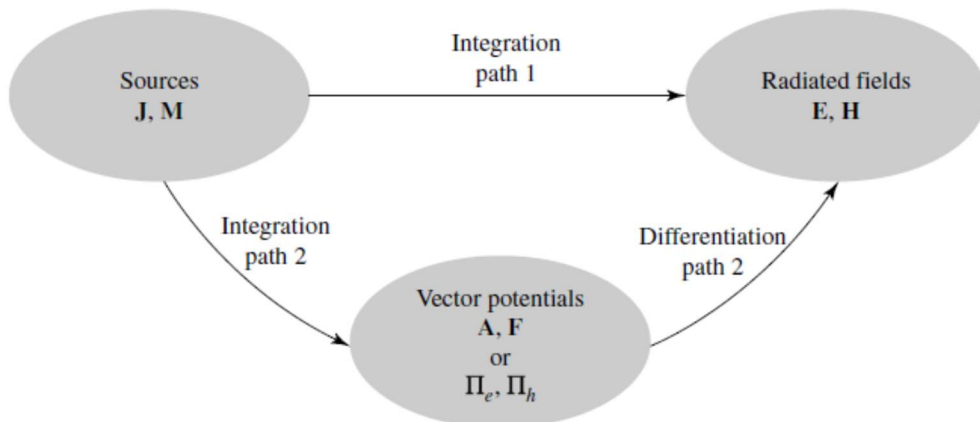


## บทที่ 3 ฟังก์ชันศักย์ช่วย

### 3.1 บทนำ

หนึ่งในปัญหาของการวิเคราะห์สายอากาศคือการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แผ่พลังงานออกไปในอวกาศว่างรอบ ๆ สายอากาศ ซึ่งการวิเคราะห์สายอากาศสามารถแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ (ก) การหากระแสที่กระจายอยู่บนโครงสร้างสายอากาศเมื่อถูกกระตุ้นที่ขั้วอินพุตของสายอากาศ (ข) คำนวณหาสนามเนื่องจากการกระจายของกระแสในบริเวณพื้นที่ว่างรอบ ๆ สายอากาศ โดยทั่วไปแล้วในการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะใช้วิธีอินทิเกรตกระแสบนโครงสร้างของสายอากาศโดยตรง อย่างไรก็ตามวิธีนี้ค่อนข้างยากและซับซ้อน ดังนั้นเพื่อให้การหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทำได้ง่ายขึ้น จึงมีการใช้ฟังก์ชันช่วย (Auxiliary function) ที่เรียกว่า ศักย์เวกเตอร์ (Vector potential) ซึ่งศักย์เวกเตอร์ประกอบด้วย ศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  (ศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก : Magnetic vector potential) และ ศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{F}$  (ศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า : Electric vector potential) โดยในการหาสนามไฟฟ้า  $\mathbf{E}$  และสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{H}$  จะเริ่มจากการอินทิเกรตเพื่อหาศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{F}$  จากกระแสไฟฟ้า  $\mathbf{J}$  และกระแสแม่เหล็ก  $\mathbf{M}$  ด้วยการอินทิเกรต จากนั้นคำนวณหา  $\mathbf{E}$  และ  $\mathbf{H}$  จากศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{F}$  ด้วยการอนุพันธ์ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 บล็อกไดอะแกรมในการคำนวณสนามจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็ก

### 3.2 ศักย์เวกเตอร์

ในการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กโดยใช้วิธีศักย์เวกเตอร์จะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ

1. หาศักย์เวกเตอร์ **A** และ **F** เนื่องจากการกระจายของกระแสไฟฟ้า **J** และกระแสแม่เหล็ก

**M**

2. หาสนาม **E** และ **H** จากศักย์เวกเตอร์ **A** และ **F**

โดยหัวข้อนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างศักย์เวกเตอร์และการกระจายของกระแส รวมทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ซึ่งความสัมพันธ์เหล่านี้จะมีความสอดคล้องกับสมการของแมกซ์เวลล์ทั้งสี่สมการ

#### 3.2.1 ศักย์เวกเตอร์ **A** สำหรับแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า **J**

เริ่มต้นด้วยสมการแมกซ์เวลล์  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  เนื่องจากการเคิร์ลของเวกเตอร์ใด ๆ จากคุณสมบัติเอกลักษณ์เวกเตอร์คือ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B}_A = \mu \mathbf{H}_A = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.2)$$

หรือ

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.2n)$$

โดยที่ตัวห้อย *A* หมายถึงสนามที่เกิดจากศักย์เวกเตอร์ **A** เมื่อแทนสมการ (3.2n) เข้าไปในสมการแมกซ์เวลล์  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$  จะได้

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega(\mu\mathbf{H}_A) = -j\omega(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (3.3)$$

หรือ

$$\nabla \times (\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A}) = 0 \quad (3.4)$$

เนื่องจากเอกลักษณ์เวกเตอร์ การเคิร์ลของฟังก์ชันเกรเดียนมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\nabla \times (-\nabla V) = 0 \quad (3.5)$$

จะได้

$$\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A} = -\nabla V \quad (3.6)$$

หรือ

$$\mathbf{E}_A = -\nabla V - j\omega\mathbf{A} \quad (3.7)$$

โดยที่  $V$  คือ ศักย์ไฟฟ้าสเกลาร์ใด ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง โดยเมื่อทำการเคิร์ลทั้งสองข้างของสมการ (3.2) และเอกลักษณ์เวกเตอร์

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.8)$$

ดังนั้นจากสมการ (3.2) จะได้

$$\nabla \times (\mu\mathbf{H}_A) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.8ก)$$

สำหรับตัวกลางที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน (Homogeneous media) จะทำให้สมการ (3.8ก) แสดงได้คือ

$$\mu\nabla \times \mathbf{H}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.9)$$

จากสมการแมกซ์เวลล์

$$\nabla \times \mathbf{H}_A = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A \quad (3.10)$$

เมื่อนำสมการ (3.10) แทนเข้าไปในสมการ (3.9) จะได้

$$\mu\mathbf{J} + j\omega\mu\varepsilon\mathbf{E}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.11)$$

แทนสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.11) จะได้

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla(j\omega\mu\varepsilon V) \\ &= -\mu\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\varepsilon V) \end{aligned} \quad (3.12)$$

เมื่อ  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

เพื่อที่จะทำให้สมการ (3.12) ง่ายขึ้น จะกำหนดให้

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon V \Rightarrow V = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3.13)$$

ซึ่งเรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขของลอเรนซ์ (Lorentz condition) ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.13) ลงใน (3.12) จะได้

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3.14)$$

นอกจากนี้สมการ (3.7) สามารถแสดงได้คือ

$$\mathbf{E}_A = -\nabla V - j\omega \mathbf{A} = -j\omega \mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (3.15)$$

ดังนั้นเมื่อรู้ค่าศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  จะสามารถหา  $\mathbf{H}_A$  ได้จากสมการ (3.2ก) และสามารถหา  $\mathbf{E}_A$  ได้จากสมการ (3.15)

### 3.2.2 ศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{F}$ สำหรับแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M}$

สำหรับกระแสไฟฟ้า  $\mathbf{J} = 0$  แต่กระแสแม่เหล็ก  $\mathbf{M} \neq 0$  และสอดคล้องกับสมการแมกซ์เวลล์  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  ดังนั้น  $\mathbf{E}_F$  สามารถแสดงในรูปของการเคิร์ลของศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{F}$  ได้คือ

$$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.16)$$

แทนสมการ (3.16) เข้าไปในสมการแมกซ์เวลล์  $\nabla \times \mathbf{H}_F = j\omega\epsilon\mathbf{E}_F$  จะได้

$$\nabla \times \mathbf{H}_F = -j\omega(\nabla \times \mathbf{F}) \quad (3.17)$$

ย้ายข้างสมการจะได้

$$\nabla \times (\mathbf{H}_F + j\omega\mathbf{F}) = 0 \quad (3.18)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ของสมการ (3.5) จะได้

$$\mathbf{H}_F = -\nabla V_m - j\omega\mathbf{F} \quad (3.19)$$

ฟังก์ชันสเกลาร์  $V_m$  แสดงถึงศักย์สเกลาร์แม่เหล็กใด ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง เมื่อทำการเคิร์ลสมการ (3.16) จะได้

$$\nabla \times \mathbf{E}_F = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = -\frac{1}{\epsilon} (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}) \quad (3.20)$$

และจากสมการแมกซ์เวลล์

$$\nabla \times \mathbf{E}_F = -\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H}_F \quad (3.21)$$

ดังนั้น

$$\nabla^2 \mathbf{F} + j\omega\mu\epsilon\mathbf{H}_F = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \epsilon\mathbf{M} \quad (3.22)$$

แทนสมการที่ (3.19) เข้าไปในสมการที่ (3.22) จะได้

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\epsilon\mathbf{M} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \nabla(j\omega\mu\epsilon V_m) \quad (3.23)$$

เพื่อที่จะทำให้สมการ (3.23) ง่ายขึ้นจะกำหนดให้

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -j\omega\mu\epsilon V_m \Rightarrow V_m = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.24)$$

ดังนั้นสมการ (3.23) ลดลงเหลือ

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\epsilon \mathbf{M} \quad (3.25)$$

และสมการ (3.19) จะกลายเป็น

$$\mathbf{H}_F = -j\omega \mathbf{F} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (3.26)$$

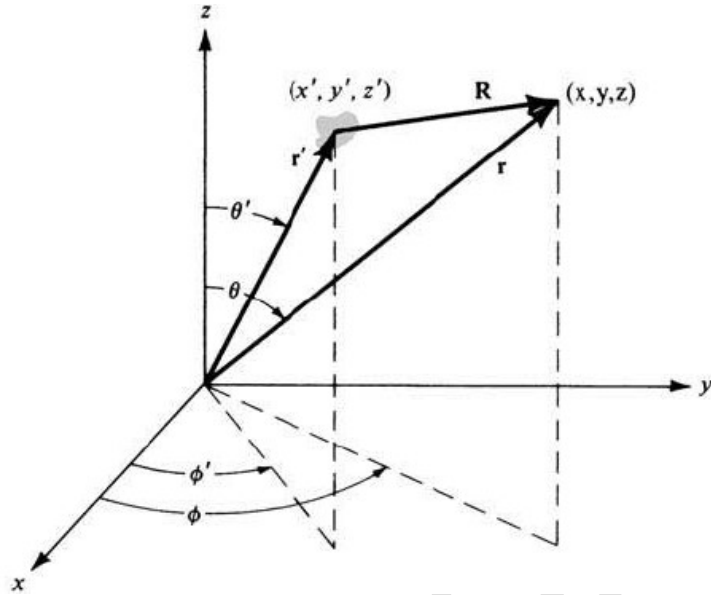
### 3.3 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าและแม่เหล็ก

ในการวิเคราะห์หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ( $\mathbf{J}$ ) และกระแสแม่เหล็ก ( $\mathbf{M}$ ) จะพิจารณาให้แหล่งกำเนิดกระแสอยู่ที่ตำแหน่ง  $\mathbf{r}'$  และสนามที่ต้องการทราบค่าอยู่ที่ตำแหน่ง  $\mathbf{r}$  ดังแสดงในรูปที่ 3.2 จากนั้นทำการหาค่าศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า  $\mathbf{J}(x', y', z')$  และศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}(x, y, z)$  ได้ถูกกำหนดโดย

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (3.27)$$

เมื่อ  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  และ  $R$  คือ ระยะทางจากแหล่งกำเนิดกระแสไปยังจุดสังเกตที่ต้องการทราบค่าสนาม โดยที่  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

ในทำนองเดียวกันความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก  $\mathbf{M}(x', y', z')$  และศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{F}(x, y, z)$  สามารถแสดงได้คือ



รูปที่ 3.2 ระบบพิกัดสำหรับคำนวณหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\epsilon}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (3.28)$$

ถ้าความหนาแน่นกระแส  $\mathbf{J}$  และ  $\mathbf{M}$  แสดงในรูปความหนาแน่นกระแสเชิงพื้นผิว ดังนั้นการอินทิกรัลเชิงปริมาตรในสมการ (3.27) และ (3.28) จะลดเหลือเพียงอินทิกรัลเชิงพื้นผิวหรือ

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \mathbf{J}_s(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \quad (3.29)$$

และ

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\epsilon}{4\pi} \iint_S \mathbf{M}_s(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \quad (3.30)$$

และถ้าแสดงในรูปของกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็ก  $I_e$  และ  $I_m$  ดังนั้นสมการ (3.29) และ (3.31) จะลดเหลือเพียงอินทิกรัลเชิงเส้นคือ

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_C I_e(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dl' \quad (3.31)$$

และ

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_C I_m(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dl' \quad (3.32)$$

ดังนั้นเมื่อทราบค่าศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{F}$  จะสามารถหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กรวมอันเกิดจากศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{F}$  ได้คือ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.33ก)$$

หรือ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}_A - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.33ข)$$

และ

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - j\omega\mathbf{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (3.34ก)$$

หรือ

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_F \quad (3.34ข)$$



### 3.4 การแผ่พลังงานย่านสนามระยะไกล

สมการการแผ่พลังงานของสนามระยะไกลจะพิจารณาในระบบพิกัดทรงกลมคือ

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_r A_r(r, \theta, \phi) + \hat{\mathbf{a}}_\theta A_\theta(r, \theta, \phi) + \hat{\mathbf{a}}_\phi A_\phi(r, \theta, \phi) \quad (3.35)$$

ขนาดของ  $r$  ในแต่ละองค์ประกอบของสมการ (3.35) จะอยู่ในรูปของ  $1/r^n$  โดยที่  $n = 1, 2, 3, \dots$  เมื่อพิจารณาสนามระยะไกลพจน์ของ  $1/r^n$  ที่ลำดับสูงจะไม่ถูกนำมาคิด นั่นคือ  $1/r^n = 0$  เมื่อ  $n = 2, 3, \dots$  ดังนั้นสมการ (3.35) จะลดลงเหลือ

$$\mathbf{A} = \left[ \hat{\mathbf{a}}_r A'_r(\theta, \phi) + \hat{\mathbf{a}}_\theta A'_\theta(\theta, \phi) + \hat{\mathbf{a}}_\phi A'_\phi(\theta, \phi) \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.36)$$

เมื่อทำการแทนสมการ (3.36) ลงในสมการ (3.15) จะได้

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r} \left\{ -j\omega e^{-jkr} \left[ \hat{\mathbf{a}}_r(0) + \hat{\mathbf{a}}_\theta A'_\theta(\theta, \phi) + \hat{\mathbf{a}}_\phi A'_\phi(\theta, \phi) \right] \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} + \frac{1}{r^2} \{ \dots \} + \dots \quad (3.37)$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าในย่านสนามระยะไกลองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวรัศมีจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ในทำนองเดียวกันเมื่อทำการแทนสมการ (3.36) ลงในสมการ (3.2ก) จะได้

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r} \left\{ j \frac{\omega}{\eta} e^{-jkr} \left[ \hat{\mathbf{a}}_r(0) + \hat{\mathbf{a}}_\theta A'_\theta(\theta, \phi) - \hat{\mathbf{a}}_\phi A'_\phi(\theta, \phi) \right] \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} + \frac{1}{r^2} \{ \dots \} + \dots \quad (3.38)$$

เมื่อ  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  คือ อินทรินสิกอิมพีแดนซ์ของตัวกลาง และถ้าไม่คิดพจน์อันดับสูงของ  $1/r^n$  สนามที่แผ่พลังงาน  $\mathbf{E}$  และ  $\mathbf{H}$  จะมีเพียงองค์ประกอบ  $\theta$  และ  $\phi$  ดังนั้นสำหรับบริเวณสนามระยะไกล

$$\left. \begin{aligned} E_r &\simeq 0 \\ E_\theta &\simeq -j\omega A_\theta \\ E_\phi &\simeq -j\omega A_\phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}_A = -j\omega \mathbf{A} \quad (3.39)$$

และ

$$\left. \begin{aligned} H_r &\simeq 0 \\ H_\theta &\simeq +j\frac{\omega}{\eta}A_\phi = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi &\simeq -j\frac{\omega}{\eta}A_\theta = +\frac{E_\theta}{\eta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{H}_A = \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{\eta} \times \mathbf{E}_A = -j\frac{\omega}{\eta} \hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{A} \quad (3.39\text{ข})$$

### 3.5 ทฤษฎีคู่ภาวะ

คู่ภาวะ (Duality) ใช้อธิบายพฤติกรรมของตัวแปรที่แตกต่างกันสองตัวแปรที่อยู่ในรูปแบบของสมการคณิตศาสตร์ที่เหมือนกันและคำตอบของสมการเหล่านั้นยังมีค่าเหมือนกันด้วย โดยตัวแปรที่อยู่ในสมการทั้งสองที่มีลักษณะเหมือนกันจะถูกเรียกว่า **ปริมาณคู่ (Dual quantities)** และคำตอบของสมการหนึ่งสามารถจัดรูปให้เหมือนกับคำตอบอีกสมการหนึ่งได้โดยการเปลี่ยนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ซึ่งแนวคิดนี้รู้จักกันในชื่อของ **ทฤษฎีคู่ภาวะ (Duality theorem)**

ดังนั้นถ้ารู้คำตอบของสมการหนึ่งชุด (ตัวอย่างเช่น  $\mathbf{J} \neq 0, \mathbf{M} = 0$ ) ก็สามารถสร้างคำตอบอีกชุดได้ ( $\mathbf{J} = 0, \mathbf{M} \neq 0$ ) โดยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม โดยสมการที่เป็นคู่กันสำหรับแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ( $\mathbf{J}$ ) และกระแสแม่เหล็ก ( $\mathbf{M}$ ) แสดงในตารางที่ 3.1 และตัวแปรที่เป็นคู่กันแสดงในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.1 สมการคู่ของแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ( $\mathbf{J}$ ) และกระแสแม่เหล็ก ( $\mathbf{M}$ )

แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ( $\mathbf{J} \neq 0, \mathbf{M} = 0$ )	แหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็ก ( $\mathbf{J} = 0, \mathbf{M} \neq 0$ )
$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega\mu\mathbf{H}_A$	$\nabla \times \mathbf{H}_F = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_F$
$\nabla \times \mathbf{H}_A = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A$	$-\nabla \times \mathbf{E}_F = \mathbf{M} + j\omega\mu\mathbf{H}_F$
$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$	$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\varepsilon\mathbf{M}$
$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$	$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$
$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$	$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F}$
$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$	$\mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$

ตารางที่ 3.2 ตัวแปรคู่ของแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ( $\mathbf{J}$ ) และกระแสแม่เหล็ก ( $\mathbf{M}$ )

แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ( $\mathbf{J} \neq 0, \mathbf{M} = 0$ )	แหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็ก ( $\mathbf{J} = 0, \mathbf{M} \neq 0$ )
$\mathbf{E}_A$	$\mathbf{H}_F$
$\mathbf{H}_A$	$-\mathbf{E}_F$
$\mathbf{J}$	$\mathbf{M}$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{F}$
$\varepsilon$	$\mu$
$\mu$	$\varepsilon$
$k$	$k$
$\eta$	$1 / \eta$
$1 / \eta$	$\eta$

### 3.6 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับ

ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีภาวะย้อนกลับ (Reciprocity) สำหรับทฤษฎีวงจรไฟฟ้า ได้กล่าวไว้ว่า ถ้ามีแหล่งกำเนิดกระแส (แรงดัน) ถูกต่อเข้ากับโหนดด้านใดด้านหนึ่งของวงจรเชิงเส้น และทำการต่อมิเตอร์เพื่อวัดแรงดัน (กระแส) ที่โหนดอีกด้านหนึ่งที่เหลือ ซึ่งจะพบว่า ไม่ว่าจะทำการสลับแหล่งกำเนิดกระแส (แรงดัน) และมิเตอร์วัดแรงดันไปที่โหนดด้านใดก็ตาม ผลของการวัดแรงดัน (กระแส) ที่ได้จะมีค่าเหมือนกันทุกประการ

#### 3.6.1 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับสำหรับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า

ทฤษฎีภาวะย้อนกลับสำหรับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้านั้น สามารถอธิบายได้จากสมการแมกซ์เวลล์ เมื่อพิจารณาภายในตัวกลางหนึ่ง สมมติให้มีแหล่งกำเนิด 2 ชุด ได้แก่  $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$  และ  $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$  ซึ่งกระแส  $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$  เป็นแหล่งกำเนิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  ในทำนองเดียวกันกระแส  $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$  เป็นแหล่งกำเนิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างสนามที่เกิดขึ้นจากแหล่งกำเนิดทั้งสองชุดนี้ภายในตัวกลางเดียวกันและความถี่เหมือนกันคือ

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \quad (3.40)$$

ซึ่งสมการ (3.40) ได้ถูกเรียกว่า ทฤษฎีภาวะย้อนกลับของลอเรนซ์ (Lorentz Reciprocity theorem) ในรูปแบบของสมการอนุพันธ์ นอกจากนี้ยังสามารถแสดงในรูปแบบของสมการอินทิกรัลได้คือ

$$\begin{aligned} & -\oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s}' \\ & = \iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2) dv' \end{aligned} \quad (3.41)$$

สำหรับบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด ( $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = 0$ ) ดังนั้นสมการ (3.40) และ (3.41) สามารถแสดงได้คือ

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = 0 \quad (3.42)$$

และ

$$\oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s}' = 0 \quad (3.43)$$

นอกจากนี้จากสมการ (3.41) เมื่อพิจารณาสนาม  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$  และแหล่งกำเนิด ซึ่งอยู่ภายในตัวกลางที่ถูกปิดล้อมโดยทรงกลมที่มีรัศมีเป็นอนันต์ สมมติให้แหล่งกำเนิดถูกวางอยู่ภายในพื้นที่จำกัดหนึ่ง และสนามได้ถูกสังเกตที่บริเวณสนามระยะไกล ดังนั้นด้านซ้ายของสมการ (3.41) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ หรือ

$$\oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s}' = 0 \quad (3.44)$$

ซึ่งสามารถดรูปรูปสมการ (3.41) ได้เป็น

$$\iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2) dv' = 0 \quad (3.45)$$

และสามารถจัดรูปสมการ (3.45) ได้คือ

$$\iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2) dv' = \iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1) dv' \quad (3.46)$$

จากสมการ (3.46) การอินทิกรัลในแต่ละด้านของสมการ จะใช้อธิบายให้เห็นถึงพลังงานการเชื่อมต่อหรือการแลกเปลี่ยนพลังงาน (Coupling energy) ระหว่างสนามที่เกิดขึ้นจากแหล่งกำเนิดอื่นที่ไม่ใช่แหล่งกำเนิดของตัวเอง เช่น สนาม  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  เกิดจากแหล่งกำเนิด  $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$  หรือสนาม  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  เกิดจากแหล่งกำเนิด  $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$  เป็นต้น โดยสามารถเขียนสมการใหม่เพื่ออธิบายถึงปฏิกิริยาพลังงาน (Energy reaction) ของสนาม  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  ที่เกิดจากแหล่งกำเนิด  $\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2$  ได้คือ

$$\langle 1, 2 \rangle = \iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2) dv' \quad (3.47)$$

ในทำนองเดียวกันสมการปฏิกิริยาพลังงานของสนาม  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  ที่เกิดจากแหล่งกำเนิด  $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$  สามารถแสดงได้คือ

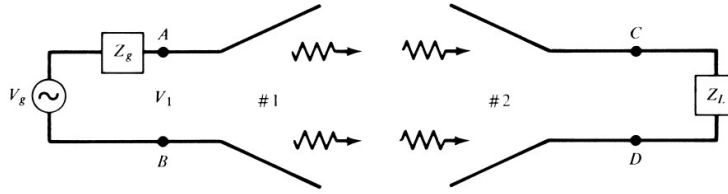
$$\langle 2, 1 \rangle = \iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1) dv' \quad (3.48)$$

ดังนั้นจากสมการ (3.46) จะได้

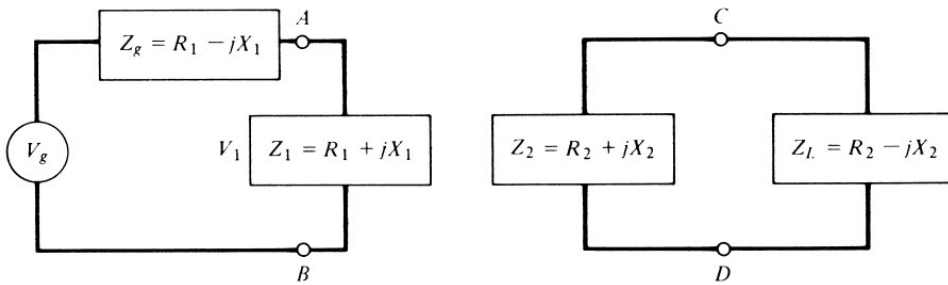
$$\langle 1, 2 \rangle = \langle 2, 1 \rangle \quad (3.49)$$

### 3.6.2 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับสำหรับสายอากาศสองตัว

ถ้าสมมติให้สายอากาศตัวที่ 1 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง และสายอากาศตัวที่ 2 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับดังแสดงในรูปที่ 3.3 ดังนั้นจากหลักการของทฤษฎีภาวะย้อนกลับที่กล่าวข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่าการรับส่งสัญญาณระหว่างสายอากาศสองตัว อัตราส่วนของกำลังงานในการส่งออกและกำลังงานที่รับได้ จะไม่มีการไม่เปลี่ยนแปลงถ้าสายอากาศตัวที่ 1 เปลี่ยนมาทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับและสายอากาศตัวที่ 2 เปลี่ยนมาทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่งแทน แต่จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ตัวกลางต้องเป็นแบบไอโซโทรปิกและแบบเชิงเส้นเท่านั้น เมื่อกำหนดให้วงจรสมมูลของสายอากาศแต่ละตัวแสดงดังรูปที่ 3.4 โดยที่สายอากาศตัวที่ 1 มีอินพุทอิมพีแดนซ์  $Z_1$  และสายอากาศตัวที่ 2 มีอินพุทอิมพีแดนซ์  $Z_2$  โดยแหล่งจ่ายมีอิมพีแดนซ์ภายใน  $Z_g$  และสมมติให้มีการคอนจูเกตแมตช์กับสายอากาศตัวที่ 1 ในขณะที่โหลดมีอิมพีแดนซ์ และสมมติให้มีการคอนจูเกตแมตช์กับสายอากาศตัวที่ 2



รูปที่ 3.3 ระบบการรับส่งสัญญาณระหว่างสายอากาศสองตัว



รูปที่ 3.4 ระบบสายอากาศสองตัวร่วมกับโหลดคอนจูเกต

กำลังงานที่แหล่งจ่ายป้อนให้กับสายอากาศตัวที่ 1 สามารถหาได้คือ

$$P_1 = \frac{1}{2} \text{Re} [V_1 I_1^*] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \left( \frac{V_g Z_1}{Z_1 + Z_g} \right) \left( \frac{V_g^*}{(Z_1 + Z_g)^*} \right) \right] = \frac{V_g^2}{8R_1} \quad (3.50)$$

ถ้าค่าแอดมิแตนซ์ถ่ายโอน (Transfer admittance) ที่เกิดขึ้นระหว่างสายอากาศตัวที่ 1 ผ่านอวกาศว่างไปยังสายอากาศตัวที่ 2 คือ  $Y_{21}$  จะทำให้ได้กระแสที่ไหลผ่านโหลดคือ  $V_g Y_{21}$  ดังนั้นกำลังที่ถูกส่งไปที่โหลดคือ

$$P_2 = \frac{1}{2} \text{Re} [Z_2 (V_g Y_{21}) (V_g Y_{21})^*] = \frac{1}{2} R_2 |V_g|^2 |Y_{21}|^2 \quad (3.51)$$

ดังนั้นจะได้อัตราส่วนกำลังที่รับได้โดยสายอากาศตัวที่ 2 ต่อกำลังที่ถูกส่งออกไปโดยสายอากาศ 1 คือ

$$\frac{P_2}{P_1} = 4R_1R_2 |Y_{21}|^2 \quad (3.52)$$

ในทางกลับกันหากสลับสายอากาศตัวที่ 2 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง และสายอากาศตัวที่ 1 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับ จะทำให้สมการ (3.52) เปลี่ยนเป็น

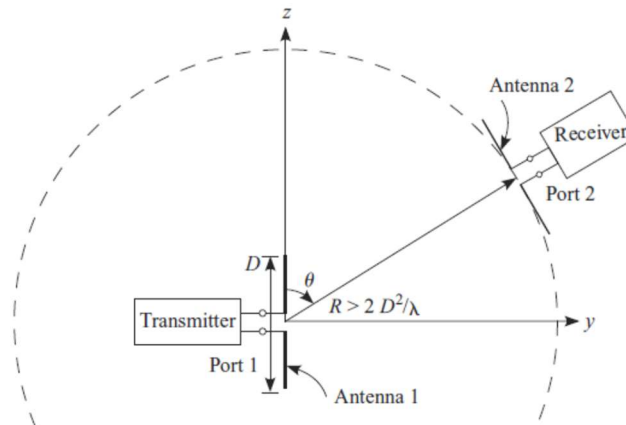
$$\frac{P_1}{P_2} = 4R_1R_2 |Y_{12}|^2 \quad (3.53)$$

ภายใต้เงื่อนไขภาวะย้อนกลับ ( $Y_{21} = Y_{12}$ ) ดังนั้นอัตราส่วนของกำลังในสมการ (3.52) และ (3.53) จึงยังคงมีค่าเท่าเดิม

### 3.6.3 ทฤษฎีภาวะย้อนกลับของแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ

แบบรูปการแผ่พลังงาน (แบบรูปกำลัง) ของสายอากาศคือ การกระจายของกำลังงานที่ถูกแผ่ออกไปในย่านสนามระยะไกลโดยเป็นฟังก์ชันของมุม ซึ่งสามารถหาได้โดยการวัดความหนาแน่นกำลังงานที่กระจายออกไป ณ ตำแหน่งองศาต่าง ๆ ที่รัศมีคงที่ค่าหนึ่งเมื่อวัดจากสายอากาศ โดยที่กำลังงานที่วัดได้จะถูกนำไปนอร์มอลไนด์เทียบกับกำลังงานสูงสุด ในทำนองเดียวกันเมื่อสายอากาศอยู่ในโหมดรับ กำลังงานที่ถูกส่งไปยังโหลดจะฟังก์ชันกับทิศทางของคลื่นระนาบตกกระทบเมื่อความหนาแน่นกำลังงานคงที่เมื่อ โพลาริเซชันได้ถูกกำหนด ซึ่งจะเรียกว่าแบบรูปการรับของสายอากาศ โดยทั่วไปแล้วแบบรูปการรับจะถูกนอร์มอลไนด์เทียบกับกำลังงานที่รับได้สูงสุด จากทฤษฎีภาวะย้อนกลับ (Reciprocity theorem) สามารถกล่าวได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศในโหมดส่งหรือโหมดรับจะมีลักษณะเหมือนกัน

พิจารณาสายอากาศไดโพลสองตัวดังแสดงในรูปที่ 3.3 เมื่อระยะห่างระหว่างสายอากาศทั้งสอง ( $R$ ) อยู่ในย่านสนามระยะไกล โดยสายอากาศตัวที่ 1 เชื่อมต่อกับเครื่องส่ง ส่วนสายอากาศตัวที่ 2 เชื่อมต่อกับเครื่องรับเพื่อทำการวัดกำลังงานที่รับได้ สมมติให้อิมพีแดนซ์ระหว่างสายอากาศส่งและเครื่องส่ง รวมทั้งอิมพีแดนซ์ระหว่างสายอากาศรับกับเครื่องรับมีการแมตช์อิมพีแดนซ์กัน เมื่อเครื่องส่งเชื่อมต่อกับสายอากาศตัวที่ 1 กำลังงานที่ถูกรับได้โดยสายอากาศตัวที่ 2 จะแปรผันโดยตรงกับความหนาแน่นกำลัง ณ ตำแหน่งที่สายอากาศอยู่ ดังนั้นเมื่อนำค่ากำลังงานที่รับได้ไปทำการพล็อตเทียบกับมุม  $\theta$  องศาต่าง ๆ ที่สายอากาศตัวที่ 2 มีการเคลื่อนที่ไปรอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 เมื่อรัศมีคงที่ก็จะได้แบบรูปการแผ่กำลังงานของสายอากาศตัวที่ 1



รูปที่ 3.5 การวัดแบบรูปการแผ่พลังงาน

ถ้าเราทำการเปลี่ยนตำแหน่งของเครื่องส่งและเครื่องรับ สายอากาศตัวที่ 2 จะทำหน้าที่สร้างคลื่นระนาบที่มีความหนาแน่นกำลังงานคงที่ไปยังสายอากาศตัวที่ 1 ด้วยมุมตกกระทบ  $\theta$  องศาต่าง ๆ ตามแนวการเคลื่อนที่ของสายอากาศตัวที่ 2 รอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 ดังนั้นเมื่อนำค่ากำลังงานที่รับได้โดยสายอากาศตัวที่ 1 ไปทำการพล็อตเทียบกับมุม  $\theta$  องศาต่าง ๆ ที่สายอากาศตัวที่ 2 มีการเคลื่อนที่ไปรอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 เมื่อรัศมี  $R$  คงที่ก็จะได้แบบรูปการแผ่กำลังงานของสายอากาศตัวที่ 1 เช่นเดียวกัน ดังนั้นแบบรูปการแผ่พลังงานจะไม่ขึ้นอยู่กัตำแหน่งของเครื่องส่งและเครื่องรับ โดยแบบรูปการแผ่พลังงานที่พล็อตได้จะมีค่าเหมือนกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศไม่ว่าจะอยู่ในโหมดส่งหรือโหมดรับจะให้ค่าเหมือนกัน

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติของการวัดแบบรูปการแผ่พลังงาน สายอากาศตัวส่งและตัวรับจะถูกวางในตำแหน่งที่ห่างกันในย่านสนามระยะไกล สำหรับการวัดแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศตัวที่ 1 จะไม่ใช้วิธีเคลื่อนสายอากาศตัวที่ 2 ไปรอบ ๆ สายอากาศตัวที่ 1 แต่จะใช้วิธีหมุนสายอากาศตัวที่ 1 รอบตัวเองและสายอากาศตัวที่สองวางอยู่กับที่ ซึ่งในทางปฏิบัติจะทำการต่อเครื่องรับเข้ากับสายอากาศตัวที่ 1 และเครื่องส่งต่อเข้ากับสายอากาศตัวที่ 2



## คำถามท้ายบทที่ 3

- ถ้า  $\mathbf{H}_e = j\omega\epsilon\nabla \times \Pi_e$  เมื่อ  $\Pi_e$  คือศักย์เอิร์ตเซียนไฟฟ้า จงแสดงว่า
  - $\nabla^2 \Pi_e + k^2 \Pi_e = j \frac{1}{\omega\epsilon} \mathbf{J}$       (ข)  $\mathbf{E}_e = k^2 \Pi_e + \nabla(\nabla \cdot \Pi_e)$
  - $\Pi_e = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \mathbf{A}$
- ถ้า  $\mathbf{E}_h = -j\omega\mu\nabla \times \Pi_h$  เมื่อ  $\Pi_h$  คือศักย์เอิร์ตเซียนแม่เหล็ก จงแสดงว่า
  - $\nabla^2 \Pi_h + k^2 \Pi_h = j \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{M}$       (ข)  $\mathbf{H}_h = k^2 \Pi_h + \nabla(\nabla \cdot \Pi_h)$
  - $\Pi_h = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \mathbf{F}$
- จงแสดงขั้นตอนทางคณิตศาสตร์เพื่อหาที่มาของสมการ (3.40) และ (3.41)