EP12 - Projeto do Controlador PI via lugar das raízes

Aluna: Elisa Pola Simonetti ~~e Nathalia Gabriel Simor~~

Seja o sistema dado pela FT de malha aberta $G(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s+4)}$ e o controlador PI $C(s) = K_p + \dfrac{K_i}{s}$.

Primeiramente, define-se a função de transferência de malha aberta G(s). Observa-se que ela não possui zeros e possui dois polos, um em s = -1 e o outro em s = -4.

```
g = tf([2],[1 5 4])
```

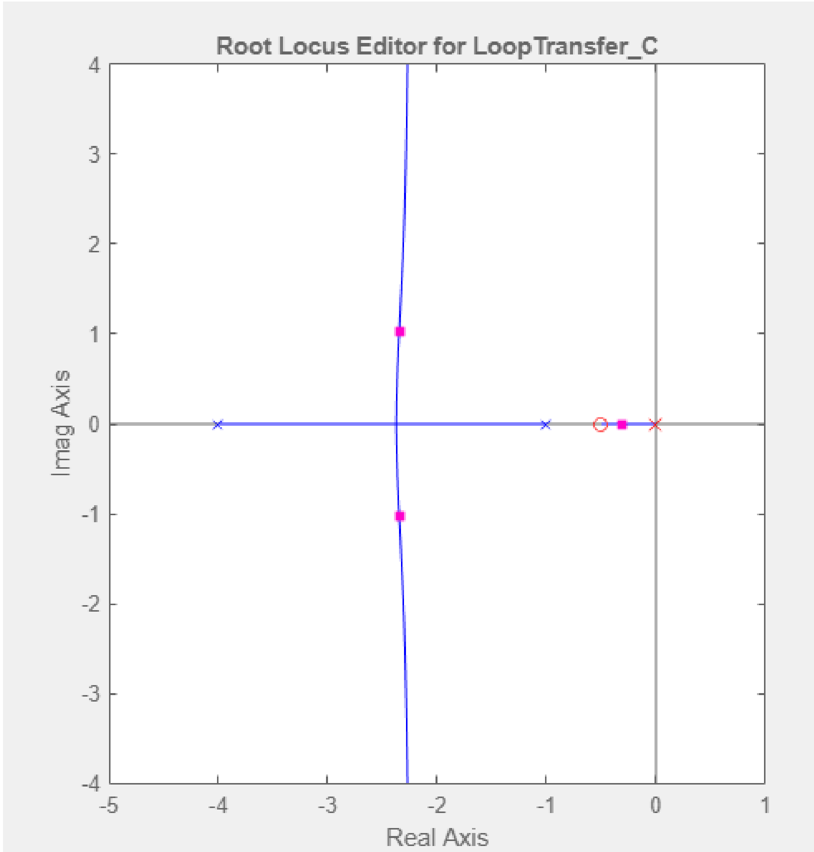
```
g =
 
        2
  -------------
  s^2 + 5 s + 4
 
Continuous-time transfer function.
```

1) Coloque o zero do PI em s = -0.5 e obtenha os valores de Kp e Ki tal que a sobreelevação $\leq$ 5% e o tempo de estabelecimento $\leq$ 8 seg.

O controlador PI (Proporcional - Integral) adiciona um polo na origem, que é o efeito integrador, aumentando o tipo do sistema e contribuindo para que o erro em regime seja nulo, e também um zero.

Para projetar um controlador PI, o primeiro passo a ser feito é adicionar o integrador, que consiste em um polo na origem. Após isso, é necessário adicionar um zero, e então variar os valores do ganho Kp para obter a resposta desejada.

Para isso, foi utilizada a ferramenta *RLTOOL* do *Matlab.* Adicionando a G(s) o polo na origem e o zero em s = -0.5 obteve-se o seguinte lugar das raízes:

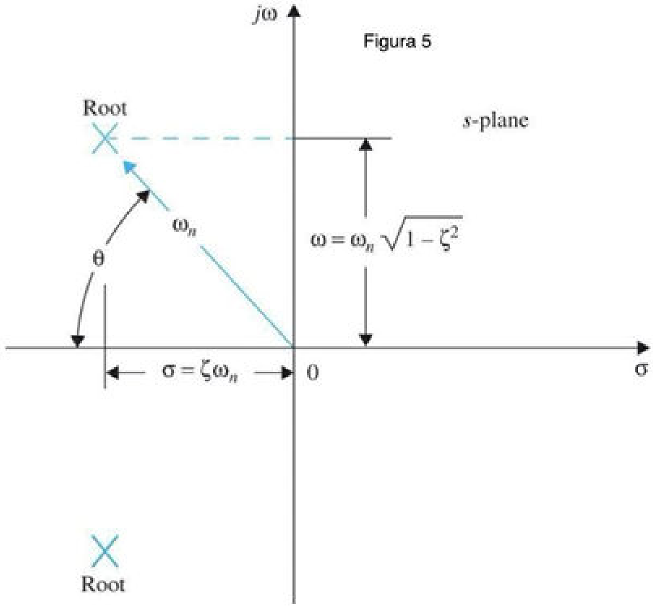


É possível notar que, ao aumentar o ganho, o polo da origem tende ao zero do PI e os outros dois polos tendem a assíntotas de +90º e -90º.

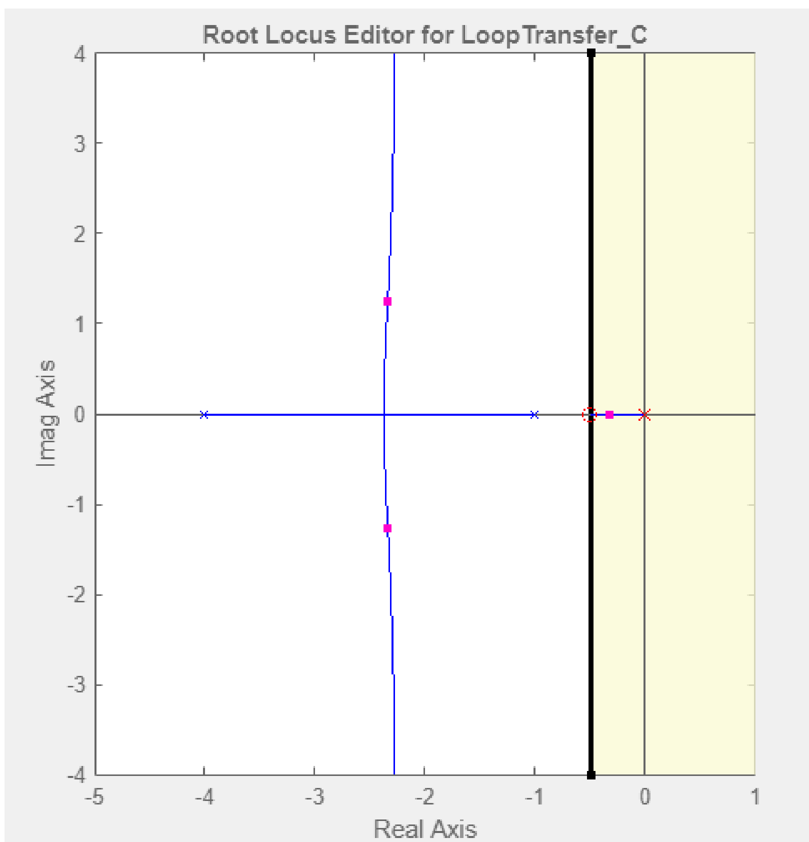
Para garantir as especificações da resposta desejada, é necessário analisar cada um dos requisitos separadamente. Logo, sendo o tempo de estabelecimento calculado por

$$t_s = \frac{4}{\zeta * \omega_n} \leq 8 \text{, então } \zeta * \omega_n \geq 0.5$$

Relembrando a relação:



Portanto traçando uma reta em s = -0.5, uma vez que a relação $\zeta * \omega_n$ representa o eixo real, como pode ser visto na figura acima, obteve-se a curva apresentada a seguir.



Com isso, deveria ser possível afirmar que a região a esquerda da linha traçada seguirá a especificação de ts $\leq$ 8 segundos. Porém, como a função possui 2 polos complexos e 1 polo real, sendo o polo real o que está mais próximo da origem, esse polo será o dominante, pois ele é o mais lento. Então essa análise do tempo de estabelecimento não é válida, uma vez que ela apenas é válida para polos complexos.

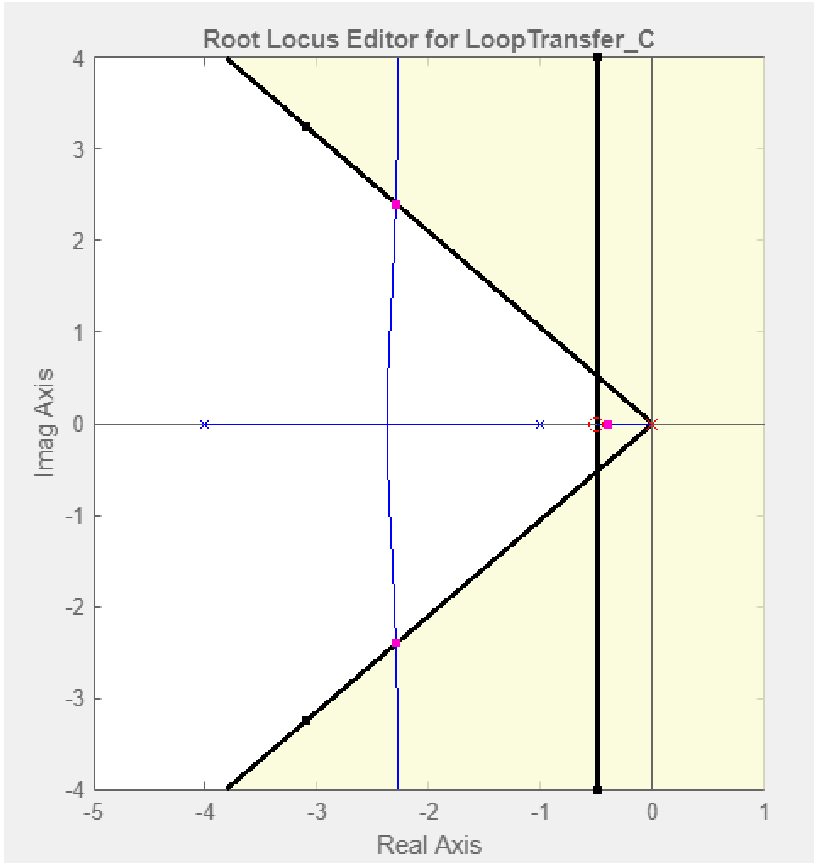
Já para a especificação da sobreelevação, sabe-se que $\zeta = \sqrt{\dfrac{\left(\ln \frac{\mathrm{Mp}}{100}\right)^2}{\pi^2 + \left(\ln \frac{\mathrm{Mp}}{100}\right)^2}}$, então como pede-se Mp $\leq$ 5%, calcula-se o ζ referente a esse valor:

$$\zeta = \sqrt{\dfrac{\left(\ln \frac{5}{100}\right)^2}{\pi^2 + \left(\ln \frac{5}{100}\right)^2}} = \sqrt{0,476} = 0,69$$

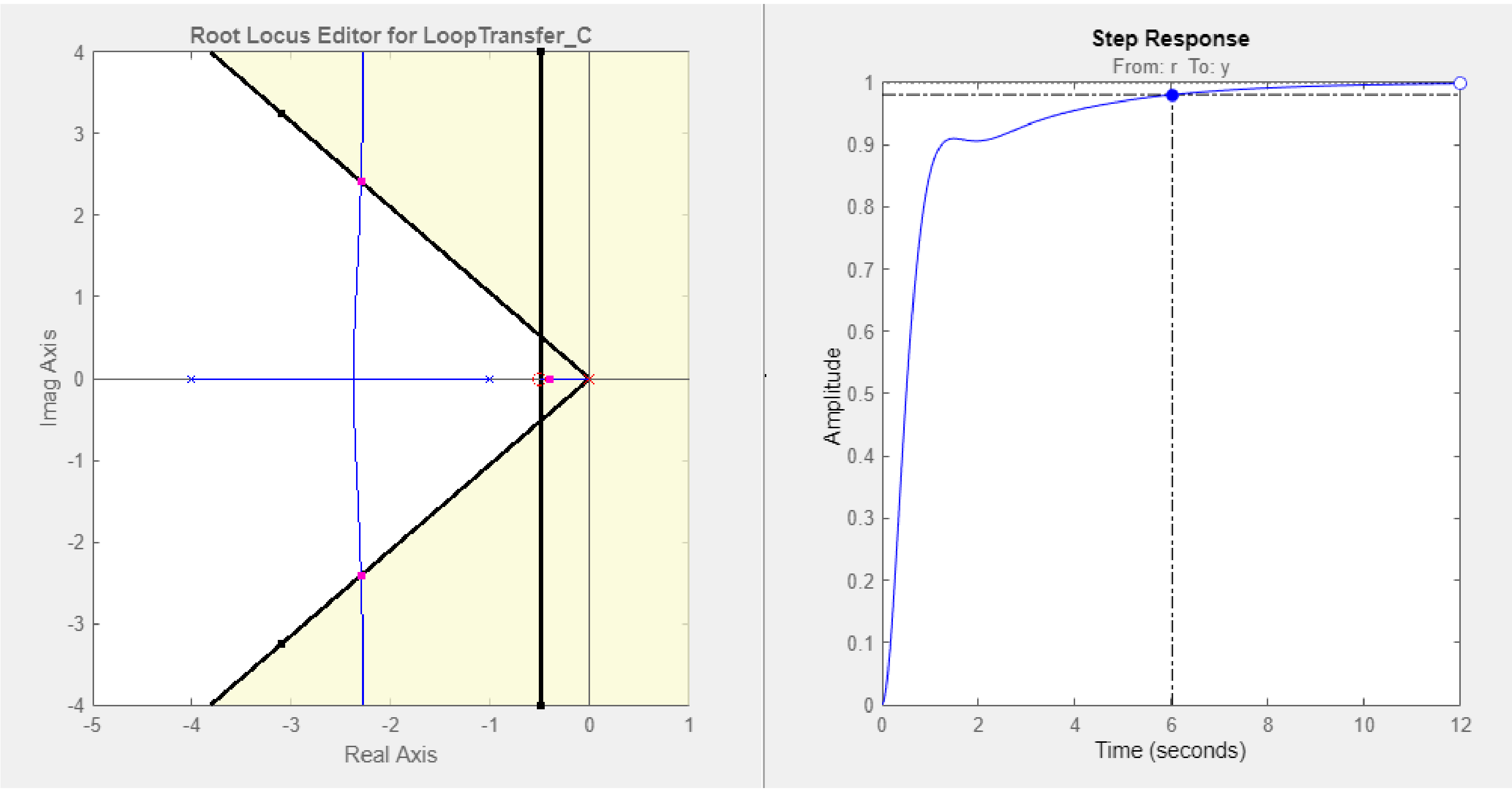
Portanto, $\zeta \leq 0,69$, porém como

$\zeta = \cos\theta$, então $\theta = \cos^{-1}\zeta = \cos^{-1}0,69 = 46,36^o$

Logo $\theta \leq 46,36^o$, então pode-se traçar duas retas no lugar das raízes que representam esse ângulo para limitar a região onde a sobreelevação será menor ou igual a 5%. Ainda com a ferramenta do *RLTOOL*, foram traçadas as duas retas com ângulo de 46,36º que delimitam a região com a sobreelevação pedida e a reta em s = -0,5 que delimita a região onde o tempo de estabelecimento é menor do que 8 segundos, resultando em:



Contudo, ao utilizar a ferramenta e aumentar o ganho, percebeu-se que a resposta ao degrau não seguiu o calculado, pois com o ganho na reta do ângulo calculado para uma sobreelevação de 5%, a resposta não apresentou essa sobreelevação, conforme observado a seguir



Tal acontecimento pode ser explicado pelo zero e pelo polo real a direita do par complexo, que alteram a resposta, uma vez que o polo real (polo na origem) é o polo dominante. Logo, não é possível determinar uma região para o limite da sobreelevação de 5% especificada.

Porém, analisando os ganhos do sistema, pode-se escolher um ganho Kp mais adequado para essa situação. Um Kp com valor mais alto gera uma resposta mais rápida, logo escolhe-se Kp = 3,6.

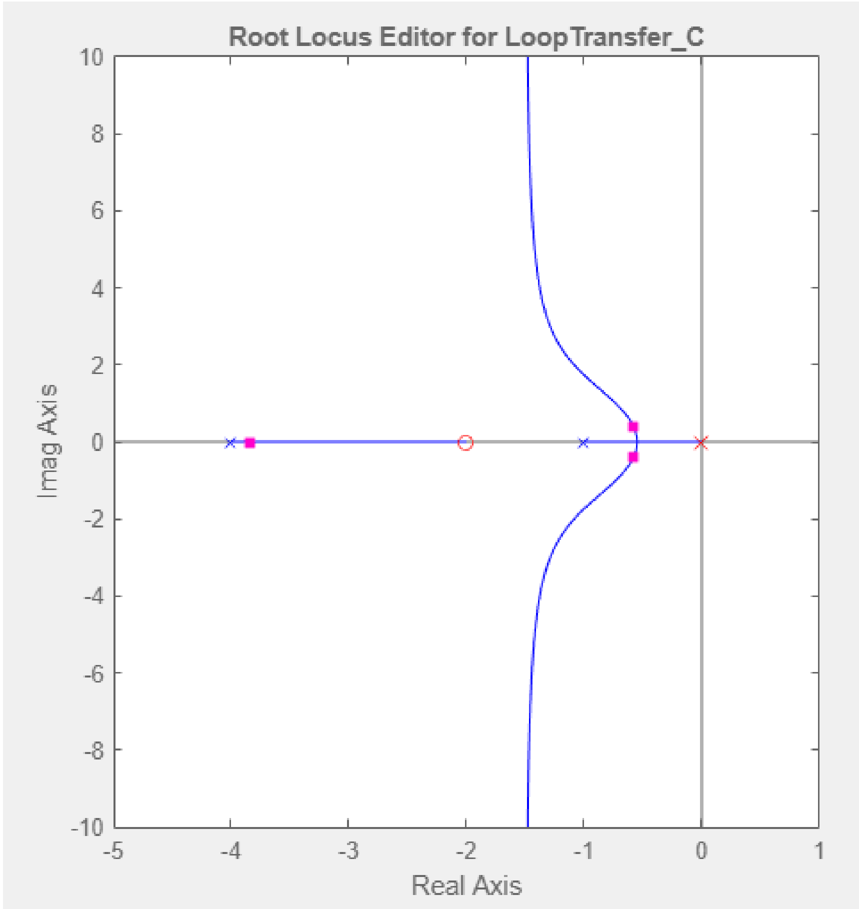
Como o zero do PI = $-\frac{\mathrm{Ki}}{\mathrm{Kp}}$, então $\mathrm{Ki} = 0,5 * 3,6 = 1,8$.

Portanto, o controlador será:

$$C(s) = 3,6 + \frac{1,8}{s}$$

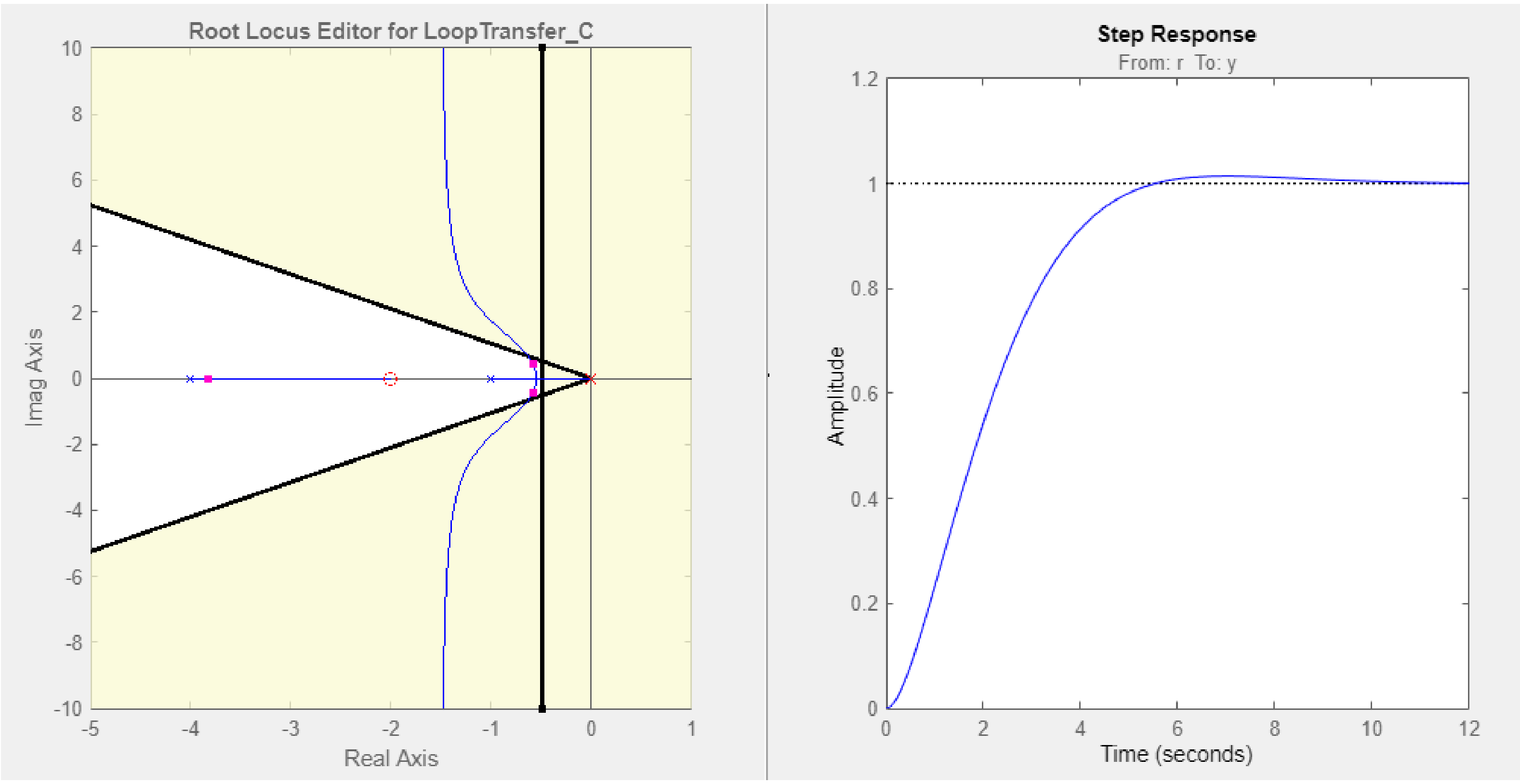
2) Repita o projeto colocando o zero do PI em s = - 2.

Da mesma forma feito anteriormente, primeiro adicionou-se o integrador, ou seja, o polo na origem e depois o zero em s = -2, obtendo o seguinte lugar das raízes:



Com isso, observa-se que o comportamento já foi alterado em relação ao anterior. Nesse sistema, com o aumento do ganho, o polo em -4 tende ao zero do PI e o polo da origem e o polo em -2 tendem a assíntotas de +90º e -90º.

Repetindo o processo anterior, como as especificações não mudaram, a reta ainda deve ser traçada em s = -0.5 e o ângulo deve ser menor do que 46,36º. Logo, adicionando as especificações no lugar das raízes obteve-se:



Para essa situação, os cálculos estabelecidos para encontrar as regiões onde o sistema obedece às especificações propostas são válidos, uma vez que os polos dominantes são os polos complexos, pois eles estão mais próximos da origem e apresentam um comportamento mais lento e o polo real apresenta um comportamento muito rápido, não interferindo muito na resposta.

Dessa forma, o ganho não pode ser muito alto, pois sai da zona especificada para a sobreelevação, porém para o tempo de estabelecimento, toda a região composta pelos polos a esquerda da reta é válida e, conforme aumenta-se o ganho, mais rápida a resposta fica.

Escolhendo um Kp perto do Kp máximo para não ultrapassar a sobreelevação e para obter uma resposta mais rápida, escolheu-se Kp = 0.5. Calculando Ki da mesma forma feita anteriormente obteve-se Ki = 2 * 0,5 = 1. Logo, o controlador PI projetado foi:

$$C(s) = 0,5 + \frac{1}{s}$$

3) Plote no mesmo gráfico a resposta ao degrau para C(s) obtido nos itens 1) e 2) atendendo as especificações.

Para plotar as respostas ao degrau, a priori definiram-se os controladores e depois as malhas foram fechadas com G(s) e cada controlador, para por último aplicar o degrau.

Além disso, na resposta ao degrau foi desenhada uma linha para indicar o tempo em 8 segundos e evidenciar que as respostas obedeceram ao critério do tempo de estabelecimento menor do que 8 segundos.

```
c1 = 3.6 * tf([1 0.5],[1 0])
```

```
c1 =

  3.6 s + 1.8
  -----------
       s

Continuous-time transfer function.
```

```
mf1 = feedback(g*c1,1);
ts1 = stepinfo(mf1).SettlingTime
```

```
ts1 = 6.9761
```

```
UP1 = stepinfo(mf1).Overshoot
```

```
UP1 = 0
```

```
c2 = 0.5 * tf([1 2],[1 0])
```

```
c2 =

  0.5 s + 1
  ---------
      s

Continuous-time transfer function.
```

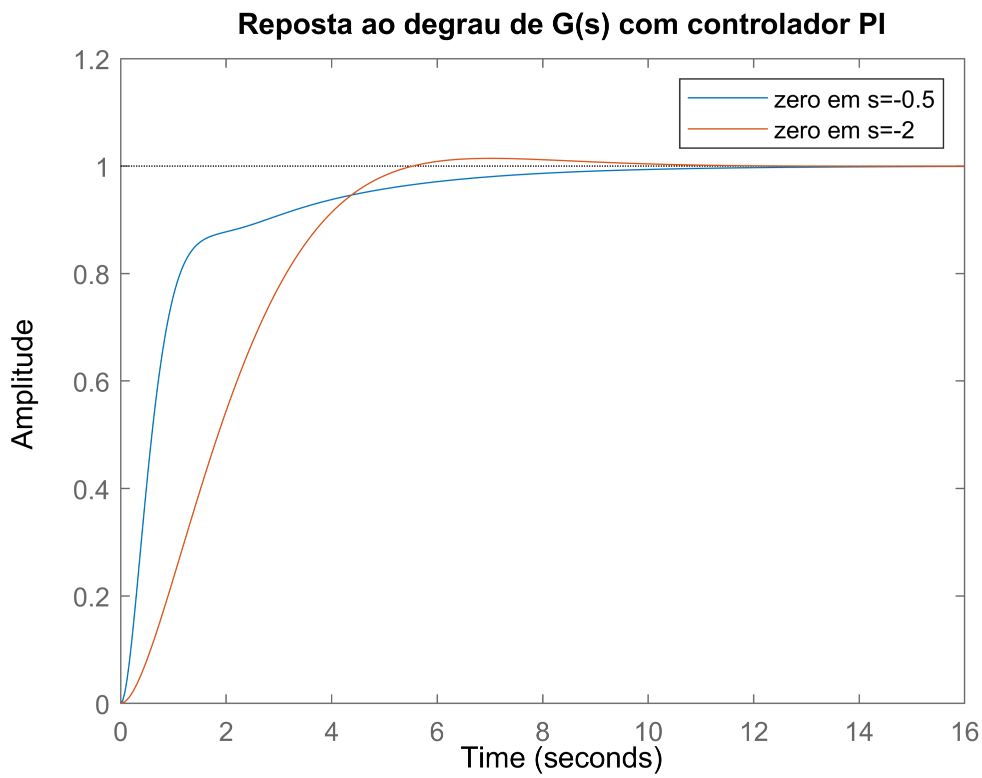
```
mf2 = feedback(g*c2,1);
ts2 = stepinfo(mf2).SettlingTime
```

```
ts2 = 4.9514
```

```
UP2 = stepinfo(mf2).Overshoot
```

```
UP2 = 1.4338
```

```
figure;step(mf1,mf2);legend("zero em s=-0.5","zero em s=-2");
title('Reposta ao degrau de G(s) com controlador PI')
```



Na figura acima é possível observar as duas respostas ao degrau, com as diferentes localizações do zero e as implicâncias que essa mudança causa a resposta do sistema.

A partir das respostas ao degrau, foi possível perceber que os dois controladores projetados cumpriram com as especificações desejadas, onde o primeiro obteve um tempo de estabelecimento de 6.98 segundos e uma sobreelevação de 0%, e o segundo controlador obteve um tempo de estabelecimento de 4.95 segundos e uma sobreelevação de 1.43%.

4) Explique o efeito da localização do zero do PI para atender as especificações deste projeto.

O zero do PI influencia de forma significativa na resposta do sistema, como observado nos projetos realizados anteriormente.

O zero adicionado mais próximo a origem gera uma resposta mais amortecida, com menor sobreelevação, porém gera uma resposta mais lenta, então é necessário aumentar o Kp para obter uma resposta mais rápida que atenda à especificação proposta.

Já o zero mais longe da origem, no semiplano esquerdo, gera uma resposta mais rápida, porém com sobreelevação, menor amortecimento, sendo necessário um menor ganho para que a sobreelevação não seja muito elevada e maior do que a especificada.