# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**เนื้อหา**

- ผลตอบสนองทางเวลาของระบบอันดับหนึ่ง
- ผลตอบสนองทางเวลาของระบบอันดับสอง
- ข้อกำหนดของผลตอบสนองทางเวลาในการออกแบบ
- ความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบสนองทางเวลากับตำแหน่งโพล
- การลดอันดับของระบบ

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**บทนำ**

- ผลตอบสนองก็คือเอาต์พุตของระบบ โดยจะสามารถแบ่งได้เป็นผลตอบสนองทางเวลา และผลตอบสนองทางความถี่
- ในบทนี้เป็นการศึกษาเอาต์พุตในโดเมนเวลาของระบบต่าง ๆ ที่มีอินพุตต่างกันไป เช่น *ฟังก์ชันอิมพัลส์ (impulse function )*, *ฟังก์ชันขั้นบันได (step function)* และ *ฟังก์ชันลาดเอียง (ramp function)* โดยจะเน้นหนักในกรณีของ ระบบอันดับหนึ่ง และ ระบบอันดับสอง

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ผลตอบสนองทางเวลาของระบบอันดับหนึ่ง**

- รูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับระบบอันดับหนึ่งแสดงดังสมการ(1) เมื่อ C(s)คือผลการแปลงลาปลาซเอาต์พุตระบบ c(t) และ R(s) คือผลการแปลงลาปลาซอินพุตระบบ r(t)

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} \qquad \textbf{(1)}$$

- แต่รูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับระบบอันดับหนึ่งที่นิยมใช้ในงานวิศวกรรมคือ ทั้งนี้เนื่องจากรูปนี้แสดงความหมายทางกายภาพของระบบมากกว่าแบบแรก

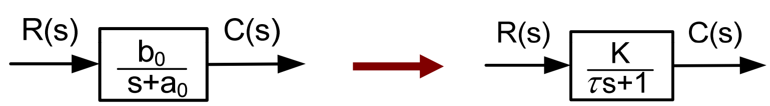
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad \textbf{(2)}$$

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- ความสัมพันธ์ระหว่างทั้งสองรูปแบบ คือ

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \qquad \text{และ} \qquad b_0 = \frac{K}{\tau}$$



## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- **ผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วย** (unit impulse response)
  - หมายถึง เอาต์พุตระบบเมื่ออินพุตระบบเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วยภายใต้ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ ดังนั้น $r(t) = \delta(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซ R(s) = 1

    ดังนั้น
    $$C(s) = G(s)R(s) = \frac{K}{\tau s + 1}(1) = \frac{K}{\tau s + 1}$$
  - เมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันได้ผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วยคือ
    $$c(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$$

ดังนั้นจะเห็นว่าถ้าทำการแปลงลาปลาซผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วยจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

Impulse Response : $\delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 & ; t = 0 \end{cases}$

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

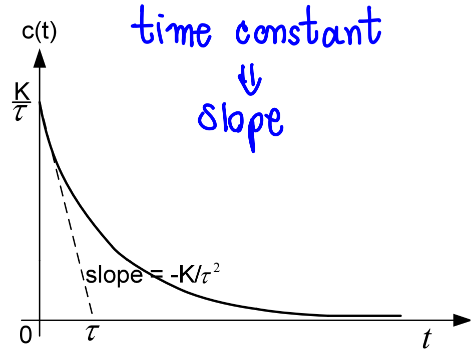
**ระบบอันดับหนึ่ง**

- **ผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วย** (unit impulse response) (ต่อ)

$$c(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$$

**ความชันที่เวลา** t = 0

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{K}{\tau^2}$$




time constant

⇓

slope

ดังนั้นถ้าผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วยมีการลดลงด้วยอัตราการลดลงเท่ากับความชันที่เวลา t = 0 จะทำให้c(t)มีค่าเป็นศูนย์ที่เวลา $t = \tau$ ดังรูป

K คือ Direct Current Gain

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- พารามิเตอร์ $\tau$ นี้มีชื่อว่า **ค่าคงตัวเวลา**
- ถ้าพิจารณาค่าของเทอมเอกซ์โพเนนเชียลเป็นจำนวนเท่าของค่าคงตัวเวลา จะได้การเปลี่ยนแปลงของผลตอบสนองดังแสดงในตาราง

ผลตอบสนองชั่วครู่และหมดไปเมื่อเวลา $t \to \infty$ ทำให้ผลตอบสนองทางเวลาของระบบลู่เข้าหาค่าการตอบสนองในสถานะอยู่ตัว ในทางปฏิบัติจะถือว่าระบบเข้าสู่สถานะอยู่ตัวเมื่อเทอมเอกซ์โพเนนเชียลลดลงต่ำกว่า2% ของค่าเริ่มต้น เมื่อเวลาผ่านไปเท่ากับ $4\tau$ และไม่ถึง 1% ของค่าเริ่มต้นเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากับ $5\tau$ ช่วงเวลานี้เรียกว่า ***ช่วงเวลาเข้าที่*** *(settling time)* , $T_S$ ในที่นี้จะใช้ $T_S = 4\tau$

| $t$ | $e^{-t/\tau}$ |
|---|---|
| 0 | **1** |
| $\tau$ | **0.3679** |
| $2\tau$ | **0.1353** |
| $3\tau$ | **0.0498** |
| $4\tau$ | **0.0183** |
| $5\tau$ | **0.0067** |

ตารางค่า $e^{-t/\tau}$ ที่เวลา $t$ ต่าง ๆ

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- **ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย** (unit step response)
  - หมายถึง เอาต์พุตระบบเมื่ออินพุตระบบเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยภายใต้ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ ดังนั้น *r(t)=u(t)* มีผลการแปลงลาปลาซ $R(s) = \frac{1}{s}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{K}{\tau s+1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1/\tau}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันได้ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วยคือ

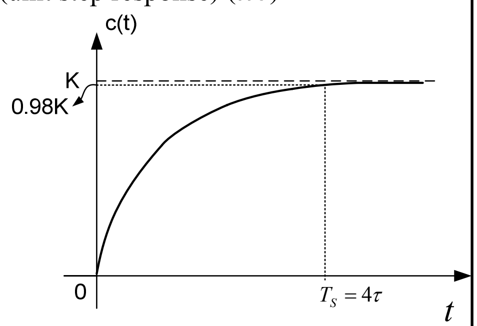
$$c(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$$

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- **ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย** (unit step response) (ต่อ)

$$c(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$$




**เทอม** $K$ **คือการตอบสนองในสถานะอยู่ตัว**

**เทอม** $-Ke^{-t/\tau}$ **คือการตอบสนองชั่วครู่**

ผลตอบสนองนี้เมื่อเวลาผ่านไปมากกว่า ช่วงเวลาเข้าที่ $T_S = 4\tau$ ผลตอบสนองทางเวลาของระบบจะลู่เข้าหาผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว ด้วยค่าผิดพลาดน้อยกว่า 2% เมื่อเทียบกับค่าในสถานะอยู่ตัว

Transient response (Natural)

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- ***อัตราขยายไฟตรงของระบบ** (system dc gain)* → K

**— หมายถึงอัตราขยายของระบบในสถานะอยู่ตัวเมื่ออินพุตของระบบเป็นค่าคงที่**

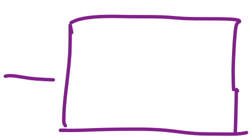
จากผลตอบสนองขั้นบันได $c(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$ ประกอบด้วย 2 เทอม คือ

1.ผลตอบสนองชั่วครู่ $-Ke^{-t/\tau}$

2.ผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว $K$

ดังนั้นผลตอบสนองของระบบในสถานะอยู่ตัวจึงเท่ากับ $K$ เขียนแทนด้วย

$$c_{ss} = K$$



**ดังนั้นอัตราขยายดีซีของระบบอันดับหนึ่งจึงเท่ากับ** $K$ **เนื่องจากอินพุตของระบบเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดซึ่งเป็นค่าคงที่เท่ากับ 1** ( $\frac{c_{ss}}{1} = K$ )

How to determine K ; let s = 0

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- สำหรับกรณีระบบที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น G(s) จะมีอัตราขยายไฟตรงของระบบจะเท่ากับ G(0) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้อินพุตของระบบเป็น $r(t) = u(t)$ นั่นคือ $R(s) = \frac{1}{s}$

ดังนั้นเอาต์พุตของระบบคือ

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{G(s)}{s}$$

จากทฤษฎีบทค่าสุดท้ายจะได้ว่า

$$c_{ss} = \lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} sC(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{s} = G(0)$$

ดังนั้น**อัตราขยายดีซีของระบบจึงเท่ากับ G(0)**

Final Value Theorem.

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

- **ผลตอบสนองลาดเอียงหนึ่งหน่วย (unit ramp response)**
  - หมายถึง เอาต์พุตระบบเมื่ออินพุตระบบเป็นฟังก์ชันลาดเอียงหนึ่งหน่วยภายใต้ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ ดังนั้น $r(t)=t$ มีผลการแปลงลาปลาซ $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{K}{\tau s+1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{K}{s^2} - \frac{K\tau}{s} + \frac{K\tau}{s+1/\tau}$$

ทำการแปลงลาปลาซผกผันได้ผลตอบสนองลาดเอียงหนึ่งหน่วยคือ

$$c(t) = Kt - \boxed{K\tau} + \boxed{K\tau e^{-t/\tau}} \longrightarrow \text{Natural Response}$$

โดยที่ $Kt - K\tau$ คือการตอบสนองในสถานะอยู่ตัวและเทอม

$K\tau e^{-t/\tau}$ คือการตอบสนองชั่วครู่

Force Response

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

**ตัวอย่าง** สมการอนุพันธ์เชิงเส้นของระบบอันดับหนึ่งคือ $\frac{dc(t)}{dt}+3c(t)=4r(t)$

เมื่อ c(t) คือเอาต์พุตระบบและ r(t) คืออินพุตระบบ จงหา

a) ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

b)ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

c) เอาต์พุตระบบเมื่อ และค่าเริ่มต้น

**วิธีทำ**

**a)** ทำการแปลงลาปลาซตลอดสมการจะได้ว่า

$$sC(s)-c(0)+3C(s)=4R(s)$$

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

เมื่อกำหนดให้ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$sC(s)+3C(s)=4R(s)$$

$$\therefore G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{4}{s+3}$$

**b)** ให้ $r(t) = u(t)$ ดังนั้น $R(s)=\frac{1}{s}$ และจะได้ว่า

$$C(s)=G(s)R(s) \quad =\frac{4}{s+3}\left(\frac{1}{s}\right) \quad =\frac{-4/3}{s+3}+\frac{4/3}{s}$$

ดังนั้นผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย $c(t)=-\frac{4}{3}e^{-3t}+\frac{4}{3}$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

**c)** ให้ $r(t) = 5u(t)$ และค่าเริ่มต้น $c(0) = 2$ ดังนั้นจะได้ว่า $R(s) = \frac{5}{s}$ และจาก

$$sC(s) - c(0) + 3C(s) = 4R(s) \rightarrow sC(s) - 2 + 3C(s) = 4\left(\frac{5}{s}\right)$$

$$C(s) = \frac{20}{s(s+3)} + \frac{2}{s+3}$$

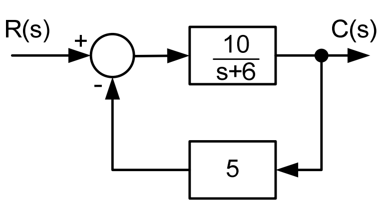
$$\therefore C(s) = \frac{20/3}{s} - \frac{14/3}{s+3}$$

**ดังนั้นจะได้เอาต์พุตระบบเป็น** $c(t) = \frac{20}{3} - \frac{14}{3}e^{-3t}$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับหนึ่ง**

ตัวอย่าง **จงหาค่าคงตัวเวลาและอัตราขยายดีซีของระบบที่มีบล็อกไดอะแกรมดังรูป**




**<u>วิธีทำ</u>** ฟังก์ชันถ่ายโอนรวมของระบบคือ

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10}{s+6}}{1+5\frac{10}{s+6}} = \frac{10}{s+56} = \frac{10/56}{\frac{1}{56}s+1}$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตราฐานฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับหนึ่งจะได้ว่า

ค่าคงตัวเวลา $\tau = \frac{1}{56}$ $s$ และอัตราขยายดีซีของระบบ $G(0) = \frac{10}{56}$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ผลตอบสนองทางเวลาของระบบอันดับสอง**

- รูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับระบบอันดับสองแสดงดังสมการ(1) เมื่อ C(s)คือผลการแปลงลาปลาซเอาต์พุตระบบ c(t) และ R(s) คือผลการแปลงลาปลาซอินพุตระบบ r(t)

$$G'(s) = \frac{b_0}{s^2 + 2a_1 s + a_0} \qquad \textbf{(1)}$$

- แต่รูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับระบบอันดับหนึ่งที่นิยมใช้ในงานวิศวกรรมคือ ทั้งนี้เนื่องจากรูปนี้แสดงความหมายทางกายภาพของระบบมากกว่าแบบแรก

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \textbf{(2)}$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- ความแตกต่างระหว่างทั้งสองรูปแบบ คือ
  - แบบแรกนั้นมีอัตราขยายไฟตรงเท่ากับ $G'(0) = \frac{b_0}{a_0}$ แต่แบบที่สองนั้นมีอัตราขยายไฟตรงเท่ากับหนึ่ง( $G(0) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$ )
  - แบบแรกนั้นคุณลักษณะของระบบขึ้นกับค่าของ 3 พารามิเตอร์ได้แก่ $b_0$, $a_0$ และ $a_1$ ในขณะที่แบบที่สองนั้นคุณลักษณะของระบบกำหนดโดยค่าของ $\zeta$ และ $\omega_n$ ทำให้การวิเคราะห์ทำได้สะดวกกว่า
  - นอกจากนี้ค่าของ $\zeta$ และ $\omega_n$ ในแบบที่สองยังแสดงถึงรูปแบบของผลตอบสนองของระบบอีกด้วย

**ดังนั้นเพื่อให้สะดวกในการวิเคราะห์บทนี้จึงเริ่มด้วยระบบที่มีอัตราขยายไฟตรงเป็นหนึ่ง**

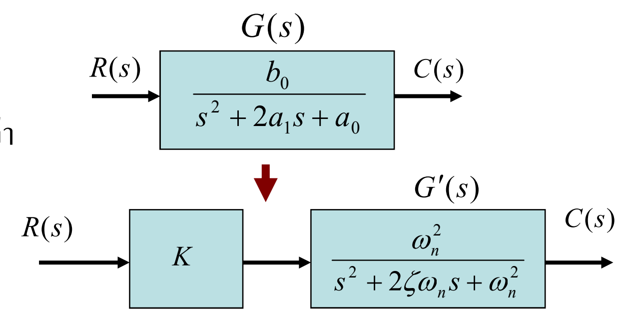
# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

จากรูป $K = \dfrac{b_0}{a_0}$

แต่ถ้า $K = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$G(s) = G'(s)$$




เมื่อ $\zeta$ คือ ***อัตราส่วนการหน่วง*** *(damping ratio)*

$\omega_n$ คือ ***ความถี่ธรรมชาติ*** *(natural frequency)*

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- สมการที่สำคัญสำหรับการวิเคราะห์ผลตอบสนองคือ ***สมการลักษณะเฉพาะ*** *(characteristic equation)* ได้จากการกำหนดให้ส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- ทั้งนี้รูปแบบของผลตอบสนองชั่วครู่จะขึ้นกับรากของสมการลักษณะเฉพาะ โดยจะเรียกรากของสมการลักษณะเฉพาะว่า ***โพล*** *(pole)* ของฟังก์ชันถ่ายโอนซึ่งมีอยู่ 2 ค่า เพราะระบบเป็นอันดับสอง ซึ่งรูปแบบการตอบสนองชั่วครู่ของระบบ ซึ่งแยกได้เป็น 4 กรณีได้แก่ โอเวอร์แดมป์(overdamped), คริติคัลแดมป์(critically damped), อันเดอร์แดมป์(underdamped) และอันแดมป์(undamped)

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- โอเวอร์แดมป์(overdamped) เกิดเมื่อ $\zeta > 1$

ดังนั้นเมื่อสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

ก็จะได้ว่ารากของสมการคือ

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = s_1, s_2$$

โดยที่ $s_1$ และ $s_2$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่าไม่เท่ากัน และรูปแบบการตอบสนองชั่วครู่ของระบบคือ

$$c_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$


# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**


- คริติคัลแดมป์(critically damped)เกิดเมื่อ $\zeta = 1$

ดังนั้นเมื่อสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

ก็จะได้ว่ารากของสมการคือ

$$s = -\omega_n, -\omega_n$$

โดยที่ $\omega_n$ และ $\omega_n$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากัน และรูปแบบการตอบสนองชั่วครู่ของระบบคือ

$$c_n(t) = (At + B)e^{-\omega_n t}$$

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- อันเดอร์แดมป์(underdamped) เกิดเมื่อ $\zeta > 1$

ดังนั้นเมื่อสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

ก็จะได้ว่ารากของสมการคือ

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = s_1, s_2$$

โดยที่ $s_1$ และ $s_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สังยุคซึ่งกันและกัน และรูปแบบการตอบสนองชั่วครู่ของระบบคือ

$$c_n(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi)$$

Radian → $\omega_n$

(ระยะห่างจาก Origin ไปยัง Pole)

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- อันแดมป์(undamped) เกิดเมื่อ $\zeta = 0$

ดังนั้นเมื่อสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$s^2 + \omega_n^2 = 0$$

ก็จะได้ว่ารากของสมการคือ

$$s = \pm j\omega_n$$

โดยที่ $s_1$ และ $s_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีแต่เฉพาะส่วนจินตภาพส่วนจริงเป็นศูนย์และสังยุค (conjugate) ซึ่งกันและกันและรูปแบบการตอบสนองชั่วครู่ ของระบบคือ

$$c_n(t) = A\sin(\omega_n t + \phi)$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย กรณีอันเดอร์แดมป์
  - ให้ $r(t) = u(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซ $R(s) = \frac{1}{s}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

  - ทำการแปลงลาปลาซผกผันได้ผลตอบสนองขั้นบันไดว่า

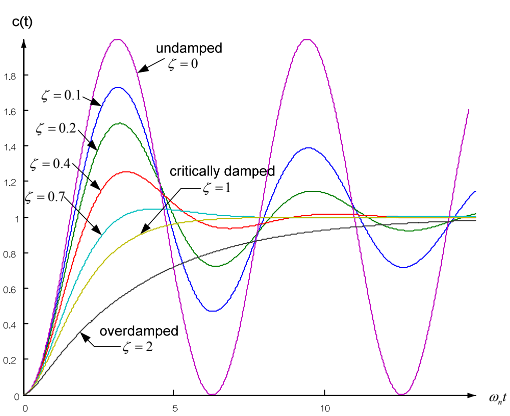
$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right) \quad ;\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\therefore c(t) = 1 - \frac{1}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \theta) \quad \text{เมื่อ} \quad \beta = \sqrt{1-\zeta^2}, \theta = \tan^{-1}(\beta/\zeta)$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย
  - เมื่อเปลี่ยนค่าของ $\zeta$ แล้วเขียนกราฟของผลตอบสนองได้ดังรูป



## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- ผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วย กรณีอันเดอร์แดมป์
  - อาจได้จากการแปลงลาปลาซผกผันของ $C(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

    หรือทำอนุพันธ์ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

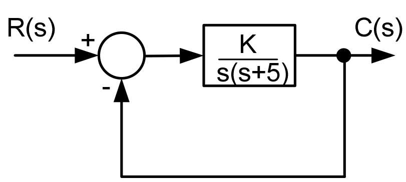
    ซึ่งจะได้ว่า
$$c(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{1}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \theta)\right)$$
$$= \frac{\zeta\omega_n}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \theta) - \frac{\omega_d}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

ดังนั้น
$$c(t) = \frac{\omega_n}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

**ตัวอย่าง จงหาขอบเขตของค่า K ที่ทำให้ระบบในรูปมีผลตอบสนองทางเวลาเป็น โอเวอร์แดมป์, คริติคัลแดมป์ และ อันเดอร์แดมป์**




**วิธีทำ** ฟังก์ชันถ่ายโอนรวมของระบบ

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 5s + K}$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตราฐานฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสองจะได้ว่า

$$\omega_n = \sqrt{K} \quad \text{และ} \quad \zeta = \frac{5}{2\omega_n} = \frac{2.5}{\sqrt{K}}$$

Dampling ยอดเยี่ยม → 0.707

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

- **ระบบมีผลตอบสนองทางเวลาเป็นโอเวอร์แดมป์ เมื่อ** $\zeta > 1$

$$\therefore \ \zeta = \frac{5}{2\omega_n} = \frac{2.5}{\sqrt{K}} > 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{K} < 2.5$$

$$\therefore K < 6.25$$

- **ระบบมีผลตอบสนองทางเวลาเป็นคริติคัลแดมป์ เมื่อ** $\zeta = 1$

$$\therefore K = 6.25$$

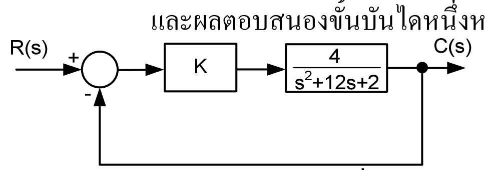
- **ระบบมีผลตอบสนองทางเวลาเป็นอันเดอร์แดมป์ เมื่อ** $\zeta < 1$

$$\therefore K > 6.25$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

**ตัวอย่าง** จากระบบในรูปจงหาอัตราขยาย$K$ ที่ทำให้ระบบมีอัตราส่วนการหน่วง เป็น 0.7 และสำหรับอัตราขยาย นี้จงหาความถี่ธรรมชาติ, อัตราขยายไฟตรง และผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วยของระบบ




**วิธีทำ** ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4K}{s^2 + 12s + 4K + 2}$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตราฐานฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสองจะได้ว่า $\omega_n = \sqrt{4K+2}$ และ $2\zeta\omega_n = 12$

ดังนั้นถ้าให้ $\zeta = 0.7$ จะได้ความถี่ธรรมชาติ $\omega_n = \dfrac{12}{2\zeta} = \dfrac{6}{0.7} = 8.571 \quad rad/s$

$$\therefore \quad K = \frac{\omega_n^2 - 2}{4} = \frac{8.571^2 - 2}{4} = 17.866$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**

อัตราขยายไฟตรงของระบบหรือ $T(0)$ ได้จากการให้ $s=0$ ในฟังก์ชั่นถ่ายโอน $T(s)$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4K}{s^2 + 12s + 4K + 2}$$

จากนั้นแทนค่า ***K*** ที่ได้ลงใน $T(0)$ จะได้ว่าอัตราขยายไฟตรงของระบบคือ

$$T(0) = \frac{4K}{4K+2} = \frac{4(17.866)}{4(17.866)+2} = 0.973$$

จะเห็นว่าระบบนี้มีอัตราขยายไฟตรงไม่เท่ากับหนึ่งดังนั้นในการคำนวณหาผลตอบสนองของระบบต้องทำการคูณค่า $T(0)$ นี้กับผลตอบสนองของระบบ


# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ระบบอันดับสอง**


ดังนั้นผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วยของระบบคือ

$$c(t) = 0.973\left(1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)\right)$$

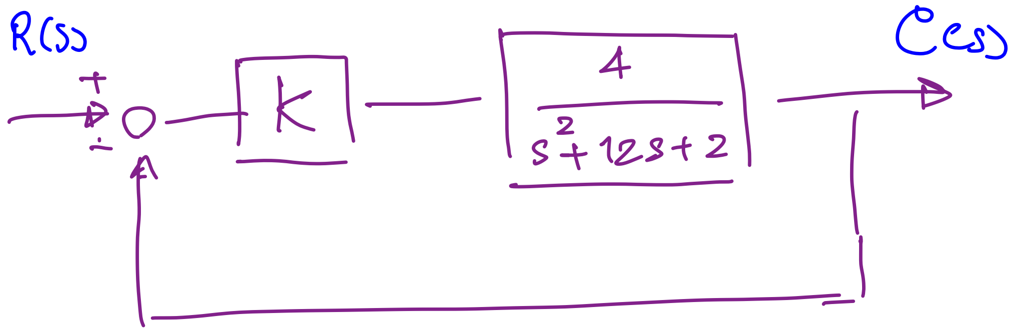
โดยที่

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 8.571\sqrt{1-0.7^2} = 6.121 \;\; ras/d$$

$$\beta = \sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{1-0.7^2} = 0.714$$

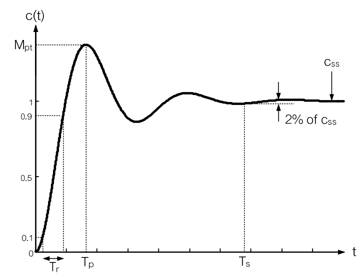
$$\theta = \tan^{-1}(\beta/\zeta) = \tan^{-1}\left(\frac{0.714}{0.7}\right) = 45.57^\circ$$

$$\therefore \quad c(t) \;=\; 0.973\left(1 - \frac{1}{0.714} e^{-6t} \sin(6.121t + 45.57^\circ)\right)$$


R(s)
+
-
K
4
s^2+12s+2
C(s)

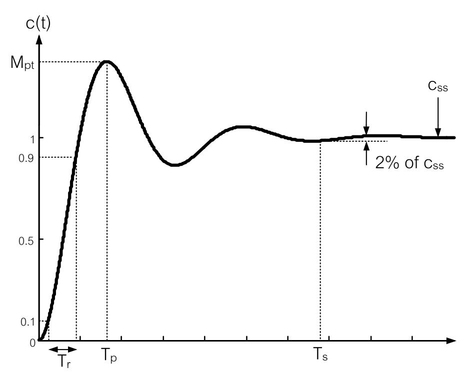
# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

- **ข้อกำหนดของผลตอบสนองทางเวลาในการออกแบบ**
  – สิ่งหนึ่งที่ต้องคำนึงถึงในการออกแบบระบบควบคุม คือ รายละเอียดผลตอบสนองทางเวลา เช่น *เวลาขาขึ้น (rise time)* , *เปอร์เซ็นต์การพุ่งเกิน (percent overshoot)* และช่วงเวลาเข้าที่ ซึ่งทั้งหมดนิยามขึ้นจากผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วยของระบบอันดับสอง กรณีอันเดอร์แดมป์ ดังแสดงในรูป




# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ข้อกำหนดในการออกแบบ**




- **เวลาขาขึ้น**($T_r$) เวลาที่ต้องใช้ในการเพิ่มจาก 10% ไปยัง 90% ของค่าผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว ($c_{ss}$)

- **เปอร์เซ็นต์การพุ่งเกิน**(*PO*)

$$PO = \frac{M_{pt} - c_{SS}}{c_{SS}} x100$$

เมื่อ $M_{pt}$ คือค่าผลตอบสนองทางเวลาสูงสุดซึ่งเกิดขึ้นที่เวลา $T_p$

- **ช่วงเวลาเข้าที่**($T_s$) หมายถึงวลาที่ต้องใช้เพื่อให้ผลตอบสนองทางเวลาเข้าใกล้ ค่าผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัวโดยมีความผิดพลาดไม่เกิน $\pm 2\%$ (กำหนด $T_S = 4\tau$)

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ข้อกำหนดในการออกแบบ**

การหาเวลา $T_p$ สามารถทำได้โดยการหาอนุพันธ์ผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วยของระบบอันดับสองและให้มีค่าเท่ากับศูนย์ดังนี้

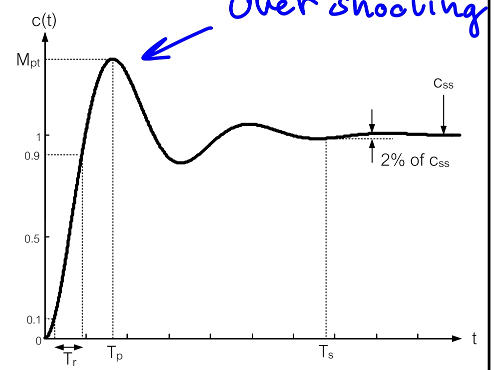
$$\frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n T_P} \sin \omega_d T_p = 0$$

$$\omega_d T_P = \pi$$

$$\therefore T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

จากนั้นแทนค่า $T_P$ นี้ลงในผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วย เพื่อหาค่า $M_{pt}$

Over shooting




Sattering time

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ข้อกำหนดในการออกแบบ**

จาก $c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$ เมื่อแทนค่า $t = T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

จะได้ค่าสูงสุดของ c(t) = $M_{pt}$ ดังนี้

$$M_{pt} = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n T_P} \sin(\omega_d T_p + \theta)$$

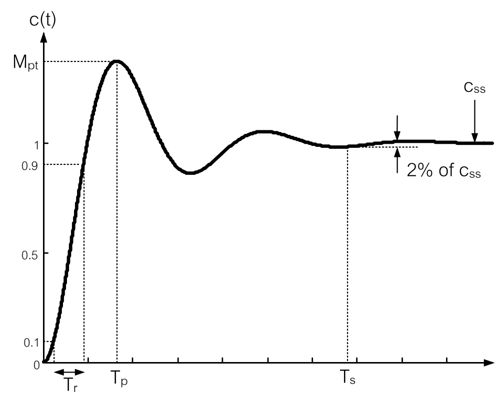
$$= 1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

จากเปอร์เซ็นต์การพุ่งเกิน

$$PO = \frac{M_{pt} - c_{SS}}{c_{SS}} x100$$

$$= \frac{1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} - 1}{1} x100$$

$$\therefore PO = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} x100$$



# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

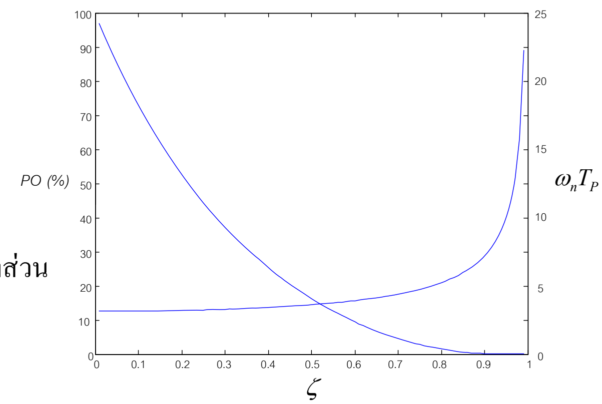
**ข้อกำหนดในการออกแบบ**

สำหรับค่าคงตัวเวลาของระบบอันดับสองสามารถดูได้จากเทอมของเอกซ์โพเนนเชียลของ $c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$

ดังนั้นจะได้ว่า $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$

$$\therefore T_S = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

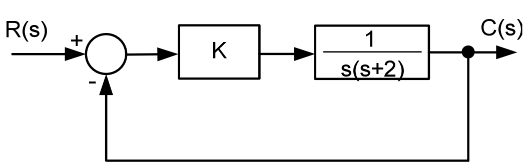
กราฟความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์การพุ่งเกินกับอัตราส่วนการหน่วงแสดงดังรูป




# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ข้อกำหนดในการออกแบบ**

**ตัวอย่าง** จากระบบในรูปจงหาค่า $K$ ที่ทำให้ระบบมีเปอร์เซ็นต์การพุ่งเกินต่ำกว่า 20% ในผลตอบสนองขั้นบันได และจงหาช่วงเวลาเข้าที่ของผลตอบสนอง




**วิธีทำ** ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสองจะได้ว่า

$\omega_n = \sqrt{K}$ และ $2\zeta\omega_n = 2$ เมื่อกำหนดเปอร์เซ็นต์การพุ่งเกินเท่ากับ 20% จะได้

$$20 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} 100 \quad \Rightarrow \quad \therefore \zeta = \sqrt{\frac{2.589}{2.589 + \pi^2}} = 0.456$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ข้อกำหนดในการออกแบบ**

ดังนั้นถ้าต้องการเปอร์เซ็นต์การพุ่งเกินน้อยกว่า 20% ระบบต้องมี $\zeta > 0.456$

เพราะฉะนั้น $\zeta = \dfrac{1}{\omega_n} > 0.456$ ดังนั้นได้ $\omega_n < 2.193$ rad/s

จะได้ว่า $\omega_n = \sqrt{K} < 2.193 \quad \therefore \quad K < 4.809$

สำหรับค่าคงตัวเวลา จะได้ว่า $\tau = \dfrac{1}{\zeta\omega_n} = \dfrac{2}{2} = 1$

$$\therefore T_S = 4\tau = 4 \quad s$$

จะเห็นว่าค่าคงตัวเวลาไม่ขึ้นกับค่าอัตราขยาย

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

- **ความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบสนองทางเวลากับตำแหน่งโพล**
  - **ระบบอันดับหนึ่ง**

    จากฟังก์ชันถ่ายโอน $G(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{K}{\tau s + 1}$ ระบบจะมีโพลอยู่ที่ $s = -\dfrac{1}{\tau}$
    โดยถ้าระบบมีค่าคงตัวเวลามาก โพลจะอยู่ใกล้แกนจินตภาพมาก ส่งผลให้ช่วงเวลาเข้าที่ยาวนานมาก ในทางตรงกันข้ามถ้าโพลที่อยู่บนแกนจริงลบอยู่ไกลจากแกนจินตภาพมาก จะทำให้ระบบมีค่าคงตัวเวลาน้อยและส่งผลให้ช่วงเวลาเข้าที่สั้น

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

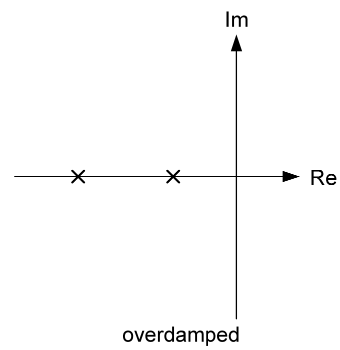
**ผลตอบสนองกับตำแหน่งโพล**

– **ระบบอันดับสอง**

ตำแหน่งโพลของระบบอันดับสองแบ่งได้ 4 กรณีตามรูปแบบการตอบสนองชั่วครู่ของระบบ ดังนี้

**1. Overdamped**

ในกรณีนี้ ระบบจะมีโพลที่เป็นจำนวนจริงสองค่าที่ไม่เท่ากันดังรูป ซึ่งทำให้ผลตอบสนองไม่มีค่าพุ่งเกิน แต่จะมีช่วงเวลาเข้าที่นานกว่าแบบอื่น

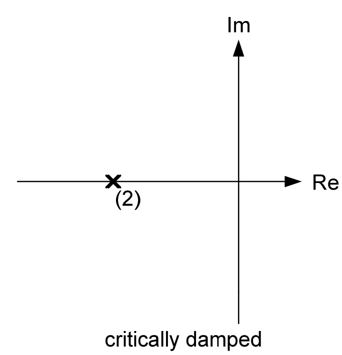



# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ผลตอบสนองกับตำแหน่งโพล**

**2. Critically damped**

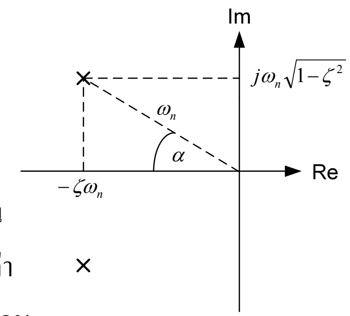
ในกรณีนี้ ระบบจะมีโพลที่เป็นจำนวนจริงสองค่าที่เท่ากันดังรูป ซึ่งทำให้ผลตอบสนองมีช่วงเวลาเข้าที่สั้นกว่าแบบแรกโดยที่ไม่มีค่าพุ่งเกิน



# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ผลตอบสนองกับตำแหน่งโพล**

**3. Underdamped**



underdamped

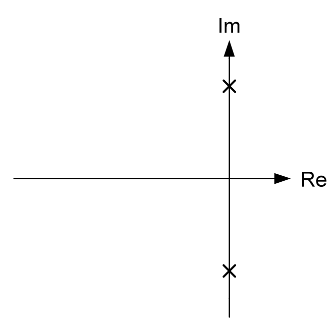
ในกรณีนี้ระบบจะมีโพลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นคู่conjugateกันดังรูป ซึ่งทำให้ผลตอบสนองมีช่วงของเวลาเข้าที่สั้นกว่าสองแบบแรกแต่จะมีค่าพุ่งเกินเกิดขึ้น จะเห็นว่าระยะห่างจากจุดกำเนิดถึงตำแหน่งโพลจะมีค่าเท่ากับความถี่ธรรมชาติ $\omega_n$ ส่วนมุมที่วัดจากแกนจริงลบไปยังแกน $\omega_n$ กำหนดให้เป็นมุม $\alpha$ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับอัตราส่วนการหน่วงดังสมการ

$$\cos\alpha = \zeta$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ผลตอบสนองกับตำแหน่งโพล**

**4. Undamped**



undamped

ในกรณีนี้ระบบจะมีโพลที่เป็นจำนวนจินตภาพที่เป็นคู่conjugateกันดังรูป ทำให้ผลตอบสนองมีการแกว่งตลอดเวลาด้วยความถี่ธรรมชาติ

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ผลตอบสนองกับตำแหน่งโพล**

**ตัวอย่าง** ในการออกแบบระบบควบคุมอันดับสอง ต้องการให้เปอร์เซ็นต์การพุ่งเกินน้อยกว่า 10% และช่วงเวลาเข้าที่น้อยกว่า 2 วินาที จงหาบริเวณตำแหน่งโพลของระบบบนระนาบ s ที่สอดคล้องกับการออกแบบ

**วิธีทำ** ต้องการ $PO < 10\%$

ดังนั้นจากสมการ $PO = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} x100$

จะได้ว่า $10 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} x100$

$$\therefore \zeta = \sqrt{\frac{5.304}{5.304+\pi^2}} = 0.591$$

ต้องการ $T_S < 2\ s$

ดังนั้น $\tau < \frac{2}{4} = 0.5\ s$

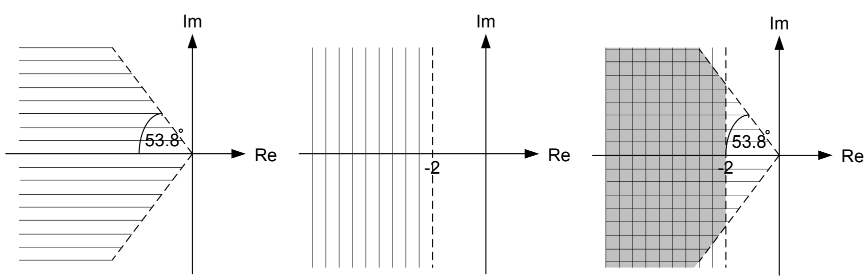
และจาก $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$

$$\therefore \zeta\omega_n > \frac{1}{0.5} = 2$$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**ผลตอบสนองกับตำแหน่งโพล**

นำเงื่อนไข $\zeta > 0.591$ และ $\zeta\omega_n > 2$ ไปหาบริเวณตำแหน่งโพลของระบบบนระนาบ s ได้ ดังรูป (จากสมการ $\cos\alpha = \zeta$ จะได้ $\alpha < \cos^{-1} 0.591 = 53.8^\circ$)




$\alpha < 53.8^\circ$ $\qquad$ $\zeta\omega_n > 2$ $\qquad$ $\alpha < 53.8^\circ$ and $\zeta\omega_n > 2$

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

- **การลดอันดับของระบบ**
  - การลดอันดับจะทำโดยตัดโพลที่ส่งผลกระทบน้อยต่อผลตอบสนองทางเวลาออก โดยดูจาก อัตราส่วนระหว่าง ระยะห่างของตำแหน่งโพลตามแนวแกนจริงจากแกนจินตภาพ กับระยะห่างของตำแหน่งโพลเด่นตามแนวแกนจริงจากแกนจินตภาพ ซึ่งถ้าอัตราส่วนนี้มีค่ามากกว่า 5 เท่า อาจพิจารณาตัดโพลนั้นได้ แต่ทั้งนี้อัตราขยายดีซีจะต้องเท่าเดิม
  - โพลของระบบที่เป็นตัวกำหนดผลตอบสนองทางเวลา จะเรียกว่า ***โพลเด่น*** *(dominant poles)* จะเป็นโพลที่ใกล้แกนจินตภาพมากที่สุด ระบบอันดับมากกว่าสองบางระบบอาจสามารถลดอันดับลงให้เหลือเพียงอันดับหนึ่งหรือสองได้ โดยที่คุณลักษณะของระบบไม่ได้เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมมากนัก

Pole เด่น อยู่ใกล้แกน Img.

# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**การลดอันดับของระบบ**

- **ตัวอย่าง** ระบบอันดับสี่มีฟังก์ชันถ่ายโอนคือ $G(s) = \dfrac{8(s+3)}{(s+4)(s+6)(s^2+s+1)}$ จงลดอันดับของระบบ พร้อมทั้งประมาณเปอร์เซ็นต์การพุ่งเกินและช่วงเวลาเข้าที่

**วิธีทำ** ระบบมีซีโรอยู่ที่ $s=-3$ และมีโพลอยู่ที่ $s=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-4,-6$

จะเห็นว่าโพล $s=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ เป็นโพลเด่นเพราะอยู่ใกล้แกนจินตภาพมากที่สุดและมีค่าคงตัวเวลามากที่สุด คือ $\tau = 2\,s$ ส่วนโพล $s=-4,-6$ จะมีค่าคงตัวเวลา $\tau = \frac{1}{4},\frac{1}{6}$ $s$ ตามลำดับ ซึ่งมีระยะห่างตามแนวแกนจริงจากแกนจินตภาพเท่ากับ 8 และ 12 เท่า

เมื่อเทียบกับระยะห่างของตำแหน่งโพลเด่น ดังนั้นจึงตัดโพล $s=-4,-6$ ออกได้

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**การลดอันดับของระบบ**

สำหรับตำแหน่งซีโร $s=-3$ ก็สามารถตัดออกได้เช่นเดียวกันเพราะมีระยะห่างตามแนวแกนจริงจากแกนจินตภาพเท่ากับ 6 เมื่อเทียบกับระยะห่างของตำแหน่งโพลเด่น

ดังนั้นอัตราขยายไฟตรงของระบบคือ $G(0)=\dfrac{8(0+3)}{(0+4)(0+6)(0^2+0+1)}=1$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหลังจากลดอันดับคือ $G(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

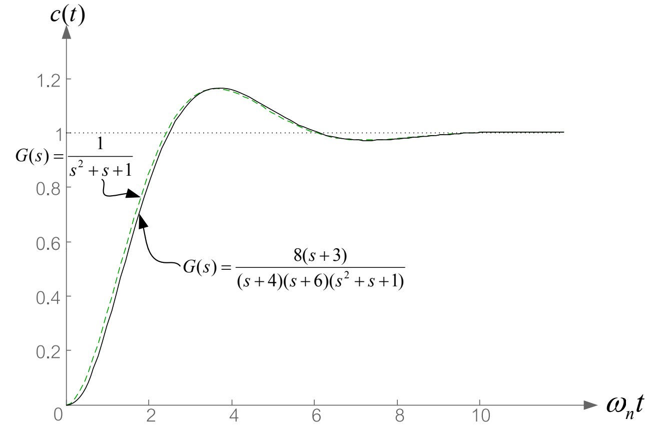
$\therefore\ \omega_n=1$ และ $\zeta=\dfrac{1}{2\omega_n}=0.5$ ดังนั้นได้เปอร์เซ็นต์การพุ่งเกินคือ $PO=16.3\ \%$

และเนื่องจาก $\tau=2\,s$ ดังนั้นช่วงเวลาเข้าที่ $T_S=4\tau=8\ s$

## บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

**การลดอันดับของระบบ**

- กราฟผลตอบสนองขั้นบันไดหนึ่งหน่วยของระบบทั้งก่อนและหลังลดอันดับแสดงในรูป



# บทที่ 3 ผลตอบสนองทางเวลา

- สรุป
  - เนื้อหาในบทนี้ ได้กล่าวถึงผลตอบสนองทางเวลาของระบบอันดับหนึ่งและสอง ผลตอบสนองทางเวลาประกอบขึ้นจากผลรวมของการตอบสนองชั่วครู่และการตอบสนองในสถานะอยู่ตัว
  - พารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุม เช่น ค่าคงตัวเวลา , เวลาขาขึ้น , เปอร์เซ็นต์การพุ่งเกิน และช่วงเวลาเข้าที่ จะถูกนิยามขึ้นจากผลตอบสนองทางเวลาของระบบ พารามิเตอร์เหล่านี้ยังมีความสัมพันธ์โดยตรงกับฟังก์ชันถ่ายโอนและโพลของระบบ
  - กรณีของระบบที่มีอันดับมากกว่าสองอาจประมาณลดอันดับของระบบลงได้โดยการตัดโพลที่ส่งผลกระทบน้อยต่อผลตอบสนองทางเวลาออก