Sistemas Realimentados

EP 11 - Projeto do controlador PD via lugar das raízes

Nomes: Mariana Olm Rezende e Thyago Vieira Piske

Seja o sistema dados pela FT de malha aberta $G(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s+4)}$ **e o controlador PD** $C(s) = K_p + K_d s$**.**

1) Obtenha os valores de K_p **tal que o erro em regime para uma entrada degrau seja** $\leq 5\%$**.**

Temos como requisito um erro à entrada degrau menor ou igual à 5%, portanto:

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} R(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{2(K_p + K_d s)}{(s+1)(s+4)}} \frac{1}{s}$$

$$E(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{s[(s+1)(s+4) + 2K_d s + 2K_p]}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \longrightarrow 0} s\,E(s) = \frac{4}{4 + 2K_p}$$

$$\frac{4}{4 + 2K_p} \leq 0.05 \;\Rightarrow\; K_p \geq 38$$

2) Obtenha via LR os valores de K_d **para os quais se tenha erro em regime atendendo a especificação, sobreelevação** $\leq 5\%$ **e tempo de estabelecimento** $\leq 0.5s$**.**

Solução 1 (esse método não será cobrado):

Referências:

1) Norman S. Nise, 'Control Systems Engineering', Sixth Edition, John Wiley and Sons, 2011.

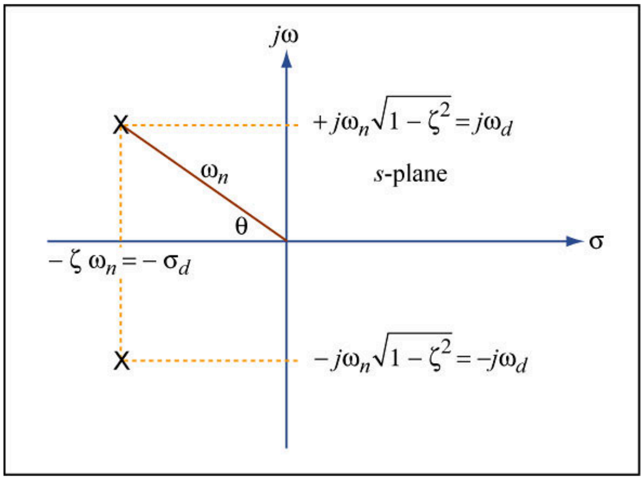
2) Ogata, K. (2010) Modern Control Engineering. 5th Edition (Capítulo: Projeto de Sistemas de Controle pelo Método do Lugar das Raízes).

Pelas especificações de projeto, temos uma sobreelevação $\mathrm{MP} \leq 5\%$ e tempo de estabelecimento $t_s \leq 0.5s$. Utilizando as equações abaixo, é possível calcular os valores de amortecimento ζ e frequência natural ω_n que cumprem as especificações desejadas.

Usando como modelo a equação padrão de um sistema de segunda ordem $T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(\mathrm{MP})}{\pi^2 + \ln^2(\mathrm{MP})}} = \sqrt{\frac{\ln^2(0.05)}{\pi^2 + \ln^2(0.05)}} = 0,69$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.69 * 0.5} = 11.59$$



Pela imagem acima, podemos extrair que um polo pode ser representado da seguinte forma:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (1)$$

Dessa forma, os polos desejados para o nosso sistema podem ser encontrados ao substituírmos os valores de ζ e ω_n que satisfazem as especificações de projeto requeridas na equação (1), logo:

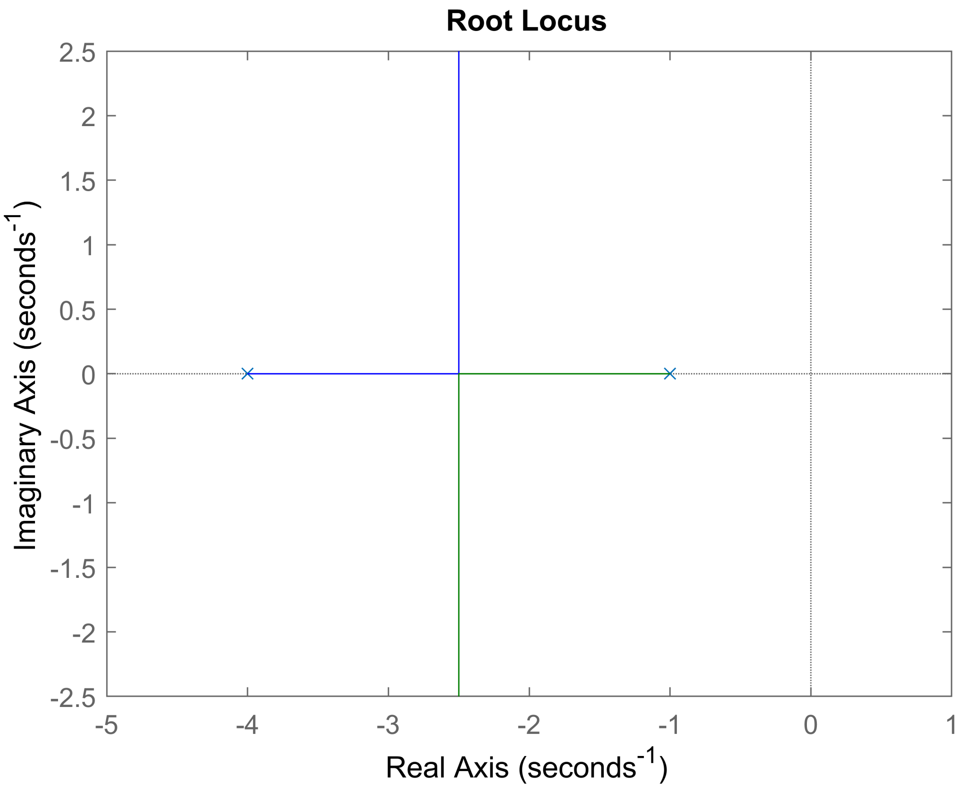
$$s_{1,2} = -(0.69 * 11.59) \pm j(11.59)\left(\sqrt{1 - 0.69^2}\right)$$

$$s_{1,2} = -8 \pm j8.4$$

Os polos $s_{1,2}$ encontrados são os valores de polos próximos do ideal para se atingir todas as especificações, porém é necessário que esses polos estejam no lugar das raízes. Para que isso seja garantido, é preciso cumprir os critérios de ângulo e magnitude do lugar raízes.

Segue abaixo o lugar das raízes para o sistema em malha fechada sem controlador. É possível perceber que os polos desejados ($s_{1,2} = -8 \pm j8.4$) não estão contidos nesse lugar das raízes.

```
G = tf(2, [1 5 4]);
figure()
rlocus(G)
```



Dessa forma, é necessário introduzir um controlador no sistema para que os polos desejados estejam contidos no lugar das raízes. (O controlador, ao introduzir um zero, desloca o lugar das raízes).

O lugar das raízes com a inserção de um controlador é obtido analisando os polos da função de transferência em malha fechada, ou seja, analisando as raízes da equação $1 + C(s)G(s) = 0$.

Utilizando um controlador C(s) na forma $C(s) = K_d\left(s + \frac{K_p}{K_d}\right)$

e desenvolvendo a equação, temos:

$$1 + \frac{2k_d\left(s + \frac{k_p}{k_d}\right)}{(s+1)(s+4)} = 0$$

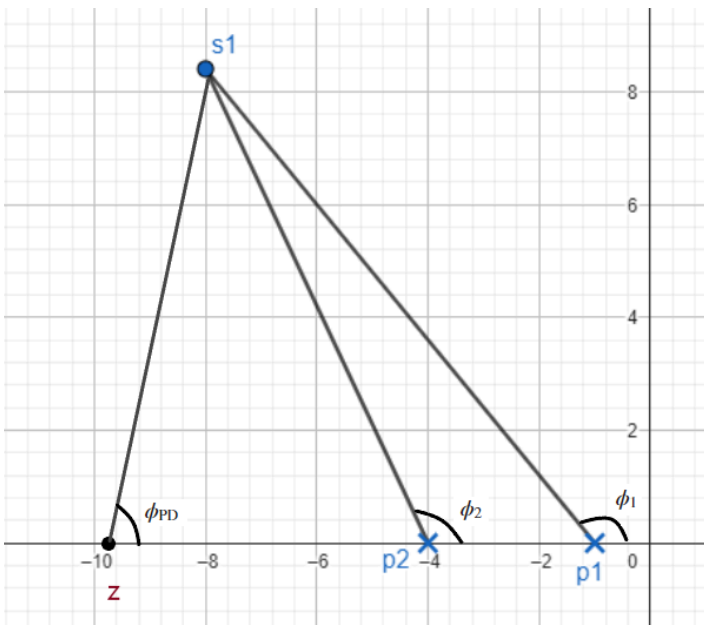
Seja

$$L(s) = \frac{2k_d\left(s + \frac{k_p}{k_d}\right)}{(s+1)(s+4)}$$

Note que $L(s) = -1$.

OBS: utilizaremos o polo $s = -8 + j8.4$ na análise a seguir.

Critério de ângulo: Para que o critério de ângulo seja cumprido, é preciso que o ângulo de L(s) seja igual à $\pm 180(2k+1)$. Dessa forma, encontra-se um valor de ângulo ϕ_{PD} do zero adicionado pelo controlador PD ($-\frac{K_p}{K_d}$) que realize a compensação de fase necessária para que os polos desejados estejam no lugar das raízes.



Pelo critério de ângulo, $\arg(L(s)) = -180°$

$$\phi_{pd} - \phi_2 - \phi_1 = -180°$$

$$\phi_1 = 180 - \text{arctg}\left(\frac{8.4}{8-1}\right) = 129.8^o$$

$$\phi_2 = 180 - \text{arctg}\left(\frac{8.4}{8-4}\right) = 115.46^o$$

Então,

$$\phi_{pd} = -180° + \phi_2 + \phi_1 = 65.26^o$$

mas $\phi_{pd} = \text{arctg}\left(\frac{8.4}{z_{pd}-8}\right) \Rightarrow \frac{8.4}{z_{pd}-8} = \text{tg}(65.26) \Rightarrow z_{pd} = 11.87$

Portanto, $\frac{K_p}{K_d} = 11.87$ e $C(s) = k_d(s + 11.87)$

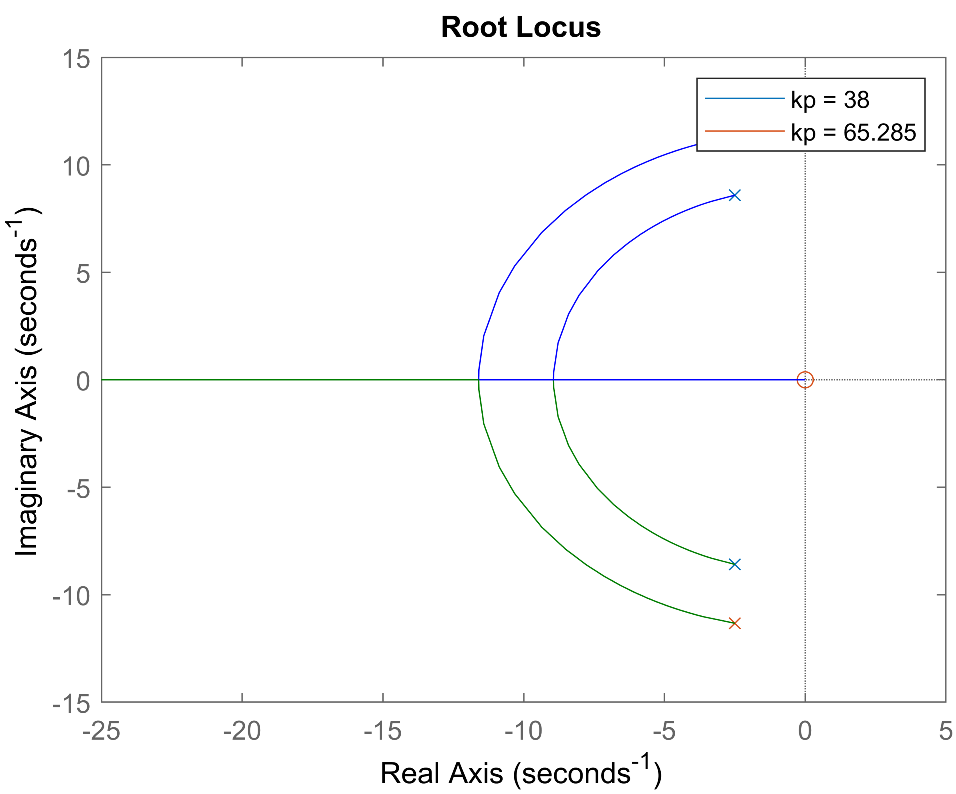
Critério de magnitude:

pelo critério de magnitude, $|L(s)| = 1$

$$\frac{2K_d(s+11.87)}{(s+1)(s+4)} = -1 \Rightarrow K_d = \frac{-0.5(s+1)(s+4)}{s+11.87} = 5.5$$

Assim, temos $K_p = 11.87 * K_d = 11.87 * 5.5 = 65.285$ (Atende ao critério de erro)

```
kp = 65.285;
kdEncontrado = 5.5;
s = tf('s');
figure()
GLRKd38 = s/(s^2+5*s+4+2*38);
rlocus(GLRKd38);
hold on
GLRKd65 = s/(s^2+5*s+4+2*kp);
rlocus(GLRKd65);
legend('kp = 38', 'kp = 65.285')
```



Como visto acima, o Kp encontrado inclui o polo desejado, além de atender o critério de erro.

Fechando a malha, então, temos:

$$\text{FTMF} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{2K_d(s + 11.87)}{s^2 + 16s + 134.6}$$

Pelo modelo escolhido de T(s) e as especificações do projeto, foi encontrado um Kd = 5.5. Mas a função de transferência de malha fechada possui um zero, diferente de T(s). Por isso, o valor encontrado de Kd não é preciso o suficiente para atender as especificações do sistema apesar de servir como um bom ponto de partida para a localização do zero inserido, já que temos especificações de projetos determinadas. Dessa forma, é necessário variar o Kd na FTMF para diminuir a sobrelevação e o tempo de estabelecimento.

Por inspeção (via rltool), Kd > 42 atende a especificação de sobrelevação e tempo de estabelecimento.

Solução 2 (baseada nas notas de aula):

Referências: *Notas de aula e Kuo, B.C. e Golnaraghi, F. (1987) Automatic Control Systems. 5th Edition.*

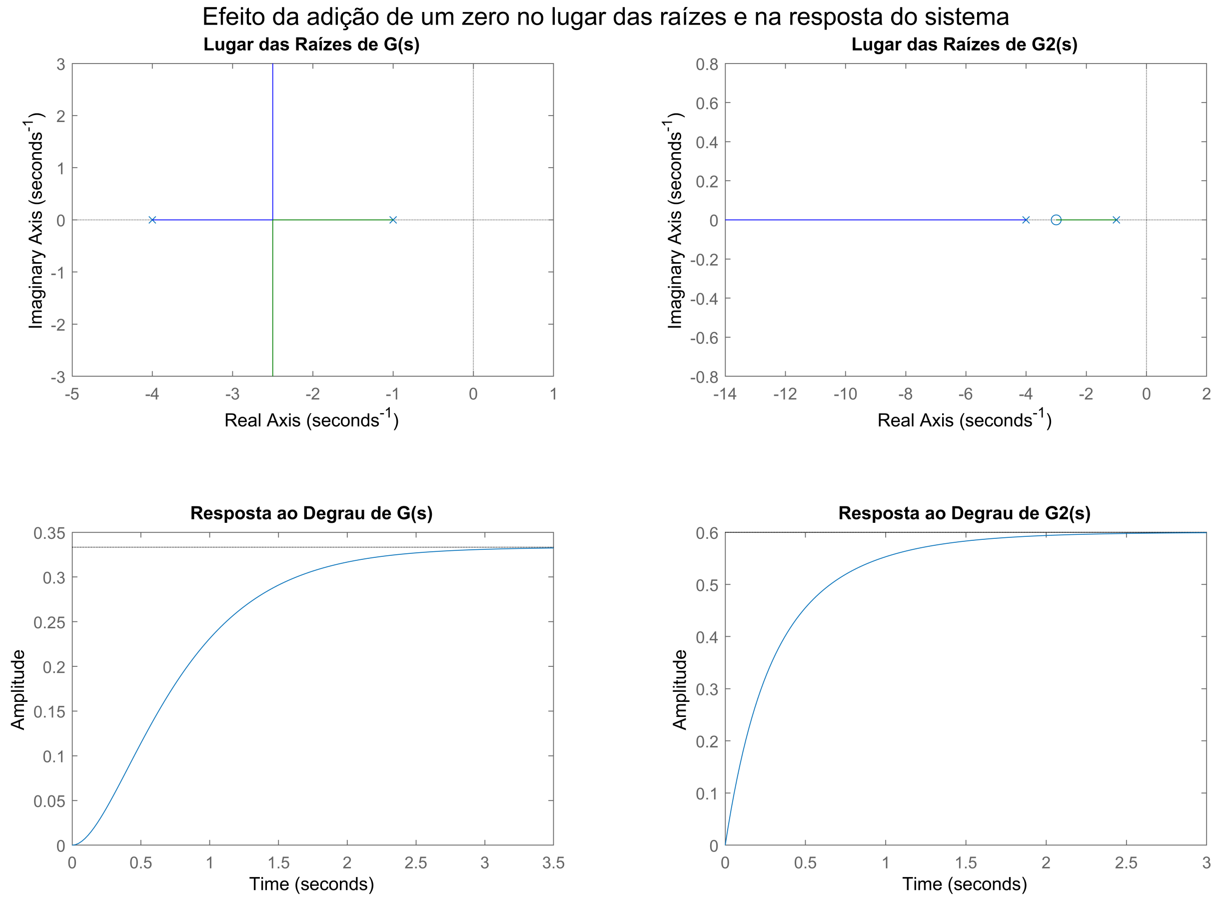
De início, é importante frisar que a adição de pólos ou zeros à função de transferência de malha aberta gera efeitos específicos no lugar das raízes e na resposta do sistema. Ao adicionarmos um pólo (controlador PI), o lugar das raízes é deslocado para a direita, diminuindo a estabilidade do sistema e tornando a resposta mais lenta. Já ao adicionarmos um zero (controlador PD), o lugar das raízes é deslocado para a esquerda do plano complexo, o que torna o sistema mais estável e com uma resposta mais rápida.

É possível perceber este comportamento abaixo, no qual foram plotados os lugares das raízes e as respostas ao degrau da função G(s) e de uma função G2(s) que possui um zero adicionado em G(s).

```
% Criando uma G2(s) que tenha um zero arbitrário adicionado em G(s)
G2 = tf([2 6], [1 5 4]);

figure('Position', [100, 100, 1200, 800]);

% Subplot 1: Lugar das raízes de G(s)
subplot(2,2,1);
rlocus(G);
title('Lugar das Raízes de G(s)');

% Subplot 2: Lugar das raízes de G2(s)
subplot(2,2,2);
rlocus(G2);
title('Lugar das Raízes de G2(s)');

% Subplot 3: Resposta ao degrau de G(s)
subplot(2,2,3);
TFG = feedback(G, 1);
step(TFG);
title('Resposta ao Degrau de G(s)');

% Subplot 4: Resposta ao degrau de G2(s)
subplot(2,2,4);
```

Não é arbitrário, e sim baseado nos polos e zeros que estão no LR

```
TFG2 = feedback(G2, 1);
step(TFG2);
title('Resposta ao Degrau de G2(s)');

% Ajuste para melhor visualização dos subplots
sgtitle('Efeito da adição de um zero no lugar das raízes e na resposta do sistema');
```



Como pode ser visto nos plots acima, a resposta ao degrau de G(s) não cumpre às especificações de projeto (como esperado). Utilizando um controlador PD C(s) na forma $C(s) = K_p + K_d s$, temos

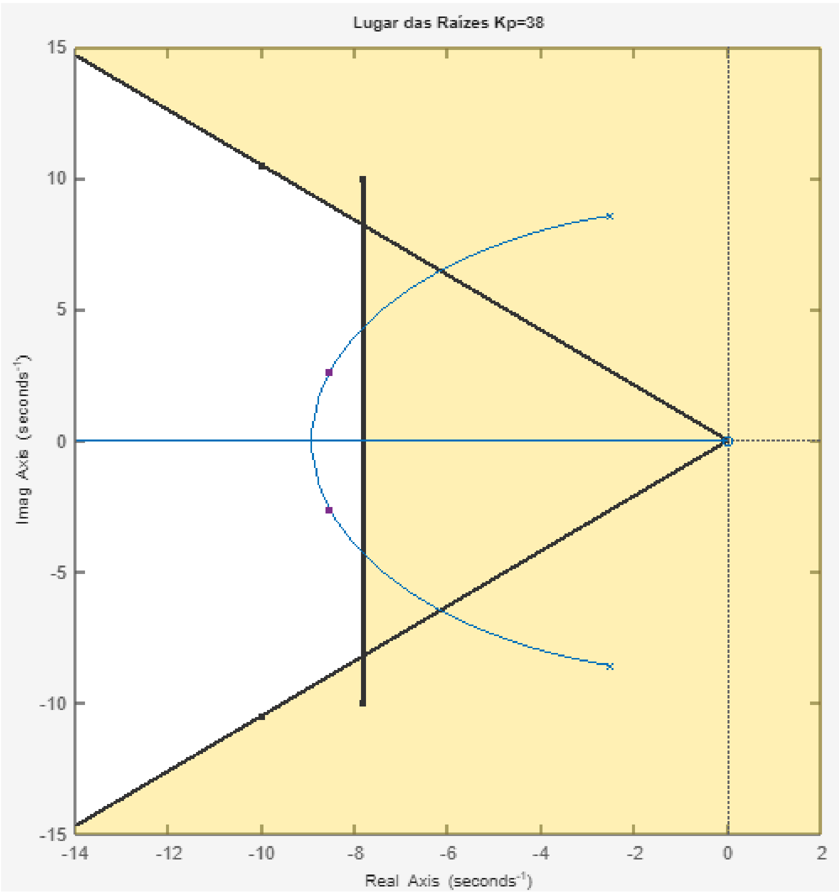
$M(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \dfrac{2(K_p + K_d s)}{s^2 + (5 + 2K_d)s + (4 + 2K_p)}$. Para usar o lugar das raízes é necessário escrever o polinômio característico $s^2 + (5 + 2K_d)s + (4 + 2K_p)$ no formato $1 + K\dfrac{N(s)}{D(s)} = 0$:

$$s^2 + 5s + 4 + 2K_p + 2K_d s = 0$$

$$1 + K_d \frac{2\,s}{s^2 + 5s + 4 + 2K_p} = 0$$

Na questão 1, para cumprir a especificação do erro em regime, foi encontrado $K_p \geq 38$, portanto, para um $K_p = 38$ tem-se: $1 + \frac{2K_d s}{s^2 + 5s + 80} = 0$.

```
kp = 38;
GC = tf([2 0],[1 5 (4+2*kp)]);
%rltool(GC) na janela de comando
```



Por inspeção no rltool, tem-se que os polos para valores de $5.22 \leq K_d \leq 6.5$ atendem às especificações de projeto (fora da área amarela).

Abaixo têm-se as informações de t_s e MP de respostas ao degrau para $K_p = 38$ e valores variados de K_d dentro do limite estabelecido.

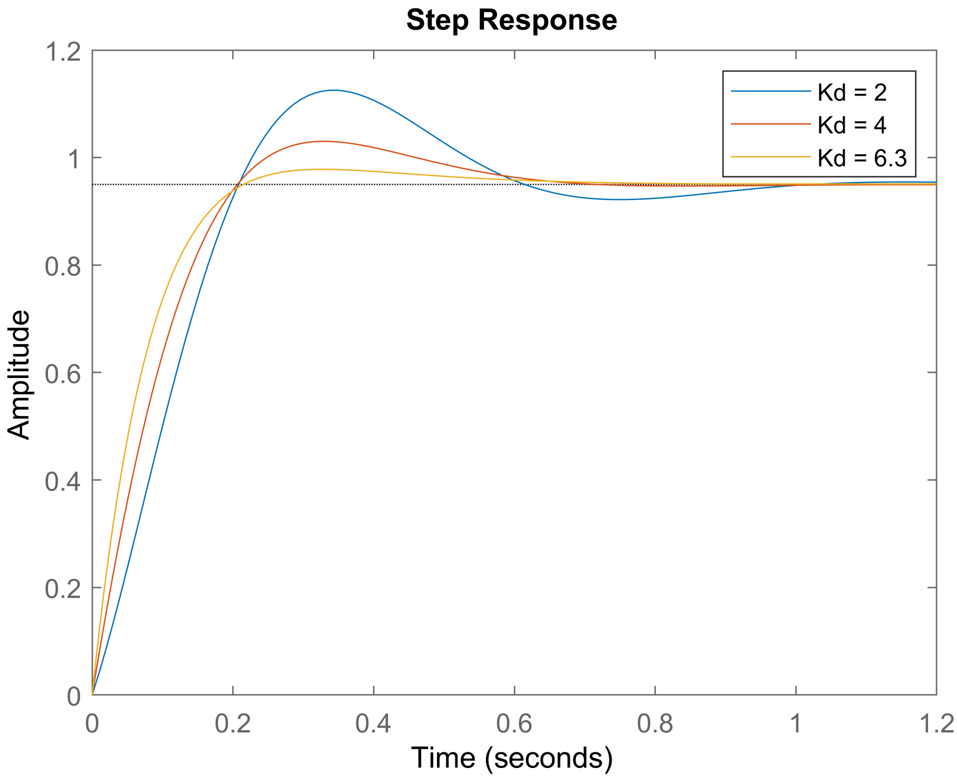
```
kds = [4 5.22 5.7 6.3 6.5];
s = tf('s');

Cteste = cell(1, length(kds));
Mteste = cell(1, length(kds));

for i = 1:length(kds)
    kdteste = kds(i);
```

```
    Cteste{i} = (38 + kdteste * s);
    Mteste{i} = feedback(Cteste{i} * G, 1);
    stepinf = stepinfo(Mteste{i});
    fprintf('---------- kd = %.2f ----------\n', kdteste)
    fprintf('Overshoot = %.2f\n', stepinf.Overshoot);
    fprintf('ts = %.2f\n', stepinf.SettlingTime);
end
```

```
---------- kd = 4.00 ----------
Overshoot = 8.44
ts = 0.57
---------- kd = 5.22 ----------
Overshoot = 5.02
ts = 0.53
---------- kd = 5.70 ----------
Overshoot = 4.02
ts = 0.51
---------- kd = 6.30 ----------
Overshoot = 2.97
ts = 0.46
---------- kd = 6.50 ----------
Overshoot = 2.66
ts = 0.44
```

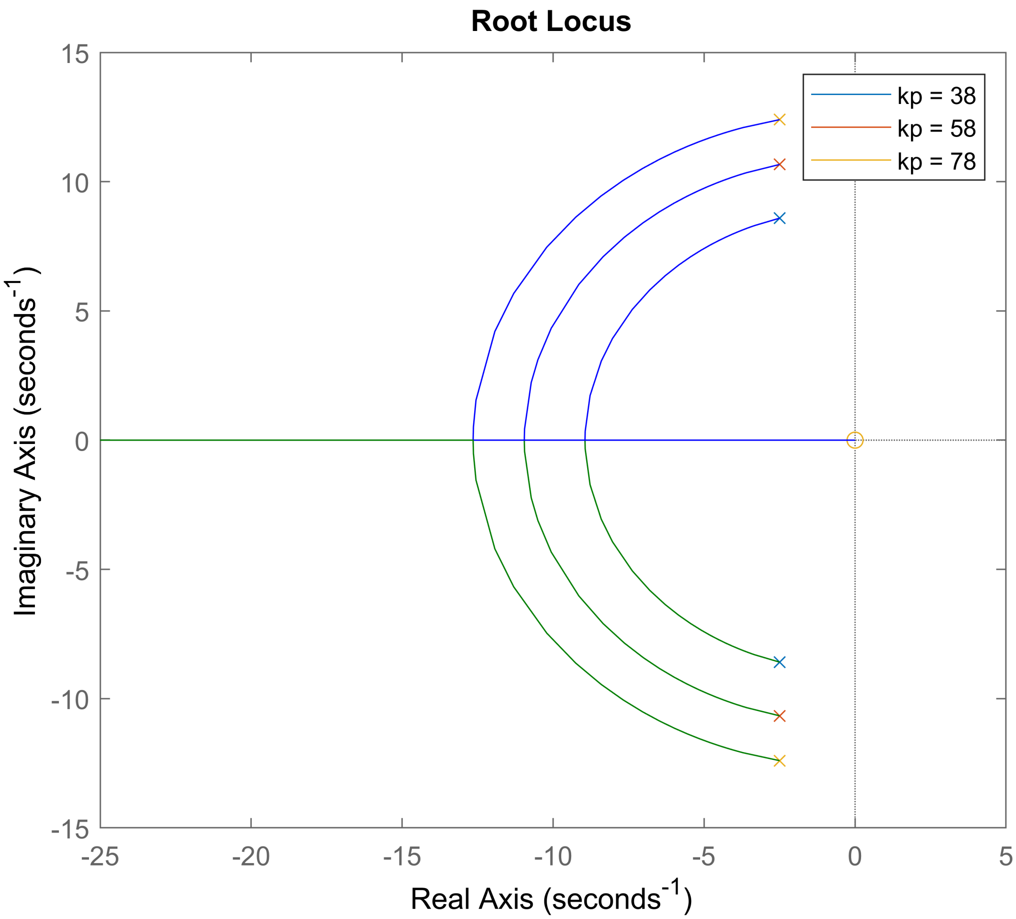
Alguns valores de K_d acima atenderam às especificações. Abaixo foi plotada a resposta ao degrau para os valores de $K_d = 2, K_d = 4$ e $K_d = 6.3$. Os dois primeiros valores não atendem às especificações, como esperado.

```
kd = [2 4 6.3];
figure()
for i=1:length(kd)
    C = (38 + kd(i)*s);
    TF1 = feedback(C*G, 1);
    step(TF1)
    hold on
    legendInfo{i} = ['Kd = ' num2str(kd(i))];
end
legend(legendInfo);
```



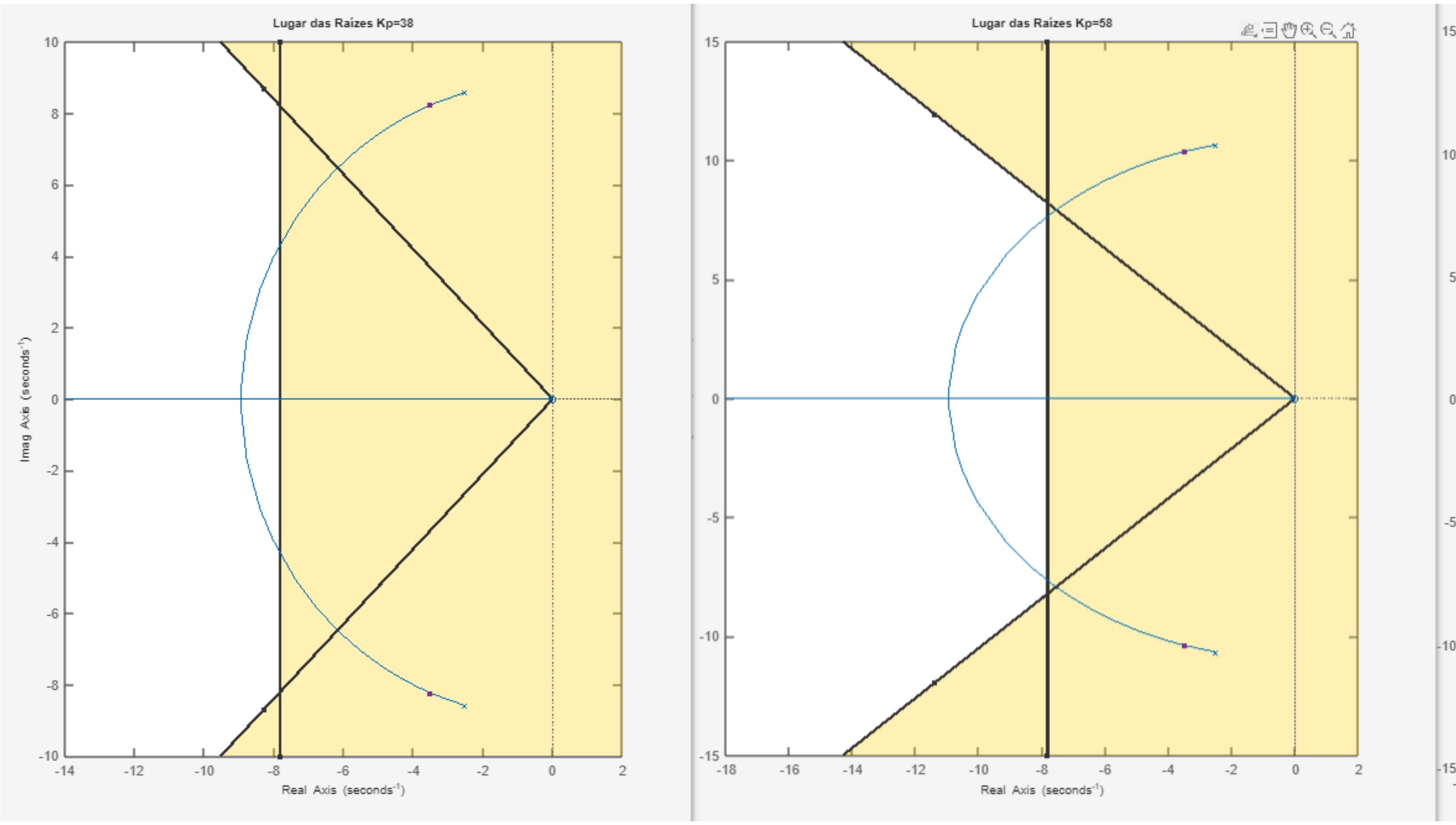
Abaixo tem-se o plot dos lugares das raízes para diferentes valores de K_p. Com o aumento de K_p o lugar das raízes fica cada vez mais à esquerda, aumentando o range de valores de K_d que atendem as especificações.

```
kps = [38 58 78];
figure('Position', [100, 100, 600, 500]);
for i = 1:length(kps)
    kp = kps(i);
    GCkp = tf([1 0],[1 5 (4+2*kp)]);
    rlocus(GCkp);
    hold on;
    legendInfo{i} = ['kp = ' num2str(kp)];
end
legend(legendInfo);
```



Abaixo, têm-se os Lugares das Raízes para os valores de $K_p = 38,\ K_p = 58\ e\ K_p = 78$.

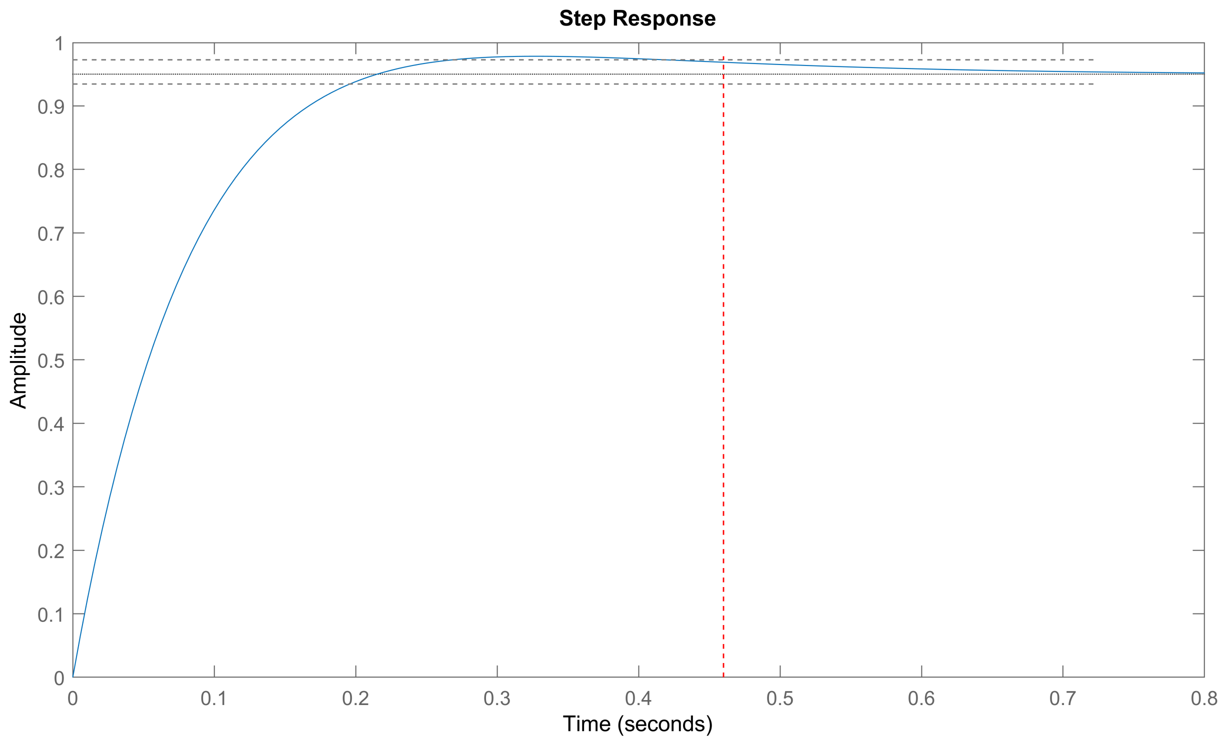
```
kp2 = 78; %Varia-se o Kp2 para gerar os diferentes LRs
GC2 = tf([2 0],[1 5 (4+2*kp2)]);
%rltool(GC2) na janela de comando
```



3) Plote a resposta ao degrau para C(s) atendendo as especificações.

Como foi mostrado na seção acima, para $K_p = 38$ e $K_d = 6.3$ as exigências do projeto foram cumpridas. Logo:

```
kd = 6.3;
kp = 38;
figure('Position', [100, 100, 1000, 550])

C = kp + kd*s;
TF = feedback(C*G, 1);
step(TF)
hold on;
[y, t] = step(TF);
ref = y(end);
cp = 0.02 * ref;
plot([t(1), t(end)], [ref + cp, ref + cp], '--','Color', [0.5, 0.5, 0.5], 'LineWidth', 0.7, 'Ma
plot([t(1), t(end)], [ref - cp, ref - cp], '--','Color', [0.5, 0.5, 0.5], 'LineWidth', 0.7, 'Ma

line([0.46, 0.46], [min(y), max(y)], 'Color', 'r', 'LineStyle', '--', 'LineWidth', 0.7, 'Marker

hold off;
```


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1