

Sistemas realimentados

EP9 - Projeto do Controlador PD

Carlos Daniel Albertino Vieira e Eduardo Junior

Seja a FT $G(s) = \frac{2e^{-0.1s}}{(s^2 + 30s + 1)}$

1 - Aproxime o atraso de transporte de $G(s)$ por Padê de ordem 1, e projete um controlador proporcional via método do lugar das raízes para que o sobressinal da resposta do sistema em malha fechada à entrada degrau seja menor ou igual a 10 %.

A aproximação de Padê de ordem 1 é dada por: $e^{-\theta s} = \frac{-0.5\theta s + 1}{0.5\theta s + 1}$. Logo, é possível obter a função de malha aberta aproximada de $G(s)$ pelo aproximante de Padê como segue:

$$G(s) = \frac{2e^{-0.1s}}{(s^2 + 30s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s^2 + 30s + 1)} \left(\frac{-0.5\theta s + 1}{0.5\theta s + 1} \right)$$

$$G(s) = \frac{2}{(s^2 + 30s + 1)} \left(\frac{-0.05s + 1}{0.05s + 1} \right)$$

$$G(s) = \frac{-0.1s + 2}{(0.05s^3 + 2.5s^2 + 30.05s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{-2s + 40}{(s^3 + 50s^2 + 601s + 20)}$$

Com a função de malha aberta aproximada em mãos, o próximo passo é obter a função de malha fechada de $G(s)$ para um controlador K_p , o que pode ser feito da seguinte forma:

$$G_{MF}(s) = \frac{KG}{1 + KG}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{K \left(\frac{-2s + 40}{s^3 + 50s^2 + 601s + 20} \right)}{1 + K \left(\frac{-2s + 40}{s^3 + 50s^2 + 601s + 20} \right)}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{K(-2s + 40)}{s^3 + 50s^2 + 601s + 20 + K(-2s + 40)}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{-2Ks + 40K}{s^3 + 50s^2 + (601 - 2K)s + 20 + 40K}$$

Da equação de malha fechada, obtém-se a equação característica $L(s)$:

$$L(s) = s^3 + 50s^2 + (601 - 2K)s + 20 + 40K$$

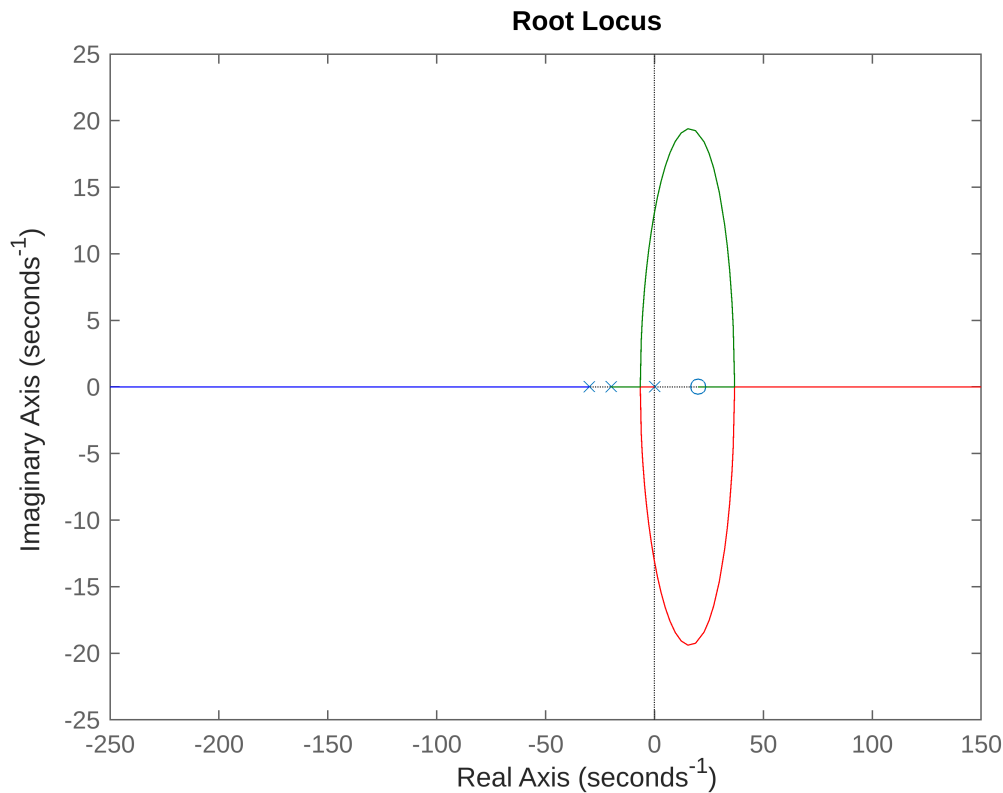
$$L(s) = (s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)$$

Onde p_1, p_2, p_3 são os polos da equação característica.

Conforme o valor de K varia em $L(s)$, os polos se movimentam no plano complexo.

Para entender a movimentação dos polos, é interessante visualizar o L.R. do sistema:

```
G = tf([-2, 40], [1, 50, 601, 20]);  
rlocus(G)
```



Note que nem todo valor de K manterá o sistema estável.

Particularmente para $K=0$, obtém-se os polos -30.2897, -19.6093 e -0.101, que representam os pontos de partidas das raízes no plano complexo.

A especificação fornecida com MP menor que 10% cria uma restrição para os lugares no plano complexo que as raízes podem assumir.

O MP determina o valor de zeta, que por sua vez será utilizado para calcular as coordenadas dos polos no plano complexo. Isso pode ser feito como segue:

$$\zeta = - \frac{\ln\left(\frac{MP}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{MP}{100}\right)}}$$

$$\zeta \geq - \frac{\ln(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.1)}}$$

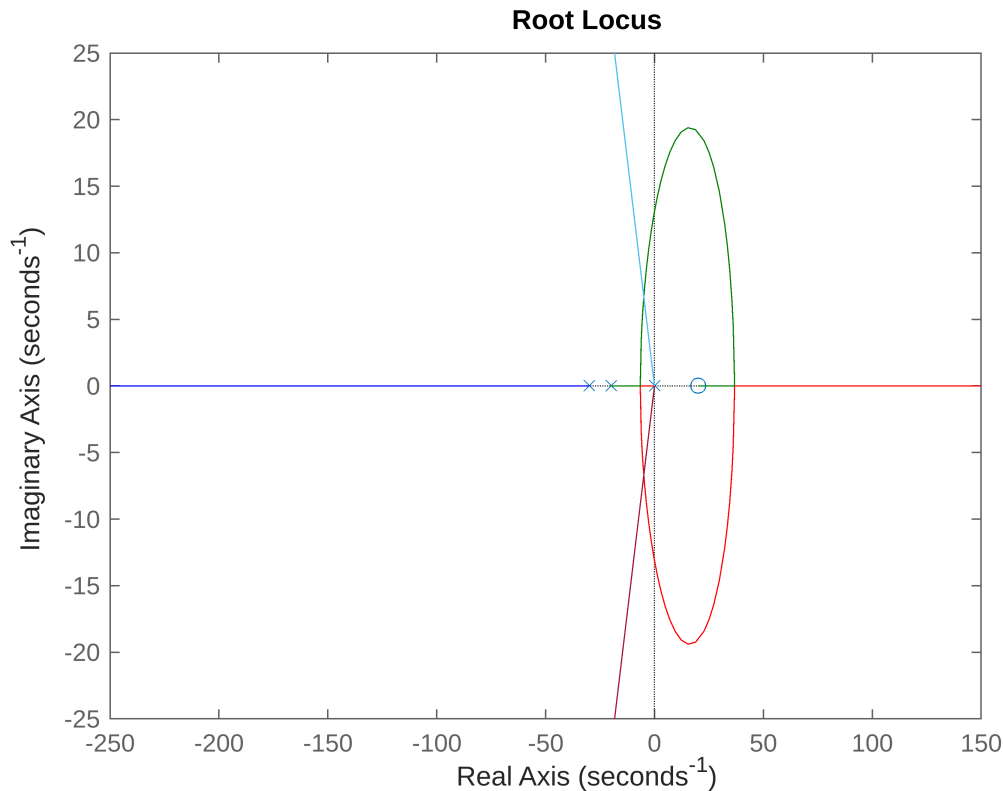
$$\zeta \geq 0.5912$$

O achado anterior fornece que ζ deve ser maior ou igual a 0.5912, o que limita o lugar das raízes a uma região específica do gráfico da malha fechada de G com controlador proporcional.

Para visualizar isso graficamente, é necessário converter ζ para o seu ângulo no plano complexo equivalente, o que pode ser feito como segue:

$$\theta = \cos^{-1}(\zeta) = \cos^{-1}(0.5912) = 53.7578^\circ$$

```
rlocus(G)
L=0:0.1:50;
hold on;
% linha lim. superior
x=L*cos(deg2rad(180-53.7578));
y=L*sin(deg2rad(180-53.7578));
plot([0 x],[0 y]);
% linha lim. inferior
x=L*cos(deg2rad(180+53.7578));
y=L*sin(deg2rad(180+53.7578));
plot([0 x],[0 y]);
hold off;
```



Note que qualquer valor de zeta acima de 0.5912 satisfaz os requisitos da questão.

Preferencialmente, opta-se por fazer zeta igual a 1, pois isso representa um sistema sem oscilação qualquer em sua resposta.

Além disso, outro ponto desejável é manter o polo dominante o mais distante o possível da origem do plano complexo, para torna-lo mais rápido. Para o caso de $G(s)$, o polo dominante é aquele que começa em -0.101.

A partir do L.R. de G e das considerações levantadas, nota-se que será conveniente escolher K tal que coloque os polos no ponto de sela do sistema, uma vez que essa é a configuração das raízes que torna o sistema o mais rápido possível, ao mesmo tempo mantendo zeta em 1.

É possível calcular o ponto de sela do sistema como segue:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

$$N'(s)D(s) + D'(s)N(s) = 0$$

$$-2(s^3 + 50s^2 + 601s + 20) - (-2s + 40)(3s^2 + 100s + 601) = 0$$

$$-2s^3 - 100s^2 - 1202s - 40 + (6s^3 + 200s^2 + 1202s - 120s^2 - 4000s - 24040) = 0$$

$$4s^3 - 20s^2 - 4000s - 24080 = 0$$

$$s^3 - 5s^2 - 1000s - 6020 = 0$$

Os pontos de sela são calculados para desenhar o LR.

Quando se tem o LR desenhado no Matlab, isso não é necessário, pois o desenho está pronto.

A partir da equação final, encontram-se possíveis valores que as raízes assumem no ponto de sela. Nesse caso, as raízes da equação anterior são -36.7088, -25.2015 e -6.5073.

```
f = tf(1, [1, -5, -1000, -6020]);
raizes = pole(f); % 36.7088, -25.2015, -6.5073
```

Ora, pelo lugar das raízes mostrado anteriormente, o único valor válido encontrado para o SPE consistiria no -6.5073.

Logo, duas raízes são iguais a exatamente -6.5073 no ponto de sela.

Além disso, como as raízes são puramente reais, então $|s| = w_n$

Com o valor de s em mãos, é possível calcular o valor de K que coloca as raízes no ponto de sela como segue:

$$1 + GK = 0$$

$$K = -\frac{1}{G}$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

$$K(s) = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$K(s) = -\frac{s^3 + 50s^2 + 601s + 20}{-2s + 40}$$

$$K(-6.5073) = 38.6533$$

Um valor de K=68 que coloca os polos no limite do amortecimento dá uma resposta mais rápida (0.78s) do que este e mantém os 10% de sobrelevação especificados.

Deve-se sempre obter o maior ganho possível, pois dá resposta mais rápida.

Encontrado o valor de K, é possível conferir se a resposta encontrada atende às especificações (overshoot <10%)

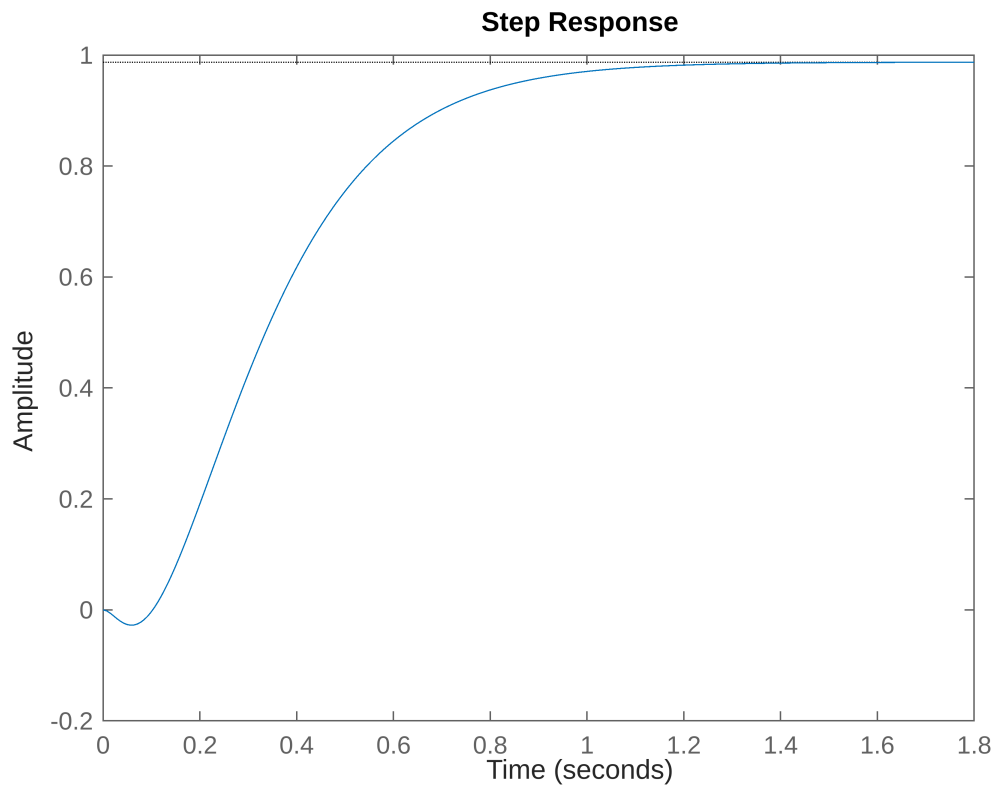
```
K = 38.6533;
s = tf('s');
num = K * (-2*s+40);
den = s*s*s + 50*s*s + (601-2*K)*s + 20 + 40*K;
Gmf = num/den
```

Gmf =

$$\frac{-77.31 s + 1546}{s^3 + 50 s^2 + 523.7 s + 1566}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
step(Gmf)
```



É possível perceber que o sistema atende à especificação, pois não apresentam sequer overshoot. No entanto, por mais rápida que seja a resposta (o que é algo em geral desejado), nota-se que a resposta apresenta um erro estacionário não nulo. Para entrada degrau, esse erro pode ser calculado para $K = 38.6533$ como segue:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \left(\frac{1}{1 + KG} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + KG} \right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s^3 + 50s^2 + 601s + 20}{s^3 + 50s^2 + (601 - 2K)s + 20 + 40K} \right)$$

$$K = 38.6533,$$

$$e_{ss} = 0.0128$$

Portanto, o sistema final obtido é rápido, não tem overshoot, mas possui erro estacionário igual a 0.0128 à entrada degrau.

2 - Projete um controlador PD, para atender simultaneamente as seguintes especificações:

a - Erro em regime à entrada degrau deve ser menor ou igual à metade do valor obtido com o controlador proporcional.

b - Sobressinal menor ou igual a 10 %;

O valor de K_p pode ser calculado pela especificação de erro fornecida.

A fórmula que permite calcular o erro estacionário é dada por:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \left(\frac{1}{1 + (K + sK_d)G} \right) U(s) \right)$$

Para entrada degrau, a fórmula acima se reduz a:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + KG} \right)$$

Logo, podemos encontrar K que atende a um erro menor que $0.0128/2$ como segue:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + KG} \right) \leq \frac{0.0128}{2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + K \left(\frac{-2s + 40}{(s^3 + 50s^2 + 601s + 20)} \right)} \right) \leq 0.0064$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s^3 + 50s^2 + (601 - 2K)s + 20}{s^3 + 50s^2 + (601 - 2K)s + 20 + 40K} \right) \leq 0.0064$$

$$\frac{20}{20 + 40K} \leq 0.0064$$

$$K \geq 77.625$$

Para qualquer valor de K_p maior ou igual a 77.625 será possível atender a especificação de erro.

Com isso em mente, escolhe-se $K_p = 77.625$

$$K = 77.625; \quad \% K_p$$

Com K_p definido, é possível obter a equação característica do sistema. Esse é um passo importante, pois as raízes da equação característica correspondem ao lugar inicial dos polos do sistema.

$$K = 77.625,$$

$$L(s) = s^3 + 50s^2 + (601 - 2K)s + 20 + 40K$$

$$L(s) = s^3 + 50s^2 + 445.75s + 3125$$

$$L(s) = (s + 40,9843)(s - 4.5078 + 7.4785j)(s - 4.5078 - 7.4785j)$$

```
%L = tf(1, [1, 50, 601-2*K, 20+40*K]);
%polos = pole(L); % p1 = -40,9843, p2 = -4.5078+7.4785j, p3 = -4.5078-7.4785j
```

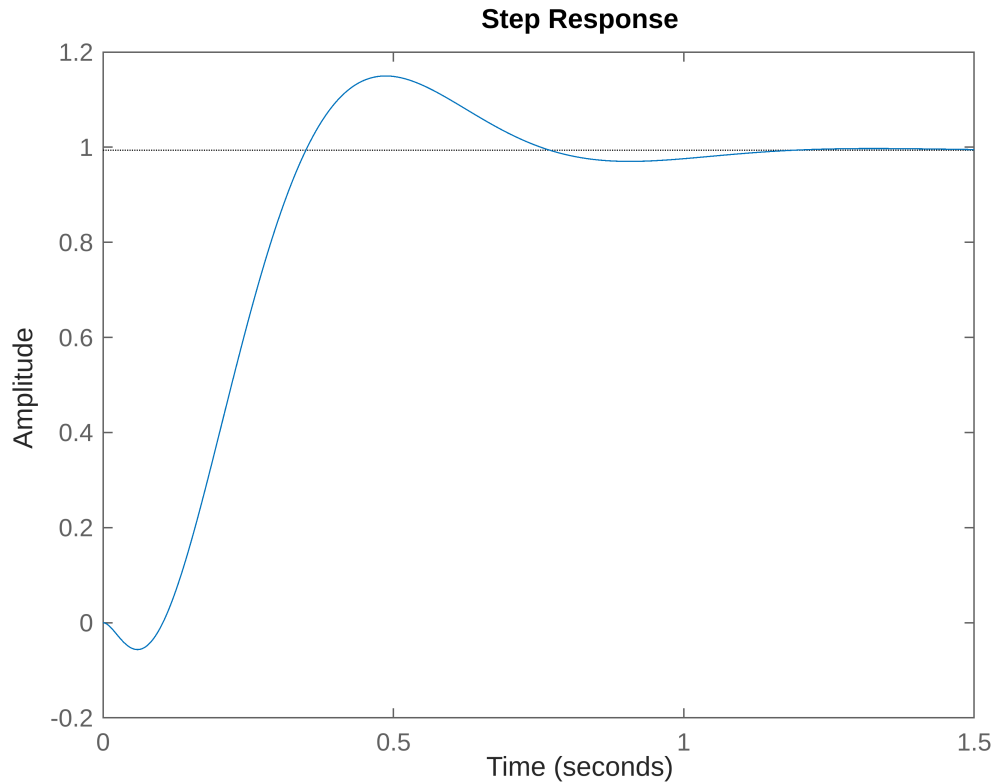
Isso não é útil aqui, pois a análise para o ganho já foi feita e o que se quer agora é a análise para Kd

É possível também determinar O L.R. de G para um controlador puramente proporcional com o valor de Kp encontrado anteriormente.

$$G_{MF}(s) = \frac{-2Ks + 40K}{s^3 + 50s^2 + (601 - 2K)s + 20 + 40K}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{-155.25s + 3105}{s^3 + 50s^2 + 445.75s + 3125}$$

```
Gmf2 = tf([-2*K, 40*K], [1, 50, 601-2*K, 20+40*K]);  
step(Gmf2)
```



```
den = 1 + K*G;  
E = 1/den;  
err = evalfr(E, 0)
```

```
err = 0.0064
```

A partir do gráfico acima, é possível perceber que o erro da malha fechada de G com um controlador proporcional com Kp = 77.625 está dentro da margem desejada.

No entanto, o sinal resultante apresenta um sobressinal que deverá ser reduzido.

O sobressinal poderá ser reduzido consideravelmente escolhendo um valor de Kd apropriado.

A escolha de um Kd apropriado deve ser feita tendo a especificação de sobressinal em mente, que corresponde a MP < 10%.

A partir dessa condição, é possível encontrar o intervalo de ζ como segue:

$$\zeta = - \frac{\ln\left(\frac{MP}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{MP}{100}\right)}}$$

$$\zeta \geq - \frac{\ln(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.1)}}$$

$$\zeta \geq 0.5912$$

O achado anterior fornece que ζ deve ser maior ou igual a 0.5912, o que limita o lugar das raízes a uma região específica do gráfico da malha fechada de G com controlador derivativo proporcional.

Para visualizar isso graficamente, é necessário converter ζ para o seu ângulo no plano complexo equivalente, o que pode ser feito como segue:

$$\theta = \cos^{-1}(\zeta) = \cos^{-1}(0.5912) = 53.7578^\circ$$

Além disso, é preciso calcular a equação característica da malha fechada de G para um controlador proporcional derivativo, o que pode ser feito como segue:

$$L(s) = 1 + (K_p + K_d s)G = 0$$

$$1 + (K_p + K_d s)G = 0$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-2s + 40}{(s^3 + 50s^2 + 601s + 20)},$$

$$1 + (K_p + K_d s)\left(\frac{N(s)}{D(s)}\right) = 0$$

$$1 + (K_p N(s) + K_d s N(s))\left(\frac{1}{D(s)}\right) = 0$$

$$1 + (K_d s N(s))\left(\frac{1}{D(s) + K_p N(s)}\right) = 0$$

$$1 + \left(\frac{K_d s N(s)}{D(s) + K_p N(s)}\right) = 0$$

$$H(s) = \frac{s N(s)}{D(s) + K_p N(s)} = \frac{-2s^2 + 40s}{(s^3 + 50s^2 + 601s + 20) + K_p(-2s + 40)}$$

$$H(s) = \frac{-2s^2 + 40s}{s^3 + 50s^2 + (601 - 2K_p)s + 20 + 40K_p},$$

$$1 + K_d H = 0$$

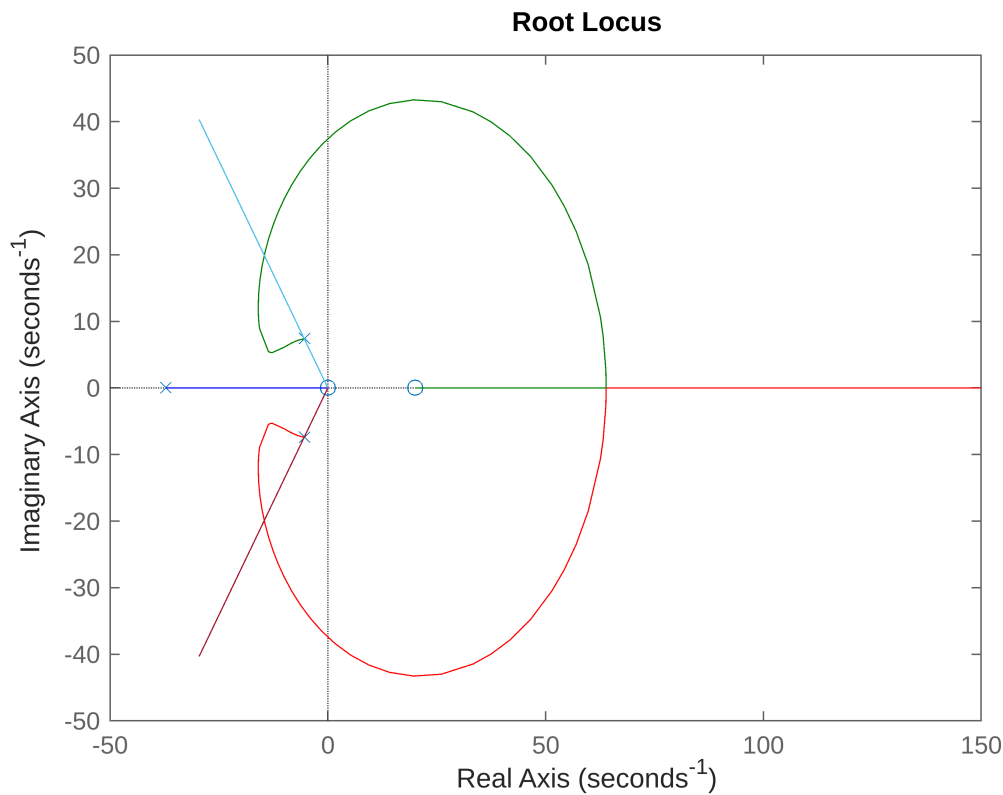
$$L(s) = 1 + (K_p + K_d s)G = 1 + K_d H$$

$$1 + K_d H = (s + 40.9843)(s + 4.5078 - 7.4785j)(s + 4.5078 + 7.4785j)$$

```
H = tf([-2, 40, 0], [1, 50, 601-2*K, 20+40*K]); % H
% poles = pole(H); % p1 = -40.9843, p2 = -4.5078+7.4785j, p3=-4.5078-7.4785j
```

Com a malha fechada de G para um controlador proporcional derivativo em mãos, é possível analisar seu lugar das raízes e procurar a região que atende ao MP especificado.

```
Hmf = feedback(H, 1);
rlocus(Hmf);
L=0:0.1:50;
hold on;
% linha lim. superior
x=L*cos(deg2rad(180-53.7578));
y=L*sin(deg2rad(180-53.7578));
plot([0 x],[0 y]);
% linha lim. inferior
x=L*cos(deg2rad(180+53.7578));
y=L*sin(deg2rad(180+53.7578));
plot([0 x],[0 y]);
hold off;
```



```
%rltool(Hmf)
```

No gráfico acima, o L.R. compreendido entre as duas retas desenhadas atende a especificação de $MP \leq 10\%$, para $K_p = 77.625$.

É possível perceber que o controlador proporcional derivativo adiciona um zero ao sistema.

O zero adicionado está em função de K_p e K_d e pode ser calculado como segue:

$$C(s) = K_p + K_d s = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right)$$

$$1 + \frac{K_d}{K_p} z = 0 \Rightarrow z = -\frac{K_p}{K_d}$$

Lembrando que para $K_d = 0$, os polos/zeros do sistema correspondem aos da malha aberta (H)

Conforme o valor de K_d varia de 0 até infinito, esse zero passa a se movimentar em direção a $-\infty$ no eixo real.

É possível encontrar K_d a partir da equação característica, como segue.

$$1 + K_d H = 0$$

$$K_d = -\frac{1}{H}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

$$K_d(s) = -\frac{D(s)}{N(s)} = \frac{-s^3 - 50s^2 - 445.75s - 3125}{-2s^2 + 40s}$$

Ao escolher um valor específico de s, é possível encontrar o valor de Kd que posiciona um dos polos da malha fechada de H naquela posição.

Ao analisar o L.R. previamente plotado, chegou-se a conclusão que o melhor valor possível para posicionar s seria: (-13.3,0). A lógica por trás dessa escolha se deve a forma como os polos dominantes da resposta se movimentam. Inicialmente, os polos que dominam a resposta de Hmf correspondem aos polos complexos. No entanto, existe um momento em que o polo puramente real passa a ser o polo dominante da resposta. O momento em que essa transição ocorre corresponde a aproximadamente -13.3, o que foi obtido através do Irttool.

Muito bom, quando o polo real é dominante sobre o par complexo, deve-se escolher Kd a partir do LR e simulação, pois a resposta não pode ser prevista pelo par complexo.

Portanto:

$$K_d(-13.3) = 4.164$$

```
fKd = tf([-1, -50, -601+2*K, -20-40*K], [-2, 40, 0]);
Kd = evalfr(fKd,-13.3);
s=tf('s');
C=K+Kd*s;
zero_adicionado=-K/Kd
```

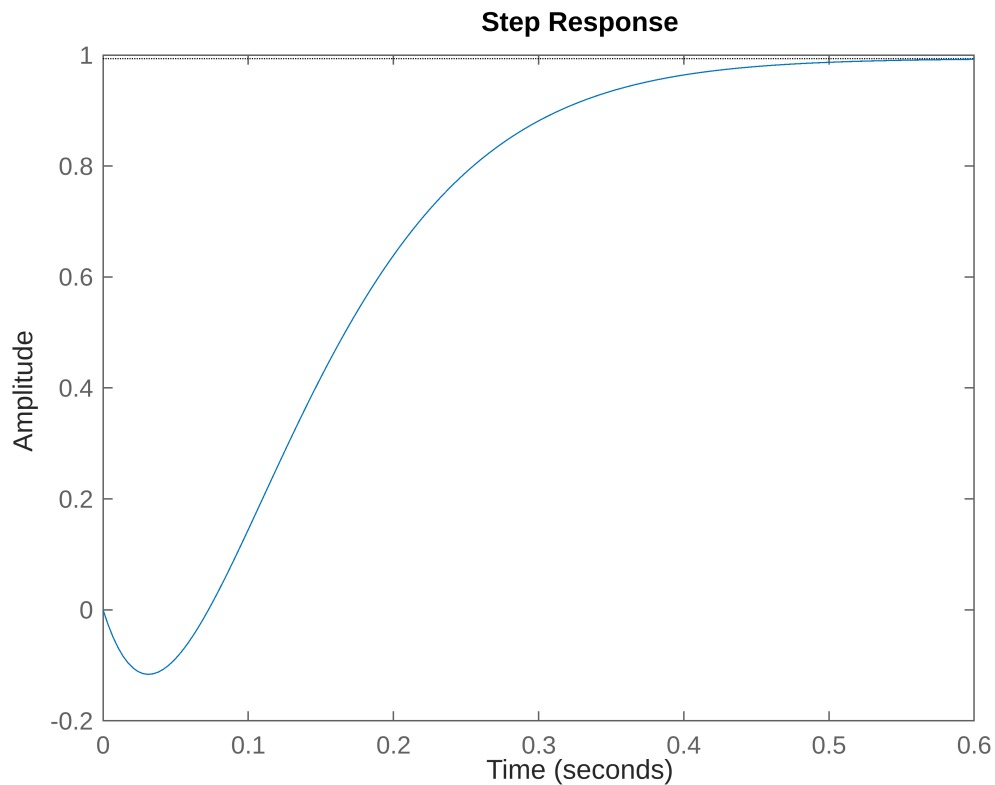
```
zero_adicionado = -18.6419
```

Com o valor de Kp e Kd definidos, o sistema passou a ter um L.R. diferente, em razão da posição em que o zero se encontra.

Escolhidos Kp e Kd, não se faz mais LR

É possível ainda conferir se o sistema em questão atende às especificações de MP e de erro calculadas:

```
Gmf3 = feedback(C*G, 1);
step(Gmf3)
```



```
E = 1/(1+C*G);                                E=feedback(1,CG)
err = evalfr(E, 0) % erro ao degrau            tambem pode ser com dcgain(E)

err = 0.0064
```

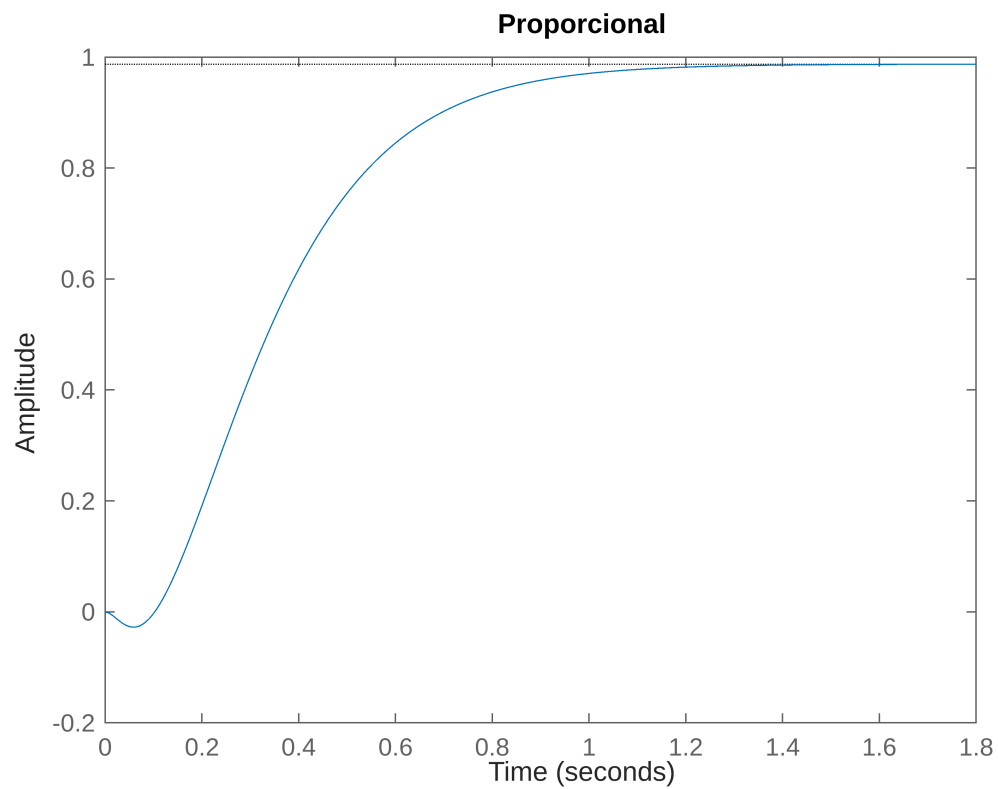
Finalmente, o sistema resultante atende às especificações, pois o erro do sistema é menor do que 0.0064 ($0.0064 \leq 0.0064$) e não há sobresinal.

3 - Compare as respostas transitórias e em regime permanente dos sistemas de controle com os controladores P e PD projetados nos itens 1 e 2.

```
G = tf([-2, 40], [1, 50, 601, 20]);

K1 = 38.6533;
K2 = 77.625;
Kd = 4.164;
Cp = K1;
Cpd = K2+Kd*s;

Gmfl = feedback(G*Cp, 1);
step(Gmfl)
title('Proporcional')
```



```
E1 = 1/(1+G*Cp);  
erro_p = evalfr(E1, 0)
```

```
erro_p = 0.0128
```

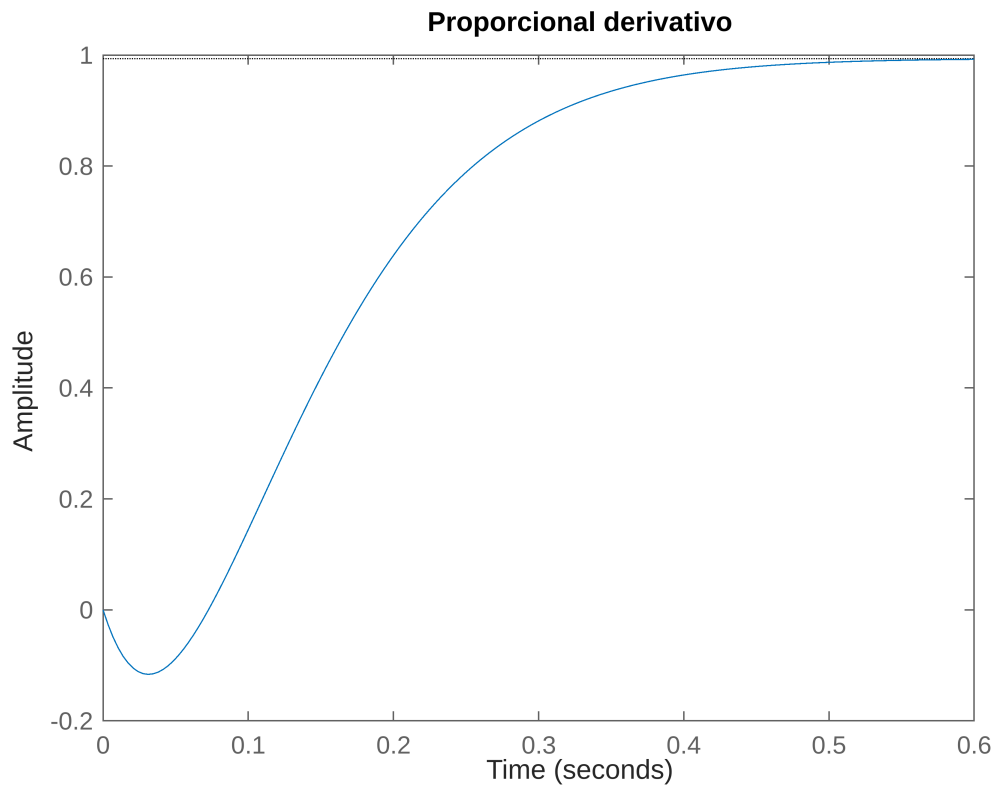
```
info_p = stepinfo(Gmf1);  
MP_p = info_p.Overshoot
```

```
MP_p = 0
```

```
tr_p = info_p.RiseTime
```

```
tr_p = 0.5121
```

```
Gmf2 = feedback(G*Cpd, 1);  
step(Gmf2)  
title('Proporcional derivativo')
```



```
E2 = 1/(1+G*Cpd);
erro_pd = evalfr(E2, 0)
```

```
erro_pd = 0.0064
```

```
info_pd = stepinfo(Gmf2);
MP_pd = info_pd.Overshoot
```

```
MP_pd = 0
```

```
tr_pd = info_pd.RiseTime
```

```
tr_pd = 0.2178
```

Como é possível observar, ambos os projetos de controladores atingiram os requisitos especificados. No entanto, é notório que possuem diferenças e semelhanças.

Começando pelas semelhanças, ambos os sistemas não apresentam Overshoot ($MP = 0$), são estáveis e tem erro estacionário não nulo.

Quanto às diferenças, o sistema obtido com controlador proporcional apresenta um erro maior do que o sistema que utiliza controlador derivativo proporcional. Isso se deve pelo próprio design do controlador derivativo, que foi projetado para ter um erro menor do que o sistema com controlador puramente proporcional.

Além disso, o sistema com controlador derivativo possui um tempo de subida menor do que o tempo de subida do sistema que utiliza controle puramente proporcional. Isso se deve a componente derivativa desse controlador, que apresenta como característica atenuar o sobresinal e diminuir o tempo de subida.

Outra diferença vista no design do controlador PD em relação ao P é a adição de um zero na resposta de malha fechada do sistema. Nesse caso, o zero adicionado serviu para modificar o L.R., a medida que o valor de K_d era especificado uma vez escolhido o valor de K_p .