

CAP 3

ANÁLISE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (SISTEMAS ANALÓGICOS)

SUMÁRIO

3.1.	INTRODUÇÃO	1
3.2.	OBTENÇÃO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE FORMA ALGÉBRICA	1
3.3.	REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	4
3.3.1.	DIAGRAMAS DE BODE	4
3.3.2.	DIAGRAMA DE NYQUIST (OU DIAGRAMA POLAR)	4
3.3.3.	CARTA DE NICHOLS	5
3.4.	ELABORAÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE PARA SISTEMAS DE FASE MÍNIMA	12
3.5.	ELABORAÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE PARA SISTEMAS DE FASE NÃO-MÍNIMA	21
3.6.	RELAÇÕES COM O DIAGRAMA DE MÓDULO DE BODE	22
3.7.	RELAÇÕES COM O DIAGRAMA DE NYQUIST	24
3.8.	CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST	25
3.8.1.	CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST SIMPLIFICADO	30
3.8.2.	CRITÉRIO DE NYQUIST PARA SISTEMAS INVERSOS	34
3.9.	MARGENS DE GANHO E DE FASE	35
3.10.	MATLAB	43
3.11.	LISTA DE EXERCÍCIOS	43

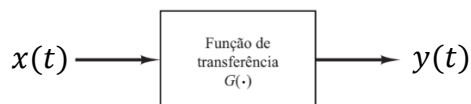
3.1. INTRODUÇÃO

O termo *resposta em frequência* significa a resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal. O teste desses sistemas é efetuado variando a frequência da senoide em um intervalo conhecido. Pode-se resumir a análise de respostas em frequência pelos seguintes tópicos:

- Resposta em frequência é **a resposta em regime permanente** de um sistema a uma entrada senoidal cuja frequência é variada dentro de certo intervalo.
- O método de resposta em frequência e o LR são complementares.
- A resposta em regime permanente de um sistema estável linear e invariante no tempo (LTI) a uma entrada senoidal não depende das condições iniciais.
- Um sistema LTI estável com uma entrada senoidal terá, em regime permanente, uma saída senoidal com a mesma frequência da entrada, porém com amplitude e fase de saída diferentes da entrada.

3.2. OBTENÇÃO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE FORMA ALGÉBRICA

Seja um sistema da forma:



Uma excitação em regime permanente,

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

nesse sistema, produz uma resposta da forma:

$$y_{ss}(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

em que,

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega) \quad (\text{coordenadas retangulares})$$

$\begin{array}{|l} Re[G(j\omega)] \\ Im[G(j\omega)] \end{array}$

e

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

ou

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) \quad (\text{coordenadas polares})$$

PROCEDIMENTO

A obtenção da resposta em frequência de forma algébrica é realizada efetuando-se as seguintes etapas:

1. Obtenha a FT do sistema.
2. Substitua “s” por “j ω ” em $G(s)$ obtendo $G(j\omega)$.

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$
3. Separe a parte real da parte imaginária de $G(j\omega)$ obtendo

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$
4. Obtenha o módulo de $G(j\omega)$.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$
5. Obtenha a fase de $G(j\omega)$.

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

6. A resposta em regime permanente é dada por:

$$y_{ss}(t) = |G(j\omega)|A \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

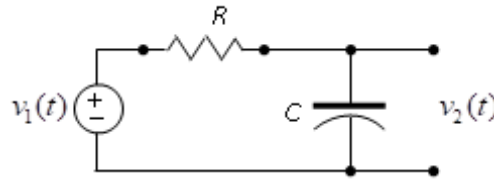
Para a entrada

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

OBS:

- Se $\angle G(j\omega) < 0$ então há um atraso de fase do sistema na frequência ω .
- Se $\angle G(j\omega) > 0$ então há um avanço de fase do sistema na frequência ω .

Exemplo 1 – Obtenha a resposta em frequência para o circuito abaixo.



SOLUÇÃO

1. Obtenha a FT do sistema.

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = G(s) = \frac{V_C(s)}{V_R(s) + V_C(s)} = \frac{I(s) \frac{1}{Cs}}{RI(s) + I(s) \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{RCs + 1}}$$

2. Substitua “s” por “j ω ” em $G(s)$ obtendo $G(j\omega)$.

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}}$$

3. Separe a parte real da parte imaginária de $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1} \times \frac{1 - jRC\omega}{1 - jRC\omega} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + (RC\omega)^2} = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} - j \frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$R(\omega) = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$X(\omega) = -\frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

4. *Obtenha o módulo de $G(j\omega)$.*

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + (RC\omega)^2}\right)^2 + \left(-\frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + (RC\omega)^2}\right)^2 (1 + (RC\omega)^2)} = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

5. *Obtenha a fase de $G(j\omega)$.*

$$\angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{-\frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}}{\frac{1}{1 + (RC\omega)^2}}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{-RC\omega}{1}\right)$$

Como a parte imaginária é negativa e a parte real é positiva, a tangente está no quarto quadrante, logo a tangente é negativa.

$$\angle G(j\omega) = -\text{tg}^{-1}(RC\omega)$$

6. *Resposta em regime permanente*

Assim, para uma entrada em regime permanente $x(t) = A \sin(\omega t)$, a saída será:

$$y_{ss}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\right) A \sin(\omega t - \text{tg}^{-1}(RC\omega))$$

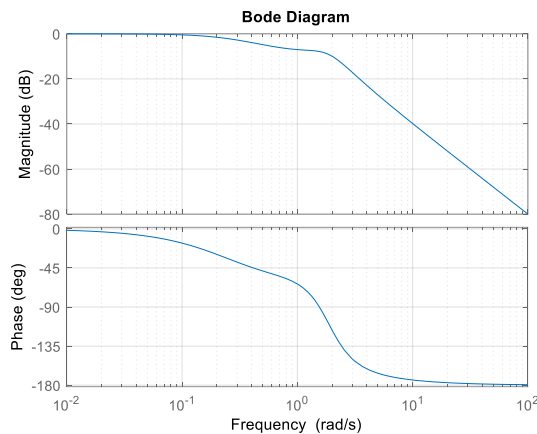
3.3. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A resposta em frequência de sistemas de controle pode ser representada graficamente através dos diagramas de Bode, Nyquist e Carta de Nichols.

3.3.1. DIAGRAMAS DE BODE

O diagrama de Bode é constituído por dois gráficos em que a frequência é mapeada na escala logarítmica:

1. $|G(j\omega)| \times \omega$, onde o módulo é dado em decibéis [dB] e a frequência em [rad/s].
2. $\angle G(j\omega) \times \omega$, onde a fase é dada em graus e a frequência em [rad/s].



Devido ao uso da escala logarítmica na frequência, a multiplicação dos ganhos de cada termo de 1ª e de 2ª ordem da função de transferência é convertida em somas. Assim, é possível elaborar um gráfico para cada elemento da função e depois somá-los para a obtenção do diagrama final.

PROCEDIMENTO

1. Aplica-se o método para obtenção da resposta em frequência para obter $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$.
2. Obter $|G(j\omega)|$ em decibéis a partir da equação $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$.
3. Obter $\angle G(j\omega)$ em graus a partir da equação $\angle G(j\omega)_{graus} = \frac{180}{\pi} \angle G(j\omega)$.
4. Para cada valor de ω efetua-se o cálculo de $|G(j\omega)|_{dB}$ e $\angle G(j\omega)_{graus}$.
5. Desenhe os gráficos para cada valor de frequência " ω ".

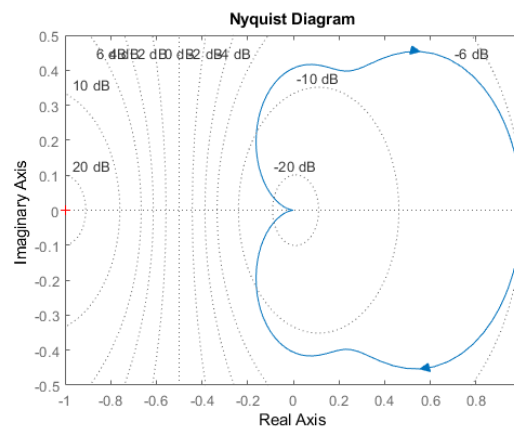
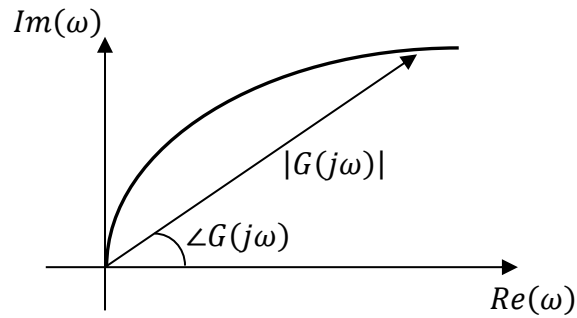
3.3.2. DIAGRAMA DE NYQUIST (OU DIAGRAMA POLAR)

Representa as coordenadas da parte real e da parte imaginária de $G(j\omega)$.

PROCEDIMENTO

1. Obtenha a FT do sistema.
2. Substitua "s" por " $j\omega$ " em $G(s)$ obtendo $G(j\omega)$.
$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$
3. Separe a parte real da parte imaginária de $G(j\omega)$ obtendo
$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

4. Desenhe o gráfico para cada valor de frequência “ ω ”.

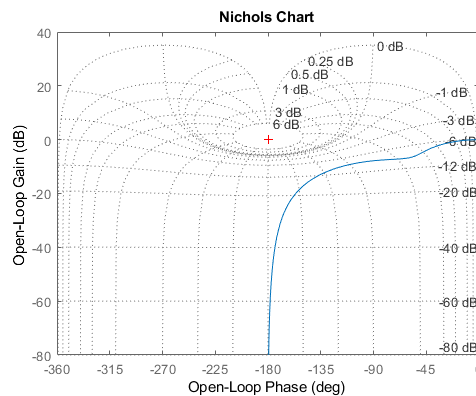


3.3.3. CARTA DE NICHOLS

Representa $|G(j\omega)|$ vs $\angle G(j\omega)$.

PROCEDIMENTO

1. Aplica-se o método para obtenção da resposta em frequência para obter $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$.
2. Obter $|G(j\omega)|$ em decibéis a partir da equação $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$.
3. Obter $\angle G(j\omega)$ em graus a partir da equação $\angle G(j\omega)_{graus} = \frac{180}{\pi} \angle G(j\omega)$.
4. Para cada valor de ω efetua-se o cálculo de $|G(j\omega)|_{dB}$ e $\angle G(j\omega)_{graus}$.
5. Desenhe o gráfico para cada valor de frequência “ ω ”.



Exemplo 2 – Obtenha os diagramas de Bode, o diagrama de Nyquist e a carta de Nichols da função

$$G(s) = 1 + \frac{s}{4}$$

SOLUÇÃO

Aplica-se o método para obtenção da resposta em frequência:

1. Obtenha a FT do sistema.

$$G(s) = 1 + \frac{s}{4}$$

2. Substitua “s” por “j ω ” em $G(s)$ obtendo $G(j\omega)$.

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

$$G(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{4}$$

3. Separe a parte real da parte imaginária de $G(j\omega)$ obtendo

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$G(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{4} \Rightarrow \boxed{R(\omega) = 1} \quad \boxed{X(\omega) = \frac{\omega}{4}}$$

4. Obtenha o módulo de $G(j\omega)$.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{4}\right)^2}$$

$$\boxed{|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{16 + \omega^2}}{4}}$$

5. Obtenha a fase de $G(j\omega)$.

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\frac{\omega}{4}}{1} \right)$$

$$\boxed{\angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{4} \right)}$$

Efetua-se a obtenção do módulo em [dB]:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{16 + \omega^2}}{4}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$\boxed{|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{\sqrt{16 + \omega^2}}{4} \right)}$$

Efetua-se a obtenção da fase em graus:

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = \left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) \right] \times \frac{180}{\pi}$$

Para cada valor de ω efetua-se o cálculo de $|G(j\omega)|_{dB}$ e $\angle G(j\omega)$ em graus:

Para $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$ usa-se limite:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(20 \log \left(\frac{\sqrt{16 + \omega^2}}{4} \right) \right) = 0 \text{ [dB]}$$

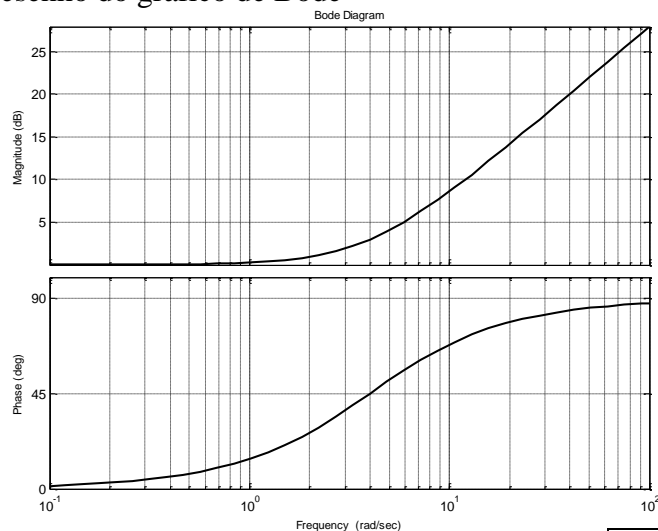
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) \right) = 0 \text{ [rad]} = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20 \log \left(\frac{\sqrt{16 + \omega^2}}{4} \right) \right) = \infty \text{ [dB]}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) \right) = \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} = 90^\circ$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0	0	0
0,01	$2,7 \times 10^{-5}$	0,14
0,1	$2,7 \times 10^{-3}$	1,43
1	$2,7 \times 10^{-1}$	14,03
4	3,01	45,00
10	8,60	68,19
20	14,15	78,69
30	17,57	82,40
40	20,04	84,28
50	21,97	85,42
100	27,96	87,71
∞	∞	90

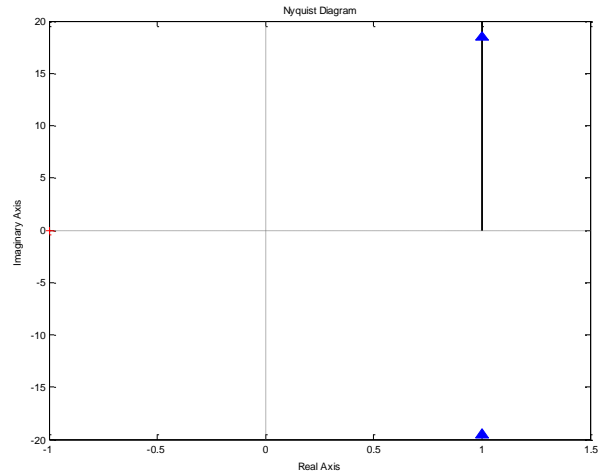
Desenho do gráfico de Bode



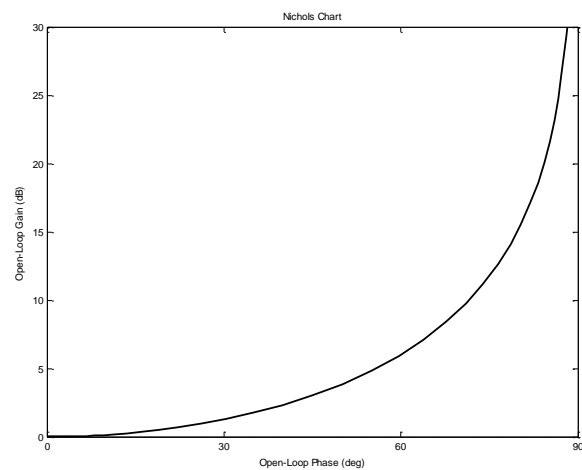
Desenho do Diagrama de Nyquist:

$$R(\omega) = 1$$

$$X(\omega) = \frac{\omega}{4}$$



Desenho da Carta de Nichols



Exemplo 3 – Obtenha os diagramas de Bode, o diagrama de Nyquist e a carta de Nichols da função

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

SOLUÇÃO

Aplica-se o método para obtenção da resposta em frequência:

1. Obtenha a FT do sistema.

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

2. Substitua “s” por “jω” em G(s) obtendo G(jω).

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

3. Separe a parte real da parte imaginária de $G(j\omega)$ obtendo

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

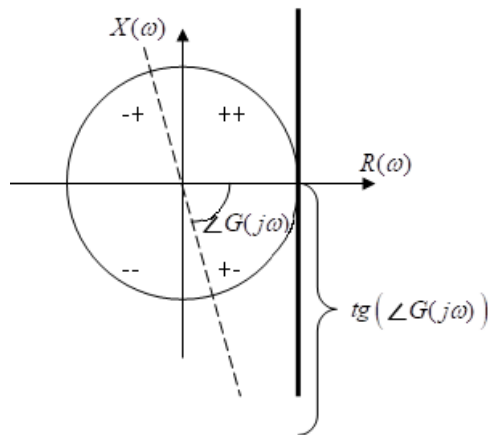
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \times \frac{-j\omega}{-j\omega} = \frac{-j\omega}{\omega^2} = -\frac{j}{\omega} \Rightarrow \boxed{R(\omega) = 0} \quad \boxed{X(\omega) = -\frac{1}{\omega}}$$

4. Obtenha o módulo de $G(j\omega)$.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \Rightarrow |G(j\omega)| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)^2} \Rightarrow \boxed{|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}}$$

5. Obtenha a fase de $G(j\omega)$.

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right) \Rightarrow \angle G(j\omega) = \lim_{R(\omega) \rightarrow 0} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{R(\omega)} \right) \right\}$$



Pela análise do círculo trigonométrico, verifica-se que $\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$.

Efetua-se a obtenção do módulo em $[dB]$:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$\boxed{|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{1}{\omega} \right)}$$

Efetua-se a obtenção da fase em graus:

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\angle G(j\omega) = -90^\circ}$$

Para cada valor de ω efetua-se o cálculo de $|G(j\omega)|_{dB}$ e $\angle G(j\omega)$ em graus:

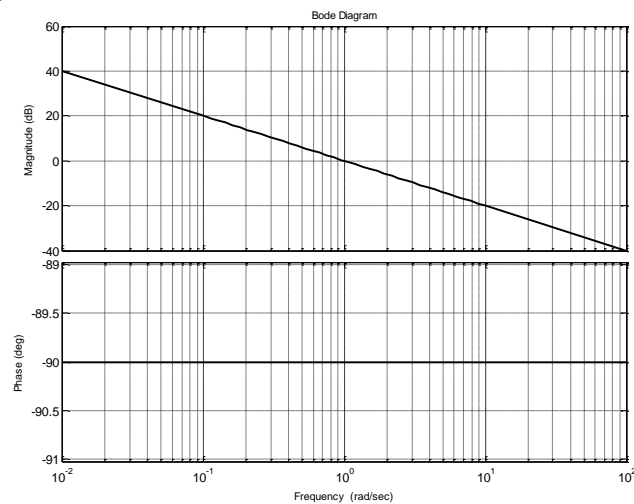
Para $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$ usa-se limite:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(20 \log \left(\frac{1}{\omega} \right) \right) = \infty [dB]$$

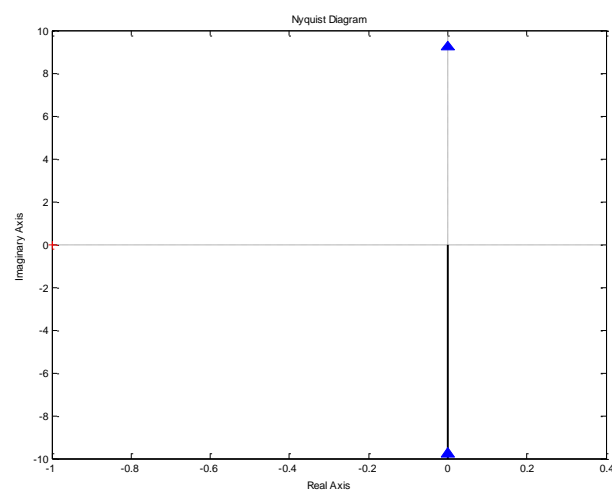
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20 \log \left(\frac{1}{\omega} \right) \right) = 20 \log(0^+) = 20 \log(10^{-\infty}) = -\infty [dB]$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0	∞	-90
0,01	40	-90
0,1	20	-90
1	0	-90
4	-12	-90
5	-14	-90
10	-20	-90
15	-23,5	-90
20	-26	-90
30	-29,5	-90
40	-32	-90
50	-34	-90
100	-40	-90
∞	$-\infty$	-90

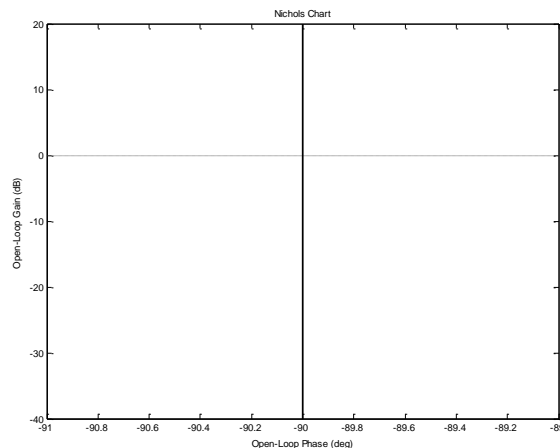
Desenho do gráfico de Bode



Desenho do Diagrama de Nyquist: $R(\omega) = 0$ $X(\omega) = -\frac{1}{\omega}$



Desenho da Carta de Nichols



Exemplo 4 – Obtenha os diagramas de Bode da função abaixo e explique o porquê do comportamento do módulo e da fase deste sistema.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

SOLUÇÃO

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2} + j0$$

$$\boxed{Re(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2}}$$

$$\boxed{Im(\omega) = 0}$$

Assim,

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 - \omega^2} \right|$$

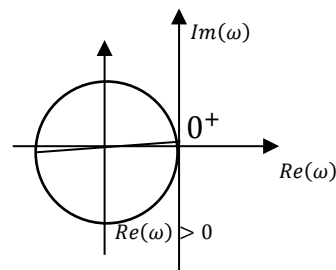
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{1 - \omega^2} \right|$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{0}{\frac{1}{1 - \omega^2}} \right)$$

Observe que:

p/ $\omega < 1$, $Re(\omega) > 0$, então

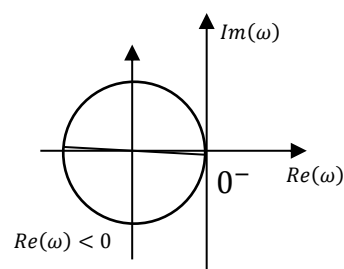
$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(+0) = 0^\circ = 360^\circ = -360^\circ$$



Como um sistema real deve ser causal, ou seja, a saída deve depender das amostras da entrada no passado e não no futuro, então a fase é atrasada em -360° .

p/ $\omega > 1$, $Re(\omega) < 0$, então

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-0) = 180^\circ = -180^\circ$$



Como um sistema real deve ser causal, ou seja, a saída deve depender das amostras da entrada no passado e não no futuro, então a fase é atrasada em -180° .

p/ $\omega = 1$, $Re(\omega) \rightarrow \infty$, então

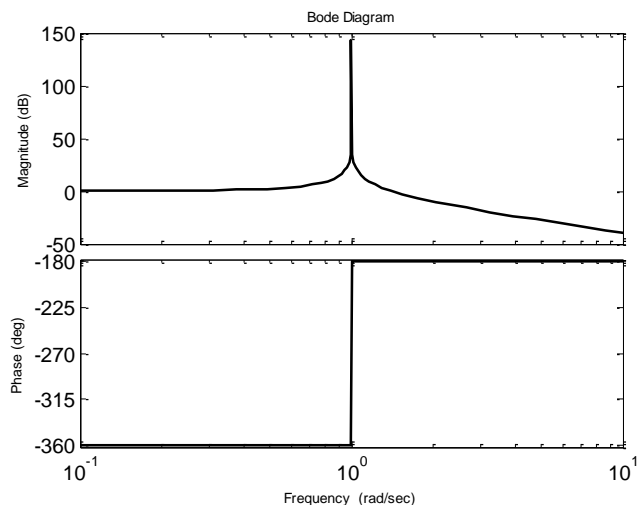
$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{\infty}\right)$$

Logo a fase é indeterminada significando que ela salta de -360° para -180° neste ponto.

Atribuindo valores para ω e montando a tabela abaixo:

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0	0	-360
0,01	0	-360
0,1	0,08	-360
0,8	8,9	-360
1	∞	-
10	-40	-180
100	-80	-180
∞	$-\infty$	-180

Desenhando o Diagrama de Bode

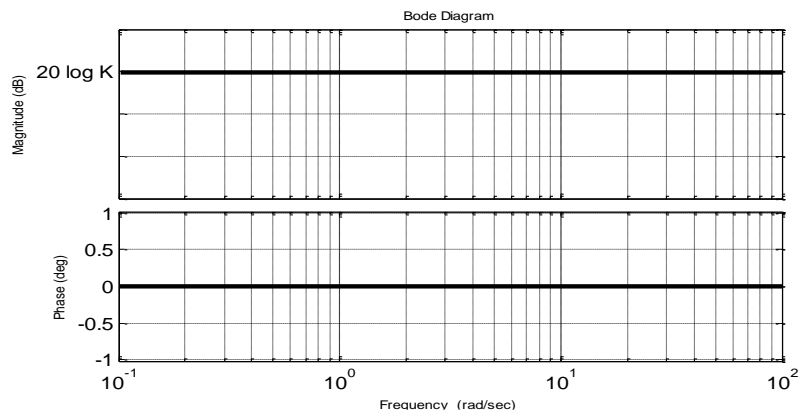


3.4. ELABORAÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE PARA SISTEMAS DE FASE MÍNIMA

O método algébrico, na maioria das vezes, se torna bastante complexo para elaboração da resposta em frequência de sistemas reais. Devido a isso, utiliza-se o método de elaboração de diagramas de Bode por inspeção da equação matemática, conhecendo-se o comportamento gráfico através das assíntotas dos termos básicos da função de transferência. São eles:

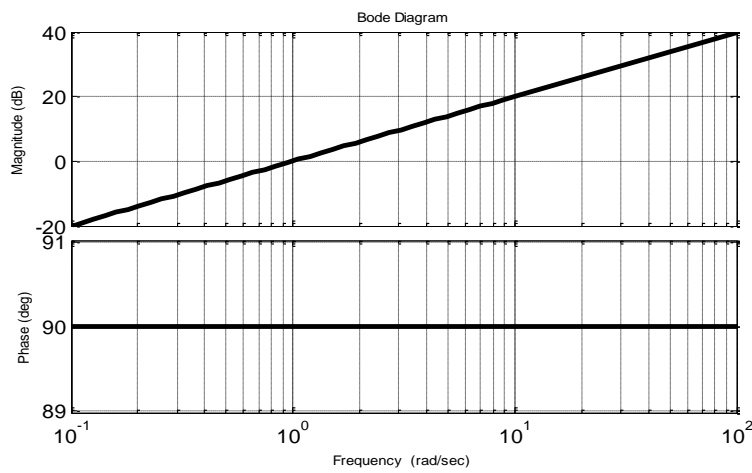
1. Ganho Constante

$$G(s) = K$$



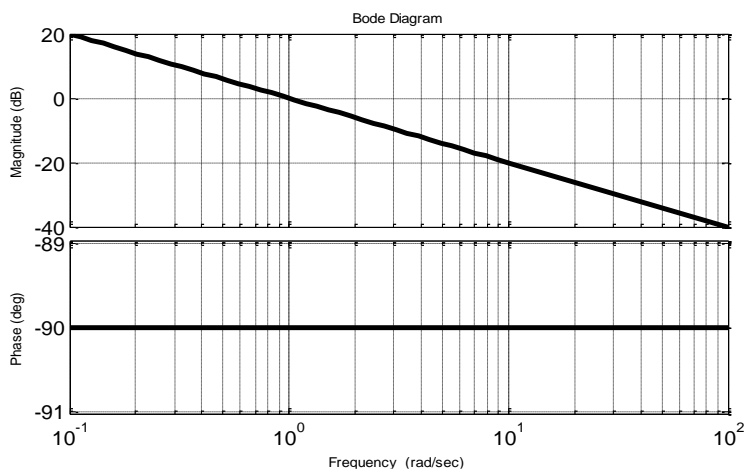
2. Zero na Origem

$$G(s) = s$$



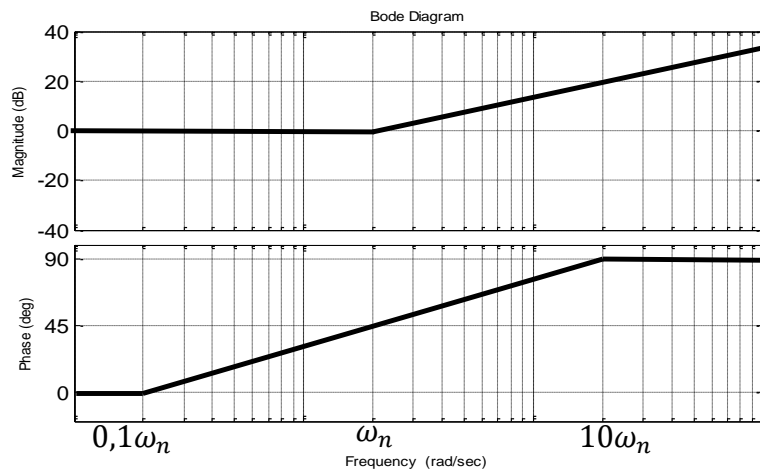
3. Polo na Origem

$$G(s) = \frac{1}{s}$$



4. Zero de 1ª Ordem

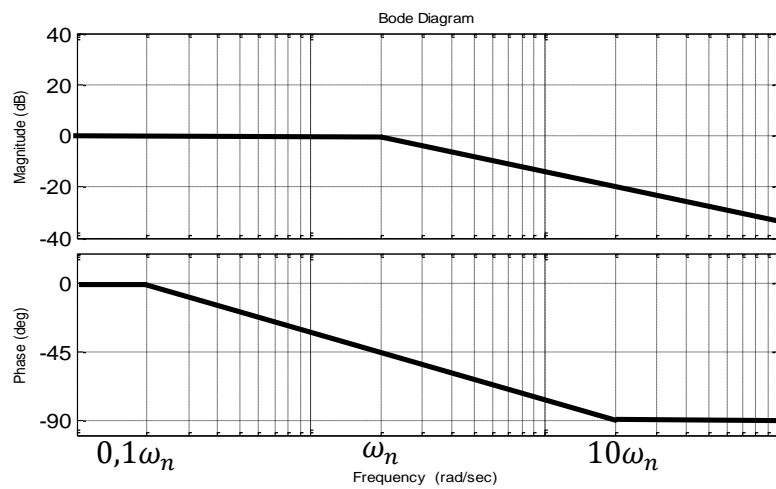
$$G(s) = 1 + \frac{s}{\omega_n}$$



Onde ω_n é a frequência de canto do fator de 1ª ordem.

5. Polo de 1ª Ordem

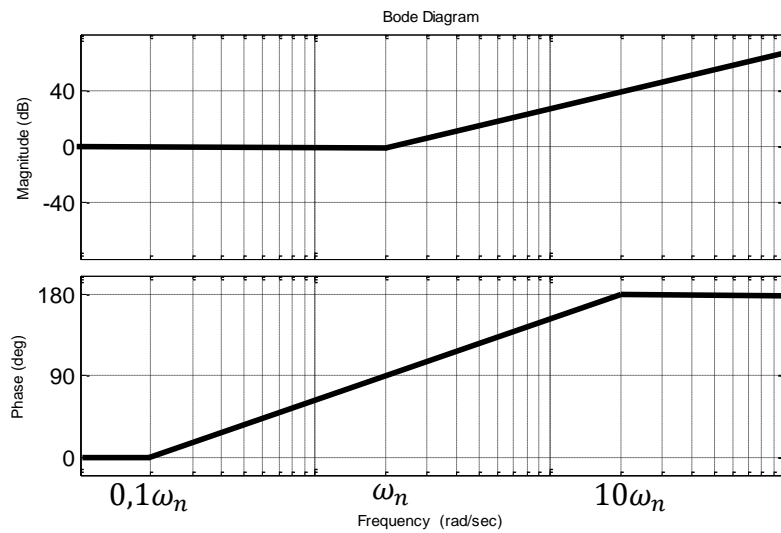
$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_n}}$$



Onde ω_n é a frequência de canto do fator de 1ª ordem.

6. Zero de 2ª Ordem

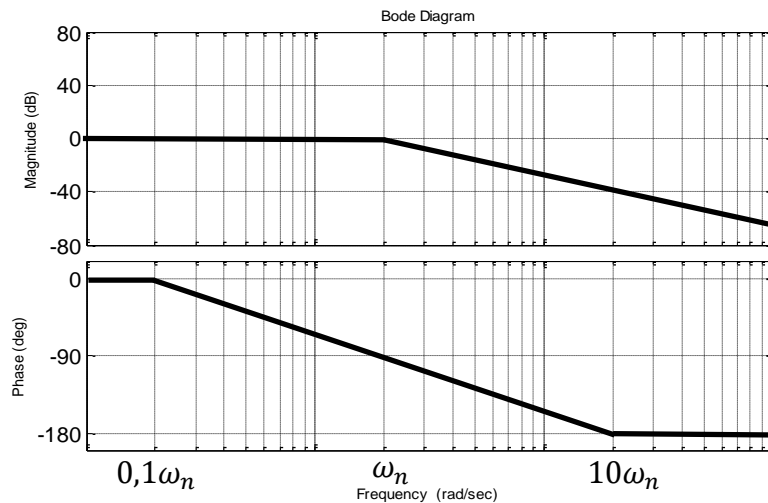
$$G(s) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$



Onde ω_n é a frequência de canto do fator quadrático.

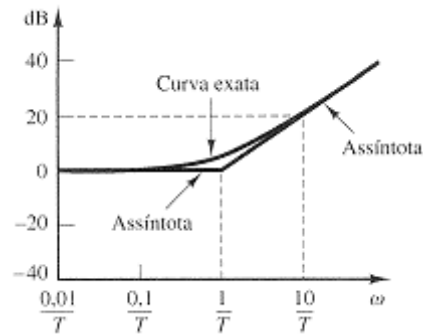
7. Polo de 2ª Ordem

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

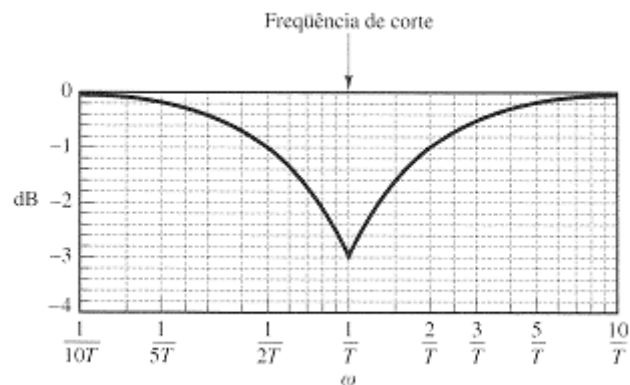


Onde ω_n é a frequência de canto do fator quadrático.

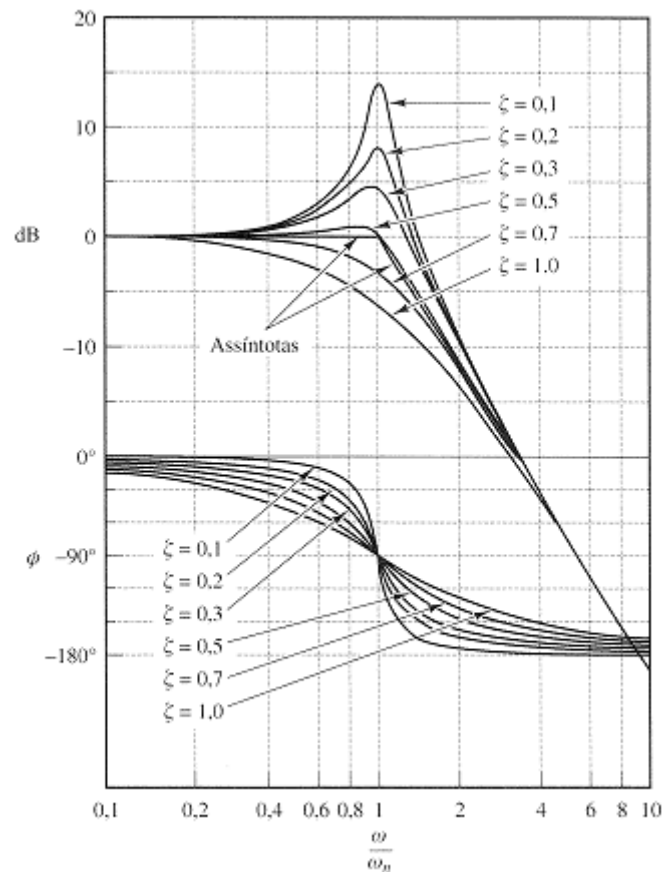
O valor do ganho na frequência de canto $\omega_n = 1/T$ é aproximadamente $|3dB|$. A curva exata do ganho no diagrama de Bode para a frequência de canto é mostrada na figura abaixo.



A variação do ganho em torno deste ponto é mostrada no gráfico abaixo para o caso de atenuação do sinal.



Nos fatores de 2ª ordem, a constante de amortecimento determina a amplitude do pico de ressonância que ocorre na frequência $\omega = \omega_n$. As assíntotas não contemplam a formação desse pico de ressonância e a figura abaixo mostra o comportamento desse pico para diferentes valores de ζ .



O pico de ressonância será tanto maior quanto menor for o valor de ζ .

Por outro lado, a frequência de ressonância do pico é:

$$\omega_r = \begin{cases} \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} & 0 \leq \zeta \leq 0,707 \\ 0 & \zeta > 0,707 \end{cases}$$

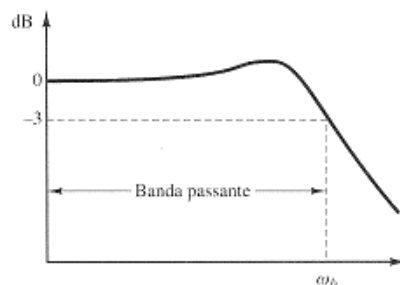
O valor do pico é

$$M_r = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} & 0 \leq \zeta \leq 0,707 \\ 1 & \zeta > 0,707 \end{cases}$$

Essa relação mostra que se um sistema não amortecido for excitado em sua frequência natural, o valor de $G(j\omega)$ se tornará infinito.

A amplitude do pico de ressonância fornece uma indicação da estabilidade relativa do sistema. Um grande pico de ressonância implica na existência de um par de polos dominantes de malha fechada com um coeficiente de amortecimento pequeno, produzindo uma resposta transitória indesejada.

A faixa de frequência entre 0 [rad/s] e a frequência de canto (momento em que o ganho decai 3 dB) é denominada de **banda passante**. A figura abaixo exemplifica a banda no diagrama de Bode.



A **taxa de corte**, por sua vez, é a inclinação da curva de módulo em dB próxima à frequência canto. A taxa de corte indica a capacidade de um sistema distinguir o sinal de ruído.

Sistemas com taxa de corte elevada possuem pico de ressonância muito grande e uma pequena margem de estabilidade relativa.

Exemplo 5 – Obtenha o diagrama de Bode da função:

$$G(s) = \frac{80 \cdot 10^3 (s + 4)}{s(s + 20)(1600 + 40s + s^2)}$$

SOLUÇÃO

Ajustar a função para compará-la com os termos básicos.

$$G(s) = \frac{80 \cdot 10^3 4 \left(\frac{s}{4} + 1 \right)}{s 20 \left(\frac{s}{20} + 1 \right) 1600 \left(1 + \frac{s}{40} + \frac{s^2}{1600} \right)}$$

$$G(s) = \frac{10 \left(\frac{s}{4} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{20} + 1 \right) \left(1 + \frac{s}{40} + \frac{s^2}{1600} \right)}$$

Analisando cada termo básico:

1º) Termo Constante: $K = 10$

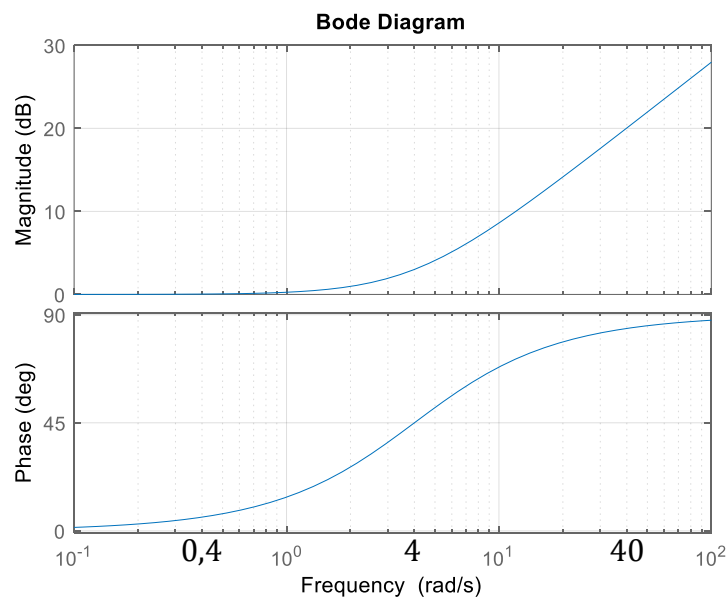
$$|K| = 20 \log K = 20 \log 10$$

$$|K| = 20 \text{ [dB]}$$

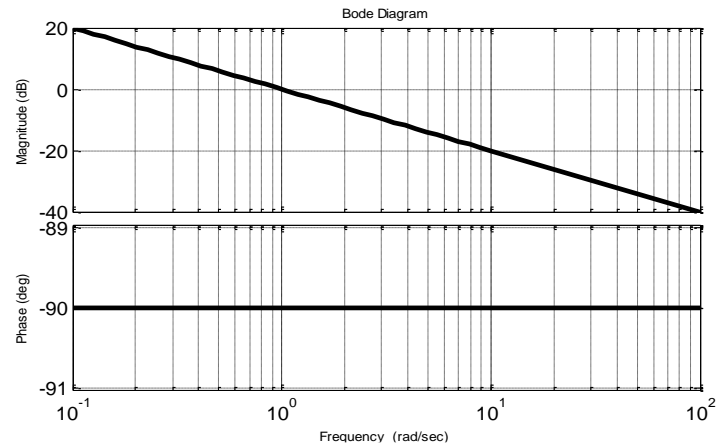
$$\angle K = 0^\circ$$

2º) Zero de 1ª Ordem: $\left(1 + \frac{s}{\omega_n} \right)$

$$\left(1 + \frac{s}{4} \right) = (1 + Ts) \Rightarrow T = \frac{1}{4} \therefore \omega_n = 4 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

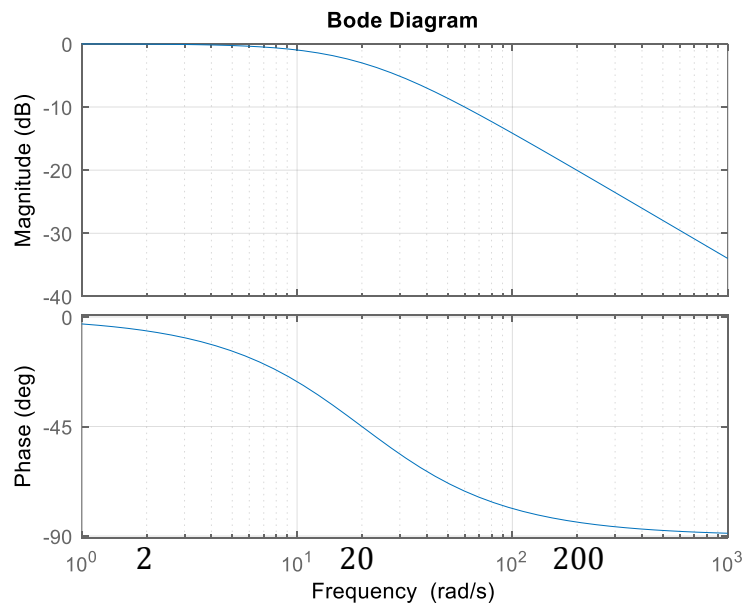


3º) Polo na Origem: $\left(\frac{1}{s}\right)$



4º) Polo de 1ª Ordem: $(1 + Ts)$ ou $\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)$

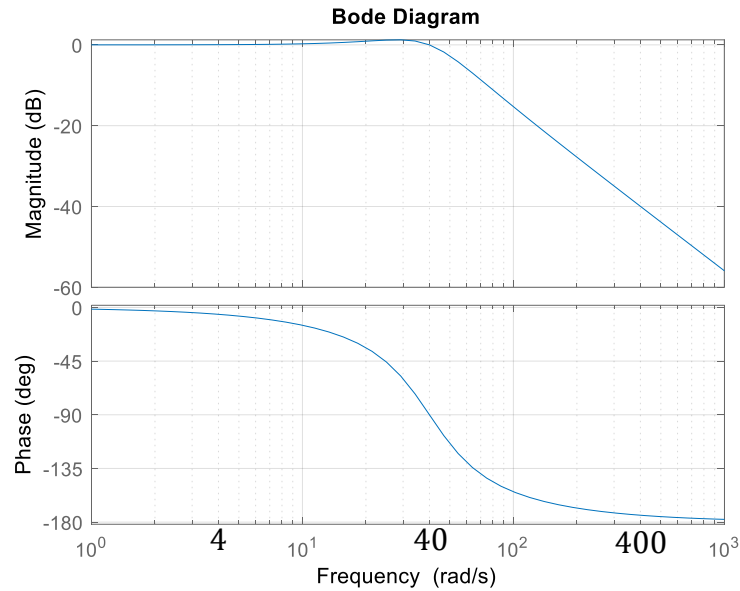
$$\left(1 + \frac{s}{20}\right) = (1 + Ts) \Rightarrow T = \frac{1}{20} \therefore \omega_n = 20 \left[\frac{rad}{s} \right]$$



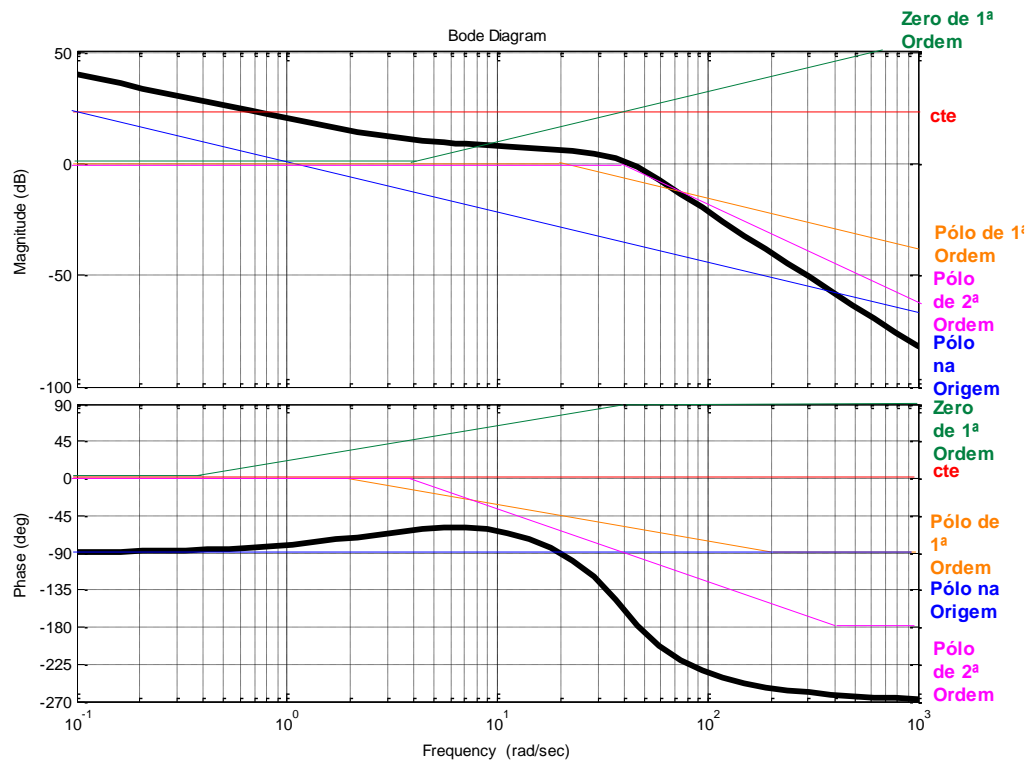
5º) Polo de 2ª Ordem: $\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)$ ou $\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2\right)$

$$\left(1 + \frac{s}{40} + \frac{s^2}{1600}\right) = 1 + 2\xi \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \Rightarrow \omega_n^2 = 1600 \quad e \quad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{40}$$

$$\boxed{\omega_n = 40 \left[\frac{rad}{s}\right]} \quad e \quad \boxed{\xi = \frac{1}{2}}$$

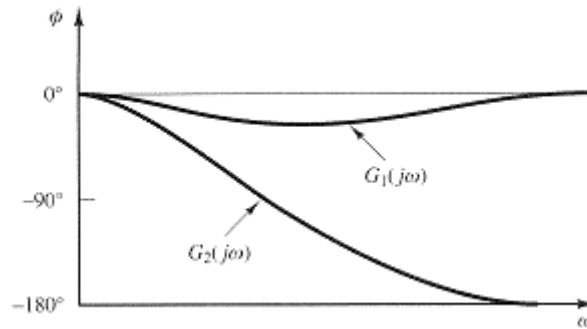


Efetuating-se a soma dos gráficos, temos:



3.5. ELABORAÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE PARA SISTEMAS DE FASE NÃO-MÍNIMA

O diagrama de módulo de Bode para sistemas de fase não-mínima é igual ao sistema de fase mínima, entretanto o diagrama de fase difere. A figura abaixo apresenta um sistema de fase mínima, $G_1(j\omega)$, e outro de fase não mínima, $G_2(j\omega)$.



Para um sistema de fase mínima o ângulo de fase em $\omega \rightarrow \infty$ é

$$\angle G(j\infty) = -90^\circ(q - p)$$

Onde p e q são os graus dos polinômios do numerador e do denominador da função de transferência, respectivamente.

Em sistemas de fase não mínima a relação acima é diferente, todavia, para os dois tipos de sistemas a inclinação da curva de módulo em dB para $\omega \rightarrow \infty$ é a mesma:

$$|G(j\infty)| = -20(q - p) \left[\frac{dB}{dec} \right]$$

Os sistemas de fase não mínima são lentos na resposta. O retardo de transporte ou tempo morto é um exemplo de sistema de controle de fase não mínima. A equação do retardo de transporte é:

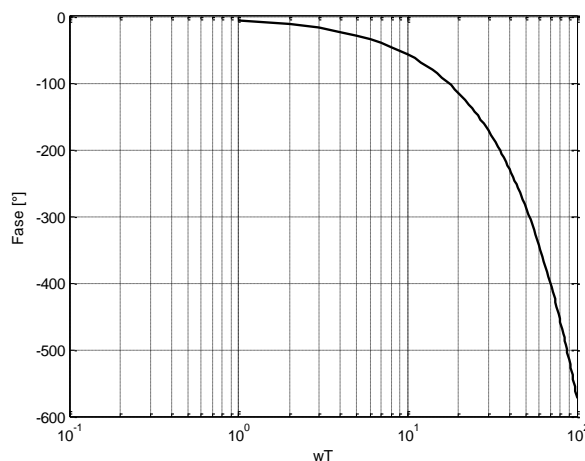
$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

O módulo é constante e a fase é linear:

$$|G(j\omega)| = |\cos(\omega T) - j \sin(\omega T)| = 1 = 0dB$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(-\frac{\sin(\omega T)}{\cos(\omega T)} \right) = -\omega T \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

A fase do Retardo de Transporte é:



Aproximações polinomiais do tempo morto são importantes para a solução de problemas de controle. A fórmula geral de aproximação é:

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \frac{(Ts)^3}{48} + \dots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \frac{(Ts)^3}{48} + \dots}$$

A aproximação frequentemente usada é

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} = \frac{2 - Ts}{2 + Ts}$$

Se o tempo morto, T , for muito pequeno, costuma-se aproximar o retardo de transporte por:

$$e^{-Ts} = 1 - Ts$$

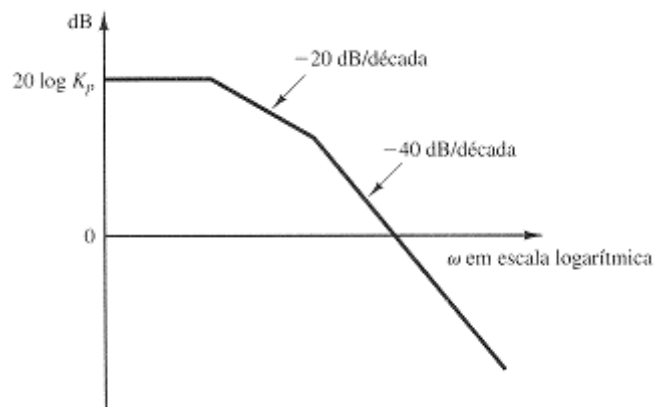
ou

$$e^{-Ts} = \frac{1}{Ts + 1}$$

3.6. RELAÇÕES COM O DIAGRAMA DE MÓDULO DE BODE

O ganho em baixas frequências de um sistema com realimentação unitária determina o valor das constantes de erro estático do sistema.

Para sistemas do tipo 0: O erro estático de posição é determinado pelo ganho constante de baixa frequência do diagrama de bode. A figura abaixo mostra o ponto de cálculo de K_p .



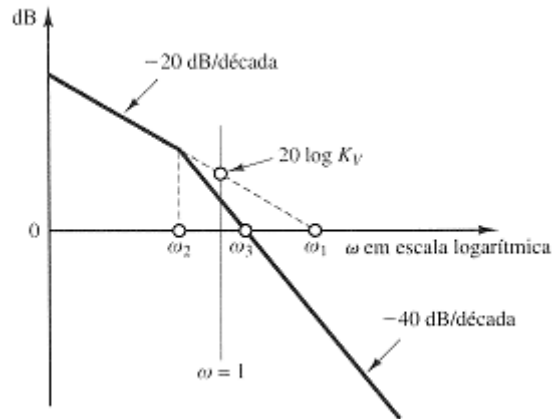
Assim,

$$20 \log K_p = K$$

Onde K é o ganho constante de baixa frequência medido no diagrama de Bode. Assim,

$$K_p = 10^{\frac{K}{20}}$$

Para sistemas do tipo 1: A interseção do segmento inicial de $-20 [dB/dec]$ (ou sua extensão) com a reta $\omega = 1$ vale $20 \log K_v$. Veja figura abaixo.



Assim, como demonstrado no livro texto, K_v é numericamente igual a ω_1 (ponto de interseção com o eixo 0 [dB]).

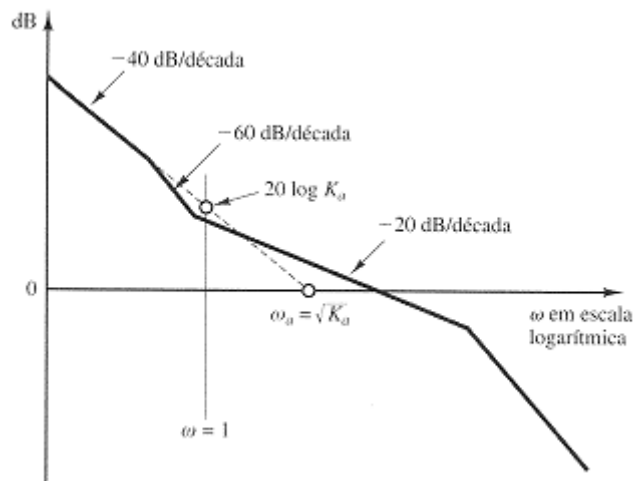
$$K_v = \omega_1$$

O coeficiente de amortecimento para sistemas do tipo 1 com dois polos (sistema de 2ª ordem) é:

$$\zeta = \frac{\omega_2}{2\omega_3}$$

Onde, ω_2 é a frequência de canto do polo fora da origem e ω_3 é a frequência de interseção do gráfico do módulo com o eixo 0 [dB].

Para sistemas do tipo 2: A interseção do segmento inicial de $-40 [dB/dec]$ (ou sua extensão) com a reta $\omega = 1$ vale $20 \log K_a$. Veja figura abaixo.



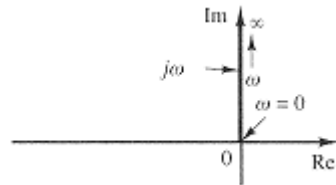
Assim, K_a é numericamente igual a ω_a^2 (ponto de interseção com o eixo 0 [dB]).

$$K_a = \omega_a^2$$

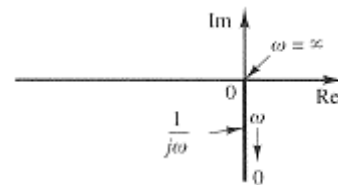
3.7. RELAÇÕES COM O DIAGRAMA DE NYQUIST

O formato dos diagramas polares para os sistemas integral, derivativo, 1ª e 2ª ordem são representados pelas figuras abaixo.

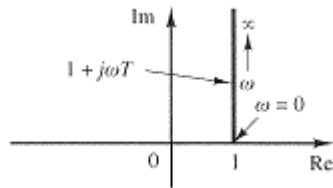
1. Zero na Origem



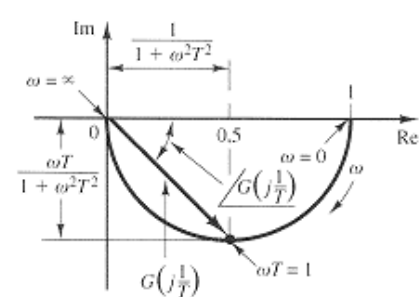
2. Polo na Origem



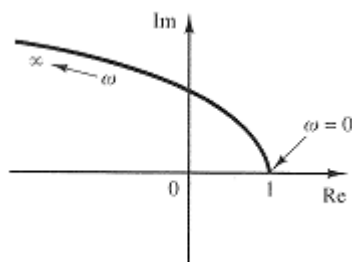
3. Zero de 1ª Ordem



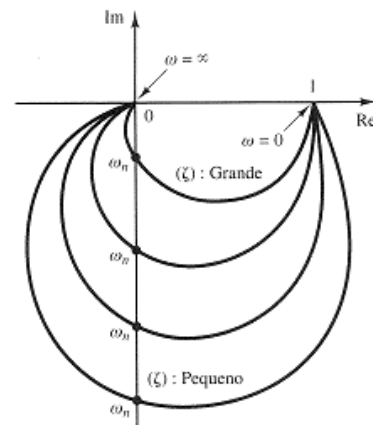
4. Polo de 1ª Ordem



5. Zero de 2ª Ordem

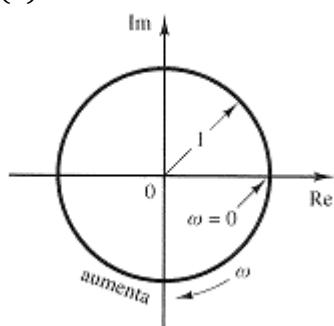


6. Polo de 2ª Ordem



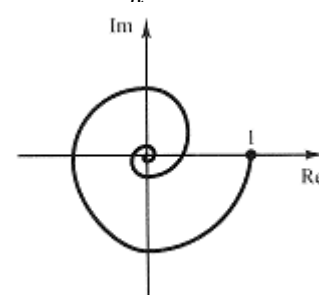
7. Retardo de Transporte

$$G(s) = e^{-s}$$

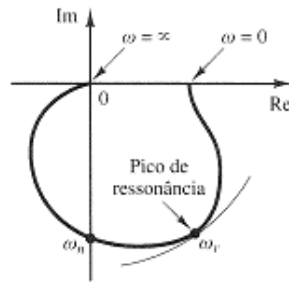


8. Polo de 1ª Ordem com Retardo de Transporte

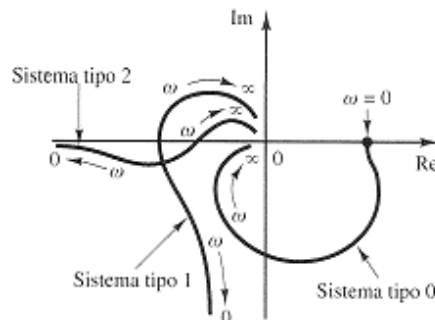
$$G(s) = \frac{e^{-s}}{1 + \frac{s}{\omega_n}}$$



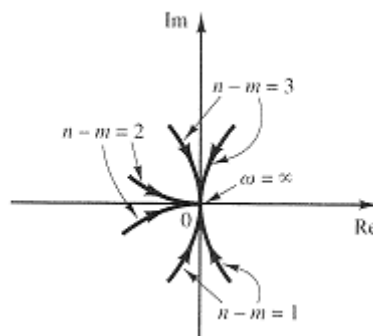
Para sistemas com polos de 2ª ordem, a frequência cujo ponto está mais distante da origem no diagrama polar corresponde à frequência de ressonância.



A forma geral dos diagramas polares para os sistemas do tipo 0, 1 e 2 é mostrada na figura abaixo:



O diagrama polar em altas frequências depende do grau dos polinômios do numerador, m , e do denominador, n , da função de transferência e é mostrado na figura abaixo.



3.8. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

O critério de estabilidade de Nyquist **determina a estabilidade de um sistema de malha fechada** com base na **resposta em frequência de malha aberta** e nos **polos de malha aberta**.

PROCEDIMENTO

1. O Diagrama de Nyquist da FTMA pode envolver o ponto $-1 + j0$, ou não.
2. O número de polos da FTMF no semiplano direito do plano s , (Z), pode ser obtido da relação:

$$Z = N + P$$

onde,

- N é o número de vezes que o Diagrama de Nyquist da FTMA envolve o ponto $-1 + j0$;

- P é o número de polos da FTMA no semiplano direito do plano s ;

Considerações:

- Se $N = 0$, ou seja, se **não existe envolvimento** do ponto $-1 + j0$, então o sistema somente será ESTÁVEL se $P = 0$, caso contrário, o sistema será INSTÁVEL.
 - Se $N < 0$, ou seja, se existe um ou mais **envolvimentos** do ponto $-1 + j0$ no **sentido anti-horário**, então o sistema será ESTÁVEL se $P = -N$, ou seja, $Z = 0$, caso contrário o sistema será INSTÁVEL.
 - Se $N > 0$, ou seja, se existe um ou mais **envolvimentos** do ponto $-1 + j0$ no **sentido horário**, então o sistema será INSTÁVEL.
- Se o Diagrama de Nyquist da FTMA **passar sobre o ponto** $-1 + j0$ então o sistema será MARGINALMENTE ESTÁVEL ou INSTÁVEL. Não há como determinar a estabilidade da FTMF usando o critério.

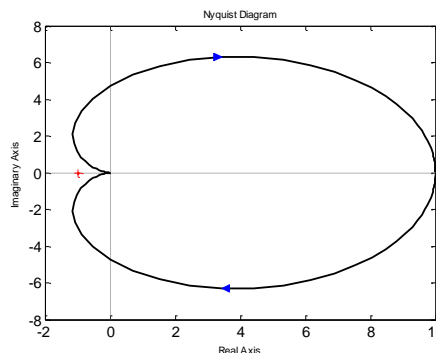
Exemplo 6 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(2s + 1)(s + 1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O diagrama de Nyquist da FTMA é



O Diagrama de Nyquist da FTMA não envolve o ponto $-1 + j0$, logo, $N = 0$. Como os polos da FTMA estão no semiplano esquerdo, $P = 0$, o número de polos da FTMF no semiplano direito será, $Z = N + P = 0$, portanto o sistema é ESTÁVEL.

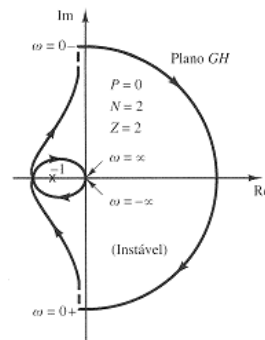
Exemplo 7 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s + 1)(s + 1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O diagrama de Nyquist da FTMA é



O Diagrama de Nyquist da FTMA envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário, logo, $N = 2$, portanto o sistema é INSTÁVEL. É fácil verificar isso obtendo Z , ou seja, o número de polos da FTMA no semiplano esquerdo é $P = 0$, o número de polos da FTMF no semiplano direito será, $Z = N + P = 2$, portanto o sistema é INSTÁVEL.

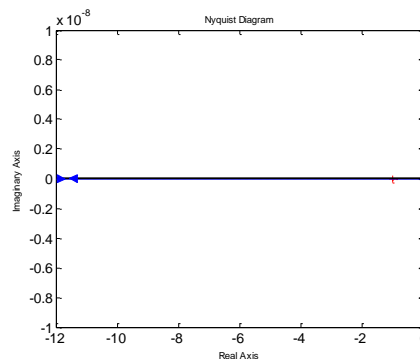
Exemplo 8 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



O Diagrama de Nyquist da FTMA passa sobre o ponto $-1 + j0$, portanto, o sistema será MARGINALMENTE ESTÁVEL ou INSTÁVEL. Verificando as raízes da FTMF no Matlab, elas estão sobre o eixo imaginário mostrando que o sistema é MARGINALMENTE ESTÁVEL.

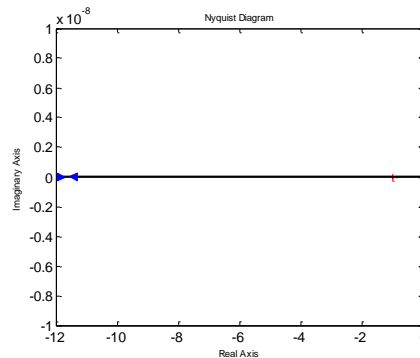
Exemplo 9 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^6}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



O Diagrama de Nyquist da FTMA passa sobre o ponto $-1 + j0$, portanto, o sistema será MARGINALMENTE ESTÁVEL ou INSTÁVEL. Verificando as raízes da FTMF no Matlab, existem duas no semiplano direito mostrando que o sistema é INSTÁVEL.

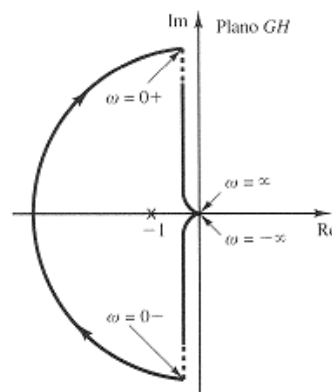
Exemplo 10 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s-1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



O ponto $-1 + j0$ é envolvido pelo Diagrama de Nyquist da FTMA no sentido horário uma única vez, logo, $N = 1$, portanto o sistema é INSTÁVEL, pois, a FTMA possui um polo no semiplano direito, logo, $P = 1$, assim, o número de polos da FTMF no semiplano direito é $Z = N + P = 2$, portanto o sistema é INSTÁVEL.

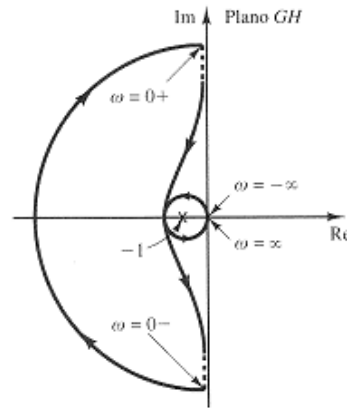
Exemplo 11 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10(s+3)}{s(s-1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

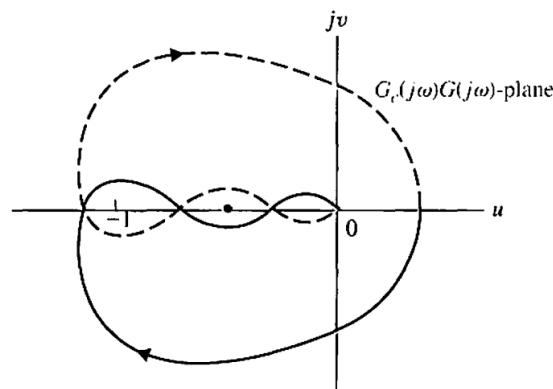
SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



O ponto $-1 + j0$ é envolvido uma única vez pelo Diagrama de Nyquist da FTMA no sentido anti-horário, logo, $N = -1$. A FTMA possui um polo no semiplano direito do plano s , logo $P = 1$, assim, o número de polos da FTMF no semiplano direito do plano s é $Z = N + P = 0$, portanto, o sistema de malha fechada é ESTÁVEL.

Exemplo 12 – O diagrama de Nyquist de um sistema é dado abaixo. O sistema não tem os polos de $G_c(s)G(s)$ no semiplano direito.



- Determine se o sistema é estável e encontre o número de raízes (se houver) no semiplano direito do plano complexo.
- Determine quando o sistema é estável se -1 for o ponto preto sobre o eixo u .

SOLUÇÃO

- O ponto $-1 + j0$ é envolvido duas vezes pelo Diagrama de Nyquist da FTMA no sentido horário, logo, $N = 2$. A FTMA não possui polo no semiplano direito do plano s , logo $P = 0$, assim, o número de polos da FTMF no semiplano direito do plano s é $Z = N + P = 2$, portanto, o sistema de malha fechada é INSTÁVEL com 2 polos da FTMF no semiplano direito do plano complexo.
- Nesse caso o ponto $-1 + j0$ é envolvido duas vezes pelo Diagrama de Nyquist da FTMA. Uma no sentido horário e outra no anti-horário, logo, $N = +1 - 1 = 0$. A FTMA não possui polo no semiplano direito do plano s , logo $P = 0$, assim, o número de polos da FTMF no semiplano direito do plano s é $Z = N + P = 0$, portanto, o sistema de malha fechada é ESTÁVEL sem polos da FTMF no semiplano direito do plano complexo.

3.8.1. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST SIMPLIFICADO

O ângulo de fase de $G(s)H(s)$ em torno do ponto $-1 + j0$ nos extremos $\omega \rightarrow \infty$ até $\omega \rightarrow 0$ permite avaliar o número de zeros da FTMF no semiplano direito (SPD) do plano complexo a partir da relação:

$$Z_d = \frac{\phi}{180^\circ} + \frac{P_\omega}{2} + P_d$$

onde:

Z_d é o número de zeros da FTMA (ou polos da FTMF) que estão no SPD

P_ω é o número de polos de $G(s)H(s)$ que estão sobre o eixo imaginário

P_d é o número de polos de $G(s)H(s)$ que estão no SPD

ϕ é a projeção para $-1 + j0$ do ângulo que $\angle G(s)H(s)$ faz quando ω parte de ∞ e caminha sobre o diagrama de Nyquist até chegar em 0.

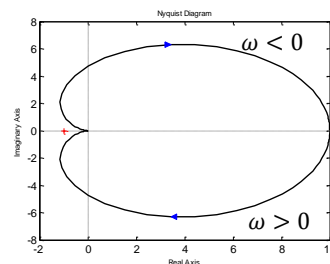
Exemplo 13 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(2s + 1)(s + 1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O diagrama de Nyquist da FTMA é

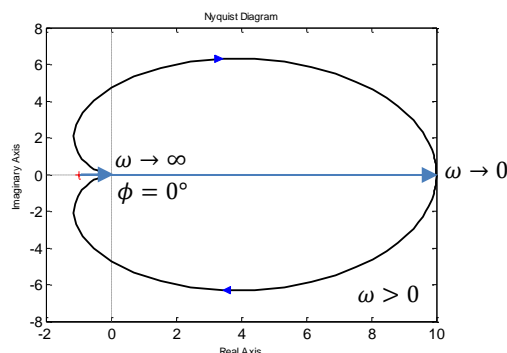


Dados:

$$P_\omega = 0$$

$$P_d = 0$$

ϕ é a projeção para $-1 + j0$ do ângulo que $\angle G(s)H(s)$ faz quando ω varia de ∞ a 0



$$Z_d = \frac{\phi}{180^\circ} + \frac{P_\omega}{2} + P_d = \frac{0^\circ}{180^\circ} + \frac{0}{2} + 0 \rightarrow \boxed{Z_d = 0}$$

Ou seja, não há polos da FTMF no SPD, logo, o sistema é ESTÁVEL.

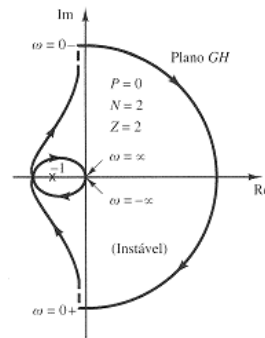
Exemplo 14 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s + 1)(s + 1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O diagrama de Nyquist da FTMA é

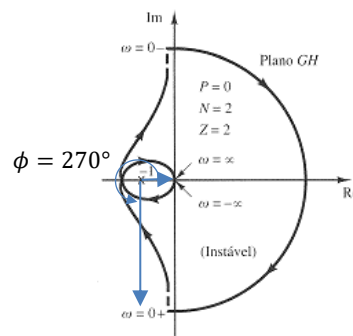


Dados:

$$P_{\omega} = 1$$

$$P_d = 0$$

ϕ é a projeção para $-1 + j0$ do ângulo que $\angle G(s)H(s)$ faz quando ω varia de ∞ a 0



$$Z_d = \frac{\phi}{180^\circ} + \frac{P_{\omega}}{2} + P_d = \frac{270^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} + 0 \rightarrow \boxed{Z_d = 2}$$

Ou seja, não há 2 polos da FTMF no SPD, logo, o sistema é INSTÁVEL.

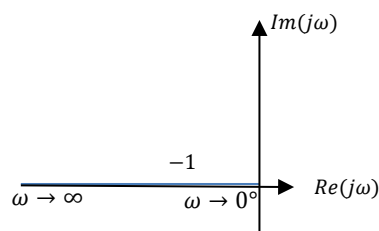
Exemplo 15 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



Como o diagrama de Nyquist passa sobre o ponto $-1 + j0$, não é possível obter ϕ corretamente, logo, não podendo se utilizar o critério simplificado.

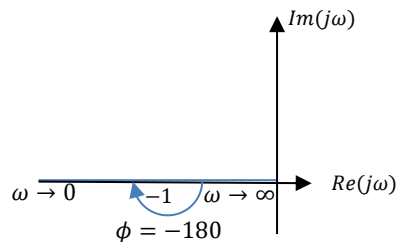
Dados:

$$P_\omega = 2$$

$$P_d = 0$$

ϕ é a projeção para $-1 + j0$ do ângulo que $\angle G(s)H(s)$ faz quando ω varia de ∞ a 0

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \rightarrow \text{Re}(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \quad \text{Im}(j\omega) = 0 \quad \phi = \pm 180^\circ$$



O Diagrama de Nyquist da FTMA passa sobre o ponto $-1 + j0$, portanto, o sistema será MARGINALMENTE ESTÁVEL ou INSTÁVEL.

$$Z_d = \frac{\phi}{180^\circ} + \frac{P_\omega}{2} + P_d = \frac{-180^\circ}{180^\circ} + \frac{2}{2} + 0 \rightarrow \boxed{Z_d = 0}$$

Ou seja, não há polos da FTMF no SPD, porém, como o diagrama passa sobre o ponto $-1 + j0$, sistema é MARGINALMENTE ESTÁVEL.

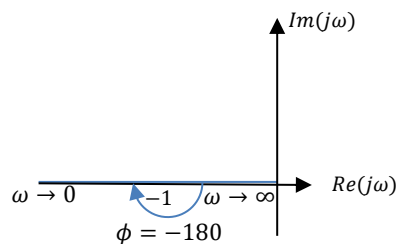
Exemplo 16 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^6}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



O Diagrama de Nyquist da FTMA passa sobre o ponto $-1 + j0$, portanto, o sistema será MARGINALMENTE ESTÁVEL ou INSTÁVEL.

Como o diagrama de Nyquist passa sobre o ponto $-1 + j0$, não é possível obter ϕ corretamente, logo, não podendo se utilizar o critério simplificado.

Dados:

$$P_\omega = 6$$

$$P_d = 0$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \rightarrow \text{Re}(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \quad \text{Im}(j\omega) = 0 \quad \phi = \pm 180^\circ$$

$$Z_d = \frac{\phi}{180^\circ} + \frac{P_\omega}{2} + P_d = \frac{-180^\circ}{180^\circ} + \frac{6}{2} + 0 \rightarrow \boxed{Z_d = 2}$$

Ou seja, há 2 polos da FTMF no SPD, portanto, o sistema é INSTÁVEL.

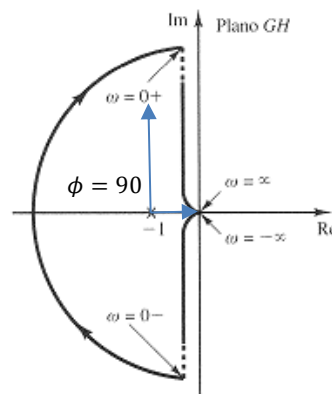
Exemplo 17 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s-1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



Dados:

$$P_\omega = 1$$

$$P_d = 1$$

$$Z_d = \frac{\phi}{180^\circ} + \frac{P_\omega}{2} + P_d = \frac{90^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} + 1 \rightarrow \boxed{Z_d = 2}$$

Ou seja, há 2 polos da FTMF no SPD, portanto, o sistema é INSTÁVEL.

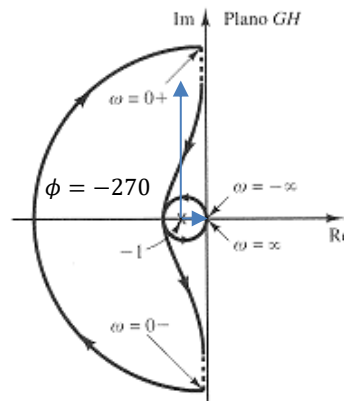
Exemplo 18 – Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária cuja FTMA é

$$G(s)H(s) = \frac{10(s+3)}{s(s-1)}$$

Examine a estabilidade do sistema de malha fechada.

SOLUÇÃO

O Diagrama de Nyquist da FTMA é



Dados:

$$P_{\omega} = 1$$

$$P_d = 1$$

$$Z_d = \frac{\phi}{180^\circ} + \frac{P_{\omega}}{2} + P_d = \frac{-270^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} + 1 \rightarrow \boxed{Z_d = 0}$$

Ou seja, não há polos da FTMF no SPD, portanto, o sistema é ESTÁVEL.

3.8.2. CRITÉRIO DE NYQUIST PARA SISTEMAS INVERSOS

Às vezes o uso de sistemas invertidos diminui o número de cálculos numéricos computacionais e o critério de estabilidade de Nyquist pode ser aplicado como segue:

Para a FTMF ser estável o envolvimento do ponto $-1 + j0$ pelo Diagrama de Nyquist do sistema inverso, $1/G(s)H(s)$, deverá ser no sentido anti-horário e o número de voltas igual ao número de polos de $1/G(s)H(s)$.

Se a FTMA do sistema não invertido, $G(s)H(s)$, não tiver zeros no semiplano direito do plano s , então, para que o sistema de malha fechada seja estável, o número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$ pelo Diagrama de Nyquist de $1/G(s)H(s)$ deverá ser zero.

OBS: Nem sempre é possível usar o critério de Nyquist em sistemas invertidos. Por exemplo, um sistema com retardo de transporte na FTMA como o descrito abaixo

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-sT_1}}{s(T_2s + 1)}$$

Produzirá um número de envoltimentos infinito de $-1 + j0$ pelo Diagrama de Nyquist de $1/G(s)H(s)$.

Exemplo 19 – Obtenha os valores de K que tornem o sistema de malha aberta abaixo estável

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 0,5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

SOLUÇÃO

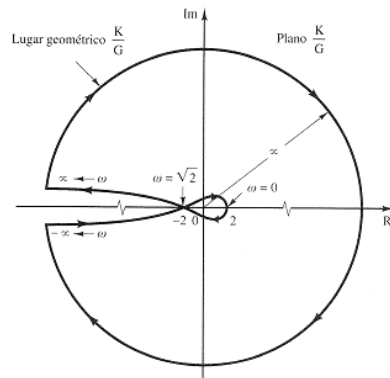
O sistema inverso

$$\frac{1}{G(s)H(s)} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{K(s + 0,5)}$$

Possui um polo em $s = -0,5$. Não existe polos no semiplano direito, portanto $P = 0$ e $Z = N$. Assim, o número de zeros, Z , da equação característica $1 + \frac{1}{G(s)H(s)}$, (ou o número de polos da FTMF) deve ser igual ao número de envoltimentos, N .

Como o número de zeros da FTMF deve ser zero, então não pode haver envoltimentos do ponto $-1 + j0$.

Fazendo o Diagrama de Nyquist de $K/G(s)H(s)$, temos:



O diagrama envolve o ponto crítico $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário. Para estabilizar o sistema devemos encontrar K que desloque o ponto de cruzamento com o eixo real para a direita, assim, pelo diagrama, quando $\omega = \sqrt{2}$, o diagrama polar cruza o ponto -2 no eixo real, então, da equação:

$$\frac{1}{G(s)H(s)} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{K(s + 0,5)}$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{K}{G(j\omega)H(j\omega)} &= \frac{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + 1}{((j\omega) + 0,5)} \\ \frac{K}{G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2})} &= \frac{(j\sqrt{2})^3 + (j\sqrt{2})^2 + 1}{((j\sqrt{2}) + 0,5)} = -2 \\ \frac{K}{G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2})} &= -2 \end{aligned}$$

Para que não haja envolvimento, $G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2}) > -1$, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{K}{-2} &= G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2}) > -1 \\ \frac{K}{-2} &> -1 \\ \boxed{K < 2} \end{aligned}$$

3.9. MARGENS DE GANHO E DE FASE

As margens de ganho e de fase são medidas de estabilidade relativa dos sistemas de controle para a resposta em frequência.

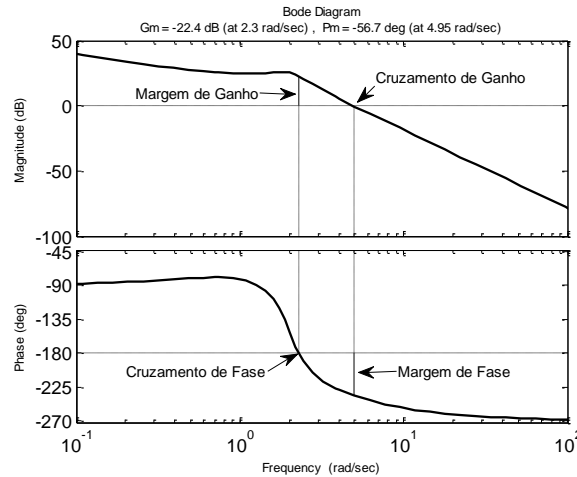
A **margem de ganho (MG)** é o ajuste no ganho do sistema, na frequência em que a fase é igual a -180° , e que resultará em um sistema **marginalmente estável**.

$$|G(s)| + MG = 0 \text{ [dB]} \text{ quando } \angle G(s) = -180^\circ$$

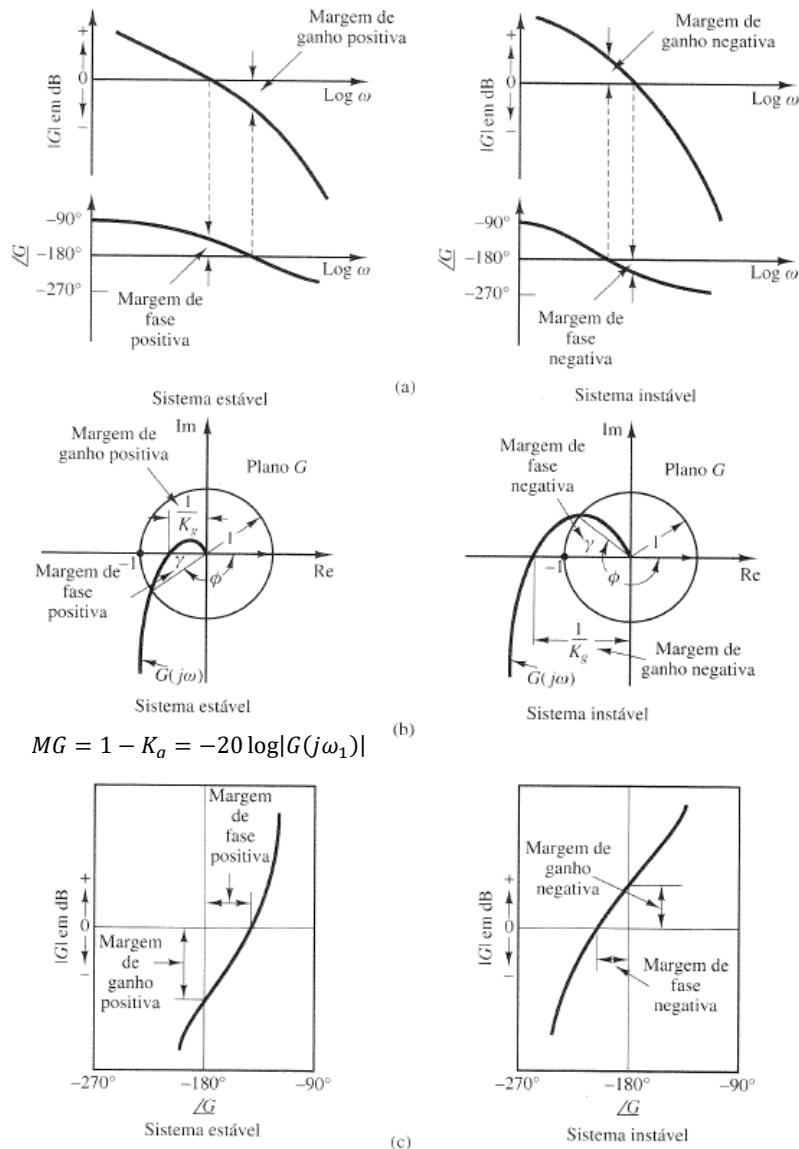
A **margem de fase (MF)** é o ajuste de fase no sistema necessário para fazer a fase chegar a -180° , na frequência em que o ganho do sistema é 0[dB] , e que resultará em um sistema **marginalmente estável**.

$$\angle G(s) - MF = -180^\circ \text{ quando } |G(s)| = 0\text{[dB]}$$

Em sistemas de fase mínima, quando a MG e a MF são **POSITIVAS** o sistema é **ESTÁVEL**. Se apenas um for negativo o sistema será **INSTÁVEL**. Valores de MG ou MF nulas indicam a estabilidade marginal. Graficamente:



As MG e MF são medidas também no Diagrama de Nyquist e na Carta de Nichols. A análise de estabilidade para sistemas de fase mínima é feita conforme a figura abaixo.



Sistemas de fase mínima de 1ª e de 2ª ordem possuem MG infinita (seus diagramas polares não cruzam o eixo real negativo) sendo sempre estáveis.

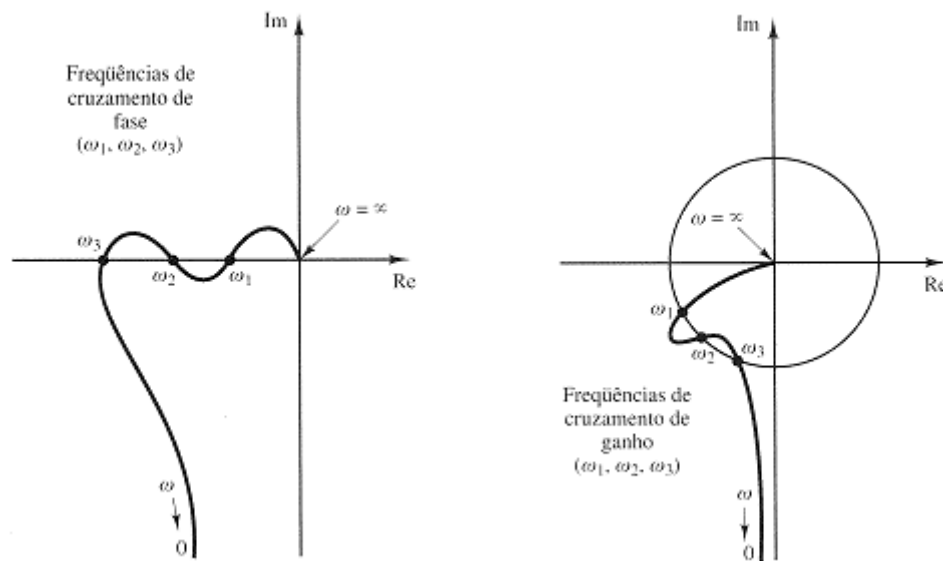
Na prática, para um desempenho satisfatório dos sistemas de controle a MF deve estar entre 30° e 60° e a MG deve ser maior que 6 [dB]. Com esses valores, um sistema de fase mínima tem estabilidade garantida mesmo com a variação natural, dentro de certos limites, dos componentes que constituem a planta.

Margem de fase entre 30° e 60° implica que a curva de módulo em dB, na frequência de cruzamento de ganho deve ser menor que -40 dB/dec .

Na maioria dos casos práticos é desejável uma inclinação de -20 dB/dec , o que garante a estabilidade do sistema. Se a inclinação for -40 dB/dec o sistema poderá tanto ser estável quanto instável (se for estável a MF será pequena).

Se a inclinação na frequência de cruzamento de ganho for -60 dB/dec ou maior, o sistema será provavelmente instável.

As frequências de cruzamento são mostradas também nos diagramas polares abaixo.



Em sistemas padrões de 2ª ordem a MF se relaciona com o coeficiente de amortecimento pela relação:

$$MF = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1-4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \right)$$

Para valores de $0 \leq \zeta \leq 0,6$ a MF e o coeficiente de amortecimento nesses sistemas são aproximados por uma reta:

$$\zeta = \frac{MF}{100}$$

Exemplo 20 – Elabore os Diagramas de Bode da função abaixo e localize as margens de fase e de ganho no gráfico informando seu valor aproximado. O sistema é estável? Explique?

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 8}{s^2(s + 4)}$$

SOLUÇÃO

Ajustar a função para comparar com os termos padrões

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 8}{s^2(s + 4)} = 2 \frac{\frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{2}s + 1}{s^2 \left(\frac{1}{4}s + 1 \right)}$$

Fazendo por inspeção os diagramas de Bode, temos:

Constante: $20 \log 2 = 6,02 \text{ dB}$

Zero: $\frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{2}s + 1 = \frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1 \Rightarrow \omega_n = 2\sqrt{2} \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$ sobe 40 dB/dec.

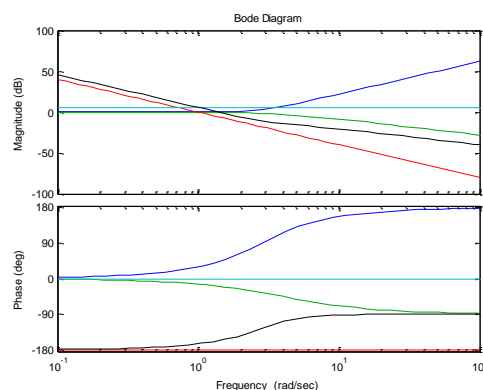
Pólo1: $\frac{1}{4}s + 1 = \frac{1}{\omega_n}s + 1 \Rightarrow \omega_n = 4 \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$ desce 20 dB/dec.

Pólo2: $\frac{1}{s}$ desce 20 dB/dec passando em 1 [rad] quando o ganho é 0 dB.

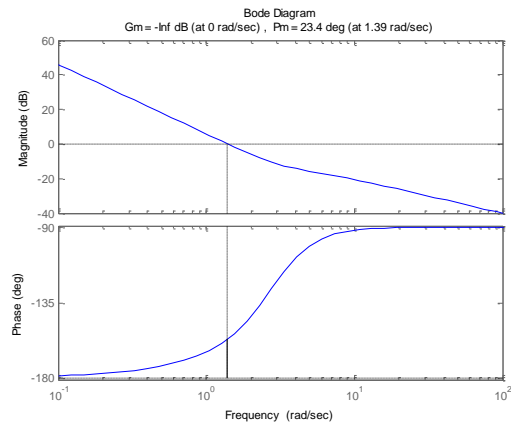
Pólo3: $\frac{1}{s}$ desce 20 dB/dec passando em 1 [rad] quando o ganho é 0 dB.

Os polos 2 e 3 são equivalentes a um polo $\frac{1}{s^2}$ que desce 40 dB/dec passando em 1 [rad] quando o ganho é 0 dB.

O diagrama final é a linha preta.



O sistema é INSTÁVEL, pois a margem de ganho é negativa.



Exemplo 21 – Elabore os Diagramas de Bode da função abaixo e localize as margens de fase e de ganho no gráfico informando seu valor aproximado. O sistema é estável? Explique?

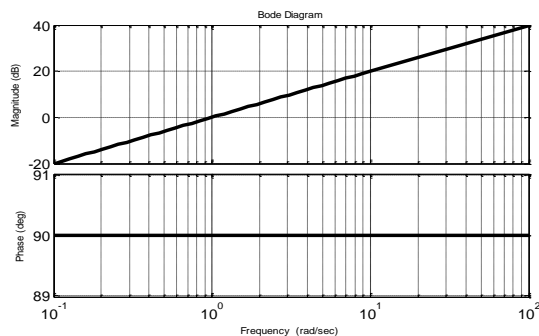
$$G(s) = \frac{s^2}{s(s^2 + s + 1)}$$

SOLUÇÃO

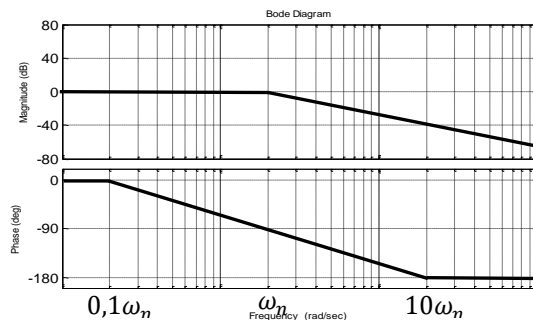
$$G(s) = \frac{s^2}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

Fazendo por inspeção os diagramas de Bode, temos

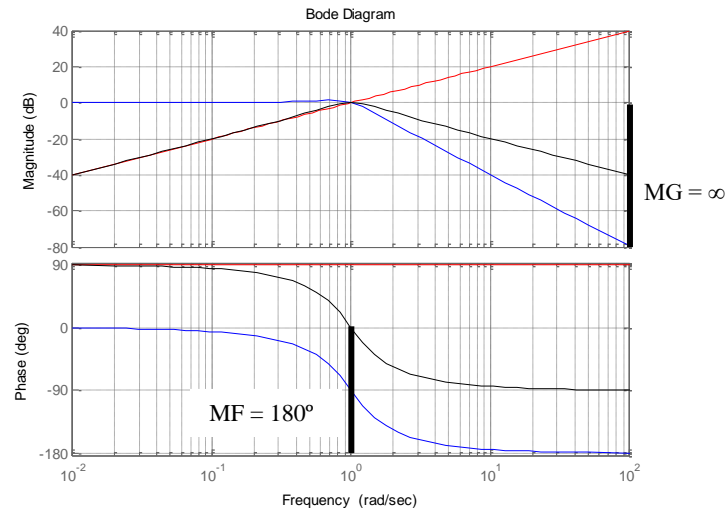
Zero: s



Polo: $\frac{1}{s^2 + s + 1} \Rightarrow \omega_n = 1 \left[\frac{rad}{s} \right]$



O diagrama de Bode é a soma dos dois diagramas anteriores (linha preta):



O sistema é ESTÁVEL, pois as margens são positivas.

Exemplo 22 – Utilizando o papel semilog, faça os Diagramas de Bode (Módulo e Fase) para a FTMA abaixo. Marque nos diagramas os trechos que correspondem à Margem de Ganho (MG) e a Margem de Fase (MF).

$$G(s) = \frac{120(s+1)}{s(s+3)(s^2+s+4)}$$

SOLUÇÃO

Ajustando a equação para comparação com os termos básicos:

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s\left(\frac{s}{3}+1\right)\left(\frac{s^2}{4}+\frac{s}{4}+1\right)}$$

1º) Termo Constante: $K = 10$

$$|K| = 20 \log K = 20 \log 10$$

$$\boxed{|K| = 20 \text{ [dB]}}$$

$$\boxed{\angle K = 0^\circ}$$

2º) Zero de 1ª Ordem: $(1 + Ts)$ ou $\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)$

$$(1 + s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right) \Rightarrow \omega_n = 1 [\text{rad/s}]$$

3º) Polo na Origem: $\left(\frac{1}{s}\right)$

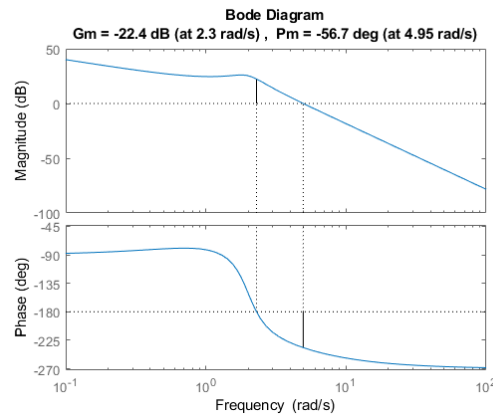
4º) Polo de 1ª Ordem: $(1 + Ts)$ ou $\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)$

$$\left(1 + \frac{s}{3}\right) = \left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right) \Rightarrow \omega_n = 3 [\text{rad/s}]$$

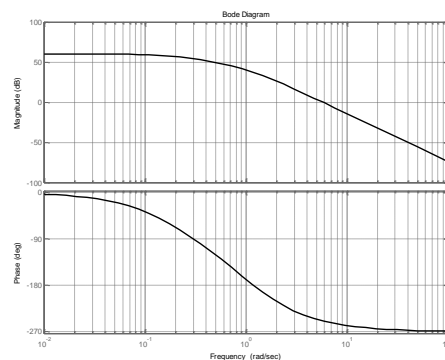
5º) Polo de 2ª Ordem: $\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)$ ou $\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2\right)$

$$\left(1 + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{4}\right) = \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2\right) \Rightarrow \omega_n = 2 [\text{rad/s}]$$

Podemos construir o diagrama pela soma das contribuições de módulo e fase de cada termo básico.



Exemplo 23 – A partir dos diagramas de Bode abaixo, informe as coordenadas polares do Diagrama de Nyquist nos pontos de início e de fim da curva polar.



SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\omega \rightarrow 0 &\Rightarrow |G| \approx 60dB \quad e \quad \angle G = 0^\circ \\ \omega \rightarrow \infty &\Rightarrow |G| = -\infty dB \quad e \quad \angle G = -270^\circ\end{aligned}$$

Exemplo 24 – Utilizando o papel semilog, faça os Diagramas de Bode (Módulo e Fase) para a FTMA abaixo. Marque nos diagramas os trechos que correspondem à Margem de Ganho (MG) e a Margem de Fase (MF).

$$G(s) = \frac{1000}{(s+1)^2(1+5s)}$$

SOLUÇÃO

Da equação retiramos os termos básicos:

1º) Termo Constante: $K = 1000$

$$|K| = 20 \log K = 20 \log 1000$$

$$|K| = 60$$

$$\angle K = 0^\circ$$

2º) Polo Duplo de 1ª Ordem: $(1 + Ts)$ ou $\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)$

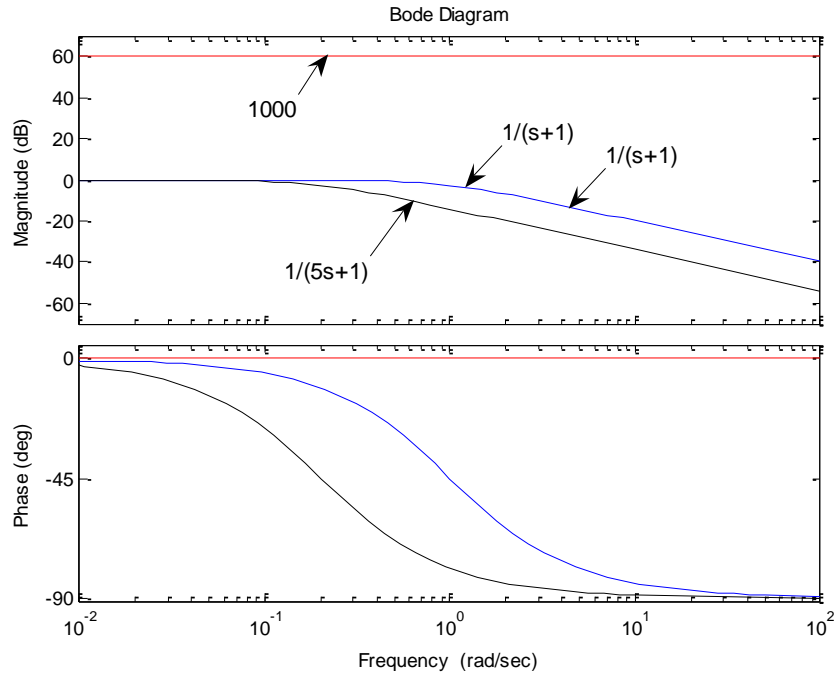
$$(1 + s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right) \Rightarrow \omega_n = 1[rad/s]$$

Polos duplos. Cada polo desce 20dB/dec em $\omega_n = 1[rad/s]$.

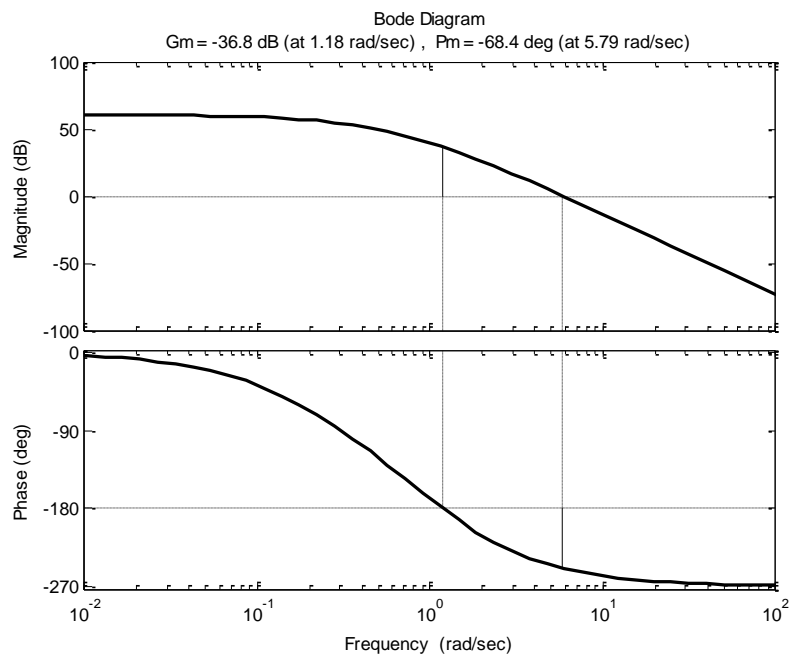
3º) Polo Simples de 1ª Ordem: $(1 + Ts)$ ou $\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)$

$$(1 + 5s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right) \Rightarrow \omega_n = 0,2[\text{rad/s}]$$

Representando cada contribuição dos termos básicos no diagrama semilog, temos:



O Diagrama de Bode é a soma dos gráficos de cada termo. As margens de ganho e de fase estão marcadas no diagrama abaixo.

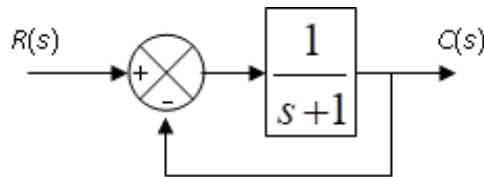


3.10. MATLAB

Funções importantes: *bode*, *nyquist*, *nichols*, *margin*, *freqresp*, *logspace*, *pade*, *axis*, *grid* e *semilogx*.

3.11. LISTA DE EXERCÍCIOS

- 1) Obtenha a resposta em frequência do sistema de MA em que $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$.
- 2) Obtenha a resposta em frequência do sistema abaixo



- 3) Elabore os Diagramas de Bode para as Funções Abaixo (Confira as respostas no Matlab)

$$a) G_1(s) = \frac{6(s+1)}{(s+6)} = 6 \frac{(s+1)}{\frac{6}{6}(s+6)} = 6 \frac{(s+1)}{6(\frac{s+6}{6})} = \frac{s+1}{\frac{s}{6}+1}$$

$$b) G_2(s) = \frac{0,25(s+8)}{(s+2)}$$

$$c) G_3(s) = \frac{80 \cdot 10^3 (s+4)}{s(s+20)(1600+40s+s^2)}$$

$$d) G_4(s) = \frac{8 \cdot 10^3 (s+5)}{s^2 (s+50)(s+400)}$$

$$e) G_5(s) = \frac{3 \cdot 10^3 s (s+10)}{(s+4)(s+600)(s+600)}$$

$$f) G_6(s) = \frac{4 \cdot 10^5 (s+40)}{s(s+4)(40000+80s+s^2)}$$

$$g) G_7(s) = \frac{1,6 \cdot 10^3 (s+2)}{s^2 (s+8)(s+100)}$$

$$h) G_8(s) = \frac{33 \cdot 10^4 (s+10)}{\left(s+\frac{2}{3}\right)(s+5)(s+100)^2}$$

$$i) G_9(s) = \frac{150(16+4s+s^2)}{s^2 (s+40)(s+600)}$$

$$j) G_{10}(s) = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)(s+6)(s+60)}{(s+1)(s+400)}$$

OGATA 4ed: A.8.1, A.8.4, A.8.7 a A.8.15, A.8.18 a A.8.20, B.8.1 a B.8.23, B.8.26 a B.8.36