Sistemas Realimentados - 2023/2

Nome: Guilherme Goes Zanetti

Data limite para entrega: 26/9

Trabalho 2 - O método do lugar das raízes

```
I=16; % Seu valor de I
[G1,G3,G4]=ini_t2(I);
datetime('now')
```

```
ans = datetime
   27-Sep-2023 13:34:36
```

Atividade 1: Esboçar o lugar das raízes de $1 + KG_1(s) = 0$ para $K > 0$ e $K < 0$. Desenhe à mão, usando as propriedades de construção do LR, digitalize e insira abaixo a figura de forma bem visível. Incluir no esboço:

1.1 Raizes para $K = 0$ e $K \longrightarrow \infty$.

1.2 Pontos de passagem no eixo imaginário se houver.

1.3 As assíntotas e seus ângulos.

1.4 Ponto de interseção das assíntotas

1.5 Localização dos pontos de raízes múltiplas (encontro de polos)

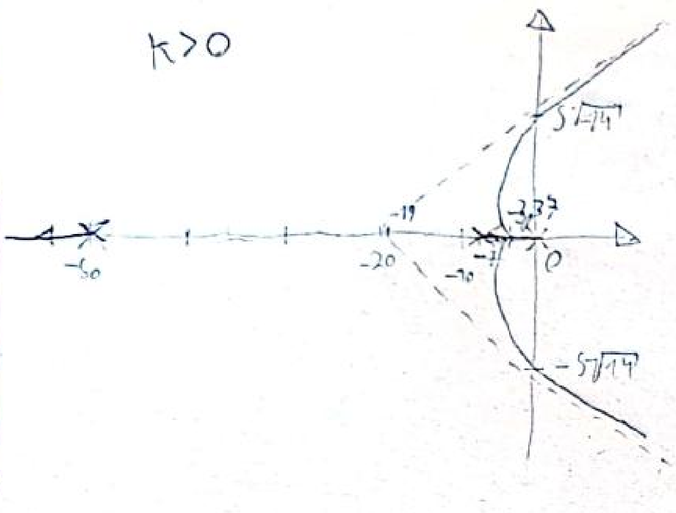
```
G1
```

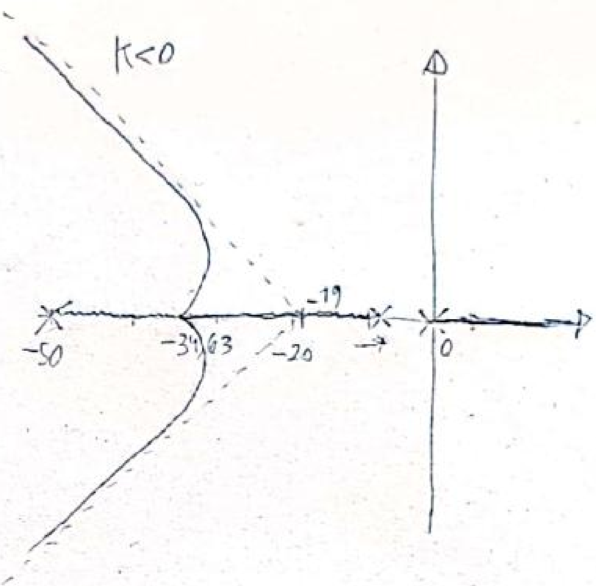
```
G1 =

           16
  --------------------
  s^3 + 57 s^2 + 350 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

Atividade 1)





1.1) p/ K=0, as raízes estão nos polos

$$s^3+57s^2+350s=0$$

$$s(s^2+57s+350)=0$$

$$\boxed{p'=0}$$

$$\Delta=57^2-4\cdot 7\cdot 350=1849$$

$$p=\frac{-57\pm\sqrt{1849}}{2}\Rightarrow \boxed{p''=-7},\ \boxed{p'''=-50}$$

p/ K→∞, as raízes vão para os zeros porém G1 não possui zeros. Portanto as 3 raízes vão tender a 3 assíntotas

1.2) Eq. Característica

$$1+K\cdot\frac{16}{s^3+57s^2+350s}=s^3+57s^2+350s+K\cdot 16$$

ROUTH - HURWITZ

s^3	1	350
s^2	57	$K\cdot 16$
s^1	$\frac{-16K+19950}{57}$	0
s^0	$-16K$	

$$s\ \frac{-16K+19950}{57}=0$$

o sistema será marginalmente estável.

∴ K = 1246,875

que resulta nos pontos

$(0, 5\sqrt{14}\,i)$, $(0,-5\sqrt{14}\,i)$

1.3) Assíntotas

p/ K>0

$$\theta=\frac{(2i+1)\cdot 180°}{3}\Rightarrow \theta'=60°,\ \theta''=180°,\ \theta'''=-60°$$

p/ K<0

$$\theta=\frac{(2i)\,180°}{3}\Rightarrow \theta'=0°,\ \theta''=120°,\ \theta'''=-120°$$

1.4) Ponto de interseção assíntotas

$$\sigma=\frac{\Sigma\,\text{polos}-\Sigma\,\text{zeros}}{3}=\frac{0-7-50}{3}=-19$$

1.5) Pontos de sela

$$\dot N(s)\cdot D(s)-N(s)\cdot\dot D(s)=0$$

$$-16\cdot(3s^2+114s+350)=0$$

$$s'=-3{,}37$$

$$s''=-34{,}63$$

Atividade 2: Seja o LR de $1 + KG_2(s) = 0$ mostrado, com G_2 da forma $G_2(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)...}{(s+p_1)(s+p_2)...}$. Responder as perguntas abaixo, obtendo as informações aproximadas da figura:

2.1 Quais são os polos e zeros de $G_2(s)$?

R: Dois dos polos de G2 estão na origem e o terceiro está em aproximadamente -150. Os polos estão localizados onde começam os ramos do LR. G2 possui um zero, segundo o LR mostrado, que está localizado em -50. O zero é o fim de um ramo no LR e é reprezentado por um círculo.

2.2 Quais são as raízes quando $K \longrightarrow 0$ e quando $K \longrightarrow \infty$?

R: Quando K->0, as raizes estão no polo, portanto duas delas na origem e a terceira em -150.

Quando K->Infinito, uma das raizes tende ao zero, em -50, já as outras duas tendem a parte real igual a -50 e as partes imaginárias a +- infinito.

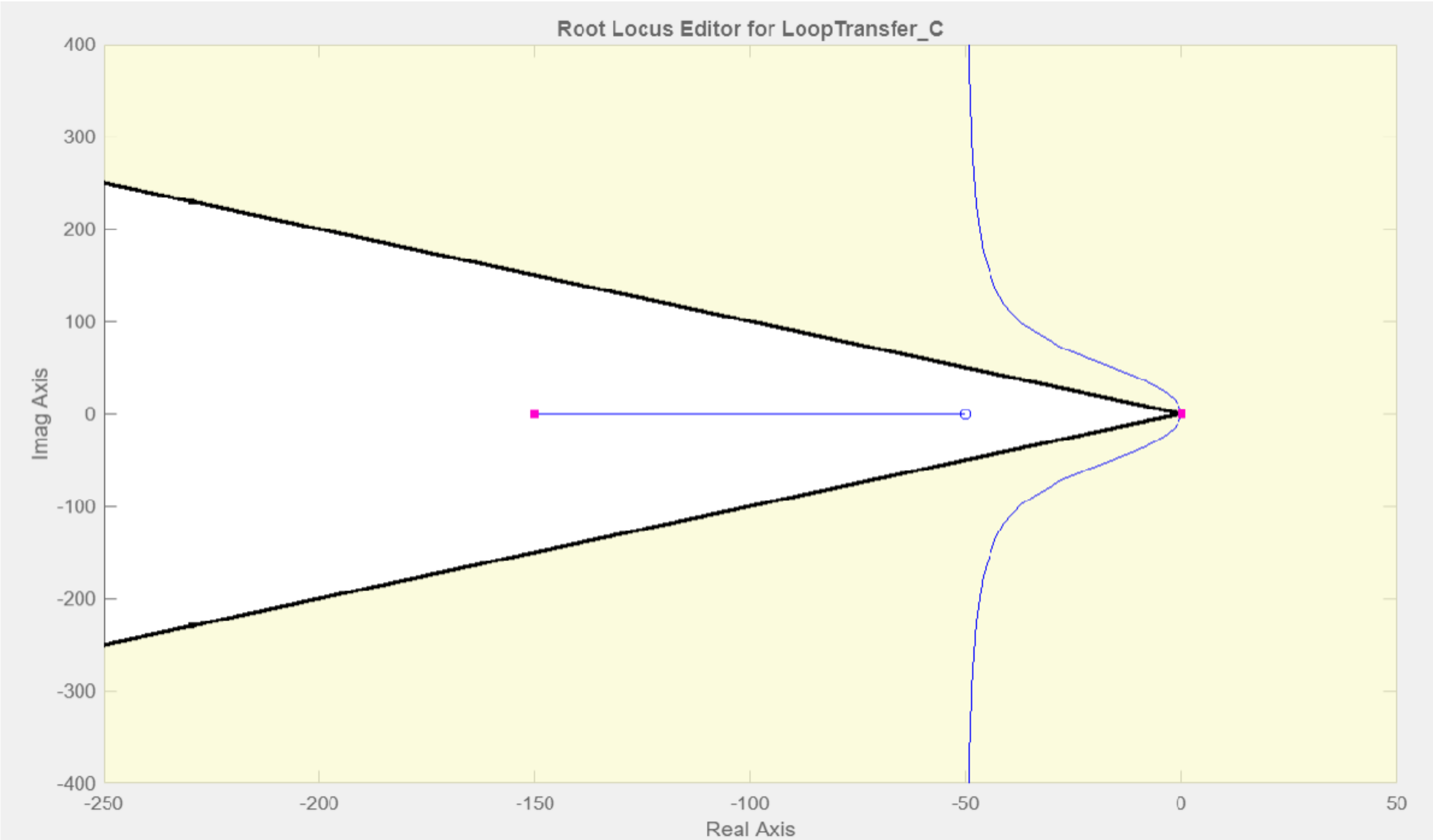
2.3 Para que valores de $K > 0$ e $K < 0$ esse sistema é estável?

R: Analisando o local das raízes, as raízes nunca vão para o semiplano direito para K>0, portanto o sistema é estável para qualquer K>0.

Já para qualquer K<0, uma das raízes estará no semiplano direito, tornando o sistema instável. Portanto, o sistema só é estável para K>0.

2.4 Obtenha os valores de K para os quais o par de polos complexos tem amortecimento $\zeta \geq 0.707$?

R: Para se ter um amortecimento maior que 0.707, o ângulo θ entre a raiz e o eixo real deve ser menor do que 45° (cos θ = amortecimento). Analisando o gráfico de LR, pode-se ver que as duas raízes que saem do eixo real nunca possuem valores de θ menor que 45°, portanto não existem valores para K para os quais $\zeta \geq 0.707$.



2.5 Obtenha os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento atende $t_s \leq \frac{8}{I}$.

R: Para se obter um tempo de estabelecimento menor ou igual a 0.5 (8/16), temos que:

$$0.5 \geq \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$\zeta \omega_n \geq \frac{4}{0.5}$$

$$\zeta \omega_n \geq 8$$

Portanto, a parte real das raizes complexas deve ter módulo maior que 8.

Buscando no gráfico, temos que quando a parte real de uma raíz complexa está em -8, a sua parte imaginária está em aproximadamente +-40. Assim, substituindo na 1+K.G2 estimada:

$$1 + K\,\mathrm{G2} = 1 + K\frac{(s+50)}{\mathrm{s}^2(s+150)} = 0$$

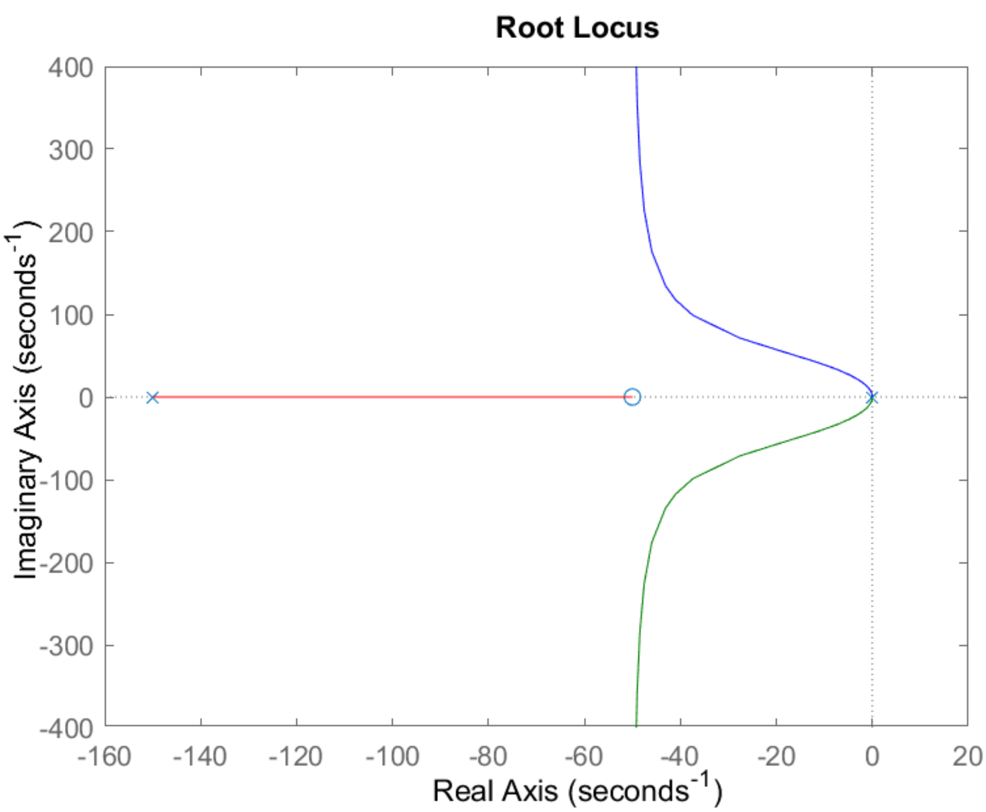
$$1 + K\frac{((-8+40i)+50)}{(-8+40i)^2((-8+40i)+150)} = 0$$

$$K = \frac{-(-8+40i)^2((-8+40i)+150)}{((-8+40i)+50)} = \frac{-(40.8 < 101.3°)^2(147.5 < 15.73°)}{58 < 43.6°}$$

$$K = \frac{-245534.4 < 218.33°}{58 < 43.6°} = -4233.35 < 174.73° = 4233.35 < 5.27°$$

Portanto, o ganho K deve ser maior do que aproximadamente 4200, para que o requisito de ts seja cumprido.

```
imshow('fig2.png');
```




```
test = tf([1 50], [1 150 0 0])
```

```
test =
 
      s + 50
  -------------
  s^3 + 150 s^2
 
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
rltool(test)
```

Atividade 3: Seja a FT de primeira ordem com tempo morto $G_3(s)$. Discretize esta FT obtendo $G_3(z)$ com tempo de amostragem igual a 1/5 do tempo morto, faça o LR discreto e responda as perguntas abaixo:

3.1 Identifique os polos e zeros de $G_3(z)$.

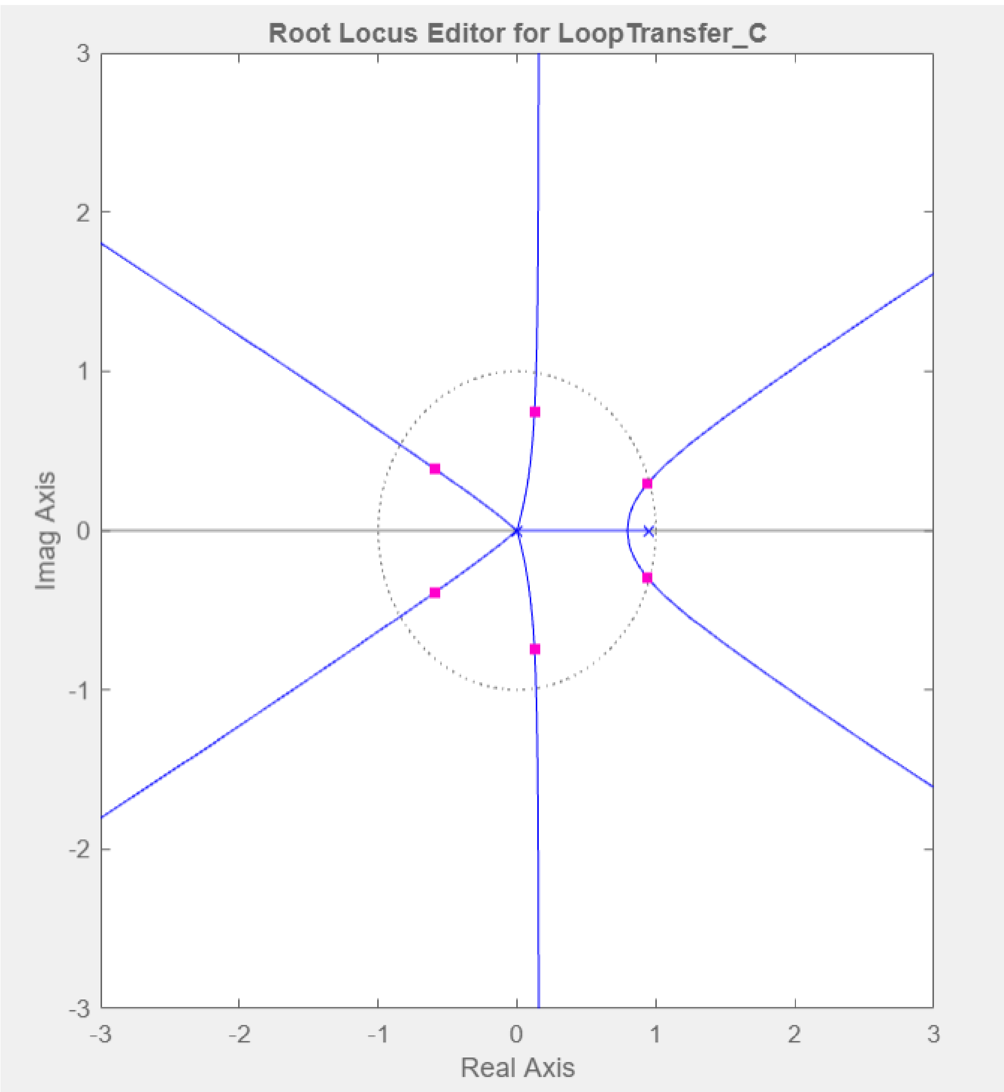
R: Polos: p1=0.9512, E 5 polos na origem. Os polos podem ser obtidos tanto olhando para o LR, quanto para a função de transferência discreta.

Zeros: G3(z) não possui zeros.

3.2 Obtenha todos os valores de $K \in [-\infty, \infty]$ para os quais este sistema é estável.

R: Analisando o RLtools da função discreta G3d, foi observado que o sistema é estável, ou seja, tem todas as suas raizes dentro do círculo unitário, quando K está no intervalo:

-0.34<K<2.1

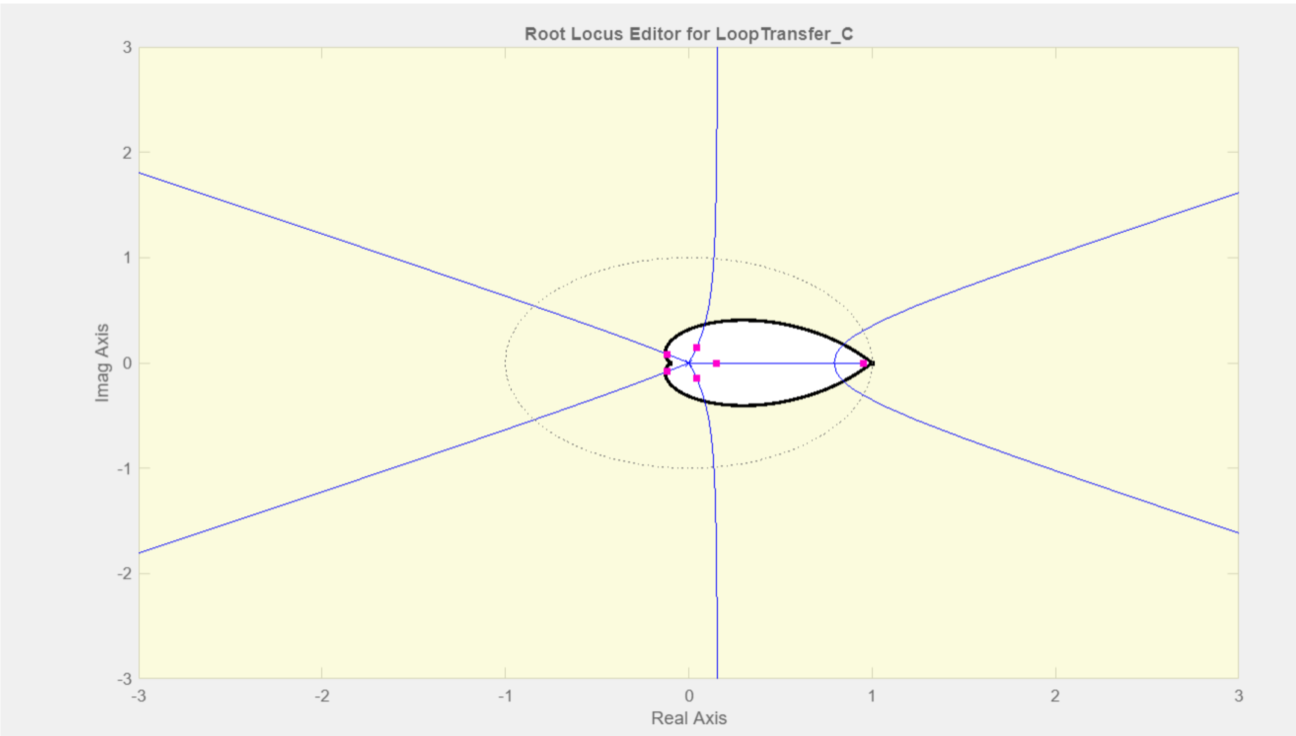


3.3 Para que valores de K tem-se $UP \leq 10\%$?

R: Utilizando o RLtools, definido a restrição de 10% de sobreelevação, todas as raizes ficam no interior da cardióide desenhada para K aproximadamente igual a 0.00044.

Portanto, UP <= 10% para

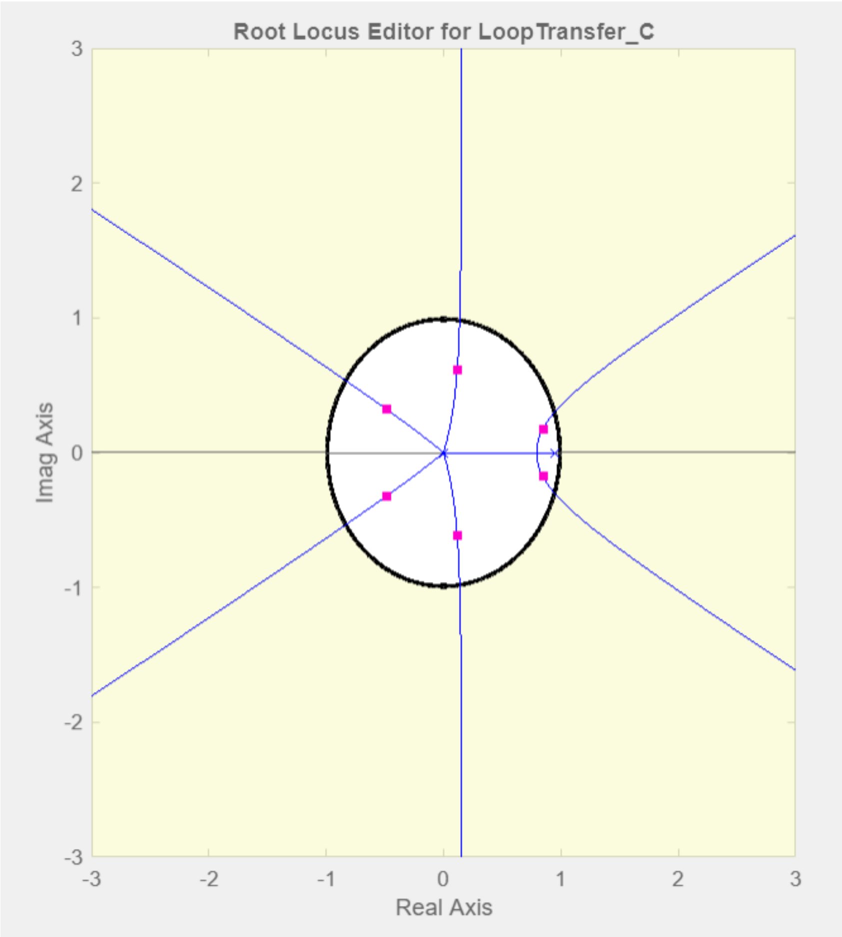
0 < K < 0.00044012



3.4 Verifique se existem valores de K para os quais $t_s \leq 10I$ s.

R: Para ts <= 160 (10*16):

Utilizando o RLtools e desenhando o círculo que representa ts < 160 segundos, pode-se ver que esse círculo é igual ao círculo unitário. Ou seja, todos os valores de K que deixam o sistema estável, também o deixam com tempo de estabelecimento menor do que 160 segundos.



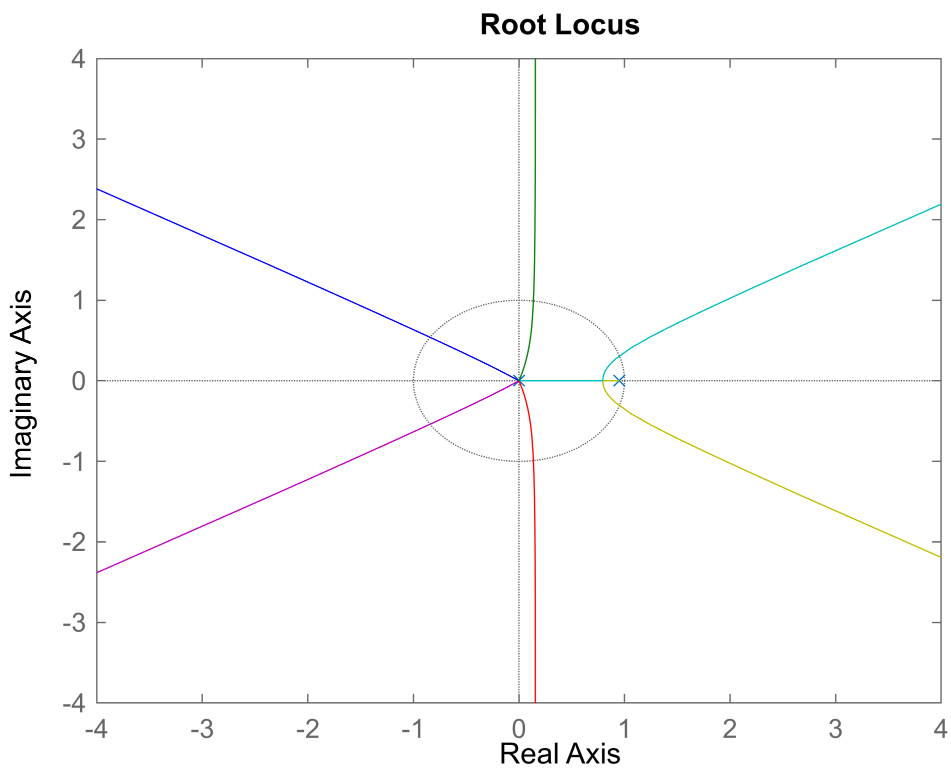

```
G3
```

```
G3 =
 
                     3
  exp(-1.75*s) * -------
                 7 s + 1
 
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
G3d = c2d(G3, G3.InputDelay/5)
```

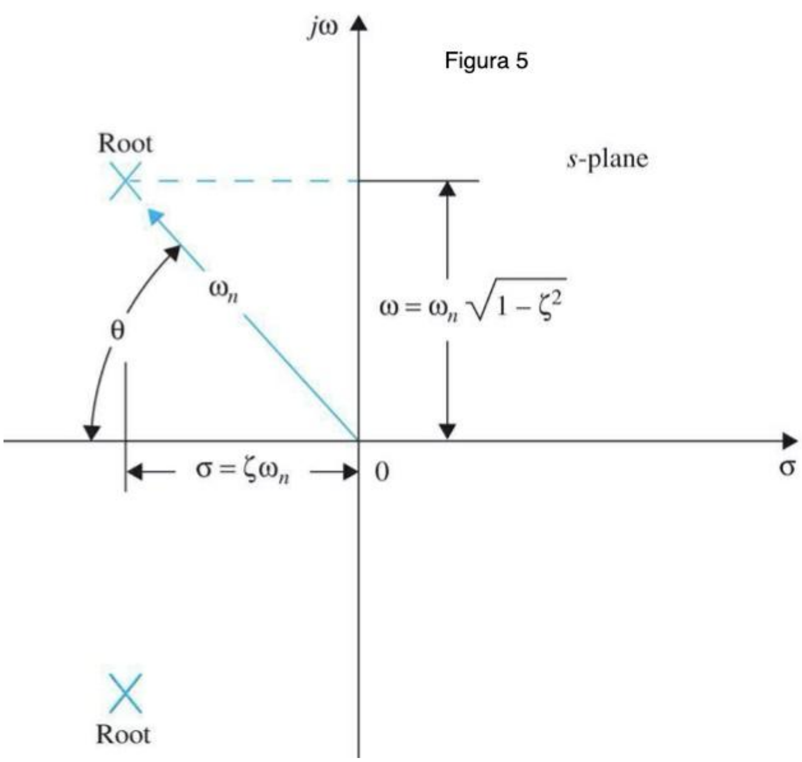
```
G3d =
 
              0.1463
  z^(-5) * ----------
           z - 0.9512
 
Sample time: 0.35 seconds
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

```
rlocus(G3d)
```

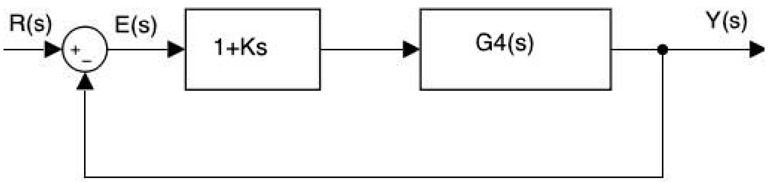



```
rltool(G3d)
```

Lembrando: $\zeta = \cos\theta$, $\mathrm{ts} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$, $0 < \zeta < 0.9$.



Atividade 4: Seja o diagrama de blocos mostrado.



G5

6.1 Faça o LR e explique o efeito de K sobre os polos de malha fechada.

R: Para fazer o LR, precisamos colocar a equação característica no formato:

$$1 + \mathrm{KG} = 0$$

Assim, temos que a EQ inicialmente será:

$$1 + (1 + \mathrm{Ks})\mathrm{G4} = 0$$

$$1 + (1 + \mathrm{Ks}) * \frac{400}{s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6561} = 0$$

$$\frac{(s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6561)}{s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6561} + (1 + \mathrm{Ks}) * \frac{400}{s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6561} = 0$$

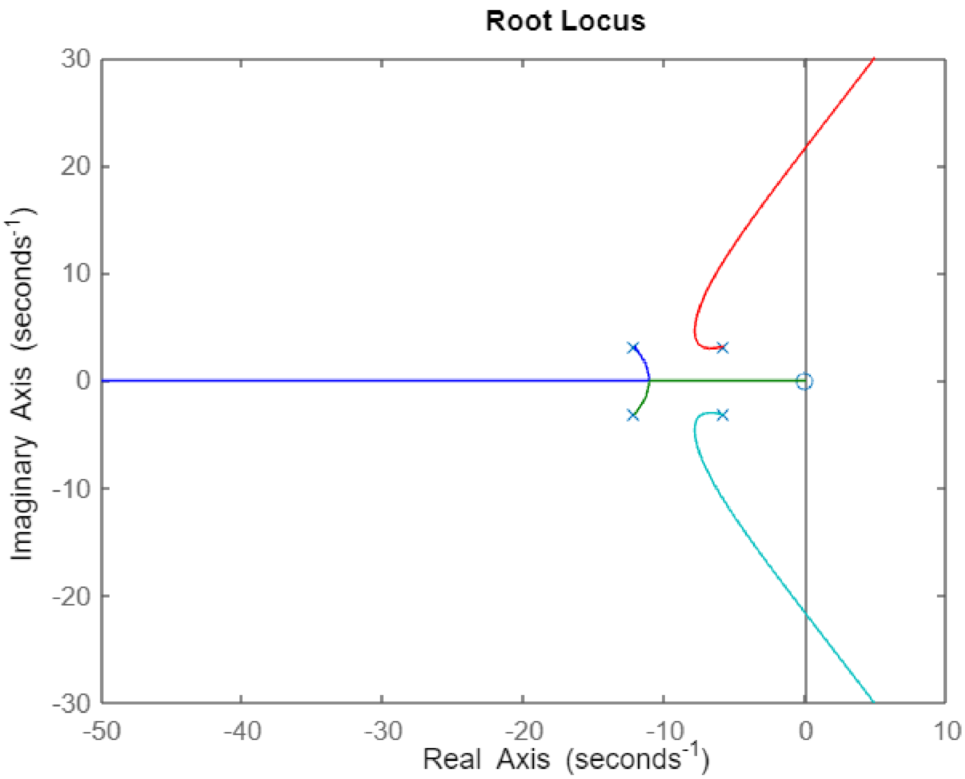
$$s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6561 + (400 + 400\mathrm{Ks}) = 0$$

$$\frac{(s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6961 + 400s\mathrm{K})}{s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6961} = 0$$

$$1 + K * \frac{(400s)}{s^4 + 36s^3 + 486s^2 + 2916s + 6961} = 0$$

Com a equação no formato correto, podemos usar o RLocus para desenhar a LR

```
G4new = tf([400 0], [1 36 486 2916 6961]);
rlocus(G4new);
```

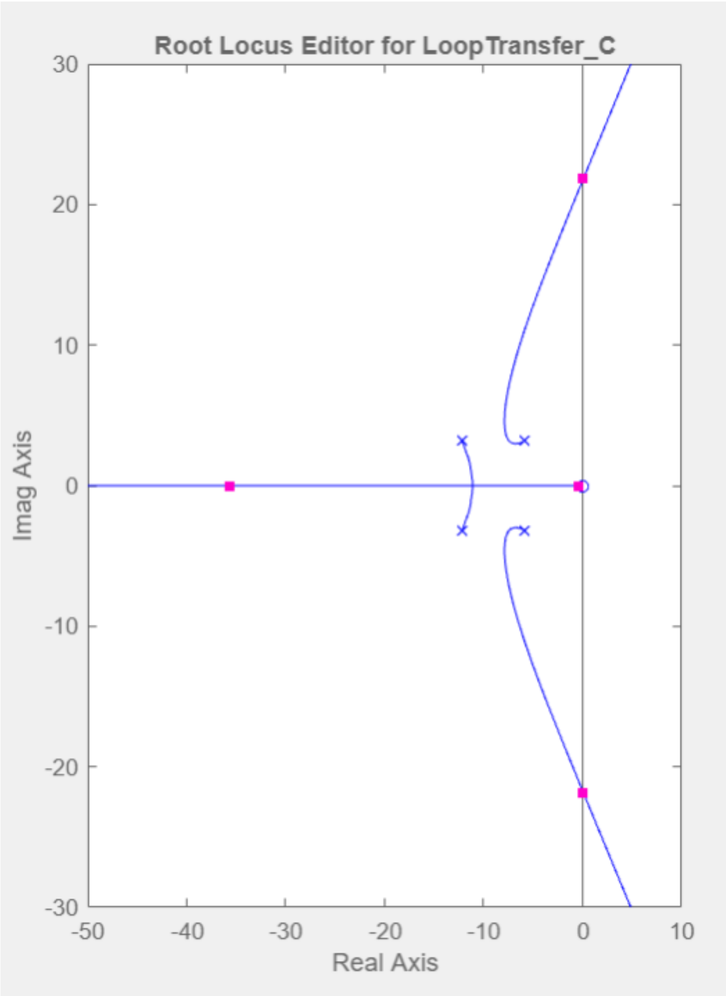


Analisando o Lugar das Raízes, com o aumento do ganho K, um dos polos se afasta da origem e tende ao menos infinito, outro polo de malha fechada caminha até o zero na origem pelo eixo real, se aproximando dela. Os outros dois polos restantes tendem as assintotas de 60° e -60°, aumentando tanto a parte real quanto a parte imaginária e eventualmente cruzando para o semiplano direito com o aumento do ganho.

6.2 Obtenha os valores de $K > 0$ para os quais o sistema é estável.

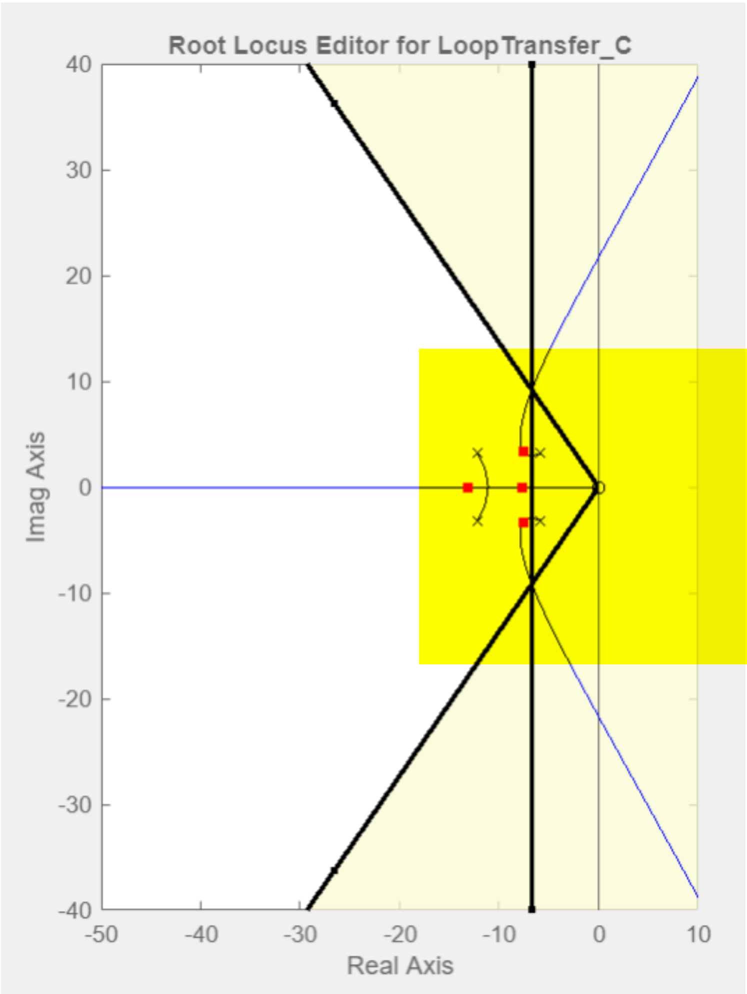
R: Analisando o LR, dois polos cruzam o eixo imaginário indo para o semiplano direito com K de valor aproximadamente 35. Portanto o sistema é estável para

$0<K<35$

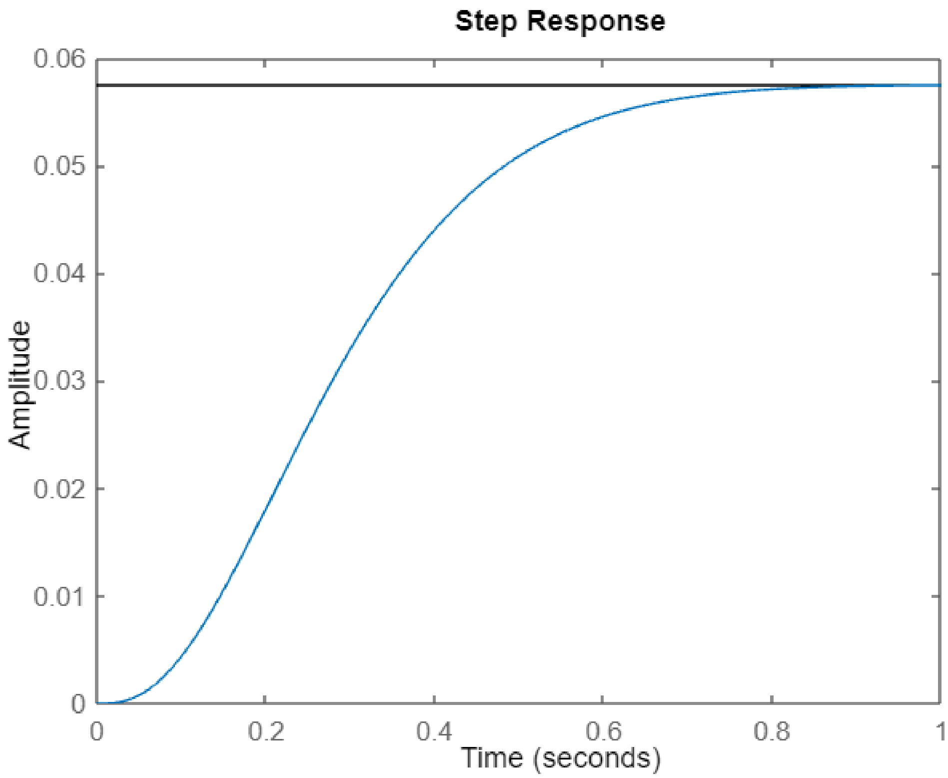


6.3 Obtenha um valor de K tal que $UP \leq 10\%$ e o tempo de estabelecimento seja o menor possível. Faça uma simulação ao degrau comprovando.

R: Como o tempo de estabelecimento é inversamente proporcional ao modulo da parte real dos polos, o menor tempo de estabelecimento possível ocorrerá quando os polos estiverem o mais para a esquerda possível. Analisando o LR, temos que essa condição é atingida para K=0.13, valor de K que causa uma sobreelevação baixa, menor que 10%, como pode ser visto na resposta ao degrau do sistema com esse valor de K.




```
K = 0.13;
C = tf([K 1], 1);
step(feedback(C*G4, 1))
```




```
G4
```

```
G4 =

                   400
  --------------------------------------
  s^4 + 36 s^3 + 486 s^2 + 2916 s + 6561

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```