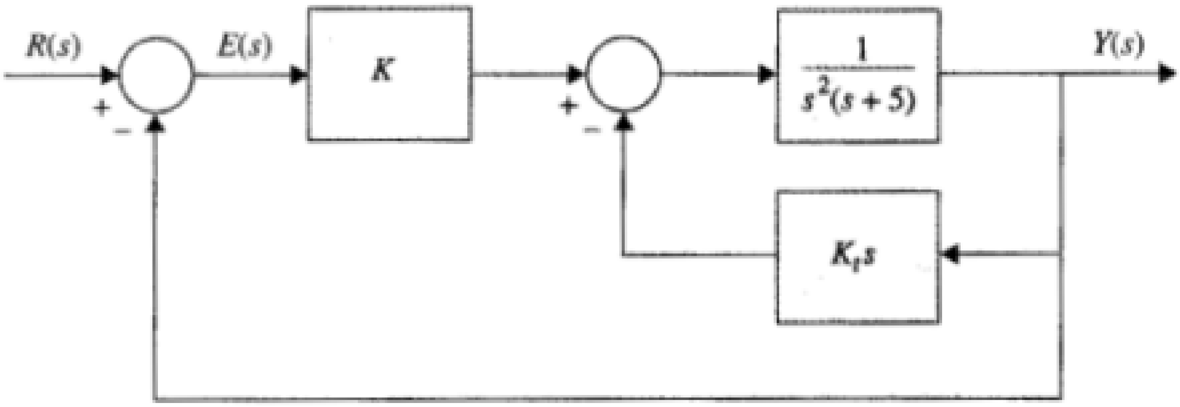
Sistemas Realimentados

EP9 - Construção do Lugar das Raízes

Nomes: Victoria Nippes Sassaroli

Seja o diagrama de blocos mostrado.



a) Faça o lugar das raízes para $K > 0$ assumindo e $K_t = 0$.

b) Faça o lugar das raízes para $K_t > 0$ assumindo $K = 10$.

Solução:

Simplificando o diagrama de blocos acima temos:

$$\text{FT} = \frac{G(s)}{1 + G(s).\,H(s)}$$

Onde:

G(s) = $\frac{1}{s^2(s+5)}$= e H(s) = $k_t s$

$$\text{FT} = \frac{\frac{1}{s^2(s+5)}}{1 + \frac{1}{s^2(s+5)}.\,k_t s}$$

$$\text{FT} = \frac{1}{s^2(s+5) + k_t s}$$

$$G_2(s) = k * \text{FT} = \frac{k}{s^2(s+5) + k_t s}$$

$H_2(s)$= 1

Logo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s).H_2(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s^2(s+5)+k_t s}}{1 + \frac{k}{s^2(s+5)+k_t s}.1}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2(s+5)+k_t s + k}$$

Equação Característica:

g = $s^2(s+5) + k_t s + k$

a) Faça o lugar das raízes para $K > 0$ assumindo e $K_t = 0$.

P(s) = $s^3 + 5s^2 + k$

Escrevendo da forma $1 + k\frac{N(s)}{D(s)}$:

$$G_1(s) = 1 + k\frac{1}{s^3 + 5s^2}$$

Regra 1:

Raízes de P(s) quando K=0 são os polos de G1(s) (raízes de D(s)).

$$D(s) = s^3 + 5s^2 = 0$$

Temos 3 pólos, 1 pólo em -5 e 2 pólos em 0.

Raízes de P(s) quando K → ∞ são os zeros de G1(s) (raízes de N(s)).

N(s) = 1

Não há zeros em $G_1(s)$, portando as raízes tendem a infinito.

Regra 2:

Nº de pólos = Nº de trajetórias = 3.

Regra 3:

O LR é simétrico em relação ao eixo real, uma vez que as raízes de P(s) são sempre um par complexo conjugado.

Regra 4:

Assíntotas:

$$\theta = \frac{2q+1}{n_p - n_z} . 180^o \ , \ q = 0, 1, \ldots, (n_p - n_z - 1)$$

$$n_p - n_z = 3 - 0 = 3; \ q = 0, 1, 2$$

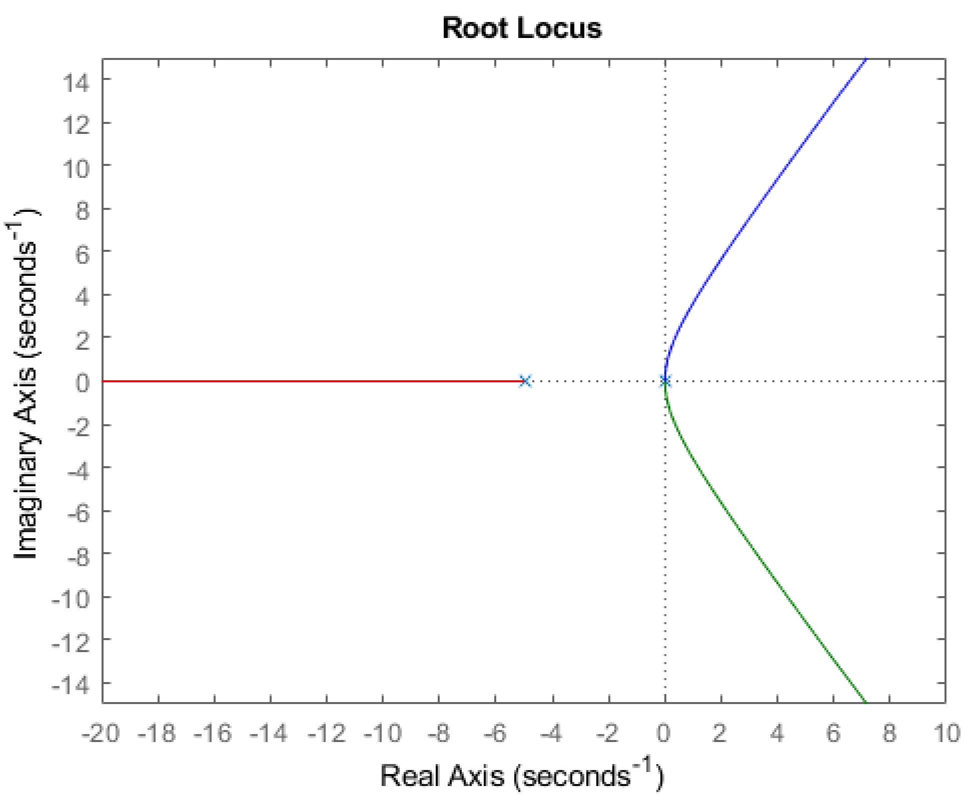
$$\theta_1 = 60^o, \theta_2 = 180^o, \theta_3 = 300^o$$

Interseção Assíntotas:

$$\sigma = \frac{\sum(\text{polos}) - \sum(\text{zeros})}{n_p - n_z} = \frac{(0-5)-0}{3-0}$$

$$\sigma = -1,667$$

```
g1 = tf([1],[1 5 0 0]);
figure(1);
rlocus(g1)
xticks(-20:2:10)
yticks(-16:2:16)
```



~~Quando o ganho k aumenta, o lugar das raízes se desloca para o semi-plano esquerdo do eixo real. Essa tendência sugere uma possível estabilização do sistema, desde que os polos permaneçam nesse semi-plano.~~

b) Faça o lugar das raízes para $K_t > 0$ assumindo $K = 10$.

P(s)= $s^3 + 5s^2 + K_t s + 10$

Escrevendo da forma $1 + k_t \frac{N(s)}{D(s)}$:

$$G_2(s) = 1 + k_t \frac{s}{s^3 + 5s^2 + 10}$$

Regra 1:

Raízes de P(s) quando $k_t = 0$ são os polos de G1(s) (raízes de D(s)).

$$D(s) = s^3 + 5s^2 + 10 = 0$$

Temos 3 pólos, 1 pólo em -5,35 e 1 par pólos complexos conjugados em $0,175 \pm \mathrm{j}1,36$.

Raízes de P(s) quando $k_t \to \infty$ são os zeros de G1(s) (raízes de N(s)).

N(s) = s

Há 1 zero em 0.

Regra 2:

Nº de pólos = Nº de trajetórias = 3

Regra 3:

O LR é simétrico em relação ao eixo real, uma vez que as raízes de P(s) são sempre um par complexo conjugado.

Regra 4:

Assíntotas:

$$\theta = \frac{2q+1}{n_p - n_z} . 180^o \text{ , } q = 0, 1, \ldots, (n_p - n_z - 1)$$

$$n_p - n_z = 3 - 1 = 2; \; q = 0, 1$$

$$\theta_1 = 90^o, \theta_2 = 270^o$$

Interseção Assíntotas:

$$\sigma = \frac{\sum(\text{polos}) - \sum(\text{zeros})}{n_p - n_z} = \frac{(0-5)-0}{3-1}$$

$$\sigma = -2,5$$

Regra 6:

Pontos de interseção com o eixo imaginário:

São determinados usando o critério de Routh-Hurwitz.

$$\begin{bmatrix} s^3| & 1 & k_t \\ s^2| & 5 & 10 \\ s^1| & b_2 & b_0 \\ s^0| & c_2 & \end{bmatrix}$$

onde

$$b_2 = \frac{5k_t - 50}{5},\ b_0 = 0,\ c_2 = 10$$

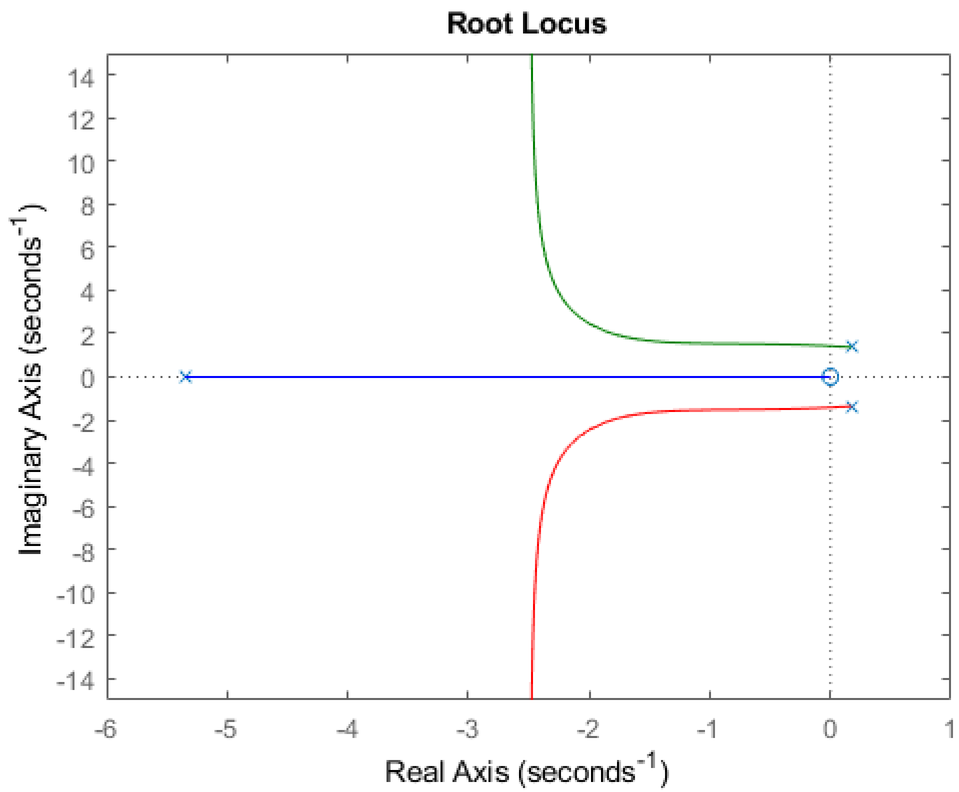
Segundo o o critério de Routh-Hurwitz todos os elementos da primeira coluna devem ser maior que zero, logo:

$$\frac{5k_t - 50}{5} > 0 \to 5k_t - 50 > 0 \to k_t < 10$$

Portanto:

$$0 < k_t < 10$$

```
s = tf('s');
num = s;
den = s^3+5*s^2+10;
g2 = num/den;
figure(2);
rlocus(g2)
xticks(-10:1:10)
yticks(-16:2:16)
```



~~Quando o ganho k_t aumenta, o lugar das raízes se desloca para o semi-plano direito do eixo real, indicando uma tendência de instabilização do sistema. Para manter a estabilidade, é necessário garantir que k_t permaneça menor que zero, mantendo o polo adicional no semi-plano esquerdo de eixo.~~

Errado: quando Kt aumenta, as duas raizes do SPD vão para o SPE, e a raiz em -5.5 tende para a origem. Portanto, é possível estabilizar este sistama usando valor de Kt>0