Sistema Realimentados

EP8a - O método do lugar das raízes

Nomes : Breno de Angelo e Rafael Fracalossi

Seja a equação característica $s(s+1)(s+10)+K(s+a)$

Aplique cada uma das regras de construção do método do lugar das raízes para esboçar o lugar das raízes para $K>0$ para $a=1.5$ e para $a=3$.

Obtenha os valores de K para os quais os polos complexos tenham amortecimento $\zeta \geq 0.5$, desenhando no lugar das raízes a região na qual isto ocorre.

1) Aplicando as regras de construção do método do lugar das raízes para para $a=1.5$ e para $a=3$.

O método do LR é feito utilizando-se a equação característica no formato $E_c(s)=1+\frac{N(S)}{D(s)}=0$. Reescrevendo a equação característica dada para o formato padrão.

$$1+K\frac{s+a}{s(s+1)(s+10)}=0$$

Pela Regra 1, sendo $G_1(s)=\frac{s+a}{s(s+1)(s+10)}$, as raízes da equação característica quando $K=0$ são os polos de $G_1(s)$ e quando $K \rightarrow \infty$ são os zeros de $G_1(s)$. Observa-se a existência de um zero em $z_1=-a$ e três polos $p_1=0$, $p_2=-1$ e $p_3=-10$.

Pela Regra 2, o número de trajetórias é igual ao número de polos de $G_1(s)$, neste caso, teremos 3 trajetórias.

Pela Regra 3 o LR deve ser simétrico em relação ao eixo real.

Pela Regra 4, as assíntotas do LR têm ângulos dados pela seguinte equação para $K>0$:

$\theta_i=\frac{(2i+1)180^o}{|n-m|}=\frac{(2i+1)180^o}{2}$, para $i \in \{0,1,2,...,|n-m|\}$ onde n é o número de polos de $G_1(s)$ e m é o número de zeros de $G_1(s)$. Assim os ângulos das assíntotas são $\theta_i=\{90^o,270^o\}$

E o ponto de interseção ocorre sobre o eixo real em

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{-11 + a}{2}$$

Assim, para $a = 1.5$, $\sigma = -4.75$ e para $a = 3$, $\sigma = -4$

Pela Regra 5, para uma seção do eixo real, há raízes para $K > 0$ se o número de polos e zeros à direita da seção é ímpar.

O ponto onde as raizes que iniciam em p_1 e p_2 se encontram pode ser determinado pela Regra 7. O ponto de sela satisfaz a relação $\dot{N}(s)D(s) - N(s)\dot{D}(s) = 0$. Assim, $N(s) = (s + a)$, $D(s) = s(s + 1)(s + 10)$ resulta em:

$$s(s + 1)(s + 10) - (s + a)[(s + 1)(s + 10) + s(s + 1) + s(s + 10)] = 0$$

$$2s^3 + (11 + 3a)s^2 + (22a)s + 10a = 0$$

```
a = 3;
P_s = [2 (11+3*a) (22*a) (10*a)];
roots(P_s)
```

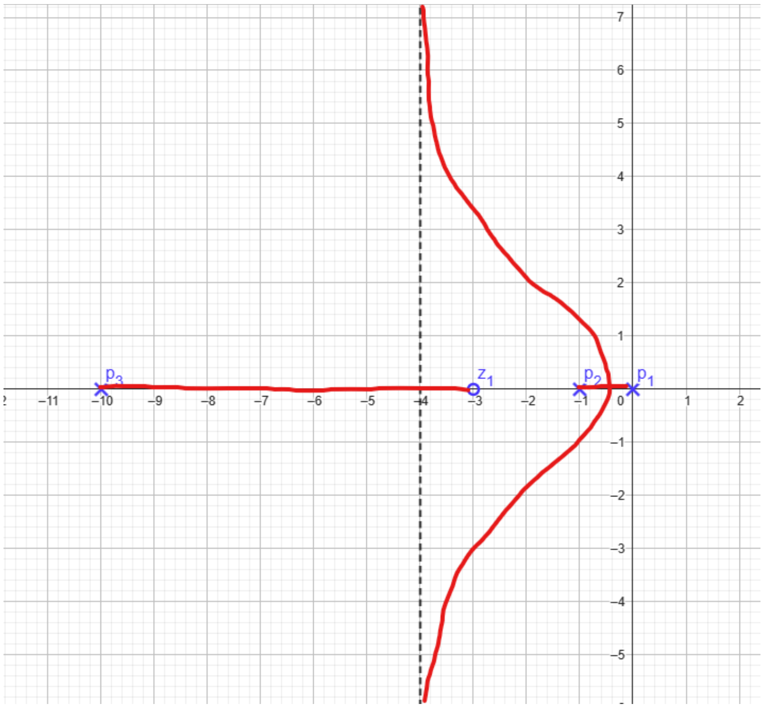
```
ans = 3×1 complex
  -4.7313 + 2.3516i
  -4.7313 - 2.3516i
  -0.5373 + 0.0000i
```

```
a = 1.5;
P_s = [2 (11+3*a) (22*a) (10*a)];
roots(P_s)
```

```
ans = 3×1
   -4.3604
   -2.7682
   -0.6213
```

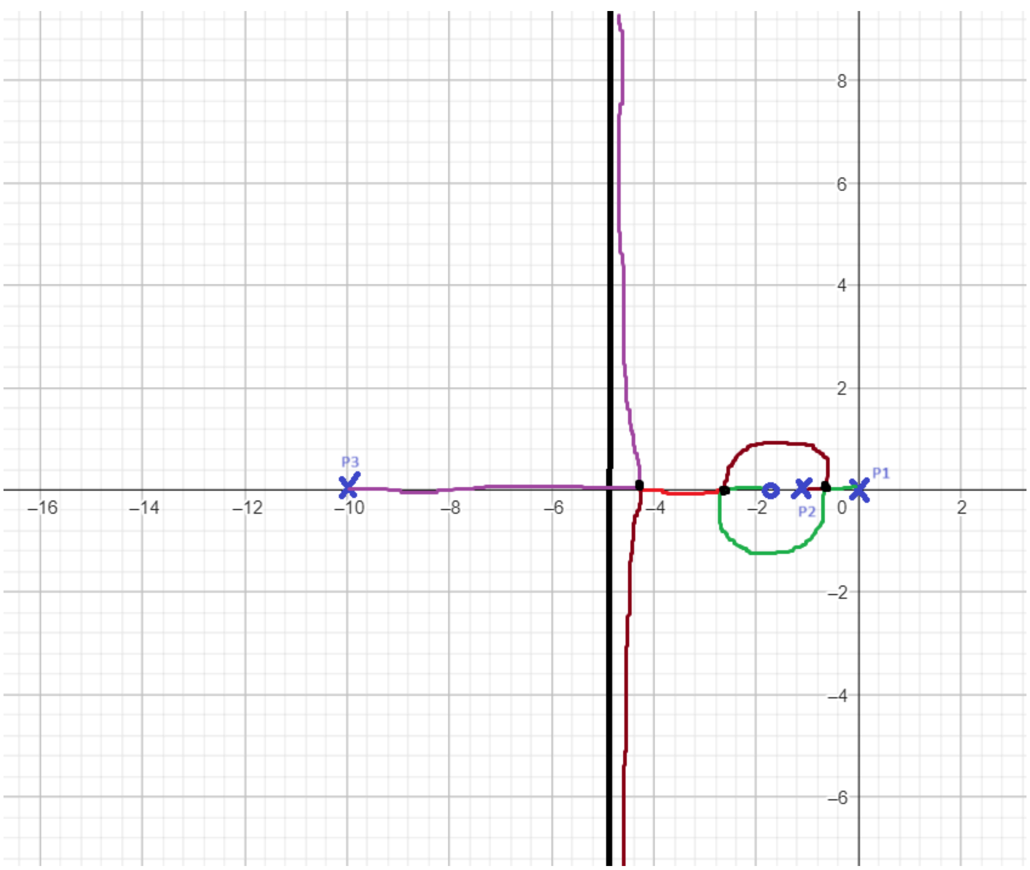
Para $a = 1.5$ o ponto de sela ocorre em -0.6213,-2.7682 e -4.3604, para $a = 3$ ocorre em -0.5373.

Utilizando todas as informações é possível desenhar um esboço do LR. Para $a = 3$ tem-se:



Nota-se que à direita do eixo imaginário não existem polos e zeros, logo não haverá raíz real. Entre p_1 e p_2 há um polo a direita, devendo haver raíz real. Entre p_2 e z_1 não haverá raiz real e entre z_1 e p_3 haverá.

Para $a = 1.5$ tem-se:




```
a = 3;
```

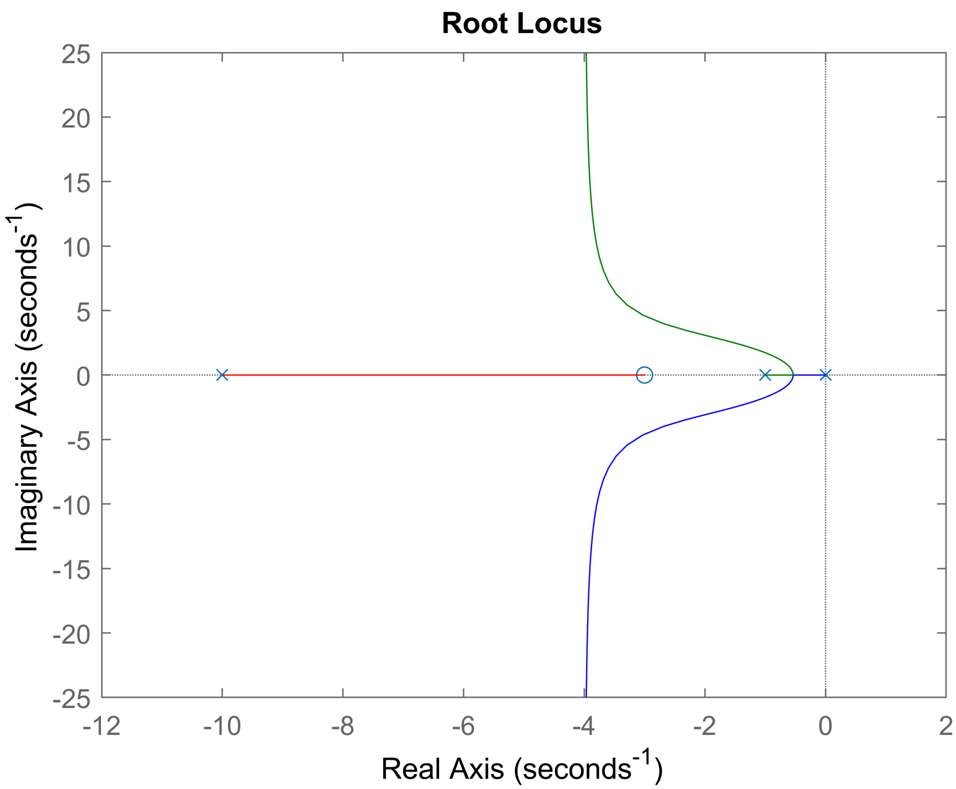
```
G_s = tf([1 a],[1 11 10 0])
```

```
G_s =

         s + 3
  -------------------
  s^3 + 11 s^2 + 10 s

Continuous-time transfer function.
```

```
rlocus(G_s)
```



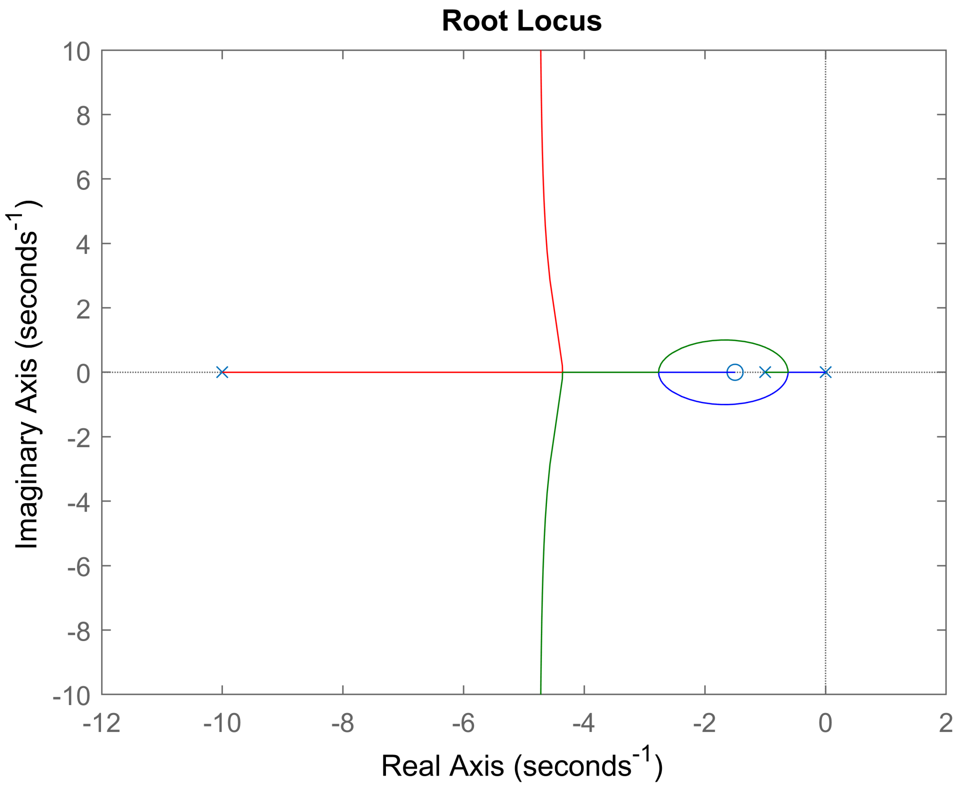

```
a = 1.5;
G_s = tf([1 a],[1 11 10 0])
```

```
G_s =

        s + 1.5
  -------------------
  s^3 + 11 s^2 + 10 s

Continuous-time transfer function.
```

```
rlocus(G_s)
```

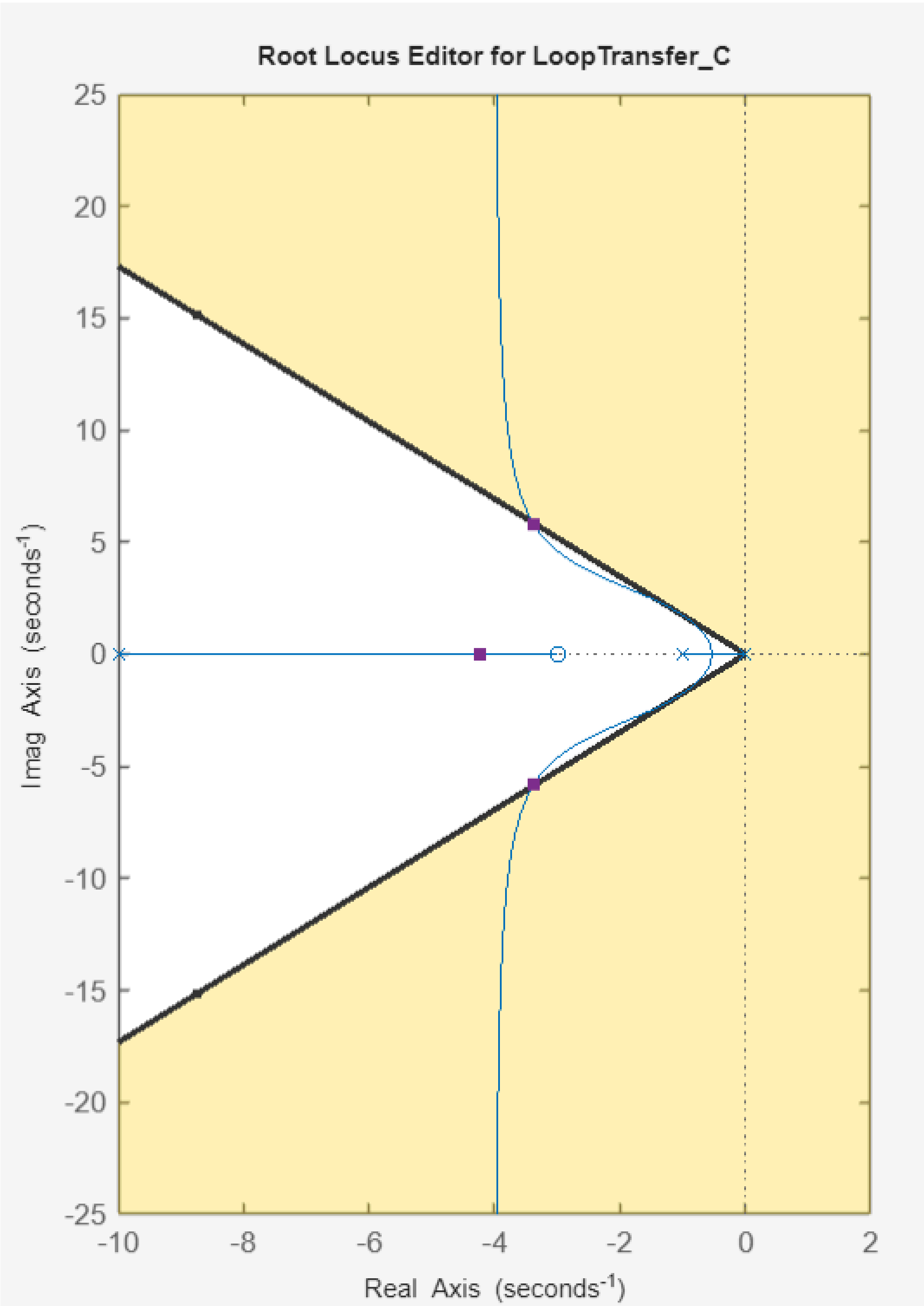


2) Obtendo os valores de K para os quais os polos complexos tenham amortecimento $\zeta \geq 0.5$

Para que o projeto atenda à especificação de $\zeta \geq 0.5$, o ganho Kescolhido deve ser tal que as raizes estejam dentro da região demarcada abaixo. A região consiste dos pontos entre as retas que formam um ângulo β com o eixo real, sendo $\beta = \arccos \zeta, \beta \leq 60^o$.

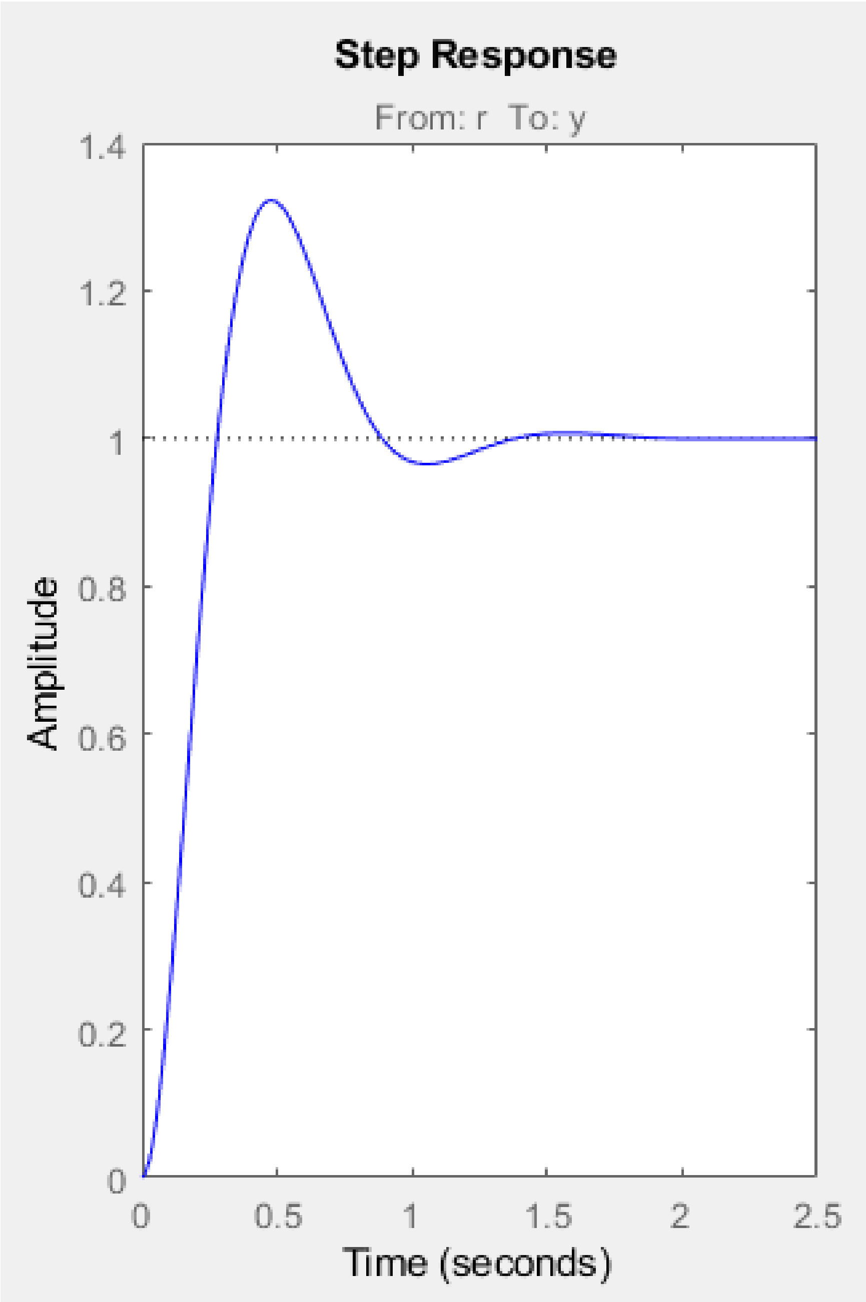
Como não há intersecção com o eixo imaginário, não temos como usar os critérios de Routh-Hurwitz para achar o ponto de interseção com eixo imaginário, portanto usaremos o "rltool" para achar o ganho correspondente a $\zeta = 0.5$.

Para $G(s) = \dfrac{s+3}{s(s+1)(s+10)} \Rightarrow 0 < K < 64.081$.

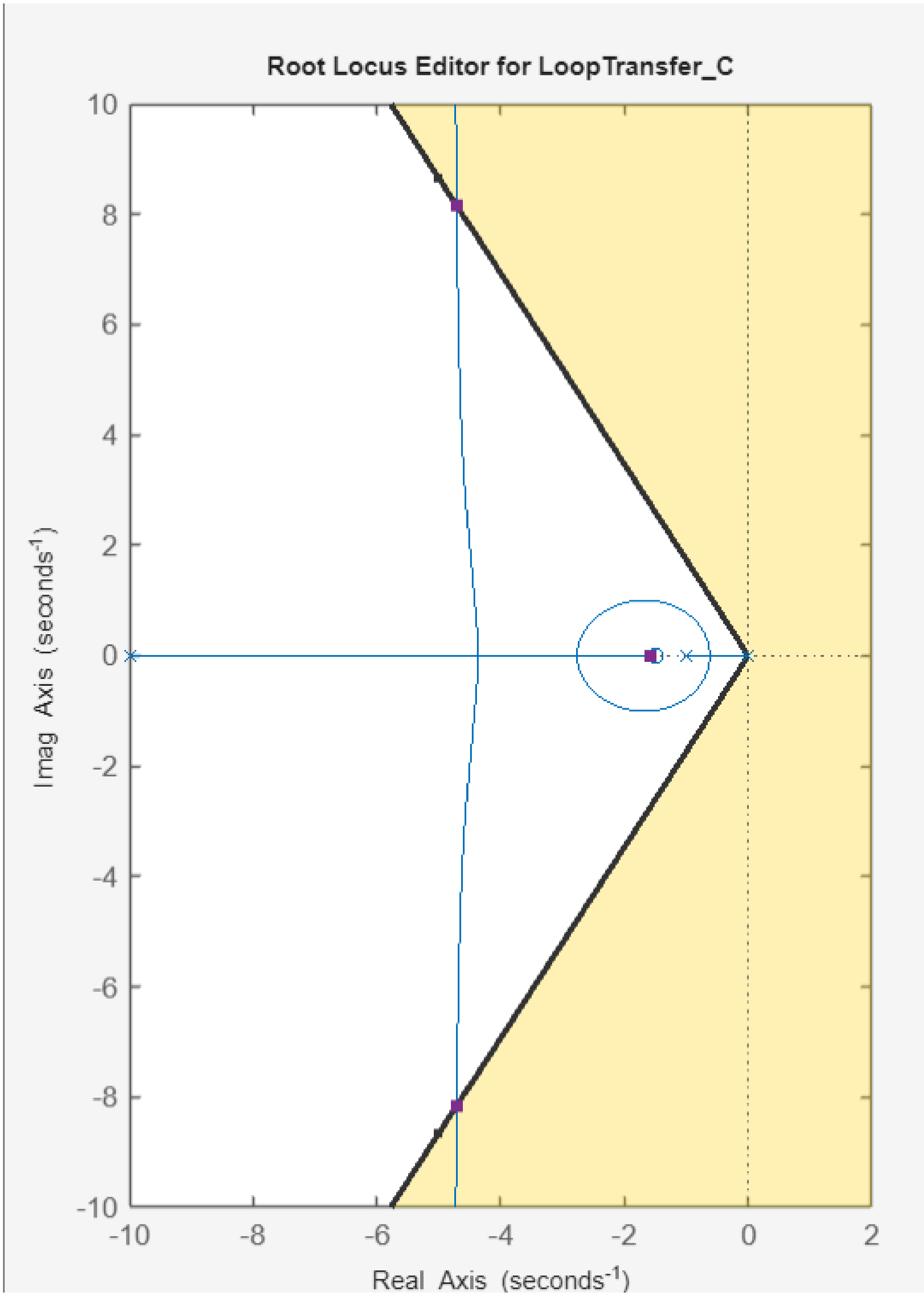


```
Tunable Block
Name: C
Sample Time: 0
Value:
  64.081
```

Abaixo segue a resposta para $K \approx 64.081$:



Para $G(s) = \dfrac{s+1.5}{s(s+1)(s+10)} \Rightarrow 0 < K < 93.557$.




```
Tunable Block
Name: C
Sample Time: 0
Value:
  93.577
```

Abaixo segue a resposta para $K \approx 93.577$: