Prova substitutiva SR : 1/6/2023

1) A figura mostra o LR de $1 + KG(s) = 0$.

1.1 Obtenha G(s):

Solução: são 4 ramos, logo 4 polos em -2 -5 -1-j -1+j. Não tem zeros: logo:

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+5)(s+1-j)(s+1+j)}$$

1.2 Para que valores de $K \in [-\infty, \infty]$ este sistema é estável?

Solução

O ganho *K* pode ser obtido de $K = -(s+2)(s+5)(s+1-j)(s+1+j)$, escolhendo valores de s que pertencem ao LR.

Para K>0, analisar aproximadamente em $s = j2$, $K = -(j2+2)(j2+5)(j2+1-j)(j2+1+j)$ ou calcular as distâncias dos 4 polos a este ponto $s = j2$, o que resulta em K=68.

Para K<0, analisar em s=0, $K = -(2)(5)(1-j)(1+j)$ ou calcular distâncias destes polos ao ponto $s = 0$, o que resulta em K=-20.

1.3 Identifique pontos de sela

Solução: em s=-4 há um ponto de sela

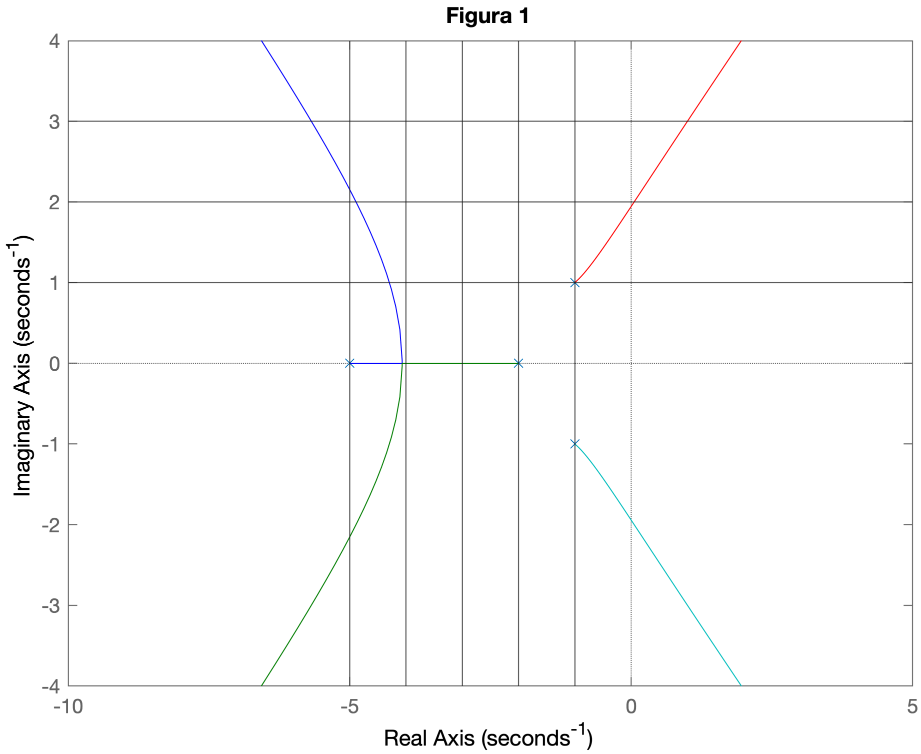
1.4 Obtenha os valores de K para os quais os pares de polos complexos tenham $\zeta > 0.707$.

Solução:

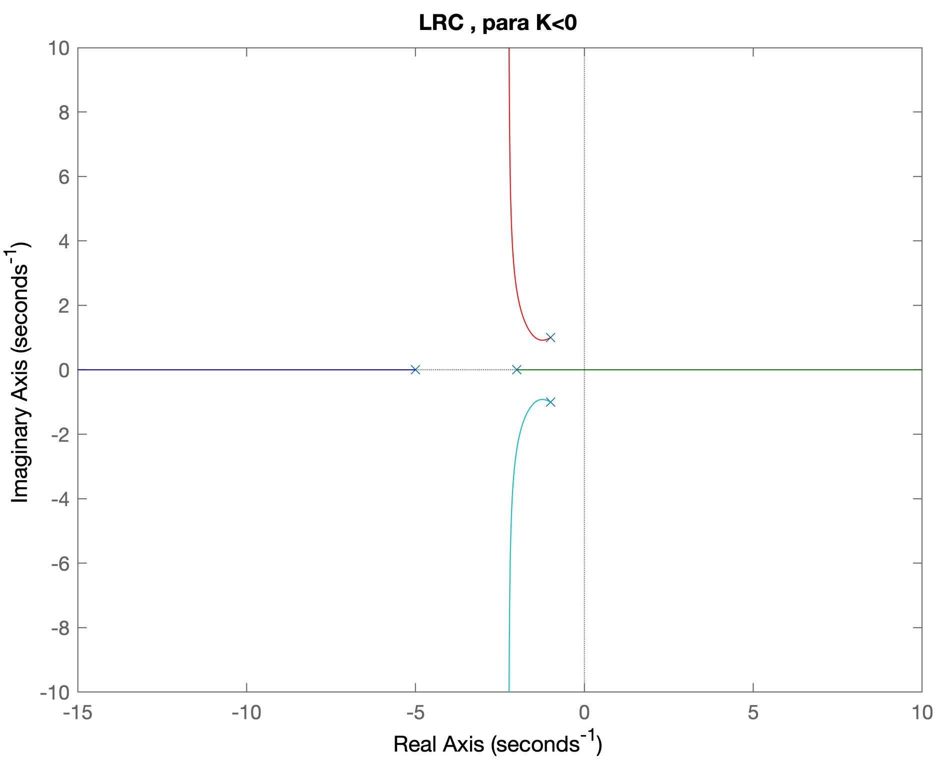
O par de polos perto da origem tem $\zeta < 0.707$ para todo K>0 (para K=0 s=-1-j)

O par e polos mais distante tem $\zeta > 0.707$ para todo K>0 (a parte real é sempre maior que a imaginária)

```
den=poly([-2 -5 -1-j -1+j]);
g=tf(1,den);
rlocus(g);xlim([-10 5]);ylim([-4 4]);title('Figura 1');
for i=1:5 xline(-i);end
for i=1:3 yline(i);end
```




```
figure;rlocus(-g);title('LRC , para K<0')
```



2) Esboce o lugar das raízes de $1+\dfrac{K(z+0.5)}{(z-0.2)(z-0.6)}=0$ para K>0 obtendo

os pontos de sela e cruzamento com eixo jw se houver.

Este sistema é discreto. Entretanto, para o esboço, isto não faz diferença.

Tem-se 2 polos no SPD e 1 zero no SPE: logo, 1 polo tende para o zero e outro polo tende para uma assíntota sobre o eixo real. Não precisa nem calcular, neste caso. Basta ver onde há LR para K>0, que é entre os 2 polos e à esquerda do zero (número ímpar de polos e zeros).

O polinômio característico de malha fechada é: $z^2+z(K-0.8)z+0.12+0.5K=0$

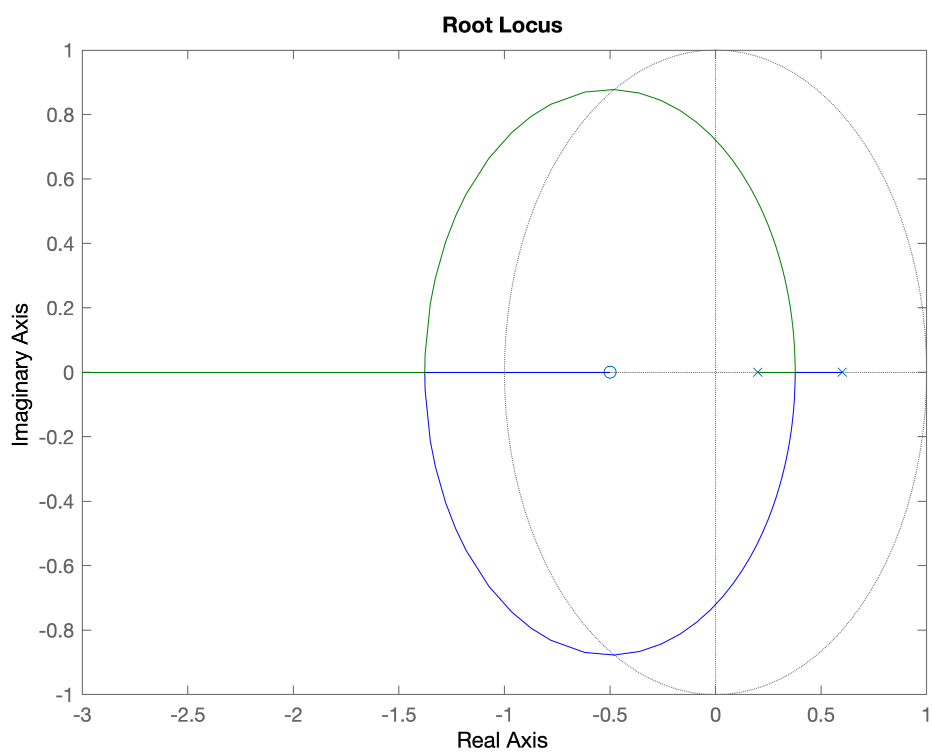
Portanto $K=0.8$: raízes sobre jw (sistema de ordem 2, fica fácil).

Pontos de sela: $\dot{N}D-N*\dot{D}=z^2-0.8z+0.12-(2z^2+0.2z-0.4)=z^2+z-0.52$

Raízes: -1.37, 0.37

Com estas informações se pode esboçar o LR.

```
g1=tf([1 0.5],poly([0.6 0.2]),0.5);
figure;rlocus(g1);
```

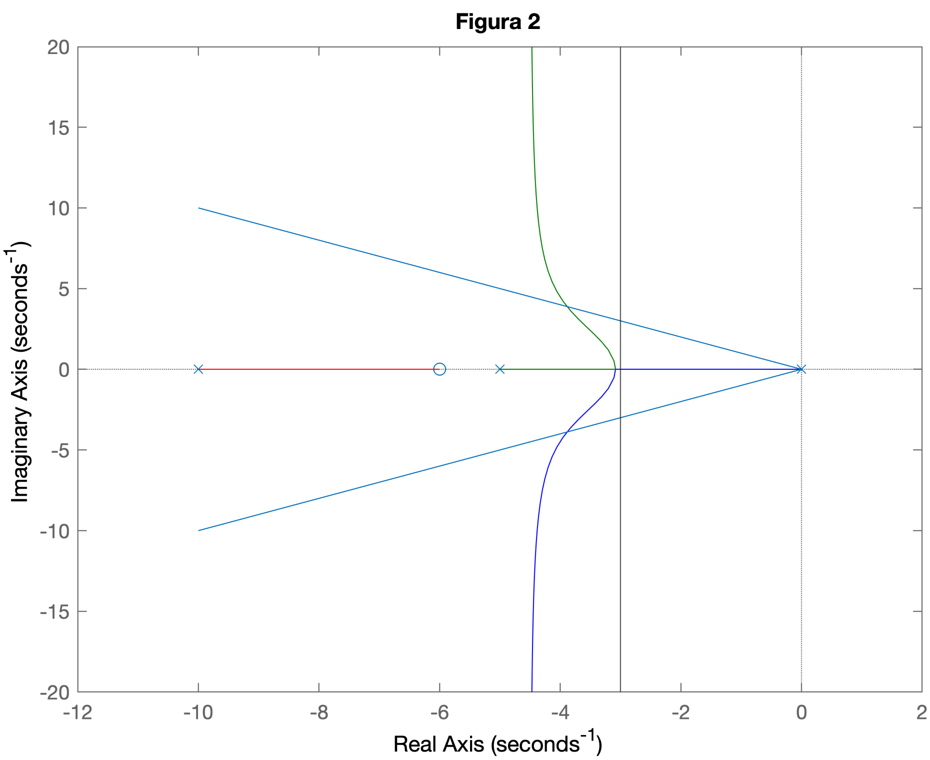


3) Seja o LR mostrado na Figura 2 para o projeto de um controlador PI dado

por $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ e uma FT $G(s)$ com ganho 4. Obtenha os ganhos do controlador PI

que atendam as especificações de sobreelevacão e tempo de estabelecimento mostradas.

```
g=tf(200,poly(-[5 10]));
 c=tf([1/6 1],[1 0]);
 figure;rlocus(c*g);title('Figura 2')
 xline(-3);
 x=linspace(-10,0,100);
 line(x,-x);
 line(x,x);
```



Solução:

A reta em -3 define o tempo de estabelecimento desejado: $ts \leq 4/3$.

A retas com ângulo de +45° e -45° definem o amortecimento desejado: $\zeta \geq 0.707$.

O zero está em s=-6. Logo, $\frac{K_i}{K_p} = 6$.

O polo à esquerda está sempre dentro da região.

O par complexo está dentro da região até um certo valor de K. Se aumentar mais, o amortecimento não é atendido.

Logo, como o LR é desenhado variando K_p, basta escolher um ponto s dentro desta região e calculá-lo.

Para facilitar as contas, escolhemos s=-3, o que resulta em $K_p = -\frac{s(s+5)(s+10)}{200(s/6+1)} = -0.42$, onde *K* é o ganho da FT. O valor 200 no denominador é necessário, pois foi afirmado que G(s) tem ganho 4, ou seja, $G(0) = \frac{200}{5*10} = 4$.

4) Seja o lugar das raízes mostrado na figura 3.

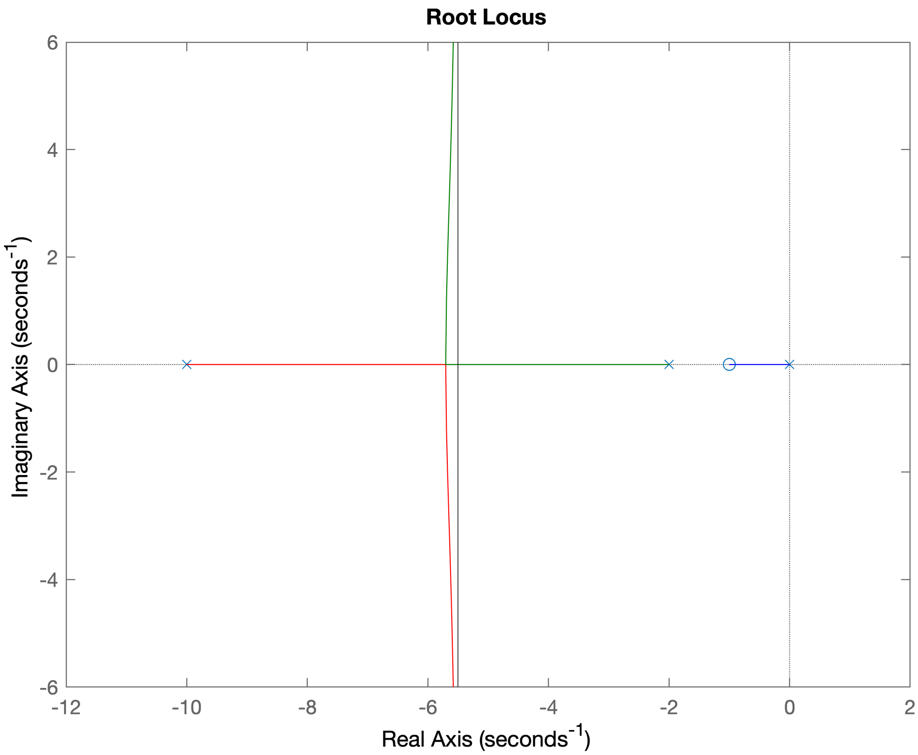
4.1 Refaça o LR para um zero adicionado em s=-1;

Solução:

Há LR entre o polo na origem e o zero, e entre os 2 polos.

O polo na origem tenderá a este zero. Os outros dois polos se tornam complexos tendendo para assintotas em -90° e +90° (calcular). As assintotas passam em $\sigma = \frac{-10-2+1}{3-1} = -5.5$. Logo, o ponto de sela está entre estes dois polos, mas não precisa ser calculado.

```
figure;rlocus(tf([1 1],poly([0 -2 -10])));xline(-5.5);
```



4.2 Refaça o LR para um zero adicionado em s=-5;

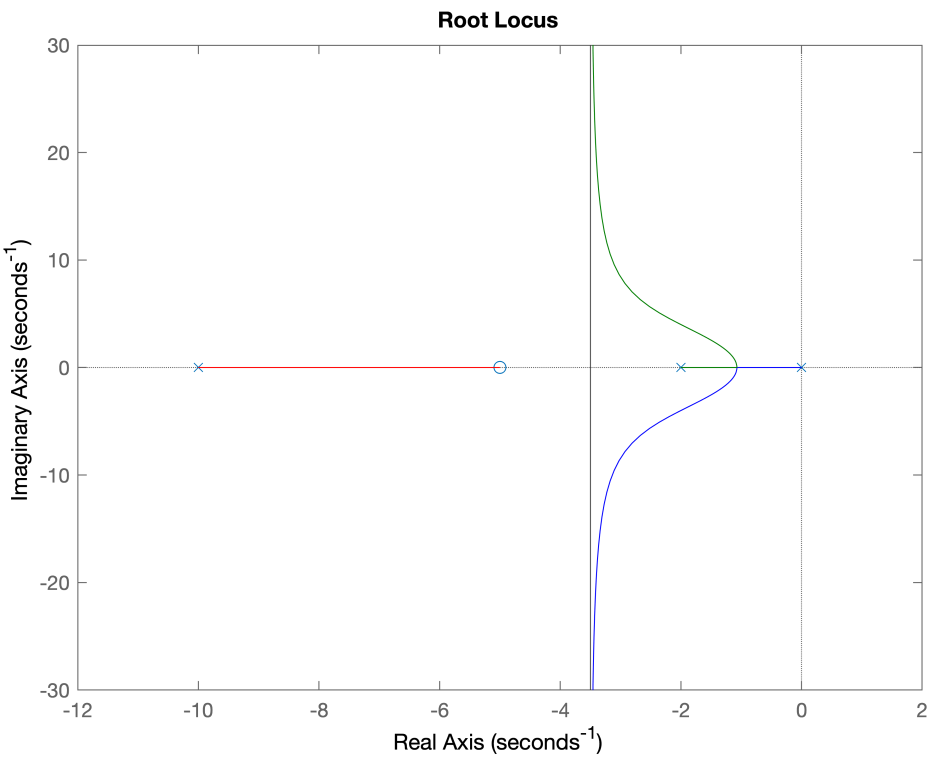
Neste caso, há LR entre o polo na origem e o polo em -2, e entre o zero em -5 e o polo em -10.

Logo, o polo em -10 tende ao zero, e os polos em 0 e -2 tendem para assintontas em -90° e +90°, passando pelo ponto de intereseção das assítontas

$\sigma = \dfrac{-10 - 2 + 5}{3 - 1} = -3.5$.

Logo, o ponto de sela está entre estes dois polos, mas não precisa ser calculado.

```
figure;rlocus(tf([1 5],poly([0 -2 -10])));xline(-3.5);
```



4.3) Qual das localizações do zero permite uma resposta com menor sobreelevação? Por quê?

Caso haja, não precisa calcular pontos de sela.

Solução:

Quanto mais próximo da origem o zero estiver, mais distante do eixo jw estará a interseção das assintotas σ, fazendo com que o amortecimento seja maior. Logo, s=-1 permite uma menor sobreelevação.

```
g=tf(1,poly([0 -2 -10]));
figure;rlocus(g);xline(-1);xline(-2);xline(-3);xline(-4);xline(-5);title('Figura 3');
```

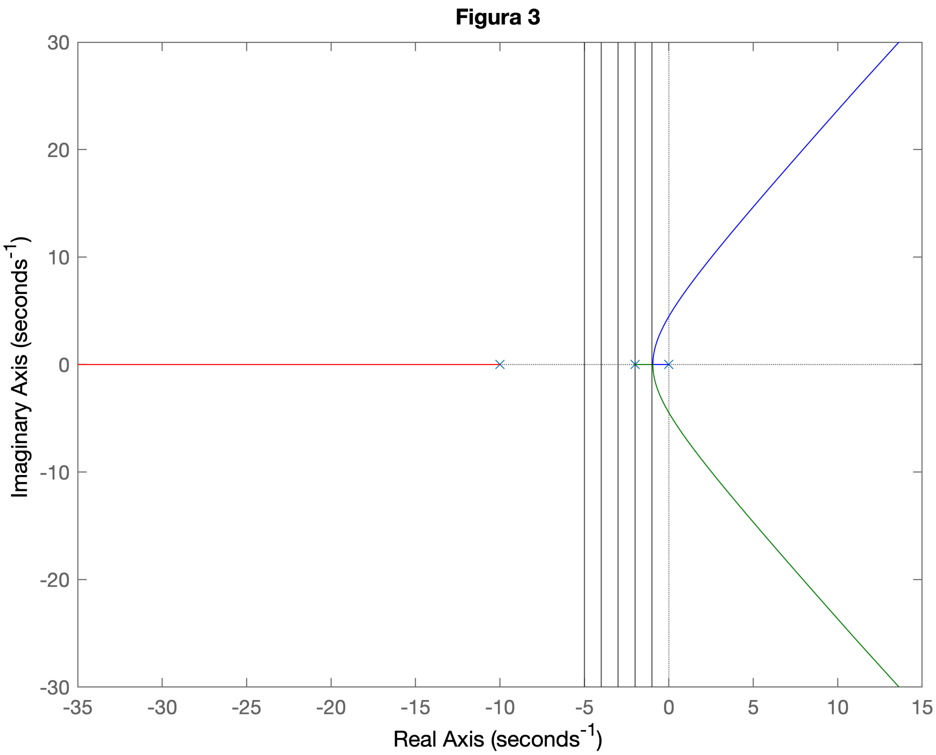


Figura 3
30
20
10
0
-10
-20
-30
-35
-30
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})