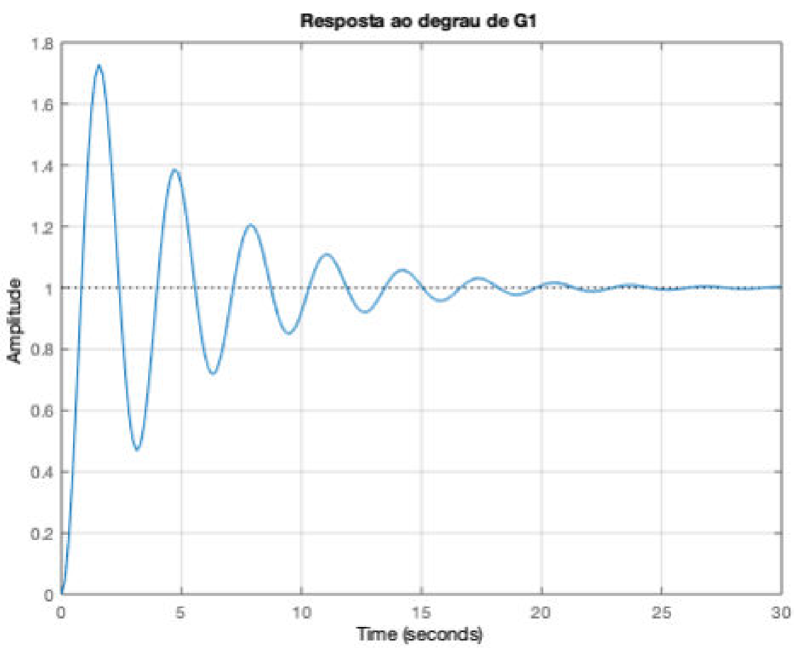
Sistemas Realimentados

EP1 - Exercício Proposto #1

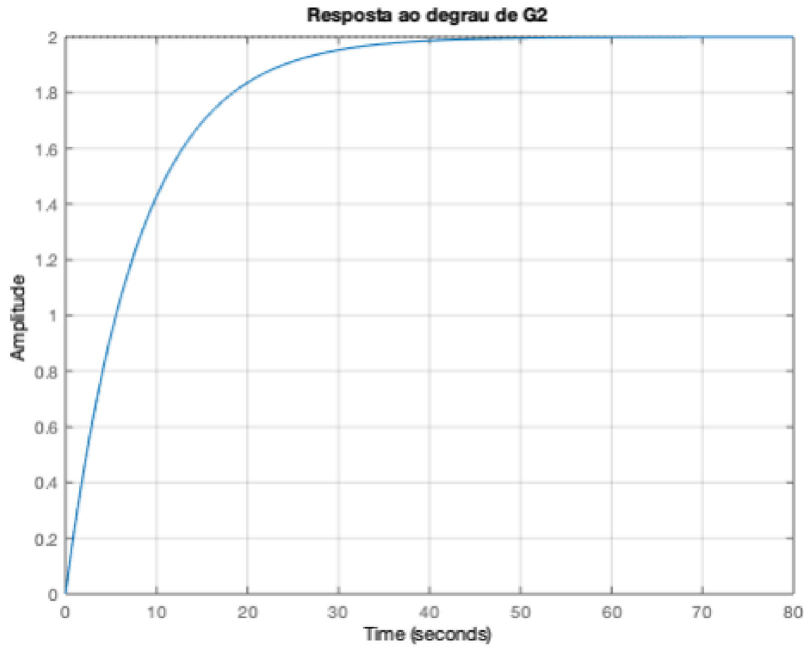
Nome da dupla: Eric Rodrigues de Carvalho e Piettro Augusto Benincá

Sejam as 3 figuras amostras abaixo obtidas pela resposta ao degrau unitário de funções de transferência $G_1, G_2, G3$. Explique como obter os parâmetros dos modelos $G_1(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, G_2 = \dfrac{K}{\tau s + 1}, G_3 = \dfrac{Ke^{-ds}}{\tau s + 1}$, a partir das curvas mostradas. Simule então $G_1, G_2, G3$ ao degrau e mostre que resultaram nas figuras mostradas

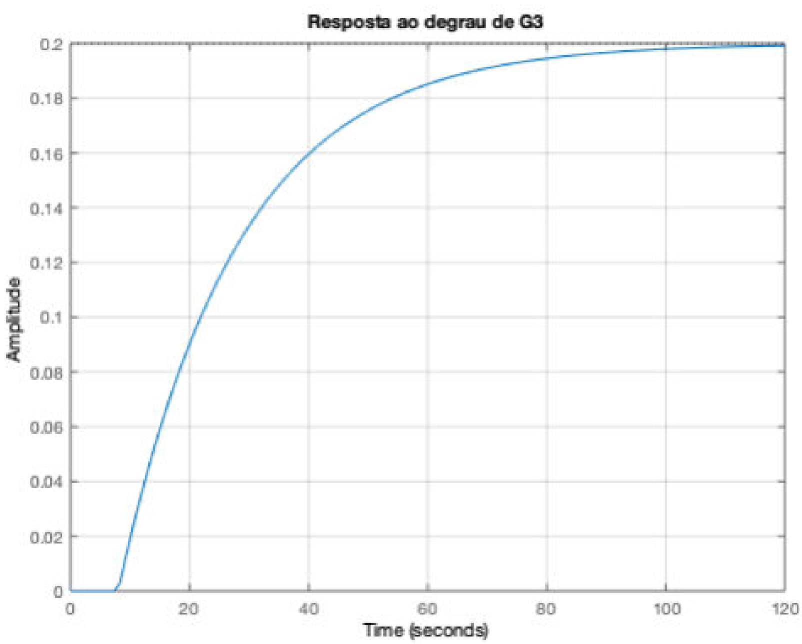
G1:



G2:



G3:



Solução:

Solução para G1

De acordo com as notas de aula, a resposta de um sistema de segunda ordem é dada por

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$. A partir disso, para calcular a resposta de um sistema de segunda ordem, é necessário calcular ζ (fator de amortecimento) e ω_n (frequência natural). A equação que relaciona o fator de amortecimento e sobressinal é $M_P = 100.e^{-\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$. De forma a encontrar o valor do Mp (sobressinal) para calcular o valor de ζ, tem-se a equação $\zeta = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$. Para calcular o valor do sobressinal, utiliza-se a fórmula$M_P = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$. Sendo $c(t_p) = 1.7$ e $c(\infty) = 1$, temos Mp = 0.7 (70% de sobressinal). Utilizando do valor de Mp na equação do fator de amortecimento, temos que ζ = 0.11. Para calcular a frequência natural do sistema, utiliza-se da equação $\omega_n = \frac{4}{t_s * \zeta}$, e como definido nas notas de aula, o tempo de estabelecimento (ts) é aquele necessário para que a saída se aproxime do valor de regime, no qual para um sistema de segunda ordem, é o tempo em que a saída se encontra dentro da faixa de 2% do valor em regime. Com isso, para o sistema apresentado no EP1, o tempo de estabelecimento de G1 é de 18 segundos, resultando em uma frequência natural de 2.

Com isso, a função de transferência resultante de G1 é $\frac{4}{s^2 + 0.44s + 4}$

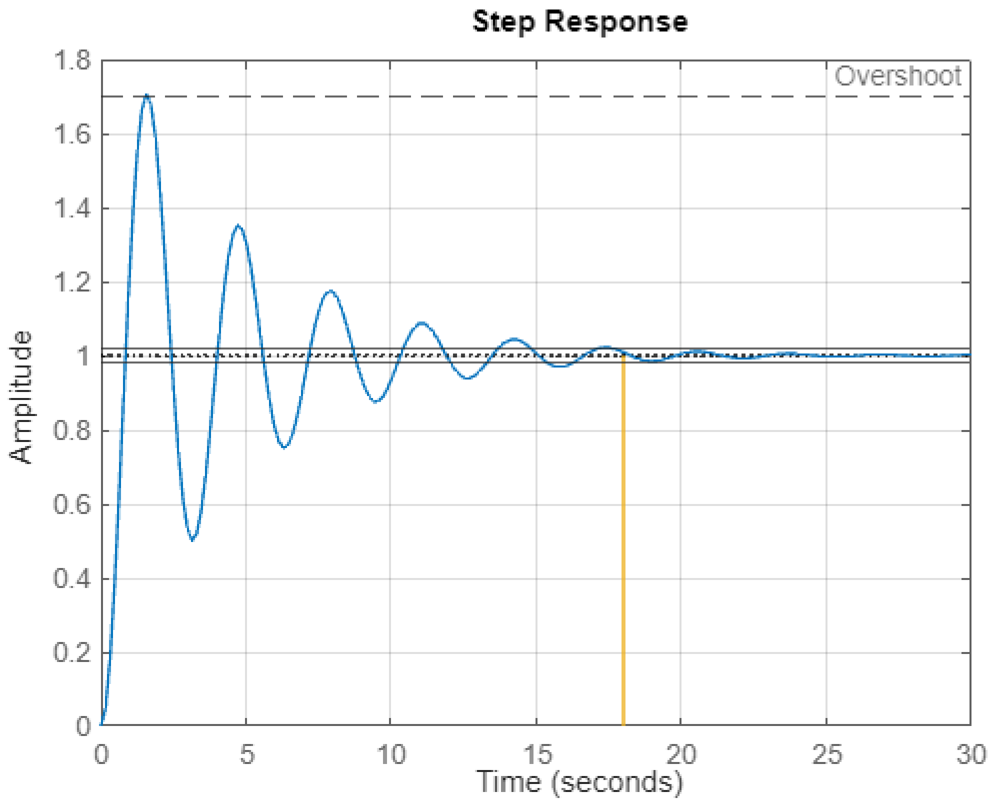
Agora a confirmação via simulação:

```
% EP1a - ERIC E PIETTRO - SR 2024/1

% INFORMAÇÕES RETIRADAS DO GRÁFICO
% C(TP) = 1.7 (VALOR MÁXIMO DO SOBRESSINAL)
% C(INFINITO) = 1 (VALOR EM REGIME)
% TS = 18 S (TEMPO DE ESTABELECIMENTO)

% CÁLCULOS COM AS INFORMAÇÕES RETIRADAS DO GRÁFICO
% Mp = (c(tp) - c(infinito)) / (c(infinito)) = (1.7 - 1) / (1) = 0.7 (70%)
(MÁXIMO SOBRESSINAL)
% zeta = ( -ln(Mp) ) / ( sqrt((pi)^2 + (ln(Mp))^2) ) = ( -ln(0.7) ) /
(sqrt((pi)^2 + (ln(0.7))^2) ) = 0.11 (FATOR DE AMORTECIMENTO)
% wn = (4) / (ts * zeta) = (4) / (18 * 0.11) = 2.00 (FREQUÊNCIA NATURAL DO
SISTEMA)

% COM BASE NAS INFORMAÇÕES ACIMA, OS PARÂMETROS DO SISTEMA SÃO DEFINIDOS A
SEGUIR:

% DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DO SISTEMA
w = 2.00; % FREQUÊNCIA NATURAL DO SISTEMA
z = 0.11; % FATOR DE AMORTECIMENTO DO SISTEMA

s = tf('s'); % DEFINE A VARIÁVEL COMPLEXA 'S' COMO A VARIÁVEL DE LAPLACE

num = w^2; % DEFINE O NUMERADOR DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA COMO A FREQUÊNCIA
NATURAL AO QUADRADO
```

```
den = 1*s^2 + 2 * w * z*s + w^2; % DEFINE O DENOMINADOR DA FUNÇÃO DE
TRANSFERÊNCIA COMO O POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DO SISTEMA

sys1 = num/den; % DEFINE A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA SYS1 COM O NUMERADOR E
DENOMINADOR ESPECIFICADOS

display(sys1) % EXIBE A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA NO PROMPT DE COMANDO
```

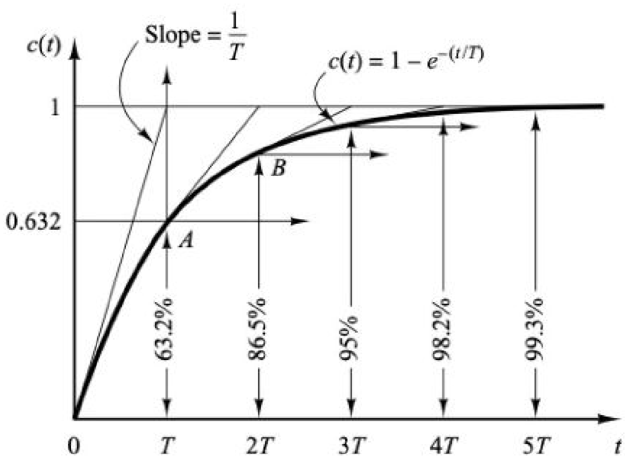
```
sys1 =

         4
  ----------------
  s^2 + 0.44 s + 4

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```

% PLOT DA RESPOSTA AO DEGRAU
subplot(1,1,1) % DEFINE O SUBPLOT COM UMA ÚNICA LINHA E COLUNA
step(sys1) % PLOTA A RESPOSTA AO DEGRAU DO SISTEMA REPRESENTADO PELA FUNÇÃO
DE TRANSFERÊNCIA SYS1

% AJUSTE DO EIXO Y ATÉ 1.8 E EIXO X ATÉ 30
axis([0 30 -inf 1.8]) % DEFINE OS LIMITES DO EIXO X DE 0 A 30 E DO EIXO Y DE
MENOS INFINITO A 1.8

yline(1.7, '--', {'Overshoot'}) % LINHA DE MARCAÇÃO DO OVERSHOOT
yline(0.98) % LINHA DE MARCAÇÃO DE 98% DO VALOR EM REGIME
yline(1.02) % LINHA DE MARCAÇÃO DE 102% DO VALOR EM REGIME
sp_x = [18,18]; % VETOR PARA MARCAÇÃO DO TEMPO DE ESTABELECIMENTO
sp_y = [0,1]; % VETOR PARA MARCAÇÃO DO TEMPO DE ESTABELECIMENTO
line(sp_x,sp_y) % LINHA DE MARCAÇÃO DO TEMPO DE ESTABELECIMENTO

grid on % ATIVA A GRADE NO GRÁFICO PARA MELHOR VISUALIZAÇÃO
```



Solução para G2

De acordo com as notas de aula, a resposta de um sistema de primeira ordem dado por $G(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$ é demonstrada abaixo.



Como definido anteriormente, o tempo de estabelecimento é aquele necessário para que a saída se aproxime do valor de regime. A constante de tempo T é o tempo necessário para a saída atingir 63.2% do valor de regime. Como o valor em regime deste sistema de primeira ordem é 2, 63.2% do valor em regime corresponde a 1.264, tomando, aproximadamente, 8 segundos para atingir esse valor. Com isso, o valor da constante de tempo T é 8 segundos

O valor em regime para entrada degrau é obtido usando o teorema do valor final, ou seja, lim $y(t)$ quando $t \to \infty$ é dado por lim quando $s \to 0$ de $Y(s) = sG(s)U(s) = sG(s)\frac{1}{s} = s\frac{1}{s(4s+0.5)} = 2$.

Caso o numerador de $G(s)$ seja K, o valor de regime seráK.

Portanto, $G(s) = \frac{2}{8s+1}$ fornece a resposta desejada.

Agora a confirmação via simulação:

```
% EP1b - ERIC E PIETTRO - SR 2024/1

% INFORMAÇÕES RETIRADAS DO GRÁFICO
% ess = 2 (VALOR EM REGIME)

% CÁLCULOS COM AS INFORMAÇÕES RETIRADAS DO GRÁFICO
% 63.2% DO VALOR EM REGIME = 63.2% * ess = 1.264
% tau =~ 8 s (TEMPO ATÉ A AMPLITUDE ATINGIR 1.264)
% G2(s) = (K) / (tau*s + 1) = (2) / (8*s + 1)

% DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DO SISTEMA
K2 = 2; % GANHO DO SISTEMA
t2 = 8; % CONSTANTE DE TEMPO DO SISTEMA

% CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA
sys2 = tf([K2], [t2 1]) % CRIA A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA UTILIZANDO O GANHO
E A CONSTANTE DE TEMPO
```

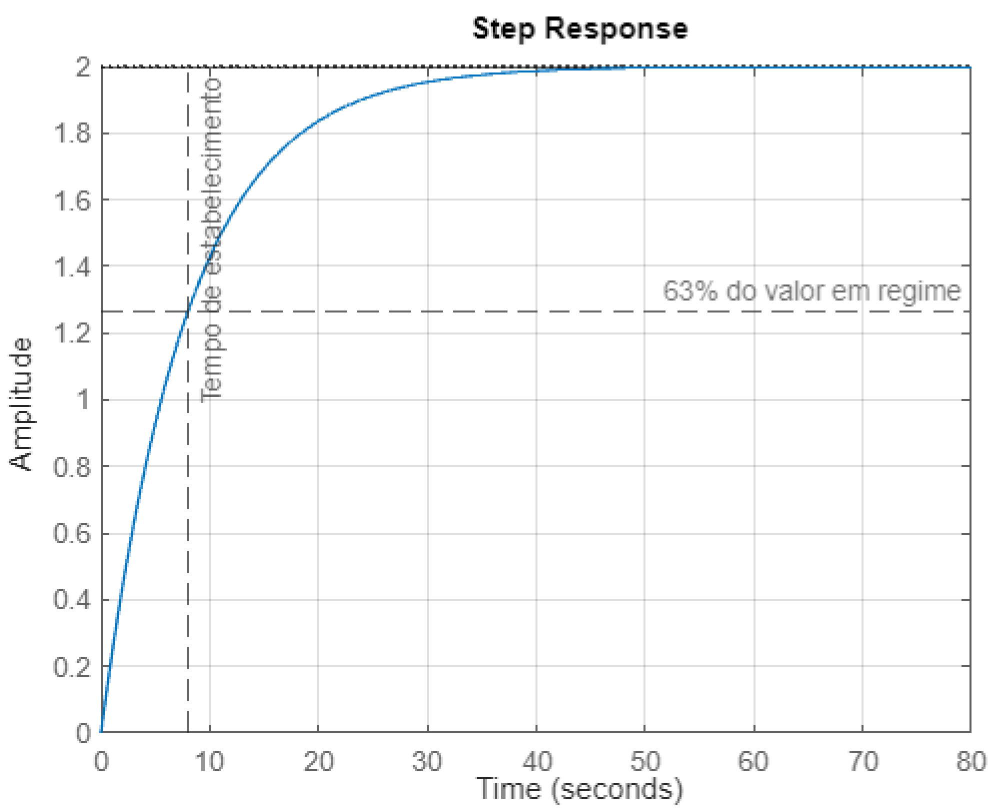
```
sys2 =

     2
  -------
  8 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
disp(sys2); % EXIBE A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA NO PROMPT DE COMANDO
```

```
  tf with properties:

       Numerator: {[0 2]}
     Denominator: {[8 1]}
        Variable: 's'
         IODelay: 0
      InputDelay: 0
     OutputDelay: 0
       InputName: {''}
       InputUnit: {''}
      InputGroup: [1x1 struct]
      OutputName: {''}
```

```
       OutputUnit: {''}
      OutputGroup: [1x1 struct]
            Notes: [0x1 string]
         UserData: []
             Name: ''
               Ts: 0
         TimeUnit: 'seconds'
     SamplingGrid: [1x1 struct]
```

```
% PLOT DA RESPOSTA AO DEGRAU
subplot(1,1,1) % DEFINE O SUBPLOT COM UMA ÚNICA LINHA E COLUNA
step(sys2) % PLOTA A RESPOSTA AO DEGRAU DO SISTEMA REPRESENTADO PELA FUNÇÃO
DE TRANSFERÊNCIA sys2

% AJUSTE DO EIXO Y ATÉ 1.8 E EIXO X ATÉ 80
axis([0 80 -inf 2]) % DEFINE OS LIMITES DO EIXO X DE 0 A 80 E DO EIXO Y DE
MENOS INFINITO A 2

yline(1.264, '--', {'63% do valor em regime'}) % LINHA DE MARCAÇÃO DE 63% DO
VALOR EM REGIME
xline(8, '--', {'Tempo de estabelecimento'})

% ADIÇÃO DE LINHAS DE GRADE
grid on % ATIVA A GRADE NO GRÁFICO PARA MELHOR VISUALIZAÇÃO
```



Solução para G3

O sistema apresentado para G3 é, também, um sistema de primeira ordem, porém, com o acréscimo de tempo morto de oito segundos, como observado pelo gráfico. A obtenção de K que dita o valor em regime segue o mesmo processo feito para G2, no qual obtém-se K = 0.2.

Já para o tempo de estabelecimento, o sistema atinge 63.2% do valor em regime (0.2) no instante de 28 segundos, mas como há a presença de um tempo morto (d) de 8 segundos, o sistema leva 28 - 8, ou seja, 20 segundos para atingir 63.2%, ou seja, o valor de τ, que é a constante de tempo.

Sendo a função de transferência de um sistema de primeira ordem com tempo morto dada por $G_3 = \frac{Ke^{-ds}}{\tau s + 1}$,

temos, portanto, a função de transferência deste sistema como sendo $G_3 = \frac{0.2e^{-8s}}{20s + 1}$

Agora a confirmação via simulação:

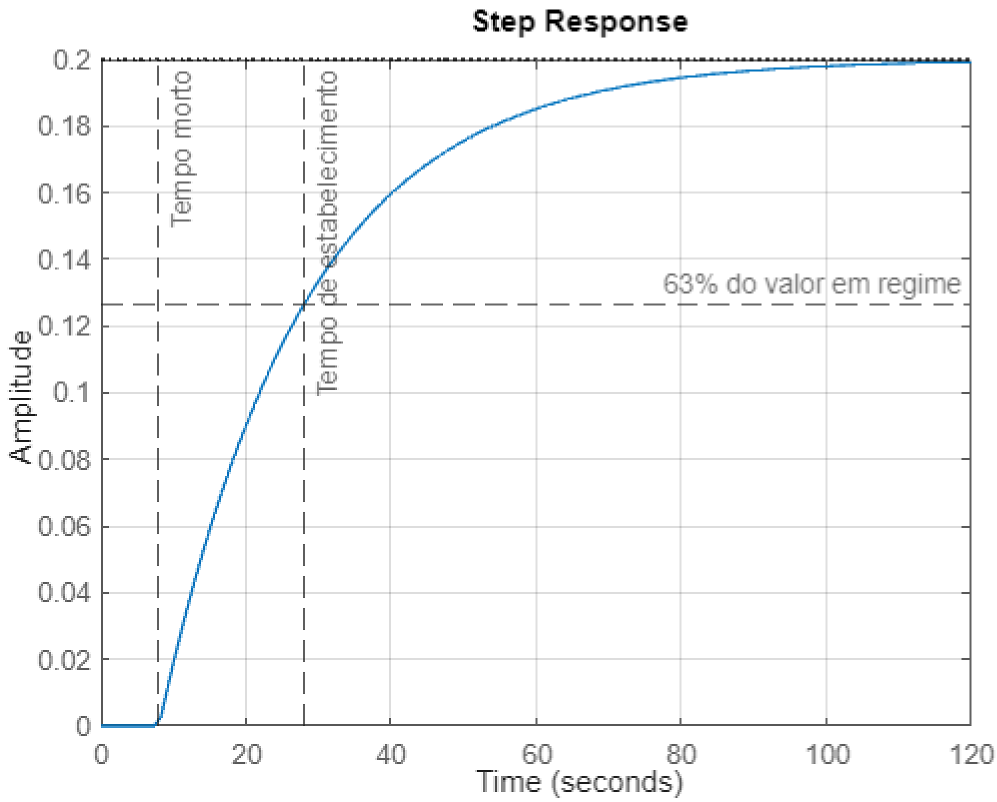
```
% EP1c - ERIC E PIETTRO - SR 2024/1

% INFORMAÇÕES RETIRADAS DO GRÁFICO
% ess = 0.2 (VALOR EM REGIME)
% d = 8 s (TEMPO MORTO)

% CÁLCULOS COM AS INFORMAÇÕES RETIRADAS DO GRÁFICO
% 63.2% DO VALOR EM REGIME = 63.2% * ess = 0.1264
% ts = 28 s (TEMPO ATÉ A AMPLITUDE ATINGIR APROXIMADAMENTE 0.1264)
% tau =~ 28 s - 8 s =~ 20 s
% G3(s) = (K * e^(-td*s)) / (tau*s + 1) = (0.2 * e^(-8*s)) / (20*s + 1)

% DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DO SISTEMA
K3 = 0.2; % GANHO DO SISTEMA
t3 = 20; % CONSTANTE DE TEMPO DO SISTEMA
d = 8; % ATRASO DO NUMERADOR DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

% CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA COM ATRASO NO NUMERADOR
s = tf('s');  % DEFINE A VARIÁVEL COMPLEXA 's' COMO A VARIÁVEL DE LAPLACE
num = K3 * exp(-d * s); % CALCULA O NUMERADOR COM O ATRASO
den = t3 * s + 1; % DEFINE O DENOMINADOR DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

sys3 = num / den % DEFINE A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA sys3 COM O NUMERADOR E DENOMINADOR ESPECIFICADOS
```

```
sys3 =

                 0.2
  exp(-8*s) * --------
              20 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
disp(sys3); % EXIBE A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA NO PROMPT DE COMANDO
```

```
  tf with properties:

       Numerator: {[0 0.2000]}
     Denominator: {[20 1]}
        Variable: 's'
         IODelay: 0
      InputDelay: 0
     OutputDelay: 8
       InputName: {''}
       InputUnit: {''}
      InputGroup: [1x1 struct]
      OutputName: {''}
      OutputUnit: {''}
     OutputGroup: [1x1 struct]
           Notes: [0x1 string]
        UserData: []
            Name: ''
              Ts: 0
        TimeUnit: 'seconds'
    SamplingGrid: [1x1 struct]
```

```
% PLOT DA RESPOSTA AO DEGRAU
subplot(1,1,1) % DEFINE O SUBPLOT COM UMA ÚNICA LINHA E COLUNA
step(sys3) % PLOTA A RESPOSTA AO DEGRAU DO SISTEMA REPRESENTADO PELA FUNÇÃO
DE TRANSFERÊNCIA sys3

% AJUSTE DO EIXO Y ATÉ 0.2 E EIXO X ATÉ 120
axis([0 120 -inf 0.2]) % DEFINE OS LIMITES DO EIXO X DE 0 A 120 E DO EIXO Y
DE MENOS INFINITO A 0.2

yline(0.1264, '--', {'63% do valor em regime'}) % LINHA DE MARCAÇÃO DE 63%
DO VALOR EM REGIME
xline(28, '--', {'Tempo de estabelecimento'})
xline(8, '--', {'Tempo morto'})

% ADIÇÃO DE LINHAS DE GRADE
grid on % ATIVA A GRADE NO GRÁFICO PARA MELHOR VISUALIZAÇÃO
```


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
Tempo morto
Tempo de estabelecimento
63% do valor em regime
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
20
40
60
80
100
120