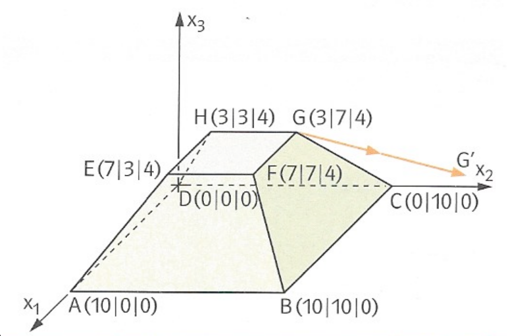
Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Denkmalsockel.



a) Beschreibe die geometrische Form dieses Sockels.

b) Berechne seine Mantelfläche.

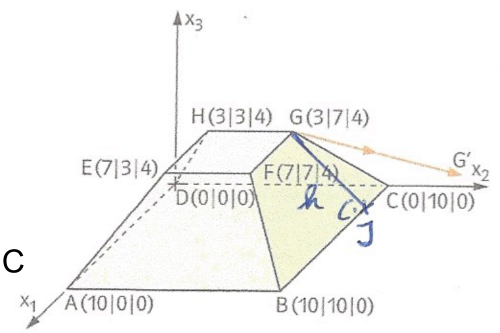
c) Berechne den Winkel zwischen jeweils zwei Seitenflächen sowie zwischen den Seitenflächen und der Deckfläche.

d) Sonnenlicht ($\overrightarrow{GG'}$) fällt aus der Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Sockel. Berechne die Koordinaten der Schattenpunkte in der x_1x_2-Ebene und fertige eine Zeichnung des Sockels und seines Schattens an. Um was für eine geometrische Figur handelt es sich dabei?

e) Bestimme die Seitenlängen und die Winkel der Schattenfigur.

f) Bestimme den Winkel der Sonnenstrahlen mit der x_1x_2-Ebene.

Lösungen:



a) Stumpf einer geraden quadratischen Pyramide.

b) Um die Mantelfläche berechnen zu können, benötigen wir die Höhe h der Seitenfläche (Trapez) I(3/10/0): x_1-Koordinate von G, x_2- und x_3-Koordinate von C

Falls eine Berechnung explizit verlangt wird: Suche Ebene senkrecht zur Geraden BC, die G enthält. Schneidet man die Gerade BC mit dieser Ebene erhält man I als Durchstoßpunkt:

Gerade BC: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor von BC ist damit Normalenvektor von E: $10x_1 = k$

$G \in E \Rightarrow k = 30 \Rightarrow$ E: $10x_1 = 30$ bzw. $x_1 = 3$

$E \cap g = \{I\} \Rightarrow 10r = 3 \Rightarrow r = 3/10 \Rightarrow$ I(3/10/0)

Damit ist $h = \left|\overrightarrow{GI}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = 5$

Mantel M = 4 · ½ · (4 + 10) · 5 = 140

c) Beachte: Dies sind nicht Winkel zwischen Geraden, sondern Ebenen.

Seitenfläche ADEH: $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-40 \\ 30-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ E_1: – $4x_2$ + $3x_3$ = k, D(0/0/0) $\in E_1$ $\Rightarrow$ k = 0 $\Rightarrow$ E_1: – $4x_2$ + $3x_3$ = 0

Seitenfläche ABEF oder DCHG: $E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40-0 \\ 0-0 \\ 0+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ E_2: $4x_1$ + $3x_3$ = k, A(10/0/0) $\in E_2$ $\Rightarrow$ k = 40 $\Rightarrow$ E_1: $4x_1$ + $3x_3$ = 40

Deckenfläche: E_3: x_3 = 4

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow 68{,}9^0 \Rightarrow \alpha \approx 180^0 - 68{,}9^0 = 111{,}1^0$$

Dies ist der Winkel in B. Der Winkel in F beträgt:

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+9} \cdot 1} = \frac{3}{5} \Rightarrow 53{,}13^0 \Rightarrow \alpha \approx 180^0 - 53{,}13^0 = 126{,}9^0$$

d) Schatten von F: Dazu benötigt man die Gerade durch F in Richtung des Sonnenlichtes (vorgegebener Vektor in der Aufgabenstellung ist damit der Richtungsvektor der Geraden). Den Schattenpunkt F' erhält man dann als Schnitt dieser Geraden mit der x_1x_2-Ebene (Bedingung x_3 = 0):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

x_3 = 4 – 2r = 0 $\Rightarrow$ r = 2 $\Rightarrow$ F'(3/13/0)

Schatten von G: $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$

x_3 = 4 – 2s = 0 $\Rightarrow$ s = 2 $\Rightarrow$ G'(– 1/13/0)

Schatten von H: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$

x_3 = 4 – 2r = 0 $\Rightarrow$ r = 2 $\Rightarrow$ H'(– 1/9/0)

Schatten von E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$

x_3 = 4 – 2r = 0 $\Rightarrow$ r = 2 $\Rightarrow$ E'(3/9/0)

Damit ist der gesamte Schatten durch das Sechseck A, B, F', G', H' und D gegeben.

Seitenlängen:

$$\overline{AB}=10,\overline{BF'}=\left|\begin{pmatrix}-7\\3\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{58},\overline{F'G'}=4=\overline{G'H'},\overline{H'D}=\left|\begin{pmatrix}-1\\9\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{82},\overline{DA}=10$$

Bei den Winkeln handelt es sich um Winkel zwischen Geraden bzw. deren Richtungsvektoren:

Winkel: in A: 90^0, in B: Dies ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BF'}$:

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\3\\0\end{pmatrix}\right|}{10\cdot\sqrt{49+9}}=\frac{30}{10\cdot\sqrt{58}}\Rightarrow 66{,}8^0\Rightarrow\alpha\approx180^0-66{,}8^0=113{,}2^0$$

in F' (Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{BF'}$ und $\overrightarrow{F'G'}$:

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}-7\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{49+9}\cdot4}=\frac{28}{4\cdot\sqrt{58}}=\frac{7}{\sqrt{58}}\approx0{,}919\Rightarrow 23{,}2^0\Rightarrow\alpha=180^0-23{,}2^0=156{,}8^0$$

in G' (Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{F'G'}$ und $\overrightarrow{G'H'}$:

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\right|}{4\cdot 4} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$$

in H' (Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{G'H'}$ und $\overrightarrow{H'D}$:

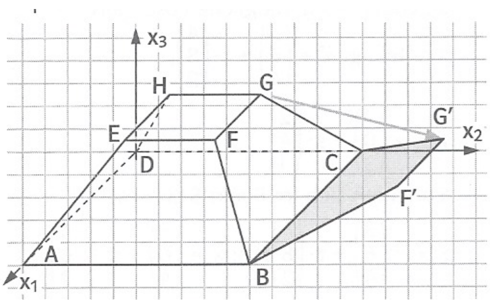
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-9\\0\end{pmatrix}\right|}{4\cdot\sqrt{82}} = \frac{36}{4\cdot\sqrt{82}} = \frac{9}{\sqrt{82}} \approx 0{,}994 \Rightarrow 6{,}3^0 \Rightarrow \alpha = 180^0 - 6{,}3^0 = 173{,}7^0$$

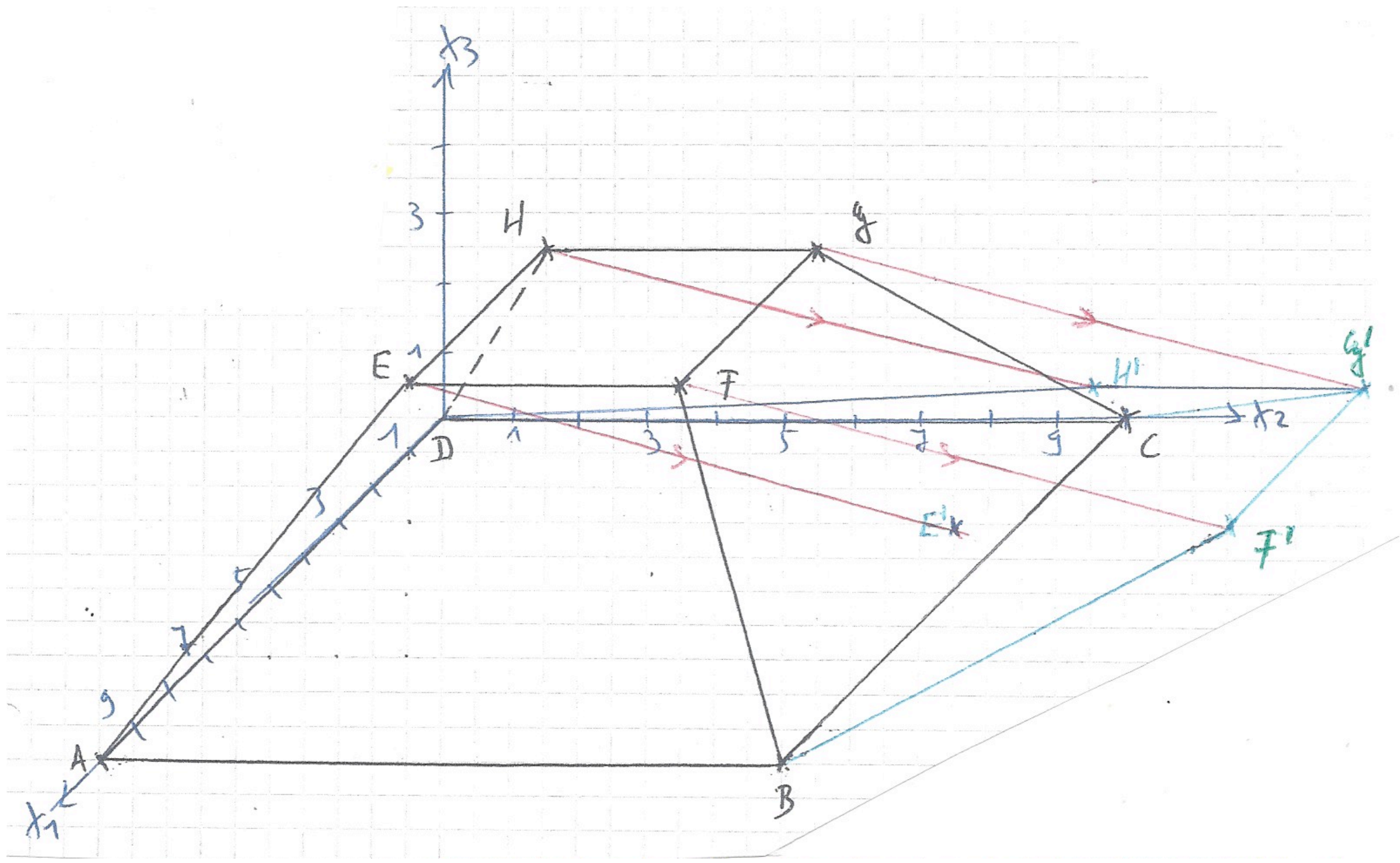
in D (Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{H'D}$ und der x_1-Achse:

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-9\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{82}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{82}} \approx 0{,}11 \Rightarrow 6{,}3^0 \Rightarrow \alpha = 180^0 - 83{,}7^0 = 96{,}3^0$$

geometrische Figur des Schattens seitlich vom Sockel: Vermutung Trapez, dazu zu zeigen, dass zwei Seiten parallel sind:

$$\overrightarrow{BC} = k\cdot\overrightarrow{F'G'} \Rightarrow \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$





f) Dabei handelt es sich um einen Winkel zwischen Gerade und Ebene:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{4+9+4}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha \approx 29{,}02^0$$