«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия  
Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет

По лабораторной работе №4

Вариант 4

Студент:

*Ильин Н. С.*

*Р3210*

Преподаватель:

*Наумова Н. А.*

Санкт-Петербург, 2025 г.

**Оглавление**

[**Цель работы**: 3](#_Toc196202348)

[**1 Вычислительная реализация задачи:** 3](#_Toc196202349)

[**2. Программная реализация** 5](#_Toc196202350)

[**Блок схемы** 5](#_Toc196202351)

[**Листинг программы** 9](#_Toc196202352)

[**Примеры и результаты работы программы** 11](#_Toc196202353)

[**Выводы**: 13](#_Toc196202354)

# **Цель работы**:

Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

# **1 Вычислительная реализация задачи:**

Линейная аппроксимация:

y =  **;** n = 11 ; x [-4; 0] ; h = 0.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| xi | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 | 3.6 | 4.0 |
| yi | 0 | 1.490 | 2.721 | 2.964 | 2.274 | 1.500 | 0.968 | 0.642 | 0.441 | 0.314 | 0.231 |

φ(x) = a + bx

Вычисляем суммы: sx = 22, sxx = 61.6, sy = 13,55 sxy = 20,55

φ(x) =

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| xi | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 | 3.6 | 4.0 |
| yi | 0 | 1,49 | 2,721 | 2,964 | 2,274 | 1,5 | 0,968 | 0,642 | 0,441 | 0,314 | 0,231 |
| φ(xi) | 1,976 | 1,827 | 1,678 | 1,530 | 1,381 | 1,232 | 1,083 | 0,934 | 0,786 | 0,637 | 0,488 |
| (φ(xi)- yi)^2 | 3,905 | 0,114 | 1,087 | 2,058 | 0,798 | 0,072 | 0,013 | 0,085 | 0,119 | 0,104 | 0,066 |

**σ = = 0,875**

Квадратичная аппроксимация:

y =  **;** n = 11 ; x [-4; 0] ; h = 0.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| xi | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 | 3.6 | 4.0 |
| yi | 0 | 1.490 | 2.721 | 2.964 | 2.274 | 1.500 | 0.968 | 0.642 | 0.441 | 0.314 | 0.231 |

φ(x) = a + bx + cx2

Вычисляем суммы:

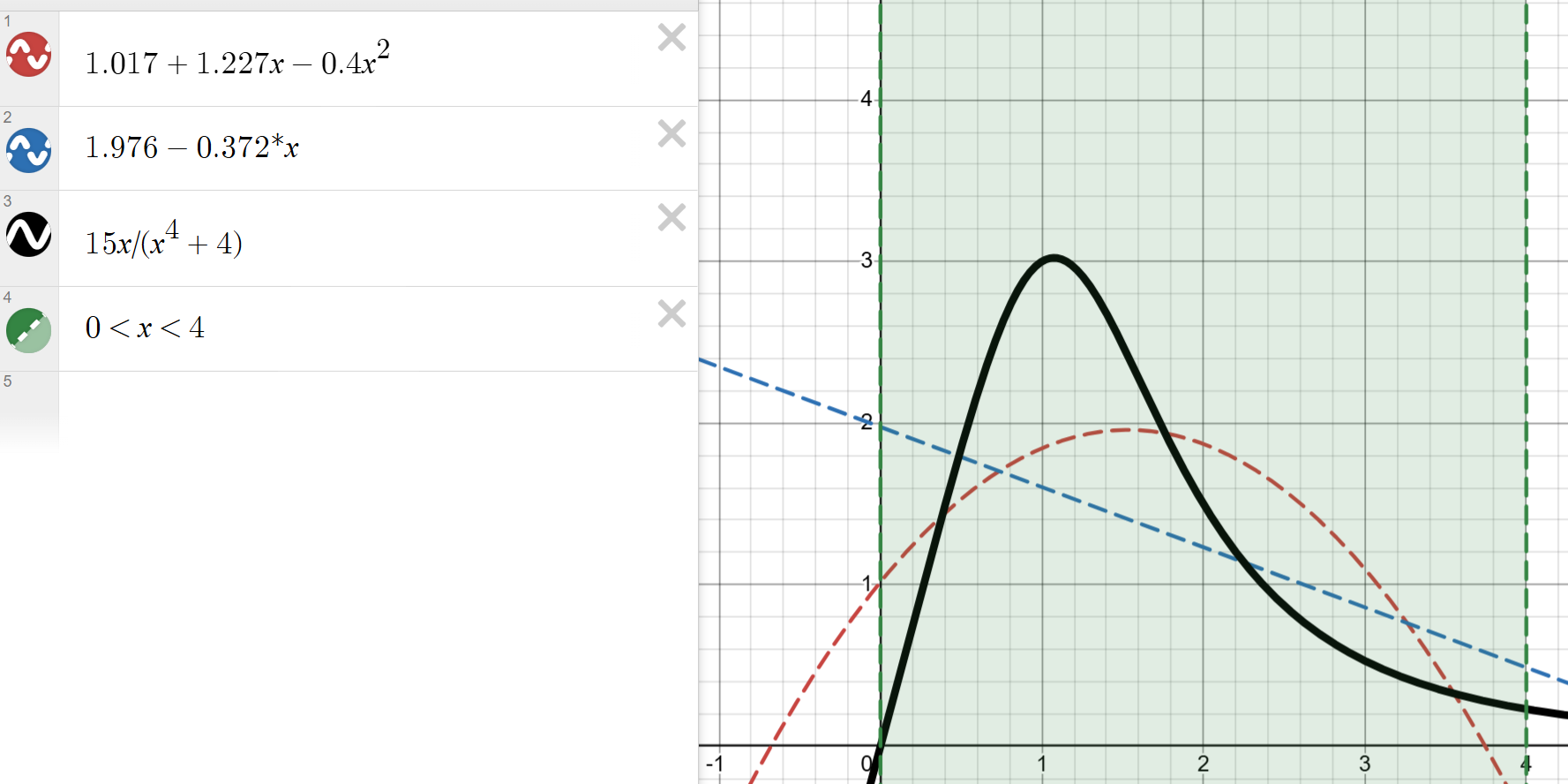
sx = 22, sxx = 61.6, sxxx = 193,6; sxxxx = 648,5248; sy = 13,55; sxy = 20,55; sxxy = 40,96

φ(x)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| xi | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 | 3.6 | 4.0 |
| yi | 0 | 1.490 | 2.721 | 2.964 | 2.274 | 1.500 | 0.968 | 0.642 | 0.441 | 0.314 | 0.231 |
| φ(xi) | 1,017 | 1,444 | 1,743 | 1,913 | 1,956 | 1,871 | 1,658 | 1,317 | 0,847 | 0,250 | -0,475 |
| (φ(xi)- yi)^2 | 1,034 | 0,002 | 0,957 | 1,104 | 0,101 | 0,138 | 0,476 | 0,455 | 0,165 | 0,004 | 0,498 |

**σ = = 0,67**

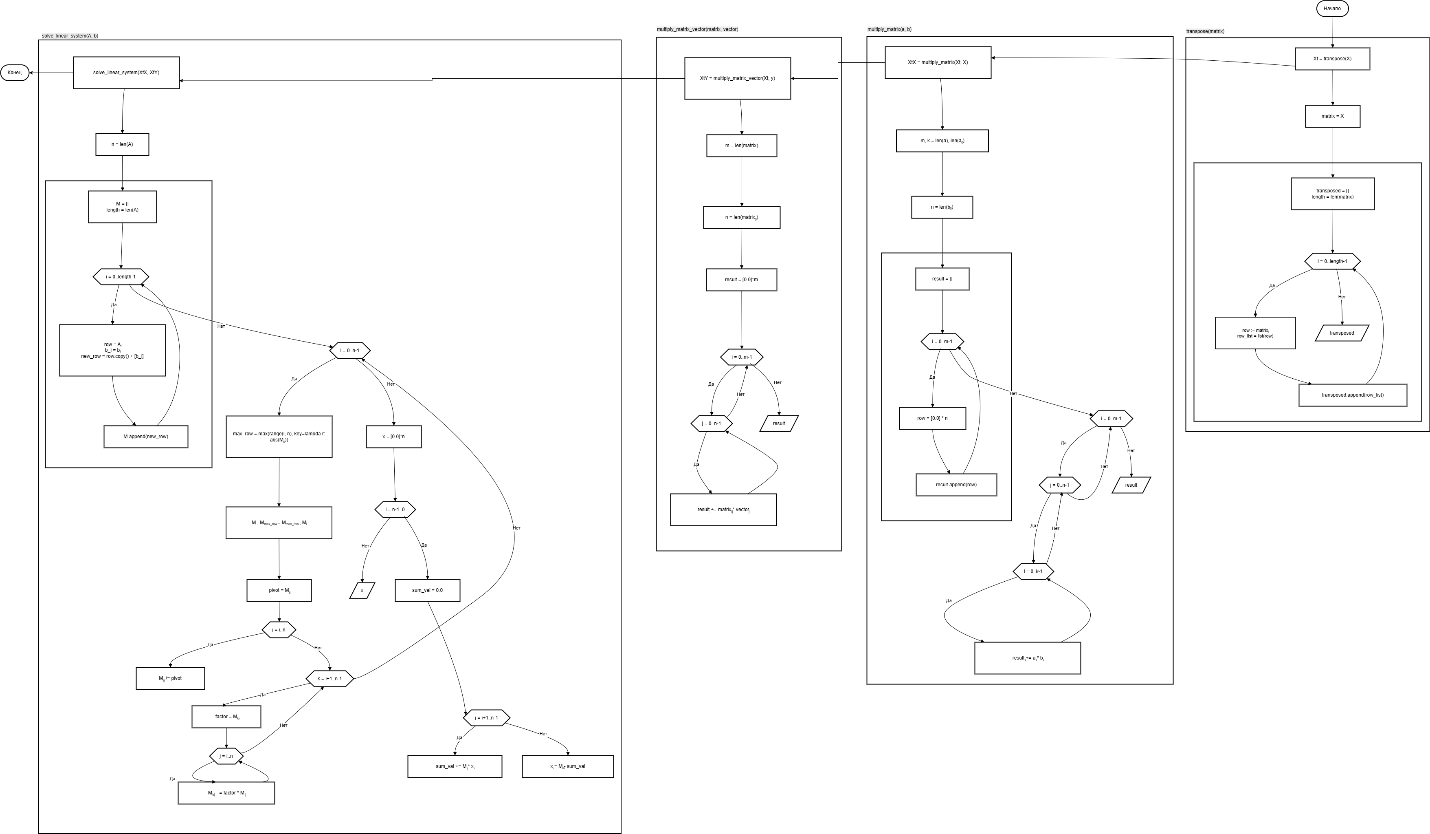
0,67 < 0,875 у квадратичной аппроксимации среднеквадратичное отклонение меньше, поэтому это приближение лучше.



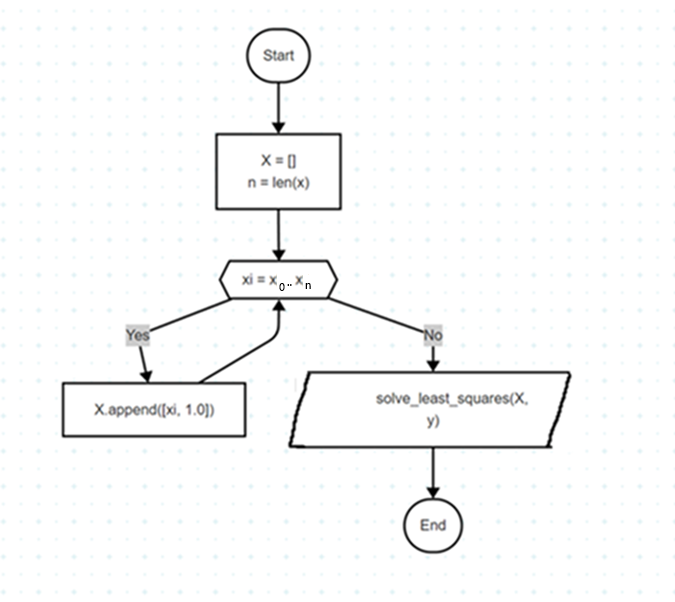
# **2. Программная реализация**

# **Блок схемы**

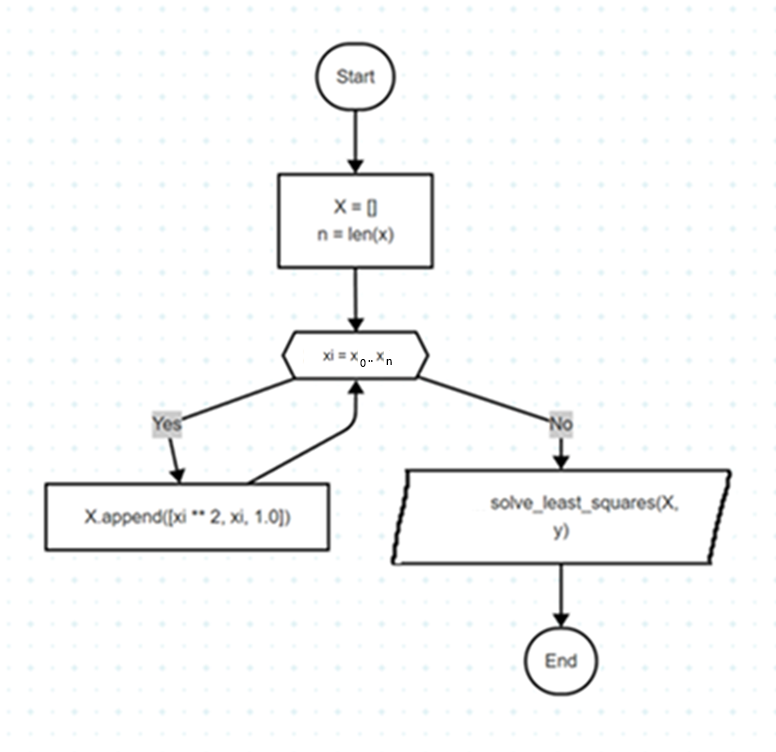
МНК



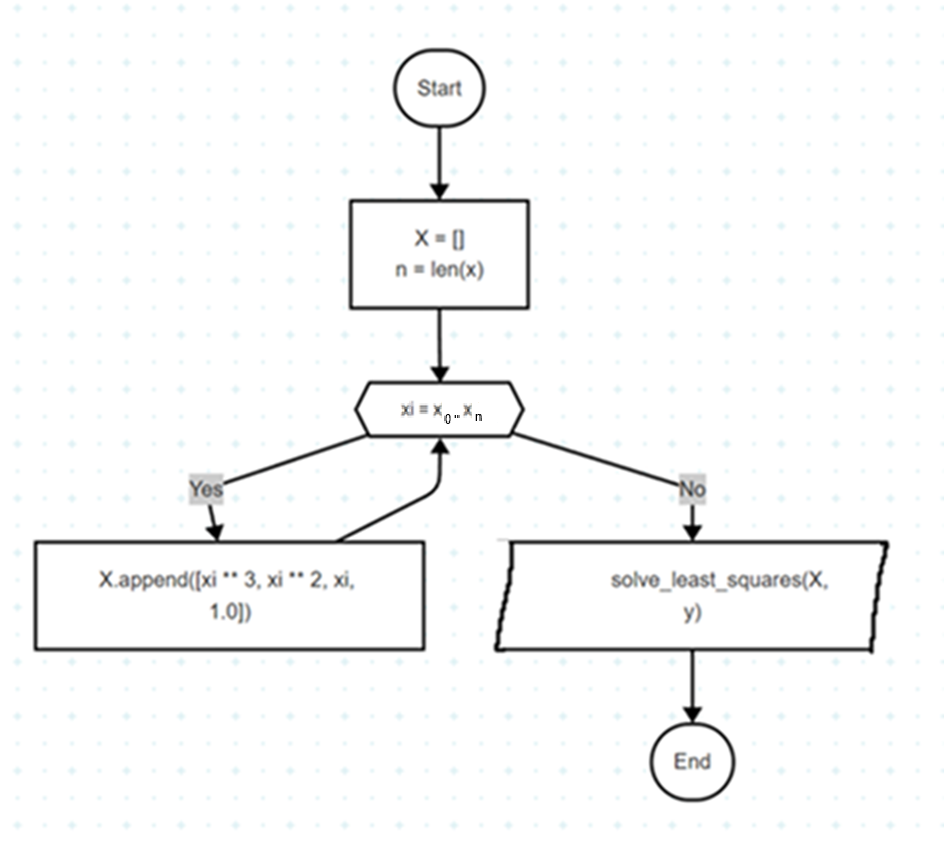
Линейная фукнция



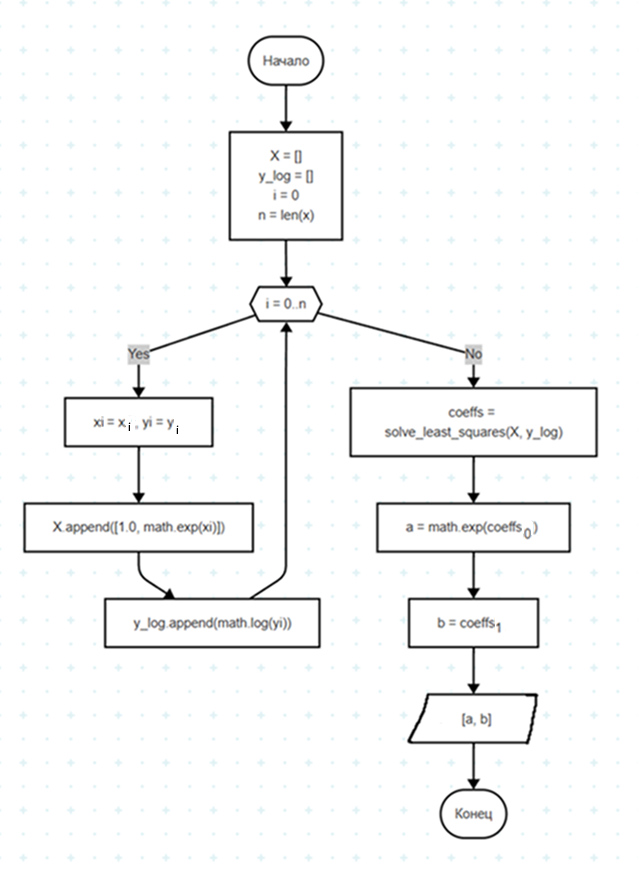
Полиномиальная функция 2-й степени



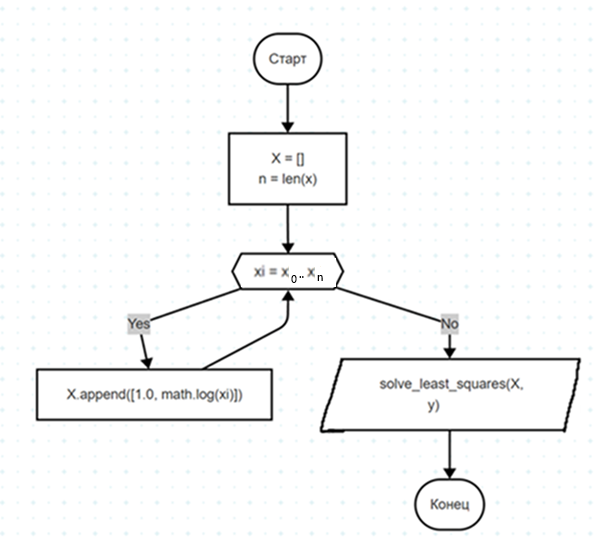
Полиномиальная функция 3-й степени



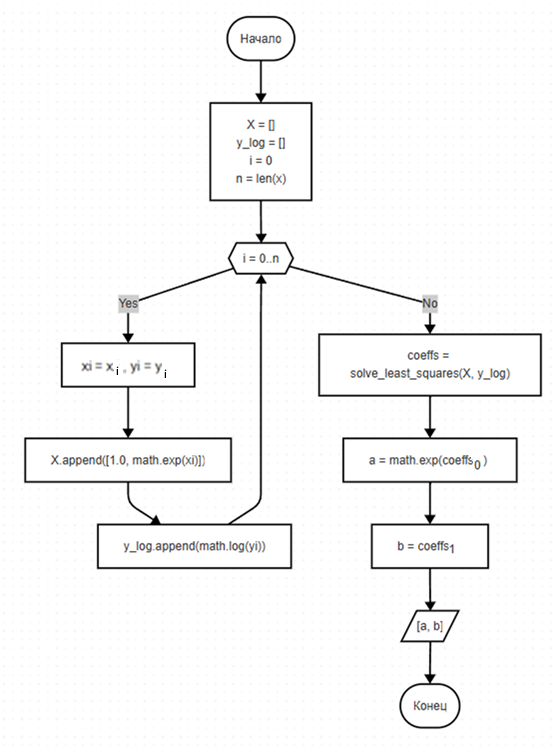
Экспоненциальная функция: y = a \* exp(b\*x)



Логарифмическая функция



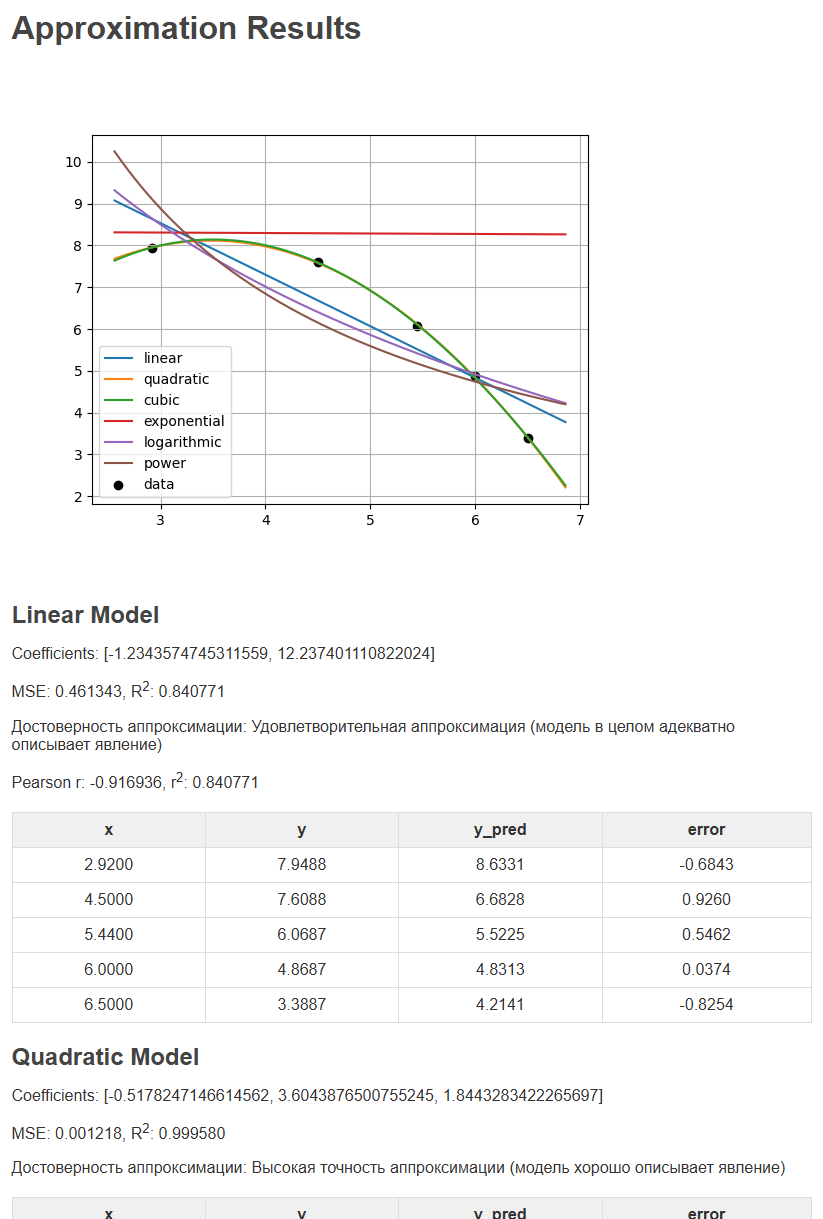
Степенная функция



# **Листинг программы**

|  |
| --- |
| import math  def calculate\_mse(errors):  """Расчет среднеквадратичного отклонения"""  return sum(e \* e for e in errors) / len(errors)  def calculate\_pearson\_correlation(x, y, coeffs=None):  """Расчет коэффициента корреляции Пирсона"""  mean\_x = sum(x) / len(x)  mean\_y = sum(y) / len(y)  numerator = 0.0  denominator\_x = 0.0  denominator\_y = 0.0  for xi, yi in zip(x, y):  numerator += (xi - mean\_x) \* (yi - mean\_y)  denominator\_x += (xi - mean\_x) \*\* 2  denominator\_y += (yi - mean\_y) \*\* 2  return numerator / math.sqrt(denominator\_x \* denominator\_y)  def fit\_linear(x, y):  """Линейная функция: y = a\*x + b"""  X = [[xi, 1.0] for xi in x]  return solve\_least\_squares(X, y)  def fit\_quadratic(x, y):  """Полиномиальная функция 2-й степени: y = a\*x^2 + b\*x + c"""  X = [[xi \*\* 2, xi, 1.0] for xi in x]  return solve\_least\_squares(X, y)  def fit\_cubic(x, y):  """Полиномиальная функция 3-й степени: y = a\*x^3 + b\*x^2 + c\*x + d"""  X = [[xi \*\* 3, xi \*\* 2, xi, 1.0] for xi in x]  return solve\_least\_squares(X, y)  def fit\_exponential(x, y):  """Экспоненциальная функция: y = a \* exp(b\*x)"""  X = [[1.0, math.exp(xi)] for xi in x]  y\_log = [math.log(yi) for yi in y]  coeffs = solve\_least\_squares(X, y\_log)  a = math.exp(coeffs[0])  b = coeffs[1]  return [a, b]  def fit\_logarithmic(x, y):  """Логарифмическая функция: y = a + b\*ln(x)"""  X = [[1.0, math.log(xi)] for xi in x]  return solve\_least\_squares(X, y)  def fit\_power(x, y):  """Степенная функция: y = a \* x^b"""  X = [[1.0, math.log(xi)] for xi in x]  y\_log = [math.log(yi) for yi in y]  coeffs = solve\_least\_squares(X, y\_log)  a = math.exp(coeffs[0])  b = coeffs[1]  return [a, b]  def solve\_least\_squares(X, y):  """Решение системы уравнений методом наименьших квадратов"""  Xt = transpose(X)  XtX = multiply\_matrix(Xt, X)  XtY = multiply\_matrix\_vector(Xt, y)  return solve\_linear\_system(XtX, XtY)  def transpose(matrix):  """Транспонирование матрицы"""  return [list(row) for row in zip(\*matrix)]  def multiply\_matrix(a, b):  """Умножение двух матриц"""  m, k = len(a), len(a[0])  n = len(b[0])  result = [[0.0] \* n for \_ in range(m)]  for i in range(m):  for j in range(n):  for l in range(k):  result[i][j] += a[i][l] \* b[l][j]  return result  def multiply\_matrix\_vector(matrix, vector):  """Умножение матрицы на вектор"""  m = len(matrix)  n = len(matrix[0])  result = [0.0] \* m  for i in range(m):  for j in range(n):  result[i] += matrix[i][j] \* vector[j]  return result  def solve\_linear\_system(A, b):  """Решение системы линейных уравнений Ax = b методом Гаусса с выбором главного элемента"""  n = len(A)  M = [row[:] + [b\_i] for row, b\_i in zip(A, b)]  # Прямой ход  for i in range(n):  max\_row = max(range(i, n), key=lambda r: abs(M[r][i]))  M[i], M[max\_row] = M[max\_row], M[i]  pivot = M[i][i]  for j in range(i, n + 1):  M[i][j] /= pivot  for k in range(i + 1, n):  factor = M[k][i]  for j in range(i, n + 1):  M[k][j] -= factor \* M[i][j]  # Обратный ход  x = [0.0] \* n  for i in range(n - 1, -1, -1):  x[i] = M[i][n] - sum(M[i][j] \* x[j] for j in range(i + 1, n))  return x |

## **Примеры и результаты работы программы**



Github: <https://github.com/MrTheFall/computational_math/tree/main/lab4>

# **Выводы**:

В рамках лабораторной работы были исследованы численные методы интегрирования с использованием языка Python. В процессе работы были изучены различные подходы к вычислению определенных интегралов, включая методы прямоугольников (левых, правых и средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона.

Была разработана программа, которая позволяет выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиений интервала. После реализации всех рассмотренных методов вычисления интегралов было установлено, что метод Симпсона является наиболее точным и быстрым.

В ходе выполнения работы были проведены расчеты интегралов различными методами, а также выполнено сравнение полученных результатов с точными значениями интегралов.

Кроме того, была решена дополнительная задача, связанная с исследованием сходимости несобственных интегралов второго рода и их вычислением с использованием рассмотренных численных методов в случаях, когда подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке a, точке b или на отрезке интегрирования.