Sistemas Realimentados - 2024/1

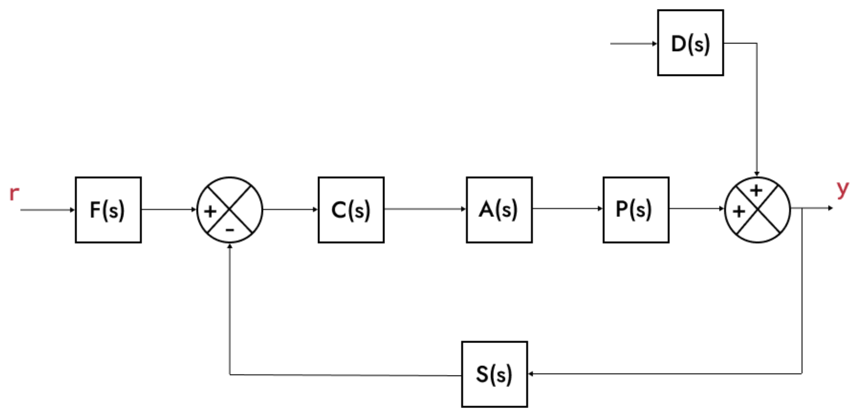
Ep 04 - Síntese direta para $G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ e modelo de referência de ordem 2

Alunos: João Paulo Moura & Thamya Donadia

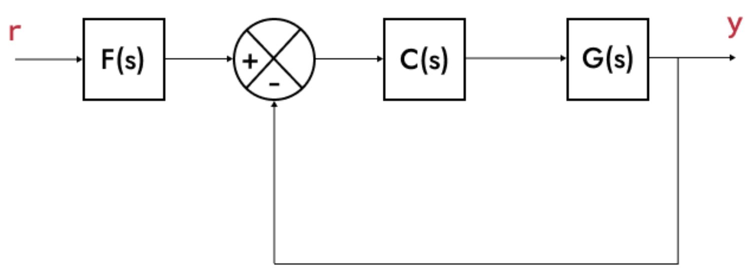
Problema: Projete um controlador para a FT $G(s) = \frac{1.5}{(0.5s + 1)(s + 1)}$

Visão geral

Um sistema clássico de controle possui a seguinte organização:



Para facilitar os cálculos do projeto do controlador, podemos simplificar o diagrama para a forma descrita na figura abaixo:



1) Escolha os parâmetros do modelo de referência $T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ **para ter sobreimpulso inferior a 5% e tempo de estabilização menor que 2 segundos.**

A priori, para que o modelo de referência tenha sobreimpulso inferior a 5%, temos:

$$\text{MP} \le 0.05 \Rightarrow e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \le 0.05 \Rightarrow \frac{(\zeta\pi)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \ge -\ln(0.05) \Rightarrow \zeta^2[\pi^2 + \ln^2(0.05)] \ge \ln^2(0.05) \Rightarrow \zeta^2 \ge \frac{\ln^2(0.05)}{\pi^2 + \ln^2(0.05)} \Rightarrow \zeta \ge 0.69$$

(1)

Ademais, tomando o tempo de estabilização menor que 2 segundos para o critério de 2%, obtemos:

$$t_{s2} \le 2 \Rightarrow \frac{4}{\zeta\omega_n} \le 2 \Rightarrow \omega_n \ge \frac{4}{2\zeta} \Rightarrow \omega_n \ge \frac{2}{0.69} \Rightarrow \omega_n \ge 2.90 \Rightarrow \omega_n = 2.90 \qquad (2)$$

Assim, tomando $\zeta = 0.69$ e $\omega_n = 2.90$, o modelo de referência de ordem 2 é dado por:

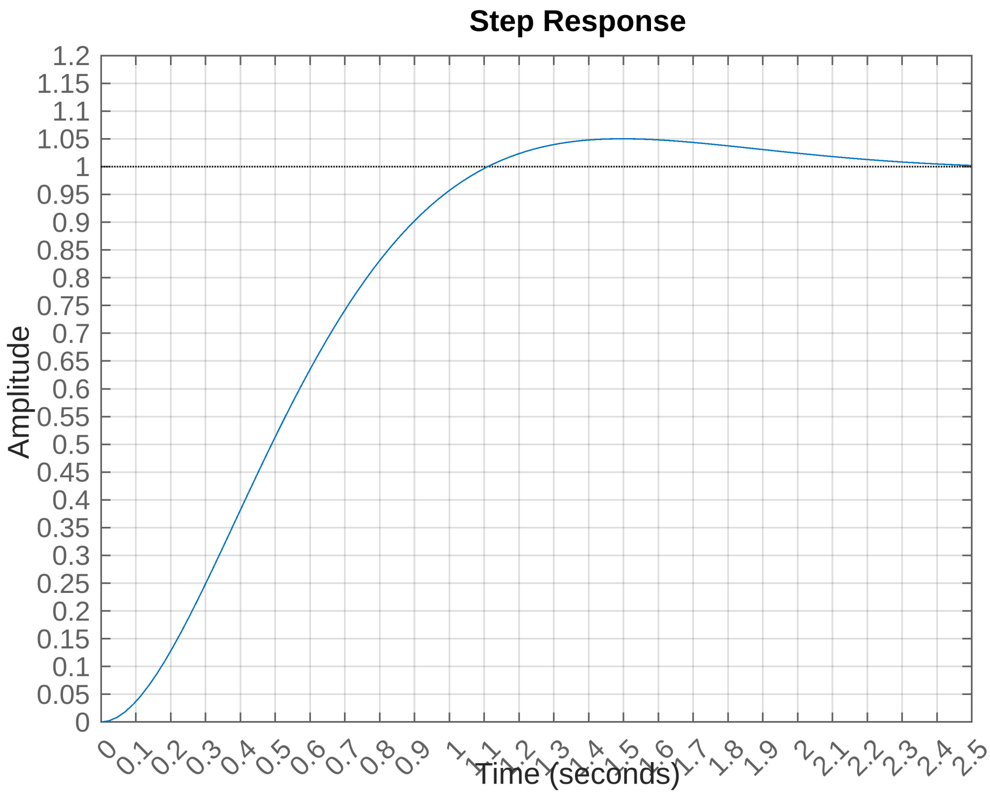
$$T(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \Rightarrow T(s) = \frac{8.41}{s^2 + 4s + 8.41} \qquad (3)$$

Agora, podemos plotar a resposta ao degrau de $T(s)$:

```
% Criação da FT do Modelo de Referência
T1 = tf(8.41, [1 4 8.41])
```

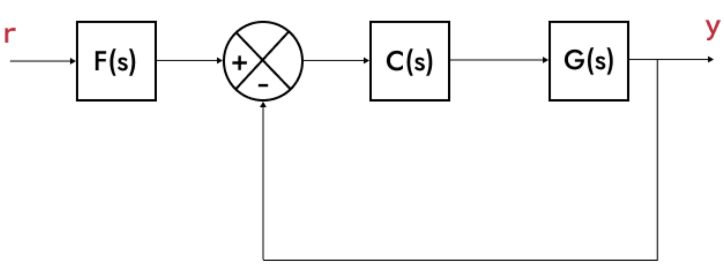
```
T1 =

        8.41
  ----------------
  s^2 + 4 s + 8.41

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

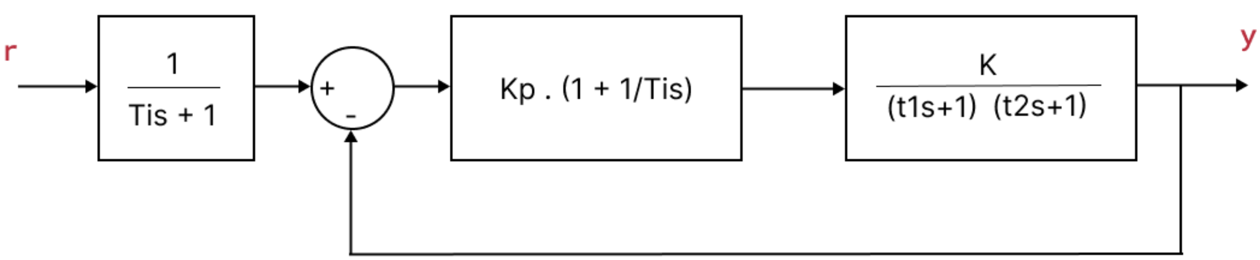
```
% Obtenção da resposta ao degrau da FT T(s)
figure; step(T1); grid on;
yticks(0:0.05:1.2); xticks(0:0.1:2.5); xlim([0 2.5]);
```



2) Calcule os parâmetros do controlador $C(s)$ e do filtro $F(s)$ tal que $F(s) \cdot \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = T(s)$

Considerando $F(s) \cdot \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = T(s)$, devemos adotar o sistema abaixo:





Assim, tomando $r' = r * F(s)$, temos que $\frac{y}{r'} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$. Considerando $C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\mathrm{sT}_i}\right)$, isto é um controlador PI, e $F(s) = \frac{1}{\mathrm{sT}_i + 1}$, obtemos:

$$\frac{y}{r'} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\mathrm{KK}_p\,(1 + \mathrm{sT}_i)}{(\tau_1\tau_2T_i)s^3 + T_i(\tau_1 + \tau_2)s^2 + T_i(1 + \mathrm{KK}_p)s + \mathrm{KK}_p} = \frac{\frac{\mathrm{KK}_p(1 + \mathrm{sT}_i)}{(\tau_1\tau_2T_i)}}{s^3 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)s^2 + \frac{(1 + \mathrm{KK}_p)}{(\tau_1\tau_2)}s + \frac{\mathrm{KK}_p}{(\tau_1\tau_2T_i)}}$$

(4)

Podemos escolher K_P e T_i tal que os polos complexos de $\frac{y}{r'}$ sejam iguais aos polos complexos de $T(s)$ e o terceiro polo de $\frac{y}{r'}$ seja real e igual a $-\alpha\omega_n$, com $\alpha >> 1$. Ou seja, o polo real não dominará sobre os polos complexos. Portanto, obtemos:

$$s^3 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)s^2 + \frac{(1 + \mathrm{KK}_p)}{(\tau_1\tau_2)}s + \frac{\mathrm{KK}_p}{(\tau_1\tau_2T_i)} = (s + \alpha\omega_n)\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2\right) \Rightarrow s^3 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)s^2 + \frac{(1 + \mathrm{KK}_p)}{(\tau_1\tau_2)}s + \frac{\mathrm{KK}_p}{(\tau_1\tau_2T_i)} = s^3 + (2\zeta\alpha$$

(5)

Assim, para os parâmetros K_P e T_i do controlador $C(s)$, obtemos:

$$\frac{1 + \mathrm{KK}_p}{\tau_1\tau_2} = \omega_n^2\,(2\alpha\zeta + 1) \Rightarrow 1 + \mathrm{KK}_p = \omega_n^2\tau_1\tau_2\,(2\alpha\zeta + 1) \Rightarrow K_p = \frac{\omega_n^2\tau_1\tau_2\,(2\alpha\zeta + 1) - 1}{K} \qquad (6)$$

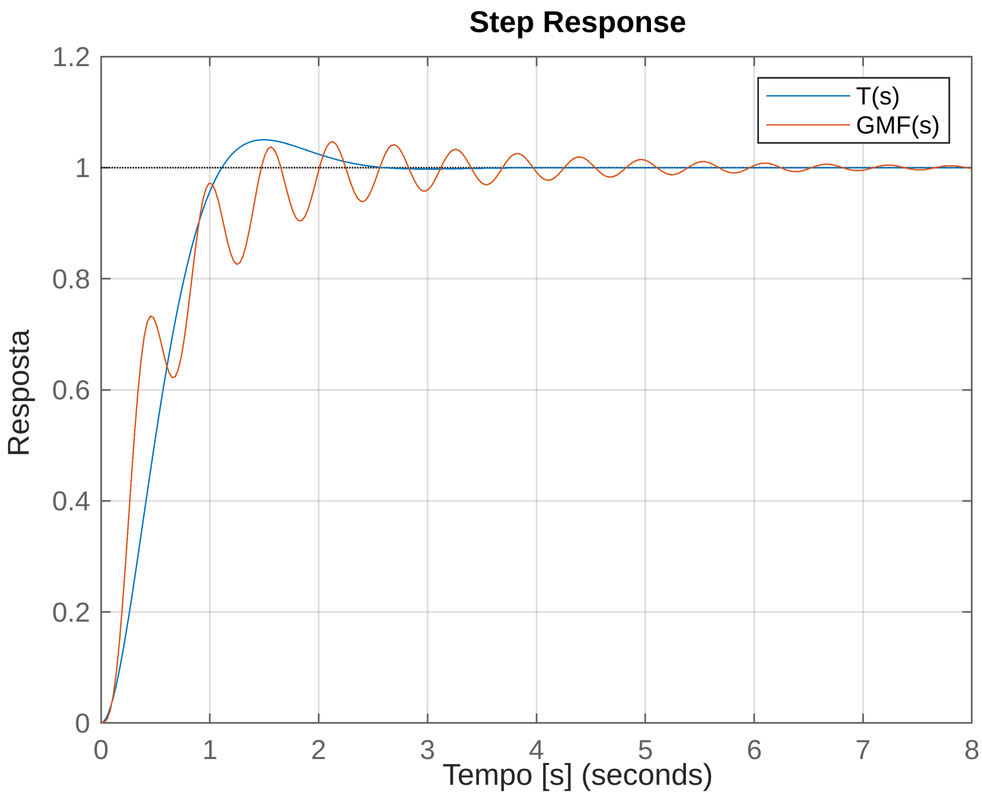
$$\frac{\mathrm{KK}_p}{\tau_1\tau_2T_i} = \alpha\omega_n^3 \Rightarrow T_i = \frac{\mathrm{KK}_p}{\alpha\omega_n^3\tau_1\tau_2} \Rightarrow T_i = \frac{\omega_n^2\tau_1\tau_2\,(2\alpha\zeta + 1) - 1}{\alpha\omega_n^3\tau_1\tau_2} \qquad (7)$$

Substituindo $K = 1.5,\ \omega_n = 2.9,\ \zeta = 0.69,\ \tau_1 = 0.5,\ \tau_2 = 1$ e tomando $\alpha = 10$ em (1) e (2), obtemos $K_p = 40.8227$ e $T_i = 0.5021$.

3) Plote a resposta ao degrau em malha fechada e compare com T(s), comentando as diferenças.

```
% Definição dos parâmetros do Controlador
s = tf('s'); Kp_PI = 40.8227; Ti_PI = 0.5021;

G = tf(1.5, [0.5 1.5 1]); % Função de Transferência da Planta+Atuador
F = tf(1, [Ti_PI 1]); % Função de Transferência do Filtro
C_PI = Kp_PI*(1 + (1/(s*Ti_PI))); % Função do Controlador PI
```

```
GMF_PI = F*feedback(C_PI*G, 1); % Função de Transferência da Malha Fechada

% Obtendo as respostas ao degrau unitário
figure, step(T1, GMF_PI);
grid on; legend("T(s)", "GMF(s)");
xlabel("Tempo [s]"); ylabel("Resposta");
```



Pode-se observar que a resposta do controlador, apesar de oscilar bastante, tende a estabilizar em regime permanente.

4) Refaça então o projeto do controlador C(s) usando o modelo de referência $T(s) = \dfrac{1}{\lambda s + 1}$**, para atender a mesma especificação do item 1).**

Em um sistema de primeira ordem, o tempo de estabelecimento com critério a 2%, é dado por:

$$t_s \leq 2 \Rightarrow 4\lambda \leq 2 \Rightarrow \lambda \leq \frac{2}{4} \Rightarrow \lambda \leq 0.5 \Rightarrow \lambda = 0.5 \qquad (8)$$

Assim, tomando $\lambda = 0.5$, o modelo de referência de ordem 1 é dado por:

$$T(s) = \frac{1}{\lambda s + 1} \Rightarrow T(s) = \frac{1}{0.5s + 1} \qquad (9)$$

Considerando a FT do Controlador é dada por $C(s) = \frac{T(s)}{G(s)(1 - T(s))}$, substituindo $T(s)$ (modelo de referência) e $G(s)$ (planta do sistema), obtemos

$$C(s) = \frac{T(s)}{G(s)(1 - T(s))} = \frac{\frac{1}{\lambda s + 1}}{\frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\left[1 - \frac{1}{\lambda s + 1}\right]} = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K(\lambda s + 1 - 1)} = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}{K\lambda s} = \frac{\tau_1 \tau_2 s}{K\lambda} + \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{K\lambda} + \frac{1}{K\lambda s} = \quad (10)$$

Assim, para os parâmetros K_p , T_i e T_d do controlador $C(s)$ obtemos

$$K_p = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{K\lambda} \text{ , } \mathrm{sK}_p T_d = \frac{\tau_1 \tau_2 s}{K\lambda} \Rightarrow T_d = \frac{\tau_1 \tau_2 s}{\mathrm{sK}\lambda K_p} = \frac{\tau_1 \tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)} \text{ e } \frac{K_p}{\mathrm{sT}_i} = \frac{1}{K\lambda s} \Rightarrow T_i = \frac{K_p}{\mathrm{sK}\lambda} = (\tau_1 + \tau_2) \quad (11)$$

Substituindo $K = 1.5,\ \lambda = 0.5,\ \tau_1 = 0.5,\ \tau_2 = 1$, em (11), temos:

$$K_p = \frac{0.5 + 1}{1.5 * 0.5} = 2, T_d = \frac{0.5 * 1}{0.5 + 1} = \frac{1}{3},\ e\ T_i = 0.5 + 1 = 1.5 \qquad (12)$$

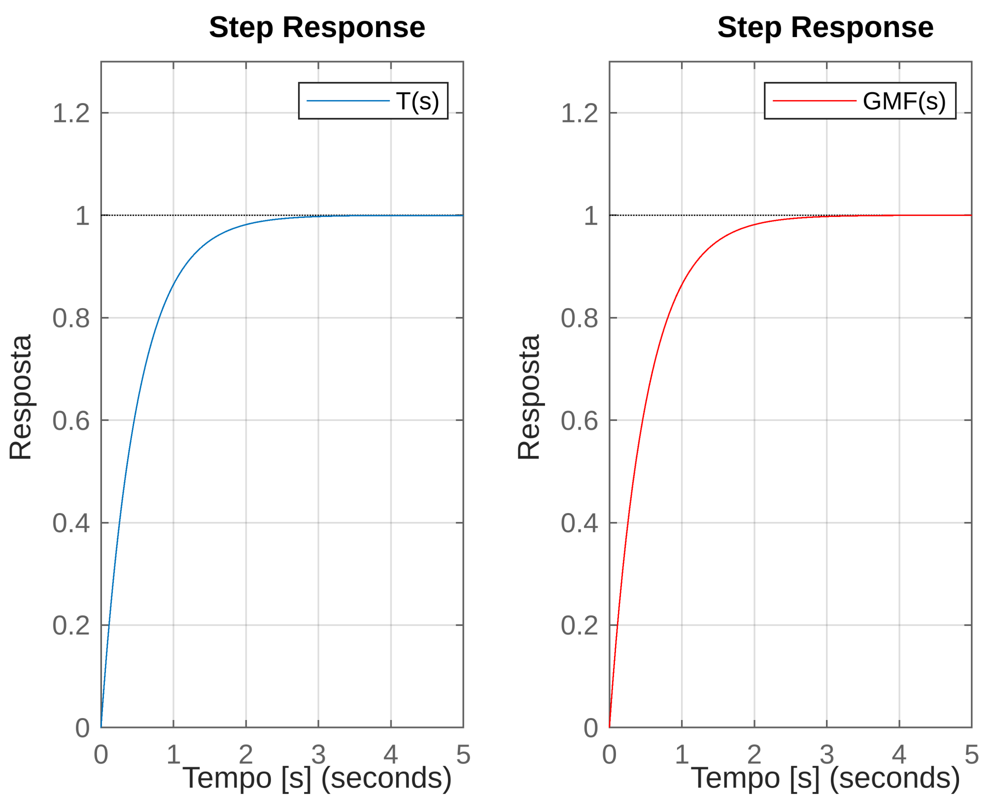
e para o controlador:

$$C(s) = \mathrm{sK}_p T_d + K_p + \frac{K_p}{\mathrm{sT}_i} = K_p\left(1 + \mathrm{sT}_d + \frac{1}{\mathrm{sT}_i}\right) \Rightarrow C(s) = 2\left(1 + \frac{s}{3} + \frac{1}{1.5s}\right) \qquad (13)$$

5) Plote a resposta ao degrau em malha fechada e compare com T(s), comentando as diferenças, caso houver.

```
% Definição dos parâmetros do Controlador
Kp_PID = 2; Td_PID = 1/3; Ti_PID = 1.5;

G = tf(1.5, [0.5 1.5 1]); % Função de Transferência da Planta+Atuador
C_PID = Kp_PID*(1 + (s*Td_PID) + (1/(s*Ti_PID))); % Função do Controlador PID
GMF_PID = feedback(C_PID*G, 1); % Função de Transferência da Malha Fechada

% Novo Modelo de Referência (primeira ordem)
T2 = tf(1, [0.5 1]);

% Obtendo a resposta do sistema em malha fechada ao degrau unitário
su([0 5])
ylim([0 1.3])
grid bplot(1,2,1);
```

```
step(T2);
legend("T(s)");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Resposta");
xlimon;

subplot(1,2,2);
step(GMF_PID, 'red');
legend("GMF(s)");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Resposta");
xlim([0 5])
ylim([0 1.3])
grid on;
```



Neste caso, o controlador produziu uma resposta exatamante igual à prevista no modelo.