

## Appunti Mate II

# Indice

1.	Accenni di GAL	5
1.1.	Lista Appelli	5
1.2.	Funzioni di più Variabili	5
1.2.1.	Rappresentazione	5
1.2.2.	Definizione funzioni in 2 Variabili	5
1.2.3.	$\mathbb{R}^2$ come struttura lineare (spazio vettoriale)	5
1.2.4.	$\mathbb{R}^2$ come struttura euclidea	6
1.2.4.1.	Prodotto Scalare	6
1.2.4.2.	Norma di un vettore	6
1.2.4.3.	Distanza tra 2 punti	6
1.2.4.4.	Angolo tra 2 vettori	6
1.2.5.	Coordinate polari	6
1.3.	Retta nel piano	6
1.4.	Equazioni lineari	7
1.4.1.	Regola di Cramer	8
1.5.	$\mathbb{R}^3$ come struttura euclidea	8
1.6.	Il piano	8
1.6.1.	Caso $c \neq 0$	8
1.6.2.	Rappresentazione di una retta in $\mathbb{R}^3$	9
1.6.2.1.	Equazione parametrica	9
1.6.2.2.	Equazione cartesiana	9
1.7.	Equazione parametrica del piano	9
1.8.	Significato geometrico del determinante	9
1.9.	Determinante matrice 3x3	10
1.10.	Sistema lineare a 3 equazioni	10
1.10.1.	Esercizio di un'equazione lineare a 3 equazioni con regola di Cramer	10
1.11.	Prodotto vettoriale	11
1.11.1.	Esempio	11
1.12.	Prodotto misto di 3 vettori	11
2.	Curve in $\mathbb{R}^n$	12
2.1.	$\mathbb{R}^n$	12
2.1.1.	Spoiler	12
2.2.	Curve nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$	12
2.3.	Vettore «velocità» (tangente alla curva)	12
2.4.	Curva regolare	12
2.4.1.	Moto rettilineo uniforme	13
2.4.2.	Moto circolare uniforme	13
2.4.3.	Moto elicoidale	13
2.5.	Lunghezza di una curva regolare	14
2.5.1.	Esempio	14
2.5.2.	Lunghezza della circonferenza	14
3.	Funzioni in più variabili	15
3.1.	Limiti	15
3.1.1.	Continuità	15
3.2.	Differenziabilità	15
3.2.1.	Derivata parziale	16

3.2.2.	Differenziabilità .....	16
3.2.3.	Differenziabilità $\Rightarrow$ Continuità .....	17
3.3.	Teorema di derivazione della funzione composta .....	17
3.3.1.	Gradiente .....	18
3.3.2.	Caso in n variabili .....	18
3.4.	Curva di livello .....	18
3.4.1.	Teorema .....	19
3.5.	Punti Stazionari .....	19
3.5.1.	Intorno .....	19
3.5.2.	Minimo relativo .....	19
3.5.3.	Massimo relativo .....	19
4.	Sviluppo di Taylor di una funzione in 2 variabili .....	20
4.1.	Sviluppo di Taylor in un punto stazionario $(x_0, y_0)$ .....	21
4.1.1.	Matrice Hessiana .....	21
4.2.	La forma quadratica $H_{11}\Delta x^2 + 2H_{12}\Delta x\Delta y + H_{22}\Delta y^2$ .....	22
5.	Superfici .....	23
5.1.	Superfici bidimensionali nello spazio tridimensionale .....	23
5.1.1.	Superfici regolari .....	23
5.2.	Superfici come grafici di funzioni di 2 variabili .....	23
5.3.	Superfici di livello .....	23
5.4.	Derivazione di una funzione composta con superficie .....	24
5.5.	Restrizione di una funzione in 3 variabili .....	24
5.6.	Teorema della funzione implicita .....	24
5.6.1.	Per 3 variabili .....	24
5.6.2.	Derivata della funzione del teorema della funzione implicita .....	25
5.6.2.1.	Per 3 variabili .....	25
6.	Punti stazionari per funzioni ristrette .....	26
6.1.	Moltiplicatori di Lagrange .....	26
6.2.	Punti stazionari per funzioni ristrette in 3 variabili .....	27
6.3.	Moltiplicatori di Lagrange in 3 variabili .....	27
6.4.	Punti stazionari su 2 restrizioni .....	27
6.5.	Moltiplicatori di Lagrange per 2 restrizioni .....	27
7.	Massimi e minimi assoluti .....	29
7.1.	Definizioni .....	29
7.2.	Teorema di Weistrass .....	29
8.	Integrali di linea .....	30
8.1.	Lunghezza di un arco di curva .....	30
8.2.	Integrali di linea di I specie .....	30
8.3.	Campo vettoriale .....	30
8.4.	Integrali di linea di II specie .....	30
8.4.1.	Forma differenziale .....	31
9.	Campi vettoriali conservativi .....	32
9.1.	Teorema .....	32
9.2.	Requisito necessario perché un campo sia conservativo .....	32
9.3.	Dominio di definizione di un campo vettoriale .....	32
9.4.	Dominio semplicemente connesso .....	32
9.5.	Lemma di Pointcarré .....	33

10. Integrali doppi .....	34
10.1. Misura di jordan .....	34
10.2. Definizione integrale doppio .....	35
10.2.1. Proprietà .....	35
10.2.2. Teorema della media .....	35
10.3. Come svolgere un integrale doppio .....	35
11. Cambio di variabili di integrali multipli .....	37
11.1. Calcolare l'area del disco di raggio $R$ .....	37
11.2. Cambio di variabili per integrali multipli .....	38
11.3. Coordinate cilindriche .....	38
11.4. Coordinate sferiche .....	38
12. Integrali di superficie .....	40
12.1. Integrali di superficie di I specie .....	40
12.2. Integrali di superficie di II specie .....	40
13. Formula di Green .....	41
13.1. Diversi tipi di regione .....	41
13.2. Dimostrazione .....	41

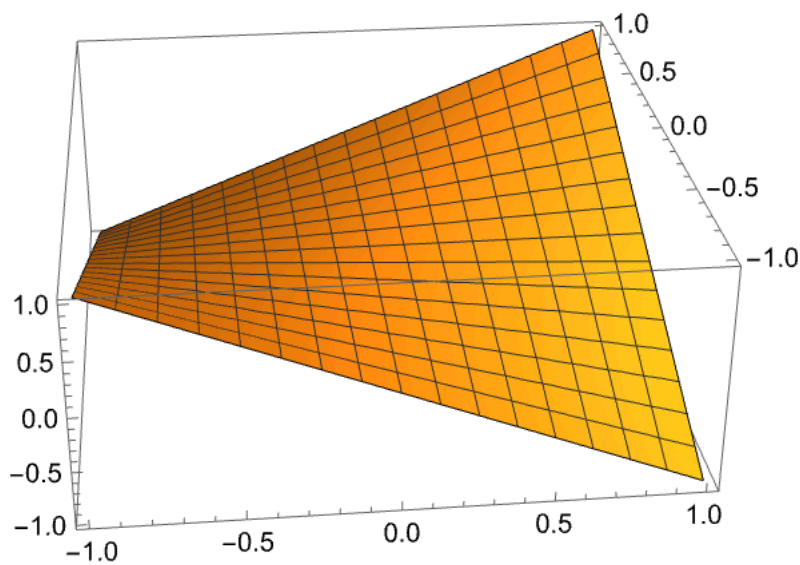
# 1. Accenni di GAL

## 1.1. Lista Appelli

1. Gennaio
2. Febbraio
3. Aprile
4. Giugno
5. Luglio
6. Settembre
7. Novembre

## 1.2. Funzioni di più Variabili

### 1.2.1. Rappresentazione



### 1.2.2. Definizione funzioni in 2 Variabili

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall 1 \leq i \leq n\}$$

$\mathbb{R}^2$

- struttura lineare
- struttura euclidea

### 1.2.3. $\mathbb{R}^2$ come struttura lineare (spazio vettoriale)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$c\vec{x} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

### 1.2.4. $\mathbb{R}^2$ come struttura euclidea

#### 1.2.4.1. Prodotto Scalare

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$

Dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i 2 vettori.

Quando  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$  i vettori  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  sono ortogonali.

#### 1.2.4.2. Norma di un vettore

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

#### 1.2.4.3. Distanza tra 2 punti

$$d(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$$

dove  $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1)\vec{y}$

#### 1.2.4.4. Angolo tra 2 vettori

$$\cos(\theta_{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

### 1.2.5. Coordinate polari

Dato un vettore  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  e l'angolo  $\varphi$  compreso tra il vettore e l'asse orizzontale, associato al vettore la coppia di numeri  $(\|\vec{x}\|, \varphi)$ , dove quindi:

$$x_1 = \|\vec{x}\| \cos(\varphi)$$

$$x_2 = \|\vec{x}\| \sin(\varphi)$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \|\vec{x}\| \cos(\varphi) \\ \|\vec{x}\| \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

ora consideriamo il vettore  $(\|\vec{y}\|, \psi)$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| (\cos(\varphi) \cos(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\psi)) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$$

## 1.3. Retta nel piano

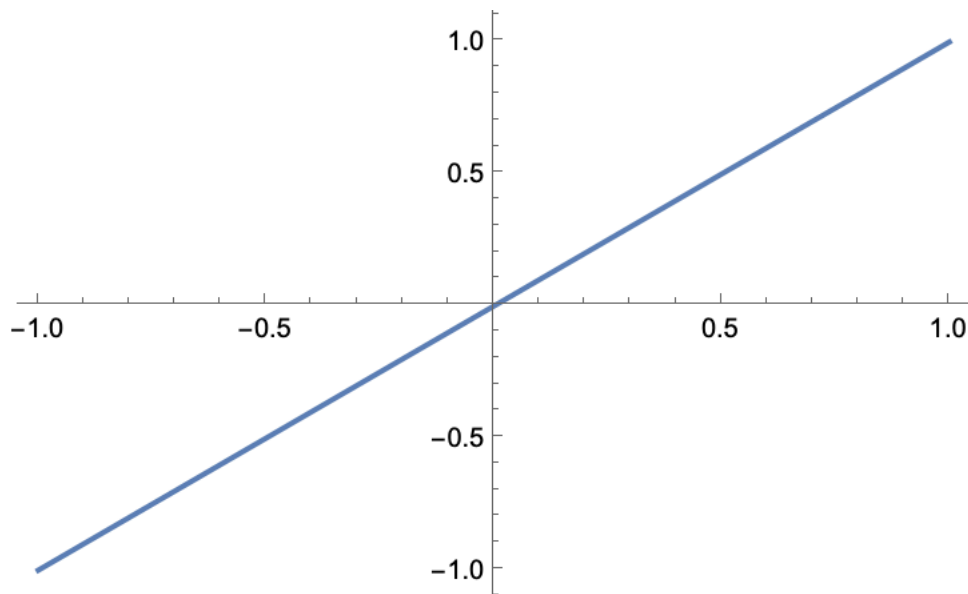
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$$

$x_2 = m x_1 + q$  è meno generale

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$$



dove la retta è perpendicolare a  $\vec{a}$  e passa per l'origine perchè  $c = 0$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c, c \neq 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_1x_1^0 + a_2x_2^0$$

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

questa è l'equazione cartesiana.

Data  $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$  e  $\vec{V} = (v_1, v_2)$ , l'equazione parametrica della retta passante per  $\vec{x}_0$  e parallela a  $\vec{V}$  è data da  $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{V}t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 + v_1 t \\ x_2^0 + v_2 t \end{pmatrix}$$

## 1.4. Equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Esistono 2 casi:

1. Le rette non sono parallele ed  $\exists!$  una soluzione.
2. Le rette sono parallele
  - $\nexists$  una soluzione.
  - Ci sono infinite soluzioni (le due equazioni rappresentano la stessa retta)

Siano  $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$  le due rette sono parallele se:  $\exists c \mid \vec{a}_1 = c\vec{a}_2$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists c \mid a_1 = ca_2$$

**VAI A CERCARE LA DIMOSTRAZIONE**

#### 1.4.1. Regola di Cramer

$$\det(A) \neq 0$$

$$x_i = \frac{\det(A^i)}{\det(A)}$$

$$\text{dove } A^i = A_0 \dots A_{i-1} B A_{i+1} \dots A_n \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

### 1.5. $\mathbb{R}^3$ come struttura euclidea

siano  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \vec{y}_i = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

### 1.6. Il piano

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$$

prendiamo il caso

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$$

indica il piano passante per 0 e ortogonale (perpendicolare) ad  $\vec{a}$

#### 1.6.1. Caso $c \neq 0$

Sia  $\vec{x}_0$  appartenente al piano

$$a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + a_3x_3^0 = c$$

$$a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + a_3x_3^0 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + a_3(x_3 - x_3^0) = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

**ES** scrivere l'equazione del piano passante per  $(1, 2, 3)$  e ortogonale a  $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 0$$



$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

### 1.6.2. Rappresentazione di una retta in $\mathbb{R}^3$

#### 1.6.2.1. Equazione parametrica

dato  $\vec{x}_0$  appartenente alla retta e  $\vec{v}$  parallela ad essa un equazione parametrica della retta è:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1^0 + tv_1 \\ x_2 = x_2^0 + tv_2 \\ x_3 = x_3^0 + tv_3 \end{cases}$$

#### 1.6.2.2. Equazione cartesiana

Sia la retta

$$\begin{bmatrix} t \\ t \\ 1+t \end{bmatrix} \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1+t \end{cases} \xrightarrow{\text{eliminando la } t} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases}$$

**NB** sono infiniti i piani che hanno una retta come intersezione, quindi esistono infinite equazione cartesiana di una retta in  $\mathbb{R}^3$

### 1.7. Equazione parametrica del piano

$$P : x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

sostituendo  $x_1 = t, x_2 = s$ , allora  $x_3 = 6 - s - t$

$$P = \begin{bmatrix} t \\ s \\ 6-s-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \in P, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \notin P, \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin P$$

dove però  $t\vec{v} + s\vec{w}$  è l'equazione parametrica del piano parallelo a  $P$  e passante per l'origine. Quindi  $\vec{v}, \vec{w}$  non sono linearmente dipendenti, e appartengono al piano passante per l'origine e parallelo a  $P$ .

### 1.8. Significato geometrico del determinante

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$\det(\vec{v}\vec{w})$  coincide, a meno del segno con l'area del parallelogramma generato dai 2 vettori.

$$\vec{v} = (\|\vec{v}\|, \varphi), \vec{w} = (\|\vec{w}\|, \psi)$$

$$\det(\vec{v}\vec{w}) = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \varphi \sin \psi - \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \varphi \cos \psi$$

$$\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| (\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi) = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta_{\vec{v}, \vec{w}}$$

### 1.9. Determinante matrice 3x3

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_{ji} \det(A^{ji}) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_{ij} \det(A^{ij}), \forall 1 \leq j \leq 3$$

dove  $A^{ij}$  è la matrice  $A$  senza la colonna  $j$  e la riga  $i$ .

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)}$$

siano  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$  tre vettori di dimensione 3.

$$|\det(\vec{v}\vec{w}\vec{z})| = \left| \det \begin{bmatrix} \vec{v}^t \\ \vec{w}^t \\ \vec{z}^t \end{bmatrix} \right|$$

e indica il volume del parallelepipedo generato dai tre vettori.

### 1.10. Sistema lineare a 3 equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Trovare la soluzione significa trovare l'intersezione tra i 3 piani

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists! \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{esistono infinite soluzioni} \\ \text{non esiste alcuna soluzione} \end{cases}$$

#### 1.10.1. Esercizio di un equazione lineare a 3 equazioni con regola di Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 2 + 2 = 4$$

$$\det(BA^2A^3) = \det A = 4$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 (M^1 = M^2)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 (M^1 = M^3)$$

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1, x_2 = \frac{0}{4} = 0, x_3 = \frac{0}{4} = 0, \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 1.11. Prodotto vettoriale

siano  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta_{\vec{v}, \vec{w}} \vec{n}$$

dove  $\|\vec{n}\| = 1$  e  $\vec{n}$  ortogonale ad  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_3 \end{bmatrix}$$

dove  $\vec{e}_i$  è l' $i$ -esimo vettore della base canonica.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### 1.11.1. Esempio

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_3$$

### 1.12. Prodotto misto di 3 vettori

siano  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ , il prodotto misto dei 3 è:

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

Il prodotto misto coincide con il volume del parallelepipedo generato dai 3 vettori.

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \underbrace{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta}_{\text{area del parallelogramma generato da } \vec{v} \text{ e } \vec{w}} \underbrace{\|\vec{n}\| \|\vec{z}\| \cos \varphi}_{\text{altezza del parallelepipedo}}$$

**Esercizio per casa** dimostrare che

$$\begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

sono un sacco di passaggi ma è molto semplice.

## 2. Curve in $\mathbb{R}^n$

### 2.1. $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall 1 \leq i \leq n\}$$

$$c \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

#### 2.1.1. Spoiler

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ (campi vettoriali)}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

### 2.2. Curve nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

Una curva parametrizzata nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  è una funzione che associa valori vettoriali

$$\vec{x} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Assumeremo che  $x_i(t)$  sia una funzione derivabile con derivata continua (Classe c1).

### 2.3. Vettore «velocità» (tangente alla curva)

$$\vec{v}(t_0) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t_0 + \Delta t) - \vec{x}(t_0)}{\Delta t}$$

- $\vec{v}(t_0)$  è tangente alla curva in  $\vec{x}(t_0)$ .
- Il verso di  $\vec{v}$  dipende dal verso in cui è percorsa la curva.

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \begin{bmatrix} x_1(t_0 - \Delta t) \\ \vdots \\ x_n(t_0 - \Delta t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{x_1(t_0 + \Delta t) - x_1(t_0)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{x_n(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0)}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

**Esempio** (preso su carta)

### 2.4. Curva regolare

Una curva è regolare se:

1. Le componenti della curva sono derivabili con derivata continua nell'intervallo  $[a, b]$  dove la curva è definita.
2.  $\vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2) \forall t_1 \neq t_2$ , la curva non ha autointersezioni.

3.  $\|\vec{v}\| > 0 \forall t \in [a, b]$ .

#### 2.4.1. Moto rettilineo uniforme

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(\vec{x}_0 + t\vec{v})}{dt} = \vec{v}$$

Moto rettilineo uniforme (a velocità costante).

#### 2.4.2. Moto circolare uniforme

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} = \sqrt{R(\cos^2 t + \sin^2 t)} = R\sqrt{1} = R$$

#### 2.4.3. Moto elicoidale

$$\begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ \frac{t}{2\pi} \end{bmatrix}$$

Si nota perché le prime due descrivono una circonferenza, ma lungo la terza coordinata ci si sposta linearmente di  $\frac{1}{2\pi}$ .

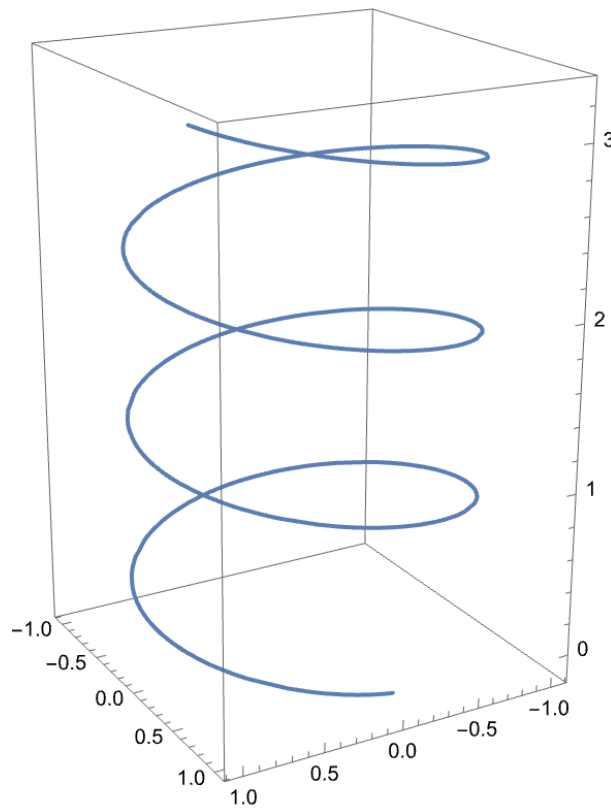


Figura 1: Un moto elicoidale

## 2.5. Lunghezza di una curva regolare

**Def** si chiama lunghezza di una curva regolare.  $\vec{x}(t), t \in [a, b]$ .

$$l = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt$$

### 2.5.1. Esempio

Siano due punti  $a, b$ , la parametrizzazione standard della rette che le unisce è:

$$\begin{bmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ a_2 + t(b_2 - a_2) \end{bmatrix}$$

quindi la lunghezza da  $[0, 1]$  della retta è:

$$\int_0^1 \left\| \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} \right\| dt = \int_0^1 \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} dt = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

### 2.5.2. Lunghezza della circonferenza

$$\int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

### 3. Funzioni in più variabili

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'obiettivo è studiarne limiti, continuità e differenziabilità.

Il grafico di una funzione  $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  è l'insieme dei punti in  $\mathbb{R}^{n+1}$  della forma  $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$

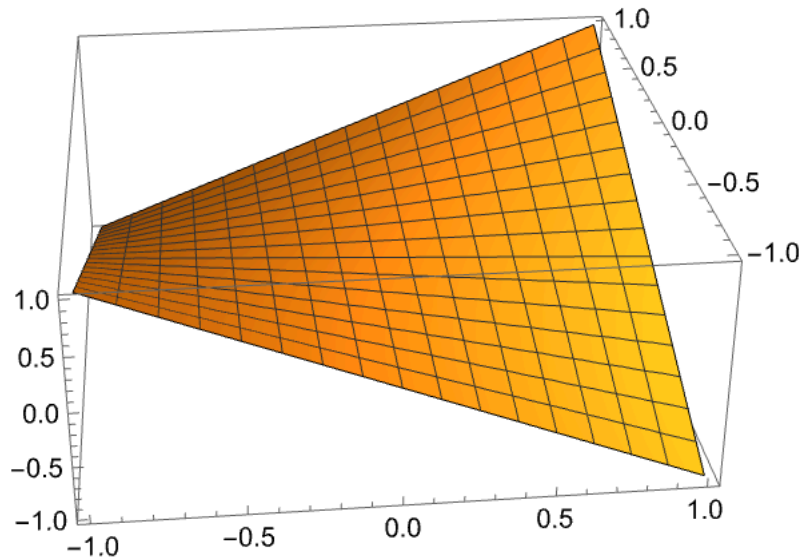


Figura 2: Grafico di una funzione in 2 variabili

Per le funzioni in più di 2 variabili la rappresentazione è praticamente impossibile.

#### 3.1. Limiti

Per le funzioni in una variabile la definizione di limite è:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ se } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \text{ che soddisfa } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ vale } |f(x) - l|$$

Per funzioni in più variabili:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = l$$

Se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.  $\forall \vec{x}$  che soddisfa  $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$  vale  $|f(\vec{x}) - l| < \varepsilon$ .

##### 3.1.1. Continuità

Una funzione è continua in  $\vec{x}_0$  se

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

#### 3.2. Differenziabilità

Per le funzioni in più variabile la derivata è definita come:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

### 3.2.1. Derivata parziale

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Se esiste si chiama derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $x$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Ed è rappresentata dalle seguenti notazioni:  $\frac{\partial f}{\partial x}, f'_x, f_x$

Analogamente

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Se esiste si chiama derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $y$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Ed è rappresentata dalle seguenti notazioni:  $\frac{\partial f}{\partial y}, f'_y, f_y$

**Esempio**  $f = x^2y^2, f_x = 2xy^2, f_y = 2x^2y, f_{xx} = 2y^2, f_{xy} = 4xy, f_{yx} = 4xy, f_{yy} = 2x^2$ . **Nota** L'ordine di derivazione non conta, conta solo per ogni variabile quante volte viene derivata.

### 3.2.2. Differenziabilità

Si dice che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se esiste una costante  $m$  t.c.  $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(\Delta x)$  dove  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} &= m + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} &= m + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} &= m \end{aligned}$$

Si dice che  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  se esistono due costanti  $m_1$  e  $m_2$  t.c.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) + o(\rho)$$

$$\text{dove } \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

**Nota** l'equazione  $z - f(x_0, y_0) - m_1(x - x_0) - m_2(y - y_0) = 0$  è l'equazione di un piano, quindi una funzione in due variabili è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  se esiste un piano tangente alla funzione in quel punto.

Ora dimostriamo che  $m_1 = f_{x(x_0, y_0)}$ , che  $m_2 = f_{y(x_0, y_0)}$  è una dimostrazione analoga.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) + o(\rho)$$

scelgo  $y = y_0$

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y_0 - y_0) + o(\rho)$$

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + o(|\Delta x|)$$

$$m_1 = \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

$$m_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$



$$m_1 = f_x(x_0, y_0)$$

L'equazione del piano tangente al grafico di  $f(x, y)$  nel punto  $(x_0, y_0)$  ha la forma:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**Esempio** calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di  $f = x^2 + y^2$  nel punto  $(1, 1)$ .

$$f(1, 1) = 2$$

$$f_x = 2x$$

$$f_y = 2y$$

$$f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 2$$

$$z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z = 2 + 2x - 2 + 2y - 2$$

$$z = 2x + 2y - 2$$

$$2x + 2y - z = 2$$

### 3.2.3. Differenziabilità $\Rightarrow$ Continuità

$$\lim_{(x,y) \mapsto (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \mapsto (x_0,y_0)} (f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) + o(\rho)) = f(x_0, y_0)$$

### 3.3. Teorema di derivazione della funzione composta

$$g : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F : f \circ g$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}, F(t) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

**Teo** Sia  $f(x, y)$  una funzione differenziabile in  $(x_0, y_0)$  e  $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$  una curva regolare passante per  $(x_0, y_0)$  a  $t = t_0$ .

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{df(x(t), y(t))}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(t_0)$$

**Dim**

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho)$$

$$f(x(t), y(t)) = f(x(t_0), y(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x(t) - x(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y(t) - y(t_0)) + o(\rho)$$

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{x(t) - x(t_0)}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{y(t) - y(t_0)}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{x(t) - x(t_0)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{y(t) - y(t_0)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(t_0) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

inoltre

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 * \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 * \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 * \left\| \frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) \right\| = 0$$

quindi

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(t_0)$$

**Esempio:**  $f(t) = x(t)^2 y(t)^3$ ,  $x(t) = t + 1$ ,  $y(t) = t^2$ . Calcolare la derivata della funzione composta nel punto  $(2, 1)$ .

Per quale valore di  $t$  la curva passa per  $(2, 1)$ ?  $t = 1$ .

$$F(t) = (t + 1)^2 + t^6 = t^8 + 2t^7 + t^6$$

$$F'(t) = 8t^7 + 14t^6 + 6t^5$$

$$F'(1) = 28$$

$$F'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) \frac{dx}{dt}(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) \frac{dy}{dt}(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \big|_{2,1} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 \big|_{2,1} = 12$$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t \big|_1 = 2$$

$$F'(1) = 4 * 1 + 12 * 2 = 28$$

### 3.3.1. Gradiente

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

### 3.3.2. Caso in n variabili

$$f(x_1, \dots, x_n), x_1(t), \dots, x_n(t), F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) \frac{dx_i}{dt}(t_0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)$$

### 3.4. Curva di livello

Si dice che  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  è una curva di livello di  $f(x_1, \dots, x_n)$  se

$$F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{costante}$$

**Esempio**  $f = x^2 + y^2, x(t) = \sin(t), y(t) = \cos(t)$

$$F(t) = f(\sin(t), \cos(t)) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

### 3.4.1. Teorema

Il gradiente è ortogonale alle curve di livello. Sia  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  una curva di livello di  $f(x_1, \dots, x_n)$ , allora

$$F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{costante}$$

$$F' = \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = 0$$

## 3.5. Punti Stazionari

In  $\mathbb{R}$  i punti stazionari sono i punti dove la derivata sia annulla. In  $\mathbb{R}^n$  i punti stazionari sono i punti dove tutte le derivate parziali si annullano.  $(x_1, \dots, x_n)$  è un punto stazionario se:

$$\vec{\nabla} f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.5.1. Intorno

Si dice intorno di  $(x_0, y_0)$  di raggio  $\delta$  l'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  che distano meno di delta da  $(x_0, y_0)$ .

Si dice intorno di  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  di raggio  $\delta$  l'insieme dei punti  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tali che  $d(\vec{x}_0, \vec{x}) < \delta$ .

### 3.5.2. Minimo relativo

In  $\mathbb{R}$  un punto  $x_0$  è un minimo relativo se  $\exists \delta$  t.c.  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

In  $\mathbb{R}^n$  un punto  $\vec{x}_0$  è un punto di minimo relativo se esiste un intorno  $I$  di  $\vec{x}_0$  t.c.

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \forall \vec{x} \in I$$

.

### 3.5.3. Massimo relativo

In  $\mathbb{R}$  un punto  $x_0$  è un massimo relativo se  $\exists \delta$  t.c.  $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

In  $\mathbb{R}^n$  un punto  $\vec{x}_0$  è un punto di massimo relativo se esiste un intorno  $I$  di  $\vec{x}_0$  t.c.

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \forall \vec{x} \in I$$

.

## 4. Sviluppo di Taylor di una funzione in 2 variabili

Sia  $f(x, y)$  una funzione. per fare lo sviluppo della serie lungo una determinata linea si può restringere la funzione lungo un segmento su quella linea.

$$x(t) = x_0 + t(x - x_0)$$

$$y(t) = y_0 + t(y - y_0)$$

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, x(1) = x, y(1) = y$$

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \text{resto}$$

$$F(0) = F(x_0, y_0)$$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0)$$

Ora, sia  $F(t) = f(x(t), y(t))$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + f_y(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

$$= f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y$$

$$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

L'approssimazione di Taylor del I ordine è:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ora procediamo con la derivata seconda:

$$F''(t) = \Delta x(f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x + f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y) + \Delta y(f_{yx}(x_0, y_0)\Delta x + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y)$$

$$F''(t) = f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2$$

L'approssimazione di Taylor del II ordine è:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2)$$

**Esempio** Calcolare lo sviluppo di Taylor del II ordine di  $f(x, y) = \cos(x + y)$  in  $(0, 0)$ .

$$f_x(x + y) = -\sin(x + y)$$

$$f_y(x + y) = -\sin(x + y)$$

$$f_{xx}(x + y) = -\cos(x + y)$$

$$f_{xy}(x + y) = -\cos(x + y)$$

$$f_{yy}(x + y) = -\cos(x + y)$$

$$f(0, 0) = 1$$

$$f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

$$f_{xx}(0,0) = -1$$

$$f_{xy}(0,0) = -1$$

$$f_{yy}(0,0) = -1$$

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \Delta y^2) = 1 - \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta y)^2$$

**Esempio 2** Calcola lo sviluppo di Taylor di II ordine di  $f(x,y) = 3 + 6y + x^2 + 2xy + 7y^2$ , Nota che ci si aspetta di trovare la funzione stessa essendo un polinomio di secondo grado.

$$f_x = 2x + 2y$$

$$f_y = 6 + 2x + 14y$$

$$f_{xx} = 2$$

$$f_{xy} = 2$$

$$f_{yy} = 14$$

$$f(0,0) = 3, f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 6$$

$$f(x,y) = 3 + 6y + \frac{1}{2}(2x^2 + 4xy + 14y^2) = 3 + 6y + x^2 + 2xy + 7y^2$$

#### 4.1. Sviluppo di Taylor in un punto stazionario $(x_0, y_0)$

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0, y_0)$$

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto stazionario allora

$$\Delta f = \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2)$$

##### 4.1.1. Matrice Hessiana

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

La forma quadratica  $H_{11}\Delta x^2 + 2H_{12}\Delta x\Delta y + H_{22}\Delta y^2$  si dice

- Definita positiva se è  $\geq 0$  per ogni scelta di  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e si annulla solo quando  $\Delta x = \Delta y = 0$ .
  - In questo caso in  $(x_0, y_0)$  è presente un punto di minimo relativo.
- Definita negativa se è  $\leq 0$  per ogni scelta di  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e si annulla solo quando  $\Delta x = \Delta y = 0$ .
  - In questo caso in  $(x_0, y_0)$  è presente un punto di massimo relativo.
- Indefinita se il segno dipende dalla scelta di  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .
  - In questo caso in  $(x_0, y_0)$  è presente un punto sella.
- Semi-definita positiva se è  $\geq 0$  per ogni scelta di  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e  $\exists(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$  in cui la forma quadratica si annulla.
  - Con la matrice Hessiana non è possibile decidere che tipo di punto stazionario sia.

- Semi-definita negativa se è  $\leq 0$  per ogni scelta di  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e  $\exists(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$  in cui la forma quadratica si annulla.
  - Con la matrice Hessiana non è possibile decidere che tipo di punto stazionario sia.

#### 4.2. La forma quadratica $H_{11}\Delta x^2 + 2H_{12}\Delta x\Delta y + H_{22}\Delta y^2$

Assumiamo che  $H_{11} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 & H_{11}\Delta x^2 + 2H_{12}\Delta x\Delta y + H_{22}\Delta y^2 \\
 & H_{11}\left(\Delta x^2 + 2\frac{H_{12}}{H_{11}}\Delta x\Delta y\right) + H_{22}\Delta y^2 \\
 & H_{11}\left(\Delta x^2 + 2\frac{H_{12}}{H_{11}}\Delta x\Delta y + \frac{H_{12}^2}{H_{11}^2}\Delta y^2\right) - \frac{H_{12}^2}{H_{11}}\Delta y^2 + H_{22}\Delta y^2 \\
 & H_{11}\left(\Delta x + \frac{H_{12}}{H_{11}}\Delta y\right)^2 + \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}{H_{11}}\Delta y^2 \\
 & H_{11}\left(\Delta x + \frac{H_{12}}{H_{11}}\Delta y\right)^2 + \frac{\det H}{H_{11}}\Delta y^2
 \end{aligned}$$

Quindi adesso, se

- $\det H > 0$ :
  1.  $H_{11} > 0$ : La forma quadratica è definita positiva
    - L'annullarsi della forma quadratica equivale alla richiesta che:

$$\begin{cases} \Delta y = 0 \\ \Delta x + \frac{H_{12}}{H_{11}}\Delta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \Delta y = 0$$

2.  $H_{11} < 0$ : La forma quadratica è definita negativa
- $\det H < 0$ : La forma quadratica è indefinita.

**Esempio** Sia  $(x_0, y_0)$  un punto stazionario e sia  $H(x_0, y_0)$  la matrice Hessiana valutata in  $(x_0, y_0)$ .

- $\det H(x_0, y_0) > 0 \wedge H_{11}(x_0, y_0) > 0$ : allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo relativo.
- $\det H(x_0, y_0) > 0 \wedge H_{11}(x_0, y_0) < 0$ : allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo relativo.
- $\det H(x_0, y_0) < 0$ : allora  $(x_0, y_0)$  è un punto sella.

## 5. Superfici

### 5.1. Superfici bidimensionali nello spazio tridimensionale

$$D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \vec{r}(s, t) = \begin{bmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}, \text{ la velocità di } r \text{ lungo la linea dove } t \text{ è fissata}$$

#### 5.1.1. Superfici regolari

1. Le componenti di  $\vec{r}(s, t)$  sono funzioni continue con derivate parziali continue.
2.  $\vec{r}$  sia iniettiva.  $\vec{r}(s_1, t_1) \neq \vec{r}(s_2, t_2)$  se  $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$
3. I vettori  $\vec{r}_s$  e  $\vec{r}_t$  sono lin. indipendenti fra di loro in ogni punto.

**Esempio** Superficie sferica di raggio  $R$  e centrata nell'origine.

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) = R \cos \theta \cos \varphi \\ y(\theta, \varphi) = R \cos \theta \sin \varphi \\ z(\theta, \varphi) = R \sin \theta \end{cases}$$

$D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ . Per rispettare l'iniettività.

$\theta$  la chiamiamo latitudine, e  $\varphi$  la chiamiamo longitudine.

### 5.2. Superfici come grafici di funzioni di 2 variabili

Dato  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  la superficie associata alla funzione è

$$\vec{r}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}$$

ed è sempre una superficie regolare

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix}, \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{bmatrix}$$

### 5.3. Superfici di livello

Sotto opportune ipotesi data una funzione  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  il luogo dei punti che soddisfano l'equazione

$$f(x, y, z) = c$$

è la superficie detta superficie di livello di  $f$ .

**Esempio**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

Se  $c > 0$  il luogo dei punti descritto dall'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

è una superficie sferica di raggio  $\sqrt{c}$

## 5.4. Derivazione di una funzione composta con superficie

$$f(x, y, z), \vec{r}(s, t) = \begin{bmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{bmatrix}$$

$$F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

$$F_{s(s_0, t_0)} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{r}_s(s_0, t_0)$$

$$F_{t(s_0, t_0)} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{r}_t(s_0, t_0)$$

## 5.5. Restrizione di una funzione in 3 variabili

Calcola  $f = y^2 + x - z$  ristretta al piano

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = s - t \\ z = 1 + s + 3t \end{cases}$$

$$F(s, t) = (s - t)^2 + 1 + 2s - 1 - s - 3t$$

$$F(s, t) = s^2 + t^2 - 2st + s - 3t$$

$$F_s = 2s - 2t + 1$$

$$F_t = 2t - 2s - 3$$

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$$

## 5.6. Teorema della funzione implicita

Supponiamo che una funzione  $F(x, y)$  abbia derivate parziali prime continue in un intorno di un punto  $(x_0, y_0)$  dove  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Allora  $\exists$  un intorno di  $(x_0, y_0)$  tale che i punti  $(x, y)$  che soddisfano l'equazione  $F(x, y) = 0$  appartengono al grafico di una funzione  $f(x)$ , cioè

$$\exists f(x) \text{ t.c. } F(x, f(x))$$

in particolare  $y_0 = f(x_0)$

**Esempio**  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

### 5.6.1. Per 3 variabili

Supponiamo che una funzione  $F(x, y, z)$  abbia derivate parziali prime continue in un intorno di un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  dove  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  e  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Allora  $\exists$  un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  tale che i punti  $(x, y, z)$  che soddisfano l'equazione  $F(x, y, z) = 0$  appartengono al grafico di una funzione  $f(x, y)$ , cioè



$$\exists f(x, y) \text{ t.c. } F(x, y, f(x, y))$$

in particolare  $z_0 = f(x_0, y_0)$

**Esempio**  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

### 5.6.2. Derivata della funzione del teorema della funzione implicita

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$F' = \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt}$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = 0 \equiv F_x + F_y f'(x) = 0 \Leftrightarrow f' = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

#### 5.6.2.1. Per 3 variabili

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

Faccio la derivata parziale di  $G(x, y) := F(x, y, f(x, y))$  rispetto a x.

$$G_x = F_x + F_z f_x = 0$$

rispetto a y

$$G_y = F_y + F_z f_y = 0$$

$$\begin{cases} f_x = -\frac{F_x}{F_z} \\ f_y = -\frac{F_y}{F_z} \end{cases}$$

**Esempio**  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$$f_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$(f_2)_x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, (f_2)_y = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

usando il teo:

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \stackrel{z=f_2}{=} -\frac{x}{-\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

analogamente

$$f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z} \stackrel{z=f_2}{=} -\frac{y}{-\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

## 6. Punti stazionari per funzioni ristrette

**Problema** studiare i punti stazionari di una funzione di due variabili  $f(x, y)$  ristretta alla curva di livello di una funzione  $g(x, y)$  (**vincolo**).

$$f(x, y) \text{ ristretta a } g(x, y) = c$$

La soluzione diretta:

1. Parametrizzo il vincolo  $g(x(t), y(t)) = c$ .
2. Restringo  $f$  al vincolo  $F(t) = f(x(t), y(t))$ .
3. I punti stazionari sono le soluzioni di  $F' = 0$ .

*Parametrizzare il vincolo può essere tedioso.*

### 6.1. Moltiplicatori di Lagrange

$F' = f_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} = \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$  Nei punti stazionari di  $F$

$$F' = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Nei punti stazionari  $\vec{\nabla} f$  è ortogonale alla curva. D'altra parte, su **TUTTI** i punti della curva  $g = c$   $\vec{\nabla} g$  è ortogonale alla curva.

Nei punti stazionari che cerco  $\exists \lambda$  t.c  $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ .

$$(*) = \begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

$$L(x, y, z) = f - \lambda(g(x, y) - c)$$

I punti stazionari di  $L$  sono le soluzioni di  $(*)$ .

$$L_x = f_x - \lambda g_x = 0$$

$$L_y = f_y - \lambda g_y = 0$$

$$L_z = f_z - \lambda g_z = 0$$

**Esempio** Determinare il punto sulla retta  $x - y = 3$  posto alla minima distanza da  $(1, 2)$

$$d(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

Nota che il minimo della distanza è anche il minimo della distanza al quadrato

$$d^2(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

Proviamo a parametrizzare:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 3 \end{cases}$$

$$F(t) = (t-1)^2 + (t-5)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 10t + 25 = 2t^2 - 12t + 26 = 2(t^2 - 6t + 13), 2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3$$

quindi la distanza minima si trova a  $(3, 0)$

$$\vec{\nabla} d = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla} g = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2(x-1) = \lambda \\ 2(y-2) = -\lambda \Rightarrow (3, 0) \\ x - y = 3 \end{cases}$$

## 6.2. Punti stazionari per funzioni ristrette in 3 variabili

Come nel caso in 2 variabili si può procedere in più modi:

1. Si trova una parametrizzazione per  $g(x, y, z) = c$  in  $g(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = c$ .
2. Si restringe la funzione  $f(x, y, z)$  al vincolo:  $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$
3. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema  $\begin{cases} F_s = 0 \\ F_t = 0 \end{cases}$

## 6.3. Moltiplicatori di Lagrange in 3 variabili

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g = c \end{cases} \equiv \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g = c \end{cases}$$

**Esempio** Calcola le coordinate del punto appartenente al piano  $x + y + z = 0$  avente minima distanza dal punto  $(1, 1, 1)$ .

$$f(x, y, z) = d^2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$g(x, y, z) = x + y + z$$

Il vincolo è  $g = 0$

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{bmatrix}, g_x = g_y = g_z = 1$$

$$\begin{cases} 2(x-1) = \lambda \\ 2(y-1) = \lambda \\ 2(z-1) = \lambda \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{\lambda}{2} + 1 \\ 3(\frac{\lambda}{2} + 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0, \quad \overbrace{\lambda = -2}^{\text{non ci interessa}}$$

Il punto di distanza minima è  $O(0, 0, 0)$ .

## 6.4. Punti stazionari su 2 restrizioni

**Problema** Studiare i punti stazionari di  $f(x, y, z)$  ristretta all'intersezione di due vincoli

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = c_1 \\ g_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

Assumiamo che l'intersezione non sia vuota e che  $\vec{\nabla} g_1$  e  $\vec{\nabla} g_2$  siano linearmente indipendenti.

C'è sempre il metodo diretto:

1. Parametrizzo il vincolo:  $(x(t), y(t), z(t))$  la curva intersezione dei due piani.
  - l'equazione parametrica del sistema  $\begin{cases} g_1(x, y, z) = c_1 \\ g_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$
2. Restringiamo la funzione  $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$
3. Cerchiamo i punti stazionari  $F' = \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$

## 6.5. Moltiplicatori di Lagrange per 2 restrizioni

$$\vec{\nabla} f = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 \\ g_1 = c_1 \\ g_2 = c_2 \end{cases} \equiv \begin{cases} f_x = \lambda_1 (g_1)_x + \lambda_2 (g_2)_x \\ f_y = \lambda_1 (g_1)_y + \lambda_2 (g_2)_y \\ f_z = \lambda_1 (g_1)_z + \lambda_2 (g_2)_z \\ g_1 = c_1 \\ g_2 = c_2 \end{cases}$$

**Esempio** Calcola le coordinate del punto appartenente alla retta di intersezione tra il piano  $x + y + z = 0$  e il piano  $x - z = 1$  avente minima distanza dal punto  $O(0, 0, 0)$ .

In questo caso  $f(x, y, z) = d^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , le due funzioni  $g$  sono i piani:  $g_1 = x + y + z$  e  $g_2 = x - z$  e i vincoli:  $g_1 = 0, g_2 = 1$

**Metodo 1**

$$g_1 \cap g_2 = \begin{bmatrix} t \\ 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = t^2 + (1 - 2t)^2 + (t - 1)^2$$

$$F'(t) = 2t - 4(1 - 2t) + 2(t - 1) = 12t - 6$$

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, y = 0, z = -\frac{1}{2}$$

**Metodo 2**

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}, \vec{\nabla} g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{\nabla} g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(*) \begin{cases} 2x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2y = \lambda_1 \\ 2z = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$$(**) \begin{cases} \cancel{\lambda_1} + \cancel{\lambda_2} + \lambda_1 + \cancel{\lambda_1} - \cancel{\lambda_2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \\ \cancel{\lambda_1} + \lambda_2 - \cancel{\lambda_1} + \lambda_2 = 2 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$(*) + (**) = \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = 0 \\ 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

## 7. Massimi e minimi assoluti

### 7.1. Definizioni

Sia  $D$  un insieme.

- *def(Punto interno)*  $P \in D$  si dice punto interno a  $D$  se esiste un suo intorno composto solo da punti appartenenti a  $D$ .
- *def(Punto esterno)*  $P \notin D$  si dice punto esterno a  $D$  se esiste un suo intorno composto solo elementi non appartenenti a  $D$ .
- *def(Punto di frontiera)*  $P$  si dice punto di frontiera se tutti i suoi intorni contengono sia punti appartenenti che non appartenenti a  $D$ .
- $D$  si dice aperto se contiene solo punti interni.
- $D$  si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera.
- $D$  si dice limitato se esiste un intorno che lo racchiude completamente.
- $D$  si dice compatto se è chiuso e limitato.

### 7.2. Teorema di Weistrass

Sia  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, se  $D$  è un insieme compatto ed  $f$  è continua lungo  $D$  allora  $f$  ammette massimi e minimi sul dominio  $D$ .

## 8. Integrali di linea

### 8.1. Lunghezza di un arco di curva

sia  $\vec{r}(t)$  un arco regolare di curva con  $t \in [a, b]$  e  $x(t), y(t)$  le sue componenti, la sua lunghezza è definita come

$$\ell = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

### 8.2. Integrali di linea di I specie

Si definisce integrale di linea di I specie della funzione  $f$  lungo la curva  $C$

$$\int_C f d\ell$$

equivalente a (per  $\mathbb{R}^2$ )

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

### 8.3. Campo vettoriale

Si chiama campo vettoriale una funzione

$$\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

In fisica esistono tanti esempi di campo vettoriali, ad esempio il campo elettromagnetico.

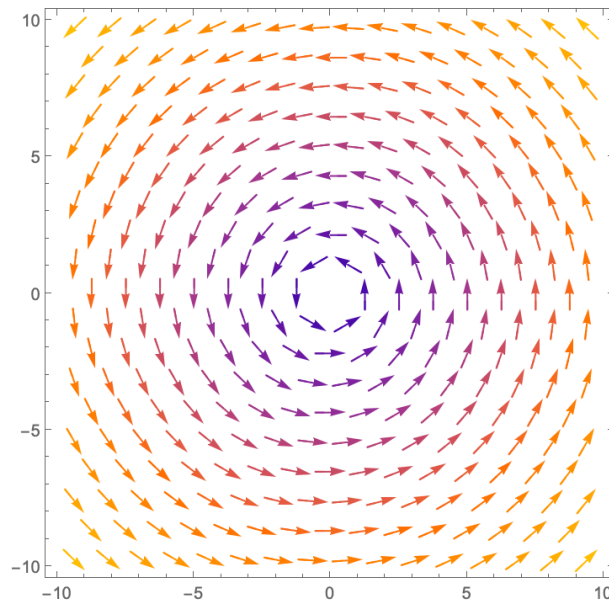


Figura 3: Un campo vettoriale

### 8.4. Integrali di linea di II specie

Si dice integrale di linea di II specie di un campo vettoriale  $\vec{F}$  lungo la curva  $C$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell$$

Se  $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  è la parametrizzazione di  $C$  allora

$$\vec{t}d\ell \pm \vec{r}'dt$$

pertanto

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{t}d\ell = \pm \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'dt = \pm \int_a^b \left( F_1(t) \frac{dx_1}{dt} + \dots + F_n(t) \frac{dx_n}{dt} \right) dt$$

#### 8.4.1. Forma differenziale

Un integrale di linea di II specie si denota anche come

$$\int_C (F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n)$$

dove  $F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  si chiama forma differenziale

## 9. Campi vettoriali conservativi

Un campo vettoriale  $\vec{F}$  si dice conservativo se esiste una funzione  $U$  t.c.  $\vec{F} = \vec{\nabla}U$

### 9.1. Teorema

Se  $\vec{F}$  è un campo vettoriale conservativo e  $U$  la sua funzione potenziale e  $P_1, P_2$  i punti iniziali e finali della curva  $\gamma$  allora:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = U(P_2) - U(P_1)$$

dim

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell &= \int_a^b \left( F_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + F_n \frac{dx_n}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \right) dt = \int_a^b \vec{\nabla}U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x_1(t), \dots, x_n(t)) dt \\ &= U(x_1(b), \dots, x_n(b)) - U(x_1(a), \dots, x_n(a)) = U(P_2) - U(P_1) \end{aligned}$$

### 9.2. Requisito necessario perché un campo sia conservativo

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U \Rightarrow \vec{F}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

pertanto perché un campo sia conservativo deve valere che  $\forall i, j \in [1, \dim(\vec{F})]$

$$\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{F}_j}{\partial x_i}$$

ad esempio in 2 dimensioni

$$\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial x}$$

(i casi  $x, x$  e  $y, y$  sono banali, mentre il caso  $y, x$  è il medesimo per la proprietà di simmetria dell'uguale)

### 9.3. Dominio di definizione di un campo vettoriale

Sia un campo vettoriale  $\vec{F}(x_1, \dots, x_n)$  e  $F_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \dots, F_n : D_n \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  le sue componenti, allora il dominio  $D$  di  $\vec{F}$  è:

$$\cap_{i=1}^n D_i$$

### 9.4. Dominio semplicemente connesso

*definizione* Un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  si dice semplicemente connesso se è connesso per archie per ogni curva chiusa regolare contenuta in  $D$  è la frontiera di una regione interamente contenuta in  $D$ .



### 9.5. Lemma di Pointcaré

Sia  $\vec{F}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  (Le componenti di  $\vec{F}$  e le loro derivate parziali prime sono continue) e il dominio di definizione di  $\vec{F}$  è semplicemente connesso allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $\vec{F}$  è conservativo.
2.  $\forall i, j \in [1, \dim(\vec{F})], \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ .

## 10. Integrali doppi

### 10.1. Misura di jordan

Dovendo calcolare l'area di una regione di piano arbitraria si può usare come approssimazione superiore tutte le unità di piano che condividono almeno un punto con la regione, o come approssimazione inferiore tutte le unità che sono interamente contenute all'interno del piano.

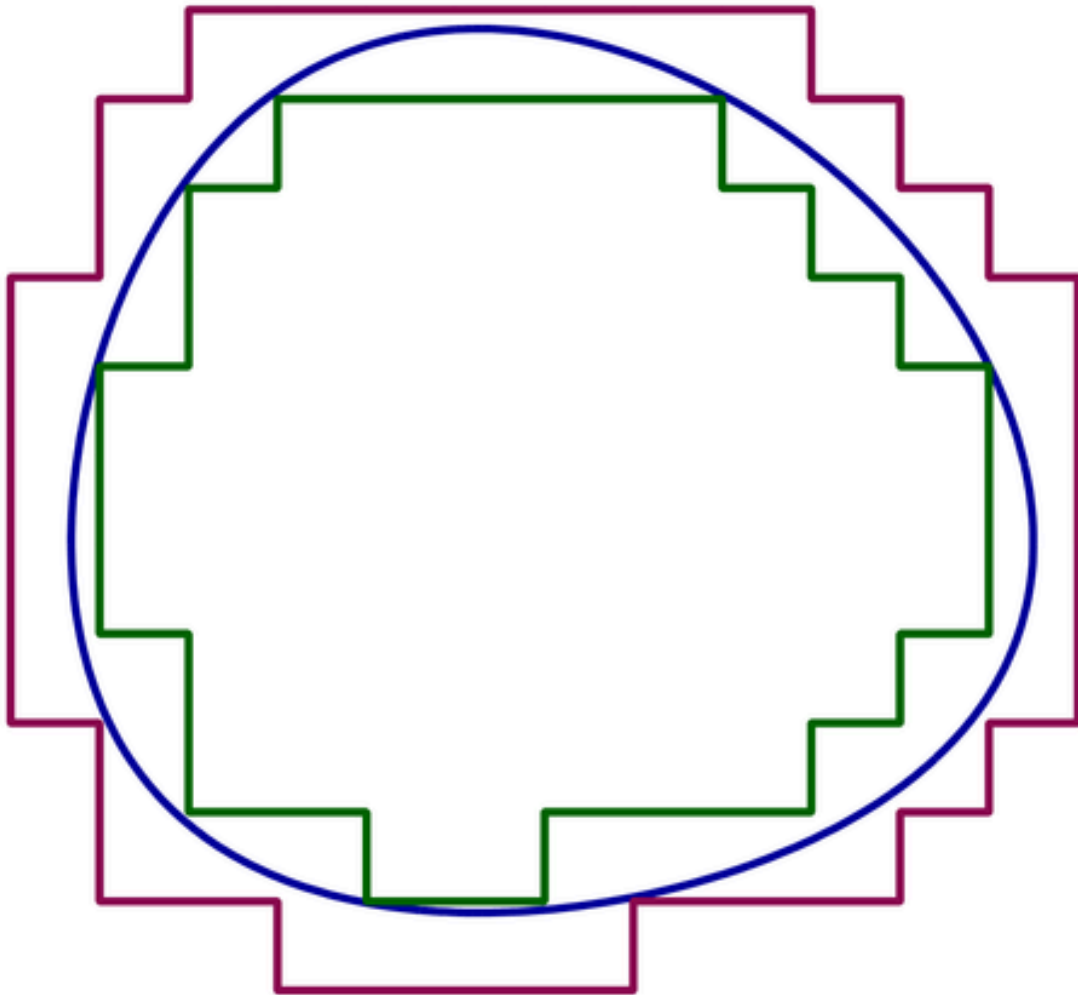


Figura 4: In blu la regione di cui calcolare l'area, in verde l'approssimazione inferiore e in rosso la superiore.

*def*(Misura di Jordan) Si dice che  $\Omega$  è misurabile se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{\text{int}}(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\text{ext}}(\Omega)$$

e questo numero si chiama misura di Jordan o area di  $\Omega$

$$m\Omega$$

dove  $n$  è il numero di suddivisioni del piano

nota che essendo le successioni crescenti e limitate superiormente o decrescenti e limitate inferiormente allora il limite esiste per entrambe.

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e limitata e sia  $D$  una regione misurabile di  $\mathbb{R}^2$ , considero una suddivisione  $g$  di  $D$  e  $m$  sottoregioni misurabili t.c.  $D = \cup_{i=1}^{N(\rho)} D_i$ .

Scelgo un punto  $P_i$  in ogni sottoregione, definisco somma integrale Riemann corrispondente alla suddivisione  $\rho$  e alla scelta  $(P_1, \dots, P_{N(\rho)})$  il numero

$$\sum_{i=1}^{N(\rho)} f(P_i) \cdot m \cdot D_i$$

Si chiama diametro di un insieme  $\Omega$  l'estremo superiore delle distanze di coppie di punti.

il diametro di  $\Omega$  è  $\sup\{d(x, y) | x, y \in \Omega\}$

## 10.2. Definizione integrale doppio

il limite

$$\sum_{i=1}^{N(\rho)} f(P_i) \cdot m \cdot D_i$$

per  $\max \text{diam}(D_i) \rightarrow 0$  esiste e non dipende dalla scelta dei punti e si chiama integrale doppio di  $f$  esteso a  $D$ .

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Nota che

$$mD = \iint_D 1 dx dy$$

### 10.2.1. Proprietà

1. **Linearità:**  $\int \dots \int_D [c_1 f_1 + c_2 f_2] dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_D c_1 f_1 dx_1 \dots dx_n + \int \dots \int_D c_2 f_2 dx_1 \dots dx_n$
2. **Additività rispetto al dominio:** sia il dominio  $D$  e  $\{D_1, D_2\}$  un suo partizionamento allora  $\int \dots \int_D f dx_1 dx_n = \int \dots \int_{D_1} f dx_1 dx_n + \int \dots \int_{D_2} f dx_1 dx_n$

### 10.2.2. Teorema della media

Se  $f$  è una funzione continua sulla chiusura di un dominio connesso per archi  $D$  allora

$$\exists \vec{x}_0 \in D \text{ t.c. } f(\vec{x}_0) = \frac{1}{mD} \int \dots \int_D f dx_1 \dots dx_n$$

## 10.3. Come svolgere un integrale doppio

Sia  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Di fatto quello che fai è trovare in primo luogo una funzione rispetto ad  $y$  che restituisce l'area sotto funzione che si trova tra  $a$  e  $b$  lungo la coordinata  $x$  e a  $y$  lungo la coordinata  $y$ , successivamente integrando lungo la seconda coordinata si trova il volume della regione  $D$ .

**Nota** è accettabile fare anche il contrario quindi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

## 11. Cambio di variabili di integrali multipli

Come calcolare l'area di una superficie generica?

Data l'equazione parametrica di una superficie

$$\begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \end{cases}$$

il segmento della retta  $u = \bar{u}$  verrà trasformato nell'arco di curva

$$\begin{cases} x(\bar{u}, v) \\ y(\bar{u}, v) \end{cases}$$

lo stesso vale fissando  $v = \bar{v}$

Dividendo la superficie in tante sezioni rispetto a  $u$  e  $v$  ottengo una partizione le cui componenti sono delimitate dai quadrilateri i cui vertici sono

1.  $q_1 = (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}))$
2.  $q_2 = (x(\bar{u} + \Delta u, \bar{v}), y(\bar{u} + \Delta u, \bar{v}))$
3.  $q_3 = (x(\bar{u} + \Delta u, \bar{v} + \Delta v), y(\bar{u} + \Delta u, \bar{v} + \Delta v))$
4.  $q_4 = (x(\bar{u}, \bar{v} + \Delta v), y(\bar{u}, \bar{v} + \Delta v))$

Approssimo l'area con il parallelogramma delimitato da  $\vec{r}_v \Delta v$  e  $\vec{r}_u \Delta u$

L'approssimazione dell'area è quindi

$$\lim_{\max \text{diam}(D_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(\delta)} f(P_i) m D_i$$
$$m \Delta_i = \left| \det \begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}}_{\text{matrice jacobiana della trasformata } (x,y) \rightarrow (u,v)} \quad \Delta u \Delta v \end{array} \right|$$

Quindi l'integrale

$$\iint_D f(x, y) dx dy \equiv \iint_{\Omega} f(u, v) \left| \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \right| du dv$$

### 11.1. Calcolare l'area del disco di raggio R

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R\}$$

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx dy$$

passando in coordinate polari

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Omega} \left| \det \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} \right| d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left| \det \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} \right| dr \end{aligned}$$

$$x(r, \theta) = r \cos \theta, y(r, \theta) = r \sin \theta$$

quindi il determinante risulta essere

$$\det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

l'integrale risulta essere quindi

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\theta = \pi r^2$$

## 11.2. Cambio di variabili per integrali multipli

$$\int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$y_i(x_1, \dots, x_n)$  sono le nuove coordinate

...

## 11.3. Coordinate cilindriche

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\det J = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

**esempio**

$$\iiint_D xyz dx dy dz$$

$D$  è la regione di spazio delimitata dal grafico della funzione  $x^2 + y^2$  e dai piani  $x = 0, y = 0, z = 1$  in coordinate cilindriche

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 z r^3 \sin \theta \cos \theta dz$$

## 11.4. Coordinate sferiche

$x = r \cos \theta \cos \varphi, y = r \cos \theta \sin \varphi, z = r \sin \theta$  con  $r \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$|\det J| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \right| = |-r^2 \cos \theta| = r^2 \cos \theta$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta) r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

**esempio**

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\
&= \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} 2\pi 2 = \frac{4}{3} \pi R^3
\end{aligned}$$

## 12. Integrali di superficie

### 12.1. Integrali di superficie di I specie

Data una superficie in forma parametrica

$$\vec{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}, \vec{r}_v = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \sum_{i=1}^N f(P_i) m \Delta_i = \sum_{i=1}^N f(P_i) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v \\ &= \iint_S f dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv \end{aligned}$$

### 12.2. Integrali di superficie di II specie

Supponendo una superficie orientabile (muovendosi con continuità sulla superficie non è possibile ottenere un vettore ortogonale opposto), un esempio di superficie non orientabile è il nastro di mobius.

Il flusso del campo vettoriale  $\vec{F}$  attorno alla superficie  $S$  si definisce come

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

dove  $\vec{n}$  è il versore ortogonale a  $S$ .

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

**esempio** Calcolare il flusso del campo vettoriale  $\vec{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  attraverso la porzione del piano

$x + y + z = 1$  situata nel primo ottante e orientata verso l'alto.

$$z = 1 - x - y$$

$$\vec{r}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{bmatrix}, \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dx dy = \iint_D (x + y + z) dx dy = \iint_D 1 dx dy$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$



## 13. Formula di Green

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Dove  $\vec{F} = F_1(x, y)\vec{e}_1 + F_2(x, y)\vec{e}_2$ , inoltre  $C$  deve essere la frontiera di  $\sigma$  percorsa in modo che il dominio si trovi sulla sinistra.

### 13.1. Diversi tipi di regione

1. Regione di tipo I

- $a \leq x \leq b$
- $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

2. Regione di tipo II

- $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$
- $a \leq y \leq b$

*def(Dominio semplice)* Un dominio  $G$  si dice semplice se è l'unione di un numero finito di regioni di tipo I e simultaneamente è l'unione di un numero finito di regioni di tipo II. Le regioni di tipo I possono avere punti in comune al più sulla loro frontiera, lo stesso vale per le regioni di tipo II.

### 13.2. Dimostrazione

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \oint_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$

$$1. \oint_C F_1 dx = - \iint_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy$$

$$2. \oint_C F_2 dy = \iint_{\sigma} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy$$

dimostrazione della prima identità (la seconda è analoga)

$$\sigma = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i$$

vogliamo dimostrare che

$$\oint_{C_i} F_1 dx = - \iint_{\sigma_i} \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy$$

che dimostrerebbe

$$\sum_{i=1}^n \oint_{C_i} F_1 dx = - \sum_{i=1}^n \iint_{\sigma_i} \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy$$

che è equivalente a

$$\oint_C F_1 dx = - \iint_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy$$

Considero  $G_i$  regioni di tipo I, ogni regione può essere divisa in 4 curve lungo la sua frontiera:

$$\int_{C_1} F_1(x_1(t), y_1(t)) \frac{dx}{dt} dt + \int_{C_2} F_1(x_2(t), y_2(t)) \frac{dx}{dt} dt + \int_{C_3} F_1(x_3(t), y_3(t)) \frac{dx}{dt} dt + \int_{C_4} F_1(x_4(t), y_4(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

La curva I sarà del tipo:  $x(t) = t, y(t) = y_1(t)$ .

La curva III sarà del tipo:  $x(t) = t, y(t) = y_2(t)$ .

con  $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b F_1(t, y_1(t)) dt - \int_a^b F_1(t, y_2(t)) dt \\ &= \int_a^b (F_1(t, y_1(t)) - F_1(t, y_2(t))) dt = - \int_a^b (F_1(t, y_2(t)) - F_1(t, y_1(t))) dt \\ &= - \int_a^b dt \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \\ &= - \iint_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial y} dt dy \end{aligned}$$