Analysis

Simon Krenger

September 22, 2012

Chapter 1

Folgen und Grenzwerte

1.1 Folgengesetze

Betrachten wir Zahlenfolgen wie

1. $5, 9, 13, 17, 21, ...$
2. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$
3. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, ...$
4. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

So fällt einerseits die Gesetzmässigkeit und andererseits ein immer vorhandenes erstes Element auf.

Definition 1. *Eine Folge ist eine Funktion mit $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge*

Für $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ schreiben wir bei Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = a(n) \tag{1.1}$$

Beispiel 1. $a_n = 3n + 7$ *ist das Gesetz für die Folge* $10, 13, 16, ...$

Das Gesetz einer Folge können wir so angeben, dass auf das vorangehende Folgenglied (Element) Bezug genommen wird. So erhalten wir das rekursive Gesetz.

Bei (1) lautet dies $a_{n+1} = a_n + 4$ und $a_1 = 5$ und bei (2) $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ und $b_1 = 9$.

Wir können aber auch ein Gesetz suchen, welches a_n mit Hilfe von n berechnet. Das nennen wir das explizite Gesetz.

Die Folge (3) ist eine alternierende Folge (abwechselnd + und −). Dann muss $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$ im expliziten Gesetz stehen.

Bei (3) also $a_n = (-1)^{n+2} \cdot 2^{n-4}$
Für die Folge (4) finden wir das rekursive Gesetz

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1, a_2 = 1 \tag{1.2}$$

für die Fibonacci-Folge. Das explizite Gesetz ist schwierig zu finden.

1.2 Teilsummen

Wenn wir die Elemente einer Folge addieren, so erhalten wir die n-te Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.3}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (\text{"Summe } a_k\text{, k von 1 bis n"}) \tag{1.4}$$

Wollen wir zum Beispiel

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 \tag{1.5}$$

berechnen, so greifen wir auf die Idee von Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855, Göttingen) zurück.

$$\begin{aligned} s_{100} &= (1 + 100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wollen wir

$$s_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + ... + a_n \tag{1.7}$$

berechnen, so bestimmen wir die Teilsummenfolge.

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.8}$$

$$s_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{8 + 2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \tag{1.9}$$

$$s_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} = \frac{11 + 1}{8 \cdot 11} = \frac{12}{8 \cdot 11} = \frac{3}{22} \tag{1.10}$$

$$s_4 = \frac{3}{22} + \frac{1}{11 \cdot 14} = \frac{42 + 2}{2 \cdot 11 \cdot 14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = \frac{4}{28} \tag{1.11}$$

also finden wir

$$s_n = \frac{n}{6n + 4} \tag{1.12}$$

Wir beweisen mit vollständiger Induktion.

Beweis 1. *1. Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn*

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.13}$$

und s_n wird mit $n = 1$ zu

$$s_1 = \frac{1}{6 \cdot 1 + 4} = \frac{1}{10} \tag{1.14}$$

2. Voraussetzung:

$$s_n = \frac{n}{6n + 4} \tag{1.15}$$

Behauptung:

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{6(n+1)+4} = \frac{n+1}{6n+10} \tag{1.16}$$

Beweis:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \tag{1.17}$$

und wir müssen a_{n+1} bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \tag{1.18}$$

, also

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(3(n+1)-1)(3(n+1)+2)} && (1.19) \\ &= \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.20) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{n}{6n+4} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.21) \\ &= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.22) \\ &= \frac{3n^2+5n+2}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.23) \\ &= \frac{(3n+2)(n+1)}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.24) \\ &= \frac{n+1}{2(3n+5)} = \frac{n+1}{6n+10} && (1.25) \end{aligned}$$

3. Nach (1) ist die Behauptung für $n = 1$ wahr und nach (2) für $n + 1$, also für $n = 2$ usw. Also ist die Behauptung für alle $\mathbb{N}$ wahr.