

Kurvendiskussion

1 Allgemein

Bei der Kurvendiskussion geht es Primär darum eine Funktion zu beschreiben. Dabei müssen Folgende Informationen ermittelt werden.

- Achsenschnittpunkte (x, y)
- Extremata
- Wendepunkte
- Symmetrie

Des weiteren können folgende Sachen Abgefragt werden:

- Monotonie
- Krümmung

Für alle Berechnungen brauchen wir die Ableitungen. Daher ist es ratsam die ersten drei Ableitungen direkt am Anfang zu berechnen und hin zu schreiben.

2 Achsenschnittpunkte

Wiederholung: Die X-Achsenschnittpunkte sind die Nullstellen der original Funktion. Zur Lösung von Nullstellen siehe des Skript der letzten Woche. Um den Y-Achsenschnittpunkt aus zu rechnen wird für x einfach 0 eingesetzt.

3 Extremata

Um nun ein Extrempunkt aus zu rechnen muss man die Nullstellen der ersten Ableitung $f'(x)$ ausrechnen. Denn $f'(x)$ beschreibt die locale Änderung einer Funktion wenn diese Änderung (also die Tangentensteigung bzw $f'(x)$) also 0 ist dann kann es einen Extrempunkt geben. Um nun aber fest zu stellen ob es ein Hoch oder Tiefpunkt ist brauchen wir die zweite Ableitung $f''(x)$. Daher nimmt man nun die Ausgerechneten Nullstellen und setzt diese in $f''(x)$ wenn das Ergebnis größer null Handelt es sich um einen Tiefpunkt wenn das Ergebnis kleiner null einen Hochpunkt.

TL;DR

- $f'(x) = 0$
- Tiefpunkt $f''(x) > 0$
- Hochpunkt $f''(x) < 0$
- Kein Extrempunkt $f''(x) = 0$

4 Wendepunkt (Sattelpunkt)

Beim Wendepunkt ist es ähnlich nur muss man hier die Nullstellen der zweiten Ableitung Ausrechnen und in die dritte Ableitung einsetzen. Wenn $f'''(x) \neq 0$ gibt es hier einen Wendepunkt.

TL;DR

- $f''(x) = 0$
- Wendepunkt $f'''(x) \neq 0$
- Kein Wendepunkt $f'''(x) = 0$

5 Symmetrie

Die Symmetrie lässt sich meist schon anhand der Exponenten erkennen. Gibt es nur Gerade Exponenten so ist die Funktion Achsen-symmetrisch, gibt es nur ungerade so ist sie Punkt-symmetrisch, sind die Exponenten gemischt so gibt es keine Symmetrie.

6 Aufgaben

Analysieren sie folgende Funktionen. Erstellen sie auf Basis ihrer Analyse ein Schaubild.

$$f(x) = 4x^2 + 12x \quad (1)$$

$$f(x) = 4x^2 + 12 \quad (2)$$

$$f(x) = 4x^3 + 12x + 16 \quad (3)$$

$$f(x) = 53x^5 + 21x \quad (4)$$

7 Lösungen

7.1 $f(x) = 4x^2 + 12x$

Errechnung der Nullstellen

$$4x^2 + 12x = 0 \quad (5)$$

$$x(4x + 12) = 0 \rightarrow x_0 = 0 \quad (6)$$

$$4x + 12 = 0 \quad (7)$$

$$4x = -12 \quad (8)$$

$$x_1 = -3 \quad (9)$$

N(0|0) und N(-3|0) Y-Achsenschnittpunkt S(0|0)

Ab hier brauchen wir die Ableitungen.

$$f'(x) = 8x + 12 \quad (10)$$

$$f''(x) = 8 \quad (11)$$

Errechnung der Extremata

$$8x + 12 = 0 \quad (12)$$

$$8x = -12 \quad (13)$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad (14)$$

$$f''(-\frac{3}{2}) > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt} \quad (15)$$

$$4(-\frac{3}{2})^2 + 12(-\frac{3}{2}) \quad (16)$$

$$y = -9 \quad (17)$$

$$(18)$$

T(- $\frac{3}{2}$ |-9)

Keine Wendepunkte da $f''(x) \neq 0$

7.2 $f(x) = 4x^2 + 12$

Nullstellen

$$4x^2 + 12 = 0 \quad (19)$$

$$4x^2 = -12 \quad (20)$$

$$x^2 = -3 \quad (21)$$

$$x = \sqrt{-3} \rightarrow \text{Keine Nullstellen} \quad (22)$$

$$f(0) = 12 \quad (23)$$

Y-Achsenschnittpunkt S(0|12)

$$f'(x) = 8x \quad f''(x) = 8 \quad (24)$$

Extremata

$$8x = 0 \rightarrow x = 0 \quad (25)$$

$$f''(x) > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt} \quad (26)$$

$$f(0) = 12 \quad (27)$$

T(0|12)

7.3 $f(x) = 4x^3 + 12x + 16$

Nullstellen mit der lustigen Polynomdivision (geratene Nullstelle -1)

$$4x^3 + 0x^2 + 12x + 16 : (x + 1) = 4x^2 - 4x + 16 \quad (28)$$

$$4x^3 + 4x^2 \quad (29)$$

$$-4x^2 + 12x \quad (30)$$

$$-4x^2 - 4x \quad (31)$$

$$16x + 16 \quad (32)$$

$$16x + 16 \quad (33)$$

$$4x^2 - 4x + 16 = 0 \quad (34)$$

$$x^2 - x + 4 = 0 \quad (35)$$

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4} \rightarrow \text{Keine weitere Lösung} \quad (36)$$