1 预备知识

1.1 计数法则

【加法法则】做一件事，完成它可以有 n 类方法，在第一类方法中有 m_1 种不同方法，在第二类方法中有 m_2 种不同方法，……，在第 n 类方法中有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法。

- 从武汉到上海有乘火车、飞机、轮船 3 种交通方式可供选择，而火车、飞机、轮船分别有 k1，k2，k3 个班次，那么从武汉到上海共有 k1+k2+k3 种方式可以到达。sdd
- 书架上有数学类书 5 本, 计算机类书 3, 任取其中一本, 共有 5+3=8 种取法。

【乘法法则】做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同方法，做第二步有 m_2 种不同方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法。

- 从 A 到 B 有三条道路, 从 B 到 C 有两条道路, 则从 A 经 B 到 C 有几条道路? 共有 3×2=6 条。
- 某种样式的运动服的着色由底色和装饰条纹的颜色配成。底色可选红、蓝、橙、黄, 条纹色可选黑白, 则共有 4×2=8 种着色方案。
- 对于 7 位车牌号, 如果要求前 3 位必须是字母, 后 4 位必须是数字, 那么一共有多少种不同的 7 位车牌号? 答：26×26×26×10×10×10×10=175760000 种不同的号码。
- 5 封信投入 3 个不同的信箱，可以有几个方法？答：第一封信有 3 个方法，第二封信有 3 个方法，。。。一共 3^5 种方法。

1.2 排列

随意排列字母 a,b,c, 通过直接列举, 可知一共有 6 种:

$$abe, acb, bac, bea, cab, cba$$

每一种都称为一个 排列 (*permutation*) 。因此,3 个元素一共有 6 种可能的排列方式, 这个结果能通过乘法法则得到:

在排列中第一个位置可供选择的元素有 3 个, 第二个位置可供选择的元素是剩下的两个元素之一, 第三个位置只能选择剩下的 1 个元素。因此, 一共有 3×2×1=6 种可能的排列。

假设有 n 个元素, 那么用上述类似的推理, 可知一共有

$$n{\times}(n-1){\times}(n-2){\times}...{\times}3{\times}2{\times}1 = n!$$

种不同的排列方式。

【例题】某概率论班共有 6 名男生、4 名女生, 有次测验是根据他们的表现来排名次, 假设没有两个学生成绩一样。如果限定男生和女生分开排名次, 那么一共有多少种可能的名次?

解：男生一起排名次有 6! 种可能, 女生一起排名次有 4! 种可能, 一共有 6!×4!=720×24=17280 种可能的名次。

【例题】Jones 女士要把 10 本书放到书架上, 其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书。现在 Jones 女士想整理她的书, 如果相同学科的所有图书都必须放在一起, 那么一共可能有多少种放法?

解：数学书的摆放有 4！可能。化学书有 3！可能。历史书 2！种可能。语文书 1！种可能。每种书又要放在一起，可以抽象理解为书架上面只有 4 本书，这 4 本书的顺序可以是 4！种顺序。在一种顺序下的可能性是 4！ × 3！ × 2！ × 1! 那么 4！种顺序就是 4！ × 4！ × 3! × 2! × 1! = 6912 种可能性。

【例题】用 4 个字母进行排列，P、P、P、E，一共有多少种排列的方式?

解：如果上面的三个 P 都是不同的 P, 即 $P_1\ P_2\ P_3\ E$ 那么可以得到的结果是 4！种不同的排列。可是考虑其中某一个排列，比如说是 EPPP，如果将三个 P 重新排列：

$$\begin{array}{ll} EP_1P_2P_3 & EP_1P_3P_2 \\ EP_2P_1P_3 & EP_2P_3P_1 \\ EP_3P_1P_2 & EP_3P_2P_1 \end{array}$$

可以看到上面 6 种排列，实际上都应该归类为 1 种排列。因此一共有 4!/3! = 4 种排列。

换一个思路可以这样去理解，把上面的 4 个字母的想象成 4 个盒子，如果是先放 E 的话就有 4 个选择。

$$E\square\square\square \quad \square E\square\square \quad \square\square E\square \quad \square\square\square E$$

剩下的三个盒子，可以放 P。如果是不同的 P, 那么就会有 3！种不同的方式去把 P 放进去。比如说 $E\square\square\square$ 这种情况下，就会出现上面的罗列的 6 种不同放 P 的方案。

但是如果考虑到是相同的 P, 所以在放下 E 的时候，已经决定了剩下 P 的位置了，因为所有的方式也就只有原来的 4 种可能了。

【例题】用 6 个字母进行排列，P、P、P、R、R、E，一共有多少种排列的方式?

解：如果上面的每个字母都是独特的，可以等到的结果是 6！种不同的排列方式。考虑其中任何一种排列，比如说 EPPPRR。如果分别将 3 个字母 P 与两个字母 R 重新排列，会得到以下的结果：

$$\begin{array}{ll} EP_1P_2P_3R_1R_2 & EP_1P_2P_3R_2R_1 \\ EP_1P_3P_2R_1R_2 & EP_1P_3P_2R_2R_1 \\ EP_2P_1P_3R_1R_2 & EP_2P_1P_3R_2R_1 \\ EP_2P_3P_1R_1R_2 & EP_2P_3P_1R_2R_1 \\ EP_3P_1P_2R_1R_2 & EP_3P_1P_2R_2R_1 \\ EP_3P_2P_1R_1R_2 & EP_3P_2P_1R_2R_1 \end{array}$$

共计 3！ × 2！种排列。这一切的排列都是同一个形式 EPPPRR。因此，一共有 6！/（3！ × 2!）种排列的可能。

一般来说, 对于 n 个元素, 如果其中 n_1 个元素彼此相同, 另 n_2 个彼此相同,$\cdots$,n_r 个也彼此相同, 那么一共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种不同的排列方式。

综合例题:

【1】用红、黄、蓝三种颜色旗子各 3 面, 每次升旗可以选择升一面、两面或三面在某一旗杆上纵向排列, 则共可以组成多少种不同的信号? 3+3*3+3*3*3

1.3 组合

【例】从 n 个元素中随机的找 r 个元素组成一组，例如从字母 A,B,C,D,E 中选出二个字母组成一组，会有多少种不同的取法?

解：取第一个字母的时候会有五种不同的取法，取第二个字母的时候会有四种不同的取法，也就是说一共有 5×4 种可能。

但是每个包含两个字母的组都被计算了两遍，比如说 AB,BA 其实是同一组。但是在计算的时候被计算成了两组。这样重复计算的遍数，取决于要抽取元素的个数。抽取的两个元素照成的结果是重复 2! 遍。可以想象成抽取的元素的个数其实就是盒子的个数，最后给盒子进行排序的情况要从所有结果中排除掉。

$$\frac{5\times 4}{2\times 1}$$

一般来说如果考虑顺序，从 n 个元素中随机的找 r 个元素组成一组，一共有 $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)$ 种不同的方式。而每个含 r 个元素的小组都被重复计算了 $r!$ 次。所以从 n 个元素中找 r 个元素组成不同组的数目为:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)((n-r)(n-r-1)\cdots 1)}{((n-r)(n-r-1)\cdots 1)r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

对于 $r\leqslant n$, 定义
$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$
表示从 n 个元素中取 r 个元素的可能组合数。

注意:

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\times n!}=1$$

【例】一个有 7 个人，其中 1 个坏蛋，6 个好人。从 7 个人中，取出两个人作为一个组合。问取到的都是好人的情况有多少个? 取到的坏蛋的情况有多少个?

解：取到的都是好人的情况是，在 6 个人里面取 2 个人。

$$\binom{6}{2}=15$$

取到坏人的情况是，在 1 个坏蛋里面取 1 个人。在 6 个好人里面取 1 个人。

$$\binom{1}{1}\binom{6}{1}=6$$

或者是这样想，从 7 个人里面取 2 个人也就是一共 $\binom{7}{2}=21$ 情况。排除掉所有都取到好人的情况，剩下的就是取到坏人的情况了，一共 $21-15=6$ 种情况。

【例】一共有 7 个图形，其中 2 个正方形，5 个三角形。从中抽取 3 个图形做为一组，问所有组合中包括 1 个正方形的组合有多少? 包括 2 个正方形的组合有多少? 3 个全部都是三角形的组合有多少?

解：包括 1 个正方形的组组合，意味着这人组合里面是 1 个正方形加上 2 个三角形, 也就是说我们要在 2 个正方形里面先 1 个正方形，再在 5 个三角形里面选 2 个三角形：

$$\binom{2}{1}\binom{5}{2} = 20$$

包括 2 个正方形的组合，意味着组合里面是 2 个正方形加上 1 个三角形, 也就是说我们要在 2 个正方形里面先 2 个正方形，再在 5 个三角形里面选 1 个三角形：

$$\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$$

3 个全部都是三角形的组合, 意味着组合里面是 3 个三角形, 也就是说我们要在 5 个三角形里面选 3 个三角形：

$$\binom{5}{3} = 10$$

也许你已经注意到，上面三种情况包括了所有组合的可能性。7 个图形里面选 3 个图形的可能性是 $\binom{7}{3} = 35$ 正好是上面三种情况的总合。

【例】一个团体共有 12 人, 其中 5 位女士,7 位男士, 现从中选取 2 位女士和 3 位男士组成一个委员会, 问有多少种不同的委员会? 另外, 如果其中 2 位男土之间有矛盾, 并且拒绝一起工作, 那又有多少种不同的委员会?

解：可能的组合情况是

$$\binom{5}{2}\binom{7}{3} = 350$$

如果其中 2 位男土之间有矛盾的情况可以想象成上面的例子中，在 7 个图形里面选 3 个图形，如果有 2 个是正方形（不能在一起的同事）在一起的情况：

$$\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$$

除了这种在一起的情况，剩下的都是不在一起的情况：

$$\binom{7}{3} - \binom{2}{2}\binom{5}{1} = 30$$

选女性委员会成员的方式不变，因此最后的结果是：

$$\binom{5}{2} \times 30 = 300$$

【例】手上的 2 个球，放到 5 个不同的盒子中，每个盒子最多放一个球，有多少种不同的放法。

解：转变一下思路，其实这个问题和在 5 个盒子中选两个盒子的问题是一样的：

$$\binom{5}{2} = 10$$

【例】假设在一排 n 个天线中, 有 m 个是失效的, 另 n-m 个是有效的, 并且假设所有有效的天线之间不可区分, 同样, 所有失效的天线之间也不可区分, 问有多少种线性排列方式, 使得任何两个失效的天线都不相邻?

解：假设有效的天线是 $|$, 没有连续的两个失效的天线，也就意味着在失效的天线只能放在每个有效的天线的中间，且只能放一个。下面的 $\sqcup$ 表示的是可以放失效的天线的位置。

$$\sqcup \mid \sqcup \mid \sqcup \mid \sqcup \cdots \mid \sqcup$$

n-m 个天线是有效的，那么位置一共是 n-m+1 个。可以想象成上面的每个位置就像是盒子一样，现在只是把 m 个天线放到上面的盒子中，可能性为：

$$\binom{n-m+1}{m}$$

常用组合恒等式

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \leqslant r \leqslant n$$

证明: 设想从 n 个元素中取 r 个, 一共有 $\binom{n}{r}$ 种取法。从另一个角度来考虑, 不妨设这 n 个元素里有一个特殊的, 记为元素 1, 那么取 r 个元素就有两种结果: 取到元素 1 或者取不到元素 1。

取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种 (从 n-1 个元素里面取 r-1 个); 不取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r}$ 种 (从去掉元素 1 的剩下 n-1 个元素中取 r 个). 两者之和就是从 n 个元素里取 r 个的方法之和, 而从 n 个元素中取 r 个共有 $\binom{n}{r}$ 种方法, 所以式上面的等式成立。

1.3.1 二项式定理

二项展开式是依据二项式定理对 $(a+b)^n$ 进行展开得到的式子，由艾萨克 · 牛顿于 1664-1665 年间提出。

二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

组合法证明:

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$$

公式展开后一共包含有 2^n 个求和项 (每次每项相乘，原本的求和项都会是原来的两倍)。每一项都是 n 个因子的乘积。而且每一项都包含因子 x_i 或者 $y_i \quad i = 1, 2, 3 \cdots n$, 例如：

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2) = x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 + y_1y_2$$

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3) = x_1x_2x_3 + y_1x_2x_3 + x_1y_2x_3 + y_1y_2x_3 + x_1x_2y_3 + y_1x_2y_3 + x_1y_2y_3 + y_1y_2y_3$$

这 2^n 个求和项中，有多少项含有 k 个 x_i 和 n-k 个 y_i 作为因子?

也就是说，在上面 $(n=3)$ 的例子中，当 $(k=1)$ 时，问有 1 个含有 x_i 与 2 个含有 y_i 的求和项有几个？分别是：

$$y_1y_2x_3 + +y_1x_2y_3 + x_1y_2y_3$$

相当于是在这 3 个位置中，选出 1 个位置，放下 x_i，也就是 $\binom{3}{1}$

如果把上面的结论进行一般性的推广的话：含有 k 个 x_i 和 n-k 个 y_i 因子的求和项的个数，对应着从 n 个元素 $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$ 中取 k 个元素的构成的一组取法。因此，一共有 $\binom{n}{k}$ 个这样的项。如果每个 $x_i = x$, $y_i = y$ 这样的话:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

【例】一个有 n 个元素的集合共有多少子集?

解：含有 k 个元素的子集一共有 $\binom{n}{k}$ 个, 因此所求答案为：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

这里的思考过程与上面证明二项系数的求和项的总数的过程是一样的。

1.3.2 多项式定理

【例】把 n 个不同的元素分成 r 组, 每组分别有 $n_1, n_2, n_3, n_4 \cdots n_i$ 个元素, 其中 $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$。问一共有多少种不同的分法?

第一组元素有 $\binom{n}{n_1}$ 种选取方法, 选定第一组元素后, 只能从剩下的 $n - n_1$ 个元素中选。第二组元素, 一共有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种取法, 接下来第三组有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种取法。因此, 根据推广的计数基本法则, 将 n 个元素分成 r 组可能存在：

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots n_{r-1}}{n_r} \\
=&\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots n_{r-1})!}{0!n_r!} \\
=&\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_r!}
\end{aligned}$$

【例】某个小城的警察局有 10 名警察, 其中 5 名警察需要在街道巡逻,2 名警察需要在局里值班, 另外 3 名留在局里待命. 问把 10 名警察分成这样的 3 组共有多少种不同分法?

解: 一共有 10!/(5!×2!×3!)=2520 种分法。

【例】把 10 个孩子平均分成两组进行篮球比赛, 一共有多少种分法?

解：这个问题与上例的不同之处在于分成的两组是不用考虑顺序的. 也就是说, 这里没有 A,B 两组之分, 仅仅分成各自为 5 人的两组。故所求答案为 $\frac{10!/(5!\cdot 5!)}{2!} = 126$

多项式定理

多项式系数

如果 $n_1+n_2+n_3+\cdots+n_r=n$, 则定义 $\binom{n}{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_r}$ 为 $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_r!}$

$\binom{n}{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_r}$ 表示把 n 个不同的元素分成为 $n_1,n_2,n_3,\cdots,n_r$ 一共 r 个不同组的组合数。

多项式定理

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^n=\sum_{(n_1,n_2,n_3\cdots n_r),n_1+n_2+n_3\cdots n_r=n}\binom{n}{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots x_r^{n_r}$$

其中：$n_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots r$

小结：

todo