Analysis

Simon Krenger

October 5, 2012

Chapter 1

Folgen und Grenzwerte

1.1 Folgengesetze

Betrachten wir Zahlenfolgen wie

1. $5, 9, 13, 17, 21, ...$
2. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$
3. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, ...$
4. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

So fällt einerseits die Gesetzmässigkeit und andererseits ein immer vorhandenes erstes Element auf.

Definition 1. *Eine Folge ist eine Funktion mit $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge*

Für $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ schreiben wir bei Folgen

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = a(n) \tag{1.1}$$

Beispiel 1. $a_n = 3n + 7$ *ist das Gesetz für die Folge* $10, 13, 16, ...$

Das Gesetz einer Folge können wir so angeben, dass auf das vorangehende Folgenglied (Element) Bezug genommen wird. So erhalten wir das rekursive Gesetz.

Bei (1) lautet dies $a_{n+1} = a_n + 4$ und $a_1 = 5$ und bei (2) $b_{n+1} = \frac{1}{3} b_n$ und $b_1 = 9$.

Wir können aber auch ein Gesetz suchen, welches a_n mit Hilfe von n berechnet. Das nennen wir das explizite Gesetz.

Die Folge (3) ist eine alternierende Folge (abwechselnd + und −). Dann muss $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$ im expliziten Gesetz stehen.

Bei (3) also $a_n = (-1)^{n+2} \cdot 2^{n-4}$
Für die Folge (4) finden wir das rekursive Gesetz

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1, a_2 = 1 \tag{1.2}$$

für die Fibonacci-Folge. Das explizite Gesetz ist schwierig zu finden.

1.2 Teilsummen

Wenn wir die Elemente einer Folge addieren, so erhalten wir die n-te Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.3}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (\text{"Summe } a_k\text{, k von 1 bis n"}) \tag{1.4}$$

Wollen wir zum Beispiel

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 \tag{1.5}$$

berechnen, so greifen wir auf die Idee von Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855, Göttingen) zurück.

$$\begin{aligned} s_{100} &= (1+100) + (2+99) + ... + (50+51) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wollen wir

$$s_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + ... + a_n \tag{1.7}$$

berechnen, so bestimmen wir die Teilsummenfolge.

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.8}$$

$$s_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{8+2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \tag{1.9}$$

$$s_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 11} = \frac{11+1}{8 \cdot 11} = \frac{12}{8 \cdot 11} = \frac{3}{22} \tag{1.10}$$

$$s_4 = \frac{3}{22} + \frac{1}{11 \cdot 14} = \frac{42+2}{2 \cdot 11 \cdot 14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = \frac{4}{28} \tag{1.11}$$

also finden wir

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \tag{1.12}$$

Wir beweisen mit vollständiger Induktion.

Beweis 1. *1. Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn*

$$s_1 = \frac{1}{10} \tag{1.13}$$

und s_n wird mit $n = 1$ zu

$$s_1 = \frac{1}{6 \cdot 1 + 4} = \frac{1}{10} \tag{1.14}$$

2. Voraussetzung:

$$s_n = \frac{n}{6n+4} \tag{1.15}$$

Behauptung:

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{6(n+1)+4} = \frac{n+1}{6n+10} \tag{1.16}$$

Beweis:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \tag{1.17}$$

und wir müssen a_{n+1} bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \tag{1.18}$$

, also

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(3(n+1)-1)(3(n+1)+2)} && (1.19)\\ &= \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.20) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{n}{6n+4} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.21)\\ &= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.22)\\ &= \frac{3n^2+5n+2}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.23)\\ &= \frac{(3n+2)(n+1)}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.24)\\ &= \frac{n+1}{2(3n+5)} = \frac{n+1}{6n+10} && (1.25) \end{aligned}$$

3. Nach (1) ist die Behauptung für $n = 1$ wahr und nach (2) für $n + 1$, also für $n = 2$ usw. Also ist die Behauptung für alle $\mathbb{N}$ wahr.

Natürlich finden wir auch sofort

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = (1+n)\frac{n}{2} \tag{1.26}$$

1.3 Grenzwerte

Zeichnen wir die Elemente von

$$a_n = (-1)^n(2 + \frac{1}{n}) \tag{1.27}$$

auf der Zahlengeraden,

TODO

so häufen sich die Werte bei 2 und -2. Sowohl in der Nähe von 2 als auch -2 liegen unendlich viele Werte.

Definition 2. *Wir nennen*

$$U_\epsilon(a) := [a - \epsilon; a + \epsilon]; \epsilon \in \mathbb{R}^+ \tag{1.28}$$

eine <u>*ϵ-Umgebung*</u> *von a.*

Definition 3. *Finden wir in jeder ϵ-Umgebung einer Zahl a unendlich-viele Folgenglieder, so heisst a ein Häufungswert der Folge (a_n).*

Beispiel 2. *1.*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n} \\ &\rightarrow 2, 1.5, 1.\bar{3}, 1.25, 1.2, 1.16, 1.14\bar{2}857 \end{aligned} \tag{1.29}$$

also ist 1 ein Häufungswert.

2.

$$\begin{aligned} b_n &= 4n + 1 \\ &\rightarrow 5, 9, 13, 17, ... \end{aligned} \tag{1.30}$$

Also kein Häufungswert.

Besitzt eine Folge genau einen einzigen Häufungswert, so nennen wir diesen den <u>Limes</u> (Grenzwert) der Folge und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{1.31}$$

Beispiel 3. *1.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{1.32}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n(2 + \frac{1}{n}) \tag{1.33}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{1.34}$$

Definition 4. *Im Folgenden die Definition des Limes nach Cauchy (Louis Augustin Cauchy, 1789 bis 1857, Paris, Schweiz, Prag):*
Eine Zahlenfolge (a_n) besitzt den Grenzwert a, wenn für alle $\epsilon > 0$ von einem bestimmten n an, alle weiteren Folgenglieder in $U_\epsilon(a)$ liegen:

$$\epsilon \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N} : \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \to |a_n - a| < \epsilon) \tag{1.35}$$

Beispiel 4. *$a_n = \frac{5}{n}$ hat Grenzwert $a = 0$*
Ist $\epsilon = \frac{1}{100}$, so wird $n_0 = 500$, denn von a_{501} an sind alle Folgenglieder zwischen $0,01$ und 0.

Definition 5. *Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heisst sie konvergent, andernfalls divergent. Folgen mit Grenzwert 0 heissen Nullfolgen.*

Beispiel 5. *Wir untersuchen diese Folgen:*

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{1.36}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^2} = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{1.37}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N} \tag{1.38}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \tag{1.39}$$

existiert nicht, die Folge $a_n = 2^n$ wächst über alle Schranken; sie ist also divergent.

5.

$$\lim_{n\to\infty} (2 + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 \tag{1.40}$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 3 \tag{1.41}$$

7.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n - 7}{3n + 1} \neq \frac{\lim_{n\to\infty} 4n - 7}{\lim_{n\to\infty} 3n + 1} \tag{1.42}$$

Wir brauchen die Grenzwertsätze. Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist

1.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \tag{1.43}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b \tag{1.44}$$

3.

$$\forall n(b_n \neq 0) \land b_n \neq 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \tag{1.45}$$

Um

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{6n+1} \tag{1.46}$$

zu berechnen, überlegen wir, dass Brüche gekürzt werden können und kürzen mit n.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{6n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n-2}{n}}{\frac{6n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{6n}{n} + \frac{1}{n}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{n}}{6 + \frac{1}{n}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(5 - \frac{2}{n})}{\lim_{n\to\infty}(6 + \frac{1}{n})} = \frac{5}{6} \end{aligned} \tag{1.47}$$

Beispiel 6. *Wir kürzen jeweils mit der Variabel (n) mit der höchsten Potenz:*

1.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{4n^2-3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{3}{n^2}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(4 - \frac{3}{n^2})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.48}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+5}{n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}} \tag{1.49}$$

existiert nicht.

3.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{2n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 - \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} &= \frac{1+\sqrt{1}}{1-\sqrt{2}} = \frac{2}{1-\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{1.50}$$