเปิดคือ

$$G_C(s)G_P(s)H(s) = \frac{0.08}{s+0.1}(10+\frac{1}{s}) = \frac{0.08(10s+1)}{s(s+0.1)}$$

$\therefore N = 1$ ดังนั้นถ้าอินพุตระบบเป็นค่าคงที่ค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัว $e_{ss} = 0$

บทที่ 4 คุณลักษณะของระบบควบคุม

สรุป

- ในบทนี้ได้กล่าวถึงคุณลักษณะที่สำคัญของระบบควบคุมป้อนกลับได้แก่ การตอบสนองชั่วครู่, ความเสถียรภาพ, ความไว, การขจัดการรบกวน และค่าผิดพลาดของระบบ
- ระบบควบคุมป้อนกลับที่ออกแบบ**จะต้องเสถียร** ระบบจะต้องไม่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของพลานต์ ระบบควบคุมจะต้องจำกัดหรือขจัดผลตอบสนองอันเกิดจากการรบกวนได้
- ในการควบคุมจะต้องทราบชนิดของอินพุตระบบ และระบบควบคุมจะต้องให้เอาต์พุตระบบตามอินพุตได้โดยมีค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวเป็นไปตามที่ต้องการ