Analysis

Simon Krenger
Gilles Bertholet

November 18, 2012

Chapter 1

Folgen und Grenzwerte

1.1 Folgengesetze

Betrachten wir Zahlenfolgen wie

1. $5, 9, 13, 17, 21, ...$
2. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$
3. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, ...$
4. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

So fällt einerseits die Gesetzmässigkeit und andererseits ein immer vorhandenes erstes Element auf.

Definition 1. *Eine Folge ist eine Funktion mit $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge*

Für $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ schreiben wir bei Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = a(n) \tag{1.1}$$

Beispiel 1. $a_n = 3n + 7$ *ist das Gesetz für die Folge* $10, 13, 16, ...$

Das Gesetz einer Folge können wir so angeben, dass auf das vorangehende Folgenglied (Element) Bezug genommen wird. So erhalten wir das rekursive Gesetz.

Bei (1) lautet dies $a_{n+1} = a_n + 4$ und $a_1 = 5$ und bei (2) $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ und $b_1 = 9$.

Wir können aber auch ein Gesetz suchen, welches a_n mit Hilfe von n berechnet. Das nennen wir das explizite Gesetz.

Die Folge (3) ist eine alternierende Folge (abwechselnd + und −). Dann muss $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$ im expliziten Gesetz stehen.

Bei (3) also $a_n = (-1)^{n+2} \cdot 2^{n-4}$
Für die Folge (4) finden wir das rekursive Gesetz

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1, a_2 = 1 \tag{1.2}$$

für die Fibonacci-Folge. Das explizite Gesetz ist schwierig zu finden.

1.2 Teilsummen

Wenn wir die Elemente einer Folge addieren, so erhalten wir die n-te Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.3}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (\text{"Summe } a_k\text{, k von 1 bis n"}) \tag{1.4}$$

Wollen wir zum Beispiel

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 \tag{1.5}$$

berechnen, so greifen wir auf die Idee von Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855, Göttingen) zurück.

$$\begin{aligned} s_{100} &= (1+100) + (2+99) + ... + (50+51) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wollen wir

$$s_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + ... + a_n \tag{1.7}$$

berechnen, so bestimmen wir die Teilsummenfolge.

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.8}$$

$$s_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{8+2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \tag{1.9}$$

$$s_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} = \frac{11+1}{8 \cdot 11} = \frac{12}{8 \cdot 11} = \frac{3}{22} \tag{1.10}$$

$$s_4 = \frac{3}{22} + \frac{1}{11 \cdot 14} = \frac{42+2}{2 \cdot 11 \cdot 14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = \frac{4}{28} \tag{1.11}$$

also finden wir

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \tag{1.12}$$

Wir beweisen mit vollständiger Induktion.

Beweis 1. *1. Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn*

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.13}$$

und s_n wird mit $n = 1$ zu

$$s_1 = \frac{1}{6 \cdot 1 + 4} = \frac{1}{10} \tag{1.14}$$

2. Voraussetzung:

$$s_n = \frac{n}{6n + 4} \tag{1.15}$$

Behauptung:

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{6(n+1)+4} = \frac{n+1}{6n+10} \tag{1.16}$$

Beweis:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \tag{1.17}$$

und wir müssen a_{n+1} bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \tag{1.18}$$

, also

$$a_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1)-1)(3(n+1)+2)} \tag{1.19}$$

$$= \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \tag{1.20}$$

Somit ist

$$s_{n+1} = \frac{n}{6n+4} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \tag{1.21}$$

$$= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \tag{1.22}$$

$$= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2(3n+2)(3n+5)} \tag{1.23}$$

$$= \frac{(3n+2)(n+1)}{2(3n+2)(3n+5)} \tag{1.24}$$

$$= \frac{n+1}{2(3n+5)} = \frac{n+1}{6n+10} \tag{1.25}$$

3. Nach (1) ist die Behauptung für $n = 1$ wahr und nach (2) für $n + 1$, also für $n = 2$ usw. Also ist die Behauptung für alle $\mathbb{N}$ wahr.

Natürlich finden wir auch sofort

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = (1+n)\frac{n}{2} \tag{1.26}$$

1.3 Grenzwerte

Zeichnen wir die Elemente von

$$a_n = (-1)^n(2 + \frac{1}{n}) \tag{1.27}$$

auf der Zahlengeraden,

TODO

so häufen sich die Werte bei 2 und -2. Sowohl in der Nähe von 2 als auch -2 liegen unendlich viele Werte.

Definition 2. *Wir nennen*

$$U_\epsilon(a) := [a - \epsilon; a + \epsilon]; \epsilon \in \mathbb{R}^+ \tag{1.28}$$

eine ϵ*-Umgebung von* a*.*

Definition 3. *Finden wir in jeder* ϵ*-Umgebung einer Zahl* a *unendlich-viele Folgenglieder, so heisst* a *ein Häufungswert der Folge* (a_n)*.*

Beispiel 2. *1.*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n} \\ &\rightarrow 2, 1.5, 1.\bar{3}, 1.25, 1.2, 1.16, 1.14\overline{2}857 \end{aligned} \tag{1.29}$$

also ist 1 ein Häufungswert.

2.

$$\begin{aligned} b_n &= 4n + 1 \\ &\rightarrow 5, 9, 13, 17, ... \end{aligned} \tag{1.30}$$

Also kein Häufungswert.

Besitzt eine Folge genau einen einzigen Häufungswert, so nennen wir diesen den Limes (Grenzwert) der Folge und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{1.31}$$

Beispiel 3. *1.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{1.32}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n(2 + \frac{1}{n}) \tag{1.33}$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \tag{1.34}$$

Definition 4. *Im Folgenden die Definition des Limes nach Cauchy (Louis Augustin Cauchy, 1789 bis 1857, Paris, Schweiz, Prag):*
Eine Zahlenfolge (a_n) besitzt den Grenzwert a, wenn für alle $\epsilon > 0$ von einem bestimmten n an, alle weiteren Folgenglieder in $U_\epsilon(a)$ liegen:

$$\epsilon \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n(n > n_0 \to |a_n - a| < \epsilon) \tag{1.35}$$

Beispiel 4. $a_n = \frac{5}{n}$ *hat Grenzwert* $a = 0$
Ist $\epsilon = \frac{1}{100}$, *so wird* $n_0 = 500$, *denn von* a_{501} *an sind alle Folgenglieder zwischen* $0,01$ *und* 0.

Definition 5. *Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heisst sie <u>konvergent</u>, andernfalls <u>divergent</u>. Folgen mit Grenzwert 0 heissen <u>Nullfolgen</u>.*

Beispiel 5. *Wir untersuchen diese Folgen:*

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=0, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{1.36}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}=0, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{1.37}$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0, k\in\mathbb{N} \tag{1.38}$$

4. $$\lim_{n\to\infty}2^n \tag{1.39}$$

   existiert nicht, die Folge $a_n = 2^n$ <u>wächst über alle Schranken</u>; sie ist also divergent.

5. $$\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2 \tag{1.40}$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2} = \lim_{n\to\infty}3 + \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 3 \tag{1.41}$$

7. $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-7}{3n+1} \neq \frac{\lim_{n\to\infty}4n-7}{\lim_{n\to\infty}3n+1} \tag{1.42}$$

Wir brauchen die Grenzwertsätze. Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist

1.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \tag{1.43}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b \tag{1.44}$$

3.
$$\forall n(b_n \neq 0) \wedge b_n \neq 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \tag{1.45}$$

Um
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{6n+1} \tag{1.46}$$
zu berechnen, überlegen wir, dass Brüche gekürzt werden können und kürzen mit n.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{6n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n-2}{n}}{\frac{6n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{6n}{n} + \frac{1}{n}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{n}}{6 + \frac{1}{n}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(5 - \frac{2}{n})}{\lim_{n\to\infty}(6 + \frac{1}{n})} = \frac{5}{6}\end{aligned} \tag{1.47}$$

Beispiel 6. *Wir kürzen jeweils mit der Variabel (n) mit der höchsten Potenz:*

1.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{4n^2-3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{3}{n^2}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(4 - \frac{3}{n^2})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.48}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+5}{n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}} \tag{1.49}$$

existiert nicht.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{2n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 - \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} &= \frac{1 + \sqrt{1}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2}{1 - \sqrt{2}}\end{aligned} \tag{1.50}$$

Um

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \tag{1.51}$$

zu berechnen, bestimmen wir

$a_{100} = 2,70481...$, $a_{1000} = 2,7169...$

und finden, dass die Folge beschränkt ist. Es ist

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^1 = e \tag{1.52}$$

und $e = 2,71828...$ ist irrational und transzendent.

Beispiel 7. *Wir betrachten*

1.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{5n})^{5n} = e \tag{1.53}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{3}})^{\frac{n}{3}} = e \tag{1.54}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{4n} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n]^4 = e^4 \tag{1.55}$$

Wollen wir

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n, k \in \mathbb{Z} \tag{1.56}$$

berechnen, so überlegen wir, dass

$$1+\frac{k}{n})1+\frac{1}{\frac{n}{k}} \tag{1.57}$$

und finden

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}} = e \tag{1.58}$$

Weiter ist dann

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{k}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}}]^k = e^k \tag{1.59}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{-1}{n})^n = e^{-1} \tag{1.60}$$

Zusammengefasst

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \tag{1.61}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} = e^{-1} \tag{1.62}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = e^k, k \in \mathbb{Z} \tag{1.63}$$

1.4 Reihen

Definition 6. *Ist* (a_n) *eine Folge, so heisst*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... \tag{1.64}$$

eine Reihe.

Wollen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... \tag{1.65}$$

bestimmen, so nützen wir

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \tag{1.66}$$

aus und erhalten so

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = 1 \end{aligned} \tag{1.67}$$

Um die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \tag{1.68}$$

zu berechnen, bestimmen wir die Teilsummenfolge (Partialsummenfolge)

$s_1, s_2, s_3, ...$

und überlegen dann, ob diese Folge einen Grenzwert besitzt.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + ... + a_n \end{aligned} \tag{1.69}$$

und so

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{10} \\ s_2 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{5\cdot 8} = \frac{8+2}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}(= \frac{2}{16}) \\ s_3 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 11} = \frac{12}{8\cdot 11} = \frac{3}{22} \end{aligned} \tag{1.70}$$

, also
$$s_n = \frac{n}{6n+4} \tag{1.71}$$
und so
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n+4} = \frac{1}{6} \tag{1.72}$$
Wir sagen dann, dass die Reihe konvergent ist und der Wert der Reihe ist $\frac{1}{6}$.

Definition 7. *Wir nennen*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... \quad \textit{mit} \quad q \neq 0, 1 \tag{1.73}$$
eine geometrische Reihe.

Beispiel 8. *1.*
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + ... \tag{1.74}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(\frac{1}{3})^{n-1} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + ... \tag{1.75}$$

Es ist also der Quotient $q \neq 0, 1$ zweier aufeinanderfolgenden Glieder stets gleich. Um Den Wert der Reihe zu bestimmen, betrachten wir
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1} \\ -(q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^n) \end{aligned} \tag{1.76}$$
$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= a_1 - a_1 \cdot q^n \\ s_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \end{aligned} \tag{1.77}$$
Damit
$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad \text{mit} \quad q \neq 0, 1 \tag{1.78}$$
Dann ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \tag{1.79}$$
und für $q > 1 \vee q < -1$ existiert der Grenzwert nicht. Für $-1 < q < 1$ ist
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{, da} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \tag{1.80}$$
Also ist der Wert der geometrischen Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{mit} \quad -1 < q < 1 \tag{1.81}$$

Beispiel 9.

$$2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... = \frac{2}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3} \tag{1.82}$$

Definition 8. *Wir nennen*

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \tag{1.83}$$

die harmonische Reihe.

s ist nicht konvergent, denn es ist

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \tag{1.84}$$

und

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0,5837... > \frac{1}{2} \tag{1.85}$$

und

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840} = 0.634... > \frac{1}{2} \tag{1.86}$$

also

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... \tag{1.87}$$

So ist s divergent! Hingegen ist

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \tag{1.88}$$

und

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.89}$$

und die Leibnizsche Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \frac{\pi}{4} \tag{1.90}$$

1.5 Stetigkeit

Wir wollen für eine Funktion

$$f : D_f \mapsto \mathbb{R} \tag{1.91}$$

den Grenzwert

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{1.92}$$

bestimmen. Dazu brauchen wir eine Folge

$$x_1, x_2, x_3, ... \tag{1.93}$$

mit Grenzwert a.

TODO: Graph

Nun bestimmen wir die Folge

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), ... \tag{1.94}$$

und suchen deren Limes.

TODO: Graph

Bei der Funktion g mit einer Sprungstelle bei a hat

$$g(x_1), g(x_2), ... \tag{1.95}$$

den Limes b. Aber

$$g(x_1{}'), g(x_2{}'), ... \tag{1.96}$$

hat den Limes c. Also existiert

$$\lim_{x \to a} g(x) \tag{1.97}$$

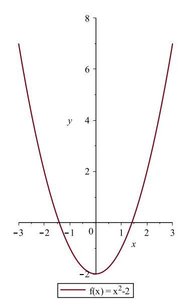
nicht. Beide Reihen $(x_1, x_2, x_3, ...)$ $(x_1{}', x_2{}', x_3{}')$ müssen den gleichen Grenzwert besitzen.
Um

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{1.98}$$

zu bestimmen, müssen alle Folgen von x-Werten mit Grenzwert a betrachtet werden. Wenn die Folgen der zugehörigen Funktionswerte alle denselben Limes besitzen, so ist dies $\lim_{x \to a} f(x)$.

Beispiel 10. *1.*

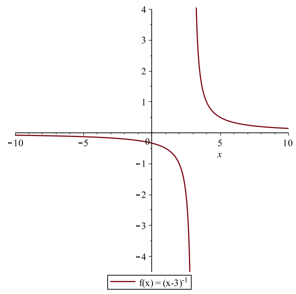
$$\lim_{x \to 1} x^2 - 2 \tag{1.99}$$



$$\lim_{x \to 1} x^2 - 2 = 1^2 - 2 = -1 \tag{1.100}$$

2.

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} \tag{1.101}$$



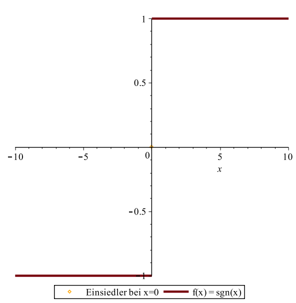
$g(x) = \frac{1}{x-3}$ besitzt einen <u>Pol bei $x = 3$</u>, also existiert $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$ nicht.

3.

$$\lim_{x \to 0} sgn(x) \quad (\text{"Signum von } x\text{"}) \tag{1.102}$$

Es ist

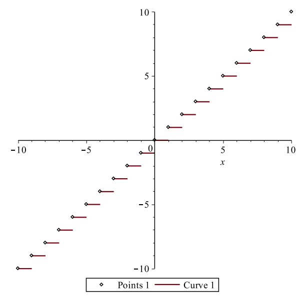
$$sgn(x) := \begin{cases} -1 & , \text{ falls } x < 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ 1 & , \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$



$f : \mathbb{R} \mapsto \{-1, 0, 1\}$ mit $f(x) = sgn(x)$ besitzt für $x = 0$ einen <u>isolierten Punkt (Einsiedler)</u>. Also existiert $\lim_{x\to 0} sgn(x)$ nicht.

4.

$$f(x) = [x] \quad (\text{"Gausssche Klammer"}) \tag{1.103}$$



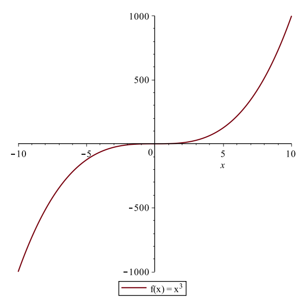
Besitzt eine Funktion weder isolierte Punkte noch Sprungstellen, so ist sie stetig.

Definition 9. *Eine Funktion $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ heisst stetig an der Stelle $a \in D_f$, wenn*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1.104}$$

Beispiel 11. *1.*

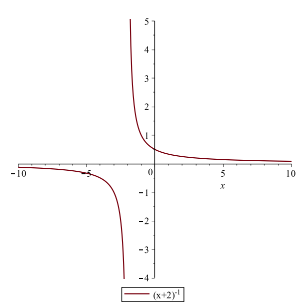
$$f(x) = x^3 \tag{1.105}$$



f ist überall stetig.

2.

$$g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad g(x) = \frac{1}{x+2} \tag{1.106}$$



g ist überall stetig, denn die Stetigkeit kann nur für Werte aus der Definitionsmenge untersucht werden! Zitat Müller: "Man muss den Funktionswert berechnen können. Kann man das, so ist die Funktion stetig".

Chapter 2

Differentialrechnung

2.1 Differentialquotient

Wir betrachten eine stetige Funktion

$$f : D_f \mapsto \mathbb{R} \tag{2.1}$$

und suchen die Steigung der Tangente an dem Graphen an der Stelle $x_0 \in D_f$.

TODO

Die Tangente ist eine spezielle Lage der Sekante. Die Steigung der Sekante ist

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.2}$$

, was wir den Differentialquotienten nennen. Wird h immer kleiner, so nähert sich die Sekante der Tangente. Also ist die Tangentensteigung

$$m_t = \lim_{n \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.3}$$

Definition 10. *Wir nennen*

$$\frac{dy}{dx} := \lim_{n \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{("dy nach dx")} \tag{2.4}$$

den Differentialquotienten.

Beispiel 12. *1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $x_0 = 2$*

Mit

$$f(x_0) = f(2) = 4 f(x_0 + h) = f(2 + h) = (2 + h)^2 \tag{2.5}$$

wird

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &:= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h} && (2.6)\\
&:= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} && (2.7)\\
&:= \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} && (2.8)\\
&:= \lim_{h\to 0} 4+h && (2.9)\\
&:= \underline{4} && (2.10)
\end{aligned}$$

2. $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\mapsto\mathbb{R}$ *mit* $g(x)=\frac{1}{x}$ *und* $x_0=-3$

   Mit

$$g(x_0)=g(-3)=-\frac{1}{3} \tag{2.11}$$

   und

$$g(x_0+h)=g(-3+h)=\frac{1}{h-3} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h-3}-(-\frac{1}{3})}{h} && (2.13)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h-3}+\frac{1}{3}}{h} && (2.14)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3+h-3}{3(h-3)}}{\frac{h}{1}} && (2.15)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3+h-3}{3h(h-3)} && (2.16)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{3h(h-3)} && (2.17)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{3(h-3)} && (2.18)\\
&= \underline{-\frac{1}{9}} && (2.19)
\end{aligned}$$

3. *Gleichung der Tangente in* $x_0=1$, *wenn* $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *mit* $f(x)=x^3$

   Steigung mit

$$f(x_0)=f(1)=1 \tag{2.20}$$

   und

$$f(x_0+h)=f(1+h)=(1+h)^3=h^3+3h^2+3h+1 \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h+1-1}{h} && (2.22)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(h^2+3h+3)}{h} && (2.23)\\
&= \lim_{h\to 0} h^2+3h+3 && (2.24)\\
&= \underline{3} && (2.25)
\end{aligned}$$

Wir kennen den Berührungspunkt $B(x_0/f(x_0)) = B(x_0/y_0)$ der Tangente an den Graphen.
Ist $y = mx + q$, so wird

mit B:

$$\begin{aligned}
y_0 &= m\cdot x_0 + q\\
q &= y_0 - m\cdot x_0 && (2.26)
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
y &= mx + y - mx_0\\
y - y_0 &= mx - mx_0\\
y - y_0 &= m(x - x_0) && (2.27)
\end{aligned}$$

Dies nennen wir die Punktsteigungsform der Geraden. Im Beispiel ist $m = 3$ und $B(1/1)$, also

$$\begin{aligned}
t:&\quad y - 1 = 3(x-1)\\
t:&\quad y = 3x - 2 && (2.28)
\end{aligned}$$

2.2 Ableitung

Wir berechnen den Differentialquotienten für einen beliebigen Wert $x_0 \in D_f$.
Ist $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ so wird

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0)^2 - x_0^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h + h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} 2x_0 + h\\
&= \underline{2x_0} && (2.29)
\end{aligned}$$

Ist $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ so wird

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0)^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 + x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2 \\
&= \underline{3x_0^2} \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Ist $h : \mathbb{R} \mapsto \{2\}$ mit $h(x) = 2$, So ist $\frac{dy}{dx} = 0$ Ist $i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $i(x) = x$ so ist $\frac{dy}{dx} = 1$

Wie haben also jedem $x_0 \in D_f$ den Differentialquotienten zugeordnet und so eine Funktion gebildet. Schreiben wir x anstatt x_0, so erhalten wir die 1. Ableitung.

Definition 11. *Ist $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$, so heisst*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2.31)$$

die 1. Ableitung von f.

Wir kennen also schon

$$\begin{aligned}
f(x) = k &\quad\rightarrow\quad f'(x) = 0 \quad (k \in \mathbb{R}) && (2.32)\\
f(x) = x &\quad\rightarrow\quad f'(x) = 1 && (2.33)\\
f(x) = x^2 &\quad\rightarrow\quad f'(x) = 2x && (2.34)\\
f(x) = x^3 &\quad\rightarrow\quad f'(x) = 3x^2 && (2.35)
\end{aligned}$$

Satz 1.

$$f(x) = x^n \mapsto f'(x) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N} \qquad (2.36)$$

Beweis 2. *Mit*

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h)^n \\
&= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + h^n \\
&= h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) \\
&= nx^{n-1} \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

□

Beispiel 13.

$$f(x) = x^5 - x^3 \to f'(x) = 5x^4 - 3x^2 \tag{2.40}$$

Die Ableitung ist ein Grenzwert und deshalb können wir die Grenzwertsätze zum teil übertragen:

$$k \in \mathbb{R} : (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \tag{2.41}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{2.42}$$

Beispiel 14. *Wir wenden diese Sätze an Beispielen an:*

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 + 2x^3 - 6x + 8 \\ \to f'(x) &= (5x^4)' + (2x^3)' - (6x)' + (8)' \\ &= 5(x^4)' + 2(x^3)' - 6(x)' + 0 \\ &= 5(4x^3) + 2(3x^2) - 6 \\ &= 20x^3 + 6x^2 - 6 \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^3}{7} + \frac{x^2}{9} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{7}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{2}x \\ \to g'(x) &= \frac{3x^2}{7} + \frac{2x}{9} - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.44}$$

3. TODO

4. TODO

Treten noch Parameter auf, so wird oft die Schreibweise nach Leibniz gewählt.

Beispiel 15. *TODO*

Betrachten wir den Graphen einer Polynomfunktion f

TODO

So finden wir Punkte mit horizontalen Tangenten; es ist also

$$f'(x) = 0 \tag{2.45}$$

in

- den Hochpunkten H_1, H_2
- Terrassenpunkt (Scheitelpunkt S
- Tiefpunkt T

Beispiel 16. *Skizziere den Graphen von*

1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad f(x) = 3x - x^3$
Mit TODO

2.3 Ganzrationale Funktionen

Definition 12. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad ; \quad a_k \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.46}$$

heisst ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades.

Suchen wir die Nullstellen, so müssen wir eine Gleichung n-ten Grades lösen; diese ist bekanntlich für $n \geq 5$ nur durch Näherung lösbar (Nils Henrik Abel).

Manchmal können wir aber in Faktoren zerlegen, wie bei

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 30x \tag{2.47}$$

$f(x) = 0$, wenn

$$\begin{aligned} x(x^2 - 11x + 30) &= 0 \\ x(x-5)(x-6) &= 0 \\ \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 6 \end{aligned} \tag{2.48}$$

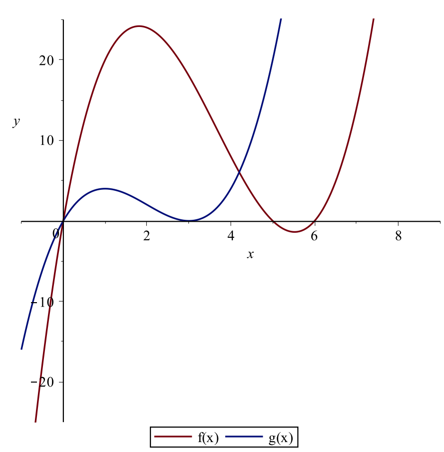
Auch bei

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \tag{2.49}$$

zerlegen wir in Faktoren.
$g(x) = 0$, wenn

$$\begin{aligned} x(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ x(x-3)(x-3) &= 0 \\ \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 3 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Wie unterscheiden sich G_f und G_g?



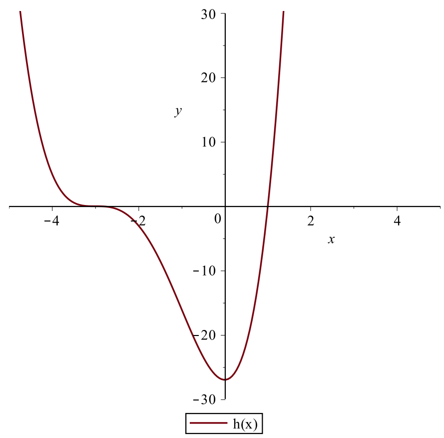
Der G_g berührt bei $x = 3$ die x-Achse. Wir nennen $x_{2,3} = 3$ eine <u>doppelte Nullstelle</u>.

Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x) = (x-1)(x+3)^3 \tag{2.51}$$

besitzt

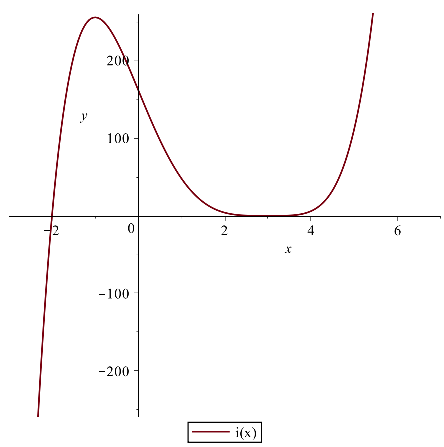
- eine einfache Nullstelle $x_1 = 1$
- die <u>dreifache Nullstelle</u> $x_{2,3,4} = -3$



Der Graph besitzt einen <u>Terrassenpunkt</u>. Ist die Nullstelle <u>vierfach</u> wie bei

$$i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad i(x) = (x+2)(x-3)^4 \tag{2.52}$$

so besitzt der Graph einen <u>Flachpunkt</u> auf der x-Achse.



Satz 2. *Es gilt auch*

$$f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1} \quad \textit{gilt für} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.53}$$

Beweis mit vollständiger Induktion.

Satz 3. *Weiter ist*

$$f(x) = x^r \to f'(x) = r \cdot x^{r-1} \quad \textit{gilt für} \quad r \in \mathbb{Q} \tag{2.54}$$

Beweis siehe Literatur.

Beispiel 17.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + (-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \end{aligned} \tag{2.55}$$

2.4 Höhere Ableitungen und Kurvendiskussion

Ist f eine differenzierbare Funktion und f' ihre 1. Ableitung, so können wir f' erneut ableiten und erhalten die 2. Ableitung f". Fahren wir so fort, so entstehen f'', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ ... und schliesslich die n-te Ableitung $f^{(n)}$.

Beispiel 18.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x + 10 \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned} \to f'(x) &= 12x^2 + 4x - 6 \\ f''(x) &= 24x + 4 \\ f'''(x) &= 24 \\ f^{(4)}(x) &= f^{(5)}(x) = f^{(n)}(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Welche Informationen für f erhalten wir mit f''?

TODO

- Ist $f'(x) = 0$ und $f'(x) < 0$, so besitzt f ein relatives Maximum und G_f einen Hochpunkt. (Bsp: x_2)

- Ist $f'(x) = 0$und $f''(x) > 0$, so besitzt f ein relatives Minimum und G_f einen Tiefpunkt. (Bsp: x_1, x_3)
- Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, so besitzt G_f einen Terassenpunkt. (Bsp: x_3)
- Ist $f''(x) > 0$, so ist G_f konvex oder linksgekrümmt.
- Ist $f''(x) < 0$, so ist G_f konkav oder rechtsgekrümmt.
- Ist $f''(x) = 0$, so besitzt G_f einen Wendepunkt

Bei einer Kurvendiskussion bestimmen wir

- Nullstellen ($f(x) = 0$)
- Extremwerte (mit horizontalen Tangenten ($f'(x) = 0$))
- Wendepunkte ($f''(x) = 0$)
- Graph

Beispiel 19. *1. TODO*

2. TODO