

Analysis

Simon Krenger

October 28, 2012

Chapter 1

Folgen und Grenzwerte

1.1 Folgesetze

Betrachten wir Zahlenfolgen wie

1. $5, 9, 13, 17, 21, \dots$
2. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
3. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, \dots$
4. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

So fällt einerseits die Gesetzmässigkeit und andererseits ein immer vorhandenes erstes Element auf.

Definition 1. Eine Folge ist eine Funktion mit \mathbb{N} als Definitionsmenge

Für $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ schreiben wir bei Folgen

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = a(n) \quad (1.1)$$

Beispiel 1. $a_n = 3n + 7$ ist das Gesetz für die Folge $10, 13, 16, \dots$

Das Gesetz einer Folge können wir so angeben, dass auf das vorangehende Folgenglied (Element) Bezug genommen wird. So erhalten wir das rekursive Gesetz.

Bei (1) lautet dies $a_{n+1} = a_n + 4$ und $a_1 = 5$ und bei (2) $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ und $b_1 = 9$.

Wir können aber auch ein Gesetz suchen, welches a_n mit Hilfe von n berechnet. Das nennen wir das explizite Gesetz.

Die Folge (3) ist eine alternierende Folge (abwechselnd $+$ und $-$). Dann muss $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$ im expliziten Gesetz stehen.

Bei (3) also $a_n = (-1)^{n+2} \cdot 2^{n-4}$

Für die Folge (4) finden wir das rekursive Gesetz

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1, a_2 = 1 \quad (1.2)$$

für die Fibonacci-Folge. Das explizite Gesetz ist schwierig zu finden.

1.2 Teilsummen

Wenn wir die Elemente einer Folge addieren, so erhalten wir die n-te Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.3)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{"Summe } a_k, k \text{ von 1 bis } n") \quad (1.4)$$

Wollen wir zum Beispiel

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \quad (1.5)$$

berechnen, so greifen wir auf die Idee von Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855, Göttingen) zurück.

$$\begin{aligned} s_{100} &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Wollen wir

$$s_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + a_n \quad (1.7)$$

berechnen, so bestimmen wir die Teilsummenfolge.

$$s_1 = \frac{1}{10} \quad (1.8)$$

$$s_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{8+2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \quad (1.9)$$

$$s_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} = \frac{11+1}{8 \cdot 11} = \frac{12}{8 \cdot 11} = \frac{3}{22} \quad (1.10)$$

$$s_4 = \frac{3}{22} + \frac{1}{11 \cdot 14} = \frac{42+2}{2 \cdot 11 \cdot 14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = \frac{4}{28} \quad (1.11)$$

also finden wir

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \quad (1.12)$$

Wir beweisen mit vollständiger Induktion.

Beweis 1. 1. Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn

$$s_1 = \frac{1}{10} \quad (1.13)$$

und s_n wird mit $n = 1$ zu

$$s_1 = \frac{1}{6 \cdot 1 + 4} = \frac{1}{10} \quad (1.14)$$

2. Voraussetzung:

$$s_n = \frac{n}{6n + 4} \quad (1.15)$$

Behauptung:

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{6(n+1) + 4} = \frac{n+1}{6n+10} \quad (1.16)$$

Beweis:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad (1.17)$$

und wir müssen a_{n+1} bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \quad (1.18)$$

, also

$$a_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1)-1)(3(n+1)+2)} \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \quad (1.20)$$

Somit ist

$$s_{n+1} = \frac{n}{6n+4} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \quad (1.21)$$

$$= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \quad (1.22)$$

$$= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2(3n+2)(3n+5)} \quad (1.23)$$

$$= \frac{(3n+2)(n+1)}{2(3n+2)(3n+5)} \quad (1.24)$$

$$= \frac{n+1}{2(3n+5)} = \frac{n+1}{6n+10} \quad (1.25)$$

3. Nach (1) ist die Behauptung für $n = 1$ wahr und nach (2) für $n + 1$, also für $n = 2$ usw. Also ist die Behauptung für alle \mathbb{N} wahr.

Natürlich finden wir auch sofort

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = (1+n) \frac{n}{2} \quad (1.26)$$

1.3 Grenzwerte

Zeichnen wir die Elemente von

$$a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (1.27)$$

auf der Zahlengeraden,

TODO

so häufen sich die Werte bei 2 und -2. Sowohl in der Nähe von 2 als auch -2 liegen unendlich viele Werte.

Definition 2. *Wir nennen*

$$U_\epsilon(a) := [a - \epsilon; a + \epsilon]; \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad (1.28)$$

eine ϵ -Umgebung von a .

Definition 3. *Finden wir in jeder ϵ -Umgebung einer Zahl a unendlich-viele Folgenglieder, so heisst a ein Häufungswert der Folge (a_n) .*

Beispiel 2. 1.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n} \\ &\rightarrow 2, 1.5, 1.\bar{3}, 1.25, 1.2, 1.16, 1.142857 \end{aligned} \quad (1.29)$$

also ist 1 ein Häufungswert.

2.

$$\begin{aligned} b_n &= 4n + 1 \\ &\rightarrow 5, 9, 13, 17, \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

Also kein Häufungswert.

Besitzt eine Folge genau einen einzigen Häufungswert, so nennen wir diesen den Limes (Grenzwert) der Folge und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (1.31)$$

Beispiel 3. 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (1.32)$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (1.33)$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (1.34)$$

Definition 4. Im Folgenden die Definition des Limes nach Cauchy (Louis Augustin Cauchy, 1789 bis 1857, Paris, Schweiz, Prag):

Eine Zahlenfolge (a_n) besitzt den Grenzwert a , wenn für alle $\epsilon > 0$ von einem bestimmten n an, alle weiteren Folgenglieder in $U_\epsilon(a)$ liegen:

$$\epsilon \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N} : \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \rightarrow |a_n - a| < \epsilon) \quad (1.35)$$

Beispiel 4. $a_n = \frac{5}{n}$ hat Grenzwert $a = 0$

Ist $\epsilon = \frac{1}{100}$, so wird $n_0 = 500$, denn von a_{501} an sind alle Folgenglieder zwischen 0,01 und 0.

Definition 5. Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heisst sie konvergent, andernfalls divergent. Folgen mit Grenzwert 0 heissen Nullfolgen.

Beispiel 5. Wir untersuchen diese Folgen:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (1.36)$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^2} = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (1.37)$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N} \quad (1.38)$$

4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \quad (1.39)$$

existiert nicht, die Folge $a_n = 2^n$ wächst über alle Schranken; sie ist also divergent.

5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 \quad (1.40)$$

6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 3 \quad (1.41)$$

7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 7}{3n + 1} \neq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4n - 7}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3n + 1} \quad (1.42)$$

Wir brauchen die Grenzwertsätze. Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, so ist

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b \quad (1.43)$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b \quad (1.44)$$

3.

$$\forall n (b_n \neq 0) \wedge b_n \neq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad (1.45)$$

Um

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 2}{6n + 1} \quad (1.46)$$

zu berechnen, überlegen wir, dass Brüche gekürzt werden können und kürzen mit n .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 2}{6n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n-2}{n}}{\frac{6n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{6n}{n} + \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{n}}{6 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - \frac{2}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (6 + \frac{1}{n})} = \frac{5}{6} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Beispiel 6. Wir kürzen jeweils mit der Variabel (n) mit der höchsten Potenz:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{4n^2 - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - \frac{3}{n^2})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.48)$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 5}{n - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}} \quad (1.49)$$

existiert nicht.

3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 - \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} = \frac{1 + \sqrt{1}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2}{1 - \sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Um

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1.51)$$

zu berechnen, bestimmen wir

$$a_{100} = 2,70481\dots, a_{1000} = 2,7169\dots$$

und finden, dass die Folge beschränkt ist. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 = e \quad (1.52)$$

und $e = 2,71828\dots$ ist irrational und transzendent.

Beispiel 7. *Wir betrachten*

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n} = e \quad (1.53)$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} = e \quad (1.54)$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^4 = e^4 \quad (1.55)$$

Wollen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n, k \in \mathbb{Z} \quad (1.56)$$

berechnen, so überlegen wir, dass

$$1 + \frac{k}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{n}{k}} \quad (1.57)$$

und finden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}} = e \quad (1.58)$$

Weiter ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k = e^k \quad (1.59)$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} \quad (1.60)$$

Zusammengefasst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (1.61)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-1} \quad (1.62)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, k \in \mathbb{Z} \quad (1.63)$$

1.4 Reihen

Definition 6. Ist (a_n) eine Folge, so heisst

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (1.64)$$

eine Reihe.

Wollen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \quad (1.65)$$

bestimmen, so nützen wir

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (1.66)$$

aus und erhalten so

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Um die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \quad (1.68)$$

zu berechnen, bestimmen wir die Teilsommenfolge (Partialsummenfolge)

$$s_1, s_2, s_3, \dots$$

und überlegen dann, ob diese Folge einen Grenzwert besitzt.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + a_n \end{aligned} \quad (1.69)$$

und so

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{10} \\ s_2 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{8+2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} (= \frac{2}{16}) \\ s_3 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} = \frac{12}{8 \cdot 11} = \frac{3}{22} \end{aligned} \quad (1.70)$$

, also

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \quad (1.71)$$

und so

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n+4} = \frac{1}{6} \quad (1.72)$$

Wir sagen dann, dass die Reihe konvergent ist und der Wert der Reihe ist $\frac{1}{6}$.

Definition 7. Wir nennen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots \quad \text{mit } q \neq 0, 1 \quad (1.73)$$

eine geometrische Reihe.

Beispiel 8. 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \dots \quad (1.74)$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots \quad (1.75)$$

Es ist also der Quotient $q \neq 0, 1$ zweier aufeinanderfolgenden Glieder stets gleich. Um Den Wert der Reihe zu bestimmen, betrachten wir

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ -(q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n) \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= a_1 - a_1 \cdot q^n \\ s_n(1 - q) &= a_1(1 - q^n) \end{aligned} \quad (1.77)$$

Damit

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)} \quad \text{mit } q \neq 0, 1 \quad (1.78)$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)} \quad (1.79)$$

und für $q > 1 \vee q < -1$ existiert der Grenzwert nicht. Für $-1 < q < 1$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \quad , \text{ da } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (1.80)$$

Also ist der Wert der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{mit } -1 < q < 1 \quad (1.81)$$

Beispiel 9.

$$2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots = \frac{2}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3} \quad (1.82)$$

Definition 8. Wir nennen

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (1.83)$$

die harmonische Reihe.

s ist nicht konvergent, denn es ist

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (1.84)$$

und

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0,5837... > \frac{1}{2} \quad (1.85)$$

und

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840} = 0.634... > \frac{1}{2} \quad (1.86)$$

also

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \quad (1.87)$$

So ist s divergent! Hingegen ist

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad (1.88)$$

und

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.89)$$

und die Leibnizsche Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4} \quad (1.90)$$

1.5 Stetigkeit

Wir wollen für eine Funktion

$$f : D_f \mapsto \mathbb{R} \quad (1.91)$$

den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (1.92)$$

bestimmen. Dazu brauchen wir eine Folge

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (1.93)$$

mit Grenzwert a .

TODO: Graph

Nun bestimmen wir die Folge

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots \quad (1.94)$$

und suchen deren Limes.

TODO: Graph

Bei der Funktion g mit einer Sprungstelle bei a hat

$$g(x_1), g(x_2), \dots \quad (1.95)$$

den Limes b . Aber

$$g(x_1'), g(x_2'), \dots \quad (1.96)$$

hat den Limes c . Also existiert

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (1.97)$$

nicht. Beide Reihen (x_1, x_2, x_3, \dots) (x_1', x_2', x_3') müssen den gleichen Grenzwert besitzen.

Um

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (1.98)$$

zu bestimmen, müssen alle Folgen von x -Werten mit Grenzwert a betrachtet werden. Wenn die Folgen der zugehörigen Funktionswerte alle denselben Limes besitzen, so ist dies $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Beispiel 10. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \quad (1.99)$$

TODO

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 = 1^2 - 2 = -1 \quad (1.100)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \quad (1.101)$$

TODO

$g(x) = \frac{1}{x-3}$ besitzt einen Pol bei $x = 3$, also existiert $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ nicht.

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x) \quad (\text{"Signum von } x") \quad (1.102)$$

Es ist

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & , \text{ falls } x < 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ 1 & , \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

TODO

$f : \mathbb{R} \mapsto \{-1, 0, 1\}$ mit $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ besitzt für $x = 0$ einen isolierten Punkt (Einsiedler).
Also existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ nicht.

Besitzt eine Funktion weder isolierte Punkte noch Sprungstellen, so ist sie stetig.

Definition 9. Eine Funktion $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ heisst stetig an der Stelle $a \in D_f$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \tag{1.103}$$

Beispiel 11. TODO

Chapter 2

Differentialrechnung

2.1 Differentialquotient

Wir betrachten eine stetige Funktion

$$f : D_f \mapsto \mathbb{R} \quad (2.1)$$

und suchen die Steigung der Tangente an dem Graphen an der Stelle $x_0 \in D_f$.

TODO

Die Tangente ist eine spezielle Lage der Sekante. Die Steigung der Sekante ist

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.2)$$

, was wir den Differentialquotienten nennen. Wird h immer kleiner, so nähert sich die Sekante der Tangente. Also ist die Tangentensteigung

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.3)$$

Definition 10. Wir nennen

$$\frac{dy}{dx} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{"dy nach dx"}) \quad (2.4)$$

den Differentialquotienten.

Beispiel 12. 1. TODO

2. TODO

3. TODO

Wir kennen den Berührungspunkt $B(x_0/f(x_0)) = B(x_0/y_0)$ der Tangente an den Graphen.

Ist $y = mx + q$, so wird

mit B:

$$\begin{aligned}y_0 &= m \cdot x_0 + q \\q &= y_0 - m \cdot x_0\end{aligned}\tag{2.5}$$

also

$$\begin{aligned}y &= mx + y - mx_0 \\y - y_0 &= mx - mx_0 \\y - y_0 &= m(x - x_0)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Dies nennen wir die Punktsteigungsform der Geraden. Im Beispiel ist $m = 3$ und $B(1/1)$, also

$$\begin{aligned}t : \quad y - 1 &= 3(x - 1) \\t : \quad y &= 3x - 2\end{aligned}\tag{2.7}$$