EXPRESSION DES $\zeta(2k)$

On rappelle que l'**exponentielle complexe** est la fonction entière définie par

$$\forall z \in \mathbf{C},\ \mathrm{e}^z \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème ([book :FGNAn2]). *Soit $f : z \in \mathbf{C}^* \mapsto \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$. Alors f est développable en série entière en 0, et on a*

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, 2\pi),\ f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}\Big)z^{2k}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbf{C} \setminus 2\mathrm{i}\pi\mathbf{Z}$. Pour montrer ce théorème, on va utiliser le développement en série de FOURIER de la fonction $\varphi :\ x \in \,]-\pi\,;\pi[\, \mapsto \exp\Big(\dfrac{zx}{2\pi}\Big)$. On vérifie aisément que c'est une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER. On calcule, pour $n \in \mathbf{Z}^*$:

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\Big(\Big(\frac{z}{2\pi} - \mathrm{i}n\Big)x\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(z/2\pi) - \mathrm{i}n}\Big[\mathrm{e}^{\frac{zx}{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n\Big(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Big)}{z - 2\pi\mathrm{i}n}.$$

De plus, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$. Donc par le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de φ converge en tout point x de $\mathbf{R}$:

$$\frac{1}{2}\big(\varphi(x^+) + \varphi(x^-)\big) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \Big(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Big)\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{z - 2\pi\mathrm{i}n}.$$

Appliquons ce résultat à $x = \pi$ pour faire apparaître f : $\frac{1}{2}\big(\varphi(\pi^+) + \varphi(\pi^-)\big) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Big)$, et donc

$$\frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Big) = \Big(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Big)\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^{2n}}{z - 2\mathrm{i}\pi n} = \Big(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Big)\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z + 2\mathrm{i}\pi n}{z^2 + 4\pi^2n^2}.$$

Or, on peut regrouper les termes de la série en n et $-n$:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z + 2\mathrm{i}\pi n}{z^2 + 4\pi^2n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z + 2\mathrm{i}\pi n}{z^2 + 4\pi^2n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z - 2\mathrm{i}\pi n}{z^2 + 4\pi^2n^2} = \frac{1}{z} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2n^2}.$$

Il vient donc :

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}}{2\left(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\right)}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{z+2\mathrm{i}\pi n}{z^2+4\pi^2n^2}=\frac{1}{z}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z}{z^2+4\pi^2n^2}.$$

D'autre part, on écrit, en factorisant par $\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}$,

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}}{2\left(\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\right)}=\frac{\mathrm{e}^z+1}{2(\mathrm{e}^z-1)}=\frac{\mathrm{e}^z-1+2}{2(\mathrm{e}^z-1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}.$$

Donc en multipliant par z et en soustrayant $\frac{z}{2}$, on obtient finalement :

$$\forall z\in\mathbf{C}\setminus 2\mathrm{i}\pi\mathbf{Z},\ f(z)=1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}.$$

Reste à développement cette somme en série entière. Pour cela, on va développer en série entière la quantité $\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$. On a, si $|z|<2\pi$, $\left|\frac{z}{2\pi n}\right|<1$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$. D'où

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}&=\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\frac{1}{1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}}=\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(4\pi^2n^2)^k}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2(k+1)}}{(4\pi^2n^2)^{k+1}}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}.\end{aligned}$$

Notons à présent, pour tout $(n,k)\in(\mathbf{N}^*)^2$, $u_{n,k}\overset{\text{def}}{=}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$. On va montrer que la série double $\sum\sum u_{n,k}$ converge. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, la série $\sum_k\left|u_{n,k}\right|$ converge par hypothèse sur z (série géométrique). De plus, on a

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left|u_{n,k}\right|=\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|u_{n,k}\right|=\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}\frac{1}{1-\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}}=\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2-|z|^2}.$$

Et par les séries de RIEMANN, la série $\sum_n\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2-|z|^2}$ converge. Ainsi, $\sum_n\sum_k\left|u_{n,k}\right|$ converge, donc par le théorème de FUBINI-LEBESGUE, on peut échanger l'ordre de sommation, d'où l'on obtient, pour tout $z\in\mathbf{C}^*$ tel que $|z|<2\pi$:

$$\begin{aligned}f(z)&=1-\frac{z}{2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}u_{n,k}=1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,k}\\&=1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\Big)z^{2k}.\end{aligned}$$

On vérifie aisément que f admet un prolongement par continuité en 0 défini par $f(0)=1$, et que cette égalité est vérifiée pour $z=0$. On obtient donc

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,2\pi),\ f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\Big)z^{2k}.$$

□

On note $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, qu'on appelle la suite des **nombres de Bernoulli**, les réels tels que

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,2\pi),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n.$$

On a ainsi $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $b_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Application.

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2n)!}b_{2n}.$$

Démonstration. En effet, par unicité du développement en série entière, on a

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \frac{b_{2k}}{(2k)!} = 2\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}},$$

d'où

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}b_{2k}.$$

□

Soit $z \in \mathrm{D}(0,2\pi)$. Alors on a, par un produit de Cauchy :

$$\begin{aligned} z = f(z)(\mathrm{e}^z - 1) &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n\Big)\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{n!}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!}z^k\frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!(n-k)!}z^n. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0,$$

ce qui veut dire, en multipliant par $n!$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k = 0.$$

En réarrangeant, on obtient

$$b_{n-1} = -\frac{1}{\binom{n}{n-1}}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}b_k = -\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}b_k.$$

On a donc une relation de récurrence pour calculer les b_n. En particulier, on trouve que $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$ et $b_6 = \frac{1}{42}$. D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$