CAP 6
PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

6.1. INTRODUÇÃO

O projeto de sistemas de controle no espaço de estados é baseado nos métodos de alocação de polos e método do regulador quadrático mínimo. O método de alocação de polos é similar ao método do LR, no qual os polos são alocados nas posições desejadas.

A diferença básica é que no projeto pelo LR são alocados apenas os polos dominantes de malha fechada nas posições desejadas, enquanto no projeto de alocação de polos todos os polos de malha fechada são alocados.

6.2. PROJETO POR ALOCAÇÃO DE POLOS

Neste método admite-se que o sistema é **observável** e que **todas as variáveis de estado são mensuráveis e que estão disponíveis para realimentação**.

O método mostra que **se o sistema for de estado completamente controlável** então os polos de malha fechada do sistema poderão ser alocados em qualquer posição desejada por meio de uma realimentação de estados, empregando uma matriz de ganho apropriada.

A realimentação, então, consiste em escolher o sinal de controle como sendo

$$u(t) = -K\vec{x}(t)$$

onde, $K_{1\times n}$ é a matriz de ganho da realimentação de estados.

Nesse modelo, supõe-se apenas uma entrada e uma saída do sistema, ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\vec{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

onde, $u(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, a entrada e a saída escalar.

Diferente de

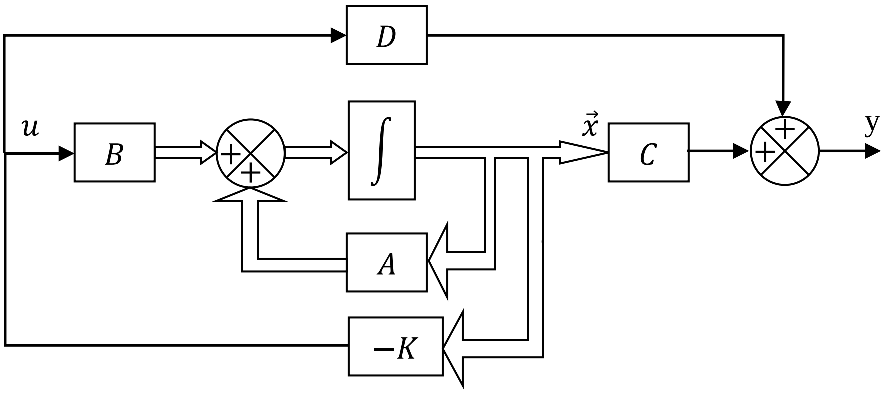
$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) \end{cases}$$

onde, $\vec{u}(t)$ e $\vec{y}(t)$ são, respectivamente, a entrada e a saída vetoriais.

Assim, inserindo a realimentação no sistema, a representação no espaço de estados fica:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = (A - BK)\vec{x}(t) \\ y(t) = (C - DK)\vec{x}(t) \end{cases}$$

A figura abaixo apresenta o diagrama de blocos do sistema realimentado pela matriz de ganho.



A equação característica desse sistema é o determinante abaixo.

$$|sI - A + BK| = 0$$

O problema, então, é determinar a matriz K a partir das restrições impostas pelo sistema.

6.2.1. MÉTODOS PARA A DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE GANHO

Existem três métodos para a determinação da matriz de ganho da realimentação: Método da Matriz de Transformação, Método da Substituição Direta e Método da Fórmula de Ackerman.

6.2.1.1. MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

O método consiste no seguinte procedimento:

1. Verifique se o sistema é de estado completamente controlável. Não sendo, não é possível aplicar o método.
2. Escolha os polos de malha fechada desejados de acordo com as restrições do problema.
   a. Obtenha a equação característica a partir do produto dos polos desejados.
   b. Selecione os coeficientes, α_i, do polinômio da equação característica do sistema desejado conforme o modelo:

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

3. Obtenha os coeficientes, a_i, do polinômio característico do sistema atual, conforme o modelo:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

4. A matriz de ganho da realimentação será:

$$K_{1\times n} = [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} - a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_2 - a_2 \vdots \alpha_1 - a_1]_{1\times n} T_{n\times n}^{-1}$$

   onde, T é a matriz que transforma $A_{n\times n}$ para a forma canônica controlável, ou seja,

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se A já está na forma canônica controlável, então $T = I$.
A ***matriz de transformação*** T é obtida como:

$$T_{n\times n} = M_{n\times n} W_{n\times n}$$

onde, M é a matriz de controlabilidade completa de estados e W é dada abaixo.

$$M_{n\times n} = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$$

$$W_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde, a_i são os coeficientes do polinômio característico do sistema atual.

Exemplo 1 – Considere a planta abaixo. O sistema utiliza controle por realimentação de estado $\vec{u} = -K\vec{x}$. Deseja-se que os polos de malha fechada estejam em $s_1 = -2 + j4$, $s_2 = -2 - j4$ e $s_3 = -10$. Determine a matriz de ganho K de realimentação de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO
Verificação da controlabilidade completa de estados:

$M_{3\times 3} = [B \vdots AB \vdots A^2B]$

$$M_{3\times 3} = \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$M_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

$Det(M_{3\times 3}) = -1$

O posto é 3, portanto, o sistema é de estado completamente controlável.

O polinômio característico desejado é
$(s+2-j4)(s+2+j4)(s+10)=0$
$s^3+14s^2+60s+200=0$
logo: $\alpha_1=14$, $\alpha_2=60$ e $\alpha_3=200$.

O polinômio característico do sistema é
$$|sI-A|=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix}=s^3+6s^2+5s+1=0$$
logo: $a_1=6$, $a_2=5$ e $a_3=1$.

A matriz de ganho da realimentação é
$K=[\alpha_3-a_3 \quad \vdots \quad \alpha_2-a_2 \quad \vdots \quad \alpha_1-a_1]T^{-1}$

Como o sistema foi entregue na forma canônica controlável, então $T=I$
$K=[200-1 \quad \vdots \quad 60-5 \quad \vdots \quad 14-6]I$

$\boxed{K=[199 \quad 55 \quad 8]}$

6.2.1.2. SUBSTITUIÇÃO DIRETA

O método da substituição direta só é vantajoso se o sistema for de ordem baixa ($n \leq 3$). O método consiste no seguinte procedimento:

1. Verifique se o sistema é de estado completamente controlável. Não sendo, não é possível aplicar o método.
2. Escolha os polos de malha fechada desejados de acordo com as restrições do problema.
    a. Obtenha a equação característica desejada a partir do produto dos polos desejados.
3. Defina K como:

$$K=[K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_n]$$

4. Substitua a matriz K no polinômio característico e iguale a equação ao polinômio característico desejado:

$$|sI-A+BK|=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$$

5. Iguale os coeficientes de mesma potência obtendo k_1, k_2, ..., k_n.

Exemplo 2 – Considere a planta do exemplo 1. Determine a matriz de ganho para a realimentação de estados usando o método da substituição direta.

SOLUÇÃO
Como verificado no exemplo 1, o sistema é de estado completamente controlável.

O polinômio característico desejado é
$s^3+14s^2+60s+200=0$
logo: $\alpha_1=14$, $\alpha_2=60$ e $\alpha_3=200$.

Definindo K como:
$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

Substituindo na equação característica
$|sI - A + BK| = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$
$$\left|\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3]\right| = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$
$s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + 1 + k_1 = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$
$6 + k_3 = 14 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_3 = 8}$
$5 + k_2 = 60 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_2 = 55}$
$1 + k_1 = 200 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_1 = 199}$

$\boxed{K = [199 \quad 55 \quad 8]}$

6.2.1.3. FÓRMULA DE ACKERMAN

O método consiste no seguinte procedimento:
1. Verifique se o sistema é de estado completamente controlável. Não sendo, não é possível aplicar o método.
2. Escolha os polos de malha fechada desejados de acordo com as restrições do problema.
    a. Obtenha a equação característica desejada a partir do produto dos polos desejados.
    b. Selecione os coeficientes, α_i, do polinômio da equação característica do sistema desejado conforme o modelo:

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

3. Calcule $\phi(A)$ usando o teorema de Cayley-Hamilton

$$\phi_{n\times n}(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I$$

4. A matriz de ganho K é dada pela fórmula de Ackerman

$$K_{1\times n} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]_{1\times n} M_{n\times n}^{-1} \phi_{n\times n}(A)$$

onde, M é a matriz de controlabilidade completa de estados.

$$M_{n\times n} = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]$$

Exemplo 3 – Considere a planta do exemplo 1. Determine a matriz de ganho para a realimentação de estados usando o método da Fórmula de Ackermann.

SOLUÇÃO
Como verificado no exemplo 1, o sistema é de estado completamente controlável.

O polinômio característico desejado é
$s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0$
logo: $\alpha_1 = 14$, $\alpha_2 = 60$ e $\alpha_3 = 200$.

Cálculo de $\phi(A)$
$\phi(A) = A^3 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_3 I$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 + 60 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & 43 & 117 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz de controlabilidade completa de estados (já calculada no exemplo 1)

$$M_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz de ganho K dada pela fórmula de Ackerman
$K = [0 \quad 0 \quad 1] M^{-1} \phi(A)$

$$K = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & 43 & 117 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K = [199 \quad 55 \quad 8]}$$

6.3. OBSERVADORES DE ESTADO

Muitas vezes, na prática, **nem todas as variáveis de estado estão disponíveis para a realimentação**, mesmo o sistema sendo **observável**. A estimativa dessas variáveis de estado não mensuráveis é denominada ***observação***.

O dispositivo (ou programa) que estima, ou observa, as variáveis de estado é denominado ***observador de estados***.

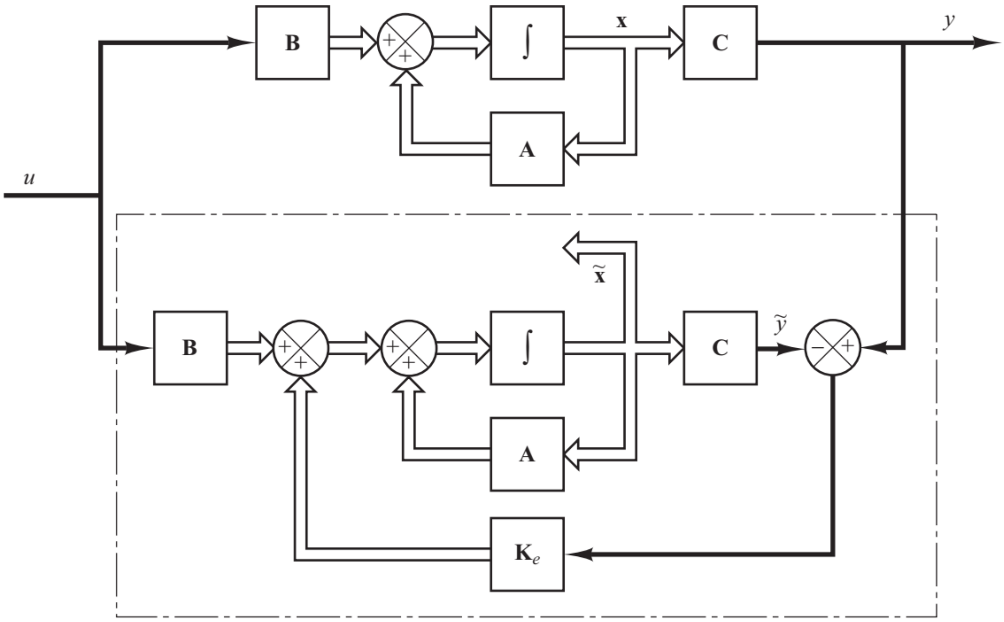
Se o observador de estados observa todas as variáveis de estado, independente delas estarem disponíveis ou não, então ele é denominado ***observador de estado de ordem plena***, senão, é denominado ***observador de estados de ordem reduzida***.

Se a ordem do observador de estados de ordem reduzida for a mínima possível, então ele é denominado ***observador de estados de ordem mínima***.

Observadores de estados **somente podem ser projetados se a condição de observabilidade for satisfeita**.

6.3.1. PROJETO DE OBSERVADORES DE ORDEM PLENA

O projeto de observadores de estado de ordem plena se resume à determinação da matriz de ganho, K_e, do observador. O projeto somente é possível se o sistema for completamente observável.



Observador de estado de ordem plena

Existem 3 métodos distintos para o projeto:
- Matriz de Transformação
- Substituição Direta
- Fórmula de Ackermann Modificada

6.3.1.1. MÉTODOS DE PROJETO

6.3.1.1.1. MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

O método consiste no seguinte procedimento:
1. Verifique se o sistema é de estado completamente observável. Não sendo, não é possível aplicar o método.
2. Escolha os autovalores, μ, (polos) desejados (ou equação característica desejada) de acordo com as restrições do problema. A escolha deve ser tal que o observador de estados responda, pelo menos, duas a cinco vezes mais rápido que o sistema de malha fechado considerado.
    a. Obtenha a equação característica desejada a partir dos autovalores desejados.
    b. Selecione os coeficientes, α_i, do polinômio da equação característica do sistema desejado conforme o modelo:

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

3. Obtenha os coeficientes, a_i, do polinômio característico do sistema atual, conforme o modelo:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

4. A matriz de ganho do observador será:

$$K_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

onde,
$\mathbf{N}^*$ é a transposta conjugada de $\mathbf{N}$, e:

$$\mathbf{N} = [C^* \quad \vdots \quad A^*C^* \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad (A^*)^{n-1}C^*]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OBS: Se o sistema for apresentado na forma canônica observável, então a matriz $(\mathbf{WN}^*)^{-1}$ será igual à matriz identidade, I.

Exemplo 4 – Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 20{,}6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

Utilizando a realimentação por estado observado, tal que

$$u = -K\tilde{x}$$

Projete um observador de ordem plena, usando o método da matriz de transformação, com os autovalores desejados da matriz do observador iguais a

$$\mu_1 = -10, \qquad \mu_2 = -10$$

SOLUÇÃO

O sistema dado já está na forma canônica observável, logo, ele é de estado completamente observável.

A equação característica desejada é obtida dos autovalores (que são os polos ou raízes da equação característica). Assim,

$E_c(s) = (s+10)^2 = s^2 + 20s + 100 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$

$\therefore \boxed{\alpha_1 = 20}, \quad \boxed{\alpha_2 = 100}$

Os coeficientes do polinômio característico do sistema atual são dados por:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -20{,}6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20{,}6 = s^2 + a_1 s + a_2$$

$\therefore \boxed{a_1 = 0}, \quad \boxed{a_2 = -20{,}6}$

Então, a matriz de ganho será:

$$K_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Como o sistema está na forma canônica observável, então a transformação $(\mathbf{WN}^*)^{-1}$ será a matriz identidade[1], I.

$$K_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 - (-20{,}6) \\ 20 - 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K_e = \begin{bmatrix} 120{,}6 \\ 20 \end{bmatrix}}$$

6.3.1.1.2. SUBSTITUIÇÃO DIRETA

O método consiste no seguinte procedimento:

1. Verifique se o sistema é de estado completamente observável. Não sendo, não é possível aplicar o método.
2. Escolha os autovalores, μ, (polos) desejados (ou equação característica desejada) de acordo com as restrições do problema. A escolha deve ser tal que o observador de estados responda, pelo menos, duas a cinco vezes mais rápido que o sistema de malha fechado considerado.
   a) Obtenha a equação característica desejada a partir dos autovalores desejados.
   b) Selecione os coeficientes, α_i, do polinômio da equação característica do sistema desejado conforme o modelo:

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

3. A matriz de ganho do observador será:

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ \vdots \\ k_{en} \end{bmatrix}$$

4. Substitua a matriz K_e no polinômio característico e iguale a equação ao polinômio característico desejado:

$$|sI - A + K_e C| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

5. Iguale os coeficientes de mesma potência obtendo k_{e1}, k_{e2}, ..., k_{en}.

---

[1] Verificando $(\mathbf{WN}^*)^{-1} = I$:

$(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times [C^* \;\vdots\; A^* C^*]^*\right)^{-1}$

$(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\vdots\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]^*\right)^{-1}$

$(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^*\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Exemplo 5 – Considere o sistema do exemplo 4 e utilize o método da substituição direta para obter a matriz de ganho do observador.

SOLUÇÃO
O sistema dado já está na forma canônica observável, logo, ele é de estado completamente observável.

A equação característica desejada é obtida dos autovalores (que são os polos ou raízes da equação característica). Assim,
$E_c(s) = (s+10)^2 = s^2 + 20s + 100 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$
$\therefore \boxed{\alpha_1 = 20}, \quad \boxed{\alpha_2 = 100}$

Então, a matriz de ganho será:
$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix}$

Resolvendo a equação,
$|sI - A + K_e C| = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$
$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20{,}6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} [0 \quad 1] \right| = s^2 + 20s + 100$
$\left| \begin{bmatrix} s & -20{,}6 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_{e1} \\ 0 & k_{e2} \end{bmatrix} \right| = s^2 + 20s + 100$
$\left| \begin{bmatrix} s & k_{e1} - 20{,}6 \\ -1 & s + k_{e2} \end{bmatrix} \right| = s^2 + 20s + 100$
$s^2 + k_{e2} s - (-k_{e1} + 20{,}6) = s^2 + 20s + 100$
$\therefore$
$\boxed{K_e = \begin{bmatrix} 120{,}6 \\ 20 \end{bmatrix}}$

6.3.1.1.3. FÓRMULA DE ACKERMAN

O método consiste no seguinte procedimento:

1. Verifique se o sistema é de estado completamente observável. Não sendo, não é possível aplicar o método.
2. Escolha os autovalores, μ, (polos) desejados (ou equação característica desejada) de acordo com as restrições do problema. A escolha deve ser tal que o observador de estados responda, pelo menos, duas a cinco vezes mais rápido que o sistema de malha fechado considerado.
   a) Obtenha a equação característica desejada a partir dos autovalores desejados.
   b) Selecione os coeficientes, α_i, do polinômio da equação característica do sistema desejado conforme o modelo:

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

3. Calcule $\phi(A)$ usando o teorema de Cayley-Hamilton

$$\phi_{n\times n}(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I$$

4. A matriz de ganho K_e é dada pela fórmula de Ackerman modificada,

$$K_e = \phi_{n\times n}(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6 – Considere o sistema do exemplo 4 e utilize o método da fórmula de Ackermann para obter a matriz de ganho do observador.

SOLUÇÃO
O sistema dado já está na forma canônica observável, logo, ele é de estado completamente observável.

A equação característica desejada é obtida dos autovalores (que são os polos ou raízes da equação característica). Assim,
$E_c(s) = (s+10)^2 = s^2 + 20s + 100 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$
$\therefore \boxed{\alpha_1 = 20}$, $\boxed{\alpha_2 = 100}$

Usando o teorema de Cayley-Hamilton,

$\phi_{n\times n}(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I$

$\boxed{\phi_{2\times 2}(A) = A^2 + 20A + 100I}$

Então, a matriz de ganho será:

$$K_e = \phi_{n\times n}(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi_{2\times 2}(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (A^2 + 20A + 100I)\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \left(\begin{bmatrix} 0 & 20{,}6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + 20\begin{bmatrix} 0 & 20{,}6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} [0 \quad 1] \\ [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 20{,}6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \left(\begin{bmatrix} 20{,}6 & 0 \\ 0 & 20{,}6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 412 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

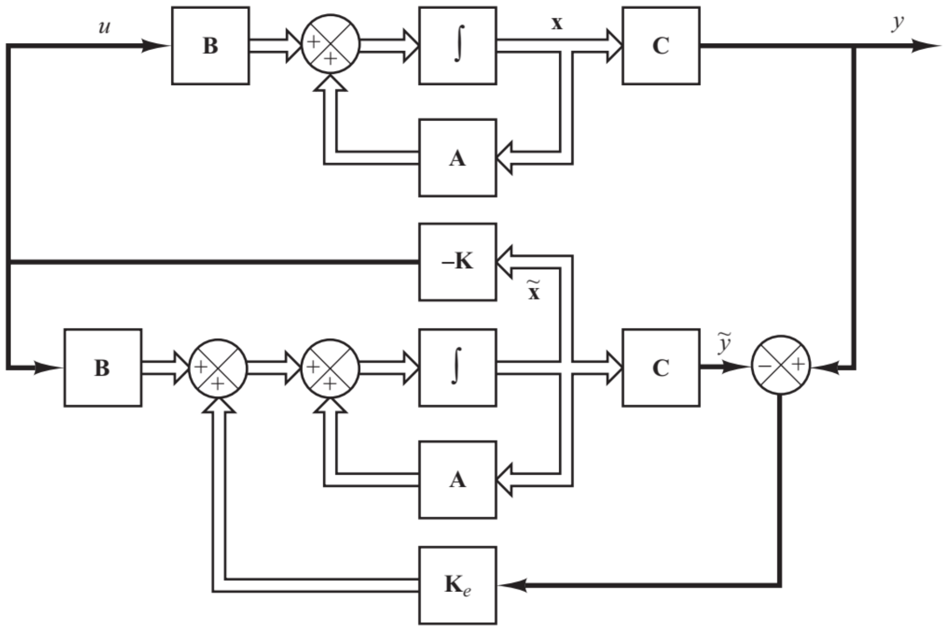
$$K_e = \left(\begin{bmatrix} 120{,}6 & 412 \\ 20 & 120{,}6 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$\boxed{K_e = \begin{bmatrix} 120{,}6 \\ 20 \end{bmatrix}}$$

6.3.1.2. ADIÇÃO DE OBSERVADOR EM UM SISTEMA DE MALHA FECHADA

No processo de projeto por alocação de polos, se supõe que o estado real $\boldsymbol{x}(t)$ está disponível para fins de realimentação, contudo, na prática, o estado real $\boldsymbol{x}(t)$ pode não ser mensurável, de modo que seja preciso projetar um observador de ordem plena e utilizar o estado observado $\widetilde{\boldsymbol{x}}(t)$ na realimentação para alocação de polos.



O projeto de malha fechada do sistema de controle realimentado por estado observado consiste em usar os polos decorrentes do projeto por alocação de polos e os polos decorrentes do projeto isolado do observador. Isso significa que o projeto da alocação de polos e o projeto do observador são independentes entre si. Eles podem ser conduzidos separadamente e combinados para formar o sistema de controle realimentado por estado observado.

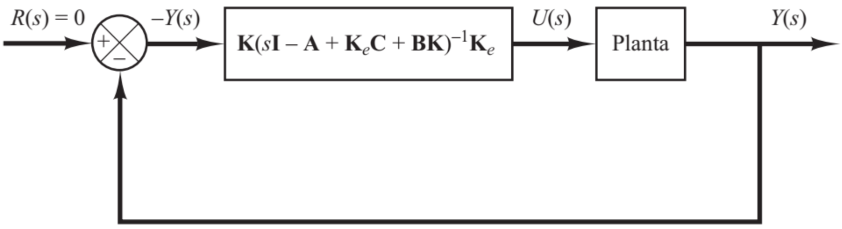
Assim, as equações no espaço de estados realimentado do observador de estados de ordem plena são,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - K_e C - BK)\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) + K_e y(t)$$
$$u = -K\widetilde{\boldsymbol{x}}$$

A função de transferência pode ser obtida a partir da transforada de Laplace das duas equações acima,

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e$$

Esta função de transferência age como um controlador no sistema, por isso, é denominada de **função de transferência do controlador-observador**.



Exemplo 7 – Considere o projeto de um sistema regulador para a seguinte planta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deseja-se que os polos de malha fechada deste sistema estejam em $s = -1{,}8 \pm j2{,}4$ e que os polos do observador estejam em $\mu_1 = \mu_2 = -8$.

Assim, pede-se:

a) Obtenha as matrizes de ganho por alocação de polos e do observador.
b) Desenhe um diagrama de blocos para o sistema de controle realimentado por meio do estado observado.
c) Obtenha a função de transferência $U(s)/-Y(s)$ do controlador-observador.
d) Desenhe o diagrama de blocos com a função de transferência do controlador-observador.
e) Usando o Matlab, obtenha a resposta do sistema para as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e(0) = x(0) - \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

a) Usando, por exemplo, a matriz de transformação para obtenção da matriz de ganho pelo método de alocação de polos,

O sistema está na forma canônica controlável, portanto, o sistema é de estado completamente controlável.

O polinômio característico desejado é

$(s + 1{,}8 + j2{,}4\,)(s + 1{,}8 - j2{,}4) = 0$

$s^2 + 3{,}6s + 9 = 0$

logo: $\alpha_1 = 3{,}6$ e $\alpha_2 = 9$

O polinômio característico do sistema é

$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20{,}6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20{,}6$

logo: $a_1 = 0$ e $a_2 = -20{,}6$

A matriz de ganho da realimentação é

$K = [\alpha_2 - a_2 \quad \vdots \quad \alpha_1 - a_1]T^{-1}$

Como o sistema foi entregue na forma canônica controlável, então $T = I$
$K = [9 - (-20{,}6) \quad \vdots \quad 3{,}6 - 0]I$

$$\boxed{K = [29{,}6 \quad 3{,}6]}$$

Para o observador de estados é preciso verificar se o sistema é observável. Assim,

$$MOE = \begin{bmatrix} C \\ - \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \\ - \\ [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz MOE tem posto $= 2$, logo, o sistema é observável.

O polinômio característico desejado do observador é,
$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 8)^2 = s^2 + 16s + 64 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$

Logo,
$\boxed{\alpha_1 = 16}$, $\boxed{\alpha_2 = 64}$

Usando a fórmula de Ackermann modificada:
Aplicando o teorema de Cayley-Hamilton,

$$\phi_{n\times n}(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I$$

$$\boxed{\phi_{2\times 2}(A) = A^2 + 16A + 64I}$$

Então, a matriz de ganho será:

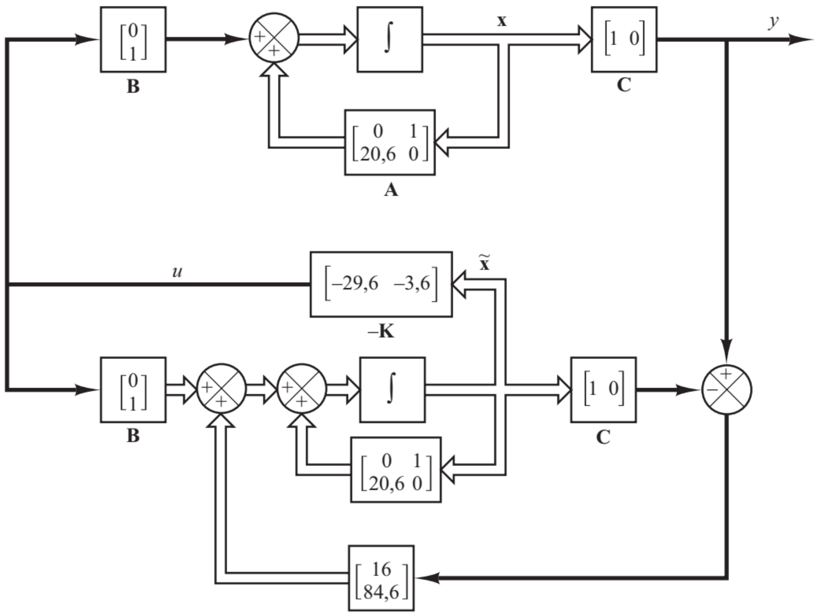
$$K_e = \phi_{n\times n}(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi_{2\times 2}(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (A^2 + 20A + 100I)\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{bmatrix}^2 + 16\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{bmatrix} + 64\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} [1 \quad 0] \\ [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \left(\begin{bmatrix} 84{,}6 & 16 \\ 329{,}6 & 84{,}6 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K_e = \begin{bmatrix} 16 \\ 84{,}6 \end{bmatrix}}$$

b) Diagrama de blocos



c) Função de Transferência

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - A + K_eC + BK)^{-1}K_e$$

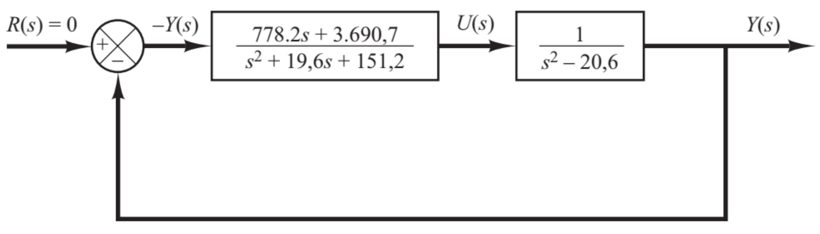
$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = [29,6 \quad 3,6]\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}[1 \quad 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[29,6 \quad 3,6]\right)^{-1}\begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = [29,6 \quad 3,6]\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 114,2 & 3,6 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = [29,6 \quad 3,6]\left(\begin{bmatrix} s+16 & -1 \\ 93,6 & s+3,6 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{778,2s + 3.690,7}{s^2 + 19,6s + 151,2}}$$

d) Diagrama de blocos do controlador-observador



e) Usando o Matlab para obter a resposta do sistema às condições iniciais dadas.

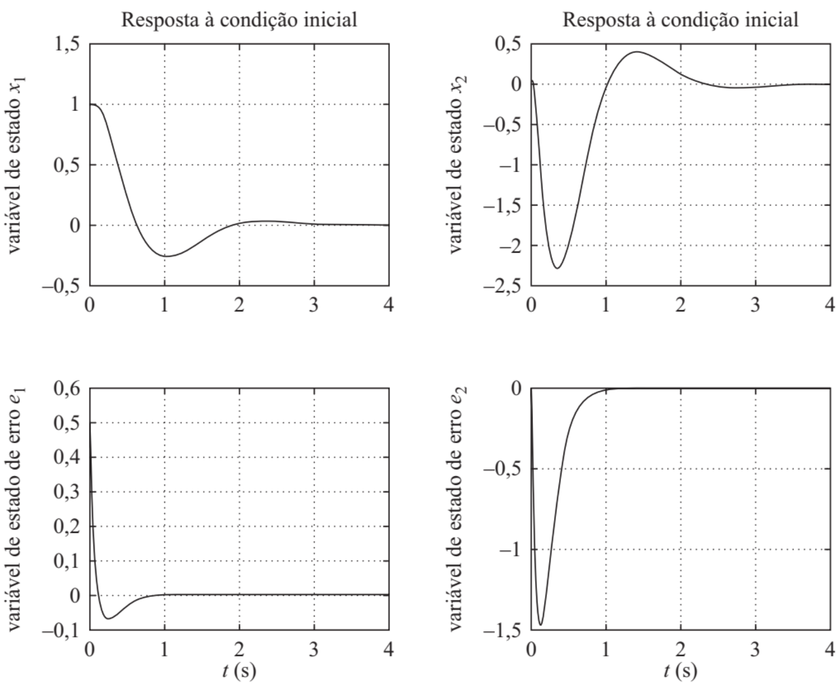
A resposta do sistema pode ser obtida por:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{e}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x(0)\\ e(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0{,}5\\ 0\end{bmatrix}$$

Em Matlab:

```
A = [0 1; 20.6 0];
B = [0;1];
C = [1 0];
K = [29.6 3.6];
Ke = [16; 84.6];
sys = ss([A-B*K B*K; zeros(2,2) A-Ke*C],eye(4),eye(4),eye(4));
t = 0:0.01:4;
z = initial(sys,[1;0;0.5;0],t);
x1 = [1 0 0 0]*z';
x2 = [0 1 0 0]*z';
e1 = [0 0 1 0]*z';
e2 = [0 0 0 1]*z';

subplot(2,2,1); plot(t,x1 ),grid
title('Resposta à condição inicial')
ylabel('variável de estado x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2),grid
title('Resposta à condição inicial')
ylabel('variável de estado x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e1),grid
xlabel('t (s)'), ylabel('variável de estado de erro e1')

subplot(2,2,4); plot(t,e2),grid
xlabel('t (s)'), ylabel('variável de estado de erro e2')
```

Respostas:



6.4. MATLAB

Funções importantes: *acker*, *place*, *ctrb*, *obsv*, *eig*, *initial*, *ss*, *ss2tf*.

6.5. LISTA DE EXERCÍCIOS

OGATA 4ªed: B12.3 a B12.12, B12.14, B12.16
OGATA 5ªed: B10.3 a B10.12, B10.14, B10.16