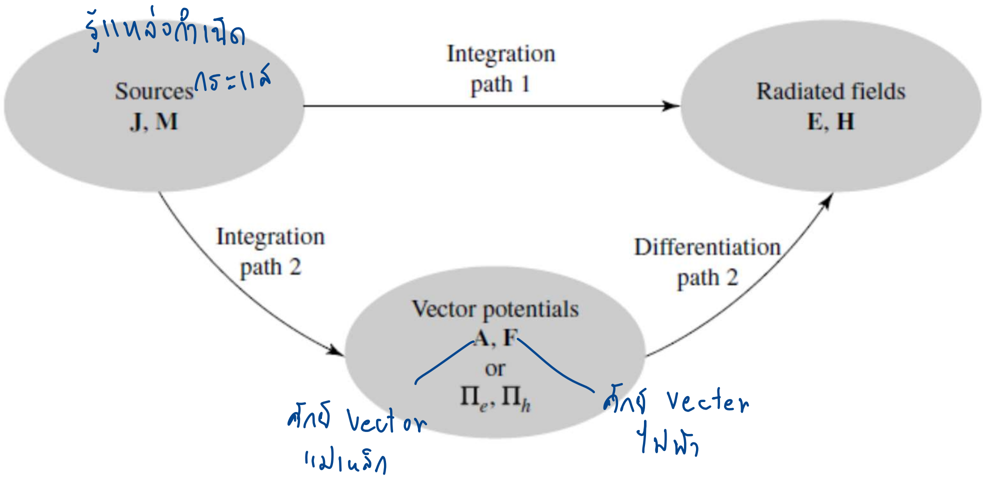
บทที่ 3 ฟังก์ชันศักย์ช่วย

3.1 บทนำ

หนึ่งในปัญหาของการวิเคราะห์สายอากาศคือการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แผ่พลังงานออกไปในอวกาศว่างรอบ ๆ สายอากาศ ซึ่งการวิเคราะห์สายอากาศสามารถแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ (ก) การหากระแสที่กระจายอยู่บนโครงสร้างสายอากาศเมื่อถูกกระตุ้นที่ขั้วอินพุตของสายอากาศ (ข) คำนวณหาสนามเนื่องจากการกระจายของกระแสในบริเวณพื้นที่ว่างรอบ ๆ สายอากาศ โดยทั่วไปแล้วในการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะใช้วิธีอินทีเกรตกระแสบนโครงสร้างของสายอากาศโดยตรง อย่างไรก็ตามวิธีนี้ค่อนข้างยากและซับซ้อน ดังนั้นเพื่อให้การหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทำได้ง่ายขึ้น จึงมีการใช้ฟังก์ชันช่วย (Auxiliary function) ที่เรียกว่า ศักย์เวกเตอร์ (Vector pentential) ซึ่งศักย์เวกเตอร์ประกอบด้วย ศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ (ศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก : Magnetic vector potential) และศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{F}$ (ศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า : Electric vector potential) โดยในการหาสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ และสนามแม่เหล็ก $\mathbf{H}$ จะเริ่มจากการอินทีเกรตเพื่อหาศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{F}$ จากกระแสไฟฟ้า $\mathbf{J}$ และกระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M}$ ด้วยการอินทีเกรต จากนั้นคำนวณหา $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ จากศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{F}$ ด้วยการอนุพันธ์ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 บล็อกไดอะแกรมในการคำนวณสนามจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็ก

3.2 ศักย์เวกเตอร์

$\vec{E}$ $\vec{H}$

ในการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กโดยใช้วิธีศักย์เวกเตอร์จะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ

1. หาศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{F}$ เนื่องจากการกระจายของกระแสไฟฟ้า $\mathbf{J}$ และกระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M}$
2. หาสนาม $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ จากศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{F}$

โดยหัวข้อนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างศักย์เวกเตอร์และการกระจายของกระแส รวมทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ซึ่งความสัมพันธ์เหล่านี้จะมีความสอดคล้องกับสมการของแมกซ์เวลล์ทั้งสี่สมการ

3.2.1 ศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ สำหรับแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า $\mathbf{J}$

ศักย์ Vecter แม่เหล็ก

เริ่มต้นด้วยสมการแมกซ์เวลล์ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ เนื่องจากการเคิร์ลของเวกเตอร์ใด ๆ จากคุณสมบัติเอกลักษณ์เวกเตอร์คือ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{B}_A = \mu \mathbf{H}_A = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3.2}$$

หรือ

$$\boxed{\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}} \tag{3.2ก}$$

โดยที่ตัวห้อย A หมายถึงสนามที่เกิดจากศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ เมื่อแทนสมการ (3.2ก) เข้าไปในสมการแมกซ์เวลล์ $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ จะได้

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega(\mu \mathbf{H}_A) = -j\omega(\nabla \times \mathbf{A}) \tag{3.3}$$

หรือ

$$\nabla \times (\mathbf{E}_A + j\omega \mathbf{A}) = 0 \tag{3.4}$$

เนื่องจากเอกลักษณ์เวกเตอร์ การเคิร์ลของฟังก์ชันเกรเดียนมีค่าเท่ากับศูนย์นั่นคือ

$$\nabla \times (-\nabla V) = 0 \tag{3.5}$$

จะได้

$$\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A} = -\nabla V \tag{3.6}$$

หรือ

$$\mathbf{E}_A = -\nabla V - j\omega\mathbf{A} \tag{3.7}$$

โดยที่ V คือ ศักย์ไฟฟ้าสเกลาร์ใด ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง โดยเมื่อทำการเคิร์ลทั้งสองข้างของสมการ (3.2) และเอกลักษณ์เวกเตอร์

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{3.8}$$

ดังนั้นจากสมการ (3.2) จะได้

$$\nabla \times (\mu\mathbf{H}_A) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{3.8ก}$$

สำหรับตัวกลางที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน (Homogeneous media) จะทำให้สมการ (3.8ก) แสดงได้คือ

$$\mu\nabla \times \mathbf{H}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{3.9}$$

จากสมการแมกซ์เวลล์

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H}_A = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A} \tag{3.10}$$

เมื่อนำสมการ (3.10) แทนเข้าไปในสมการ (3.9) จะได้

$$\mu\mathbf{J} + j\omega\mu\varepsilon\mathbf{E}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{3.11}$$

แทนสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.11) จะได้

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla(j\omega\mu\varepsilon V) \\ &= -\mu\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\varepsilon V)\end{aligned} \tag{3.12}$$

เมื่อ $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$

เพื่อที่จะทำให้สมการ (3.12) ง่ายขึ้น จะกำหนดให้

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\varepsilon V \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla \cdot \mathbf{A} \tag{3.13}$$

ซึ่งเรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขของลอเรนซ์ (Lorentz condition) ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.13) ลงใน (3.12) จะได้

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{3.14}$$

นอกจากนี้สมการ (3.7) สามารถแสดงได้คือ

$$\mathbf{E}_A = -\nabla V - j\omega \mathbf{A} = -j\omega \mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \tag{3.15}$$

ดังนั้นเมื่อรู้ค่าศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ จะสามารถหา $\mathbf{H}_A$ ได้จากสมการ (3.2ก) และสามารถหา $\mathbf{E}_A$ ได้จากสมการ (3.15)

3.2.2 ศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{F}$ สำหรับแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M}$

สำหรับกระแสไฟฟ้า $\mathbf{J} = 0$ แต่กระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M} \neq 0$ และสอดคล้องกับสมการแมกซ์เวลล์ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ดังนั้น $\mathbf{E}_F$ สามารถแสดงในรูปของการเคิร์ลของศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{F}$ ได้คือ

$$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla \times \mathbf{F} \tag{3.16}$$

แทนสมการ (3.16) เข้าไปในสมการแมกซ์เวลล์ $\nabla\times\mathbf{H}_F = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_F$ จะได้

$$\nabla\times\mathbf{H}_F = -j\omega\left(\nabla\times\mathbf{F}\right) \tag{3.17}$$

ย้ายข้างสมการจะได้

$$\nabla\times(\mathbf{H}_F + j\omega\mathbf{F}) = 0 \tag{3.18}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ของสมการ (3.5) จะได้

$$\mathbf{H}_F = -\nabla V_m - j\omega\mathbf{F} \tag{3.19}$$

ฟังก์ชันสเกลาร์ V_m แสดงถึงศักย์สเกลาร์แม่เหล็กใด ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง เมื่อทำการเคิร์ลสมการ (3.16) จะได้

$$\nabla\times\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\mathbf{F} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\nabla\nabla\cdot\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}\right) \tag{3.20}$$

และจากสมการแมกซ์เวลล์

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{E}_F = -\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H}_F} \tag{3.21}$$

ดังนั้น

$$\nabla^2\mathbf{F} + j\omega\mu\varepsilon\mathbf{H}_F = \nabla\nabla\cdot\mathbf{F} - \varepsilon\mathbf{M} \tag{3.22}$$

แทนสมการที่ (3.19) เข้าไปในสมการที่ (3.22) จะได้

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\varepsilon\mathbf{M} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \nabla(j\omega\mu\varepsilon V_m) \tag{3.23}$$

เพื่อที่จะทำให้สมการ (3.23) ง่ายขึ้นจะกำหนดให้

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = -j\omega\mu\varepsilon V_m \quad \Rightarrow \quad V_m = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla\cdot\mathbf{F} \tag{3.24}$$

ดังนั้นสมการ (3.23) ลดลงเหลือ

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\varepsilon\mathbf{M} \tag{3.25}$$

และสมการ (3.19) จะกลายเป็น

$$\mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) \tag{3.26}$$

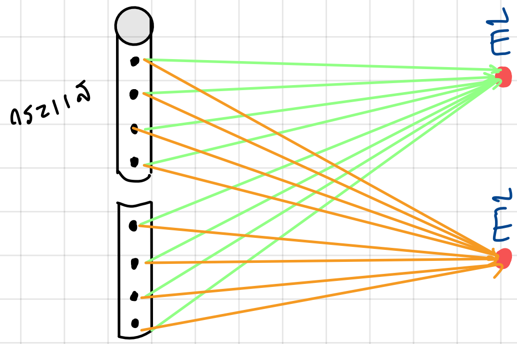
3.3 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าและแม่เหล็ก

ในการวิเคราะห์หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ($\mathbf{J}$) และกระแสแม่เหล็ก ($\mathbf{M}$) จะพิจารณาให้แหล่งกำเนิดกระแสอยู่ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}'$ และสนามที่ต้องการทราบค่าอยู่ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 จากนั้นทำการหาค่าศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า $\mathbf{J}(x',y',z')$ และศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}(x,y,z)$ ได้ถูกกำหนดโดย

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}dv' \tag{3.27}$$

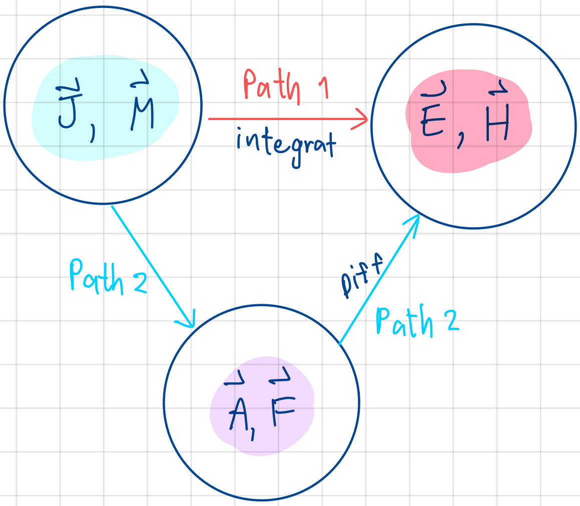
เมื่อ $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ และ R คือ ระยะทางจากแหล่งกำเนิดกระแสไปยังจุดสังเกตที่ต้องการทราบค่าสนาม โดยที่ $R=\left|\mathbf{R}\right|=\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|$

ในทำนองเดียวกันความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M}(x',y',z')$ และศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y,z)$ สามารถแสดงได้คือ



ปลายจุดก็ต้องหาเหมือนเดิม

ใช้วิธีตรง (Path 1)
ต้อง integrat (ยาก, ซับซ้อน)



Maxwell's equation

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{M}$$

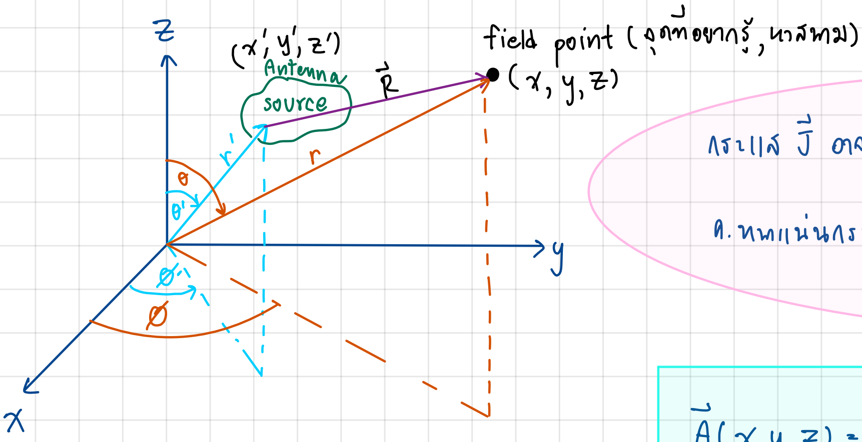
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

1. $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: ถ้าสนามแม่เหล็ก ($\vec{B}$) มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดสนามไฟฟ้าที่มีพฤติกรรมหมุนวนได้
2. $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: เมื่อใดก็ตามที่มีกระแสจริงในตัวนำหรือสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามเวลา จะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กที่มีพฤติกรรมหมุนวน
3. $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$: ฟลักซ์ไฟฟ้ามีพฤติกรรมพุ่งเข้า, พุ่งออก
4. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$: ฟลักซ์แม่เหล็กไม่มีพฤติกรรมพุ่งเข้า, พุ่งออก

ศักย์เวกเตอร์ A จากกระแสไฟฟ้า J



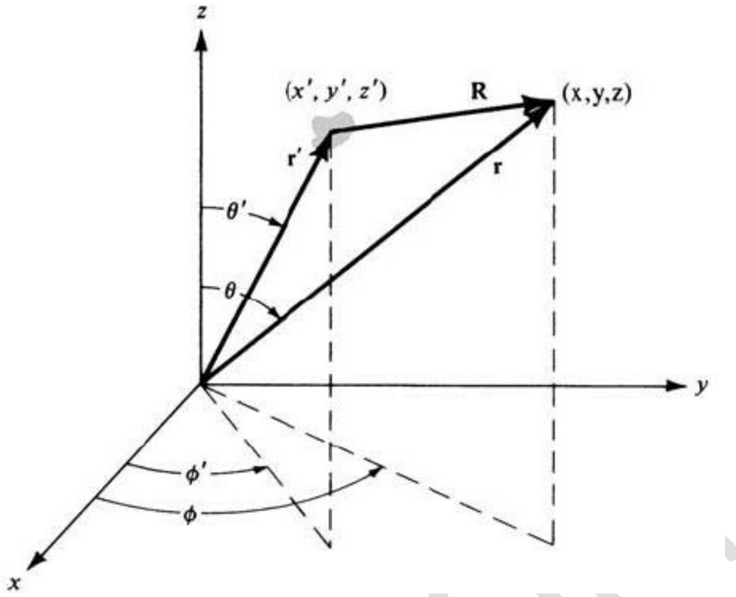
กระแส $\vec{J}$ ตอนอยู่ในรูปของ ค.หนาแน่นกระแสเชิงปริมาตร,
ค.หนาแน่นกระแสเชิงพื้นผิว, กระแสไฟฟ้า
(เส้นลวด เส้นผ่าศูนย์กลางเล็กมากๆ)

$$\boxed{\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \vec{J}(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}\,dv'}$$ *

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

R = ระยะห่างระหว่าง source
ค่าคงที่การแพร่กระจายคลื่น $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

กระแสที่กระจายอยู่บน Antenna
รูปทรงปริมาตร (กว้าง × ยาว × สูง)



รูปที่ 3.2 ระบบพิกัดสำหรับคำนวณหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \tag{3.28}$$

ถ้าความหนาแน่นกระแส $\mathbf{J}$ และ $\mathbf{M}$ แสดงในรูปความหนาแน่นกระแสเชิงพื้นผิว ดังนั้นการอินทิกรัลเชิงปริมาตรในสมการ (3.27) และ (3.28) จะลดเหลือเพียงอินทิกรัลเชิงพื้นผิวหรือ

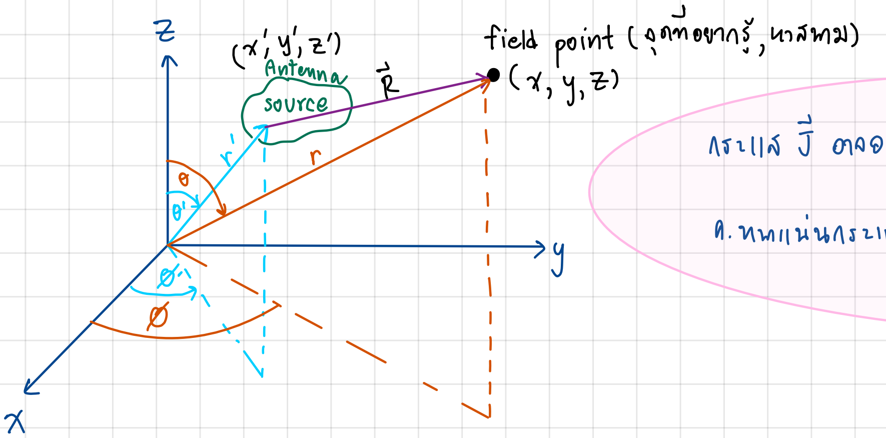
$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \mathbf{J}_S(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \tag{3.29}$$

เชิงพื้นผิว

และ

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_S \mathbf{M}_S(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \tag{3.30}$$

ศักย์เวกเตอร์ $\vec{A}$ จากกระแสไฟฟ้า $\vec{J}$



กระแส $\vec{J}$ อาจอยู่ในรูปของ ค.หนาแน่นกระแสเชิงปริมาตร, ค.หนาแน่นกระแสเชิงพื้นผิว, กระแสไฟฟ้า (เส้นลวด เส้นผ่าศูนย์กลางเล็กมากๆ)

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} \, dv'$$

R = ระยะห่างระหว่าง source

ค่าคงที่การแพร่กระจายคลื่น $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

กระแสที่กระจายอยู่บน Antenna

รูปทรงปริมาตร (กว้าง × ยาว × สูง)

ศักย์เวกเตอร์ $\vec{F}$ จากกระแสแม่เหล็ก $\vec{M}$

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V M(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} \, dv'$$

R = ระยะห่างระหว่าง source

ค่าคงที่การแพร่กระจายคลื่น $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

เมื่อรู้ $\vec{A}$ และ $\vec{F}$ → สามารถหา $\vec{E}_A$, $\vec{H}_A$ และ $\vec{E}_F$, $\vec{H}_F$ จากสมการ (3.33) และ (3.34)

เทอม F

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F} \quad (3.33ก)$$

เกรเดียนของไดเวอร์เจนท์ A

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\mathbf{H}_A - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F} \quad (3.33ข)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} - j\omega\mathbf{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) \quad (3.34ก)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} - \frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E}_F \quad (3.34ข)$$

หาได้ทุกบริเวณ

และถ้าแสดงในรูปของกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็ก I_e และ I_m ดังนั้นสมการ (3.29) และ (3.31) จะลดเหลือเพียงอินทิกรัลเชิงเส้นคือ

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_C I_e(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}dl' \qquad (3.31)$$

และ

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_C I_m(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}dl' \qquad (3.32)$$

ดังนั้นเมื่อทราบค่าศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{F}$ จะสามารถหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กรวมอันเกิดจากศักเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{F}$ ได้คือ

Divergence

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F} \qquad (3.33ก)$$

Gradient

หรือ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\mathbf{H}_A - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F} \qquad (3.33ข)$$

และ

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} - j\omega\mathbf{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) \qquad (3.34ก)$$

หรือ

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} - \frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E}_F \qquad (3.34ข)$$

3.4 การแผ่พลังงานย่านสนามระยะไกล

สมการการแผ่พลังงานของสนามระยะไกลจะพิจารณาในระบบพิกัดทรงกลมคือ

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_r A_r(r,\theta,\phi) + \hat{\mathbf{a}}_\theta A_\theta(r,\theta,\phi) + \hat{\mathbf{a}}_\phi A_\phi(r,\theta,\phi) \tag{3.35}$$

ขนาดของ r ในแต่ละองค์ประกอบของสมการ (3.35) จะอยู่ในรูปของ $1/r^n$ โดยที่ $n = 1,2,3,..$ เมื่อพิจารณาสนามระยะไกลพจน์ของ $1/r^n$ ที่ลำดับสูงจะไม่ถูกนำมาคิด นั่นคือ $1/r^n = 0$ เมื่อ $n = 2,3,..$ ดังนั้นสมการ (3.35) จะลดลงเหลือ

$$\mathbf{A} = \left[\hat{\mathbf{a}}_r A'_r(\theta,\phi) + \hat{\mathbf{a}}_\theta A'_\theta(\theta,\phi) + \hat{\mathbf{a}}_\phi A'_\phi(\theta,\phi)\right]\frac{e^{-jkr}}{r}, \quad r \to \infty \tag{3.36}$$

เมื่อทำการแทนสมการ (3.36) ลงในสมการ (3.15) จะได้

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r}\left\{-j\omega e^{-jkr}\left[\overset{0}{\cancel{\hat{\mathbf{a}}_r(0)}} + \hat{\mathbf{a}}_\theta A'_\theta(\theta,\phi) + \hat{\mathbf{a}}_\phi A'_\phi(\theta,\phi)\right]\frac{e^{-jkr}}{r}\right\} + \frac{1}{r^2}\{\ldots\} + \ldots \tag{3.37}$$

r

ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าในย่านสนามระยะไกลองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวรัศมีจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ในทำนองเดียวกันเมื่อทำการแทนสมการ (3.36) ลงในสมการ (3.2ก) จะได้

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r}\left\{j\frac{\omega}{\eta}e^{-jkr}\left[\overset{0}{\cancel{\hat{\mathbf{a}}_r(0)}} + \hat{\mathbf{a}}_\theta A'_\theta(\theta,\phi) - \hat{\mathbf{a}}_\phi A'_\phi(\theta,\phi)\right]\frac{e^{-jkr}}{r}\right\} + \frac{1}{r^2}\{\ldots\} + \ldots \tag{3.38}$$

$\eta = 120\pi,\ 377\ \Omega$

เมื่อ $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ คือ อินทรินสิกอิมพีแดนซ์ของตัวกลาง และถ้าไม่คิดพจน์อันดับสูงของ $1/r^n$ สนามที่แผ่พลังงาน $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ จะมีเพียงองค์ประกอบ θ และ ϕ ดังนั้นสำหรับบริเวณสนามระยะไกล

$$\left.\begin{aligned} E_r &\simeq 0 \\ E_\theta &\simeq -j\omega A_\theta \\ E_\phi &\simeq -j\omega A_\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} \tag{3.39ก}$$

และ

$$\left.\begin{aligned} H_r &\simeq 0 \\ H_\theta &\simeq +j\frac{\omega}{\eta}A_\phi = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi &\simeq -j\frac{\omega}{\eta}A_\theta = +\frac{E_\theta}{\eta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{H}_A = \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{\eta}\times\mathbf{E}_A = -j\frac{\omega}{\eta}\hat{\mathbf{a}}_r\times\mathbf{A} \qquad (3.39ข)$$

3.5 ทฤษฎีคู่ภาวะ

คู่ภาวะ (Duality) ใช้อธิบายพฤติกรรมของตัวแปรที่แตกต่างกันสองตัวแปรที่อยู่ในรูปแบบของสมการคณิตศาสตร์ที่เหมือนกันและคำตอบของสมการเหล่านั้นยังมีค่าเหมือนกันด้วย โดยตัวแปรที่อยู่ในสมการทั้งสองที่มีลักษณะเหมือนกันจะถูกเรียกว่า **ปริมาณคู่ (Dual quantities)** และคำตอบของสมการหนึ่งสามารถจัดรูปให้เหมือนกับคำตอบอีกสมการหนึ่งได้โดยการเปลี่ยนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ซึ่งแนวคิดนี้รู้จักกันในชื่อของ **ทฤษฎีคู่ภาวะ (Duality theorem)**

ดังนั้นถ้ารู้คำตอบของสมการหนึ่งชุด (ตัวอย่างเช่น $\mathbf{J}\neq 0,\ \mathbf{M}=0$) ก็สามารถสร้างคำตอบอีกชุดได้ ($\mathbf{J}=0,\ \mathbf{M}\neq 0$) โดยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม โดยสมการที่เป็นคู่กันสำหรับแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ($\mathbf{J}$) และกระแสแม่เหล็ก ($\mathbf{M}$) แสดงในตารางที่ 3.1 และตัวแปรที่เป็นคู่กันแสดงในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.1 สมการคู่ของแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ($\mathbf{J}$) และกระแสแม่เหล็ก ($\mathbf{M}$)

แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ($\mathbf{J}\neq 0,\ \mathbf{M}=0$)	แหล่งกำเนิดกรแสแม่เหล็ก ($\mathbf{J}=0,\ \mathbf{M}\neq 0$)
$\nabla\times\mathbf{E}_A = -j\omega\mu\mathbf{H}_A$	$\nabla\times\mathbf{H}_F = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_F$
$\nabla\times\mathbf{H}_A = \mathbf{J}+j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A$	$-\nabla\times\mathbf{E}_F = \mathbf{M}+j\omega\mu\mathbf{H}_F$
$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$	$\nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F} = -\varepsilon\mathbf{M}$
$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$	$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\varepsilon}{4\pi}\iiint_V \mathbf{M}(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$
$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$	$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$
$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$	$\mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$

ตารางที่ 3.2 ตัวแปรคู่ของแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ($\mathbf{J}$) และกระแสแม่เหล็ก ($\mathbf{M}$)

แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ($\mathbf{J} \neq 0,\ \mathbf{M} = 0$)	แหล่งกำเนิดกรแสแม่เหล็ก ($\mathbf{J} = 0,\ \mathbf{M} \neq 0$)
$\mathbf{E}_A$	$\mathbf{H}_F$
$\mathbf{H}_A$	$-\mathbf{E}_F$
$\mathbf{J}$	$\mathbf{M}$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{F}$
ε	μ
μ	ε
k	k
η	$1/\eta$
$1/\eta$	η

3.6 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับ

ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีภาวะย้อนกลับ (Recipocity) สำหรับทฤษฎีวงจรไฟฟ้า ได้กล่าวไว้ว่า ถ้ามีแหล่งกำเนิดกระแส (แรงดัน) ถูกต่อเข้าที่โหนดด้านใดด้านหนึ่งของวงจรเชิงเส้น และทำการต่อมิเตอร์เพื่อวัดแรงดัน (กระแส) ที่โหนดอีกด้านหนึ่งที่เหลือ ซึ่งจะพบว่า ไม่ว่าจะทำการสลับแหล่งกำเนิดกระแส (แรงดัน) และมิเตอร์วัดแรงดันไปที่โหนดด้านใดก็ตาม ผลของการวัดแรงดัน (กระแส) ที่ได้จะมีค่าเหมือนกันทุกประการ

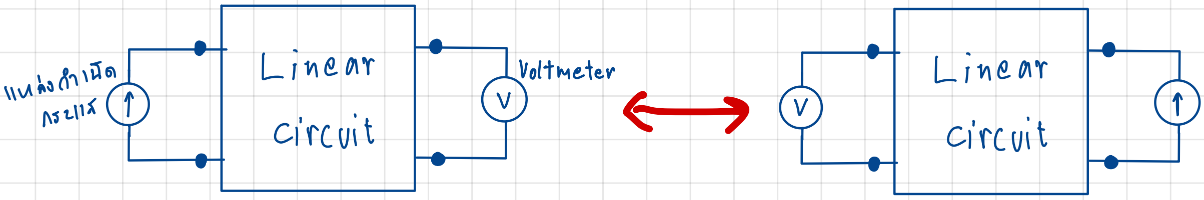
3.6.1 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับสำหรับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า

ทฤษฎีภาวะย้อนกลับสำหรับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้านั้น สามารถอธิบายได้จากสมการแมกซ์เวลล์ เมื่อพิจารณาภายในตัวกลางหนึ่ง สมมติให้มีแหล่งกำเนิด 2 ชุด ได้แก่ $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$ และ $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$ ซึ่งกระแส $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$ เป็นแหล่งกำเนิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ในทำนองเดียวกันกระแส $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$ เป็นแหล่งกำเนิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างสนามที่เกิดขึ้นจากแหล่งกำเนิดทั้งสองชุดนี้ภายในตัวกลางเดียวกันและความถี่เหมือนกันคือ

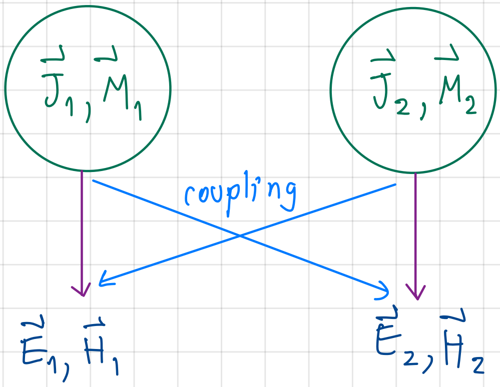
สนาม สนาม, source

$$-\nabla \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1 \right) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \qquad (3.40)$$

ทฤษฎีภาวะย้อนกลับ (Recipocity)



ทฤษฎีภาวะย้อนกลับสำหรับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า



สายอากาศแบบ Array บางทีการเชื่อมต่อร่วมอาจจะไม่ได้ส่งผลดี การ coupling อาจสามารถสร้างสนามไฟฟ้าไปหักล้าง $\vec{E}, \vec{H}$ ของตัวเดิม ทำให้คุณสมบัติแย่ลงกว่าเดิม

การวาง Antenna ใกล้ๆ กัน → ต้องพิจารณาการ coupling ด้วย ว่าควรวางห่างกันเท่าไหน เพื่อไม่ให้เกิดการ coupling ระหว่างกัน

$$-\nabla \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2$$

ใช้อธิบาย ค. สัมพันธ์ที่เกิดขึ้นระหว่างสนามไฟฟ้ากับแม่เหล็กที่เกิดจากแหล่งกำเนิดที่ไม่ใช่ตัวเอง

ซึ่งสมการ (3.40) ได้ถูกเรียกว่า ทฤษฎีภาวะย้อนกลับของลอเรนซ์ (Lorentz Reciprocity theorem) ใน รูปแบบของสมการอนุพันธ์ นอกจากนี้ยังสามารถแสดงในรูปแบบของสมการอินทิกรัลได้คือ

แต่เกิดจาก source ตัวอื่น

รูปแบบอินทิกรัล

$$-\oiint_S \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) \cdot ds' = \boxed{\iiint_V \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2\right) dv'} \tag{3.41}$$

สำหรับบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด $\left(\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = 0\right)$ ดังนั้นสมการ (3.40) และ (3.41) สามารถแสดงได้คือ

$$-\nabla \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) = 0 \tag{3.42}$$

และ

$$\oiint_S \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) \cdot ds' = 0 \tag{3.43}$$

นอกจากนี้จากสมการ (3.41) เมื่อพิจารณาสนาม $\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\right)$ และแหล่งกำเนิด ซึ่งอยู่ภายในตัวกลางที่ถูกปิดล้อมโดยทรงกลมที่มีรัศมีเป็นอนันต์ สมมติให้แหล่งกำเนิดถูกวางอยู่ภายในพื้นที่จำกัดหนึ่งและสนามได้ถูกสังเกตที่บริเวณสนามระยะไกล ดังนั้นด้านซ้ายของสมการ (3.41) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ หรือ

พิจารณาสนามในระยะอนันต์

$$\oiint_S \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) \cdot ds' = 0 \tag{3.44}$$

ซึ่งสามารถลดรูปสมการ (3.41) ได้เป็น

$$\iiint_V \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2\right) dv' = 0 \tag{3.45}$$

และสามารถจัดรูปสมการ (3.45) ได้คือ

$$\iiint_V \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2\right) dv' = \iiint_V \left(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1\right) dv' \qquad (3.46)$$

จากสมการ (3.46) การอินทิกรัลในแต่ละด้านของสมการ จะใช้อธิบายให้เห็นถึงพลังงานการเชื่อมต่อหรือการคลัปปลิ้งพลังงาน (Coupling energy) ระหว่างสนามที่เกิดขึ้นจากแหล่งกำเนิดอื่นที่ไม่ใช่แหล่งกำเนิดของตัวเอง เช่น สนาม $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ เกิดจากแหล่งกำเนิด $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$ หรือสนาม $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ เกิดจากแหล่งกำเนิด $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$ เป็นต้น โดยสามารถเขียนสมการใหม่ที่อธิบายถึงปฏิกิริยาพลังงาน (Energy reaction) ของสนาม $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ที่เกิดจากแหล่งกำเนิด $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$ ได้คือ *

$$\langle 1,2 \rangle = \iiint_V \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2\right) dv' \qquad (3.47)$$

ในทำนองเดียวกันสมการปฏิกิริยาพลังงานของสนาม $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ ที่เกิดจากแหล่งกำเนิด $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$ สามารถแสดงได้คือ

$$\langle 2,1 \rangle = \iiint_V \left(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1\right) dv' \qquad (3.48)$$

ดังนั้นจากสมการ (3.46) จะได้

$$\langle 1,2 \rangle = \langle 2,1 \rangle \qquad (3.49)$$

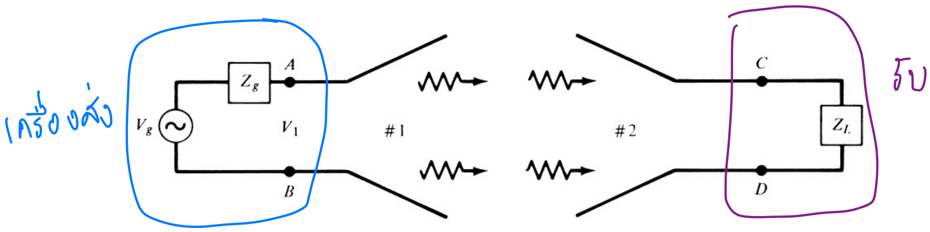
3.6.2 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับสำหรับสายอากาศสองตัว

ถ้าสมมติให้สายอากาศตัวที่ 1 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง และสายอากาศตัวที่ 2 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับดังแสดงในรูปที่ 3.3 ดังนั้นจากหลักการของทฤษฎีภาวะย้อนกลับที่กล่าวข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่าสำหรับการรับส่งสัญญาณระหว่างสายอากาศสองตัว อัตราส่วนของกำลังงานในการส่งออกและกำลังงานที่รับได้ จะไม่มีการไม่เปลี่ยนแปลงถ้าสายอากาศตัวที่ 1 เปลี่ยนมาทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับและสายอากาศตัวที่ 2 เปลี่ยนมาทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่งแทน แต่จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ตัวกลางต้องเป็นแบบไอโซทรอปิกและแบบเชิงเส้นเท่านั้น เมื่อกำหนดให้วงจรสมมูลของสายอากาศแต่ละตัวแสดงดังรูปที่ 3.4 โดยที่สายอากาศตัวที่ 1 มีอินพุทอิมพีแดนซ์ Z_1 และสายอากาศตัวที่ 2 มีอินพุทอิมพีแดนซ์ Z_2 โดยแหล่งจ่ายมีอิมพีแดนซ์ภายใน Z_g และสมมติให้มีการคอนจูกตแมตซ์กับสายอากาศตัวที่ 1 ในขณะที่โหลดมีอิมพีแดนซ์ และสมมติให้มีการคอนจูเกตแมตซ์กับสายอากาศตัวที่ 2

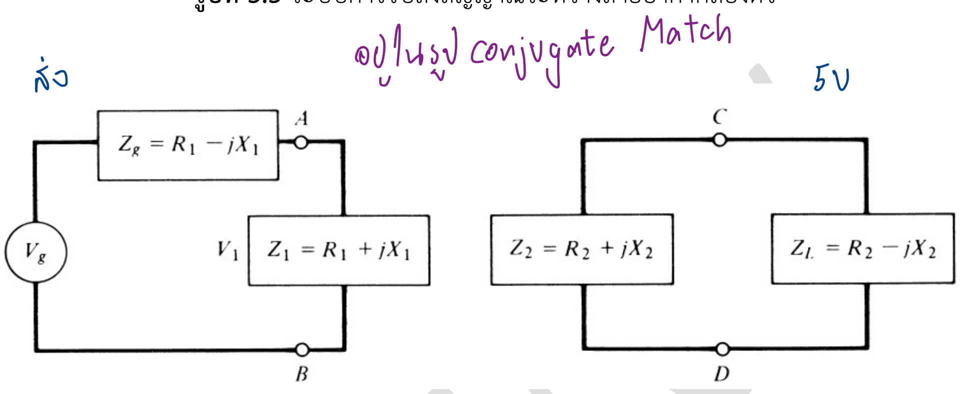
$\frac{P_t}{P_r} = \frac{P_r}{P_t}$

สลับจาก ส่งเป็นรับ รับเป็นส่งได้ อัตราส่วนเท่ากัน

$\frac{P_t}{P_r}$ เท่าเดิม



รูปที่ 3.3 ระบบการรับส่งสัญญาณระหว่างสายอากาศสองตัว



รูปที่ 3.4 ระบบสายอากาศสองตัวร่วมกับโหลดคอนจูเกต

กำลังงานที่แหล่งจ่ายป้อนให้กับสายอากาศตัวที่ 1 สามารถหาได้คือ

$$P_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V_1 I_1^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\frac{V_g Z_1}{Z_1 + Z_g}\right)\left(\frac{V_g^*}{\left(Z_1 + Z_g\right)^*}\right)\right] = \frac{V_g}{8R_1} \tag{3.50}$$

ถ้าค่าแอดมิตแตนซ์ถ่ายโอน (Transfer admittance) ที่เกิดขึ้นระหว่างสายอากาศตัวที่ 1 ผ่านอวกาศว่างไปยังสายอากาศตัวที่ 2 คือ Y_{21} (1ไป2) จะทำให้ได้กระแสที่ไหลผ่านโหลดคือ $V_g Y_{21}$ ดังนั้นกำลังที่ถูกส่งไปให้ที่โหลดคือ

$$P_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[Z_2 (V_g Y_{21})(V_g Y_{21})^*\right] = \frac{1}{2} R_2 \left|V_g\right|^2 \left|Y_{21}\right|^2 \tag{3.51}$$

ดังนั้นจะได้อัตราส่วนกำลังที่รับได้โดยสายอากาศตัวที่ 2 ต่อกำลังที่ถูกส่งออกไปโดยสายอากาศ 1 คือ

$$\frac{P_2}{P_1} = 4R_1R_2\left|Y_{21}\right|^2 \tag{3.52}$$

ในทางกลับกันหากสลับสายอากาศตัวที่ 2 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง และสายอากาศตัวที่ 1 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับ จะทำให้สมการ (3.52) เปลี่ยนเป็น

เท่ากัน

$$\frac{P_1}{P_2} = 4R_1R_2\left|Y_{12}\right|^2 \tag{3.53}$$

ภายใต้เงื่อนไขภาวะย้อนกลับ $\left(Y_{21} = Y_{12}\right)$ ดังนั้นอัตราส่วนของกำลังในสมการ (3.52) และ (3.53) จึงยังคงมีค่าเท่าเดิม

3.6.3 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับของแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ

แบบรูปการแผ่พลังงาน (แบบรูปกำลัง) ของสายอากาศคือ การกระจายของกำลังงานที่ถูกแผ่ออกไปในย่านสนามระยะไกลโดยเป็นฟังก์ชันของมุม ซึ่งสามารถหาได้โดยการวัดความหนาแน่นกำลังงานที่กระจายออกไป ณ ตำแหน่งองศาต่าง ๆ ที่รัศมีคงที่ค่าหนึ่งเมื่อวัดจากสายอากาศ โดยที่กำลังงานที่วัดได้จะถูกนำไปนอร์มอไลน์เทียบกับกำลังงานสูงสุด ในทำนองเดียวกันเมื่อสายอากาศอยู่ในโหมดรับ กำลังงานที่ถูกส่งไปยังโหลดจะฟังก์ชันกับทิศทางของคลื่นระนาบตกกระทบเมื่อความหนาแน่นกำลังงานคงที่เมื่อ โพลาไรเซชันได้ถูกกำหนด ซึ่งจะเรียกว่าแบบรูปการรับของสายอากาศ โดยทั่วไปแล้วแบบรูปการรับจะถูกนอร์มอไลน์เทียบกับกำลังงานที่รับได้สูงสุด จากทฤษฎีภาวะย้อนกลับ (Reciprocity theorem) สามารถกล่าวได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศในโหมดส่งหรือโหมดรับจะมีลักษณะเหมือนกัน

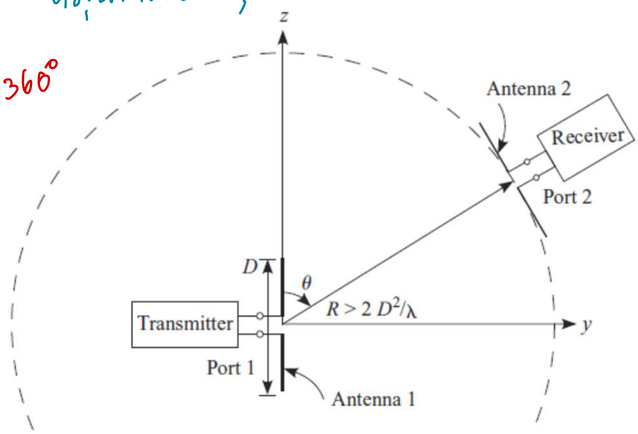
พิจารณาสายอากาศไดโพลสองตัวดังแสดงในรูปที่ 3.3 เมื่อระยะห่างระหว่างสายอากาศทั้งสอง (R) อยู่ในย่านสนามระยะไกล โดยสายอากาศตัวที่ 1 เชื่อมต่อกับเครื่องส่ง ส่วนสายอากาศตัวที่ 2 เชื่อมต่อกับเครื่องรับเพื่อทำการวัดกำลังงานที่รับได้ สมมติให้อิมพีแดนซ์ระหว่างสายอากาศส่งและเครื่องส่ง รวมทั้งอิมพีแดนซ์ระหว่างสายอากาศรับกับเครื่องรับมีการแมตซ์อิมพีแดนซ์กัน เมื่อเครื่องส่งเชื่อมต่อกับสายอากาศตัวที่ 1 กำลังงานที่ถูกรับได้โดยสายอากาศตัวที่ 2 จะแปรผันโดยตรงกับความหนาแน่นกำลัง ณ ตำแหน่งที่สายอากาศอยู่ ดังนั้นเมื่อนำค่ากำลังงานที่รับได้ไปทำการพล็อตเทียบกับมุม θ องศาต่าง ๆ ที่สายอากาศตัวที่ 2 มีการเคลื่อนที่ไปรอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 เมื่อรัศมีคงที่ก็จะได้แบบรูปการแผ่กำลังงานของสายอากาศตัวที่ 1

หมุนตัว Antenna แทนการ
หมุนเครื่องส่ง, รับ

θ ถึง 360°

$R > \frac{2D^2}{\lambda}$

Pattern ที่วัดได้จะเป็นของ
ตัวที่หมุนรอบตัวเอง

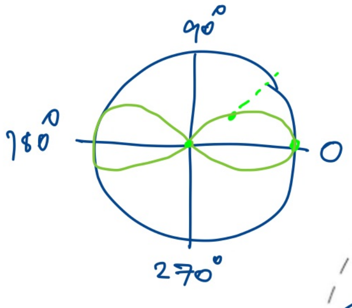


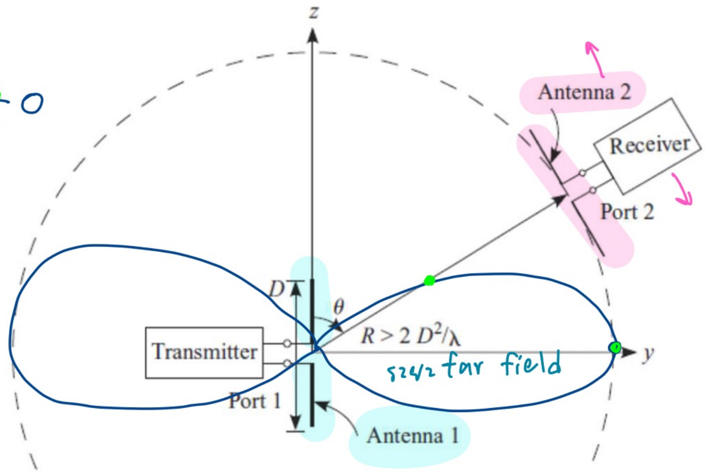
รูปที่ 3.5 การวัดแบบรูปการแผ่พลังงาน

ถ้าเราทำการเปลี่ยนตำแหน่งของเครื่องส่งและเครื่องรับ สายอากาศตัวที่ 2 จะทำหน้าที่สร้างคลื่นระนาบที่มีความหนาแน่นกำลังงานคงที่ไปยังสายอากาศตัวที่ 1 ด้วยมุมตกกระทบ θ องศาต่าง ๆ ตามแนวการเคลื่อนที่ของสายอากาศตัวที่ 2 รอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 ดังนั้นเมื่อนำค่ากำลังงานที่รับได้โดยสายอากาศตัวที่ 1 ไปทำการพล็อตเทียบกับมุม θ องศาต่าง ๆ ที่สายอากาศตัวที่ 2 มีการเคลื่อนที่ไปรอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 เมื่อรัศมี R คงที่ก็จะได้แบบรูปการแผ่กำลังงานของสายอากาศตัวที่ 1 เช่นเดียวกัน ดังนั้นแบบรูปการแผ่พลังงานจะไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเครื่องส่งและเครื่องรับ โดยแบบรูปการแผ่พลังงานที่พล็อตได้จะมีค่าเหมือนกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศไม่ว่าจะอยู่ในโหมดส่งหรือโหมดรับจะให้ค่าเหมือนกัน

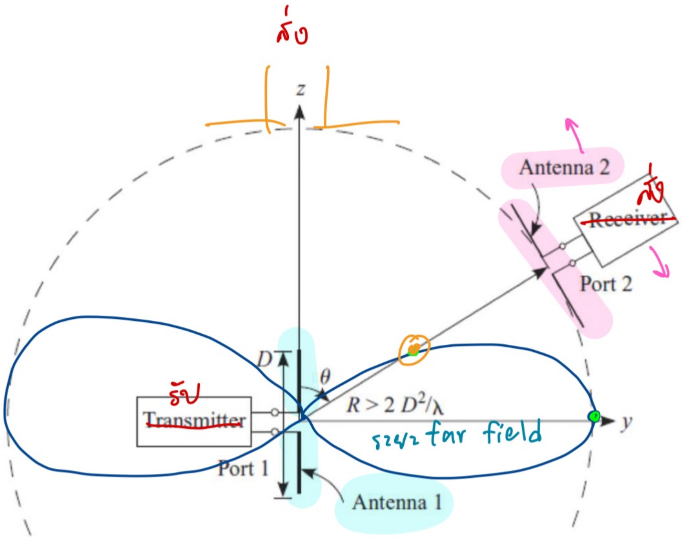
อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติของการวัดแบบรูปการแผ่พลังงาน สายอากาศตัวส่งและตัวรับจะถูกวางในตำแหน่งที่ห่างกันในย่านสนามระยะไกล สำหรับการวัดแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศตัวที่ 1 จะไม่ใช้วิธีเคลื่อนสายอากาศตัวที่ 2 ไปรอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 แต่จะใช้วิธีหมุนสายอากาศตัวที่ 1 รอบตัวเองและสายอากาศตัวที่สองวางอยู่กับที่ ซึ่งในทางปฏิบัติจะทำการต่อเครื่องรับเข้ากับสายอากาศตัวที่ 1 และเครื่องส่งต่อเข้ากับสายอากาศตัวที่ 2

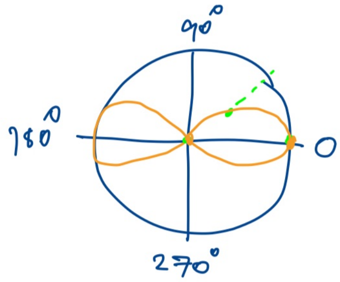
ตัวนึงอยู่กับที่ , อีกตัวเคลื่อนที่
แบบรูปการแผ่พลังงานจะเป็นของตัวที่ไม่เคลื่อนที่





รูปที่ 3.5 การวัดแบบรูปการแผ่พลังงาน





$$\lambda = \frac{c}{f}$$

ค.ถี่ปฏิบัติการ ของ Antenna

คำถามท้ายบทที่ 3

1. ถ้า $\mathbf{H}_e = j\omega\varepsilon\nabla\times\prod_e$ เมื่อ $\prod_e$ คือศักย์เฮิร์ตเซียนไฟฟ้า จงแสดงว่า

   (ก) $\nabla^2\prod_e + k^2\prod_e = j\dfrac{1}{\omega\varepsilon}\mathbf{J}$ (ข) $\mathbf{E}_e = k^2\prod_e + \nabla\left(\nabla\cdot\prod_e\right)$

   (ค) $\prod_e = -j\dfrac{1}{\omega\mu\varepsilon}\mathbf{A}$

2. ถ้า $\mathbf{E}_h = -j\omega\mu\nabla\times\prod_h$ เมื่อ $\prod_h$ คือศักย์เฮิร์ตเซียนแม่เหล็ก จงแสดงว่า

   (ก) $\nabla^2\prod_h + k^2\prod_h = j\dfrac{1}{\omega\mu}\mathbf{M}$ (ข) $\mathbf{H}_h = k^2\prod_h + \nabla\left(\nabla\cdot\prod_h\right)$

   (ค) $\prod_h = -j\dfrac{1}{\omega\mu\varepsilon}\mathbf{F}$

3. จงแสดงขั้นตอนทางคณิตศาสตร์เพื่อหาที่มาของสมการ (3.40) และ (3.41)

Divergence

Cartesian $\nabla \bullet \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Cylindrical $\nabla \bullet \vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho D_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Spherical $\nabla \bullet \vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(D_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$

Gradient

Cartesian $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$

Cylindrical $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$

Spherical $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi$

Curl

Catesian $\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$

Cylindrical $\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\hat{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho H_\phi\right)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{a}_z$

Sperical $\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(H_\phi \sin\theta\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial\left(rH_\phi\right)}{\partial r}\right)\hat{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rH_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right)\hat{a}_\phi$

ตัวอย่างที่ 4.1 ถ้า $P = 1000 - x^2 - y^2$ จงหา grad P

วิธีทำ

$$\text{grad } P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\hat{a}_z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1000 - x^2 - y^2\right)$$

$$= -2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1000 - x^2 - y^2\right)$$

$$= -2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(1000 - x^2 - y^2\right)$$

$$= 0$$

ดังนั้น

$$\text{grad } P = (-2x)\hat{a}_x + (-2y)\hat{a}_y + (0)\hat{a}_z$$

$$= -2x\,\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y$$

ตอบ $-2x\,\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y$

ตัวอย่างที่ 4.2 ถ้า $V_x = V_y = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ จงหาค่าไดเวอร์เจนซ์ของ $\bar{V} = V_x\hat{a}_x + V_y\hat{a}_y$

วิธีทำ

$$\text{div } \bar{V} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$= -\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 ถ้า $V_x = V_y = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ จงหาค่าเคิร์ลของ $\bar{V} = V_x\hat{a}_x + V_y\hat{a}_y$

วิธีทำ

$$\text{curl } \bar{V} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

เนื่องจาก V_x และ V_y ไม่แปรตาม z ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

และ $V_z = 0$ ตามโจทย์กำหนด

$$\text{curl } \bar{V} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix}$$