

Realimentação de estados e observadores de estados



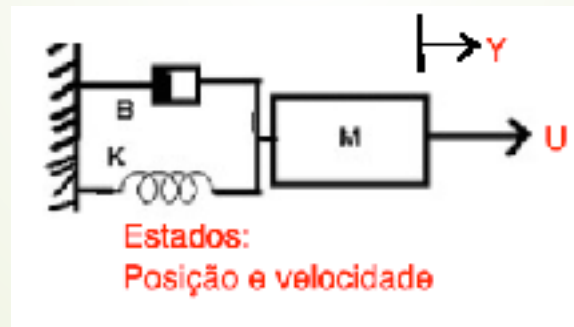
Sistemas Realimentados



Conteúdo

- Justificativa
- Modelos em variáveis de estados
- Decomposição de funções de transferência
- Relações entre modelos no espaço de estados e funções de transferência
- Controlabilidade
- Controle via realimentação de estados
- Observadores de estados
- Realimentação integral de estados

Justificativa



- A informação dos estados pode ser utilizada para gerar os sinais de controle U

Modelos em variáveis de estados

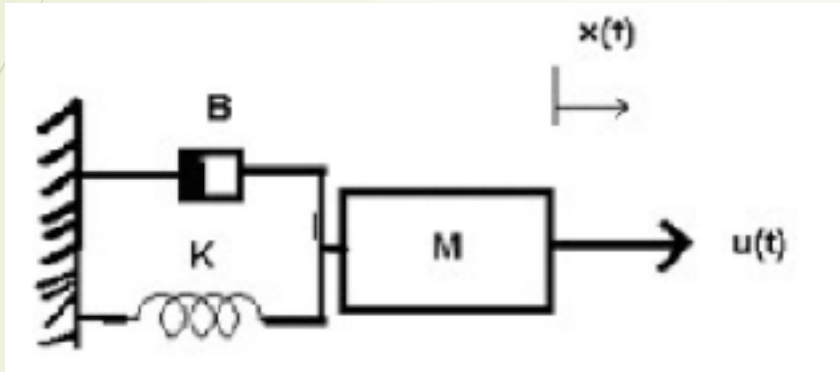
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A_{n.n}, B_{n.m}, C_{p.n}, D_{p.m}$$

onde A, B, C, D são matrizes e x, u, y são vetores

Exemplo: sistema mecânico



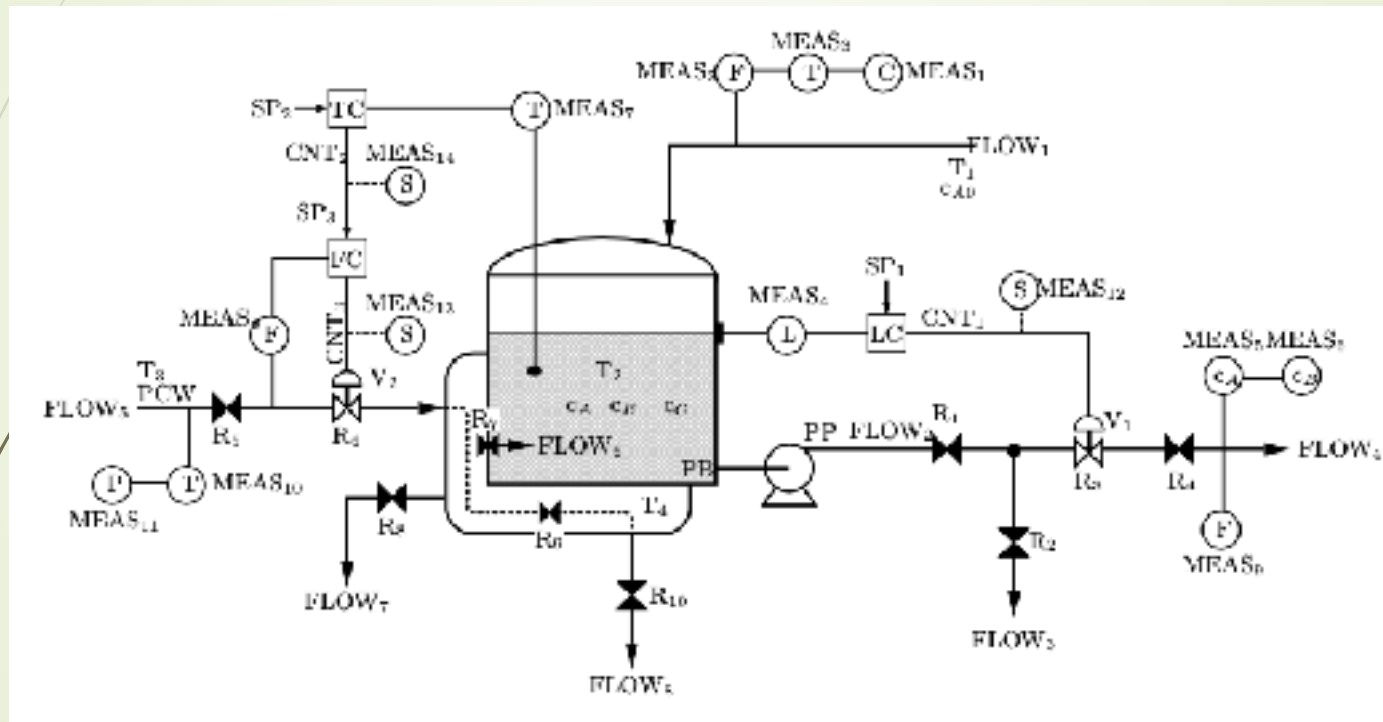
Equação diferencial

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = u(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Modelo em variáveis de estado, sendo os estados a posição e a velocidade.

Exemplo: CSTR (Reator-tanque Agitado Contínuo)



Esse reator possui duas malhas de controle que interagem entre si. Como controlar usando apenas controladores PID?

Obtendo $G(s)$ do modelo em variáveis de estados

$$\begin{aligned}L[\dot{x}] &= sX(s) - x(0) \\L[Ax + Bu] &= AX(s) + BU(s)\end{aligned}$$

$$L[y(t)] = CX(s) + DU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Simulando os dois modelos no Matlab

```
>> g=tf(1,[1 1 1])
```

g =

$$\frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Ver comandos:

ss2tf

tf2ss

```
>> a=[0 1;-1 -1]
```

a =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>> b=[0;1]
```

b =

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> c=[1 0]
```

c =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> s1=ss(a,b,c,0)
```

s1 =

A =

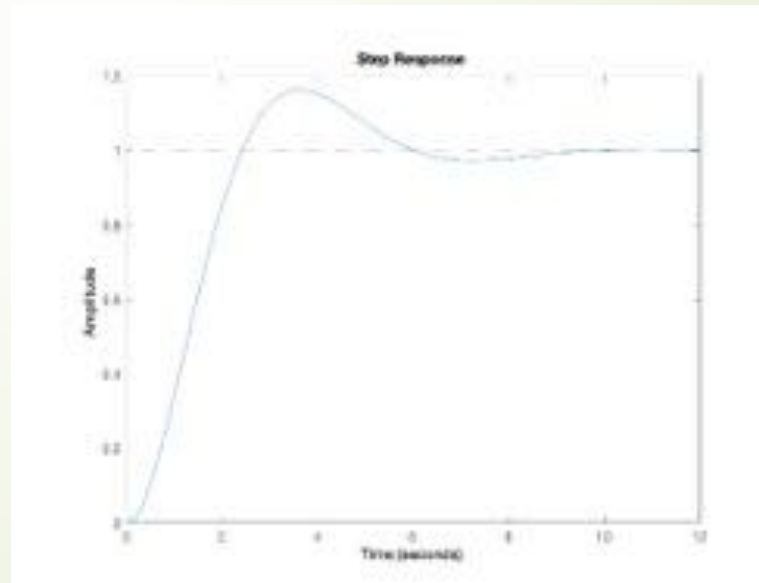
$$\begin{array}{cc} & x1 & x2 \\ x1 & 0 & 1 \\ x2 & -1 & -1 \end{array}$$

B =

$$\begin{array}{c} u1 \\ x1 & 0 \\ x2 & 1 \end{array}$$

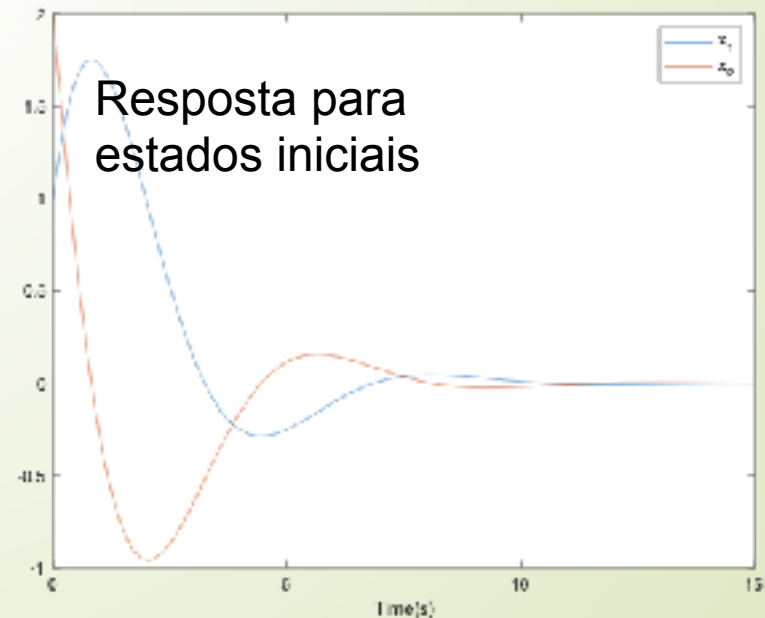
Simulando os dois modelos no Matlab

- Simulação de $G(s)$:
- Para entradas degrau, rampa, etc:
- $Y = \text{step}(g)$;
- $Y = \text{impulse}(g)$
- $Y = \text{lsim}(g, u, t)$;



Simulando os dois modelos no Matlab

- Simulação do modelo em variáveis de estado
- O mesmo de $G(s)$, mas também pode incluir estados iniciais.
- `y=lsim(s1,u,t,[1;2]);`
- `[y,t,x]=lsim(s1);`





Obtendo o modelo em variáveis de estado a partir de $G(s)$

Método da decomposição direta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Multiplicando e dividindo (4) por $s^{-3} X(s)$,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}}{1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

Decomposição direta

Multiplicando e dividindo (4) por $s^{-3}X(s)$, (5)

De (5), segue que
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2s^{-1} + b_1s^{-2} + b_0s^{-3}}{1 + a_2s^{-1} + a_1s^{-2} + a_0s^{-3}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = [b_2s^{-1} + b_1s^{-2} + b_0s^{-3}]X(s) \quad (6.1)$$

e

$$U(s) = [1 + a_2s^{-1} + a_1s^{-2} + a_0s^{-3}]X(s) \quad (6.2)$$

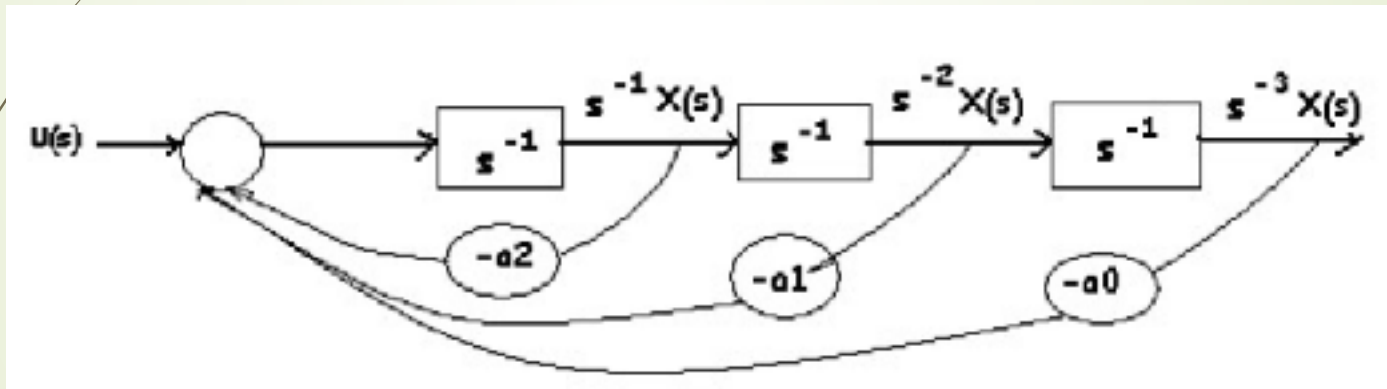
Decomposição direta

Rearranjando (6.2), vem

$$X(s) = U(s) - a_2 s^{-1} X(s) - a_1 s^{-2} X(s) - a_0 s^{-3} X(s)$$

Decomposição direta

$$X(s) = U(s) - a_2 s^{-1} X(s) - a_1 s^{-2} X(s) - a_0 s^{-3} X(s)$$



Decomposição direta

- Escolhendo os estados

$$x_1 = s^{-3} X(s)$$

$$x_2 = s^{-2} X(s)$$

$$x_3 = s^{-1} X(s)$$



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = u(t) - a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3$$

Decomposição direta

Na forma matricial,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Forma
canônica
controlável

Decomposição direta

➡ Saída,

$$y(t) = b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

ou, na forma matricial,

$$y = [b_2 \quad b_1 \quad b_0]x$$

Diagrama completo

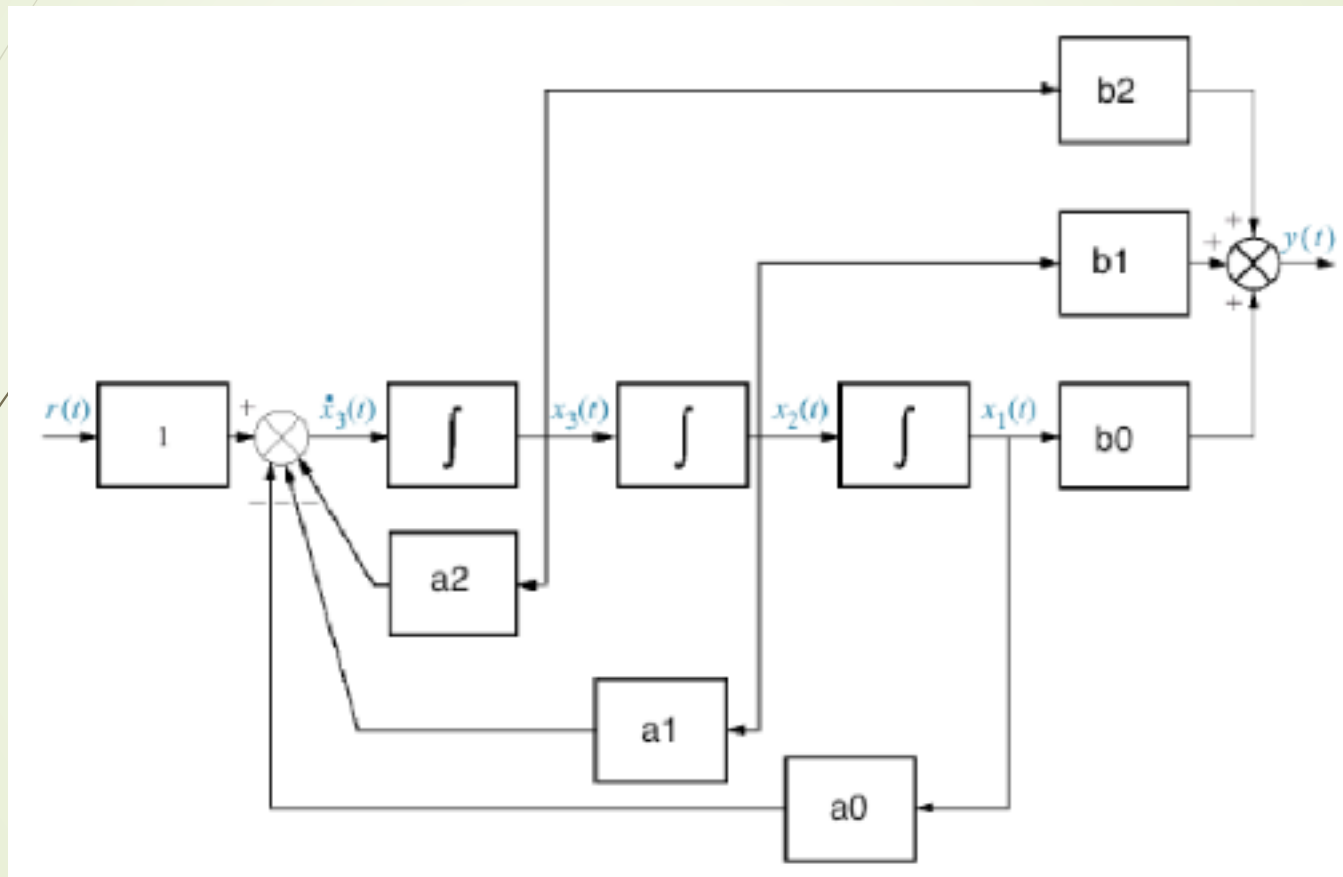
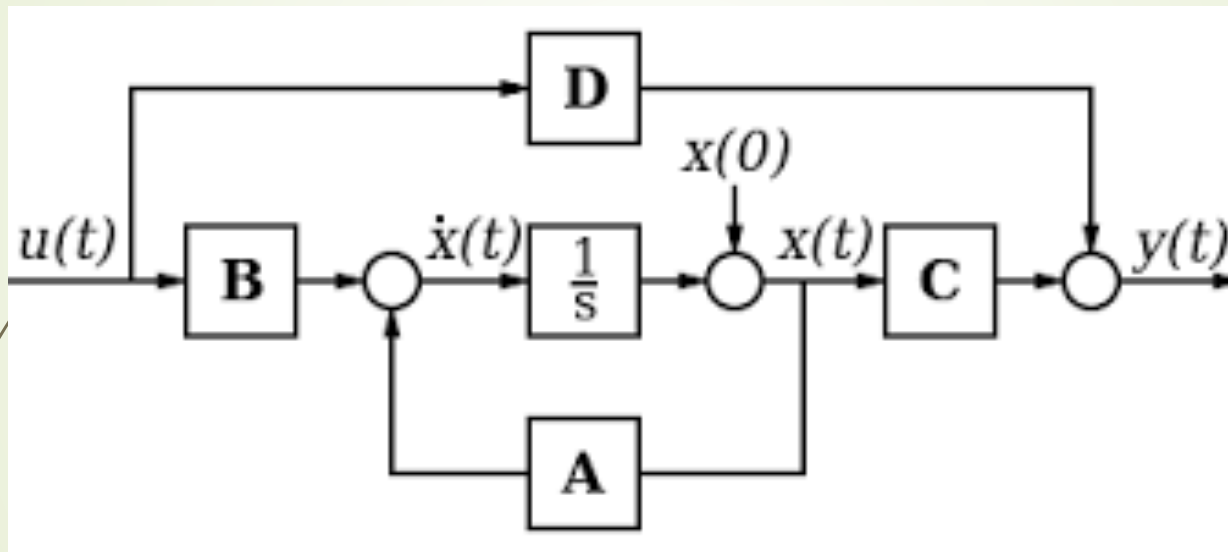


Diagrama de variáveis de estado usando matrizes



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



Observações

- Número de estados = número de integradores = grau do denominador de $G(s)$
- Diferentes modelos no EE podem ser obtidos para a mesma $G(s)$

Exemplo

➤ Seja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

- Obtenha a FT e dela o sistema no EE, usando o método da decomposição direta. Para uma mesma FT, haverá 2 diferentes modelos no EE.

Exemplo

Seja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

```
s1=ss(a,b,c,d)
tf(s1)
```

```
>> tf(s1)
|
ans =

      s + 4
-----
s^2 + s - 2
```

Uma FT e 2 modelos diferentes em variáveis de estado

```
[a1,b1,c1,d1]=tf2ss([1 4],[1 1 -2])
```

```
>> s2=ss(a1,b1,c1,d1)
```

```
s2 =
```

```
A =
```

| | x1 | x2 |
|----|----|----|
| x1 | -1 | 2 |
| x2 | 1 | 0 |

```
B =
```

| | u1 |
|----|----|
| x1 | 1 |
| x2 | 0 |

```
C =
```

| | x1 | x2 |
|----|----|----|
| y1 | 1 | 4 |

```
D =
```

| | u1 |
|----|----|
| y1 | 0 |

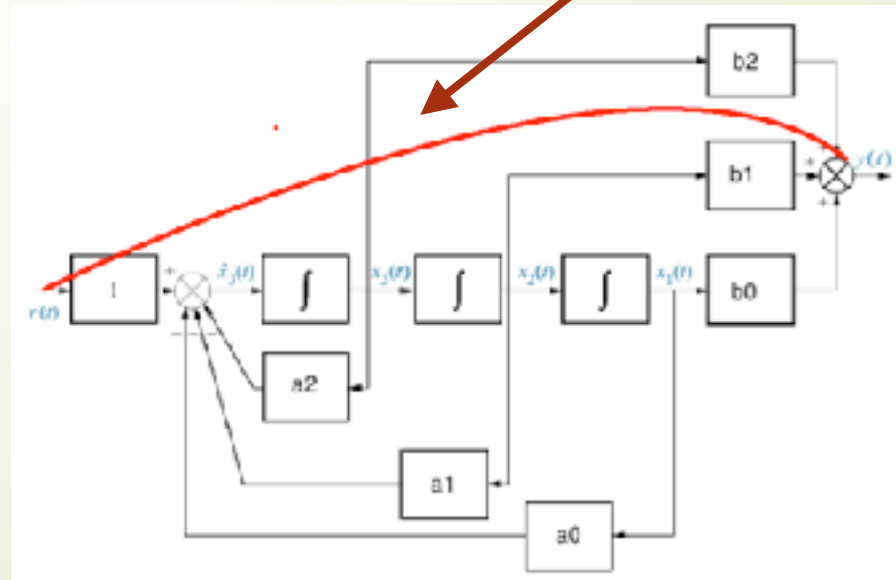
Ordem do numerador = ordem do denominador

- Se o grau do numerador fosse 3, este deveria ser dividido pelo denominador para depois aplicar a decomposição

$$G(s) = \frac{s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{f_2s^2 + f_1s + f_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} + d$$

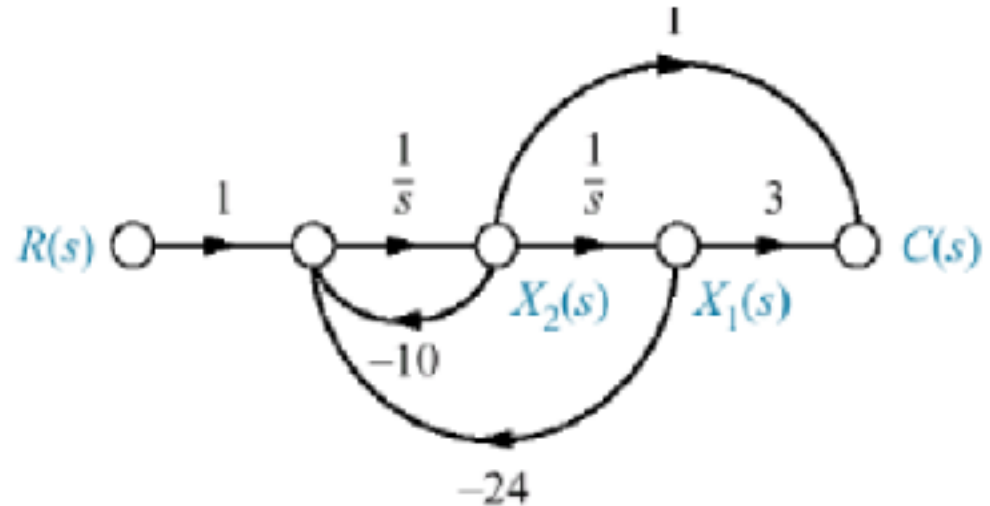
Ordem do numerador =
ordem do denominador

$$G(s) = \frac{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{f_2 s^2 + f_1 s + f_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + d$$



Outras decomposições

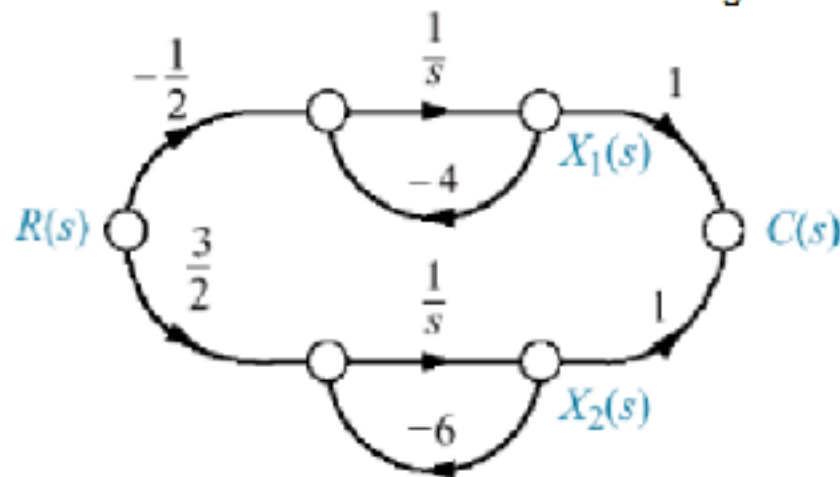
$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 10s + 24}$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [3 \quad 1] x$$

Decomposição paralela

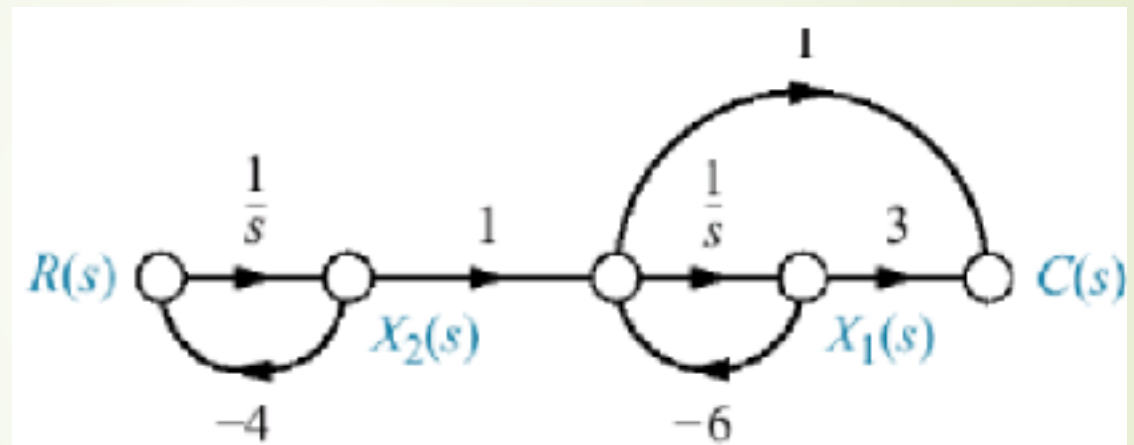
$$G(s) = \frac{-1/2}{s+4} + \frac{3/2}{s+6}$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1] x$$

Decomposição em cascata


$$G(s) = \frac{1}{s+4} \cdot \frac{s+3}{s+6}$$




$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [-3 \quad 1] x$$



Decomposições



Observa-se que cada decomposição gera um modelo em variáveis de estado diferente.

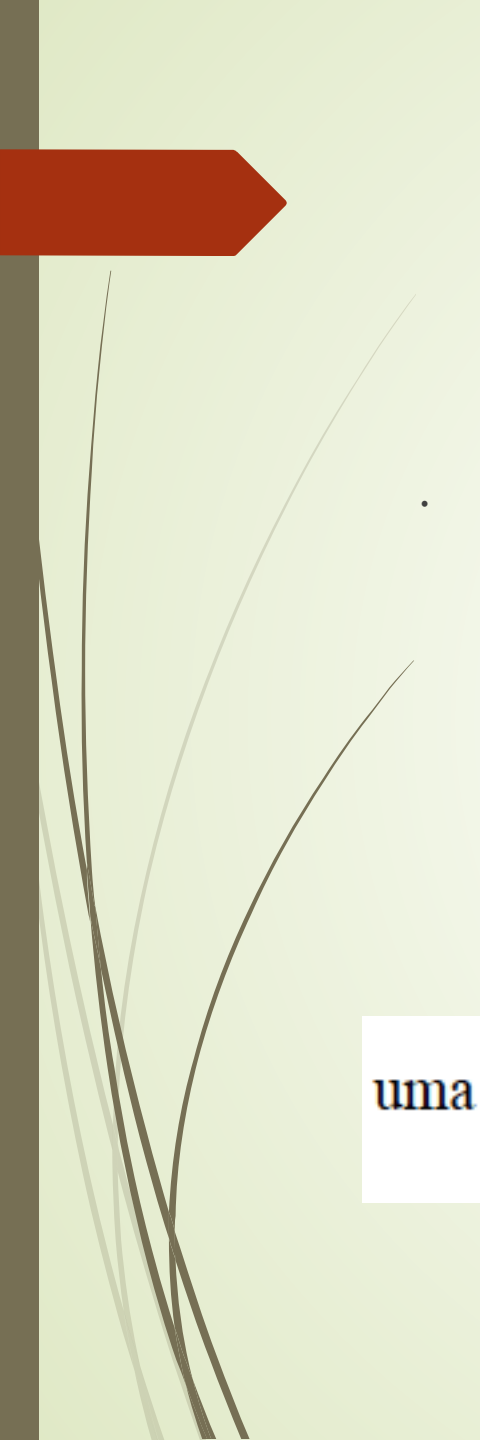


Relações entre modelos no espaço de estados e funções de transferência

Autovalores de uma matriz quadrada

Os autovalores λ de uma matriz quadrada A e os autovetores associados $x \neq 0$ satisfazem a equação

$$Ax = \lambda x$$


$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Esta equação só é verdadeira se

$$\det[A - \lambda I] = 0,$$

uma vez que $x \neq 0$ e $[A - \lambda I]$ é uma matriz não nula.



Resolvendo

$$\det[A - \lambda I] = 0$$

resulta o polinômio de ordem n denominado polinômio característico da matriz A .

Exemplo

Exemplo: autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

$$\det[(A - \lambda I)] = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Autovetores

São obtidos das equações abaixo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} x = 0 \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} x = 0$$

Relação entre polos de $G(s)$ e autovalores da matriz A

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + E = C \frac{\text{Adjunta}[sI - A]}{\det(sI - A)}B + E = \frac{N(s)}{D(s)} + E$$

- O denominador de $G(s)$ é o polinômio característico da matriz A .
- Portanto, em geral, os polos de $G(s)$ são os autovalores de A .
- Isso não ocorre quando existe cancelamento de zeros e polos. Neste caso, a FT terá um número de polos inferior ao número de autovalores.



Relação entre polos de $G(s)$ e autovalores da matriz A

Portanto, para analisar a estabilidade de um sistema em variáveis de estado, basta verificar os autovalores da matriz A .



Controlabilidade

➡ Seja o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Ele será controlável se seu estado pode ser levado de $x(0)$ a $x(t)$ em um tempo finito t através da entrada $u(t)$.

Teste de controlabilidade

O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

é controlável se

$$\text{posto}[W_c] = \text{posto}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

- onde n é a ordem do sistema e W_c é chamada matriz de controlabilidade.

Exemplo: sistema mecânico

➤ Seja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

$$\text{posto}[B \quad AB] = \text{posto} \begin{bmatrix} 0 & 1/M \\ 1/M & -B/M^2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1/M \\ 1/M & -B/M^2 \end{bmatrix} = -1/M^2$$



Número de entradas

- ▶ A matriz W_c é quadrada para o caso de 1 entrada.
- ▶ Para m entradas, W_c tem ordem $n.(m*n)$

Forma canônica controlável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

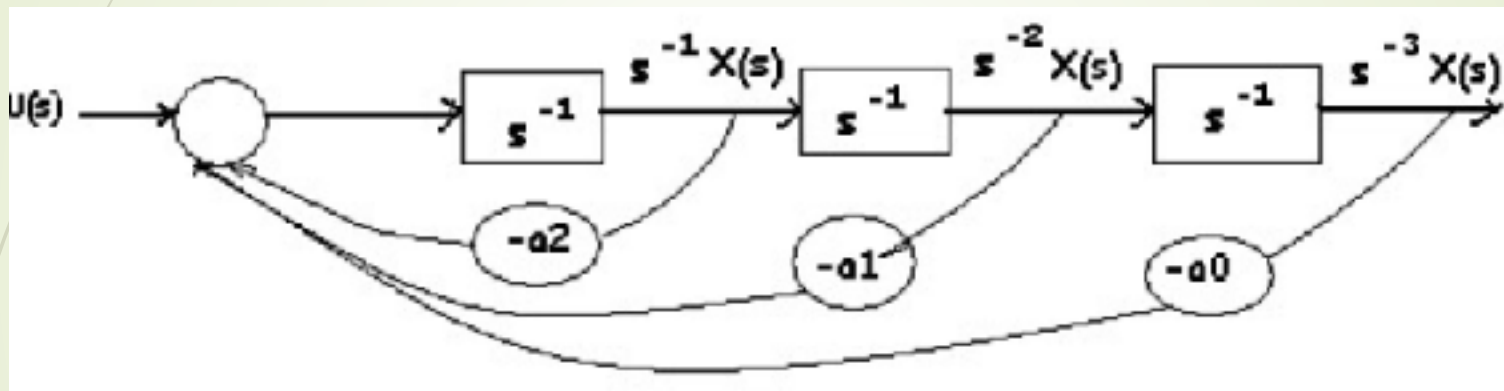
Forma canônica controlável

$$\text{posto}[B \quad AB \quad A^2B] =$$

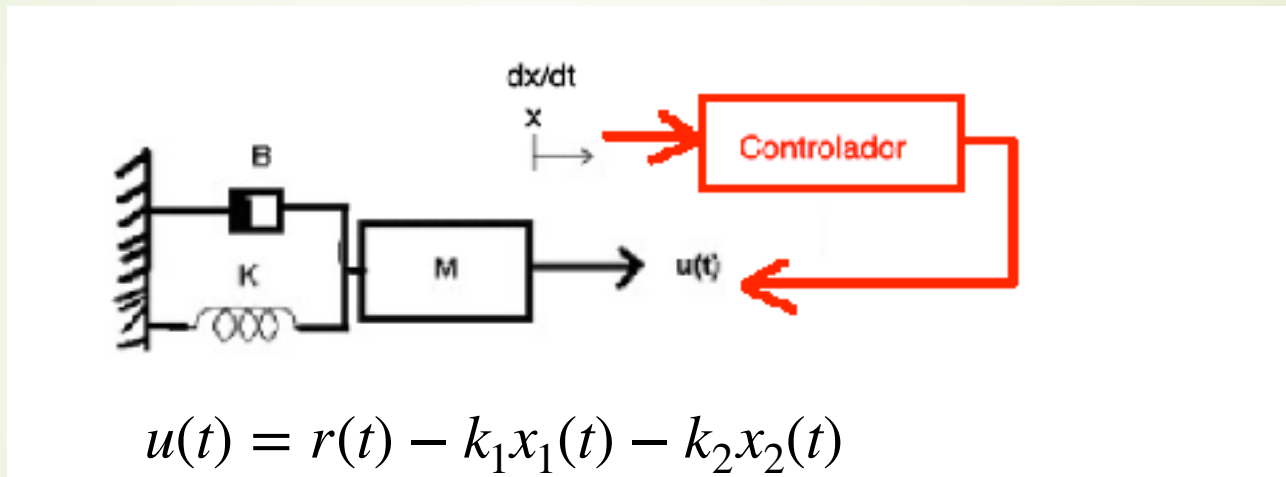
$$\text{posto} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix} = 3$$

- Portanto, um sistema na forma canônica controlável é controlável!

Sistema controlável: todos estados são afetados pela entrada



Controle via realimentação de estados



Sendo: x_1 : posição e x_2 : velocidade.

O controlador usa os estados para calcular o sinal de controle.



Controle via realimentação de estados

Especificações semelhantes às do projeto do PID no tempo

- Estabilidade
- Erro em regime
- Sobrelevação
- Tempo de estabelecimento
- IAE

Os polos de malha fechada devem ser escolhidos para atender essas especificações.



Controle via realimentação de estados

A estabilidade é garantida escolhendo polos no SPE.

O erro em regime não é atendido, mas será pela realimentação integral de estados.

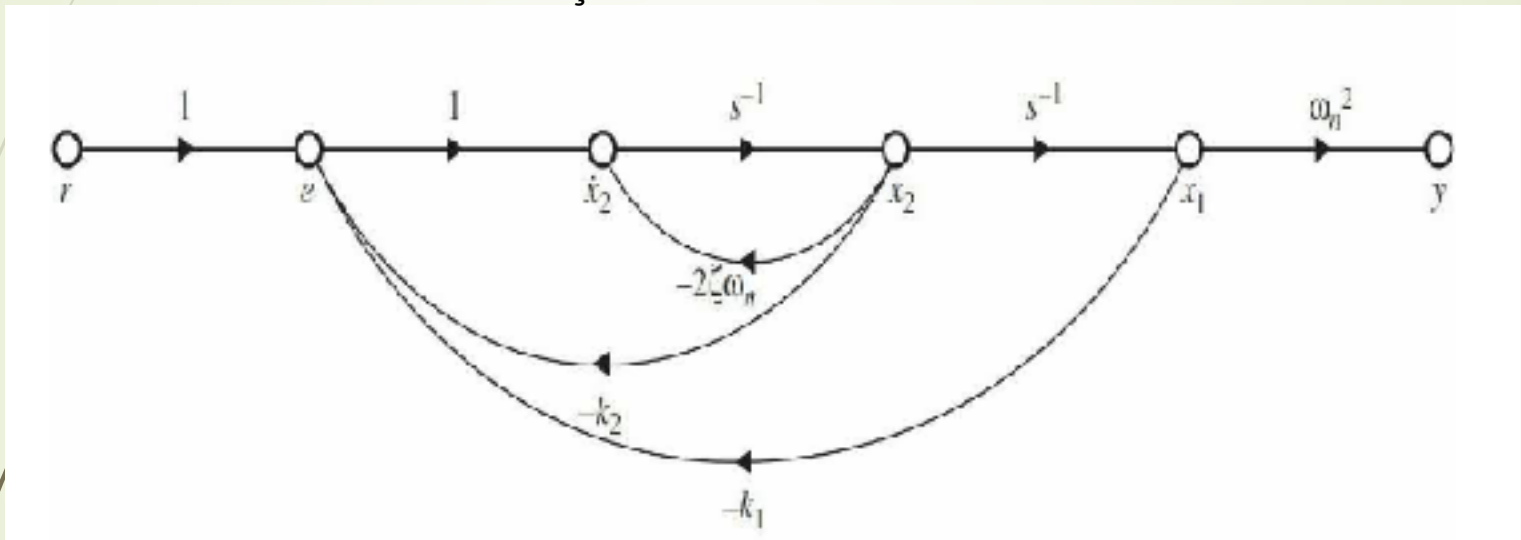
Sobreelevação e o tempo de estabelecimento são atendidos pela escolha dos polos de MF.

O IAE somente faz sentido com a realimentação integral de estados.

Protótipo de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Fazendo a realimentação de estados:



Sinal de controle: $u(t) = r - k_1x_1 - k_2x_2$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1}$$

Aplicação ao protótipo de segunda ordem

A escolha da sobre-elevação UP e do tempo de estabelecimento T_s permitem definir $\bar{\zeta}$, $\bar{\omega}_n$ e com isso K_1 e K_2 .

$$\bar{\zeta} = \sqrt{\frac{a^2}{\pi^2 + a^2}} \quad a = \log(UP/100) \quad \bar{\omega}_n = \frac{4}{T_s \bar{\zeta}}$$

$$s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1 = s^2 + 2\bar{\zeta}\bar{\omega}_n s + \bar{\omega}_n^2 \quad \Rightarrow \quad K_1, K_2$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1}$$

Aplicação ao protótipo de segunda ordem

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1}$$

Como $\omega_n \neq \bar{\omega}_n$ a saída y não tenderá para a referência r , mas sim para

$$y(\infty) = \frac{r \cdot \omega_n^2}{K_1}$$

Portanto, o erro em regime não é considerado no projeto.

Reduzindo o erro em regime

Uma forma de reduzir o erro em regime é introduzir um fator multiplicador da referência ρ , ou seja,

$$u(t) = \rho r(t) - k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

Tem-se agora

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\rho \omega_n^2}{s^2 + (2\zeta \omega_n + K_2)s + K_1}$$

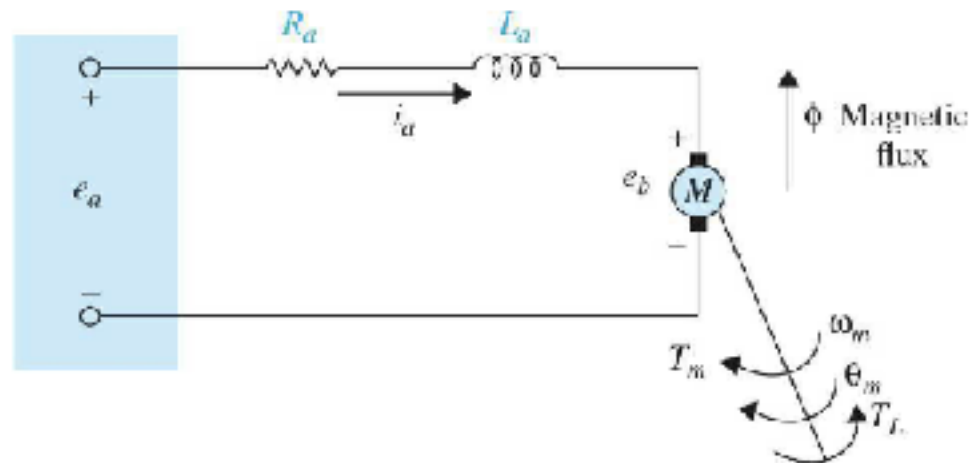
$$y(\infty) = \frac{\rho r \cdot \omega_n^2}{K_1}$$

$$\text{Escolhendo } \rho = \frac{K_1}{\omega_n^2}$$

$$\text{Resulta } y(\infty) = r$$

Essa solução não é robusta, pois ω_n é incerto

Realimentação de estados de um motor CC



Medir:
 Corrente
 Velocidade
 Ângulo do eixo

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t)$$

Realimentação de estados de um motor CC


Mede-se corrente, a velocidade e o ângulo do eixo

Verificar a controlabilidade:

Controlador:

$$u(t) = r - k_1x_1(t) - k_2x_2(t) - k_3x_3(t)$$

Escolher 3 polos que dêem a resposta desejada.



Controle via realimentação de estados: caso geral.

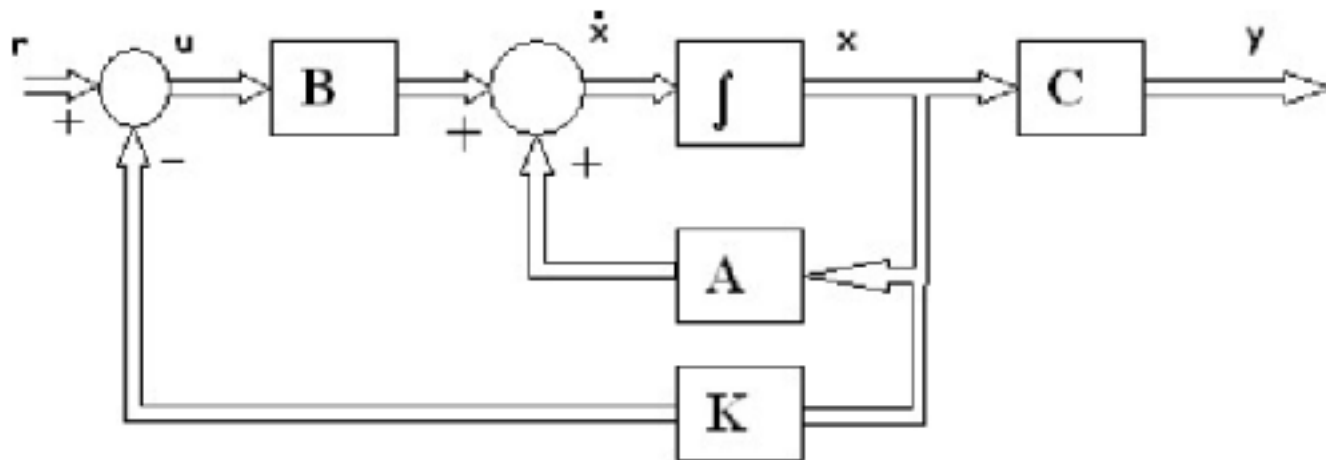
► Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

E a lei de controle $u(t) = r(t) - Kx(t)$

Sistema em MF



Sistema em malha fechada

► Equações,

$$\dot{x} = Ax + B(r - Kx)$$

$$y = Cx + D(r - Kx)$$

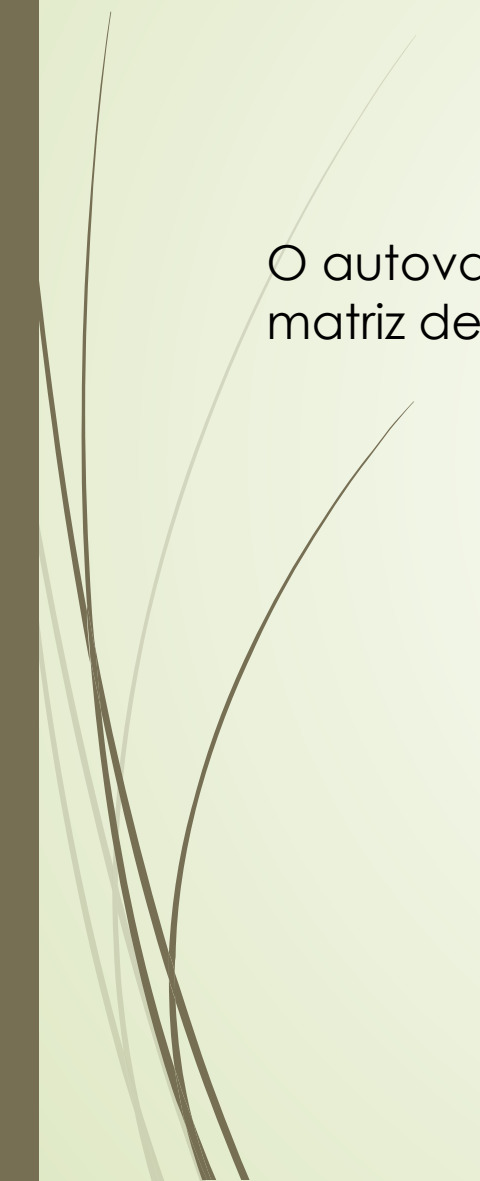
$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$

$$y = (C - DK)x + Dr$$



Sistema em malha fechada

O autovalores da nova matriz do sistema $(A-BK)$ são alterados pela matriz de ganho K .



Sistema em malha fechada

- Aplicando a realimentação de estados ao sistema na FCC

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (r - [k_1 \quad k_2 \quad k_3]x)$$


Sistema em malha fechada

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\lambda(A - BK) = s^3 + (a_2 - k_3)s^2 + (a_1 - k_2)s + (a_0 - k_1)$$

Sistema em malha fechada

- Observa-se que pela escolha adequada dos ganhos pode-se obter qualquer polinômio característico de malha fechada, com as raízes que se desejar. Em outras palavras, os autovalores, que são os polos malha fechada, podem ser livremente escolhidos a partir dos ganhos do vetor K .
- Para que isto seja possível, basta que o sistema seja controlável!
- Se ele estiver na forma canônica controlável, esta condição é atendida!



Exemplo: calculando os ganhos do vetor K.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

- Escolher K tal que tenha os polos de malha fechada sejam $\{-1, -10\}$.



Exemplo:

$$\det(SI - (A - BK)) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2k_1 & -2 - 2k_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s - 1 & -1 \\ 2k_1 & s + 2 + 2k_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= s^2 + (1 + 2k_2)s + (2k_1 - 2k_2 - 2)$$



Exemplo

Para obter os polos de MF devemos ter

$$(s + 1)(s + 10) = s^2 + 11s + 10$$

Ou

$$(1 + 2k_2) = 11$$

$$(2k_1 - 2k_2 - 2) = 10$$

Alocação de polos no Matlab

```
>> a=[1 1;0 -2];  
>> b=[0;2];  
>> l=[-1 -2];  
>> k=place(a,b,l)
```

```
k=[ 3 1]
```

```
c=[1 0]
```

$M=ss(a-b*k, b,c,0)$ Sistema em malha fechada

- Limitação da rotina place: os polos não podem ser repetidos

```
>> eig(a-b*k)  
ans =  
-1.0000  
-2.0000
```

FT de MA e MF

$$G_{ma} = \frac{2}{s^2 + s - 2}$$

- Apenas o denominador da FT muda após a realimentação de estados, pois os polos são alterados pela realimentação.

$$G_{mf} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

- O numerador somente muda se um polo for alocado para a mesma posição de um zero.

Vantagens e desvantagens da realimentação de estados


- A principal vantagem é a possibilidade de escolher quaisquer polos de malha fechada desejados.
- No caso abaixo, um controlador PID não permite escolher todos os coeficientes do denominador!

Seja o sistema $G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ e um controlador PID

$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Em malha fechada temos

$$M(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^4 + 3s^3 + (3 + K_d)s^2 + (1 + K_p)s + K_i}$$



Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

- Uma desvantagem é que o erro em regime não é considerado no projeto. Além disto, o ganho da FT de MF fica menor quando se escolhe polos que dêem respostas mais rápidas.

Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

- Seja por exemplo o sistema mecânico com $m=b=k=1$,

```
>> s1=ss(a,b,c,0)
```

```
s1 =
```

```
A =
```

| | x1 | x2 |
|----|----|----|
| x1 | 0 | 1 |
| x2 | -1 | -1 |

```
B =
```

| | u1 |
|----|----|
| x1 | 0 |
| x2 | 1 |

```
C =
```

| | x1 | x2 |
|----|----|----|
| y1 | 1 | 0 |

- $K=place(a,b,[-5 \ -6])$

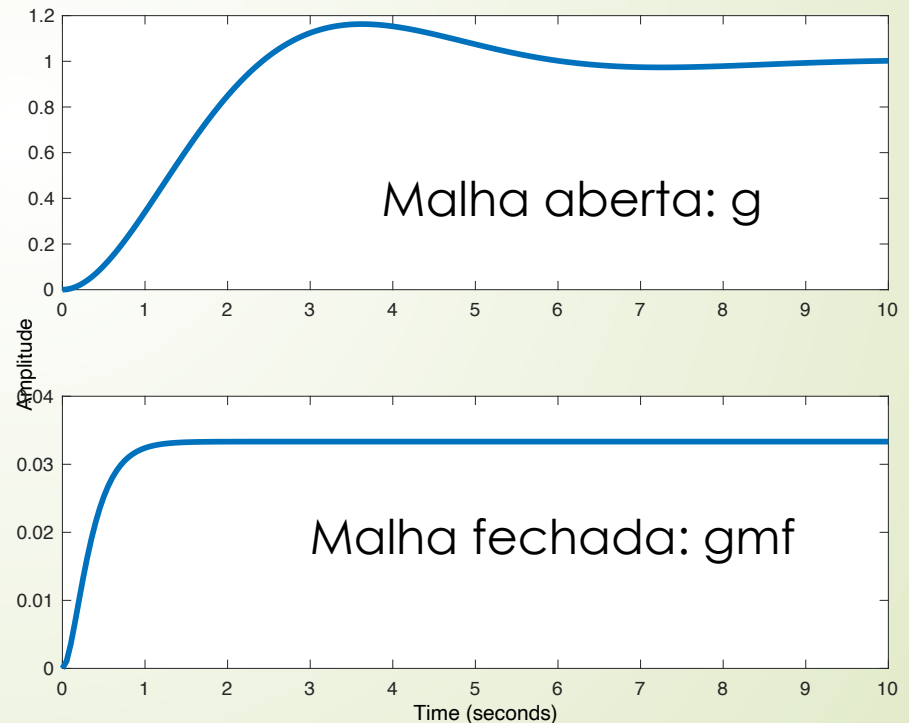
- $smf=ss(a-b*K,b,c,0)$

- $gmf=tf(smf)$

- $step(g,gmf)$

Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

- Seja por exemplo o sistema mecânico com $m=b=k=1$,
- $K=place(a,b,[-5 \ -6])$
- $smf=ss(a-b*K,b,c,0)$
- $gmf=tf(smf)$
- $step(g,gmf)$



Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

Cálculo do sinal de controle $u(t)$;

```
M=ss(a-b*K,b,c,0)
```

```
[y,t,x]=step(M);
```

```
u=1-K*(x');
```

```
plot(t,u);
```

Quando um fator ρ for utilizando para corrigir o erro em regime, a simulação deve ser feita usando o comando `lsim` e aplicando uma entrada multiplicada por ρ

Cálculo do sinal de controle com ρ

Novo cálculo do sinal de controle $u(t)$;

```
M=ss(a-b*K,b,c,0)
```

```
[y,t]=step(M);
```

```
r=rho*ones(size(y));
```

 Referência vezes rho

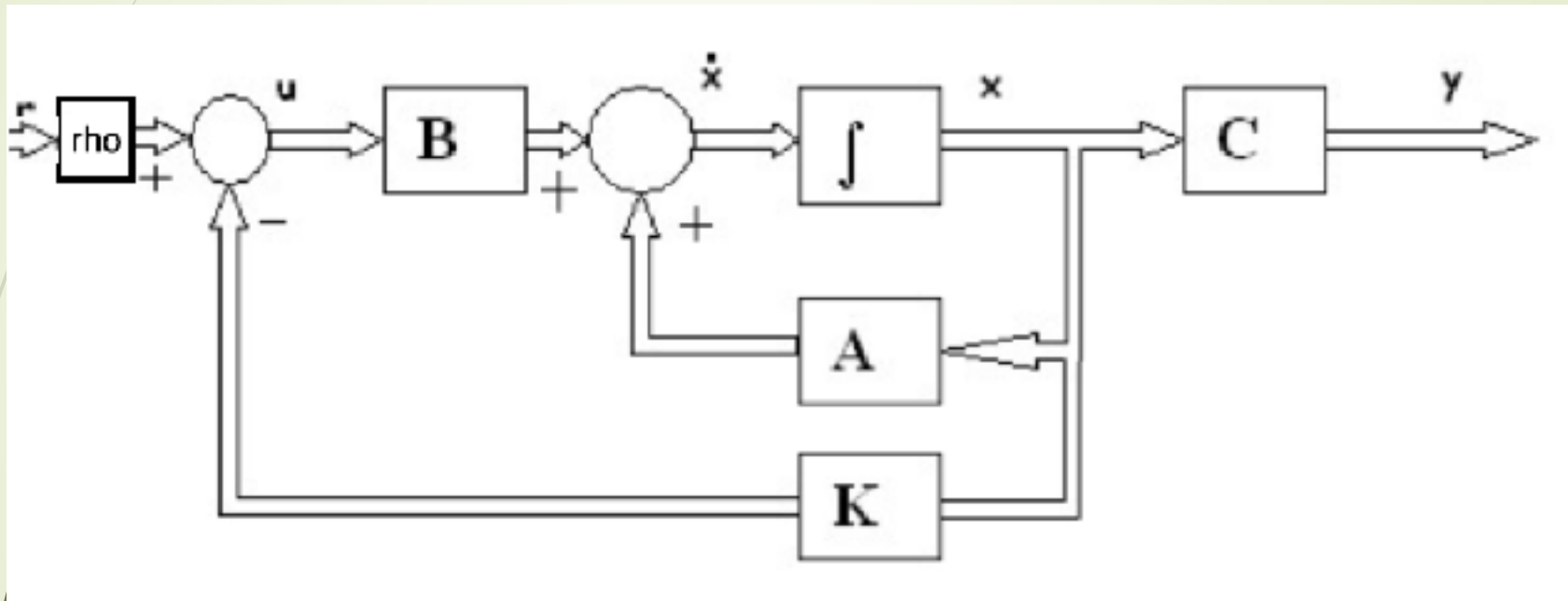
```
[y,t,x]=lsim(M,r,t);
```

```
u=rho-K*(x');       $u(t) = \rho r(t) - Kx(t)$ 
```

```
plot(t,u);
```

Cálculo do sinal de controle com ρ

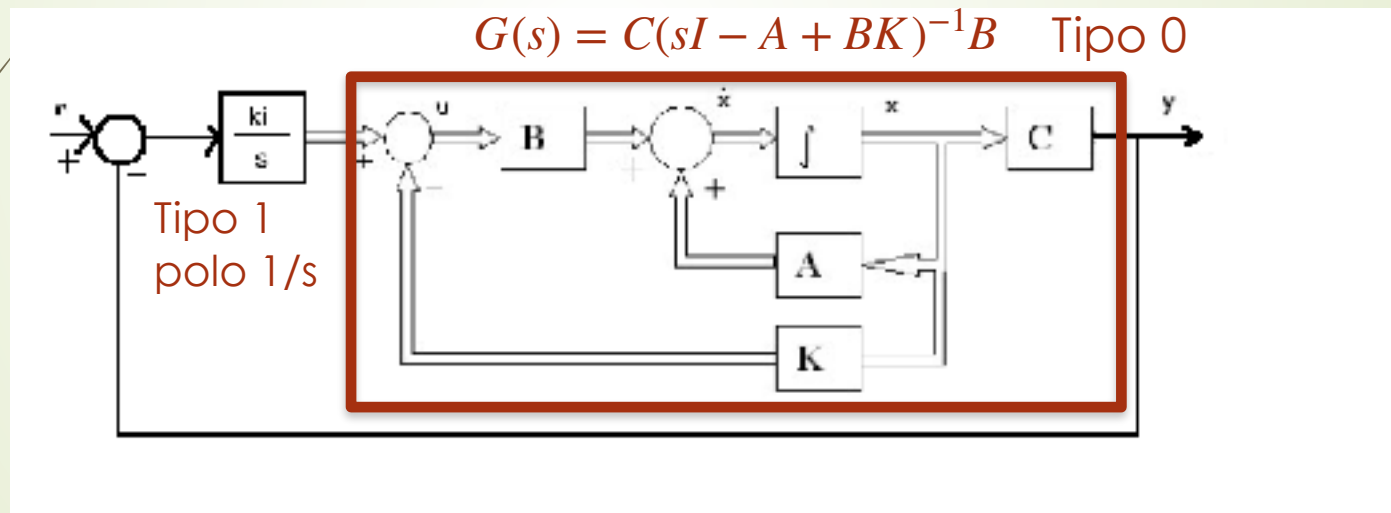
Olhando o diagrama



$$u(t) = \rho r(t) - Kx(t)$$

Controle via realimentação integral de estados

- Essa estratégia visa conseguir erro nulo em regime para entrada em degrau usando alimentação de estados.



FT de Malha aberta: $\frac{k_i}{s}G(s)$

Os polos de $G(s)$ foram alocados no SPE pela matriz K

Realimentação integral de estados

$$u(t) = -Kx - kix_i = [K \quad ki] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_i = r(t) - y(t)$$

➤ Em MF,

$$\bar{x}(t) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

Realimentação integral de estados

$$\Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{K} = [K \quad ki]$$

Se o par $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ for controlável,

os autovalores de $(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$ poderão ser livremente alocados.

- O integrador adiciona um polo a mais (um estado a mais) no sistema. Devido a isto, deve-se escolher mais um polo para ser alocado, que deve ser mais rápido que os demais.

Exemplo:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

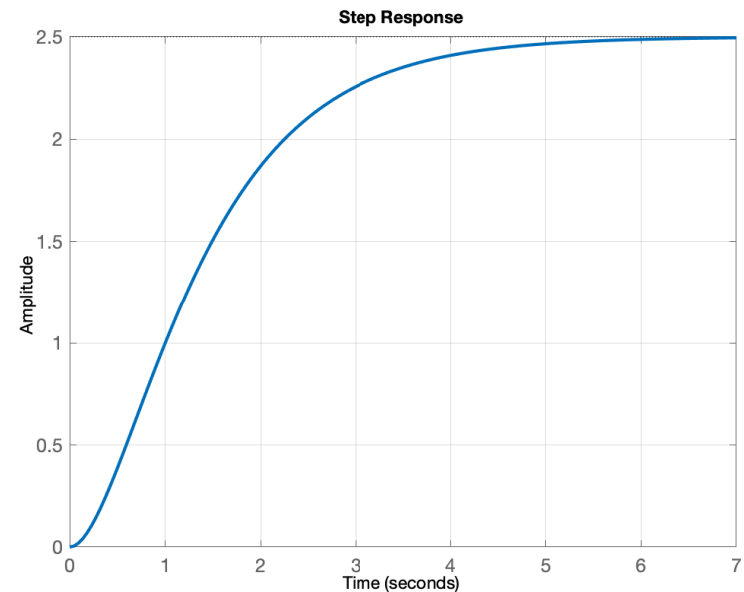
Deseja obter uma resposta com com UP<4% e Ts<2s

$$\zeta = 0.707$$

$$\omega_n = \frac{4}{T_s * \zeta} \geq 2.8$$

Polos de MF para obter UP e Ts:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = -2 \pm j2$$



Exemplo:

Modelo em variáveis de estado de $G(s)$:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

Sistema aumentado:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} K & ki \end{bmatrix}$$

A =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>> B=[b;0]

B =

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$K = \text{place}(A, B, [-2-2j \ -2+2j \ -10]) =$

46.0000 11.0000 80.0000

Portanto, $K_1=46$, $K_2=11$, $K_i=-80$.

$B_1 = [0; 0; 1];$

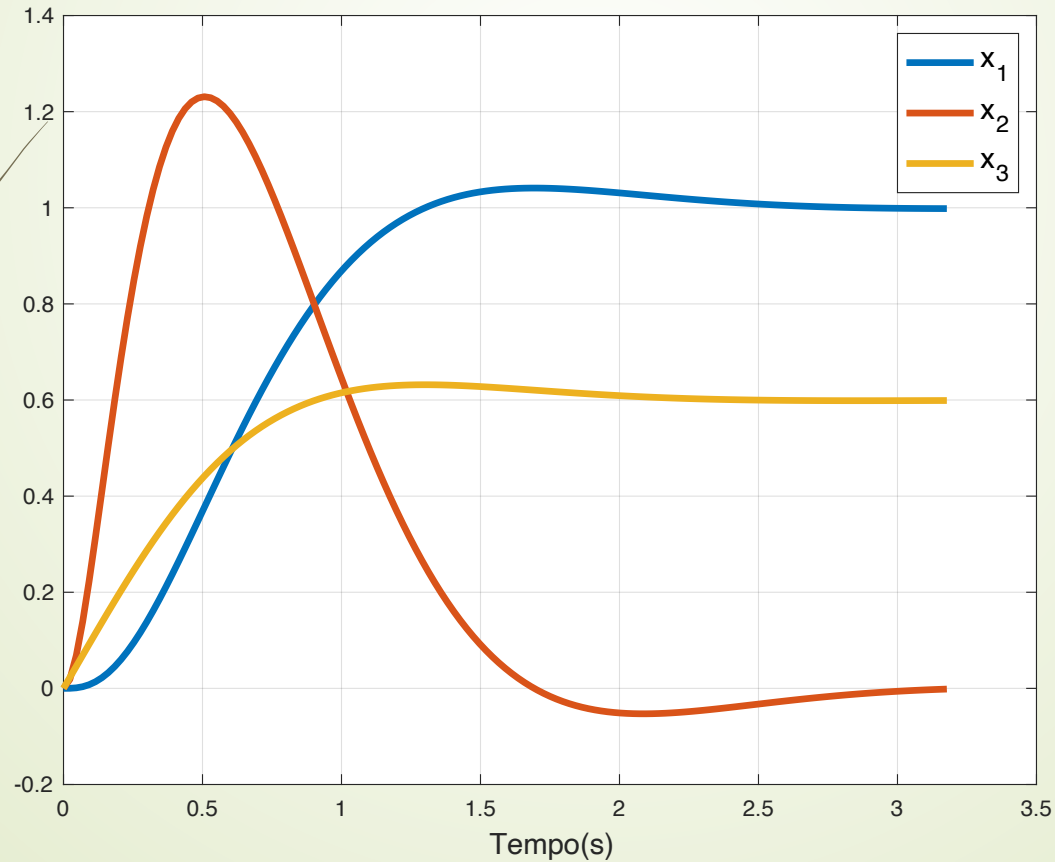
$M = \text{ss}(A - B * K, B_1, [c \ 0], 0);$

Escolheu-se o terceiro polo em -10, mais rápido que os outros 2.

Exemplo

```
[y,t,x]=step(M);  
plot(t,x);
```

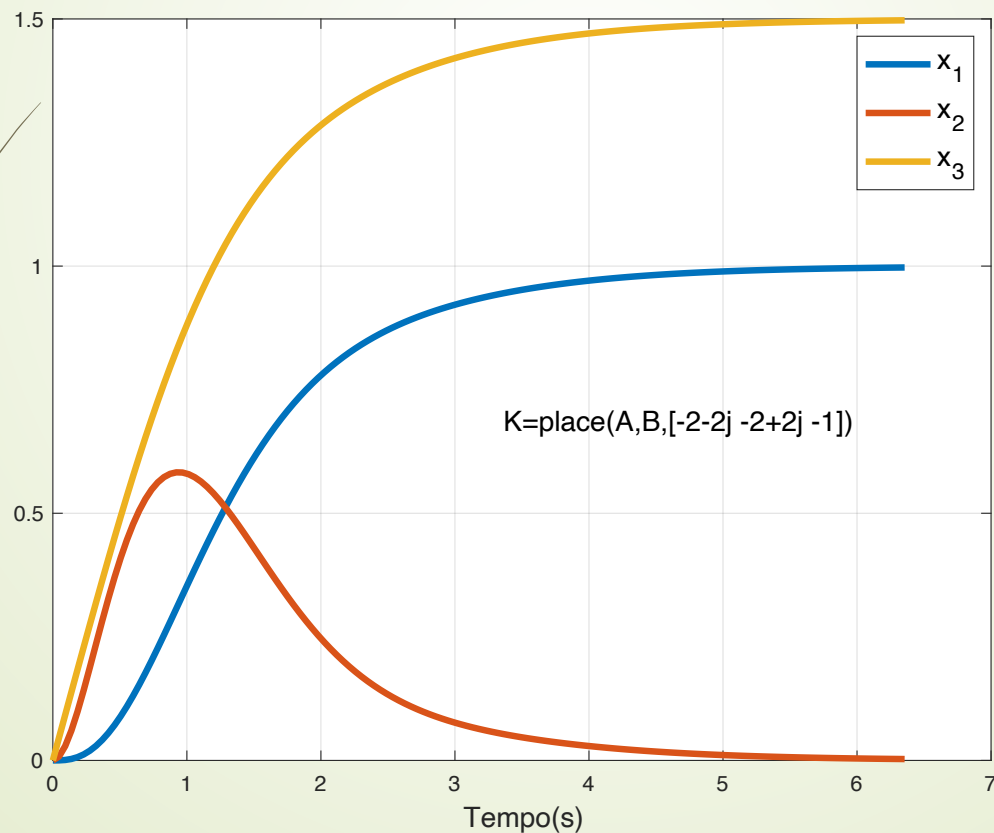
Polos de MF em $\{-2-2j, -2+2j, -10\}$



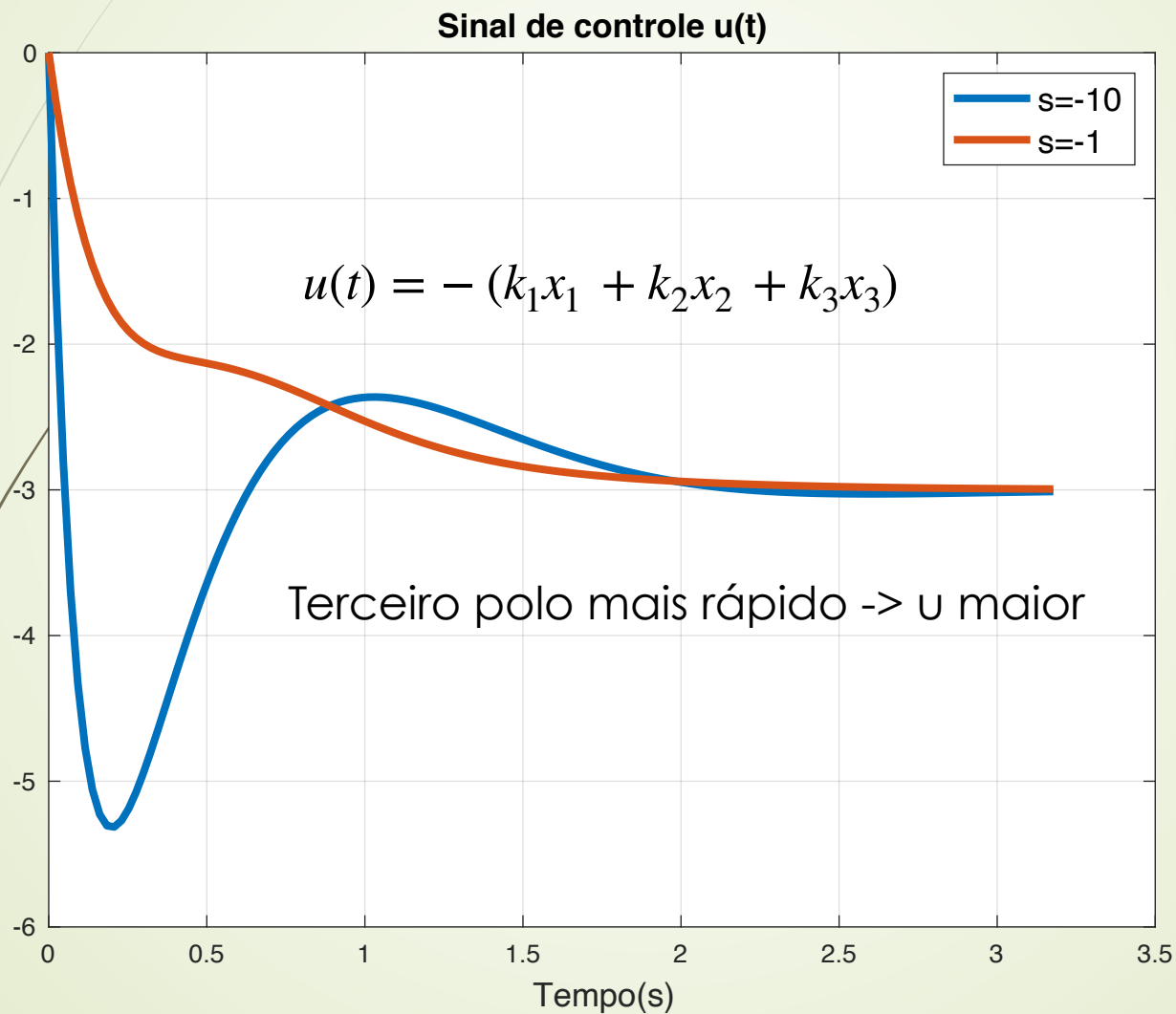
Exemplo

`[y,t,x]=step(M);` Polos de MF em $\{-2-2j, -2+2j, -1\}$

`plot(t,x);` Escolheu-se o terceiro polo em -1 ,
mais lento que os outros 2.



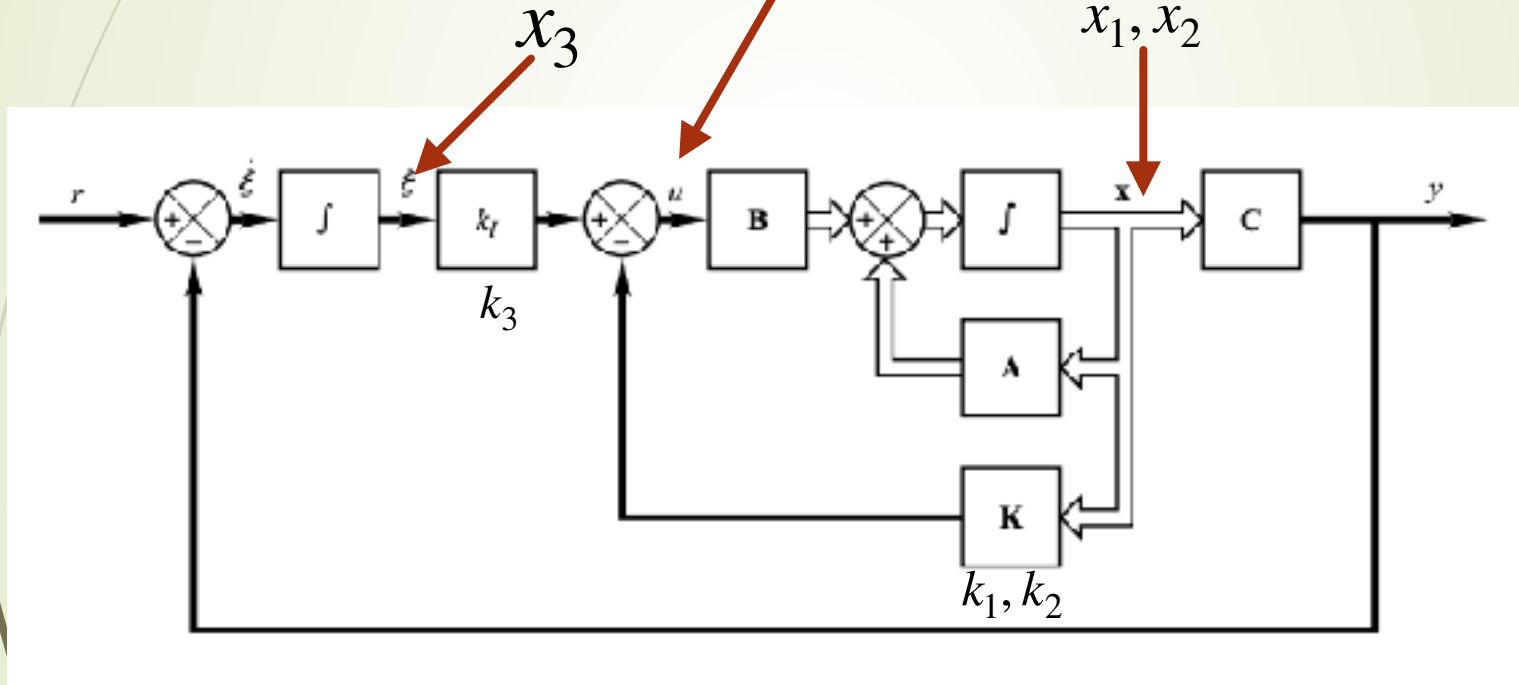
Exemplo



Exemplo

```
[y,t,x]=step(M);  
plot(t,x);
```

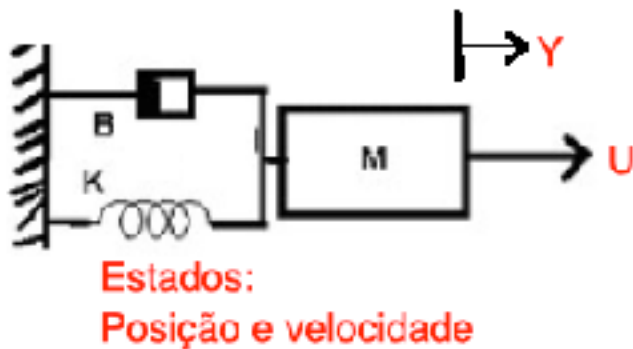
$$u(t) = -(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)$$



Realimentação com observadores

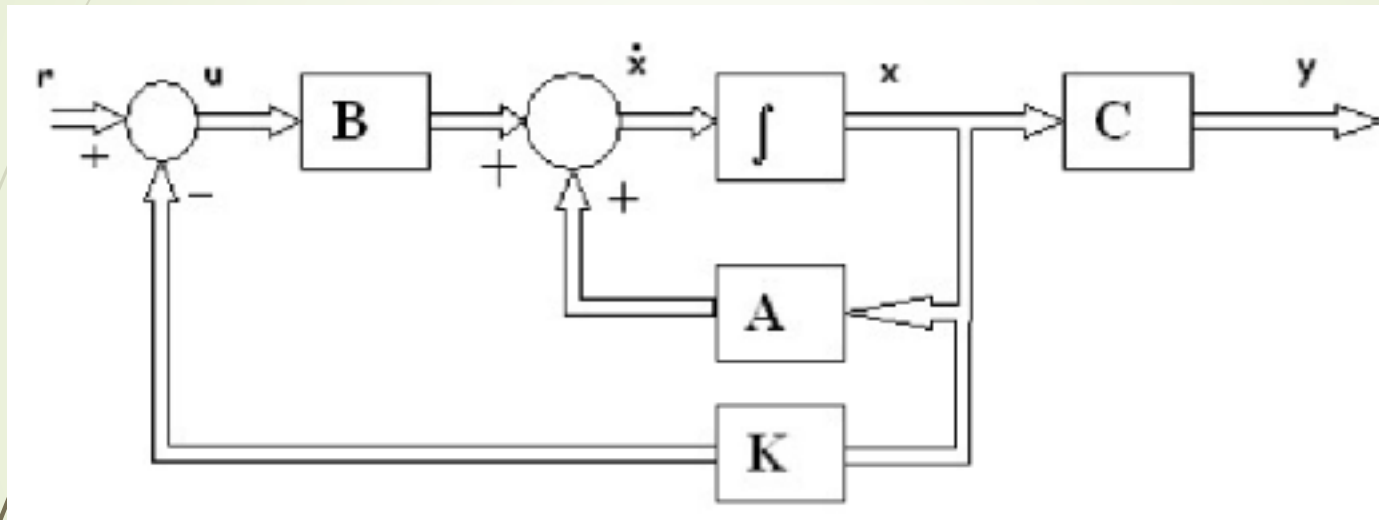
A realimentação de estados assume que os estados são medidos, e podem ser usados para controle.

Caso não sejam, devem ser estimados.



No sistema massa-mola, mede-se a posição. A velocidade pode ser estimada pela derivada da posição.

Necessidade de observadores



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$u(t) = r(t) - Kx(t),$$

- Em geral, o estados não são todos medidos, e não está disponíveis para realimentação.



Observabilidade

Definição: o sistema é observável se for possível determinar o estado inicial $x(0)$ a partir das informações de entrada u e de saída y , durante um tempo finito t .

Teste de observabilidade

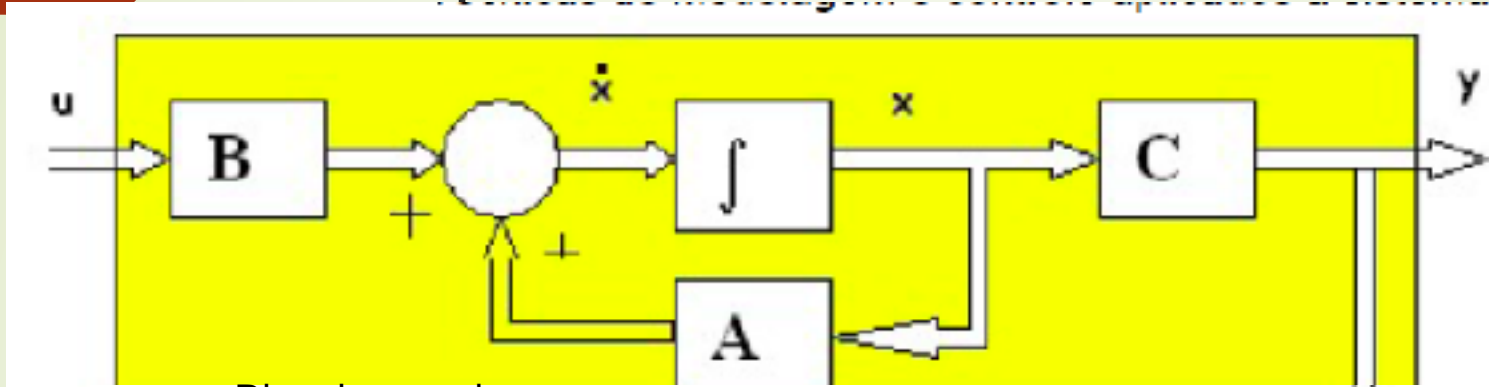
Seja W_o a matriz de observabilidade dada por

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ onde } n \text{ é a ordem do sistema.}$$

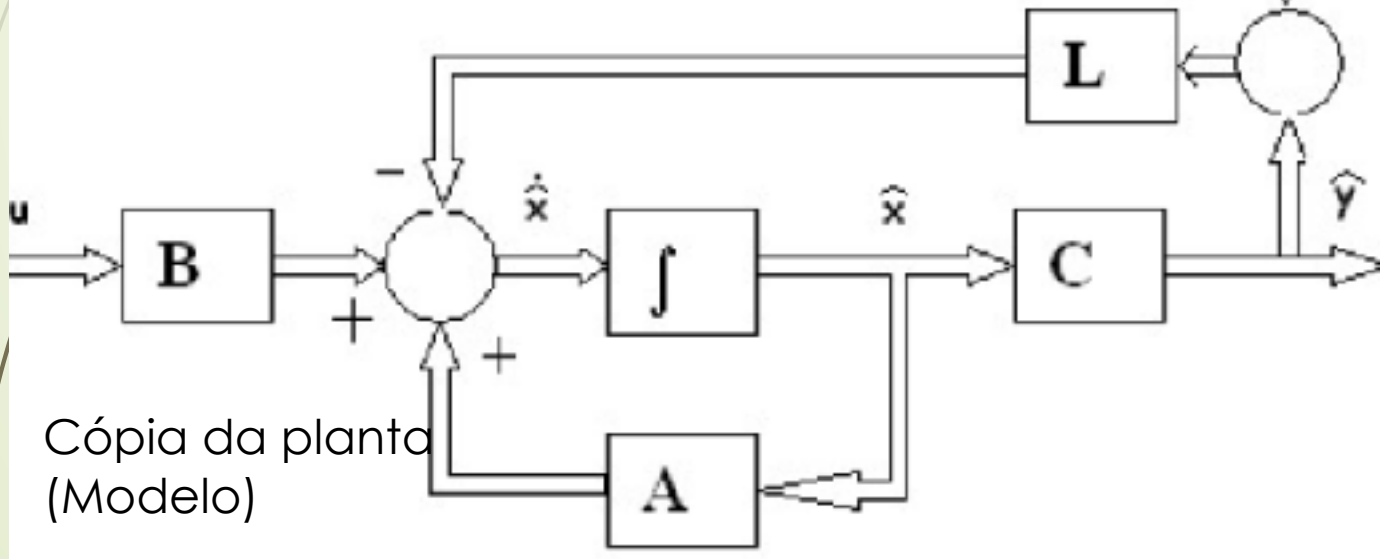
O sistema é dito ser observável se

$$\text{posto}[W_o] = n$$

Projeto do observador



Planta real



Cópia da planta
(Modelo)

Equação do observador

As equações do observador são

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

ou

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

Como calcular L?

Erro:

$$e = x - \hat{x}$$

e

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = Ax + Bu - [(A - LC)\hat{x} + Ly + Bu]$$

$$\dot{e} = Ax + LC\hat{x} - A\hat{x} - Ly$$

$$\dot{e} = (A - LC)x + (A - LC)\hat{x}$$

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

$$e(t) = e^{(A-LC)t} e(0)$$

- O erro tende a zero se os autovalores da matriz A-LC tiverem parte real negativa.

Como calcular L?

Portanto, a matriz L deve ser calculada de modo que os autovalores de $(A-LC)$ tenham parte real negativa.

Pode-se usar o comando place da seguinte forma:

```
L=place(A',C',polos)
```

```
L=L' (transposta)
```

Tem-se assim que $\text{eig}(A-L^*C)=\text{polos}$.

Os polos do observador devem ser mais rápidos que a realimentação de estados.



Exemplo no Matlab

Seja o exemplo anterior, com

```
>> a=[1 1;0 -2];
```

```
>> b=[0;2];
```

```
>> l=[-1 -2];
```

```
>> k=place(a,b,l)
```

```
k = [ 3 1]
```



Cont...

Os polos do observador podem ser alocados para

`>> lo=5*I=[-5 -10]` (5 vezes mais rápidos)

lo pode ser obtido através do comando place,

`>> L=place(a',c',lo)`

`L =`

`14.0000 24.0000`

`>> eig(a-L*c)=[10.0000 -5.0000]`

Controle ótimo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u(t) = -Kx(t)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^*Qx + u^*RU)dt$$

Controle ótimo!

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

Função do Matlab que obtêm o ganho K para as matrizes Q e R escolhidas.

Controle ótimo

Seja o modelo em variáveis de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

Escolhendo $Q=10$ e $R=1$, resulta

$$k1=lqr(a,b,10,1)=[1.7417 \ 1.7417]$$

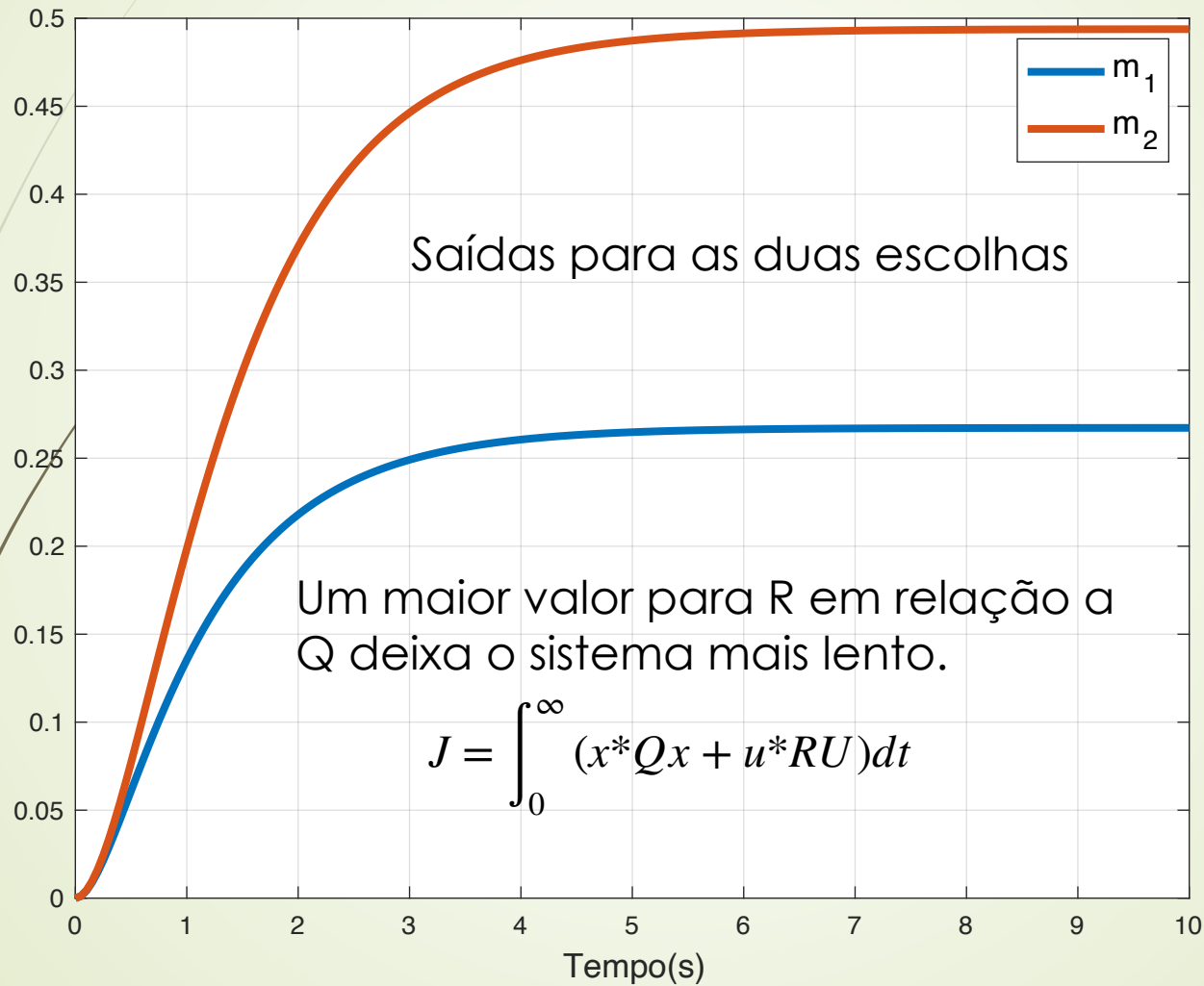
Escolhendo $Q=11$ e $R=10$, resulta

$$k2=lqr(a,b,1,10)=[0.0248 \ 0.0248]$$

$$m1=ss(a-b*k1,b,[1 \ 0],0)$$

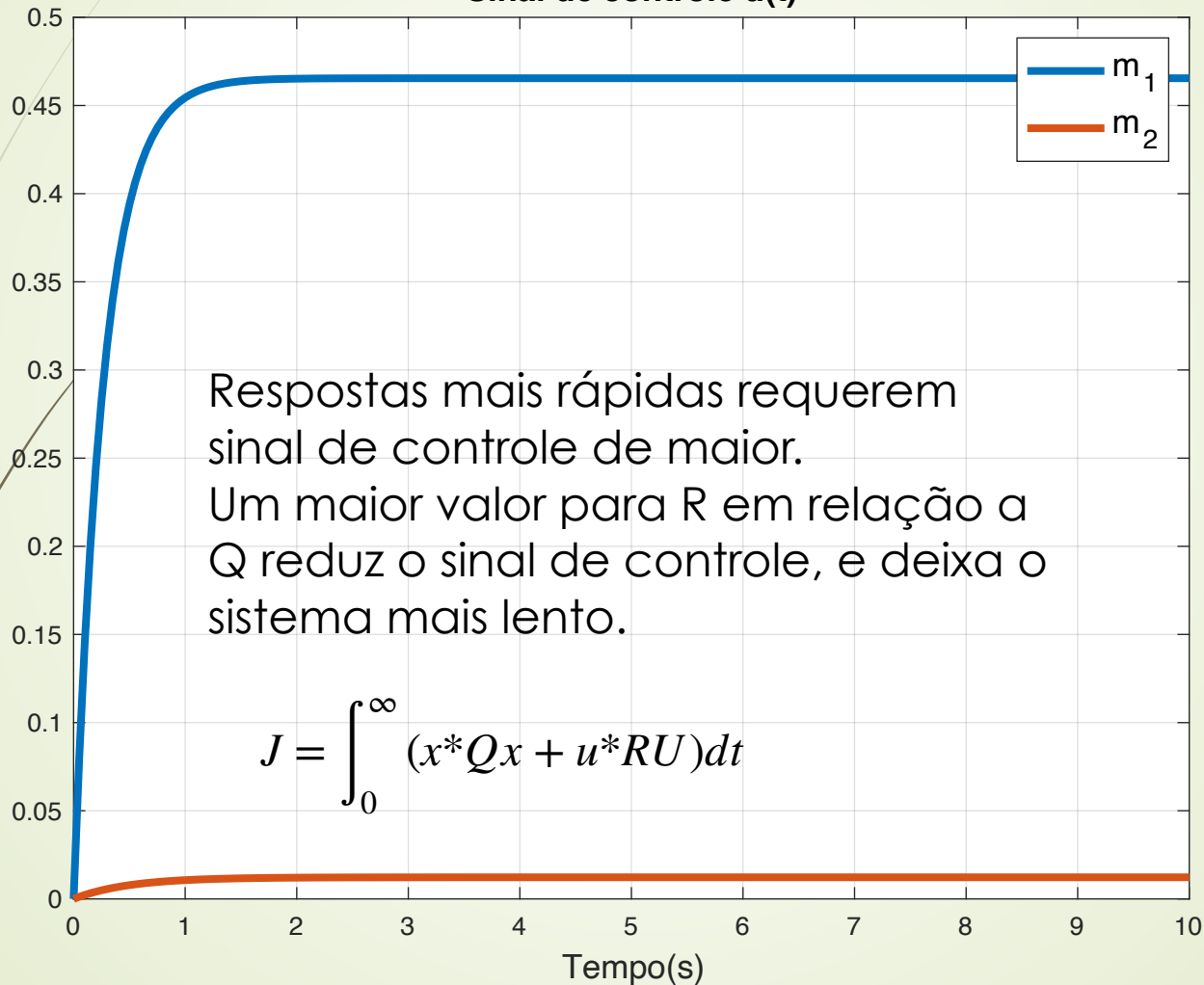
$$m2=ss(a-b*k2,b,[1 \ 0],0)$$

Controle ótimo



Controle ótimo

Sinal de controle $u(t)$





Comentários finais sobre controle moderno:

- 1) A realimentação de estados permite estabilizar o sistema via realimentação de estados desde que ele seja controlável
- 2) A realimentação de estados só pode ser implementada se os estados puderem ser medidos ou observados (observabilidade)
- 3) O objetivo da realimentação de estados é estabilização, mas o erro em regime pode ser considerado adicionando um integrador ao sistema de controle.