Analysis

Simon Krenger
Gilles Bertholet

January 30, 2013

Chapter 1

Folgen und Grenzwerte

1.1 Folgengesetze

Betrachten wir Zahlenfolgen wie

1. $5, 9, 13, 17, 21, ...$
2. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$
3. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, ...$
4. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

So fällt einerseits die Gesetzmässigkeit und andererseits ein immer vorhandenes erstes Element auf.

Definition 1. *Eine Folge ist eine Funktion mit $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge*

Für $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ schreiben wir bei Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = a(n) \tag{1.1}$$

Beispiel 1. $a_n = 3n + 7$ *ist das Gesetz für die Folge* $10, 13, 16, ...$

Das Gesetz einer Folge können wir so angeben, dass auf das vorangehende Folgenglied (Element) Bezug genommen wird. So erhalten wir das rekursive Gesetz.

Bei (1) lautet dies $a_{n+1} = a_n + 4$ und $a_1 = 5$ und bei (2) $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ und $b_1 = 9$.

Wir können aber auch ein Gesetz suchen, welches a_n mit Hilfe von n berechnet. Das nennen wir das explizite Gesetz.

Die Folge (3) ist eine alternierende Folge (abwechselnd + und −). Dann muss $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$ im expliziten Gesetz stehen.

Bei (3) also $a_n = (-1)^{n+2} \cdot 2^{n-4}$
Für die Folge (4) finden wir das rekursive Gesetz

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1, a_2 = 1 \tag{1.2}$$

für die Fibonacci-Folge. Das explizite Gesetz ist schwierig zu finden.

1.2 Teilsummen

Wenn wir die Elemente einer Folge addieren, so erhalten wir die n-te Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.3}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (\text{"Summe } a_k, \text{ k von 1 bis n"}) \tag{1.4}$$

Wollen wir zum Beispiel

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 \tag{1.5}$$

berechnen, so greifen wir auf die Idee von Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855, Göttingen) zurück.

$$\begin{aligned} s_{100} &= (1+100) + (2+99) + ... + (50+51) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wollen wir

$$s_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + ... + a_n \tag{1.7}$$

berechnen, so bestimmen wir die Teilsummenfolge.

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.8}$$

$$s_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{8+2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \tag{1.9}$$

$$s_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} = \frac{11+1}{8 \cdot 11} = \frac{12}{8 \cdot 11} = \frac{3}{22} \tag{1.10}$$

$$s_4 = \frac{3}{22} + \frac{1}{11 \cdot 14} = \frac{42+2}{2 \cdot 11 \cdot 14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = \frac{4}{28} \tag{1.11}$$

also finden wir

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \tag{1.12}$$

Wir beweisen mit vollständiger Induktion.

Beweis 1. *1. Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn*

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.13}$$

und s_n wird mit $n = 1$ zu

$$s_1 = \frac{1}{6 \cdot 1 + 4} = \frac{1}{10} \tag{1.14}$$

2. Voraussetzung:

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \tag{1.15}$$

Behauptung:

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{6(n+1)+4} = \frac{n+1}{6n+10} \tag{1.16}$$

Beweis:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \tag{1.17}$$

und wir müssen a_{n+1} bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \tag{1.18}$$

, also

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(3(n+1)-1)(3(n+1)+2)} && (1.19) \\ &= \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.20) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{n}{6n+4} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.21) \\ &= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.22) \\ &= \frac{3n^2+5n+2}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.23) \\ &= \frac{(3n+2)(n+1)}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.24) \\ &= \frac{n+1}{2(3n+5)} = \frac{n+1}{6n+10} && (1.25) \end{aligned}$$

3. Nach (1) ist die Behauptung für $n = 1$ wahr und nach (2) für $n + 1$, also für $n = 2$ usw. Also ist die Behauptung für alle $\mathbb{N}$ wahr.

Natürlich finden wir auch sofort

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = (1+n)\frac{n}{2} \tag{1.26}$$

1.3 Grenzwerte

Zeichnen wir die Elemente von

$$a_n = (-1)^n(2 + \frac{1}{n}) \tag{1.27}$$

auf der Zahlengeraden,

TODO

so häufen sich die Werte bei 2 und -2. Sowohl in der Nähe von 2 als auch -2 liegen unendlich viele Werte.

Definition 2. *Wir nennen*

$$U_\epsilon(a) := [a - \epsilon; a + \epsilon]; \epsilon \in \mathbb{R}^+ \tag{1.28}$$

eine <u>ϵ-Umgebung</u> von a.

Definition 3. *Finden wir in jeder ϵ-Umgebung einer Zahl a unendlich-viele Folgenglieder, so heisst a ein Häufungswert der Folge (a_n).*

Beispiel 2. *1.*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n} \\ &\rightarrow 2, 1.5, 1.\bar{3}, 1.25, 1.2, 1.16, 1.14\overline{2}857 \end{aligned} \tag{1.29}$$

also ist 1 ein Häufungswert.

2.

$$\begin{aligned} b_n &= 4n + 1 \\ &\rightarrow 5, 9, 13, 17, ... \end{aligned} \tag{1.30}$$

Also kein Häufungswert.

Besitzt eine Folge genau einen einzigen Häufungswert, so nennen wir diesen den <u>Limes</u> (Grenzwert) der Folge und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{1.31}$$

Beispiel 3. *1.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{1.32}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n(2 + \frac{1}{n}) \tag{1.33}$$

3.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \tag{1.34}$$

Definition 4. *Im Folgenden die Definition des Limes nach Cauchy (Louis Augustin Cauchy, 1789 bis 1857, Paris, Schweiz, Prag):*
Eine Zahlenfolge (a_n) besitzt den Grenzwert a, wenn für alle $\epsilon > 0$ von einem bestimmten n an, alle weiteren Folgenglieder in $U_\epsilon(a)$ liegen:

$$\epsilon \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N} : \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \to |a_n - a| < \epsilon) \tag{1.35}$$

Beispiel 4. $a_n = \frac{5}{n}$ *hat Grenzwert* $a = 0$
Ist $\epsilon = \frac{1}{100}$, *so wird* $n_0 = 500$, *denn von* a_{501} *an sind alle Folgenglieder zwischen* $0,01$ *und* 0.

Definition 5. *Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heisst sie <u>konvergent</u>, andernfalls <u>divergent</u>. Folgen mit Grenzwert* 0 *heissen <u>Nullfolgen</u>.*

Beispiel 5. *Wir untersuchen diese Folgen:*

1.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=0, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{1.36}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}=0, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{1.37}$$

3.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0, k\in\mathbb{N} \tag{1.38}$$

4.
$$\lim_{n\to\infty}2^n \tag{1.39}$$

existiert nicht, die Folge $a_n = 2^n$ *<u>wächst über alle Schranken</u>; sie ist also divergent.*

5.
$$\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2 \tag{1.40}$$

6.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2} = \lim_{n\to\infty}3 + \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 3 \tag{1.41}$$

7.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-7}{3n+1} \neq \frac{\lim_{n\to\infty}4n-7}{\lim_{n\to\infty}3n+1} \tag{1.42}$$

Wir brauchen die Grenzwertsätze. Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist

1.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \tag{1.43}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b \tag{1.44}$$

3.
$$\forall n(b_n \neq 0) \wedge b_n \neq 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \tag{1.45}$$

Um
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{6n+1} \tag{1.46}$$
zu berechnen, überlegen wir, dass Brüche gekürzt werden können und kürzen mit n.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{6n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n-2}{n}}{\frac{6n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{6n}{n} + \frac{1}{n}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{n}}{6 + \frac{1}{n}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(5 - \frac{2}{n})}{\lim_{n\to\infty}(6 + \frac{1}{n})} = \frac{5}{6}\end{aligned} \tag{1.47}$$

Beispiel 6. *Wir kürzen jeweils mit der Variabel (n) mit der höchsten Potenz:*

1.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{4n^2-3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{3}{n^2}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(4 - \frac{3}{n^2})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.48}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+5}{n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}} \tag{1.49}$$

existiert nicht.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{2n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 - \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} &= \frac{1+\sqrt{1}}{1-\sqrt{2}} = \frac{2}{1-\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{1.50}$$

Um
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \tag{1.51}$$
zu berechnen, bestimmen wir

$a_{100} = 2,70481...$, $a_{1000} = 2,7169...$

und finden, dass die Folge beschränkt ist. Es ist
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^1 = e \tag{1.52}$$
und $e = 2,71828...$ ist irrational und transzendent.

Beispiel 7. *Wir betrachten*

1.
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{5n})^{5n} = e \tag{1.53}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{3}})^{\frac{n}{3}} = e \tag{1.54}$$

3.
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{4n} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n]^4 = e^4 \tag{1.55}$$

Wollen wir
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n, k\in\mathbb{Z} \tag{1.56}$$
berechnen, so überlegen wir, dass
$$1+\frac{k}{n})1+\frac{1}{\frac{n}{k}} \tag{1.57}$$
und finden
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}} = e \tag{1.58}$$
Weiter ist dann
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{k}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}}]^k = e^k \tag{1.59}$$
und damit
$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{-1}{n})^n = e^{-1} \tag{1.60}$$
Zusammengefasst
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \tag{1.61}$$
$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} = e^{-1} \tag{1.62}$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = e^k, k\in\mathbb{Z} \tag{1.63}$$

1.4 Reihen

Definition 6. *Ist* (a_n) *eine Folge, so heisst*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... \tag{1.64}$$

eine Reihe.

Wollen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... \tag{1.65}$$

bestimmen, so nützen wir

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \tag{1.66}$$

aus und erhalten so

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = 1 \end{aligned} \tag{1.67}$$

Um die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \tag{1.68}$$

zu berechnen, bestimmen wir die Teilsummenfolge (Partialsummenfolge)

$s_1, s_2, s_3, ...$

und überlegen dann, ob diese Folge einen Grenzwert besitzt.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + ... + a_n \end{aligned} \tag{1.69}$$

und so

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{10} \\ s_2 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{8+2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} (= \frac{2}{16}) \\ s_3 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} = \frac{12}{8 \cdot 11} = \frac{3}{22} \end{aligned} \tag{1.70}$$

, also

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \tag{1.71}$$

und so

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n+4} = \frac{1}{6} \tag{1.72}$$

Wir sagen dann, dass die Reihe konvergent ist und der Wert der Reihe ist $\frac{1}{6}$.

Definition 7. *Wir nennen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... \quad \text{mit} \quad q \neq 0, 1 \tag{1.73}$$

eine geometrische Reihe.

Beispiel 8. *1.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + ... \tag{1.74}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(\frac{1}{3})^{n-1} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + ... \tag{1.75}$$

Es ist also der Quotient $q \neq 0, 1$ zweier aufeinanderfolgenden Glieder stets gleich. Um Den Wert der Reihe zu bestimmen, betrachten wir

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1} \\ -(q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^n) \end{aligned} \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= a_1 - a_1 \cdot q^n \\ s_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \end{aligned} \tag{1.77}$$

Damit

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad \text{mit} \quad q \neq 0, 1 \tag{1.78}$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \tag{1.79}$$

und für $q > 1 \vee q < -1$ existiert der Grenzwert nicht. Für $-1 < q < 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{, da} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \tag{1.80}$$

Also ist der Wert der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{mit} \quad -1 < q < 1 \tag{1.81}$$

Beispiel 9.

$$2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... = \frac{2}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3} \tag{1.82}$$

Definition 8. *Wir nennen*

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \tag{1.83}$$

die harmonische Reihe.

s ist nicht konvergent, denn es ist

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \tag{1.84}$$

und

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0,5837... > \frac{1}{2} \tag{1.85}$$

und

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840} = 0.634... > \frac{1}{2} \tag{1.86}$$

also

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... \tag{1.87}$$

So ist s divergent! Hingegen ist

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \tag{1.88}$$

und

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.89}$$

und die Leibnizsche Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \frac{\pi}{4} \tag{1.90}$$

1.5 Stetigkeit

Wir wollen für eine Funktion

$$f : D_f \mapsto \mathbb{R} \tag{1.91}$$

den Grenzwert

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{1.92}$$

bestimmen. Dazu brauchen wir eine Folge

$$x_1, x_2, x_3, ... \tag{1.93}$$

mit Grenzwert a.

TODO: Graph

Nun bestimmen wir die Folge

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), ... \tag{1.94}$$

und suchen deren Limes.

TODO: Graph

Bei der Funktion g mit einer <u>Sprungstelle bei a</u> hat

$$g(x_1), g(x_2), ... \tag{1.95}$$

den Limes b. Aber

$$g(x_1{}'), g(x_2{}'), ... \tag{1.96}$$

hat den Limes c. Also existiert

$$\lim_{x \to a} g(x) \tag{1.97}$$

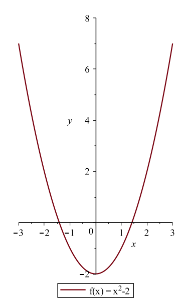
nicht. Beide Reihen $(x_1, x_2, x_3, ...)$ $(x_1{}', x_2{}', x_3{}')$ müssen den gleichen Grenzwert besitzen.
Um

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{1.98}$$

zu bestimmen, müssen <u>alle</u> Folgen von x-Werten mit Grenzwert a betrachtet werden. Wenn die Folgen der zugehörigen Funktionswerte alle denselben Limes besitzen, so ist dies $\lim_{x \to a} f(x)$.

Beispiel 10. *1.*

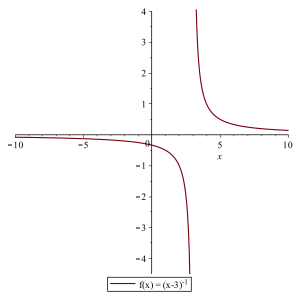
$$\lim_{x \to 1} x^2 - 2 \tag{1.99}$$



$$\lim_{x \to 1} x^2 - 2 = 1^2 - 2 = -1 \tag{1.100}$$

2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3} \tag{1.101}$$



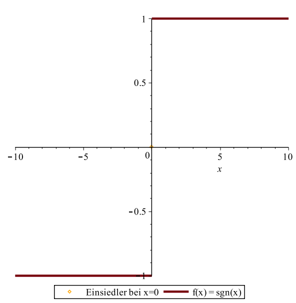
$g(x)=\frac{1}{x-3}$ besitzt einen <u>Pol bei $x=3$</u>, also existiert $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$ nicht.

3.

$$\lim_{x\to 0} sgn(x) \quad (\text{"Signum von } x\text{"}) \tag{1.102}$$

Es ist

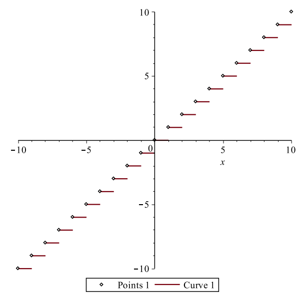
$$sgn(x) := \begin{cases} -1 & , \text{falls } x<0 \\ 0 & , \text{falls } x=0 \\ 1 & , \text{falls } x>0 \end{cases}$$



$f:\mathbb{R}\mapsto\{-1,0,1\}$ mit $f(x)=sgn(x)$ besitzt für $x=0$ einen <u>isolierten Punkt (Einsiedler)</u>. Also existiert $\lim_{x\to 0} sgn(x)$ nicht.

4.

$$f(x)=[x] \quad (\text{"Gausssche Klammer"}) \tag{1.103}$$



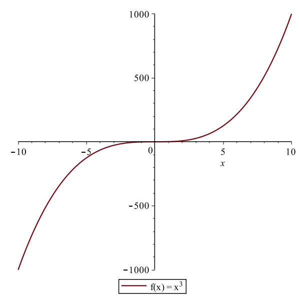
Besitzt eine Funktion weder isolierte Punkte noch Sprungstellen, so ist sie stetig.

Definition 9. *Eine Funktion $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ heisst stetig an der Stelle $a \in D_f$, wenn*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1.104}$$

Beispiel 11. *1.*

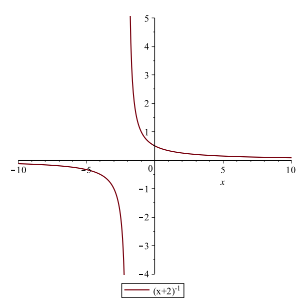
$$f(x) = x^3 \tag{1.105}$$



f ist überall stetig.

2.

$$g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad g(x) = \frac{1}{x+2} \tag{1.106}$$



g ist überall stetig, denn die Stetigkeit kann nur für Werte aus der Definitionsmenge untersucht werden! Zitat Müller: "Man muss den Funktionswert berechnen können. Kann man das, so ist die Funktion stetig".

Chapter 2

Differentialrechnung

2.1 Differentialquotient

Wir betrachten eine stetige Funktion

$$f : D_f \mapsto \mathbb{R} \tag{2.1}$$

und suchen die Steigung der Tangente an dem Graphen an der Stelle $x_0 \in D_f$.

TODO

Die Tangente ist eine spezielle Lage der Sekante. Die Steigung der Sekante ist

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.2}$$

, was wir den Differentialquotienten nennen. Wird h immer kleiner, so nähert sich die Sekante der Tangente. Also ist die Tangentensteigung

$$m_t = \lim_{n \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.3}$$

Definition 10. *Wir nennen*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} := \lim_{n \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \textit{("dy nach dx")} \tag{2.4}$$

den Differentialquotienten.

Beispiel 12. *1.* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^2$ *und* $x_0 = 2$

Mit

$$f(x_0) = f(2) = 4f(x_0 + h) = f(2 + h) = (2 + h)^2 \tag{2.5}$$

wird

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &:= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h} && (2.6)\\
&:= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} && (2.7)\\
&:= \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} && (2.8)\\
&:= \lim_{h\to 0} 4+h && (2.9)\\
&:= \underline{4} && (2.10)
\end{aligned}$$

2. *$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x}$ und $x_0 = -3$*

   Mit

$$g(x_0) = g(-3) = -\frac{1}{3} \tag{2.11}$$

   und

$$g(x_0+h) = g(-3+h) = \frac{1}{h-3} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h-3} - (-\frac{1}{3})}{h} && (2.13)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h-3} + \frac{1}{3}}{h} && (2.14)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3+h-3}{3(h-3)}}{\frac{h}{1}} && (2.15)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3+h-3}{3h(h-3)} && (2.16)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{3h(h-3)} && (2.17)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{3(h-3)} && (2.18)\\
&= \underline{-\frac{1}{9}} && (2.19)
\end{aligned}$$

3. *Gleichung der Tangente in $x_0 = 1$, wenn $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$*

   Steigung mit

$$f(x_0) = f(1) = 1 \tag{2.20}$$

   und

$$f(x_0+h) = f(1+h) = (1+h)^3 = h^3 + 3h^2 + 3h + 1 \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3+3h^2+3h+1-1}{h} &(2.22)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(h^2+3h+3)}{h} &(2.23)\\
&= \lim_{h\to 0} h^2+3h+3 &(2.24)\\
&= \underline{3} &(2.25)
\end{aligned}$$

Wir kennen den Berührungspunkt $B(x_0/f(x_0)) = B(x_0/y_0)$ der Tangente an den Graphen.
Ist $y = mx + q$, so wird

mit B:

$$\begin{aligned}
y_0 &= m \cdot x_0 + q \\
q &= y_0 - m \cdot x_0 &(2.26)
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
y &= mx + y - mx_0 \\
y - y_0 &= mx - mx_0 \\
y - y_0 &= m(x - x_0) &(2.27)
\end{aligned}$$

Dies nennen wir die Punktsteigungsform der Geraden. Im Beispiel ist $m = 3$ und $B(1/1)$, also

$$\begin{aligned}
t: &\quad y - 1 = 3(x-1) \\
t: &\quad y = 3x - 2 &(2.28)
\end{aligned}$$

2.2 Ableitung

Wir berechnen den Differentialquotienten für einen beliebigen Wert $x_0 \in D_f$.
Ist $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x_0 + h \\
&= \underline{2x_0} &(2.29)
\end{aligned}$$

Ist $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0)^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 + x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2 \\
&= \underline{3x_0^2} \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Ist $h : \mathbb{R} \mapsto \{2\}$ mit $h(x) = 2$, So ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ Ist $i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $i(x) = x$ so ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$

Wie haben also jedem $x_0 \in D_f$ den Differentialquotienten zugeordnet und so eine Funktion gebildet. Schreiben wir x anstatt x_0, so erhalten wir die <u>1. Ableitung</u>.

Definition 11. *Ist $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$, so heisst*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2.31)$$

die <u>1. Ableitung</u> von f.

Wir kennen also schon

$$\begin{aligned}
f(x) = k &\quad\to\quad f'(x) = 0 \quad (k \in \mathbb{R}) &(2.32)\\
f(x) = x &\quad\to\quad f'(x) = 1 &(2.33)\\
f(x) = x^2 &\quad\to\quad f'(x) = 2x &(2.34)\\
f(x) = x^3 &\quad\to\quad f'(x) = 3x^2 &(2.35)
\end{aligned}$$

Satz 1.

$$f(x) = x^n \mapsto f'(x) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N} \qquad (2.36)$$

Beweis 2. *Mit*

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h)^n \\
&= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + h^n \\
&= h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) \\
&= nx^{n-1} \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 13.

$$f(x) = x^5 - x^3 \rightarrow f'(x) = 5x^4 - 3x^2 \tag{2.40}$$

Die Ableitung ist ein Grenzwert und deshalb können wir die Grenzwertsätze zum teil übertragen:

$$k \in \mathbb{R} : (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \tag{2.41}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{2.42}$$

Beispiel 14. *Wir wenden diese Sätze an Beispielen an:*

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 + 2x^3 - 6x + 8 \\ \rightarrow f'(x) &= (5x^4)' + (2x^3)' - (6x)' + (8)' \\ &= 5(x^4)' + 2(x^3)' - 6(x)' + 0 \\ &= 5(4x^3) + 2(3x^2) - 6 \\ &= 20x^3 + 6x^2 - 6 \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^3}{7} + \frac{x^2}{9} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{7}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{2}x \\ \rightarrow g'(x) &= \frac{3x^2}{7} + \frac{2x}{9} - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.44}$$

3. TODO

4. TODO

Treten noch Parameter auf, so wird oft die Schreibweise nach Leibniz gewählt.

Beispiel 15. *TODO*

Betrachten wir den Graphen einer Polynomfunktion f

TODO

So finden wir Punkte mit horizontalen Tangenten; es ist also

$$f'(x) = 0 \tag{2.45}$$

in

- den Hochpunkten H_1, H_2
- Terrassenpunkt (Scheitelpunkt S
- Tiefpunkt T

Beispiel 16. *Skizziere den Graphen von*

1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad f(x) = 3x - x^3$
Mit TODO

2.3 Ganzrationale Funktionen

Definition 12. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad ; \quad a_k \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.46}$$

heisst ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades.

Suchen wir die Nullstellen, so müssen wir eine Gleichung n-ten Grades lösen; diese ist bekanntlich für $n \geq 5$ nur durch Näherung lösbar (Nils Henrik Abel).

Manchmal können wir aber in Faktoren zerlegen, wie bei

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 30x \tag{2.47}$$

$f(x) = 0$, wenn

$$\begin{aligned} x(x^2 - 11x + 30) &= 0 \\ x(x-5)(x-6) &= 0 \\ \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 6 & \end{aligned} \tag{2.48}$$

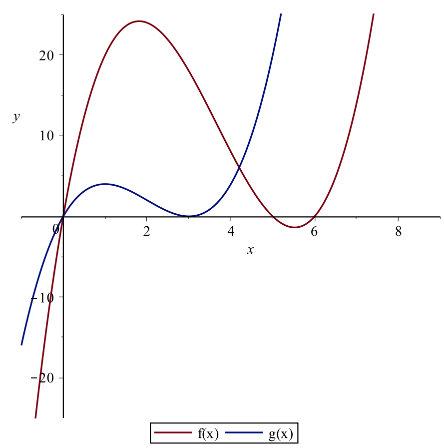
Auch bei

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \tag{2.49}$$

zerlegen wir in Faktoren.
$g(x) = 0$, wenn

$$\begin{aligned} x(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ x(x-3)(x-3) &= 0 \\ \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 3 & \end{aligned} \tag{2.50}$$

Wie unterscheiden sich G_f und G_g?



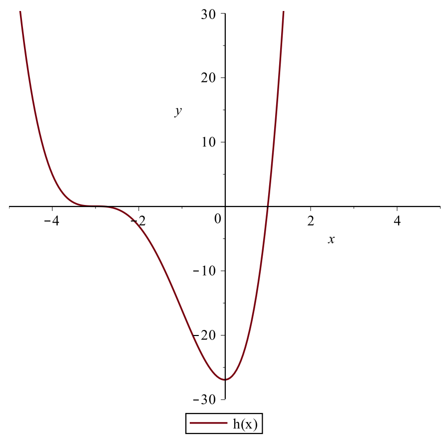
Der G_g berührt bei $x = 3$ die x-Achse. Wir nennen $x_{2,3} = 3$ eine doppelte Nullstelle.

Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x) = (x-1)(x+3)^3 \tag{2.51}$$

besitzt

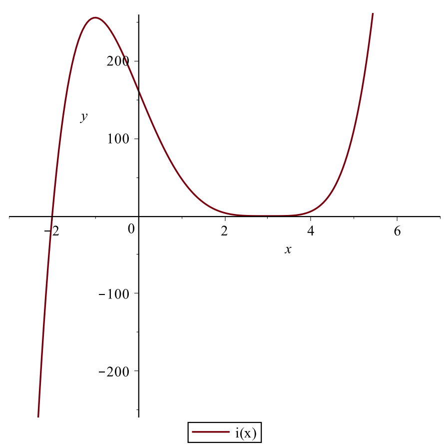
- eine einfache Nullstelle $x_1 = 1$
- die dreifache Nullstelle $x_{2,3,4} = -3$



Der Graph besitzt einen Terrassenpunkt. Ist die Nullstelle vierfach wie bei

$$i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad i(x) = (x+2)(x-3)^4 \tag{2.52}$$

so besitzt der Graph einen Flachpunkt auf der x-Achse.



Satz 2. *Es gilt auch*

$$f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1} \quad \textit{gilt für} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.53}$$

Beweis mit vollständiger Induktion.

Satz 3. *Weiter ist*

$$f(x) = x^r \to f'(x) = r \cdot x^{r-1} \quad \textit{gilt für} \quad r \in \mathbb{Q} \tag{2.54}$$

Beweis siehe Literatur.

Beispiel 17.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + (-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

2.4 Höhere Ableitungen und Kurvendiskussion

Ist f eine differenzierbare Funktion und f' ihre 1. Ableitung, so können wir f' erneut ableiten und erhalten die <u>2. Ableitung f"</u>. Fahren wir so fort, so entstehen f'', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ ... und schliesslich die <u>n-te Ableitung $f^{(n)}$</u>.

Beispiel 18.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x + 10 \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
\to f'(x) &= 12x^2 + 4x - 6 \\
f''(x) &= 24x + 4 \\
f'''(x) &= 24 \\
f^{(4)}(x) &= f^{(5)}(x) = f^{(n)}(x) = 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Welche Informationen für f erhalten wir mit f''?

TODO

- Ist $f'(x) = 0$ und $f'(x) < 0$, so besitzt f ein <u>relatives Maximum</u> und G_f einen <u>Hochpunkt</u>. (Bsp: x_2)

- Ist $f'(x) = 0$und $f''(x) > 0$, so besitzt f ein relatives Minimum und G_f einen Tiefpunkt. (Bsp: x_1, x_3)
- Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, so besitzt G_f einen Terassenpunkt. (Bsp: x_3)
- Ist $f''(x) > 0$, so ist G_f konvex oder linksgekrümmt.
- Ist $f''(x) < 0$, so ist G_f konkav oder rechtsgekrümmt.
- Ist $f''(x) = 0$, so besitzt G_f einen Wendepunkt

Bei einer Kurvendiskussion bestimmen wir

- Nullstellen ($f(x) = 0$)
- Extremwerte (mit horizontalen Tangenten ($f'(x) = 0$))
- Wendepunkte ($f''(x) = 0$)
- Graph

Beispiel 19. *1. TODOs*

2. TODO

2.5 Extremalwertprobleme

Stellen wir uns die Frage nach dem kleinsten Benzinverbrauch, dem grössten Gewinn usw. und gelingt es uns, das Problem mit Hilfe einer Funktion zu formulieren, so können wir die Lösung mit der Differenzialrechnung finden.

TODO

Wie müssen wir Länge und Breite wählen, um mit 400m Maschendrahtzaun die grösstmögliche Fläche zu umzäunen?

1. Gesuchte Grösse berechnen
$$F = a \cdot b \tag{2.58}$$

2. Eine der auftretenden Grössen als Variable wählen

   b sei die Variable

3. Alle anderen Grössen mit Hilfe der Variablen und den bekannten Werten bestimmen

$$\begin{aligned} a + 2b &= 400 \\ a &= 400 - 2b \end{aligned} \tag{2.59}$$

4. Funktion und Definitionsmenge bestimmen

$$\begin{aligned} F(b) &= (400-2b)\cdot b \\ &= 400b - 2b^2 \end{aligned} \tag{2.60}$$

mit

$$\begin{aligned} D_f &= \{b \mid 0 < b < 200 \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R}\} \\ &=]0;200[\end{aligned} \tag{2.61}$$

TODO: Graphs

5. Extremwerte berechnen

$$F'(b) = 400 - 4b \tag{2.62}$$

$F'(b)$ ist 0, wenn $b = 100$

6. Lösung diskutieren und alle gesuchten Grössen berechnen

$b \in D_f$ und mit $F''(b) = -4$ wird $F''(100) < 0$, also ist bei $b = 100$ ein lokales Maximum.
Also ist $b = 100, a = 200$ und $F_{max} = 20000$

Wählen wir einen Halbkreis, also ist

$U = 400 = r \cdot \pi \rightarrow r = \frac{400}{\pi}$

und so

$$F(Halbkreis) = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\frac{400}{\pi})^2 = \frac{400^2}{2\pi} = 25464,79 \tag{2.63}$$

Beweis 3. *Beweis der Ableitung $f'(x)$: Wir beweisen mit vollständiger Induktion.*

1. *Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn*

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^1 - x^1}{h} = \frac{h}{h} = 1 \tag{2.64}$$

und

$$1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \tag{2.65}$$

2. *Voraussetzung:*

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1} \tag{2.66}$$

Behauptung:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{(n+1)} - x^{(n+1)}}{h} = n \cdot x^{n-1} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \frac{x^{n+1}h^0 + (n+1)x^n h^1 + ... + (n+1)x^1 h^n + x^0 h^{n+1} - x^{(n+1)}}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} (n+1) \cdot x^n + ... + x^0 h^n \\
= \quad & (n+1)x^n \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

und

$$(n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = (n+1)x^n \qquad (2.68)$$

3. *Nach (1) gilt die Behauptung für $n = 1$ und nach (2) gilt sie für $n+1$, falls sie für n gilt. Also gilt sie für $n = 2$ und nach (2) für $n+1$, ist 3 usw. Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.*

$\square$

2.6 Winkelfunktionen, Produktregel

Wir suchen die Ableitung von

$$f : \mathbb{R} \mapsto [-1; 1] \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x \qquad (2.69)$$

Mit

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \qquad (2.70)$$

und

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) \qquad (2.71)$$

wird

$$
\begin{aligned}
\sin(x+h) - \sin x \quad &= \quad 2 \cdot \cos(\frac{x+h+x}{2}) \cdot \sin(\frac{(x+h)-x}{2}) \\
&= \quad 2 \cdot \cos(\frac{2x+h}{2}) \sin(\frac{h}{2}) \qquad (2.72)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
f'(x) \quad &= \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot (2\cos(\frac{2x+h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2}) \\
&= \quad \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cdot (\cos(\frac{2x+h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2}) \\
&= \quad \lim_{h\to 0} \cos(\frac{2x+h}{h}) \cdot \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \qquad (2.73)
\end{aligned}
$$

Um $\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ zu bestimmen, betrachten wir den Sinus im Einheitskreis bei 0.

TODO: Zeichnung

Ist α im Bogenmass, so ist

$$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha \tag{2.74}$$

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{2.75}$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \tag{2.76}$$

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha \tag{2.77}$$

$$1 \geq \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \lim_{\alpha\to 0} \cos\alpha \tag{2.78}$$

$$1 \geq \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq 1 \tag{2.79}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \tag{2.80}$$

Schliesslich finden wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$f(x) = \sin x \quad \to \quad f'(x) = \cos x \tag{2.82}$$

Analog finden wir

$$g(x) = \cos x \quad \to \quad g'(x) = -\sin x \tag{2.83}$$

Beispiel 20. *1.*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 3\cdot\cos x \\ \to f'(x) &= 2x - 3\cdot\sin x \end{aligned} \tag{2.84}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin(7\alpha)}{4\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\frac{7}{4}\sin(7\alpha)}{\frac{7}{4}\cdot 4\alpha} \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\frac{7}{4}\sin(7\alpha)}{7\alpha} \\ &= \frac{7}{4} \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin(7\alpha)}{7\alpha} \\ &= \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4} \end{aligned} \tag{2.85}$$

3.

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin(2\beta)}{cos\beta} = \lim_{\beta\to 0}\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} = \lim_{\beta\to 0} 2\sin\beta = 0 \tag{2.86}$$

Um $f(x) = \sin(2x)$ ableiten zu können, formen wir zu

$$f(x) = 2\cdot\sin x\cos x \tag{2.87}$$

um. Wir brauchen also eine Regel, um das Produkt

$$h'(x) = f(x)\cdot g(x) \tag{2.88}$$

zweier Funktionen ableiten zu können. Es ist

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \end{aligned} \tag{2.89}$$

Damit finden wir die Produktregel:

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{2.90}$$

Beispiel 21. *Berechne die Ableitung von*

1.

$$f(x) = x^2\cdot\cos(x) \tag{2.91}$$
$$u(x) = x^2 \tag{2.92}$$
$$v(x) = \cos(x) \tag{2.93}$$

Mit

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2x \\ v'(x) &= -\sin(x) \end{aligned} \tag{2.94}$$

finden wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cdot\cos(x) + x^2\cdot(-\sin(x)) \\ &= 2x\cdot\cos(x) - x^2\cdot\sin(x) \end{aligned} \tag{2.95}$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\ &= 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= 2\cos(2x) \end{aligned} \tag{2.96}$$

Wir werden zeigen, dass

$$(\sin(k \cdot x))' = k \cdot \cos(k \cdot x), \quad k \in \mathbb{R} \tag{2.97}$$

Es wird also

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned} \tag{2.98}$$

und mit

$$i(x) = \sin^2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x) \tag{2.99}$$

wird

$$\begin{aligned} i'(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) \\ &= 2\sin(x) \cdot \cos(x) \\ &= \sin(2x) \end{aligned} \tag{2.100}$$

Damit erhalten wir

$$h'(x) = -2\sin(2x) \tag{2.101}$$

Diskutiere die Funktion

$$f : [0; 2\pi] \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x) \tag{2.102}$$

TODO: Exmaple fertig

Chapter 3

Integralrechnung

3.1 Stammfunktion

Wir kennen die Abbildung f' einer differenzierbaren Funktion f und suchen $f(x)$.
Ist

$$f'(x) = x^3 - x^2 + x + 4 \tag{3.1}$$

so wird

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \tag{3.2}$$

Ist $g'(x) = \cos(x)$, so ist $g(x) = \sin(x)$. Aber auch

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 11 \tag{3.3}$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \sqrt{17} \tag{3.4}$$

und

$$g(x) = \sin(x) + 9 \tag{3.5}$$

$$g(x) = \sin(x) - \frac{7}{11} \tag{3.6}$$

Definition 13. *Ist $f(x)$ die Ableitung einer Funktion $F(x)$, so heisst F eine <u>Stammfunktion</u> von f:*

$$F'(x) = f(x) \tag{3.7}$$

Die Menge aller Stammfunktionen heisst <u>unbestimmtes Integral</u>, wofür wir

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{3.8}$$

schreiben. Dabei heisst

- *$f(x)$ der Integrand*
- *$\mathrm{d}x$ das Differential*
- *$C \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstante*

Beispiel 22. *Wir berechnen die unbestimmten Integrale:*

1.

$$\int 4x^3 - 3x \,\mathrm{d}x = x^4 - \frac{3x^2}{2} + C \tag{3.9}$$

2.

$$\int 2\cos(x) + 3\sin(x) \,\mathrm{d}x = 2\sin(x) - 3\cos(x) + C \tag{3.10}$$

3.

$$\int at^2 + bt + c \,\mathrm{d}t = a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct + D \tag{3.11}$$

$$\int at^2 + bt + c \,\mathrm{d}a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + bta + ca + D \tag{3.12}$$

Die Regeln der Differenzialrechnung übertragen sich auf die Integralrechnung

1.

$$\int f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

2.

$$k \in \mathbb{R} : \int k \cdot f(x) \,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x) \,\mathrm{d}x \tag{3.14}$$

3.

$$\int x^p \,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad ; \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \tag{3.15}$$

Beispiel 23. *TODO: Beispiel*

3.2 Flächeninhalte

Welchen Inhalt besitzt die durch den Graphen von

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+ \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2 \tag{3.16}$$

die Gerade $x = b$ $(b > 0)$ und die x-Achse begrenzte Fläche?

TODO: Grafik

Wir machen eine Näherung mit n Rechtecken der Breite $\frac{b}{n}$, und zwar solche die "zu gross" sind mit Flächeninhalt $F_i (i = 1, 2, 3, ..., n)$ und solche, die "zu klein" sind mit Flächeninhalt $f_k(k = 1, 2, 3, ..., n)$ um den gesamten Flächeninhalt F von oben und unten zu nähern.

TODO: Grafik

mit

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \quad , \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \tag{3.17}$$

Es ist

$$F_1 = \frac{b}{n} \cdot f(\frac{b}{n}) = \frac{b}{n}(\frac{b}{n})^2 = \frac{b^3}{n^3} \tag{3.18}$$

$$F_2 = \frac{b}{n} \cdot f(\frac{2b}{n}) = \frac{b}{n} \cdot \frac{4b^2}{n^2} = 4 \cdot \frac{b^3}{n^2} \tag{3.19}$$

$$...$$

$$F_k = \frac{b}{n} \cdot f(\frac{k \cdot b}{n} = k^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} \tag{3.20}$$

$$...$$

$$F_n = \frac{b}{n} \cdot f(\frac{n \cdot b}{n} = \frac{b}{n} \cdot b^2 = n^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} \tag{3.21}$$

und so wird die <u>Obersumme</u> $O_n := F_1 + F_2 + ... + F_n$

$$O_n = \frac{b^3}{n^3} + 4 \cdot \frac{b^3}{n^3} + 9 \cdot \frac{b^3}{n^3} + ... + n^2 + \frac{b^3}{n^3} \tag{3.22}$$

$$O_n = \frac{b^3}{n^3}(1 + 4 + 9 + ... + n^2) \tag{3.23}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= F_1 \quad \text{und} \quad \text{allgemein: } f_i = F_{i-1} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Also

$$f_2 = \frac{b^3}{n^3}, f_3 = 4 * \frac{b^3}{n^3}, ..., f_n = (n-1)^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} \tag{3.25}$$

und so wird die <u>Untersumme</u> $U_n := f_1 + f_2 + ... + f_n$

$$U_n = \frac{b^3}{n^3}(1 + 4 + 9 + 16 + ... + (n-1)^2) \tag{3.26}$$

Es ist

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3.27}$$

(Siehe Diskrete Mathematik, Kapitel 3.2 für Formel) und erhalten damit

$$O_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3.28}$$

$$O_n = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \tag{3.29}$$

Mit

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \tag{3.30}$$

wird

$$U_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \tag{3.31}$$

$$U_n = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \tag{3.32}$$

Nun vergrössern wir die Zahl der Rechtecke, um eine bessere Näherung zu erhalten.
Ist

$$\forall n \in \mathbb{N} : O_{n+1} < O_n \tag{3.33}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n \tag{3.34}$$

$$\lim_{n\to\infty} (O_n - U_n) = 0 \tag{3.35}$$

so erhalten wir eine Intervallschachtelung für den gesuchten Flächeninhalt F.

TODO: Grafik

$$[U_1; 0] \supset [U_2; O_2] \supset [U_3; O_3] \supset ... \tag{3.36}$$

Betrachten wir die Skizze, so sehen wir, dass 3.33 und 3.34 erfüllt sind und an der Stelle von 3.35 können wir auch $\lim_{n\to\infty} U_n$ und $\lim_{n\to\infty} O_n$ bestimmen. Sind diese Limites gleich, so ist 3.35 erfüllt und F gefunden.

Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} O_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{b^3}{3} \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \\ &= \frac{b^3}{6}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n} \\ &= \frac{b^3}{6}\cdot \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) \\ &= \frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{b^3}{3} \qquad (3.38)\end{aligned}$$

Also ist

$$F = \frac{b^3}{6} \qquad (3.39)$$

Es ist ja

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C \qquad (3.40)$$

und deshalb definieren wir das bestimmte Integral

$$\int_0^b x^2 \mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} \qquad (\text{"Integral von 0 bis b"}) \qquad (3.41)$$

mit der unteren Grenze 0 und der oberen Grenze b.

3.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kann ein bestimmtes Integral mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden?

Hauptsatz: Ist f eine integrierbare Funktion und $[a;b] \subset D_f$, so ist

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad (3.42)$$

, wobei $F'(x) = f(x)$

Beweisidee:

TODO: Grafik

Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x \qquad (3.43)$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= f(\xi) \quad \text{mit} \quad x_0 < \xi < x_0 + h \\
\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} f(\xi) \\
F'(x) &= f(x) \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Beispiel 24. *Beispiele zu bestimmten Integralen:*

1.
$$\int_1^4 x^3 + x^2 \mathrm{d}x \qquad (3.45)$$

Es ist $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$ *und damit wird*

$$F(b) = F(4) = \frac{4^4}{4} + \frac{4^3}{3} = 64 + \frac{64}{3} \qquad (3.46)$$

$$F(a) = F(1) = \frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} = \frac{3+4}{12} \qquad (3.47)$$

und so

$$F(b) - F(a) = 64 + \frac{64}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = 84 + \frac{3}{4} \qquad (3.48)$$

Dies schreiben wir in der Form

$$\int_1^4 x^3 + x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right|_1^4 = \frac{4^4}{4} + \frac{4^3}{3} - (\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3}) = 84 + \frac{3}{4} \qquad (3.49)$$

2.
$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x &= -\cos(x)|_0^\pi \\
&= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\
&= -(-1) - (-1) = 2 \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x &= -\cos(x)|_0^{2\pi} \\
&= -\cos(2\pi) + 1 \\
&= -1 + 1 = 0 \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

TODO: Grafik

Wir sehen also, dass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 0 \qquad (3.52)$$

ist, wenn $f(x)$ *im Intervall* $[a;b]$ *negativ ist.*

3.3.1 Zwei Graphen

TODO: Grafik

Es ist

$$F = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x \tag{3.53}$$

TODO: Grafik

Wir wählen eine neue $\overline{x}$-Achse so, dass $f(\overline{x}) > 0$ und $g(\overline{x}) > 0$ für $x_1 < \overline{x} < x_2$. Dann ist $f(\overline{x}) = f(x) + k, g(\overline{x}) = g(x) + k$ und

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(\overline{x}) - g(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x} \tag{3.54}$$

Also

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) + k - (g(x) + k)\mathrm{d}x \tag{3.55}$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\mathrm{d}x \tag{3.56}$$

Falls x_1, x_2 zwei aufeinanderliegende Schnittpunkte sind.