Sistema Realimentados

EP7a - O método do lugar das raízes

Data: 11 de abril

Wagner Zanebone Capelini

Sejam as FTs $G_1(s) = \frac{10}{(s+1)^4}$ e $G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$

Avalie as regras 1 a 6 das notas de aula e use-as para esboçar à mão o lugar das raízes para $K > 0$ e para $K < 0$.

Depois, use o comando rlocus e compare as curvas e obtenha com ele o ponto sober o eixo real (ponto de sela) no qual as raízes reais se tornam complexas.

Para utilizar as regras de 1 a 6 deve-se primeiro escrever o problema no seguinte formato:

$$1 + K * \mathrm{G1}(s) = 1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

Escrevendo G1 no formato acima:

$$1 + K\frac{10}{(s+1)^4} = 0 \qquad (1)$$

Após colocar no formato, pode-se utilizar as regras.

Regra 1:

Raízes de P(s) quando K=0 são os polos de G1(s) (raízes de D(s)).

Raízes de P(s) quando K → ∞ são os zeros de G1(s) (raízes de N(s)).

Com isso, temos:

$k \to 0$:

Observando o denominador de G1(s):

$$D(s) = (s+1)^4 = 0$$

É possível perceber que há 4 pólos em -1, portanto os pólos de G1(s) é -1 com multiplicidade 4.

$k \to \infty$:

Observando o numerador de G1(s):

$$N(s) = 10$$

Nota-se que não há zeros em G1(s), logo as raízes tendem a infinito.

Regra 2:

O número de trajetórias é igual ao número de polos de D(s).

Logo:

nº pólos = nº trajetórias = 4

Regra 3:

O LR é simétrico em relação ao eixo real, uma vez que as raízes de P(s) são sempre um par complexo-conjugado.

Regra 4:

Para os polos que tendem para assíntotas (zeros no infinito), os ângulos destas assíntotas são dados por:

$$\Theta_i = \frac{(2i+1)*180}{|n-m|}, p/\ K > 0$$

$$\Theta_i = \frac{2i*180}{|n-m|}, p/\ K < 0$$

onde n = número de pólos de G1(s).

m = número de zeros de G1(s).

$n \neq m$

$i \in Z^+$

Utilizando a Regra 4 obteremos:

Para K > 0:

$\Theta_i = \frac{(2i+1)*180}{|4-0|} = (2i+1)*45$ logo Θ_i = {45,135,225,315}

Para K < 0:

$\Theta_i = \frac{2i*180}{|4-0|} = 2i*45$ logo Θ_i = {0,90,180,360 }

Foi calculado 4 ângulos, pois há 4 assíntotas.

Para desenhar assíntotas, é preciso saber o ponto sobre o eixo real pelo qual elas passam. Todas as assíntotas passam pelo mesmo ponto.

Este ponto de interseção é dado por:

$$\sigma = \frac{\sum \text{pólos de G1}(s) - \sum \text{zeros de G1}(s)}{n - m}$$

Utilizando a equação acima:

$$\sigma = \frac{(-1-1-1-1)-(0)}{4-0} = -\frac{4}{4} = -1$$

Com as regras acima já é possível desenhar as assíntotas, agora é necessário analisar se há raízes no eixo real.

Regra 5:

- Em uma dada seção do eixo real, há raízes para K > 0 se o número de polos e

zeros de G1(s) à direita da seção é ímpar.

- Em uma dada seção do eixo real, há raízes para K < 0 se o número total de polos

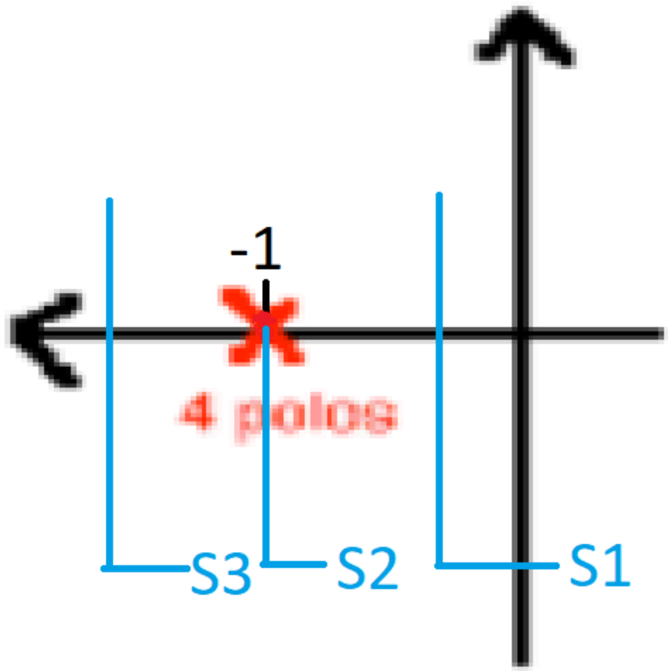
e zeros de G1(s) à direita da seção é par.

Consequência da Regra 5:

- Todo eixo real é ocupado por alguma raiz, para K>0 ou para K<0.

Com isso, o gráfico será dividido em 3 seções para melhor análise:

```
imshow(imread ("Sem título.png"));
```



Analisando para K > 0:

Percebe-se que à direita de todas as 3 seções há um número par de pólos/zeros, portanto, não há raízes no eixo real.

Analisando para K < 0:

Percebe-se que à direita de todas as 3 seções há um número par de pólos/zeros, portanto, há raízes em todo o eixo real.

Regra 6:

Os pontos de interseção com o eixo imaginário são determinados usando o critério de Routh-Hurwitz.

Para utilizar o critério de Routh-Hurwitz é necessário obter a Equação Característica.

Manipulando a equação (1), conseguimos chegar nela

$$1 + K\frac{10}{(s+1)^4} = 0$$

$$(s+1)^4 + K * 10 = 0$$

$$\mathrm{Ec}(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 + K * 10 = 0$$

Antes de usar o critério de Routh-Hurwitz é preciso garantir que todos o coeficientes da Equação característica não sejam nulos, portanto:

$$1 + K * 10 > 0$$

$$K > -\frac{1}{10}$$

$$K > -0,1$$

Garantido essa condição, podemos usar o critério:

$$\begin{bmatrix} s^4 & | & 1 & 6 & 1+10K \\ s^3 & | & 4 & 4 & \\ - & - & - & - & - \\ s^2 & | & b_3 & b_1 & \\ s^1 & | & c_3 & & \\ s^0 & | & 1+10K & & \end{bmatrix}$$

Cálculo dos elementos b3, b1 e c3:

$$b_3 = \frac{4 * 6 - 4 * 1}{4} = 5$$

$$b_1 = \frac{4 * (1 + 10K) - 0 * 1}{4} = 1 + 10K$$

$$c_3 = \frac{5 * 4 - (1 + 10K) * 4}{5} = \frac{16 - 40K}{5}$$

Com isso:

$$\begin{bmatrix} s^4 & | & 1 & 6 & 1+10K \\ s^3 & | & 4 & 4 & \\ - & - & - & - & - \\ s^2 & | & 5 & 1+10K & \\ s^1 & | & \frac{16-40K}{5} & & \\ s^0 & | & 1+10K & & \end{bmatrix}$$

O critério de Routh-Hurwitz diz que todos os elementos da primeira coluna devem ser maiores que zero, portanto:

$$\frac{16 - 40K}{5} > 0$$

$$K > -\frac{16}{-40}$$

$K < 0,4$

Após utilizar o critério obtemos que:

$-0,1 < K < 0,4$

O objetivo de usar o critério de Routh-Hurwitz é encontrar pontos onde o sistema está localizado sobre o eixo imaginário, e para isso acontecer, tem que ter uma linha de zeros no critério, e isso acontece quando K=0,4. Utilizando a Equação Auxiliar e substituindo K por 0,4, é possível calcular as raízes no formato j*w, teremos:

$$\mathrm{Ea}(s) = 5 * s^2 + 1 + 0,4 * 10 = 0$$

$$\mathrm{Ea}(s) = 5 * s^2 + 5 = 0$$

$$\mathrm{Ea}(s) = s = \sqrt{\frac{5}{5}} = \pm\, j * 1$$

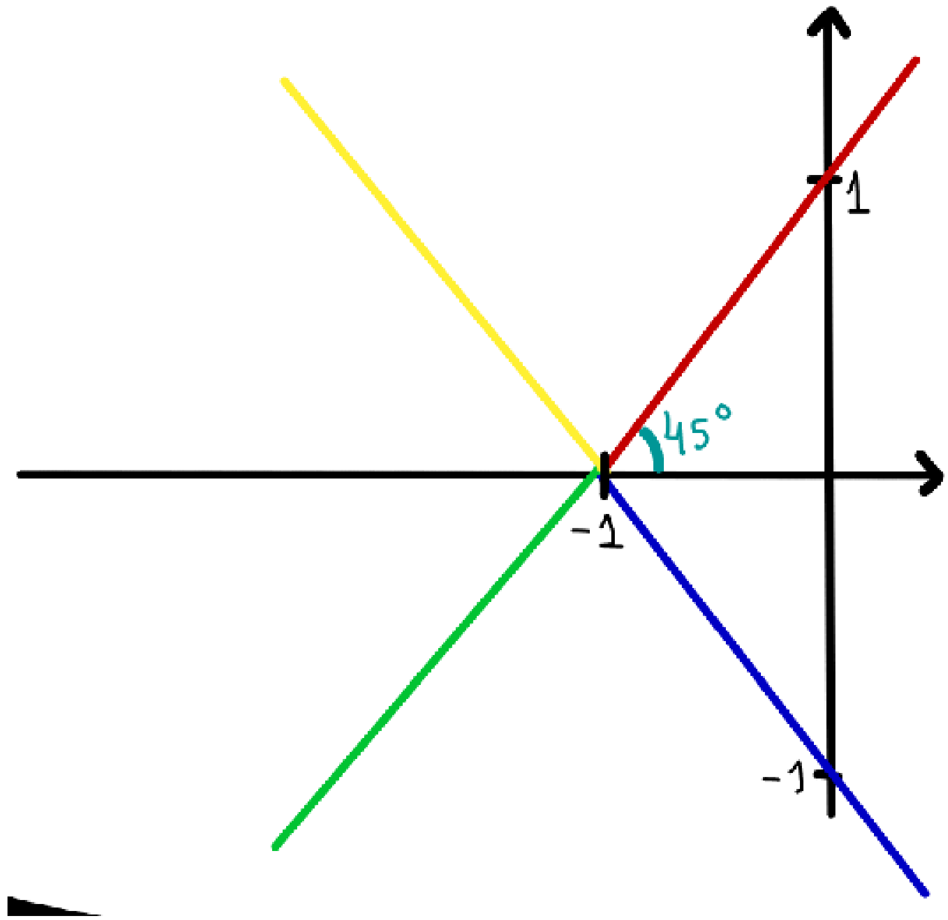
As raízes no formato jw são j*1 e j*(-1), logo, esses são os pontos que interceptam o eixo imaginário.

Note que K = 0,4 > 0.

Com todos esses dados é possível desenhar o LR (K>0) e o LRC (K<0).

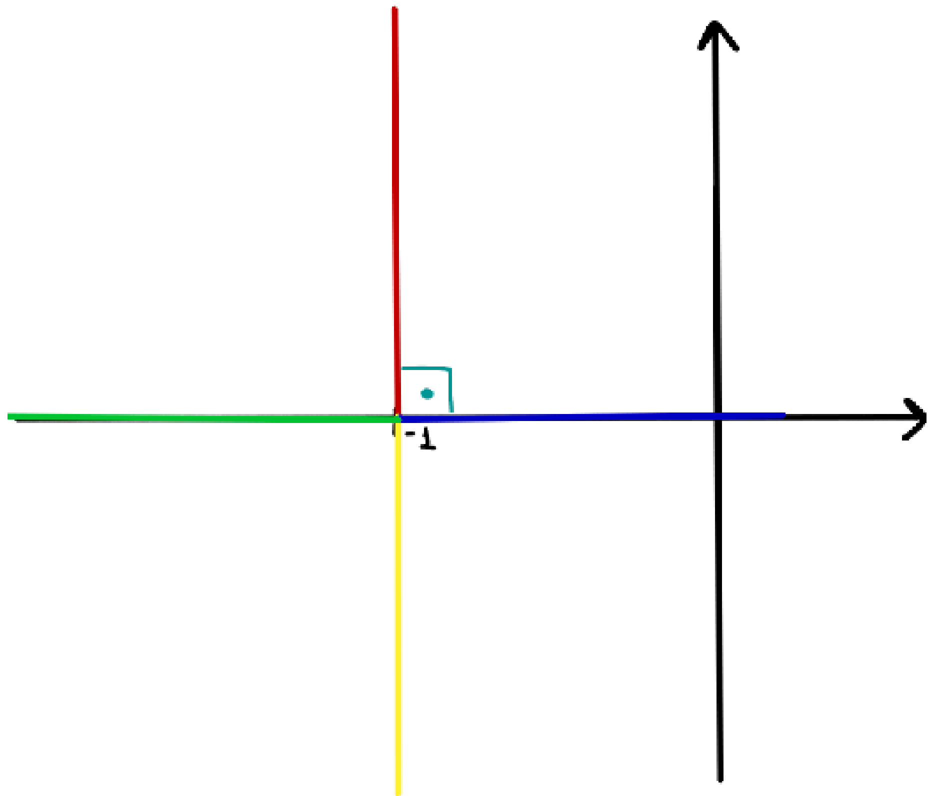
LR:

```
imshow(imread ("G1K.png"));
```



LRC:

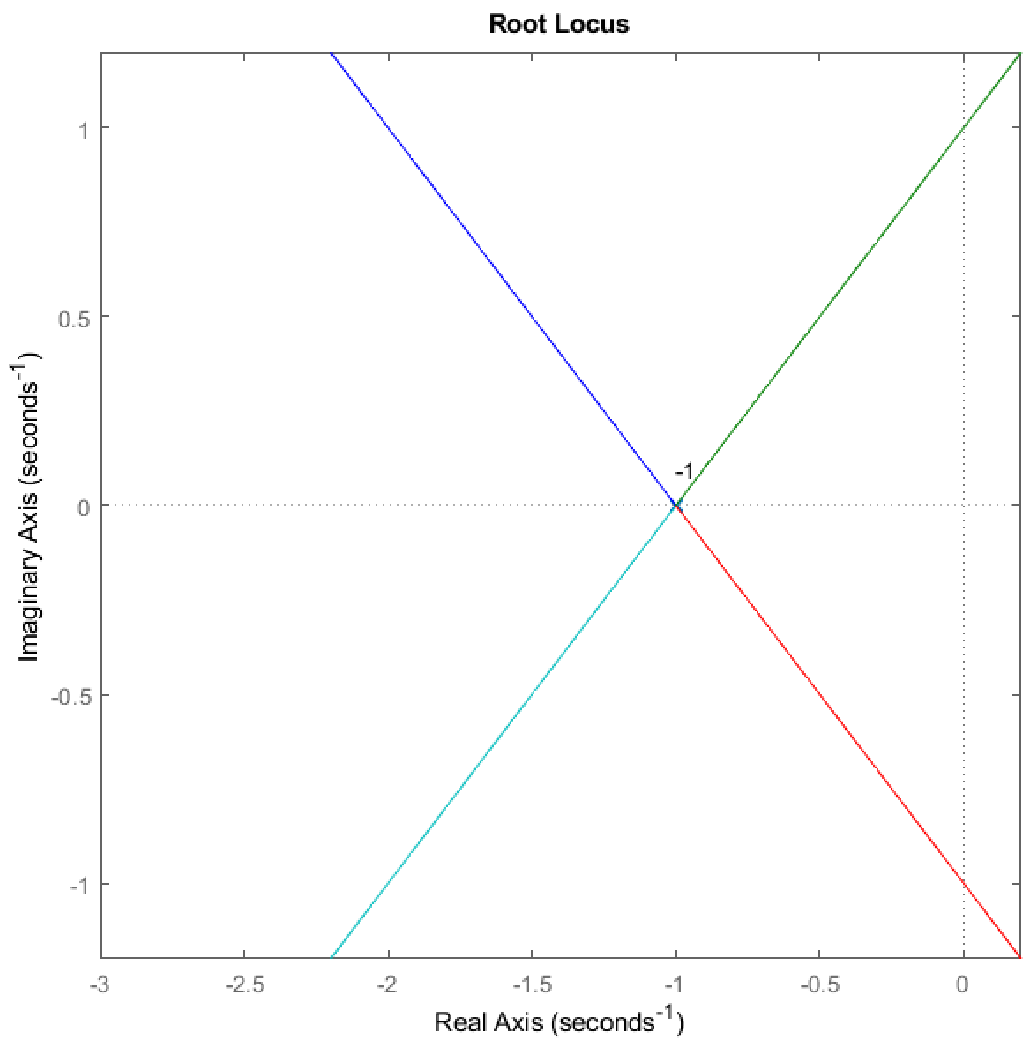
```
imshow(imread ("G1-K.png"));
```



Após desenhar os gráficos, a função rlocus será usada para comparar e para encontrar o ponto de sela.

K > 0:

```
s=tf('s');
G1=10/(s+1)^4
rlocus(G1)
axis([-3 0.2 -1.2 1.2])
text(-1,0.1,"-1")
```

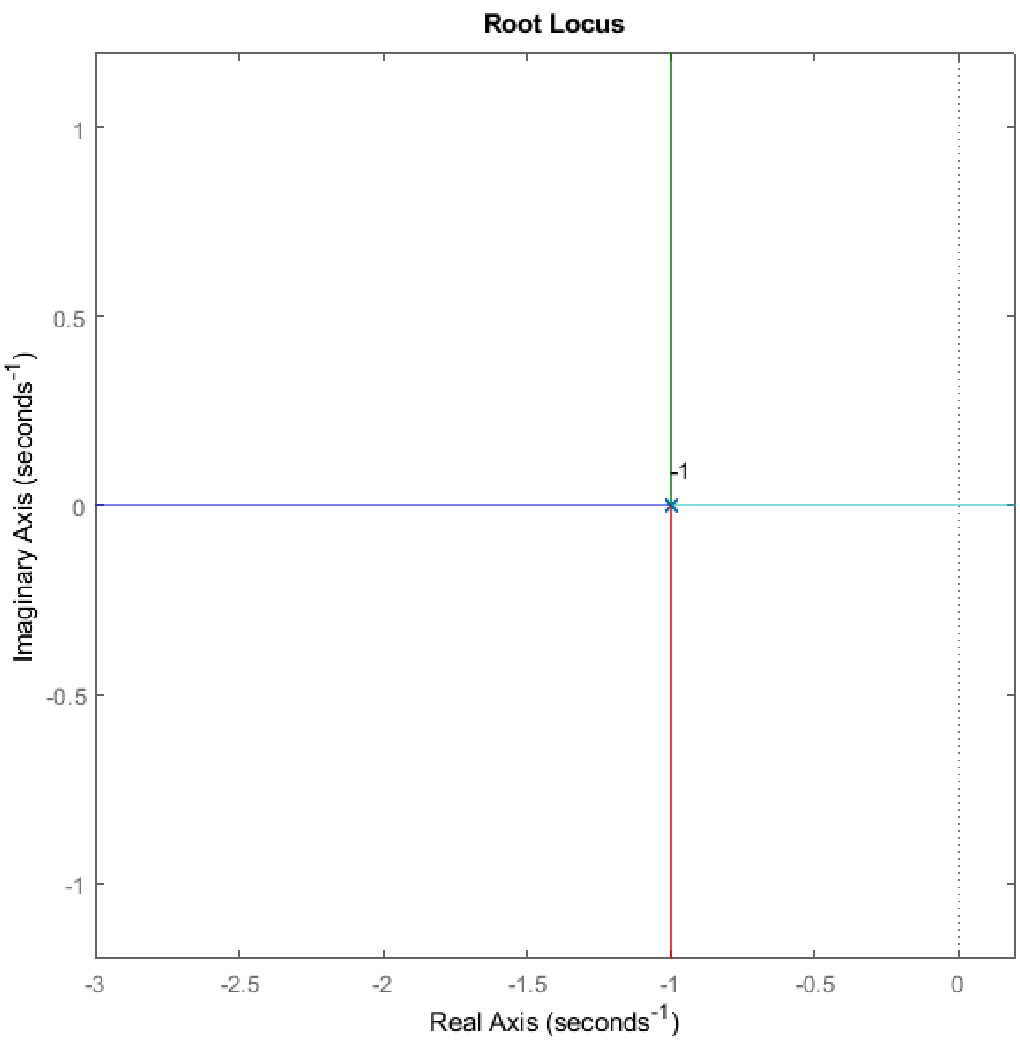


É possível perceber que o ponto de sela se encontra em -1, no qual há 4 raízes repetidas.

Os pontos de sela são os pontos sobre o eixo real onde há raízes múltiplas, ou seja, onde raízes reais se tornam complexas ou raízes complexas se tornam reais.

K<0

```
rlocus(-G1)
axis([-3 0.2 -1.2 1.2])
text(-1,0.1,"-1")
```



Novamente o ponto de sela se encontra em -1.

Repetindo os procedimentos para G2(s):

Escrevendo G2 no formato necessário:

$$1 + K\frac{1}{s(s+1)(s+10)} = 0 \qquad (2)$$

Regra 1:

Raízes de P(s) quando K=0 são os polos de G1(s) (raízes de D(s)).

Raízes de P(s) quando K → ∞ são os zeros de G1(s) (raízes de N(s)).

Com isso, temos:

$k \rightarrow 0$:

Observando o denominador de G2(s):

$D(s) = s(s+1)(s+10) = 0$

É possível perceber que há 3 pólos: {0, -1, -10}

$k \to \infty$:

Observando o numerador de G2(s):

$N(s) = 1$

Não há zeros em G2(s), logo as raízes tendem a infinito.

Regra 2:

O número de trajetórias é igual ao número de polos de D(s).

Logo:

nº pólos = nº trajetórias = 3

Regra 3:

O LR é simétrico em relação ao eixo real, uma vez que as raízes de P(s)

são sempre um par complexo-conjugado.

Regra 4:

Para os polos que tendem para assíntotas (zeros no infinito), os ângulos destas

assíntotas são dados por:

$$\Theta_i = \frac{(2i+1)*180}{|n-m|}, p/\ K > 0$$

$$\Theta_i = \frac{2i*180}{|n-m|}, p/\ K < 0$$

Utilizando a Regra 4 obteremos:

Para K > 0:

$\Theta_i = \frac{(2i+1)*180}{|3-0|} = (2i+1)*60$ logo Θ_i = {60,180, 300 }

Para K < 0:

$\Theta_i = \frac{2i*180}{|3-0|} = 2i*60$ logo Θ_i = {0,120,240,360}

Foi calculado 3 ângulos, pois há 3 assíntotas.

Para desenhar assíntotas, é preciso saber o ponto sobre o eixo real

pelo qual elas passam. Todas as assíntotas passam pelo mesmo ponto.

Este ponto de interseção é dado por:

$$\sigma = \frac{\sum \text{pólos de G1}(s) - \sum \text{zeros de G1}(s)}{n - m}$$

Utilizando a equação acima:

$$\sigma = \frac{(0 - 1 - 10) - (0)}{3 - 0} = -\frac{11}{3} = -3,6667$$

Regra 5:

- Em uma dada seção do eixo real, há raízes para K > 0 se o número de polos e

zeros de G1(s) à direita da seção é ímpar.

- Em uma dada seção do eixo real, há raízes para K < 0 se o número total de polos

e zeros de G1(s) à direita da seção é par.

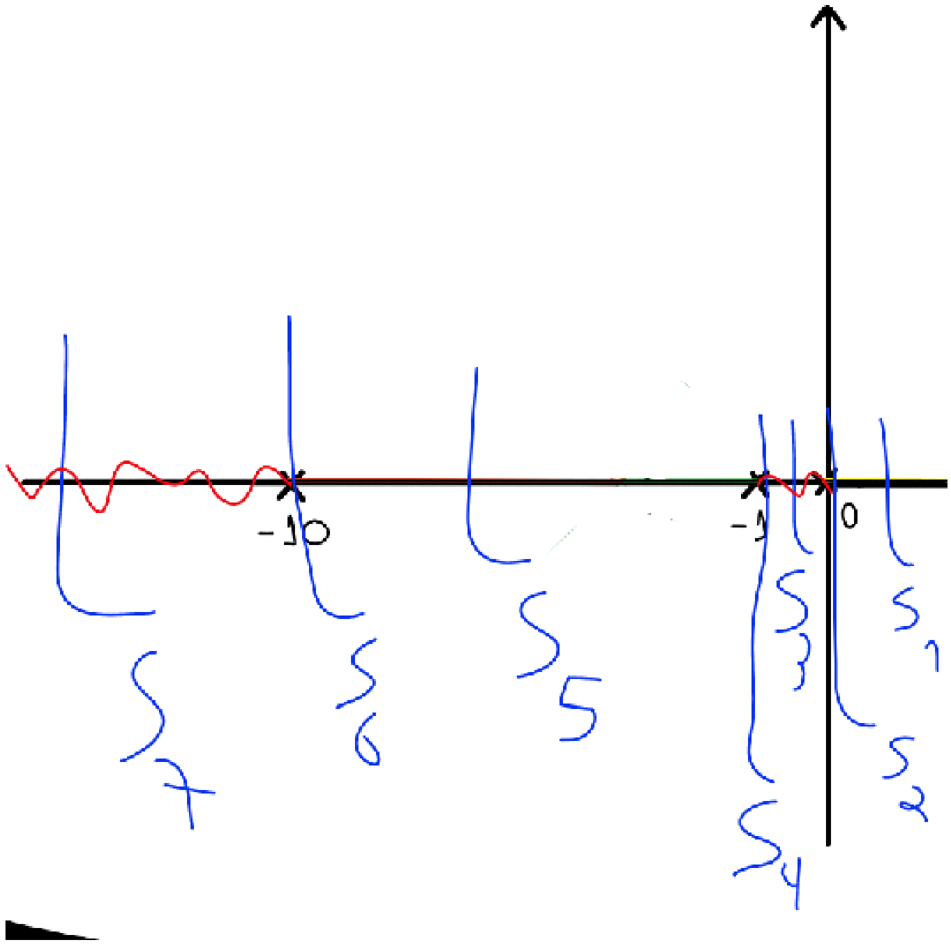
Consequência da Regra 5:

- Todo eixo real é ocupado por alguma raiz, para K>0 ou para K<0.

Com isso, o gráfico será dividido em 7 seções para melhor análise:

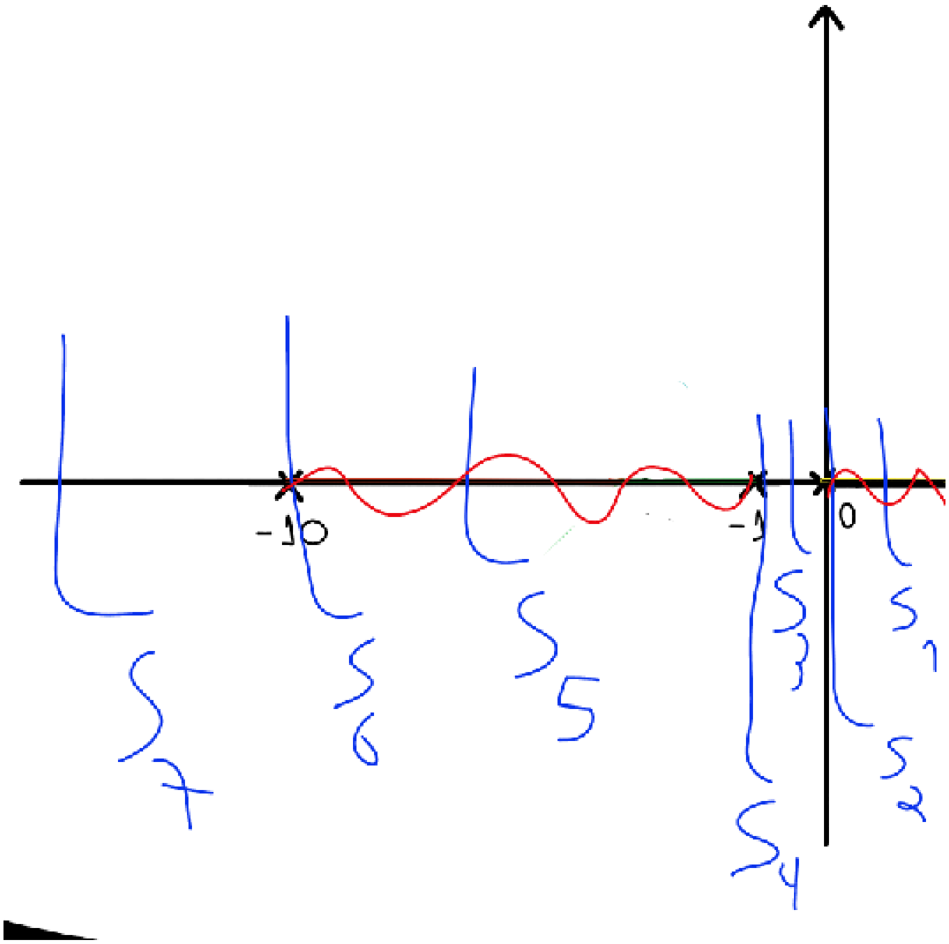
K > 0:

```
imshow(imread ("sem tittulo 2.png"));
```



K < 0:

```
imshow(imread ("sem tittulo 3.png"));
```



À direita da sessão 1 e 2 há um número par de pólos/zeros, logo há raízes somente para K < 0, enquanto à direita de 3 e 4 há um número ímpar, portanto há raízes para K > 0 apenas, à direita de 5 e 6 o número volta a ser par, então há raízes para K < 0 e por último, á direita de 7 há um número ímpar, logo há raízes para K > 0.

Regra 6:

Os pontos de interseção com o eixo imaginário são determinados usando o critério de Routh-Hurwitz.

Para utilizar o critério de Routh-Hurwitz é necessário obter a Equação Característica.

Manipulando a equação (2), conseguimos chegar nela

$$1 + K\frac{1}{s(s+1)(s+10)} = 0$$

$$s(s+1)(s+10) + K = 0$$

$$\mathrm{Ec}(s) = s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$$

Antes de usar o critério de Routh-Hurwitz é preciso garantir que todos o coeficientes da Equação característica não sejam nulos, portanto:

$$K > 0$$

Garantido essa condição, podemos usar o critério:

$$\begin{bmatrix} s^3 & | & 1 & 10 \\ s^2 & | & 11 & K \\ - & - & - & - \\ s^1 & | & b_2 & 0 \\ s^0 & | & K & \end{bmatrix}$$

Cálculo de b2

$$b_2 = \frac{11 * 10 - K}{11} = \frac{110 - K}{11}$$

Com isso:

$$\begin{bmatrix} s^3 & | & 1 & 10 \\ s^2 & | & 11 & K \\ - & - & - & - \\ s^1 & | & \frac{110 - K}{11} & 0 \\ s^0 & | & K & \end{bmatrix}$$

O critério de Routh-Hurwitz diz que todos os elementos da primeira coluna devem ser maiores que zero, portanto:

$$\frac{110 - K}{11} > 0$$

$$K > -110$$

$$K < 110$$

Após utilizar o critério obtemos que:

$$0 < K < 110$$

Novamente o objetivo de usar o critério de Routh-Hurwitz é encontrar pontos onde o sistema está localizado sobre o eixo imaginário, e para isso acontecer, tem que ter uma linha de zeros no critério, e isso acontece quando K=110. Utilizando a Equação Auxiliar e substituindo K por 110, é possível calcular as raízes no formato j*w, teremos:

$$\mathrm{Ea}(s) = 11 * s^2 + 110 = 0$$

$$\mathrm{Ea}(s) = s = \sqrt{\frac{110}{11}} = \pm j * 3,1623$$

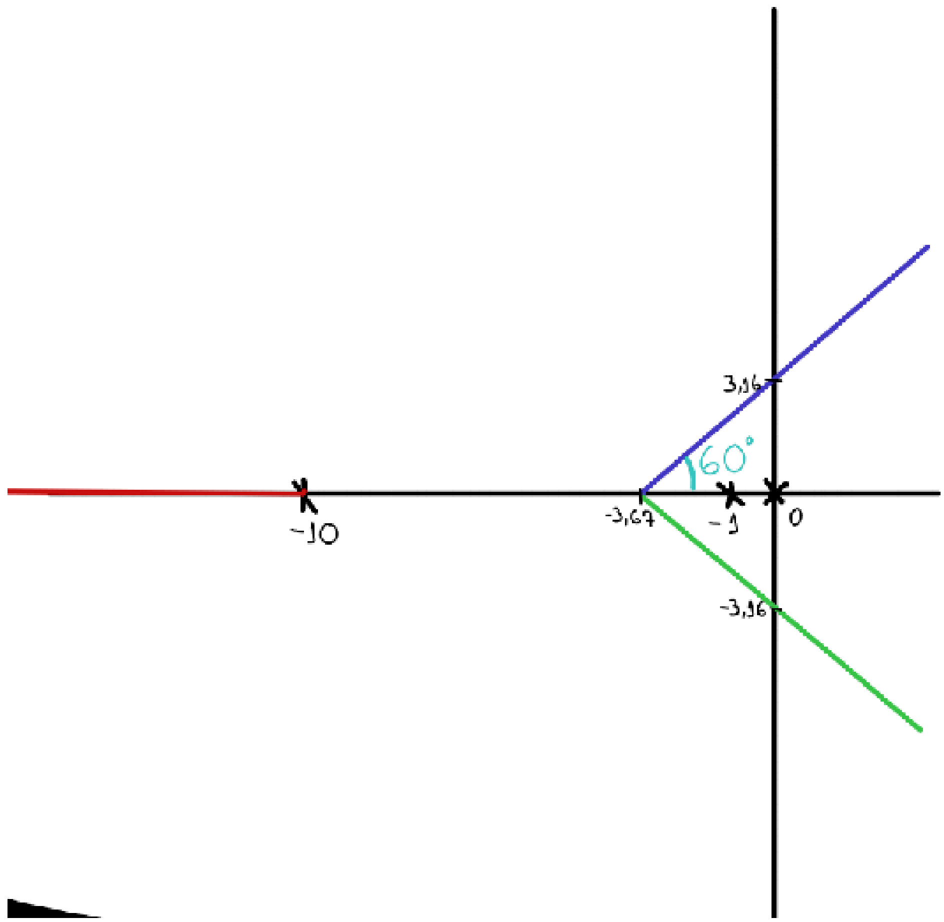
As raízes no formato jw são j*3,1623 e j*(-3,1623), logo, esses são os pontos que interceptam o eixo imaginário.

Note que K = 110 > 0.

Com todos esses dados é possível desenhar o LR (K>0) e o LRC (K<0).

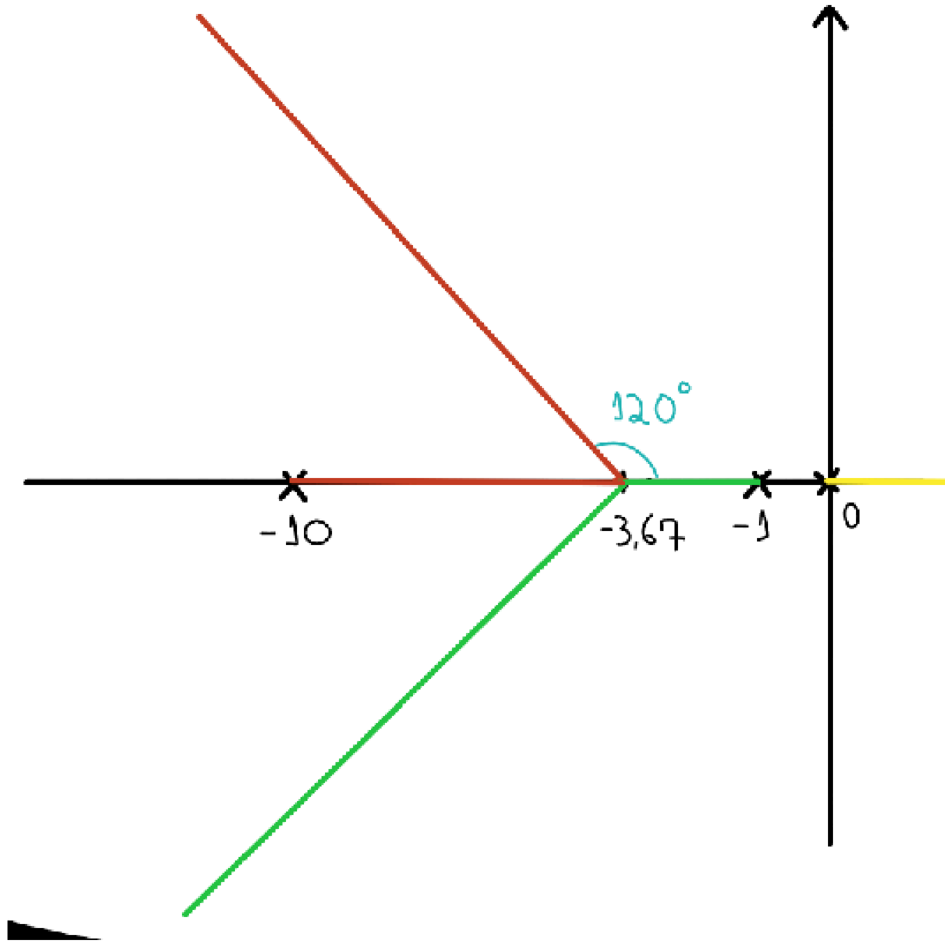
LR:

```
imshow(imread ("G2K.png"));
```



LRC:

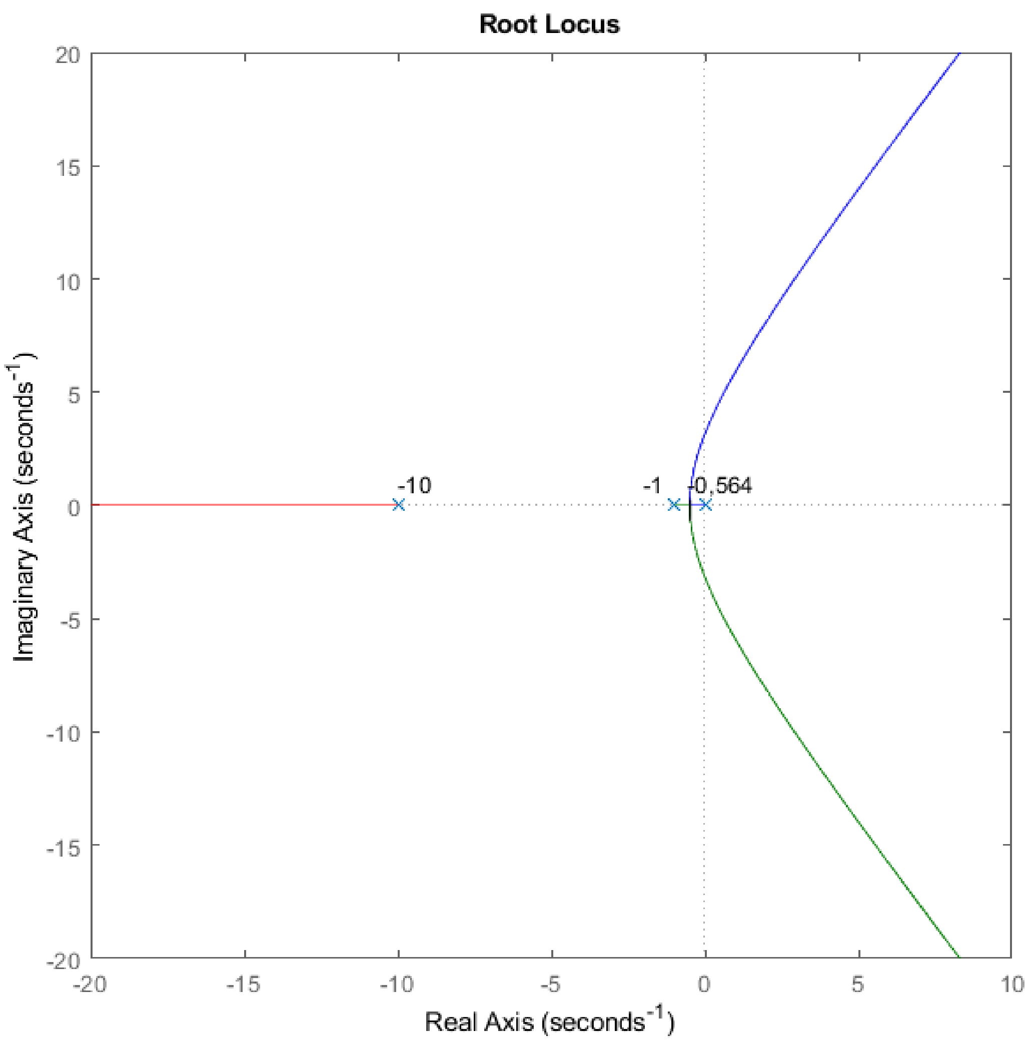
```
imshow(imread ("G2-K.png"));
```



Após desenhar os gráficos, a função rlocus será usada para comparar e para encontrar o ponto de sela.

K > 0:

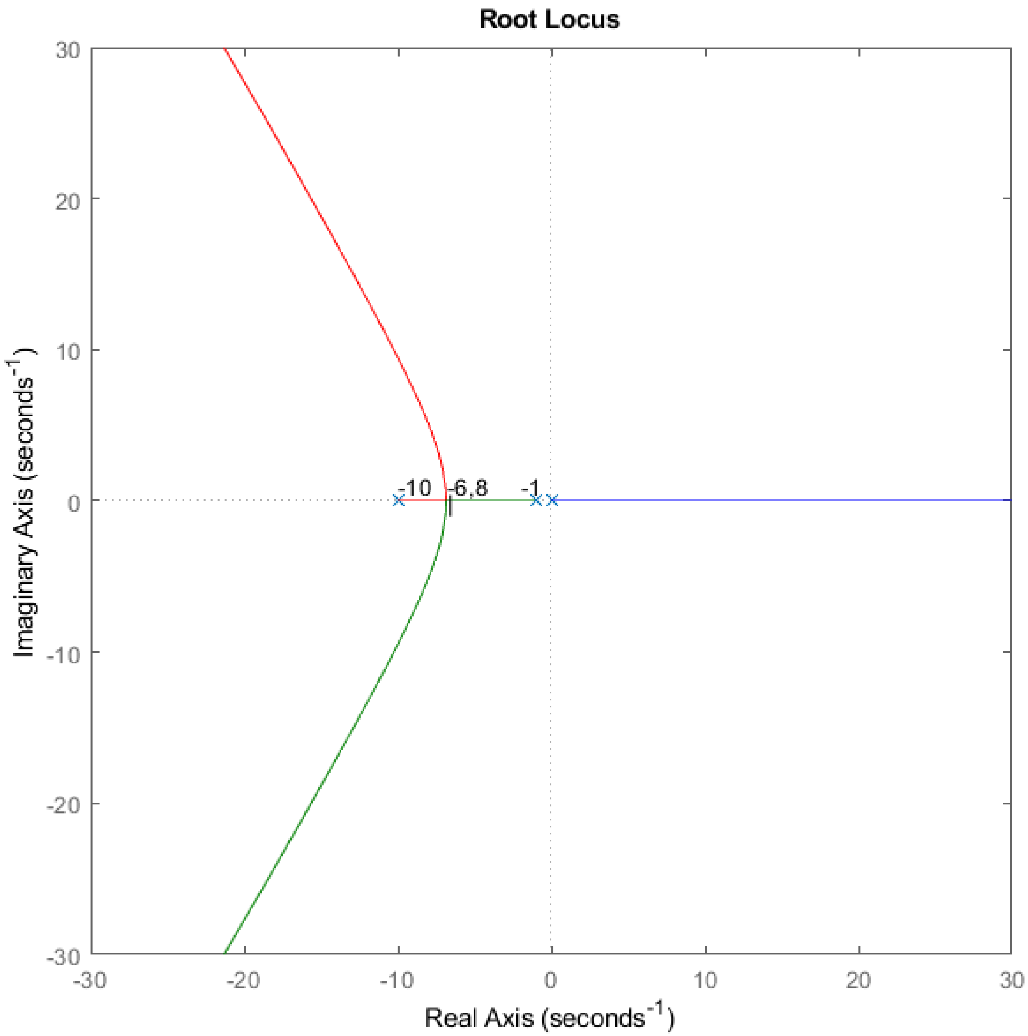
```
s=tf('s');
G2=1/(s*(s+1)*(s+10))
rlocus(G2)
axis([-20 10 -20 20])
text(-2,1,"-1")
text(-10,1,"-10")
text(-0.564,1,"-0,564")
text(-0.564,0,"|")
```



É possível perceber que o ponto de sela se encontra em -0,564.

K < 0

```
rlocus(-G2)
text(-2,1,"-1")
text(-10,1,"-10")
text(-6.8,1,"-6,8")
text(-6.8,0,"|")
```



É possível perceber que o ponto de sela se encontra em -6,8.