Sistemas Realimentados

EP1 - Modelos e suas respostas

Nome de quem fez o exercício: Caio Fiorotti e Matheus Schreiber

Função de transferência G1:

Partindo da definição da função de transferência G_1, temos que:

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Para obter a resposta de G_1 ao degrau unitário, utilizamos a relação entre a entrada U, a saída Y e a função de transferência :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \Longrightarrow Y(s) = G_1(s) \cdot U(s) = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot U(s)$$

Considerando a entrada como degrau unitario, sabe-se que:

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s}$$

Aplicando na função de transferência:

$$Y(s) = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{1}{s}$$

Aplicando o Teorema do Valor Final obtem-se:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}} = K$$

$$y(\infty) = K$$

Além disso, é possível reformular a equação de $Y(s)$ da seguinte forma:

$$Y(s) = K \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right)$$

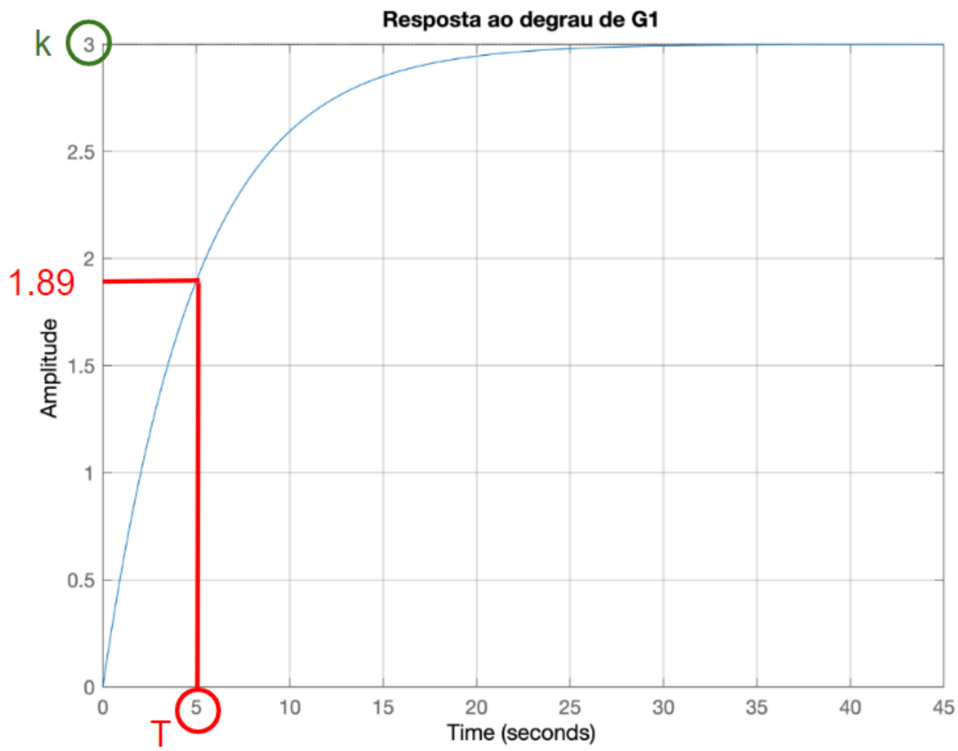
Aplicando a transformada inversa de Laplace em $Y(s)$, temos que:

$y(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, sendo K o **ganho** e τ a **constante de tempo**

Dessa forma, K é o valor da saída em regime estacionário e τ é o tempo que a saída demora para atingir $\approx 63\%$ de K, já que:

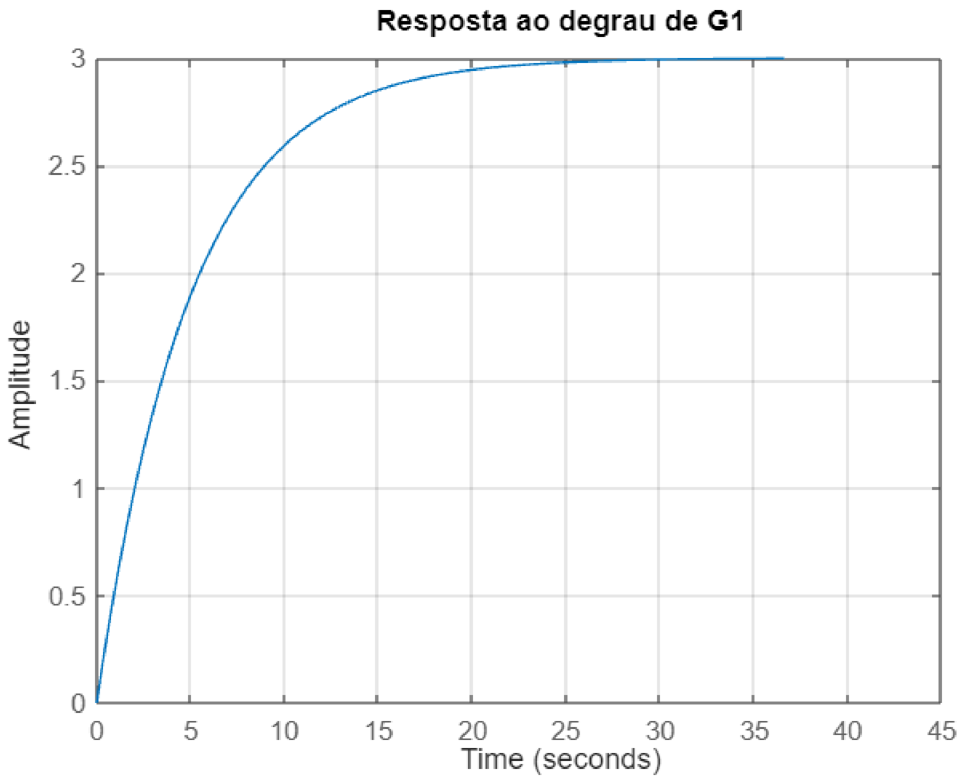
$$y(\tau) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = K \cdot (1 - e^{-1}) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.6321205588 \cdot K$$

A partir dessa visão, pode-se buscar os parâmetros do modelo fazendo as análises no gráfico da resposta ao degrau como mostrado na figura abaixo.



Portanto, $K = 3$ de amplitude e $\tau = 5$ segundos. Agora basta simular G_1 ao degrau e comparar os dois gráficos, como segue.

```
G1 = tf(3, [5 1]); % Definindo a função de transferência G1 com os parâmetros
calculados
figure;
step(G1);          % Aplicando o degrau unitário em G1
xlim([0 45]);      % Limitando o eixo x do gráfico de 0 a 45
grid on;
title("Resposta ao degrau de G1");
```



Função de transferência G2:

Para a função de transferência G_2 pode-se utilizar um raciocínio semelhante ao apresentado para G_1, diferindo apenas na presença de um tempo morto no sistema, representado pelo termo e^{-ds} na equação modelo, que pode ser visualizada abaixo:

$G_2(s) = \dfrac{K \cdot e^{-ds}}{\tau \cdot s + 1}$, em que d é o tempo de atraso do sistema.

Dessa forma, observa-se o seguinte resultado para a resposta ao degrau:

$$Y(s) = \frac{K \cdot e^{-ds}}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

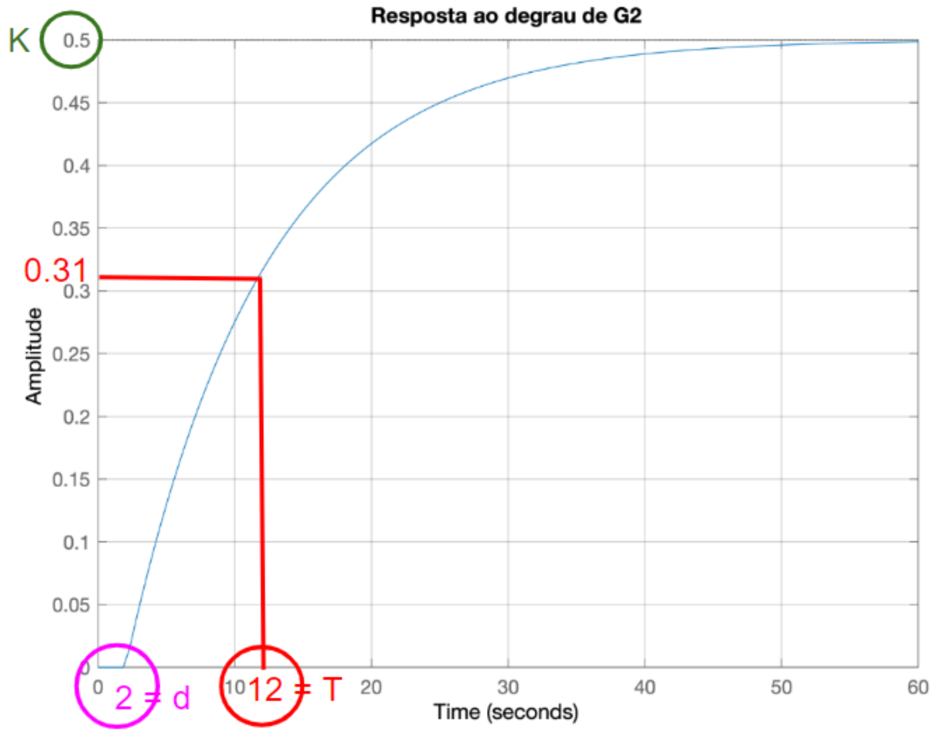
Aplicando o Teorema do Valor Final obtem-se:

$$\lim_{x \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{K \cdot e^{-ds}}{\tau \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(\infty) = K$$

Assim, observa-se que o K corresponde numericamente ao valor em regime da resposta ao degrau.

Em sequencia, pode-se partir para a análise do grafico da resposta, assim como mostra a figura abaixo:



Pode-se observar que o valor da resposta em regime equivale à $0,5$, ou seja, $K = 0,5$.

Com isso, de maneira semelhante ao exercicio anterior, tem-se que τ é o tempo que a saída demora para atingir $\approx 63\%$ de K, o que equivale ao instante onde a saida vale aproximadamente 0.315, ou seja, o instante de 12 segundos. Porém, neste caso, é necessário descontar o 'tempo morto' oriundo do atraso discutido anteriormente, que, por sua vez, equivale aproximadamente à 2 segundos, ou seja:

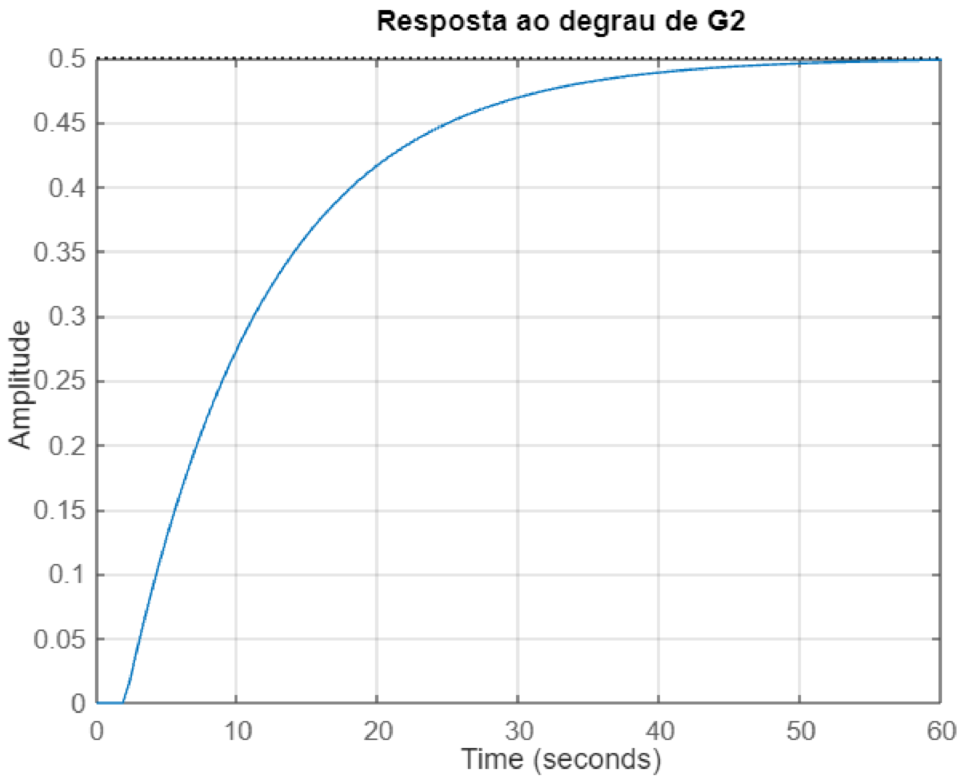
$$\tau = 12 - 2 \Rightarrow \tau = 10 \text{ seg}$$

Por fim, basta substituir esses valores na funçao discutida anteriormente:

$$G_2(s) = \frac{0,5 \cdot e^{-2s}}{10 \cdot s + 1}$$

Agora basta simular G_2 ao degrau e comparar os dois gráficos, como segue.

```
G2 = tf(0.5, [10 1]); % Definindo a função de transferência G2 com os parâmetros
calculados, sem o atraso
G2 = exp(-2*s) * G2;  % Aplicando o atraso à resposta
figure;
step(G2);             % Aplicando o degrau unitário em G2
xlim([0 60]);         % Limitando o eixo x do gráfico de 0 a 60
grid on;
title("Resposta ao degrau de G2");
```



Função de transferência G3:

Para a função de transferência G_3, sabe-se que:

$$G_3(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + {\omega_n}^2}$$

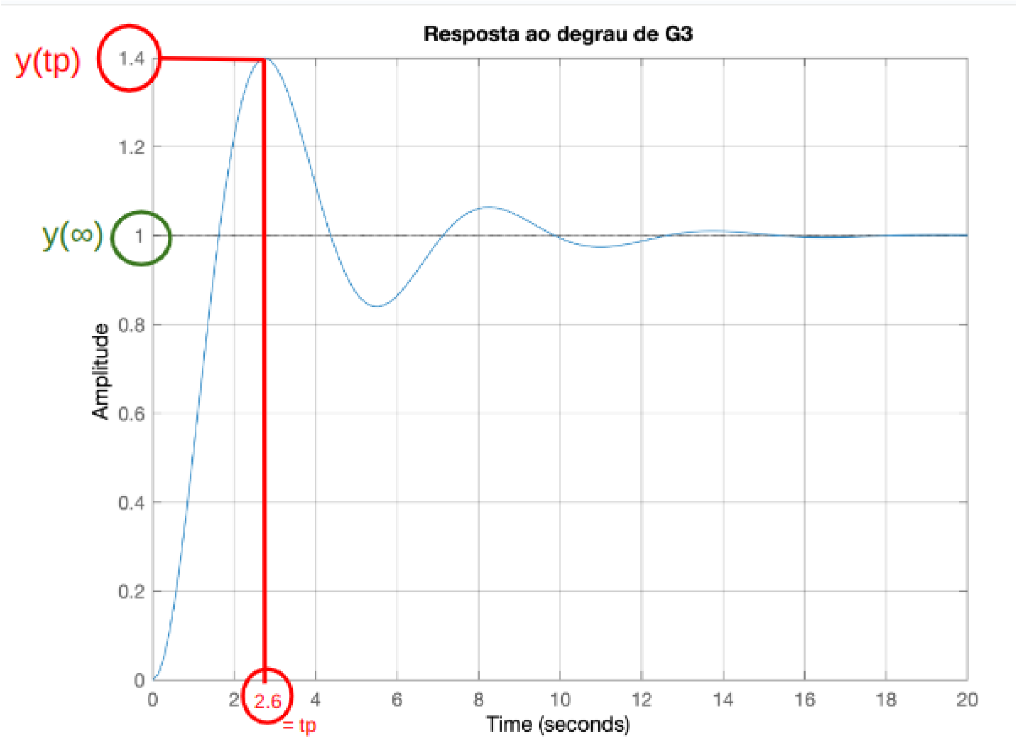
É necessário encontrar os valores de ζ e ω_n, que são respectivamente o **coeficiente de amortecimento** e a **frequência natural de oscilação** do sistema. Para encontrar ζ podemos usar a fórmula:

$\zeta = \dfrac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(M_p)^2}}$, em que M_p é o **máximo de sobreelevação** do sistema.

Podemos calcular M_p da seguinte forma:

$M_p = \dfrac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$, em que t_p é o tempo em que a resposta atinge seu valor máximo (pico).

Pode-se obter o valor de t_p e o da resposta ao degrau em regime permanente, ou seja, $y(\infty)$, por meio da análise do gráfico como mostra a figura a seguir.



Sendo assim:

$$M_p = \frac{1.4 - 1}{1} = 0.4\,(40\%)$$

$$\zeta = \frac{-\ln(0.4)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(0.4)^2}} = 0.2799979933$$

Esse valor de ζ faz sentido, uma vez em que, observando a curva do gráfico, é possível dizer que o sistema é subamortecido ($0 < \zeta < 1$).

Para encontrar ω_n, basta utilizar a fórmula:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} = 1.258650136$$

Portanto, a fórmula de $G_3(s)$ equivale à:

$$G_3(s) = \frac{1.584}{s^2 + 0.704 \cdot s + 1.584}$$

Simulando $G_3(s)$ com o degrau como entrada:

```
G3 = tf(1.584, [1 0.704 1.584]); % Definindo a função de transferência G3 com os parâmetros calculados
figure;
step(G3);                        % Aplicando o degrau unitário em G3
xlim([0 20]);                    % Limitando o eixo x do gráfico de 0 a 20
ylim([0 1.4]);                   % Limitando o eixo y do gráfico de 0 a 1.4
```

```
grid on;
title("Resposta ao degrau de G3");
```