Analysis

Simon Krenger

September 22, 2012

Chapter 1

Folgen und Grenzwerte

1.1 Folgengesetze

Betrachten wir Zahlenfolgen wie

1. $5, 9, 13, 17, 21, ...$
2. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$
3. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, ...$
4. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

So fällt einerseits die Gesetzmässigkeit und andererseits ein immer vorhandenes erstes Element auf.

Definition 1. *Eine Folge ist eine Funktion mit $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge*

Für $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ schreiben wir bei Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = a(n) \tag{1.1}$$

Beispiel 1. $a_n = 3n + 7$ *ist das Gesetz für die Folge* $10, 13, 16, ...$

Das Gesetz einer Folge können wir so angeben, dass auf das vorangehende Folgenglied (Element) Bezug genommen wird. So erhalten wir das rekursive Gesetz.

Bei (1) lautet dies $a_{n+1} = a_n + 4$ und $a_1 = 5$ und bei (2) $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ und $b_1 = 9$.

Wir können aber auch ein Gesetz suchen, welches a_n mit Hilfe von n berechnet. Das nennen wir das explizite Gesetz.

Die Folge (3) ist eine alternierende Folge (abwechselnd + und −). Dann muss $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$ im expliziten Gesetz stehen.

Bei (3) also $a_n = (-1)^{n+2} \cdot 2^{n-4}$
Für die Folge (4) finden wir das rekursive Gesetz

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1, a_2 = 1 \tag{1.2}$$

für die Fibonacci-Folge. Das explizite Gesetz ist schwierig zu finden.

1.2 Teilsummen