

## บทที่ 8

### สายอากาศอาร์เรย์เบื้องต้น

#### (Antenna arrays)

#### 8.1 บทนำ

#### 8.2 อาร์เรย์สององค์ประกอบ

#### 8.3 อาร์เรย์เชิงเส้นจำนวน $N$ ตัว: ขนาดและระยะเสมอ

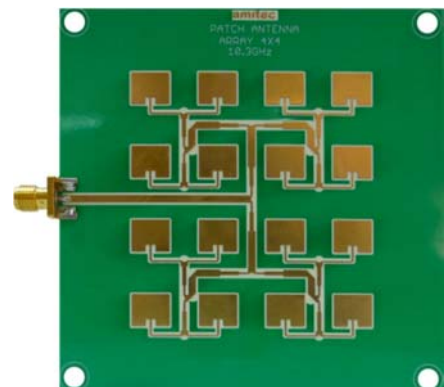
#### 8.4 สภาพเจาะจงทิศทางของอาร์เรย์เชิงเส้นจำนวน $N$ องค์ประกอบ

### 8.1 บทนำ

การอาร์เรย์ (Array) เป็นการนำสายอากาศมากกว่าหนึ่งตัวมาจัดวางรูปแบบให้เหมาะสมเพื่อควบคุมรูปร่างของแบบรูปการแผ่พลังงาน


มีปัจจัย 5 ประการ ที่สามารถช่วยควบคุมรูปร่างของแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ คือ

1. การจัดเรียงองค์ประกอบของอาร์เรย์ (เป็นเส้นตรง วงกลม สี่เหลี่ยม ทรงกลม ฯลฯ)
2. ระยะห่างระหว่างองค์ประกอบ
3. ขนาดของกระแสที่ป้อนแต่ละองค์ประกอบ
4. เฟสของกระแสที่ป้อนแต่ละองค์ประกอบ
5. แบบรูปของแต่ละองค์ประกอบ



**Important Concepts of Phasing**  
 $e^{j\omega t}$  Time Convention

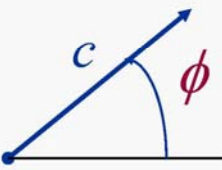
**Wave Travel:**

$d$   


$e^{-jkd} = e^{-j\psi}$   
 $\psi = kd$

**Phasors:**

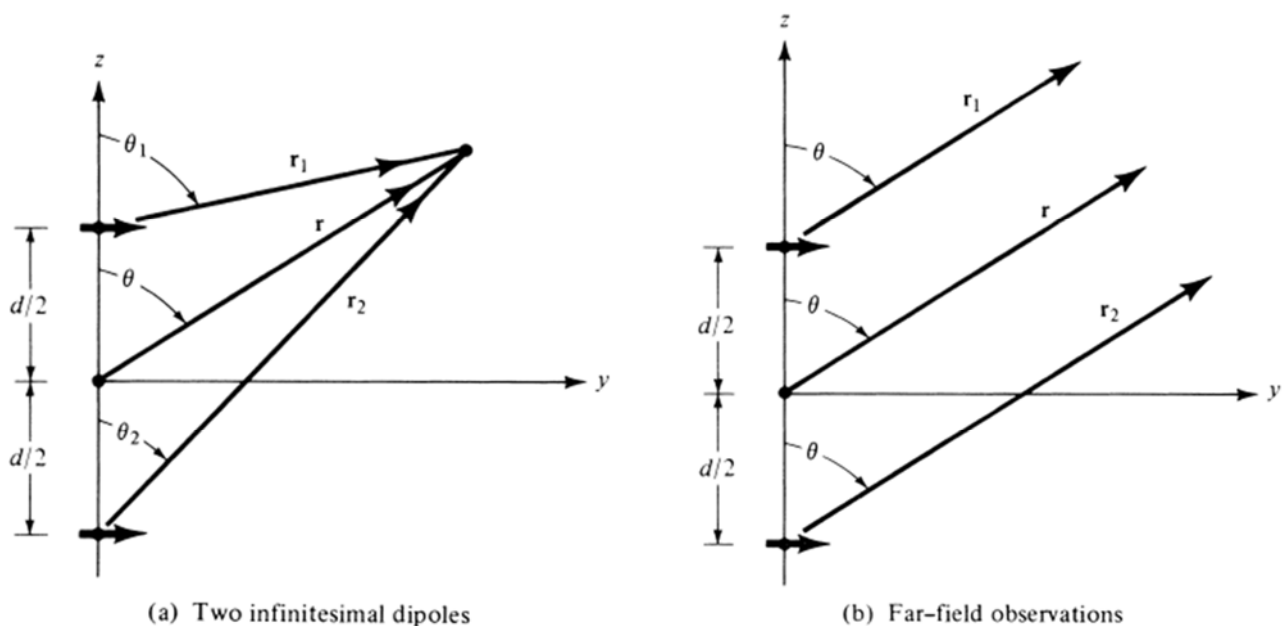
$ce^{j\phi}$



Copyright©2005 by Constantine A. Balanis  
 All rights reserved

Chapter 6  
 Arrays: Linear, Planar, & Circular

## 8.2 อาร์เรย์สององค์ประกอบ



รูปที่ 8.1 การจัดวางอาร์เรย์สององค์ประกอบ ที่วางตามแนวแกน z

สมมติว่าสายอากาศที่สนใจเป็นสายอากาศไดโพลจิว 2 ตัว วางตามแนวนอนและเรียงตามแกน z ดังแสดงในรูปที่ 8.1 ดังนั้นสนามที่แผ่พลังงานมาจากสายอากาศจิวทั้งสองจะเกิดจากผลรวมของสนามจากสายอากาศทั้งสองในระนาบ y-z จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{a}}_\theta j\eta \frac{kI_0 l}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-j[kr_1 - (\beta/2)]}}{r_1} \cos \theta_1 + \frac{e^{-j[kr_2 + (\beta/2)]}}{r_2} \cos \theta_2 \right\} \quad (8.1)$$

$$\theta_1 \simeq \theta_2 \simeq \theta \quad (8.2ก)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &\simeq r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_2 &\simeq r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{for phase variations} \quad (8.2ข)$$

$$r_1 \simeq r_2 \simeq r \quad \text{for amplitude variations} \quad (8.2ค)$$

เมื่อ  $\beta$  คือ ความต่างเฟสระหว่างกระแสที่ใช้กระตุ้นขององค์ประกอบทั้งสองโดยขนาดของการกระตุ้นทั้งสองมีค่าเท่ากัน

$$\underline{E}_t = \hat{\mathbf{a}}_\theta j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} |\cos \theta| \left\{ e^{+j(kd \cos \theta + \beta)/2} + e^{-j(kd \cos \theta + \beta)/2} \right\}$$

$$\underline{E}_t = \underbrace{\hat{\mathbf{a}}_\theta j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} |\cos \theta|}_{\text{Single Element}} \underbrace{\left\{ 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] \right\}}_{\text{Array Factor}} \quad (8.3)$$

Total Field

จากการสังเกตสมการที่ (8.3) จะเห็นได้ว่าสนามรวมของอาร์เรย์มีค่าเท่ากับสนามขององค์ประกอบเดียวที่วางในตำแหน่งจุดกำเนิดคูณกับตัวประกอบตัวหนึ่งที่อยู่ข้างในชื่อ **ตัวประกอบอาร์เรย์ (Array factor: AF)** ดังนั้นสำหรับอาร์เรย์สององค์ประกอบจะมีตัวประกอบอาร์เรย์ (AF) คือ

$$AF = 2 \cos[\frac{1}{2}(kd \cos \theta + \beta)] \quad (8.4)$$

ซึ่งนอร์มอลไลซ์แล้วจะได้

$$(AF)_n = \cos[\frac{1}{2}(kd \cos \theta + \beta)] \quad (8.4ก)$$

ตัวประกอบอาร์เรย์เป็นฟังก์ชันของการจัดวางอาร์เรย์และเฟสที่กระตุ้น โดยการเปลี่ยนแปลงค่าระยะห่าง  $d$  และ/หรือเฟส  $\beta$  ระหว่างองค์ประกอบทั้งสอง เราจะสามารถควบคุมลักษณะของตัวประกอบอาร์เรย์และสนามรวมของอาร์เรย์ได้

จะสังเกตเห็นได้ชัดว่า สนามของอาร์เรย์ที่สนามระยะไกลขององค์ประกอบสองตัวที่มีลักษณะเหมือนกันจะมีค่าเท่ากับ **ผลคูณของสนามขององค์ประกอบตัวเดียวที่จุดอ้างอิง (ปกติที่จุดกำเนิด) กับตัวประกอบอาร์เรย์ของอาร์เรย์**

$$E(\text{total}) = [E(\text{single element at reference point})] \times [\text{array factor}] \quad (8.5)$$

จากสมการ (8.5) จะเรียกว่า การคูณแบบรูป (Pattern multiplication) สำหรับอาร์เรย์ที่มีองค์ประกอบเหมือนกัน

ตัวประกอบอาร์เรย์โดยทั่วไปจะเป็นฟังก์ชันของจำนวนองค์ประกอบ การจัดวาง ขนาด เฟสของการกระตุ้นและระยะห่างของแต่ละองค์ประกอบ

ตัวอย่างที่ 8.1 กำหนดให้อาร์เรย์ในรูปที่ 8.1(ก) และ (ข) จงหาตำแหน่งของสนามรวมเมื่อ  $d = \lambda / 4$

ก.  $\beta = 0^\circ$

ข.  $\beta = +\pi / 2$

ค.  $\beta = -\pi / 2$

### วิธีทำ

ก.  $\beta = 0^\circ$  สนามนอร์มอลไลซ์คือ  $E_{tn} = \cos \theta \cos \left( \frac{\pi}{4} \cos \theta \right)$

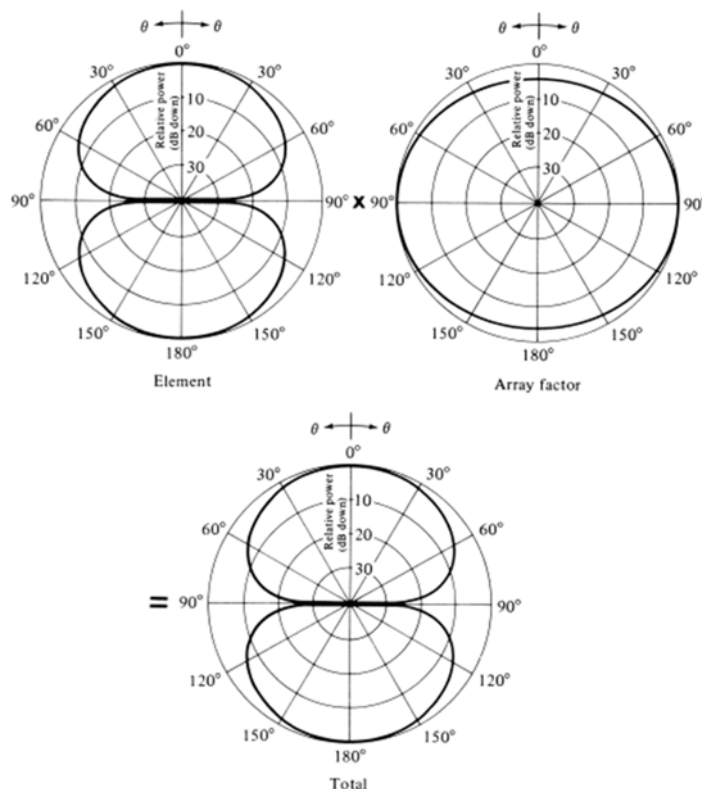
ค้นหาได้จากการให้สนามรวมเท่ากับศูนย์ หรือ

$$E_{tn} = \cos \theta \cos \left( \frac{\pi}{4} \cos \theta \right) |_{\theta=\theta_n} = 0$$

$$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{4} \cos \theta_n \right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cos \theta_n = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = \text{ไม่มีค่าที่สอดคล้อง}$$

มีเพียงนัลเกิดที่มุม  $\theta_n = 90^\circ$  และเกิดจากแบบรูปขององค์ประกอบเดี่ยว ตัวประกอบอาร์เรย์จะไม่ทำให้เกิดนัลใดๆ



รูปที่ 8.3 แบบรูปขององค์ประกอบ ตัวประกอบอาร์เรย์ และผลรวมของอาร์เรย์โคโพลีจิวแนวนอนสององค์ประกอบที่มีเฟสในการกระตุ้นเหมือนกัน ( $\beta = 0^\circ$  และ  $d = \lambda / 4$ )

ข.  $\beta = +\pi / 2$  สนามนอร์มอลไลซ์คือ  $E_{tn} = \cos \theta \cos \left[ \frac{\pi}{4}(\cos \theta + 1) \right]$

นัลหาได้จาก

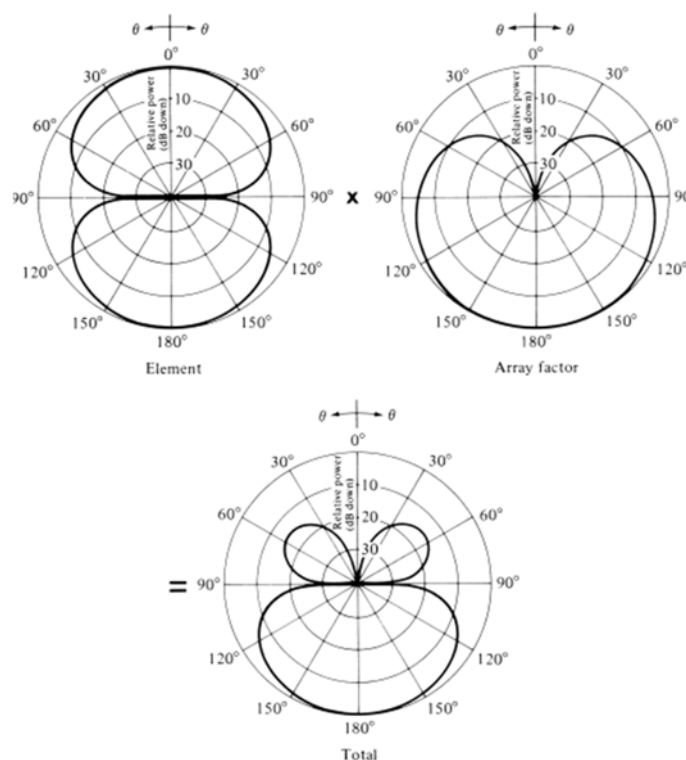
$$E_{tn} = \cos \theta \cos \left[ \frac{\pi}{4}(\cos \theta + 1) \right] \big|_{\theta=\theta_n} = 0$$

$$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

$$\cos \left[ \frac{\pi}{4}(\cos \theta + 1) \right] \big|_{\theta=\theta_n} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}(\cos \theta_n + 1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = 0^\circ$$

$$\frac{\pi}{4}(\cos \theta_n + 1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = \text{ไม่มีค่าที่สอดคล้อง}$$

นัลของอาร์เรย์จะเกิดที่  $\theta_n = 90^\circ$  และ  $0^\circ$  โดยที่นัลที่มุม  $0^\circ$  เกิดจากการจัดวางอาร์เรย์ (ตัวประกอบอาร์เรย์)



รูปที่ 8.4 แบบรูปขององค์ประกอบ ตัวประกอบอาร์เรย์ และผลรวมของอาร์เรย์ไดโพลจั่วแนวนอนสององค์ประกอบที่มีเฟสในการกระตุ้นเหมือนกัน ( $\beta = +90^\circ$  และ  $d = \lambda / 4$ )

ค.  $\beta = -\pi / 2$  สนามนอร์มอลไลซ์คือ  $E_{tn} = \cos \theta \cos \left[ \frac{\pi}{4} (\cos \theta - 1) \right]$

นัลหาได้จาก

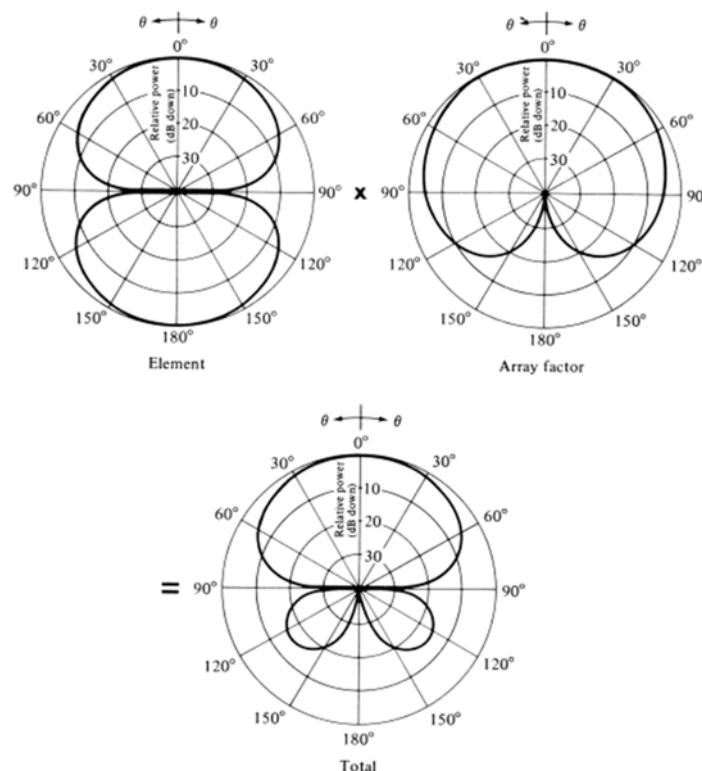
$$E_{tn} = \cos \theta \cos \left[ \frac{\pi}{4} (\cos \theta - 1) \right] |_{\theta=\theta_n} = 0$$

$$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

$$\cos \left[ \frac{\pi}{4} (\cos \theta_n - 1) \right] = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} (\cos \theta_n - 1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = \text{ไม่มีค่าที่สอดคล้อง}$$

$$\frac{\pi}{4} (\cos \theta_n - 1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = 180^\circ$$

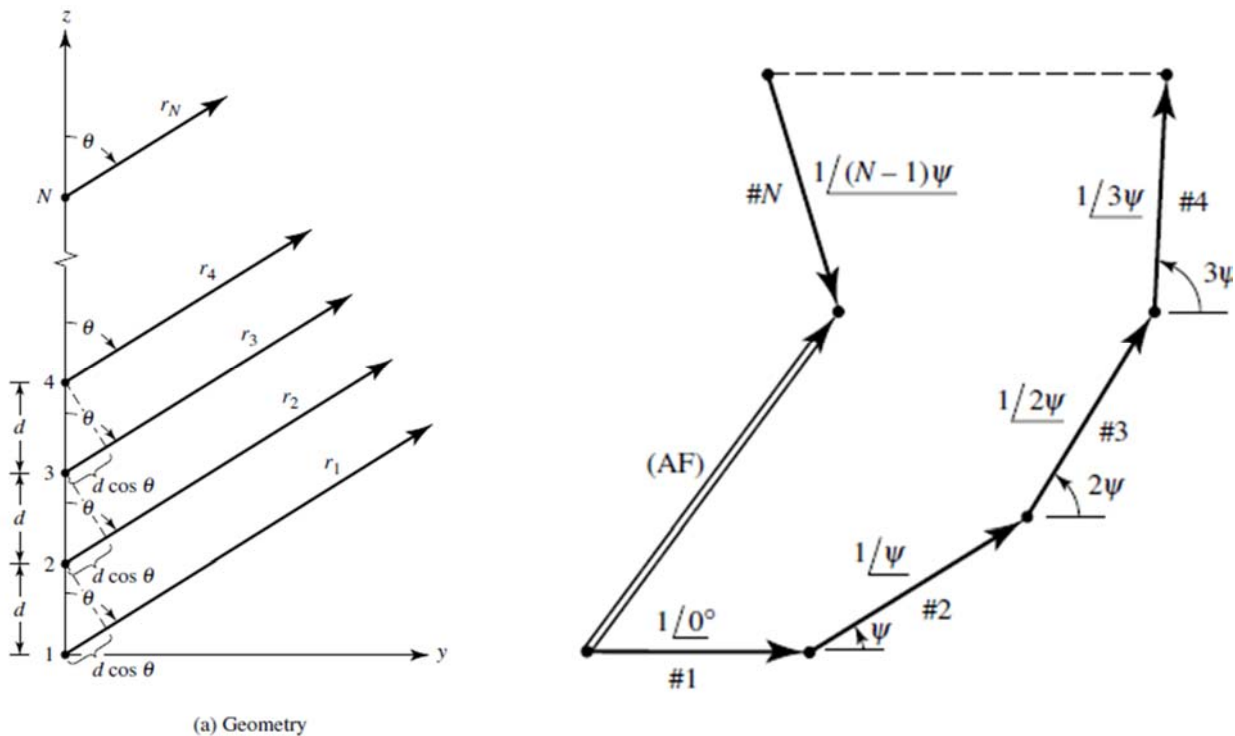
นัลของอาร์เรย์จะเกิดที่  $\theta_n = 90^\circ$  และ  $180^\circ$



รูปที่ 8.4 แบบรูปขององค์ประกอบ ตัวประกอบอาร์เรย์ และผลรวมของอาร์เรย์ไดโพลจี้วแนวนอนสององค์ประกอบที่มีเฟสในการกระตุ้นเหมือนกัน ( $\beta = -90^\circ$  และ  $d = \lambda / 4$ )



## 8.3 อาร์เรย์เชิงเส้นจำนวน N ตัว: ขนาดและระยะเสมอ



รูปที่ 8.5

สมมติว่าองค์ประกอบแต่ละตัวมีขนาดเหมือนกันแต่เฟสขององค์ประกอบแต่ละตัวมีการกระตุ้นที่มีเฟสหน้าอยู่  $\beta$  เมื่อเทียบกับตัวก่อนหน้า ( $\beta$  แสดงถึงเฟสของกระแสแต่ละตัว) อาร์เรย์ที่มีองค์ประกอบเหมือนกันทั้งหมดซึ่งมีขนาดเท่ากันและมีเฟสที่เพิ่มขึ้น จะเรียกการจัดเรียงแบบนี้ว่า อาร์เรย์แบบสม่ำเสมอ (Uniform array) องค์ประกอบอาร์เรย์ที่ใช้ในการพิจารณาจะเป็นแหล่งจ่ายแบบจุดหรือไอโซโทรปิก (Point or isotropic sources)

$$\begin{aligned}
 AF &= \underbrace{1e^{j0}}_{\#1} + \underbrace{1e^{j\beta}}_{\#2} e^{jkd \cos \theta} + \underbrace{1e^{j2\beta}}_{\#3} e^{j2kd \cos \theta} \\
 &\quad + \cdots + \underbrace{1e^{j(N-1)\beta}}_{\#N} e^{j(N-1)kd \cos \theta} \\
 AF &= \sum_{n=1}^N (1) e^{j(n-1)\beta} e^{j(n-1)kd \cos \theta}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$



$$AF = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1) \underbrace{kd \cos \theta + \beta}_{\psi}} \quad (8.6)$$

$$AF = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)\psi} \quad (8.7)$$

$$\psi = kd \cos \theta + \beta \quad (8.7ก)$$

ตัวประกอบอาร์เรย์ในสมการที่ (8.7) สามารถแสดงในรูปแบบอื่นได้ เพื่อให้ง่าย และสะดวก

$$\boxed{1}: AF = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + .. \\ .. + e^{j(N-2)\psi} + e^{j(N-1)\psi}$$

$$\boxed{2}: e^{j\psi} AF = e^{j\psi} + e^{j2\psi} + .. \\ .. + e^{j(N-2)\psi} + e^{j(N-1)\psi} + e^{jN\psi}$$

$$\boxed{2} - \boxed{1}: \\ AF(-1 + e^{j\psi}) = -1 + e^{jN\psi} \quad (8.9)$$

$$AF(-1+e^{j\psi}) = -1+e^{jN\psi} \quad (8.9)$$

$$AF = \frac{e^{jN\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} = \frac{e^{j\frac{N}{2}\psi} \left( e^{j\frac{N}{2}\psi} - e^{-j\frac{N}{2}\psi} \right)}{e^{j\frac{\psi}{2}} \left( e^{j\frac{\psi}{2}} - e^{-j\frac{\psi}{2}} \right)}$$

$$AF = e^{j\frac{\psi}{2}(N-1)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (8.10)$$

$$|AF| = \left| e^{j\frac{\psi}{2}(N-1)} \right| \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right|$$

$$|AF| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right| \quad (8.10ก)$$

$$AF = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \stackrel{\psi \rightarrow 0}{\cong} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\frac{\psi}{2}} \quad (8.10\text{ข})$$

ทำการนอร์มอลไลซ์ด้วย  $N$

$$(AF)_n = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \stackrel{\psi \rightarrow 0}{\cong} \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\frac{N\psi}{2}} \quad (8.10\text{ค}), (8.10\text{ง})$$

$$\psi = kd \cos \theta + \beta$$

ในการหาคำของอาร์เรย์โดยเขตสมการที่ (8.10ค) หรือ (8.10ง) ให้เท่ากับศูนย์

$$(AF)_n = \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \cong \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\frac{N\psi}{2}} = 0$$

$$\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{N\psi}{2} = \sin^{-1}(0) = \pm n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n \neq 0, N, 2N, \dots$$

$$\frac{N}{2}(kd \cos \theta_n + \beta) = \pm n\pi$$

$$\theta_n = \cos^{-1} \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{2n}{N} \right) \right] \quad (8.11)$$

ค่าสูงสุดของสมการที่ (8.10) เกิดขึ้นเมื่อ

$$AF = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{N \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \approx \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\frac{N}{2}\psi} = 1$$

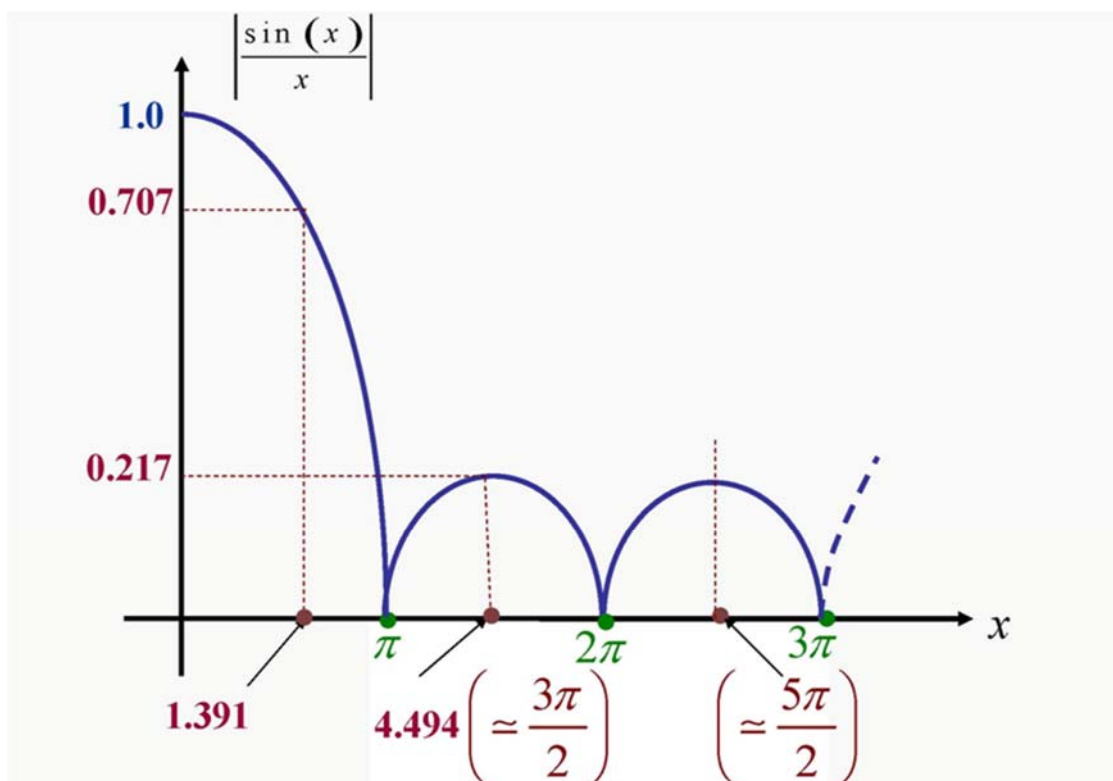
$$\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\psi}{2} = \sin^{-1}(0) = \pm m\pi$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi = \pm 2m\pi = kd \cos \theta_m + \beta$$

$$\theta_m = \cos^{-1}\left[\frac{\lambda}{2\pi d}(-\beta \pm 2m\pi)\right], \quad m = 0, 1, 2$$
(8.12)

$$\underline{m = 0}: \quad \theta_m = \cos^{-1}\left(-\frac{\lambda\beta}{2\pi d}\right)$$
(8.13)



จุดที่ 3-dB สำหรับตัวประกอบอาร์เรย์ของสมการที่ (8.10ค) เกิดเมื่อ

$$AF \approx \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\frac{N}{2}\psi} = 0.707 \Rightarrow \frac{N\psi}{2} = \pm 1.391$$

$$\frac{N}{2}\psi = \frac{N}{2}(kd \cos \theta_h + \beta) = \pm 1.391$$

$$\theta_h \approx \cos^{-1} \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{2.782}{N} \right) \right] \quad (8.14)$$

$$\theta_h \approx \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{2.782}{N} \right) \right] \quad (8.14ก)$$

สำหรับตัวประกอบอาร์เรย์ของสมการที่ (8.10ค) จะเกิดสูงสุดสองจุดซึ่งสามารถประมาณได้คือ

$$\frac{N}{2}\psi \approx \pm \left( \frac{2s+1}{2} \right) \pi, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{N}{2}(kd \cos \theta_s + \beta) = \pm \left( \frac{2s+1}{2} \right) \pi$$

$$\theta_s \approx \cos^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\beta \pm \left( \frac{2s+1}{N} \right) \pi \right] \right\} \quad (8.15)$$

$$\underline{s=1}: \quad \theta_s \approx \cos^{-1} \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{3\pi}{N} \right) \right]$$

ค่าสูงสุดของพ้อยแรกจากสมการที่ (8.10ค) สามารถประมาณได้คือ

$$\frac{N}{2}\psi = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} = 4.7124 \\ 4.494 \end{cases} \quad (8.16)$$

$$|AF| = \left| \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} \right| = \frac{2}{3\pi} = 0.212 = \underline{-13.46 \text{ dB}} \quad (8.17)$$

$$|AF| = \left| \frac{\sin(4.494)}{4.494} \right| = 0.2172 = \underline{-13.26 \text{ dB}}$$

## Linear Arrays

1. Broadside  
( $\theta_m = 90^\circ$ )
2. Ordinary End-Fire  
( $\theta_m = 0^\circ, 180^\circ$ )
3. Phased (Scanning)  
( $0^\circ \leq \theta_m \leq 180^\circ$ )
4. Hansen-Woodyard End-fire  
( $\theta_m = 0^\circ, 180^\circ$ )



### 8.3.1 บอร์ด์ไซค์อาร์เรย์

ค่าสูงสุดขององค์ประกอบเดี่ยวและองค์ประกอบอาร์เรย์ควรมีทิศทางพุ่งไปในทิศทาง  $\theta_o = 90^\circ$  ในส่วนของตัวประกอบเดี่ยวควรจะเลือกให้เหมาะสมและตัวประกอบอาร์เรย์สามารถเลือกค่าได้ โดยเลือกระยะห่างและการกระตุ้นของตัวแผ่พลังงานแต่ละตัวให้เหมาะสม ในส่วนนี้จะออกแบบเฉพาะในส่วนของตัวประกอบอาร์เรย์เพื่อให้เกิดบรอดไซด์อย่างมีประสิทธิภาพ จากสมการที่ (8.10ค) หรือ (8.10ง) ค่าสูงสุดแรกของตัวประกอบเกิดขึ้นเมื่อ

$$\psi = kd \cos \theta + \beta = 0 \quad (8.18)$$

เนื่องจากเราต้องการค่าสูงสุดค่าแรกในทิศทาง  $\theta_o = 90^\circ$  ดังนั้น

$$\psi = kd \cos \theta + \beta|_{\theta=90^\circ} = \beta = 0 \quad (8.18ก)$$

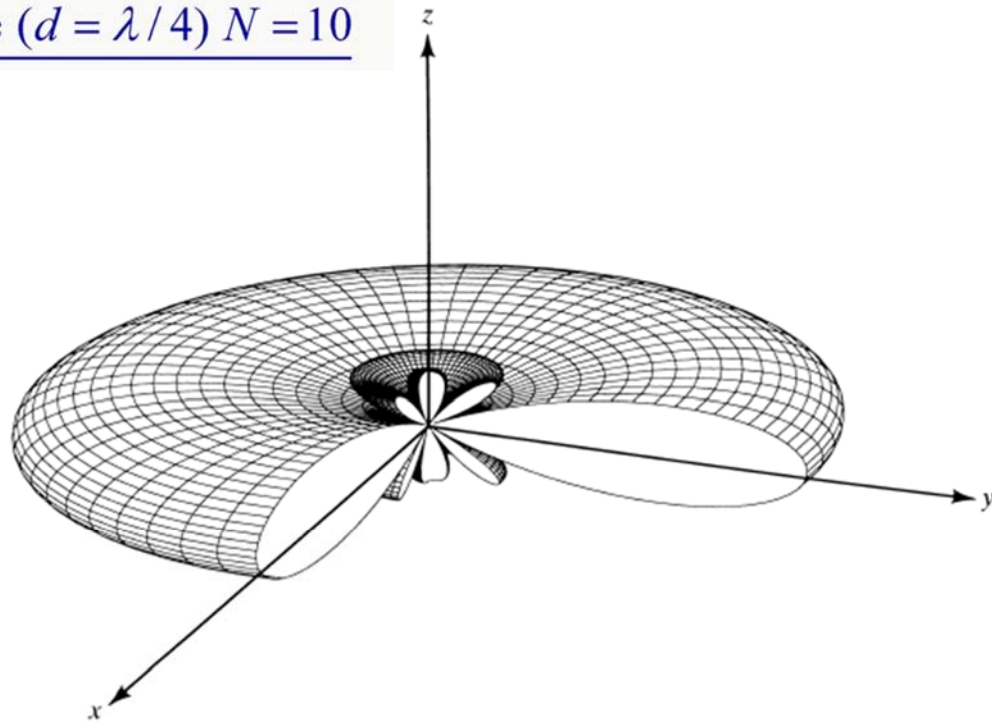
ดังนั้นจะต้องให้องค์ประกอบทั้งหมดมีเฟสเดียวกัน (นอกจากนั้นขนาดต้องเท่ากันด้วย) โดยระยะห่างระหว่างองค์ประกอบจะมีค่าเท่าใดก็ได้

เพื่อให้แน่ใจว่าไม่มีค่าสูงสุดปรากฏในทิศทางอื่นๆ ซึ่งจะเรียกว่า พูเกรตติง (Grating lobes) ระยะห่างระหว่างองค์ประกอบต้องมีค่าไม่เท่ากับจำนวนเท่าของความยาวคลื่น ถ้า  $d = n\lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  และ  $\beta = 0$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} \psi|_{\substack{\beta=0 \\ d=n\lambda}} &= (kd \cos \theta + \beta)|_{\substack{\beta=0 \\ d=n\lambda}} = 2\pi n \cos \theta \\ \psi &= 2\pi n \cos \theta \quad | \quad \theta=0^\circ, 180^\circ = \pm 2\pi n \end{aligned} \quad (8.19)$$

วัตถุประสงค์หลักอย่างหนึ่งในการออกแบบ คือ การไม่เกิดค่าสูงสุดในหลายๆ ทิศทาง ซึ่งเรียกว่า พูเกรตติง บ่อยครั้งจำเป็นต้องเลือกระยะห่างระหว่างองค์ประกอบให้มีค่ามากที่สุด เพื่อที่จะไม่ให้มีพูเกรตติง ดังนั้นระยะห่างระหว่างองค์ประกอบควรจะน้อยกว่าหนึ่งความยาวคลื่น ( $d_{\max} < \lambda$ )

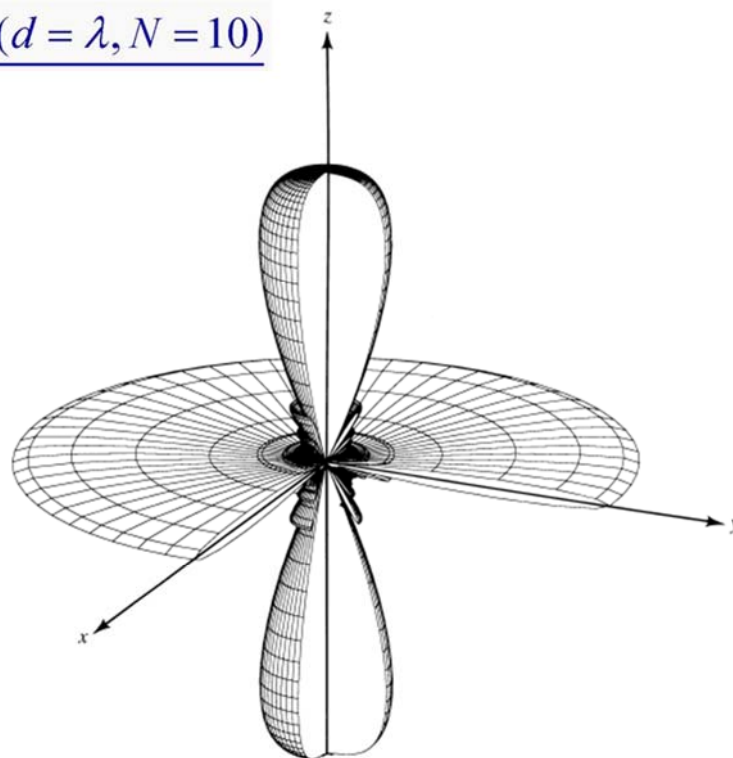
Broadside ( $d = \lambda / 4$ )  $N = 10$



(a) Broadside ( $\beta = 0, d = \lambda/4$ )

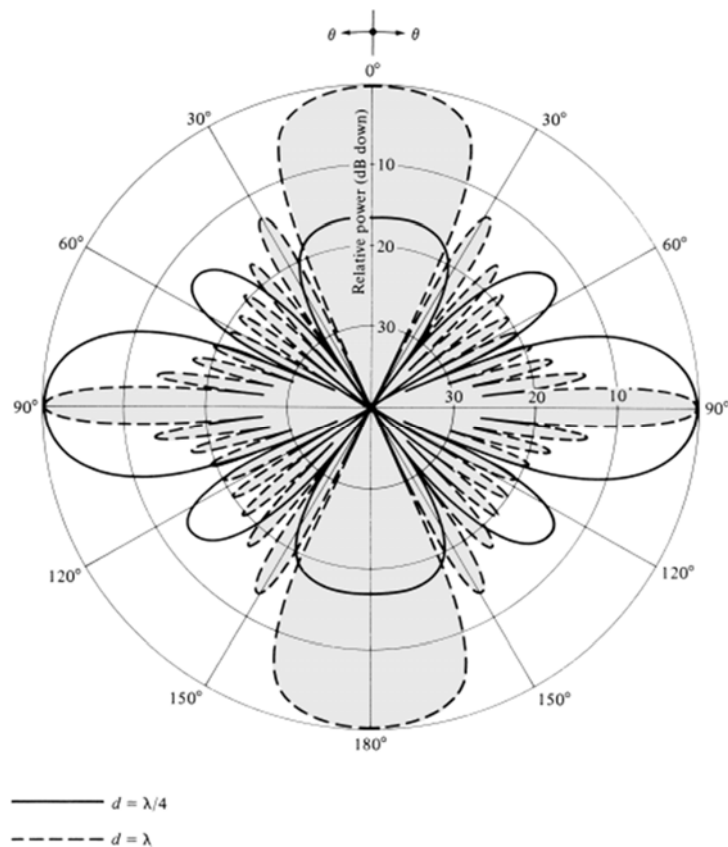
รูปที่ 8.6

Broadside/End-Fire ( $d = \lambda, N = 10$ )



(b) Broadside/end-fire ( $\beta = 0, d = \lambda$ )

รูปที่ 8.6



รูปที่ 8.7

ตารางที่ 8.1 นัล ค่าสูงสุด จุดที่กำลังครึ่งหนึ่ง และค่าสูงสุดของพวยย่อยสำหรับอาร์เรย์บรอดไซด์ขนาดสม่ำเสมอ

NULLS

$$\theta_n = \cos^{-1} \left( \pm \frac{n \lambda}{N d} \right)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n \neq N, 2N, 3N, \dots$$

MAXIMA

$$\theta_m = \cos^{-1} \left( \pm \frac{m \lambda}{d} \right)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

HALF-POWER  
POINTS

$$\theta_h \simeq \cos^{-1} \left( \pm \frac{1.391 \lambda}{\pi N d} \right)$$

$$\pi d / \lambda \ll 1$$

MINOR LOBE  
MAXIMA

$$\theta_s \simeq \cos^{-1} \left[ \pm \frac{\lambda}{2d} \left( \frac{2s+1}{N} \right) \right]$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi d / \lambda \ll 1$$

ตารางที่ 8.2 ปิรมิตสำหรับอาร์เรย์บรอดไซด์ขนาดสม่ำเสมอ

FIRST-NULL BEAMWIDTH (FNBW)	$\Theta_n = 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left( \frac{\lambda}{Nd} \right) \right]$
HALF-POWER BEAMWIDTH (HPBW)	$\Theta_h \simeq 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left( \frac{1.391\lambda}{\pi Nd} \right) \right]$ $\pi d/\lambda \ll 1$
FIRST SIDE LOBE BEAMWIDTH (FSLBW)	$\Theta_s \simeq 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left( \frac{3\lambda}{2dN} \right) \right]$ $\pi d/\lambda \ll 1$

### 8.3.2 อาร์เรย์เอนด์ไฟร์แบบดั้งเดิม

ถ้าแบบรูปมีค่าสูงสุดไปตามแนวแกนอาร์เรย์จะเรียกว่า เอนด์ไฟร์ (End-fire) โดยในบางครั้งเราอาจต้องการแบบรูปสูงสุดออกเพียงด้านใดด้านหนึ่งเพียงด้านเดียว อาจจะเป็น  $\theta_o = 0^\circ$  หรือ  $\theta_o = 180^\circ$

เพื่อให้เกิดค่าสูงสุดค่าแรกพุ่งไปในทิศทาง  $\theta_o = 0^\circ$

$$\psi = kd \cos \theta + \beta|_{\theta=0^\circ} = kd + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -kd \quad (8.20ก)$$

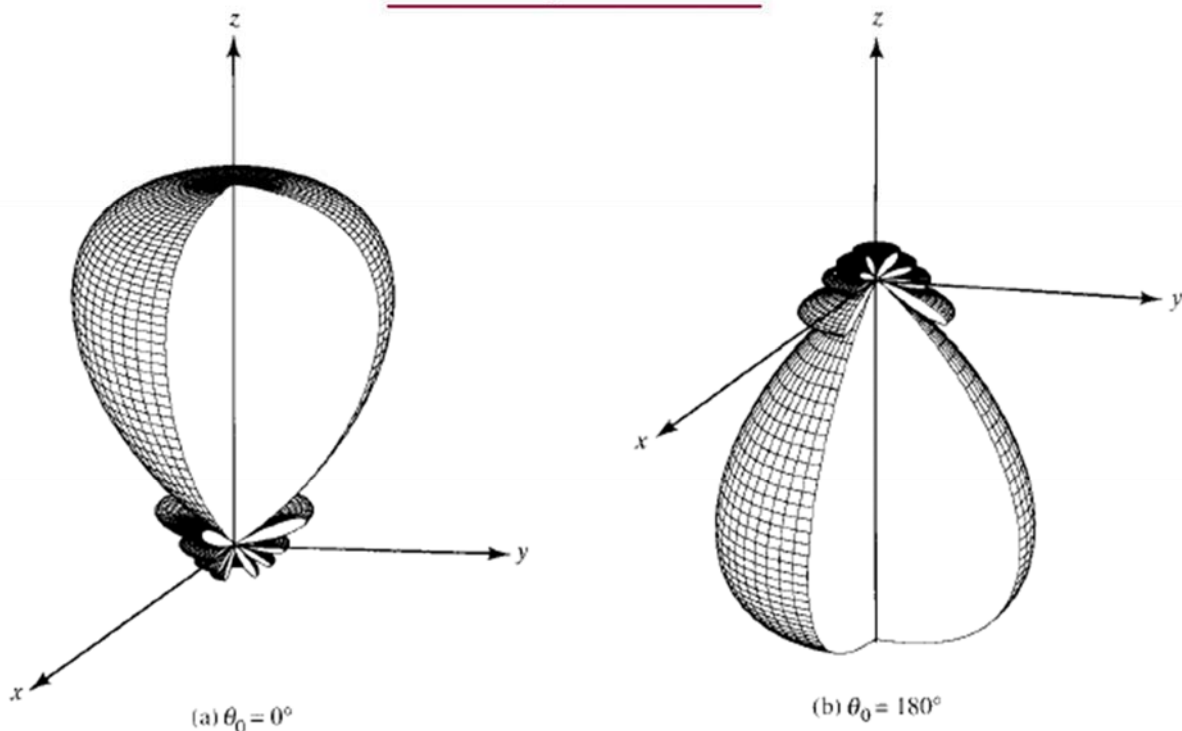
ถ้าต้องการให้เกิดค่าสูงสุดค่าแรกพุ่งไปในทิศทาง  $\theta_o = 180^\circ$

$$\psi = kd \cos \theta + \beta|_{\theta=180^\circ} = -kd + \beta = 0 \Rightarrow \beta = kd$$

ดังนั้นการแผ่พลังงานจะออกในทิศทางเอนด์ไฟร์ ก็ต่อเมื่อ  $\beta = -kd$  (สำหรับ  $\theta_o = 0^\circ$ ) หรือ  $\beta = kd$  (สำหรับ  $\theta_o = 180^\circ$ )

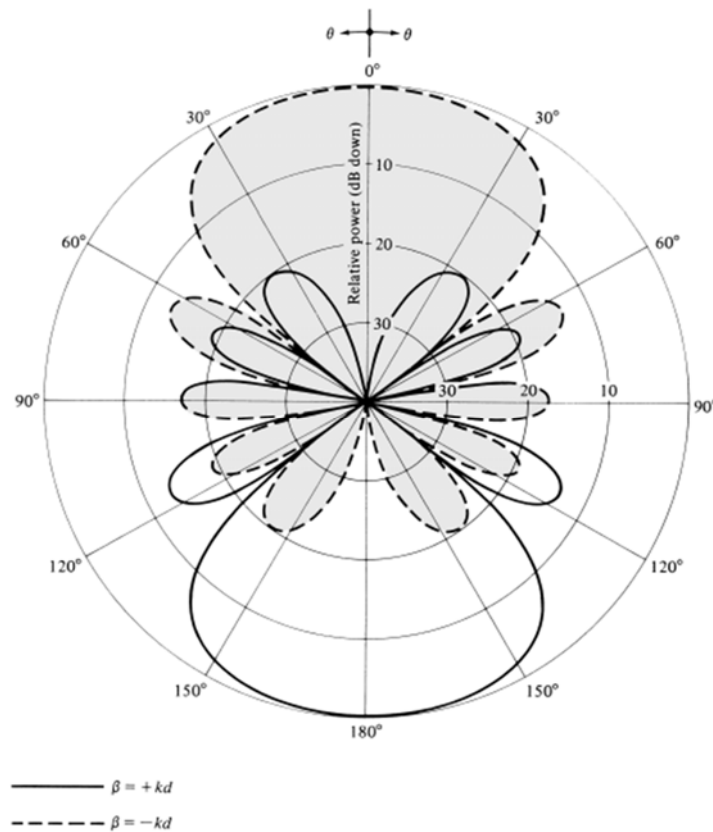
ถ้าแต่ละองค์ประกอบวางห่างกันด้วยระยะ  $d = \lambda / 2$  การแผ่พลังงานเอนต์ไฟร์จะออกทั้งสองทิศทาง (  $\theta_0 = 0^\circ$  และ  $\theta_0 = 180^\circ$  ) ถ้าระยะห่างมีค่าเป็นจำนวนเท่าของความยาวคลื่น (  $d = n\lambda, n = 1, 2, 3, \dots$  ) ทิศทางของแบบรูปสูงสุดจะเกิดที่มุมทั้งสองนอกจากนี้ยังมีค่าสูงสุดที่มุมบอร์คไซด์ด้วย ดังนั้น กรณีของ  $d = n\lambda, n = 1, 2, 3, \dots$  จะเกิดจุดสูงสุดสี่ทิศทาง โดยสองทิศทางไปตามแนวบอร์คไซด์ และอีกสองทิศทางไปตามแนวแกนอาร์เรย์ เพื่อที่จะให้เกิดมุมสูงสุดของเอนต์ไฟร์เพียงอย่างเดียวและไม่มีพูเกรตติงใดๆ ระยะห่างสูงสุดระหว่างองค์ประกอบที่มากที่สุดต้องน้อยกว่า  $\lambda / 2$  (  $d_{\max} < \lambda / 2$  )

$$N = 10, d = \lambda / 4$$



รูปที่ 8.8

$$N = 10, d = \lambda/4$$



รูปที่ 8.9

ตารางที่ 8.3 นัล ค่าสูงสุด จุดที่กำลังครึ่งหนึ่ง และค่าสูงสุดของพวยย่อยสำหรับอาร์เรย์เอนต์ไฟร์ขนาดสม่ำเสมอ

NULLS

$$\theta_n = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{n\lambda}{Nd} \right)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n \neq N, 2N, 3N, \dots$$

MAXIMA

$$\theta_m = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{m\lambda}{d} \right)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

HALF-POWER  
POINTS

$$\theta_h \simeq \cos^{-1} \left( 1 - \frac{1.391\lambda}{\pi dN} \right)$$

$$\pi d/\lambda \ll 1$$

MINOR LOBE  
MAXIMA

$$\theta_s \simeq \cos^{-1} \left[ 1 - \frac{(2s+1)\lambda}{2Nd} \right]$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi d/\lambda \ll 1$$



ตารางที่ 8.4 ปิรมิตสำหรับอาร์เรย์เอนด์ไฟร์ขนาดสม่ำเสมอ

FIRST-NULL BEAMWIDTH (FNBW)	$\Theta_n = 2 \cos^{-1} \left( 1 - \frac{\lambda}{Nd} \right)$
HALF-POWER BEAMWIDTH (HPBW)	$\Theta_h \simeq 2 \cos^{-1} \left( 1 - \frac{1.391\lambda}{\pi d N} \right)$ $\pi d / \lambda \ll 1$
FIRST SIDE LOBE BEAMWIDTH (FSLBW)	$\Theta_s \simeq 2 \cos^{-1} \left( 1 - \frac{3\lambda}{2Nd} \right)$ $\pi d / \lambda \ll 1$

### 8.3.3 อาร์เรย์สแกนนิ่งเฟส

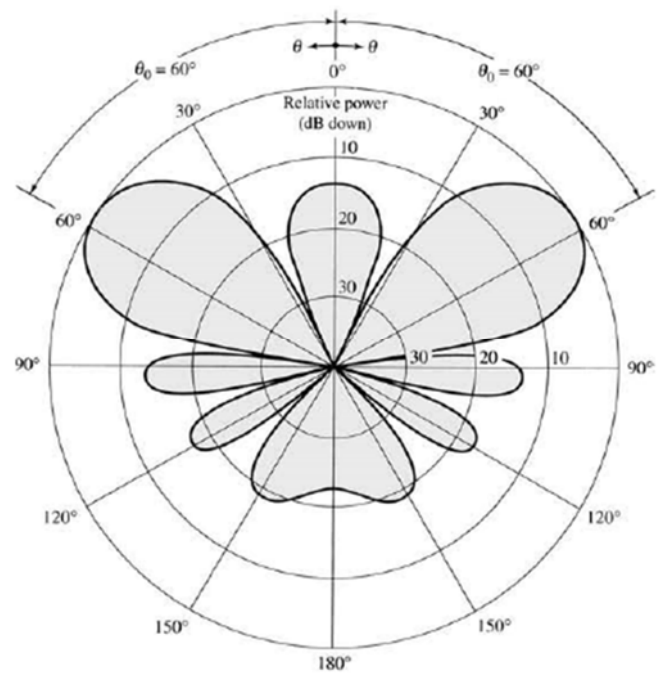
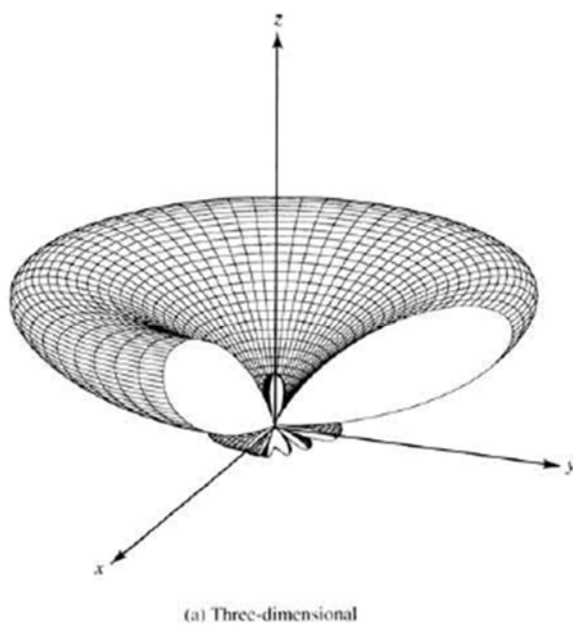
ถ้าทิศทางสูงสุดสามารถเปลี่ยนไปอยู่ในทิศทางใดๆ ก็ได้ซึ่งจะเรียกปรากฏการณ์นี้ว่าการสแกนนิ่งอาร์เรย์ (Phase scanning array)

สมมติว่ามุมสูงสุดที่ต้องการของอาร์เรย์ต้องการมุม  $\theta_o (0^\circ \leq \theta_o \leq 180^\circ)$  เพื่อจะได้มุมดังกล่าวเฟสระหว่างแต่ละองค์ประกอบจะต้องมีค่าเป็น

$$\psi \Big|_{\theta=\theta_o} = (kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta=\theta_o} = kd \cos \theta_o + \beta = 0$$

$$\beta = -kd \cos \theta_o \quad (8.21)$$

ดังนั้นสามารถทำได้โดยการควบคุมเฟสที่แตกต่างกันระหว่างแต่ละองค์ประกอบ การแผ่พลังงานสูงสุดจะเอียงไปตามทิศทางใดๆ ที่ต้องการตามที่อาร์เรย์สแกน ในทางปฏิบัติจะให้วงจรอิเล็กทรอนิกส์ในการเลื่อนเฟสโดยใช้เฟอรัไรซ์ หรือไดโอดเป็นตัวเลื่อนเฟส (Phase shifter)



รูปที่ 8.11

## Half-Power Beamwidth

$$\Theta_h = \cos^{-1} \left[ \cos \theta_o - 0.443 \frac{\lambda}{(L+d)} \right] - \cos^{-1} \left[ \cos \theta_o + 0.443 \frac{\lambda}{(L+d)} \right] \quad (8.22ก)$$

เมื่อ  $L$  คือ ความยาวของอาร์เรย์

### 8.3.4 อาร์เรย์เอนด์ไฟร์ของ Hansen-Woodyard

เพื่อทำการปรับปรุงสภาพเจาะงทิศทางของอาร์เรย์เอนด์ไฟร์โดยไม่ทำลายคุณลักษณะอื่นๆ นำเสนอโดย Hasen และ Woodyard

$$\beta = -\left(kd + \frac{2.92}{N}\right) \simeq -\left(kd + \frac{\pi}{N}\right) \Rightarrow \text{for maximum in } \theta_0 = 0^\circ \quad (8.23ก)$$

$$\beta = +\left(kd + \frac{2.92}{N}\right) \simeq +\left(kd + \frac{\pi}{N}\right) \Rightarrow \text{for maximum in } \theta_0 = 180^\circ \quad (8.23ข)$$

สำหรับค่าสูงสุดไปตามมุม  $\theta_o = 0^\circ$

$$\begin{aligned} 1. \quad |\psi|_{\theta=0} &= \frac{\pi}{N} & 2. \quad |\psi|_{\theta=180^\circ} &\cong \pi \\ 1. \quad |\psi|_{\theta=0} &= |kd \cos \theta + \beta|_{\theta=0} = \left| kd - kd - \frac{\pi}{N} \right| = \frac{\pi}{N} \end{aligned} \quad (8.24ก)$$

$$2. \quad |\psi|_{\theta=180^\circ} = |kd \cos \theta + \beta|_{\theta=180^\circ} = \left| -kd - kd - \frac{\pi}{N} \right| \cong \pi$$

$$2kd + \frac{\pi}{N} \cong \pi$$

$$d \cong \frac{\lambda}{4} \left( \frac{N-1}{N} \right)^{N \rightarrow \text{large}} \cong \frac{\lambda}{4} \quad (8.25ก)$$

สำหรับค่าสูงสุดไปตามมุม  $\theta_o = 180^\circ$

$$1. \quad |\psi|_{\theta=180^\circ} = \frac{\pi}{N} \quad 2. \quad |\psi|_{\theta=0^\circ} \cong \pi$$

$$1. \quad |\psi|_{\theta=180^\circ} = |kd \cos \theta + \beta|_{\theta=180^\circ} = \left| -kd + kd + \frac{\pi}{N} \right| = \frac{\pi}{N} \quad (8.24\text{ข})$$

$$2. \quad |\psi|_{\theta=0^\circ} = |kd \cos \theta + \beta|_{\theta=0^\circ} = \left| kd + kd + \frac{\pi}{N} \right| \cong \pi$$

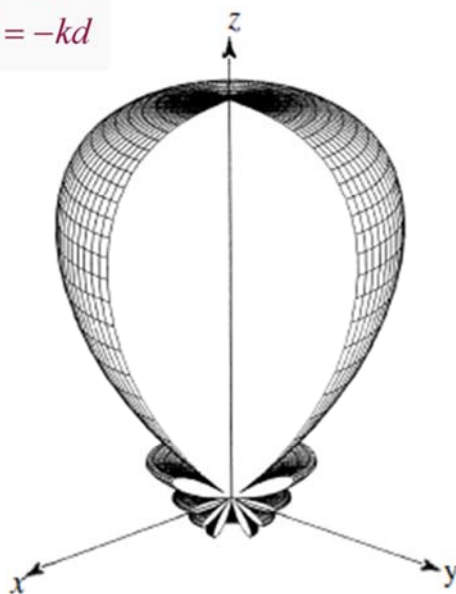
$$2kd + \frac{\pi}{N} \cong \pi$$

$$d \cong \frac{\lambda}{4} \left( \frac{N-1}{4} \right)^{N \rightarrow \text{large}} \cong \frac{\lambda}{4} \quad (8.25\text{ก})$$

ดังนั้นสำหรับอาร์เรย์ที่มีขนาดใหญ่เงื่อนไขของ Hansen และ Woodyard จะทำให้สภาพเจาะจงทิศทางเพิ่มขึ้นเมื่อระยะห่างระหว่างองค์ประกอบจะมีค่าประมาณ  $\lambda / 4$

$$N = 10$$

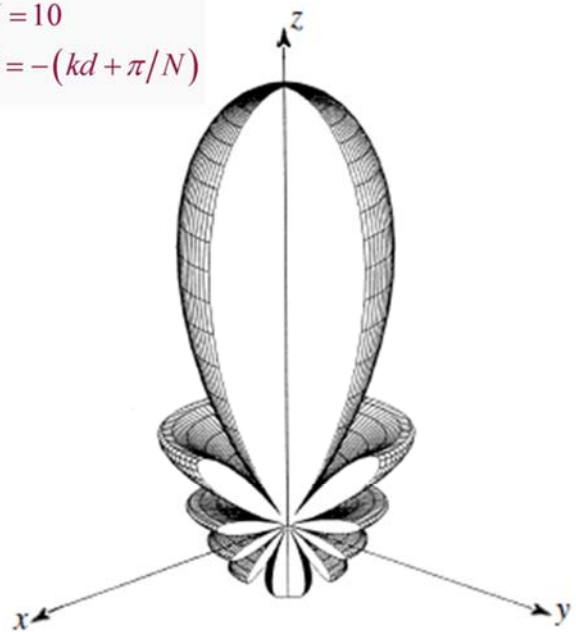
$$\beta = -kd$$



(a) Ordinary

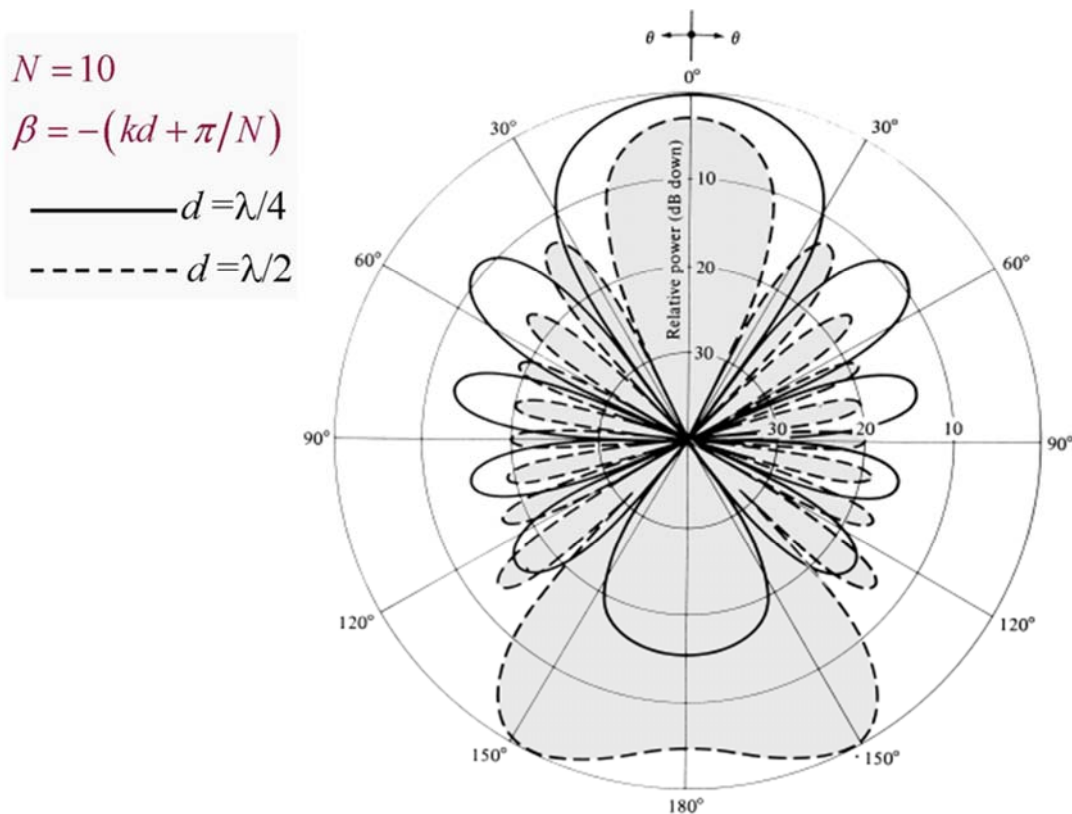
$$N = 10$$

$$\beta = -(kd + \pi/N)$$



(b) Hansen-Woodyard

รูปที่ 8.13



รูปที่ 8.14

ตารางที่ 8.3 นัล ค่าสูงสุด จุดที่กำลังครึ่งหนึ่ง และค่าสูงสุดของพวยย่อยสำหรับอาร์เรย์เอนต์ไฟร์ Hansen-Woodyard ขนาดสม่ำเสมอ

NULLS	$\theta_n = \cos^{-1} \left[ 1 + (1 - 2n) \frac{\lambda}{2dN} \right]$ $n = 1, 2, 3, \dots$ $n \neq N, 2N, 3N, \dots$
MAXIMA	$\theta_m = \cos^{-1} \left\{ 1 + [1 - (2m + 1)] \frac{\lambda}{2Nd} \right\}$ $m = 1, 2, 3, \dots$ $\pi d/\lambda \ll 1$
HALF-POWER POINTS	$\theta_h = \cos^{-1} \left( 1 - 0.1398 \frac{\lambda}{Nd} \right)$ $\pi d/\lambda \ll 1$ $N \text{ large}$
MINOR LOBE MAXIMA	$\theta_s = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{s\lambda}{Nd} \right)$ $s = 1, 2, 3, \dots$ $\pi d/\lambda \ll 1$



ตารางที่ 8.6 ปิรมิตต์สำหรับอาร์เรย์เอนด์ไฟร์ของ Hansen-Woodyard ขนาดสม่ำเสมอ

FIRST-NULL BEAMWIDTH (FNBW)	$\Theta_n = 2 \cos^{-1} \left( 1 - \frac{\lambda}{2dN} \right)$
HALF-POWER BEAMWIDTH (HPBW)	$\Theta_h = 2 \cos^{-1} \left( 1 - 0.1398 \frac{\lambda}{Nd} \right)$ $\pi d/\lambda \ll 1$ $N$ large
FIRST SIDE LOBE BEAMWIDTH (FSLBW)	$\Theta_s = 2 \cos^{-1} \left( 1 - \frac{\lambda}{Nd} \right)$ $\pi d/\lambda \ll 1$

ตารางที่ 8.7 ระยะห่างสูงสุด  $d_{\max}$  ที่มีค่าสูงสุดเพียงค่าเดียวหรือสองค่าของอาร์เรย์เชิงเส้น

Array	Distribution	Type	Direction of Maximum	Element Spacing
Linear	Uniform	Broadside	$\theta_0 = 90^\circ$ only $\theta_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ simultaneously	$d_{\max} < \lambda$ $d = \lambda$
Linear	Uniform	Ordinary end-fire	$\theta_0 = 0^\circ$ only $\theta_0 = 180^\circ$ only $\theta_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ simultaneously	$d_{\max} < \lambda/2$ $d_{\max} < \lambda/2$ $d = \lambda$
Linear	Uniform	Hansen-Woodyard end-fire	$\theta_0 = 0^\circ$ only $\theta_0 = 180^\circ$ only	$d \simeq \lambda/4$ $d \simeq \lambda/4$
Linear	Uniform	Scanning	$\theta_0 = \theta_{\max}$ $0 < \theta_0 < 180^\circ$	$d_{\max} < \lambda$



## 8.4 สภาพเจาะงทิศทางของอาร์เรย์เชิงเส้นจำนวน N องค์ประกอบ

$$D_o = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = \frac{U_{\max}}{U_o}$$

1. Broadside
2. Ordinary End-Fire
3. Hansen-Woodyard End-Fire

### 8.4.1 อาร์เรย์บรอดไซด์

$$(AF)_n = \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos \theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd \cos \theta\right)} \right] \quad (8.28)$$

$$\underline{\text{For } d \ll \lambda} \Rightarrow (AF)_n \approx \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos \theta\right)}{\left(\frac{N}{2}kd \cos \theta\right)} \right] \quad (8.28\alpha)$$

$$U(\theta) = [AF(\theta)]^2 = \left[ \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos \theta\right)}{\frac{N}{2}kd \cos \theta} \right]^2 = \left[ \frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 \quad (8.29)$$

$$Z = \frac{N}{2}kd \cos \theta \quad (8.29ก)$$

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta) \sin \theta d\theta d\phi$$

$$P_{rad} = 2\pi \int_0^\pi U(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$D_0 = \frac{U_{\max}}{U_0} \simeq \frac{Nkd}{\pi} = 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \quad (8.32)$$

$$\text{Using } L = (N-1)d \quad (8.33)$$

$$D_0 \simeq 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \simeq 2 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \left( \frac{d}{\lambda} \right) \quad (8.34)$$

$$\text{For } L \gg d$$

$$D_0 \simeq 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 2 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \left( \frac{d}{\lambda} \right) \simeq 2 \left( \frac{L}{\lambda} \right) \quad (8.34ก)$$

**ตัวอย่างที่ 8.3** จงหาสภาพเจาะงทศทางสูงสุดของสายอากาศอาร์เรย์เมื่อกำหนดให้การต่ออาร์เรย์แบบเชิงเส้นแบบบรอดไซด์สม่ำเสมอขององค์ประกอบไอโซทรอปิกจำนวน 10 ตัว โดยระยะห่างระหว่างองค์ประกอบเท่ากับ  $\lambda / 4$

**วิธีทำ**

$$D_0 \simeq 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 5 \text{ (dimensionless)} = 10 \log_{10}(5) = 6.99 \text{ dB}$$

### 8.4.2 อาร์เรย์เอนต์ไฟร์แบบดั้งเดิม

$$(AF)_n = \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd \cos(\theta - 1) \right]}{N \sin \left[ \frac{1}{2} kd \cos(\theta - 1) \right]} \right] \quad (8.35)$$

$$\underline{\text{For } d \ll \lambda} \Rightarrow (AF)_n \approx \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd \cos(\theta - 1) \right]}{\left[ \frac{N}{2} kd \cos(\theta - 1) \right]} \right] \quad (8.35\text{ก})$$

$$U(\theta) = [AF(\theta)]^2$$

$$U(\theta) = \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd \cos(\theta - 1) \right]}{\left[ \frac{N}{2} kd \cos(\theta - 1) \right]} \right]^2 = \left[ \frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 \quad (8.36)$$

$$Z = \frac{N}{2} kd \cos(\theta - 1) \quad (8.36ก)$$

$$D_0 = \frac{U_{\max}}{U_0} \simeq \frac{2Nkd}{\pi} = 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \quad (8.39)$$

Using  $L = (N-1)d$  (8.33)

$$D_0 \simeq 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 4 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \left( \frac{d}{\lambda} \right) \quad (8.39ก)$$

For  $L \gg d$

$$D_0 \simeq 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 4 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \left( \frac{d}{\lambda} \right) \simeq 4 \left( \frac{L}{\lambda} \right) \quad (8.39ข)$$

### 8.4.3 สายอากาศอาร์เรย์เอนด์ไฟร์ของ Hansen-Woodyard

$$U_0 = \frac{1}{Nkd} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} - 1.8515 \right] = \frac{0.871}{Nkd} \quad (8.40)$$

$$U_0 = \frac{0.871}{Nkd} = \frac{1.742}{2Nkd} = 0.554 \left( \frac{\pi}{2Nkd} \right) \quad (8.40ก)$$

$$D_0 = \frac{U_{\max}}{U_0} = \frac{1}{0.554} \left[ \frac{2Nkd}{\pi} \right] = 1.805 \left[ 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \right] \quad (8.41)$$

โดยใช้สมการที่ (8.33) สมการที่ (8.41) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$D_0 = 1.805 \left[ 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \right] = 1.805 \left[ 4 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \right] \quad (8.41ก)$$

For  $L \gg d$

$$\begin{aligned} D_0 &= 1.805 \left[ 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \right] = 1.805 \left[ 4 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \right] \\ &\simeq 1.805 \left[ 4 \left( \frac{L}{\lambda} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.41ข)$$

ตารางที่ 8.8 สภาพเจาะงทศทางสำหรับอาร์เรย์แบบบอร์คไซด์และเอนคไฟร์

Array	Directivity
BROADSIDE	$D_0 = 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 2 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \simeq 2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)$ $N\pi d/\lambda \rightarrow \infty, L \gg d$
END-FIRE (ORDINARY)	$D_0 = 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 4 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \simeq 4 \left( \frac{L}{\lambda} \right)$ $2N\pi d/\lambda \rightarrow \infty, L \gg d$ <p>Only one maximum (<math>\theta_0 = 0^\circ</math> or <math>180^\circ</math>)</p>
END-FIRE (HANSEN- WOODYARD)	$D_0 = 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 2 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \simeq 2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)$ $D_0 = 1.805 \left[ 4N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \right] = 1.805 \left[ 4 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \right] = 1.805 \left[ 4 \left( \frac{L}{\lambda} \right) \right]$ $2N\pi d/\lambda \rightarrow \infty, L \gg d$ <p>Two maxima (<math>\theta_0 = 0^\circ</math> and <math>180^\circ</math>)</p>