Sistemas Realimentados

Exercício Proposto 3 – Síntese direta para $G(s) = \dfrac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$

Nomes: Jacy Antônio Caser Junior e Thiago Henrique Genaio Mai

Projetar um controlador para a função transferência $G(s) = \dfrac{0.5e^{-2s}}{5s + 1}$

1) Escolha dos parâmetros do modelo de referência $T(s) = \dfrac{e^{-ds}}{\lambda s + 1}$

O parâmetro *d* representa o coeficiente de tempo morto na resposta desejada do sistema. Em termos simples, ele indica o atraso inicial na resposta antes que ela comece a se manifestar. Como a planta já apresenta um tempo morto de *2 s*, isto é, sua função transferência $G(s)$ já possui um termo exponencial e^{-2s}, escolhe-se um *d* também de *2 s*. Vale observar que é impossivel obter um controlador realizável para um *d* menor que 2, uma vez que isso resultaria num sistema não-causal.

O parâmetro λ é uma medida da rapidez com que o sistema responde a uma mudança na entrada. Um valor menor de λ indica uma resposta mais rápida do sistema, enquanto um valor maior indica uma resposta mais lenta. A planta em malha aberta apresenta uma constante de tempo τ de *5 s*. Isso significa que o tempo que ela levaria para chegar em regime permanente seria de *25 s*, ou seja, 5τ. Pensando em reduzir esse tempo necessário para atingir o regime permanente para *15 s*, pode-se escolher um λ de *3 s*, dado que $5\lambda = 5 \cdot 3 = 15\ s$.

2) Calcular os parâmetros do controlador *C(s)* tal que $T(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$

Rearranjando a expressão $T(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ para isolar $C(s)$, *obtém-se*:

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

Substituindo o $T(s) = \dfrac{e^{-ds}}{\lambda s + 1}$ na expressão acima:

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{e^{-ds}}{\lambda s + 1 - e^{-ds}}$$

Para um tempo morto *d* relativamente pequeno, é plausível usar a aproximação pela expansão de Série de Taylor truncada:

$$e^{-ds} \approx 1 - ds \Rightarrow C(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{e^{-ds}}{\lambda s + 1 - (1 - ds)} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{e^{-ds}}{(\lambda + d)s}$$

Considerando $d = \theta$ e subsitituindo $G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$ na equação acima, obtém-se:

$$C(s) = \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{(\lambda + d)s} = \frac{\tau + 1/s}{K(\lambda + d)} = \frac{\tau}{K(\lambda + d)} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)$$

Portanto, os parâmetros K_p e τ_i do controlador proporcional-integrativo (PI) representado por $C(s)$ podem ser calculados da seguinte maneira:

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right); \quad K_p = \frac{\tau}{K(\lambda + d)} \quad e \quad \tau_i = \tau$$

Substituindo os parâmetros de $G(s)$ e $T(s)$ apresentados anteriormente, obtêm-se os seguintes parâmentros do controlador PI:

$$K_p = \frac{5}{0.5(3 + 2)} = 2 \quad e \quad \tau_i = 5$$

$$\therefore C(s) = 2\left(1 + \frac{1}{5s}\right)$$

3) Obter a resposta ao degrau para diferentes valores de λ, verificando se atendem as especificações

Repetindo o procedimento anterior para diferentes valores de λ e calculando a resposta ao degrau da função transferência em malha fechada (FTMF) do sistema representado na Figura 1, obtêm variadas curvas, conforme mostra a Figura 2.

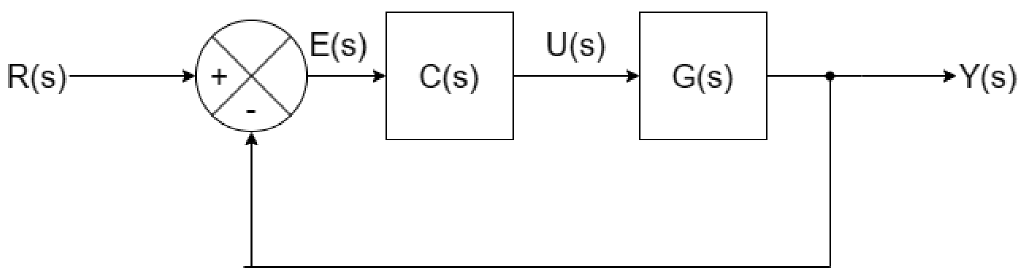

Figura 1: Diagrama de blocos do sistema controlado em malha fechada.

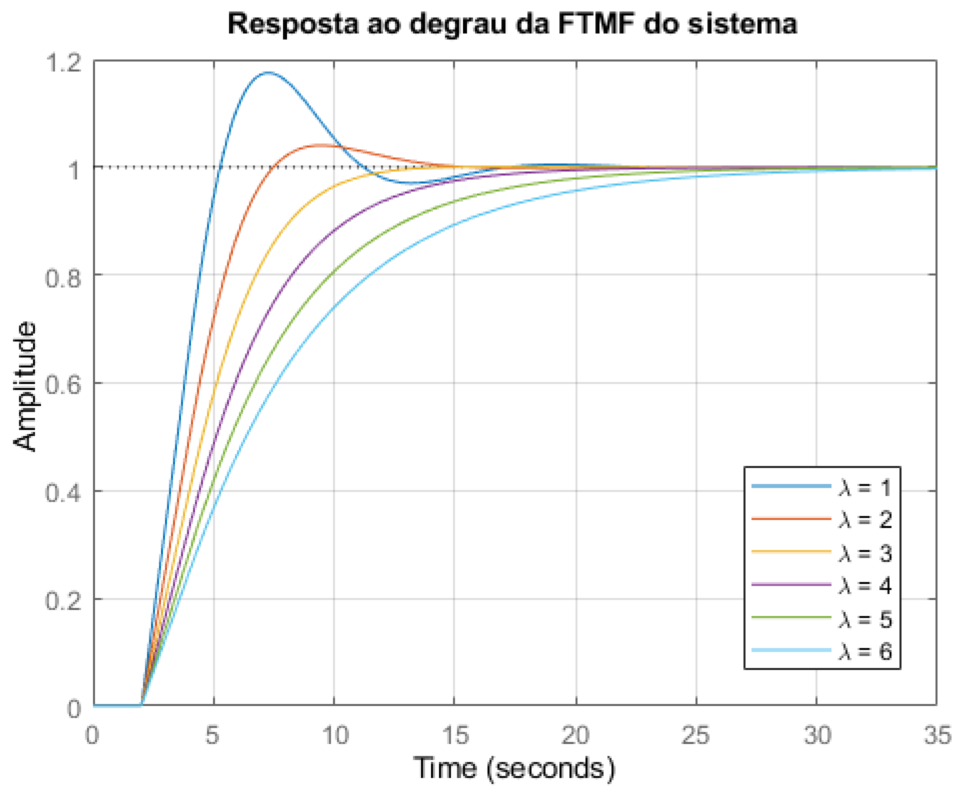

Figura 2: Resposta ao degrau para diferentes valores de λ.

Pode-se notar que quando o λ é menor que 3, a resposta ao degrau do sistema passa a ter sobreelevação, perdendo a similaridade com o modelo de referência $T(s)$, que é de primeira ordem. Logo, ainda que a resposta seja mais rápida com um λ menor, tais situações não atendem às especificações de projeto. Por outro lado, com um λ maior que 3, observa-se que a resposta tarda mais para alcançar o valor de referência. Se o objetivo é ter uma resposta mais rápida, então o valor mais adequado para λ é 3, de acordo com o gráfico da Figura 2.

4) Calcular e simular o erro em regime permanente para o degrau unitário

Para calcular o erro em regime permanente, usa-se a fórmula a seguir:

$$e_{ss} = \lim_{s \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Sabe-se que a função transferência do erro é

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Como a entrada é um degrau unitário, $R(s) = \dfrac{1}{s}$, então

$$E(s) = R(s) \cdot \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Substituindo $E(s)$ na equação de e_{ss}:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+C(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)G(s)}$$

Substituindo as expressões literais de $C(s)$ e $G(s)$:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)G(s)} = e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right) \cdot \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s+1}} =$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{\tau_i s \cdot (\tau s+1)}{\tau_i s \cdot (\tau s+1) + KK_p(\tau_i s+1)e^{-\theta s}} = \frac{0}{0+KK_p} = 0$$

Portanto, o erro em regime permanente para a entrada de degrau unitário é zero. Para gerar o gráfico da resposta ao degrau unitário do erro em função do tempo no MATLAB, basta usar os seguintes comandos:

```
FTMFdeEporR = feedback(1, C*G);      % Obtém a função transferência E/R
step(FTMFdeEporR);                   % Gera o gráfico da resposta ao degrau unitário
```

Na Figura 3, apresenta-se o gráfico gerado para os parâmentros definidos na questão 1, a saber: $\lambda = 3$ e $d = 2$. Observe-se que o erro é complementar ao sinal de saída: a soma de ambos é igual à referência. Tão logo a saída se estabeleça próximo ao sinal de referência, o erro tenderá à zero.

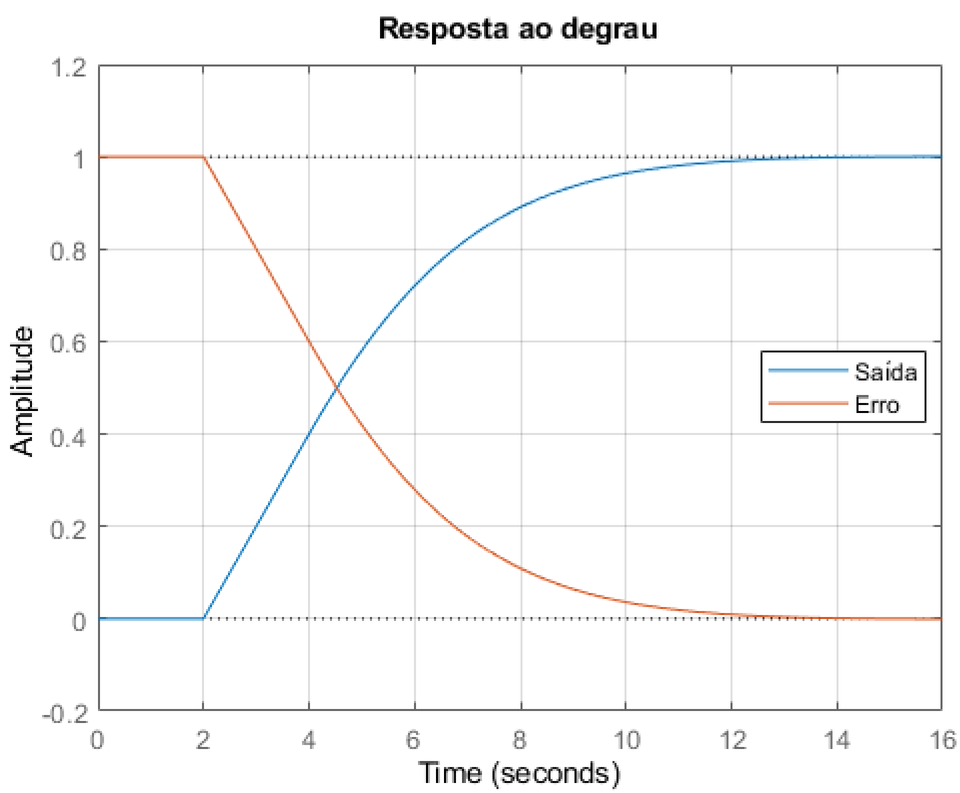

Figura 3: Comportamento do erro e da saída para o degrau unitário como entrada.

5) Escolher uma boa resposta e plotar gráfico da referência, sinal de controle e saída

A resposta escolhida é a de $\lambda = 3$ e $d = 2$, por apresentar uma resposta rápida e sem sobrelevação, como mostrado anteriormente. Para obter o gráfico dos sinais de referência, controle e saída em função do tempo, deve-se usar a Transformada Inversa de Laplace em $R(s)$, $U(s)$ e $Y(s)$, onde:

- $R(s) = \frac{1}{s}$
- $\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$
- $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$

No MATLAB, para obter a resposta ao degrau dessas funções transferência, basta utilizar os seguintes comandos:

- Para $\frac{U(s)}{R(s)}$:

```
FTMFdeUporR = feedback(C, G);  % Obtém a função transferência U/R
step(FTMFdeUporR);             % Gera o gráfico da resposta ao degrau unitário
```

- Para $\frac{Y(s)}{R(s)}$:

```
FTMFdeYporR = feedback(C*G, 1);  % Obtém a função transferência Y/R
step(FTMFdeYporR);               % Gera o gráfico da resposta ao degrau unitário
```

Na Figura 4, apresenta-se o gráfico dos sinais de referência, controle e saída. Observe-se que o sinal de controle é máximo imediatamente após o tempo morto e depois decresce, tendendo a K_p quando o tempo tende a infinito.

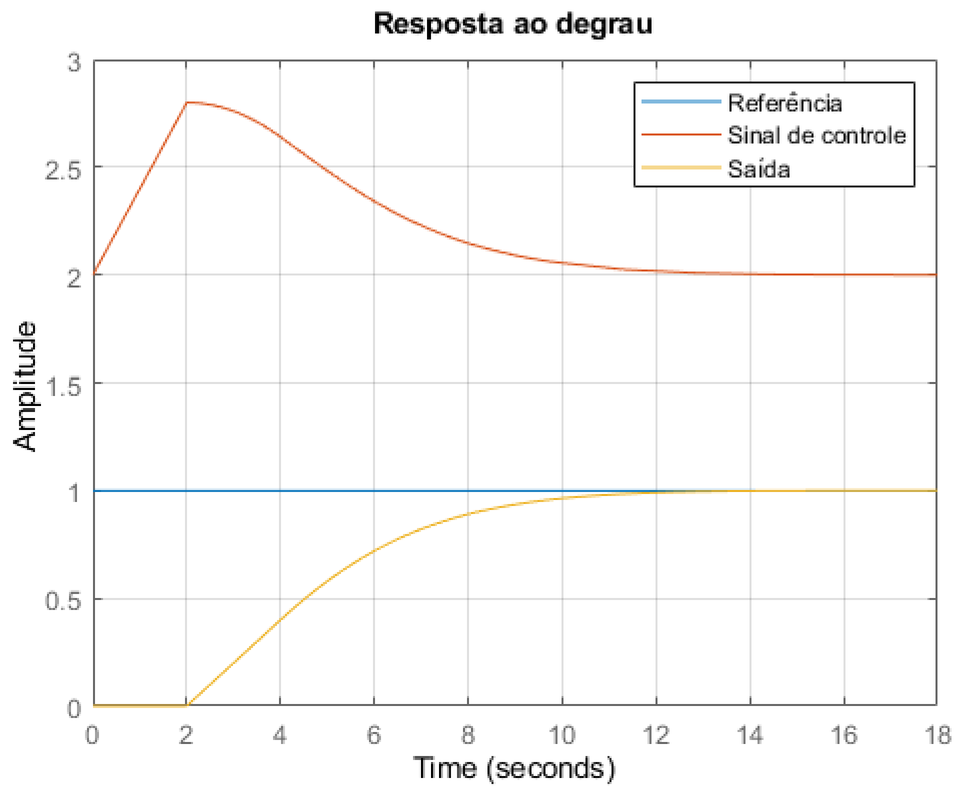

Figura 4: Comportamento dos sinais de referência, controle e saída para o degrau unitário.