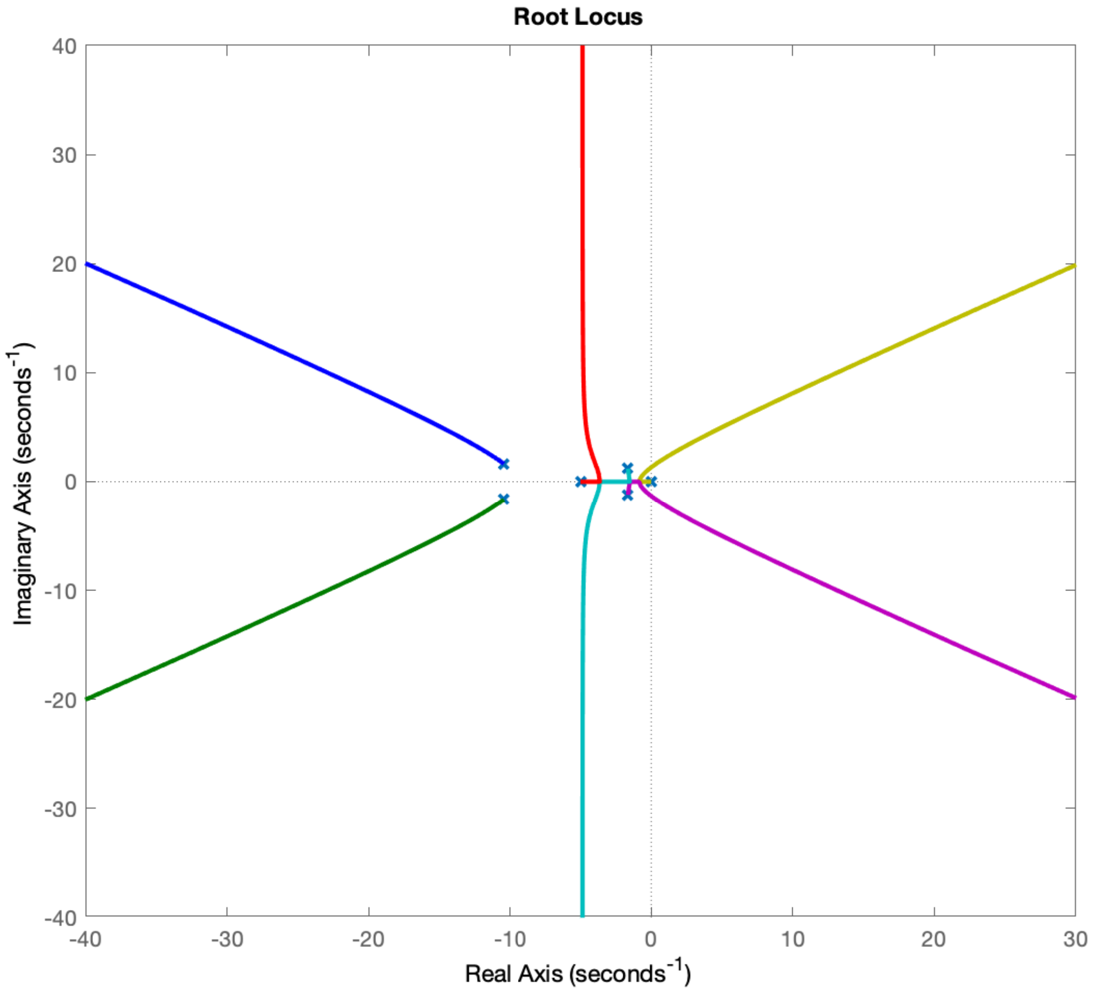
O método do lugar das raízes

Sistemas Realimentados

Referências: Livros do Kuo ou Ogata, capítulos sobre o método do lugar das raízes.

O método do LR



Exemplo de lugar das raízes!

O método do LR

O método do lugar das raízes tem por objetivo obter as raízes de um polinômio característico quando um parâmetro varia.
Seja, por exemplo, $P(s) = s^2 + s + K$.

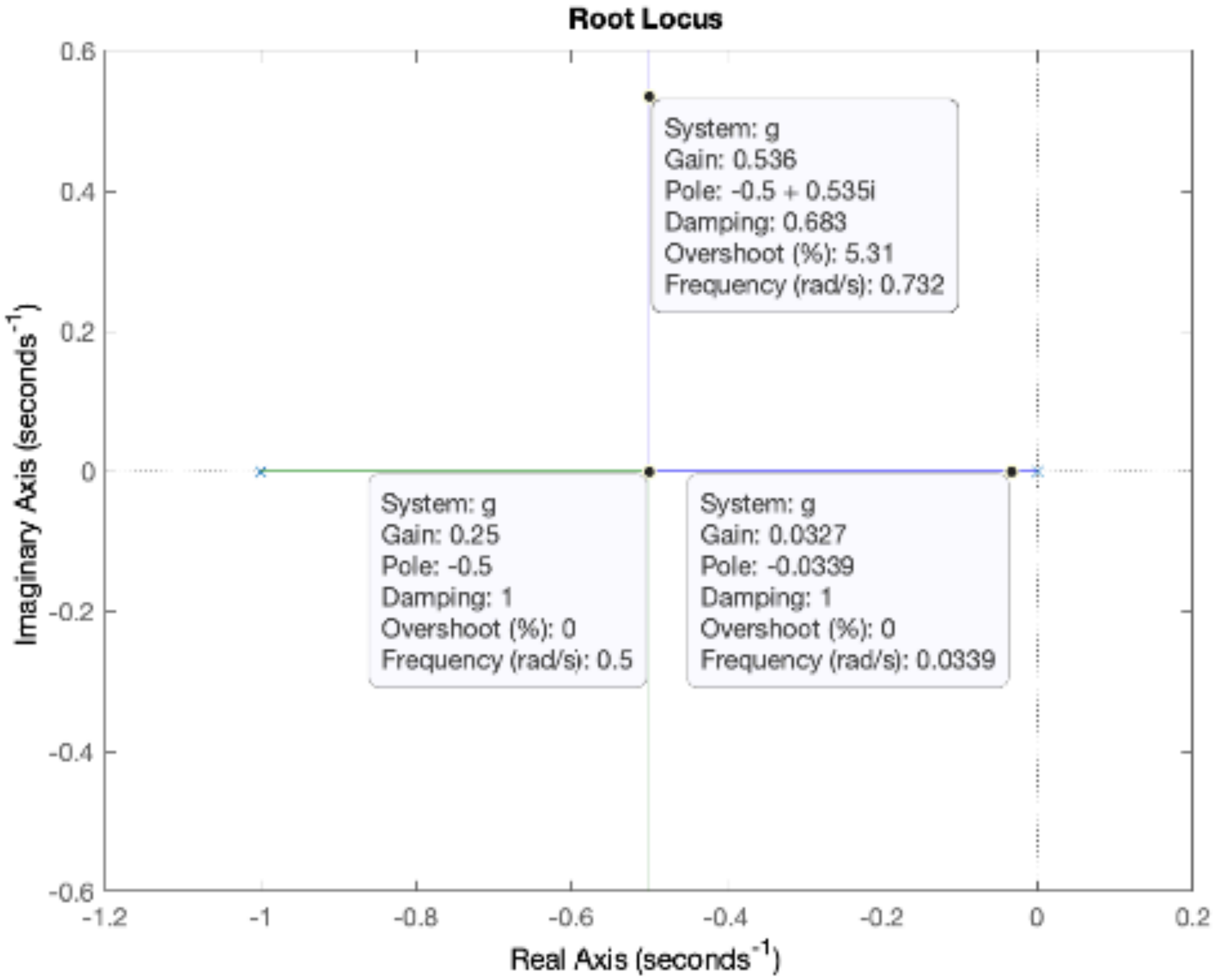
Como variam suas raízes quando K varia de 0 a ∞? Ou de 0 a $-\infty$?

As raízes do polinômio são: $$\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4K}{2}}$$

Alguns valores de K>0:

K	Raízes
0	0, -1
0.25	-0.5, -0.5
0.5	-0.5±0.5j
1	-0.5±0.86j

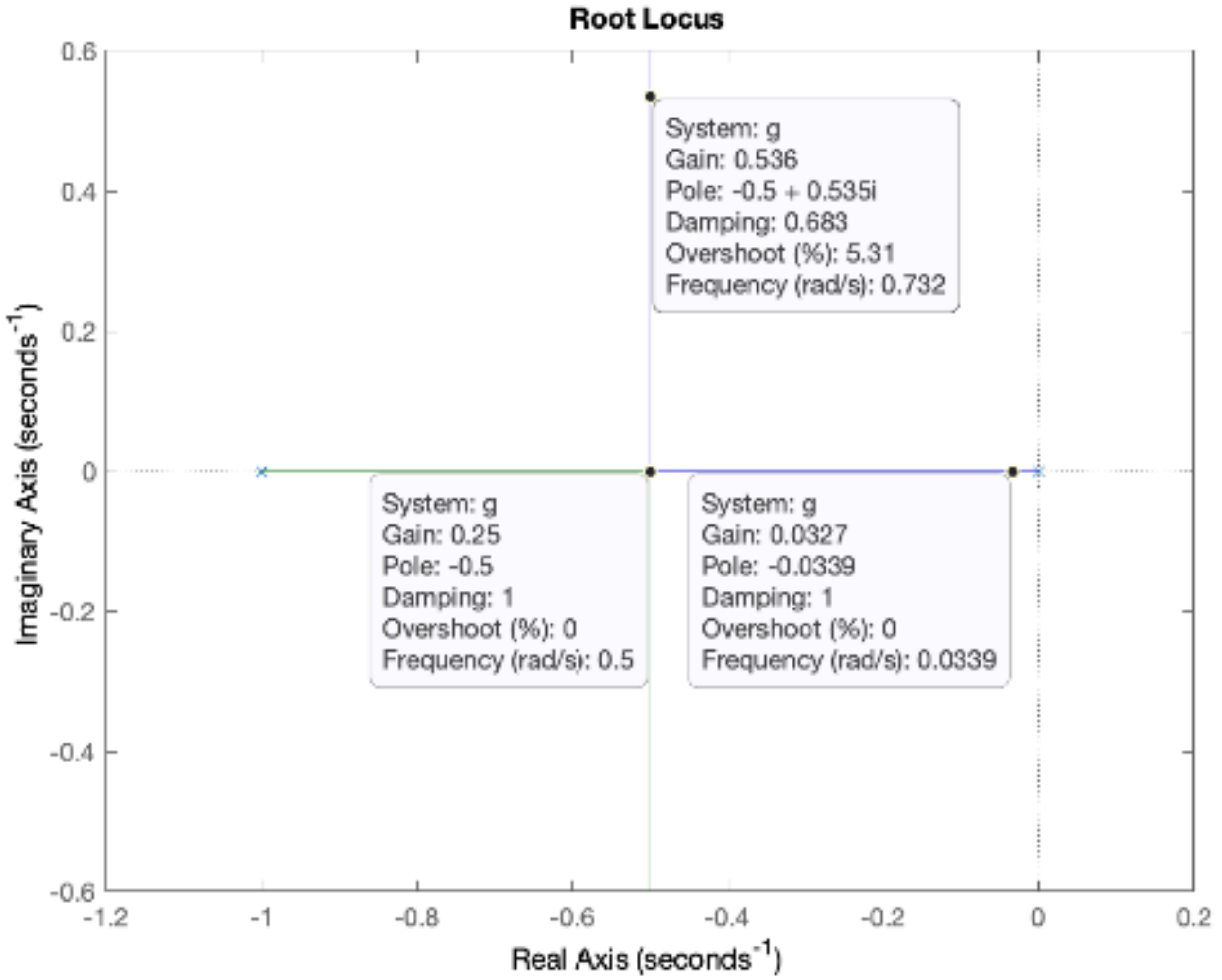
O método do LR



K	Raízes
0	0, -1
0.25	-0.5, -0.5
0.5	-0.5±0.5j
1	-0.5±0.86j

Conclui-se que quando o ganho K aumenta, a parte real das duas raízes tende a –0.5, e depois apenas a parte imaginária aumenta, reduzindo o amortecimento.

O método do LR



Para qualquer ponto s do LR existe um ganho K associado, que satisfaz a equação

$$s^2 + s + K = 0$$

O método do LR

Se tivessemos o seguinte problema: quais são os polos de malha fechada de

$G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)}$?

Ou seja , as raízes de $1 + G(s) = 1 + \dfrac{K}{s(s+1)} = s(s+1) + K$

Ele seria resolvido desta forma.

Saber o efeito do ganho K sobre os polos permite inferir qual será seu comportamento em malha fechada!

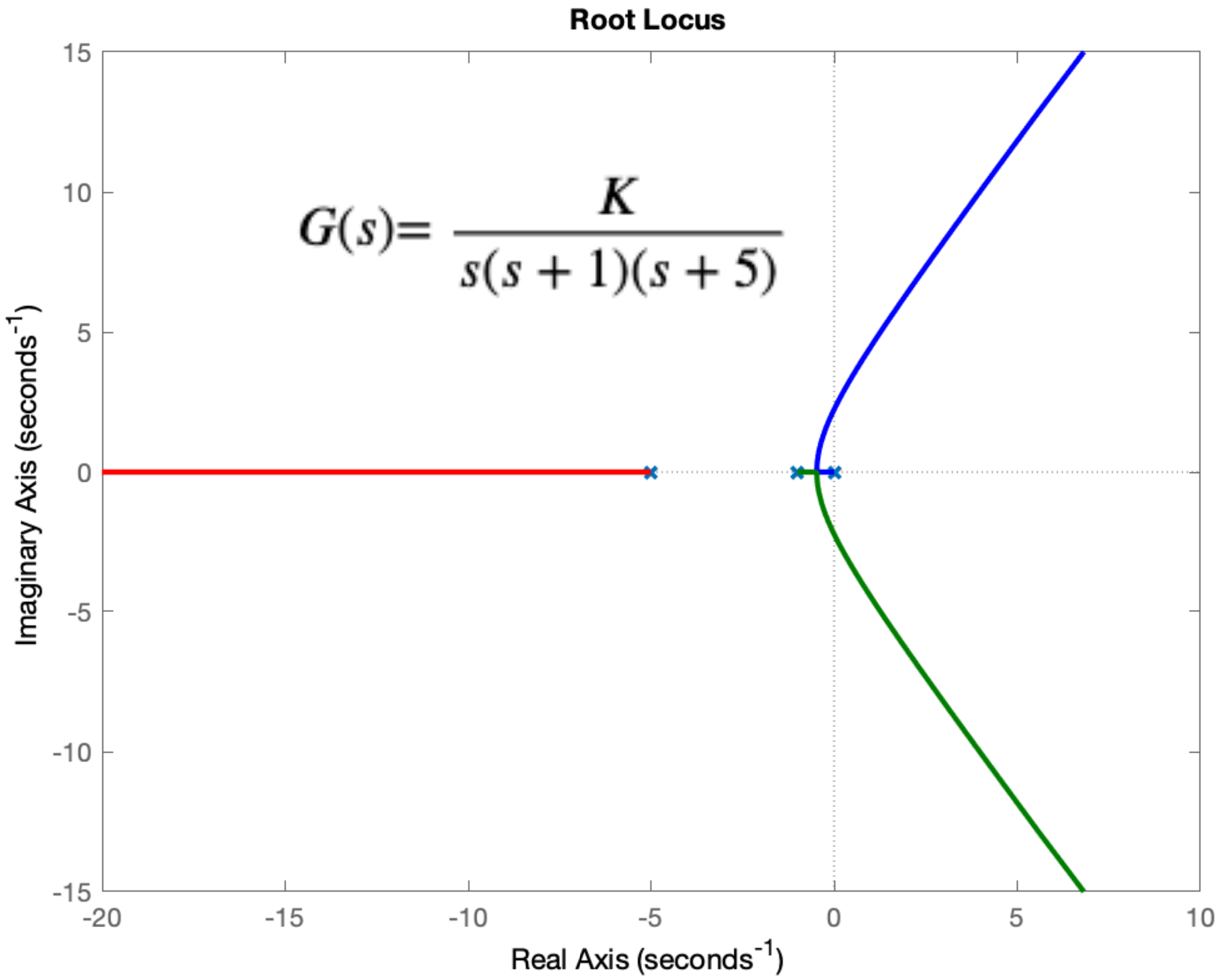
O método do LR

Desenha-se o LR assumindo o problema na forma $1 + KG(s) = 0$,
Por exemplo,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

O desenho do LR deve mostrar como se comportam as 3 raízes de $1 + KG(s) = 0$, ou seja, os polos de malha fechada deste sistema.

O método do LR



Para K=0 os polos são {0,-1,-5}.

Para K muito grande, um polo tende a $-\infty$, e 2 polos tendem para assintontas no semi-plano direito.

O método do LR

Ou uso de regras para construção do lugar das raízes permite inferir rapidamente o comportamento dos polos malha fechada quando o ganho K varia. Pode-se também saber qual será o efeito da adição de polos e zeros na função de transferência, o que auxilia no projeto de controladores.

Para usar as regras, o problema deve estar escrito na forma

$$1 + KG_1(s) = 1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

O método do LR

Alguns exemplos:

Exemplo 1:

$$s^2 + (2 + k)s + 10 = 0$$

$$s^2 + 2s + 10 + ks = 0$$

$$1 + \frac{ks}{s^2 + 2s + 10} = 0$$

Exemplo 2:

$$s^3 + 3s^2 + k(s + 1) + 20 = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 20 + k(s + 1) = 0$$

$$1 + k\frac{s + 1}{s^3 + 3s^2 + 20} = 0$$

Dividir tudo pelo termo que não contem o ganho k.

O método do LR – regras de contrução

Como sabemos que $G_1(s)$ é uma grandeza complexa, as seguintes equações são válidas:

Condição de ângulo: $\angle G_1(s) = \pm 180°\,(2i+1)$ para todo K>0 e i = 0,1,2...**[3]**

$\angle G_1(s) = \pm 180°\,(2i)$ para todo K<0 e i = 0,1,2...

Condição de Módulo: $|G_1(s)| = \frac{1}{|K|}$ **[4]**

Os valores de s que satisfazem as equações **[3]** e **[4]** são as raízes de $1+KG_1(s) = 0$.

$$1 + KG_1(s) = 1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

$$G_1(s) = -\frac{1}{K}$$

O método do LR – regras de construção

Regra 1

Raízes de P(s) quando K=0 são os polos de G1(s) (raízes de D(s)). De [2], quandoK=0 P(s)=D(s).

Raízes de P(s) quando $K \to \infty$ são os zeros de G1(s) (raízes de N(s)). De [2], quando $K \to \infty$ $P(s) \to D(s)$.

Exemplo 3:

Escrevendo o polinômio $P(s) = s(s+a) + K = 0$ na forma adequada, temos

$$1 + K\frac{1}{s(s+a)} = 0$$

$K \to 0$ As raízes de P(s) são {0, -a}

$K \to \infty$ As raízes de P(s) tendem para infinito.

Concluímos que as raízes de P(s) são os polos de G1(s) quando $K \to 0$ e são os zeros de P(s) quando $K \to \infty$

Para traçar o LR, os polos e os zeros de G1(s) são necessários.

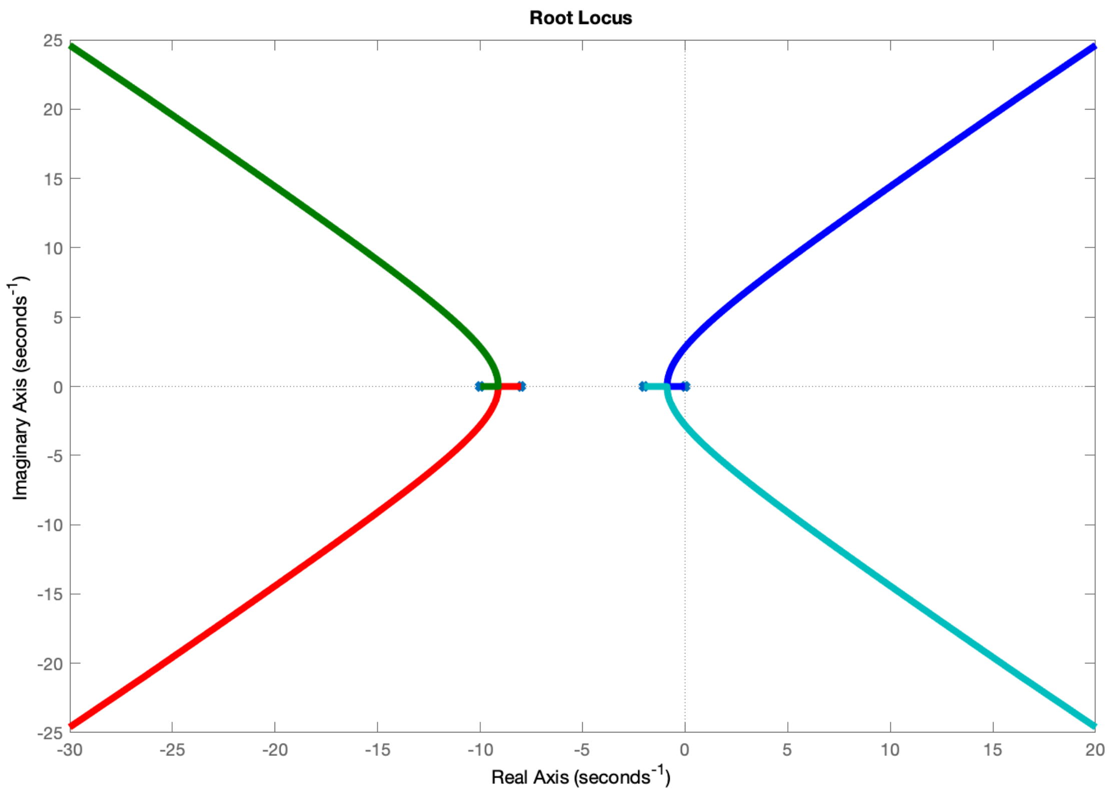
O método do LR – regras de construção

Regra 2:
O número de trajetórias é igual ao número de polos de D(s).

Regra 3:
O LR é simétrico em relação ao eixo real, uma vez que as raízes de P(s) são sempre um par complexo-conjugado.

O método do LR – regras de construção

Regras 2 e 3:



$$1 + \frac{K}{s(s+2)(s+8)(s+10)} = 0$$

O método do LR – regras de construção

Regra 4: assíntotas

Para os polos que tendem para assíntotas (zeros no infinito), os ângulos destas assíntotas são dados por

$$\theta_i = \frac{(2i+1)180^\circ}{|n-m|}, \text{ para K> 0 onde } \begin{cases} n & \textit{número de pólos } G_1(s) \\ m & \textit{número de zeros de } G_1(s) \end{cases} \text{ e } n \neq m$$

$$\theta_i = \frac{(2i)180^\circ}{|n-m|}, \text{ para K< 0 onde } \begin{cases} n & \textit{número de pólos } G_1(s) \\ m & \textit{número de zeros de } G_1(s) \end{cases} \text{ e } n \neq m$$

O método do LR – regras de construção

Para melhor vizualização da origem dessas expressões, seja $1 + G(s) = 1 + K\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = 0.$

Tem-se que quando s tende ao infinito:

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K(s+1)}{(s+2)(s+3)s} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^2}$$

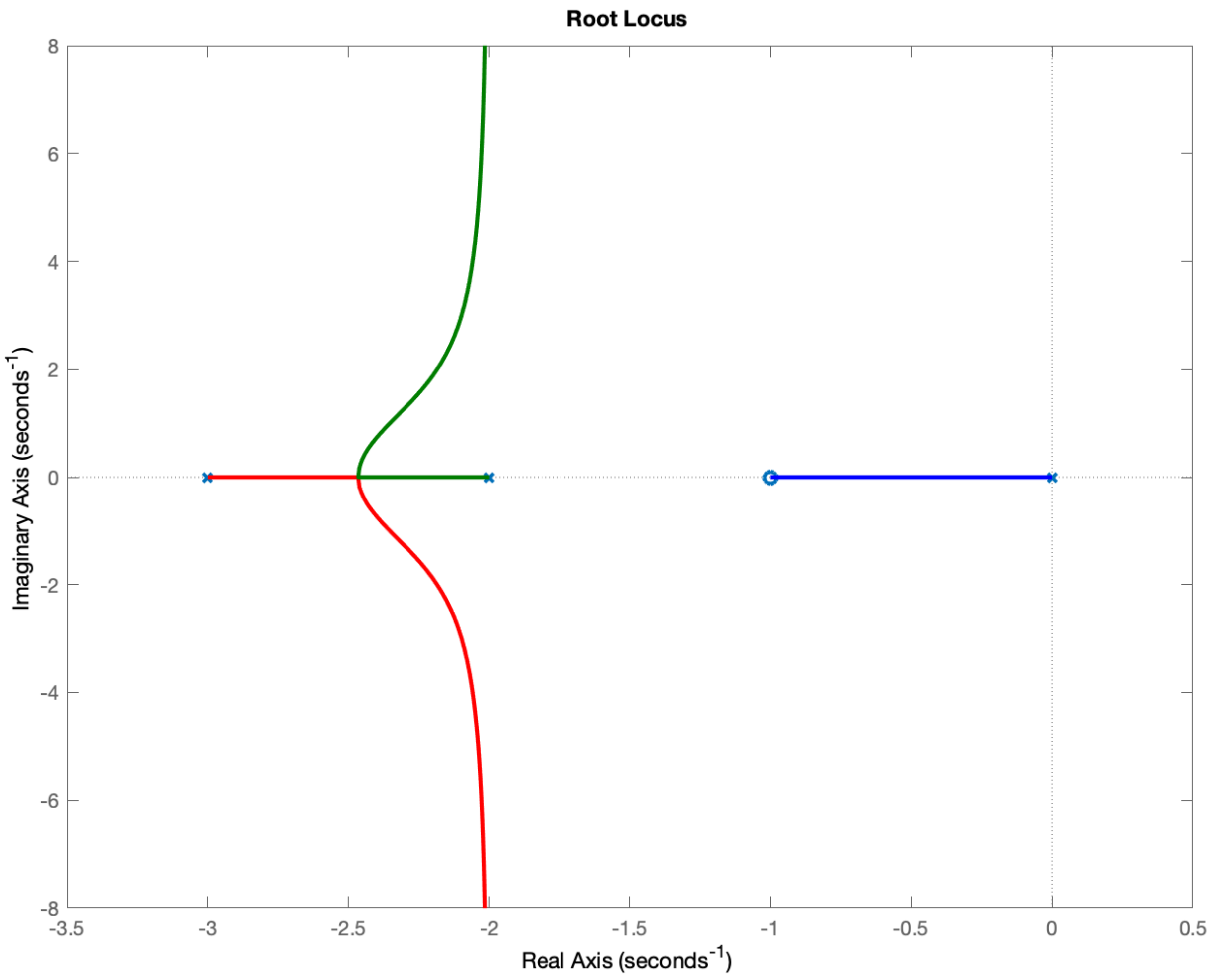
e, portanto, a condição de ângulo se torna:

$\angle K - \angle s - \angle s = \pm 180°(2i + 1) \Rightarrow \angle s = \pm 180° \frac{(2i+1)}{2}$, para i=0 e i=1,

pois só temos duas assíntotas neste caso e de valores $\pm 90°$.

polos-zeros = n-m

O método do LR – regras de construção



$$1 + K\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

O polo na origem tende ao zero em s=-1.

Os polos em s=-2 e s=-3 tendem para as 2 assíntotas.

O método do LR – regras de construção

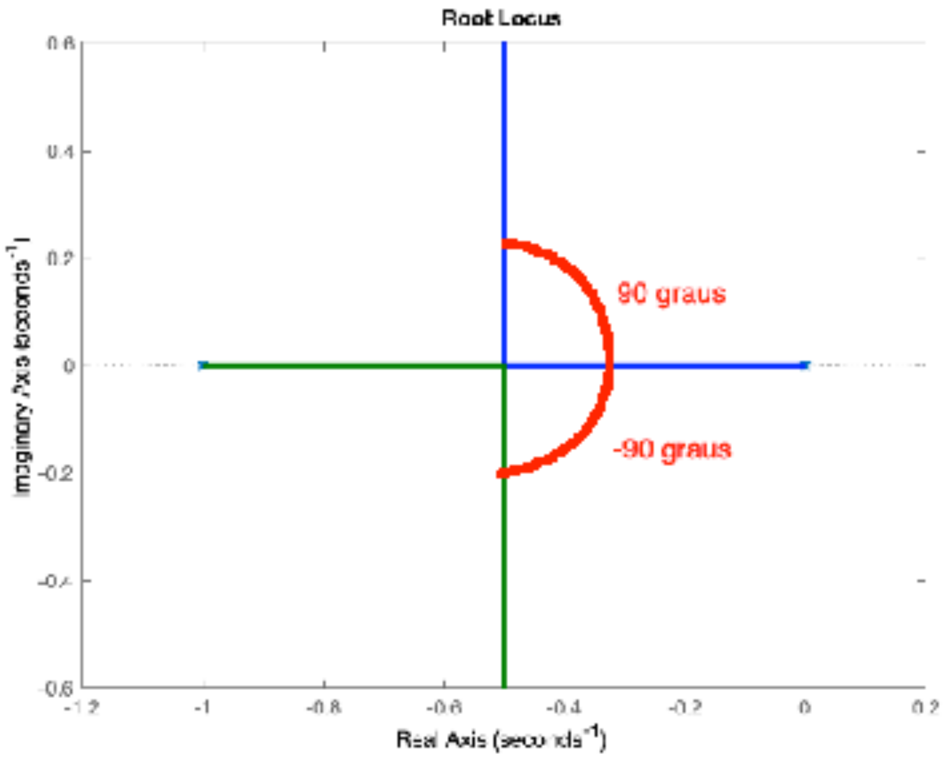
Para o caso

$$G(s)= \frac{K}{s(s+1)}$$

$$n - m = 2$$

$$\theta_0 = \frac{180}{2} = 90$$

$$\theta_1 = \frac{3 \cdot 180}{2} = 270$$



O método do LR - regras de construção

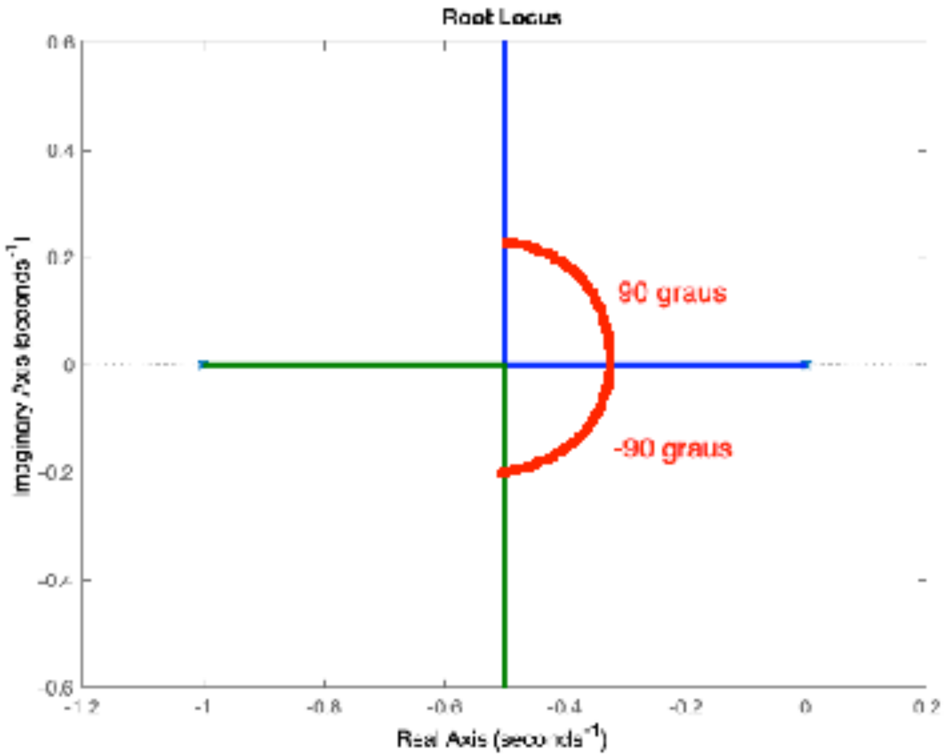
Para desenhar assíntotas, é preciso saber o ponto sobre o eixo real pelo qual elas passam. **Todas as asssíntotas passam pelo mesmo ponto**.

Este ponto de interseção é dado por:

$$\sigma = \frac{\sum polos\, de\, G_1(s) - \sum zeros\, de\, G_1(s)}{n - m}$$

O método do LR - regras de construção

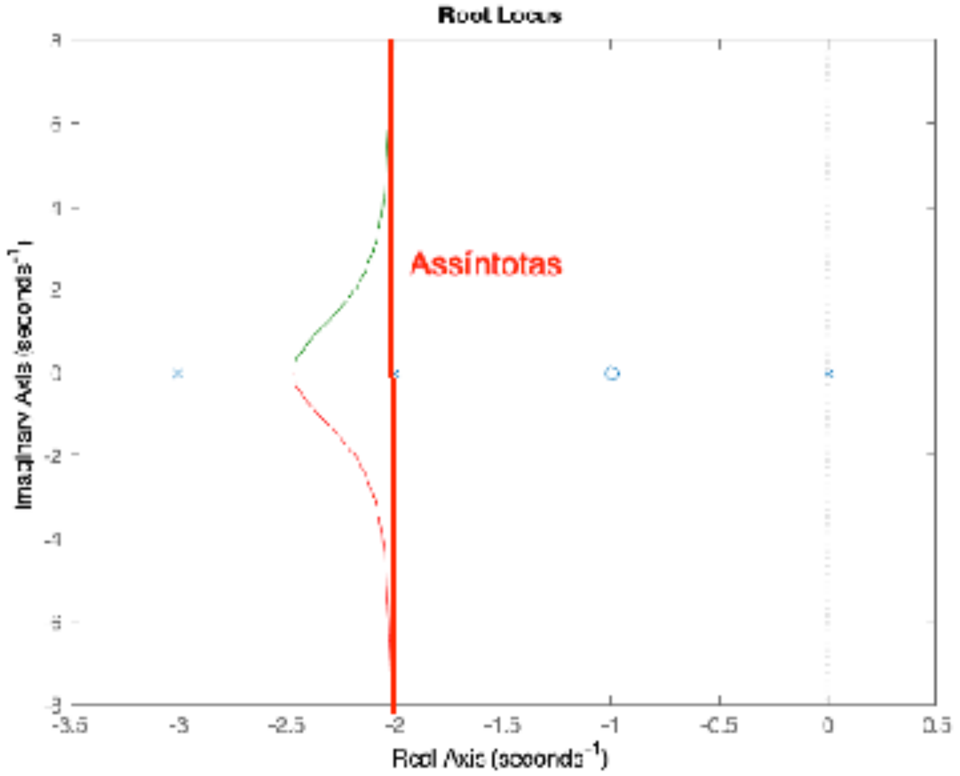
Vamos analisar o ponto de interseção dos exemplos anteriores:



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

$$\sigma = \frac{(0-1)}{2-0} = -0.5$$

O método do LR - regras de construção



$$1 + G(s) = 1 + K\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = 0.$$

$$\sigma = \frac{(0-2-3)-(-1)}{3-1} = -\frac{4}{2} = -2$$

O método do LR - regras de construção

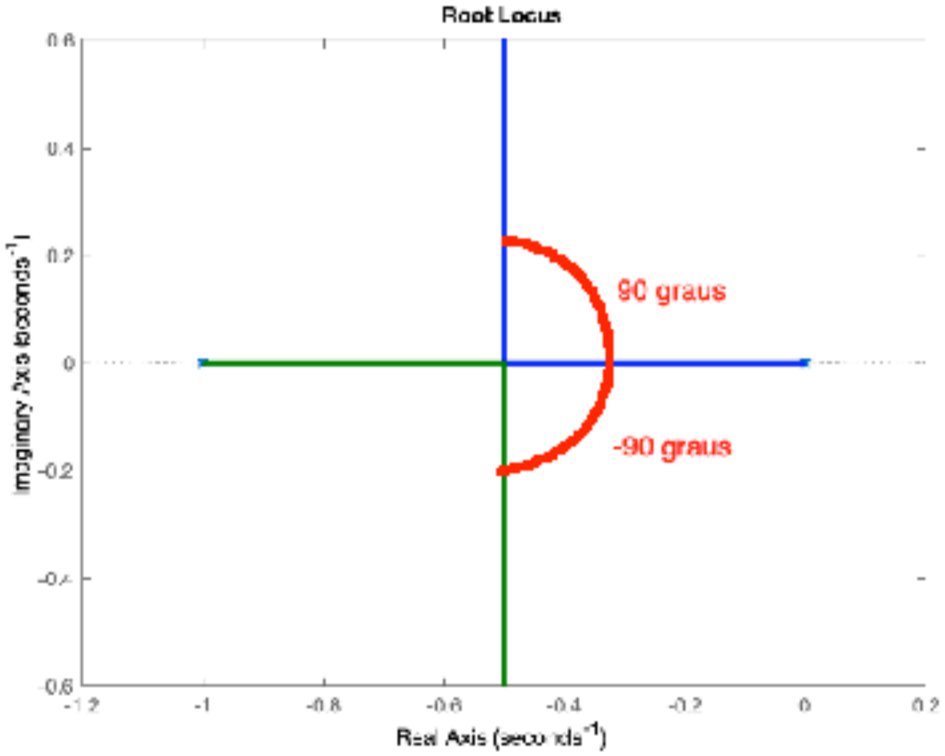
Regra 5

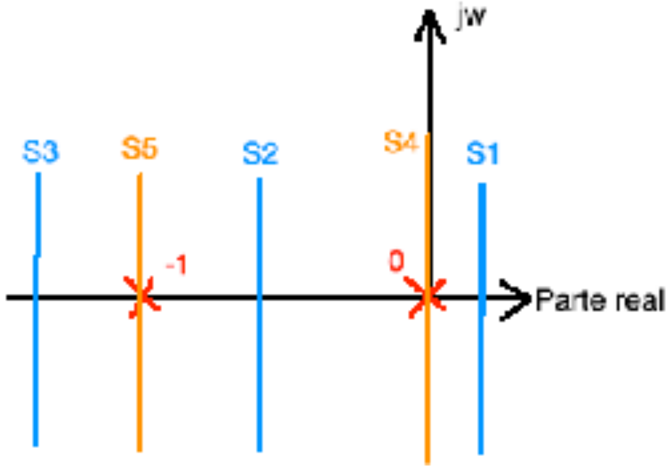
Em uma dada seção do eixo real, há raízes para $K > 0$ se o número de polos e zeros de G1(s) à direita da seção é ímpar.

Onde há LRC (Lugar das Raízes Complementar):
Em uma dada seção do eixo real, há raízes para $K < 0$ se o número total de polos e zeros de G1(s) à direita da seção é par.

Resumindo: todo eixo real é ocupado por alguma raiz, para $K>0$ ou para $K<0$.

O método do LR – regras de construção





Direita de S1: 0 polos e zeros: par

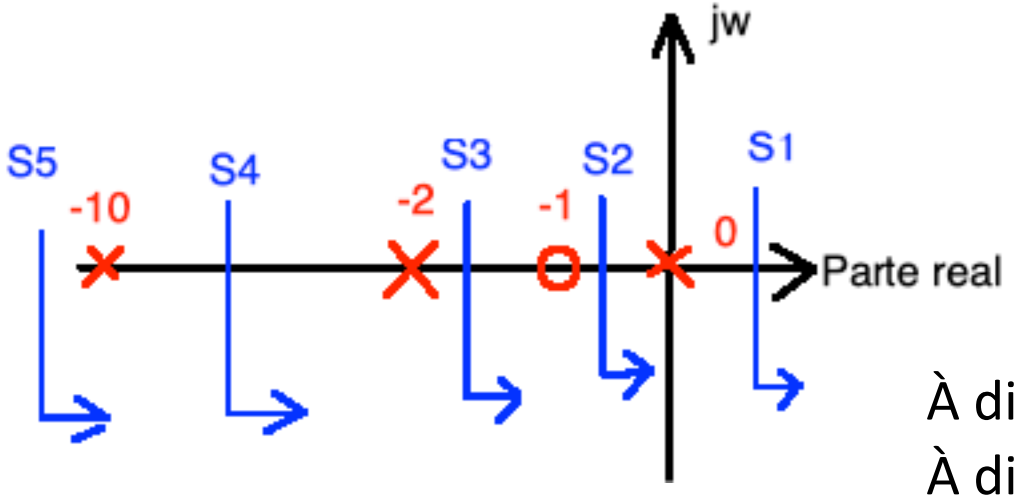
Direita de S2: 1 polo ; ímpar

Direita de S3: 2 polos: par

Conclusão: o número de polos é ímpar entre as seções S4 e S5. Entre elas, há raízes para K>0

O método do LR – regras de construção

Outro exemplo: $G(s) = \dfrac{(s+1)}{s(s+2)(s+10)}$



À direita de s1: nenhum polo ou zero: há LRC (K<0)

À direita de s2: 1 polo : há LR (K>0)

À direita de s3: 1 polo e 1 zero: há LRC

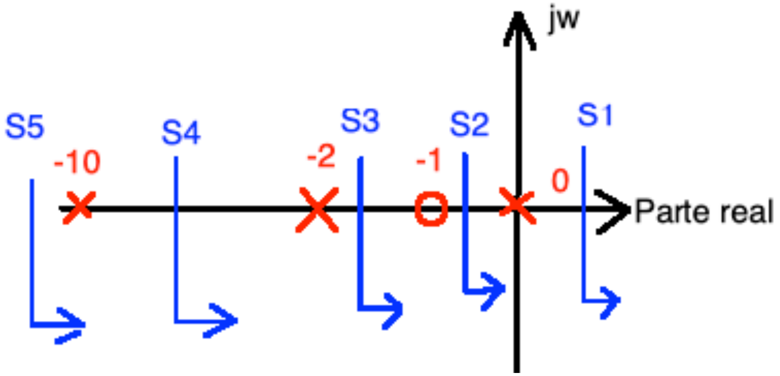
À direita de s4: 2 polos e 1 zero: há LR

À direita de s5: 3 polos e 1 zero: há LRC

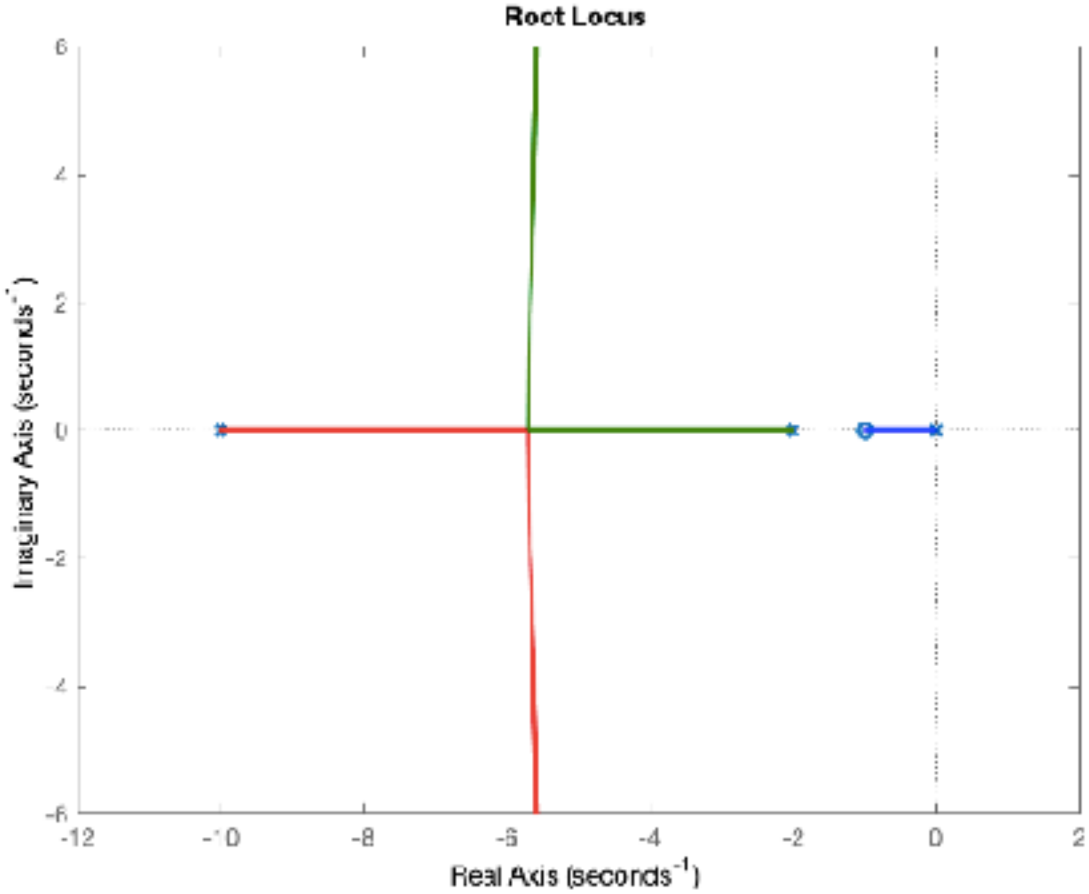
O método do LR – regras de construção

Outro exemplo:

$$G(s)= \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+10)}$$



À direita de s1 : nenhum pólo ou zero : há LRC (I
À direita de s2 : 1 pólo : há LR (K > 0)
À direita de s3 : 1 pólo e 1 zero : há LRC
À direita de s4 : 2 pólos e 1 zero : há LR
À direita de s5 : 3 pólos e 1 zero : há LRC



O método do LR – regras de construção

Regra 6 - Pontos de interseção com o eixo imaginário.

São determinados usando o critério de Routh-Hurwitz.

Seja a equação característica

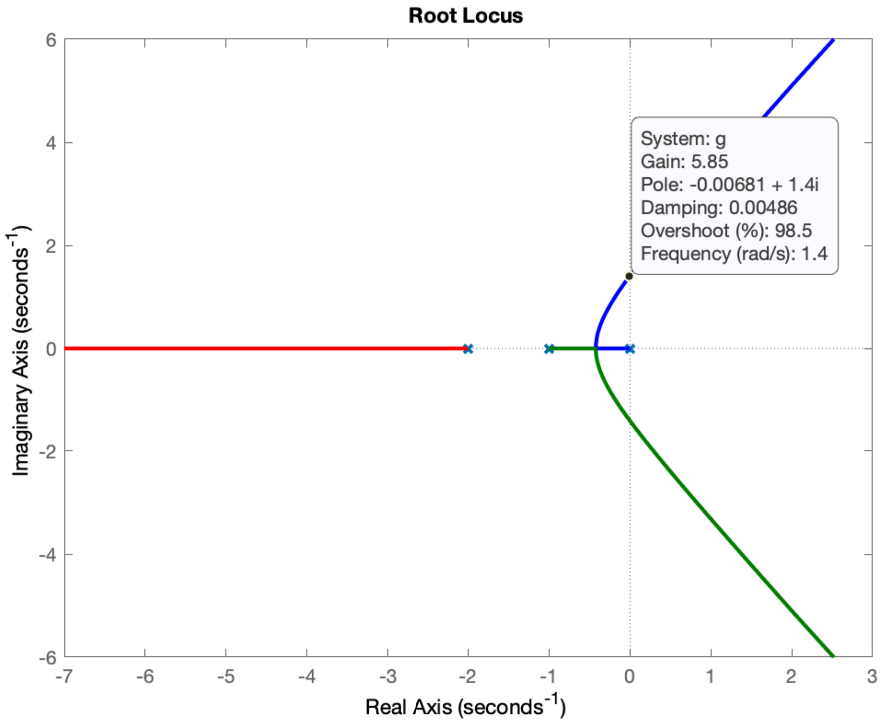
$$s(s+1)(s+2)+k=0$$

Ou

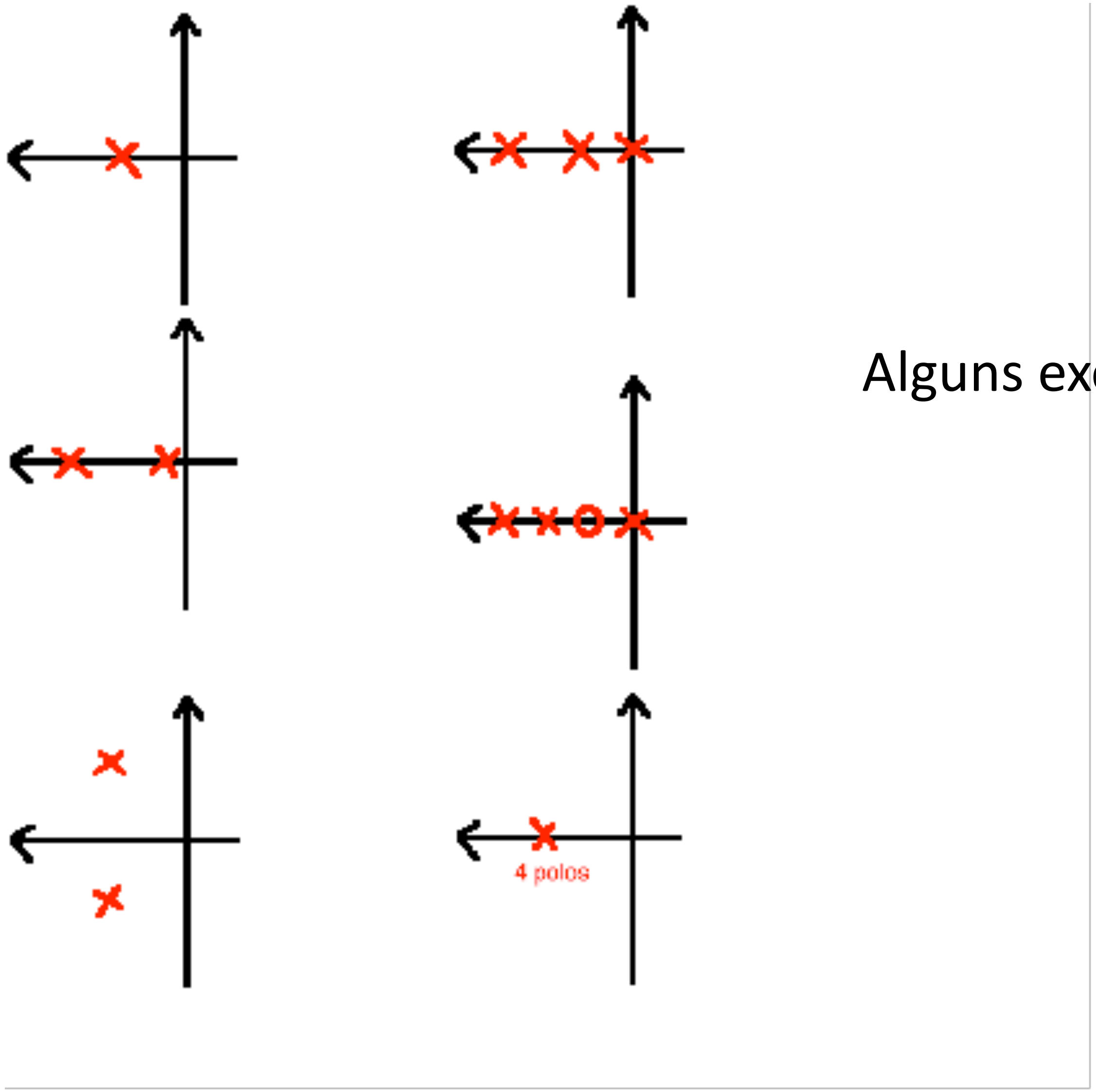
$$s^3+3s^2+2s+k=0$$

Aplicando Routh-Hurwitz, resulta

$$0<k<6$$



O método do LR – regras de construção



Alguns exemplos de complexidade crescente!

O método do LR – regras de construção

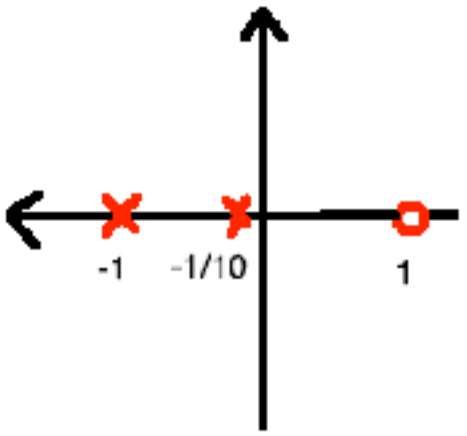
Exemplo: Avalie o efeito do ganho K na resposta em malha fechada de $G(s) = \dfrac{5Ke^{-2s}}{10s+1}$

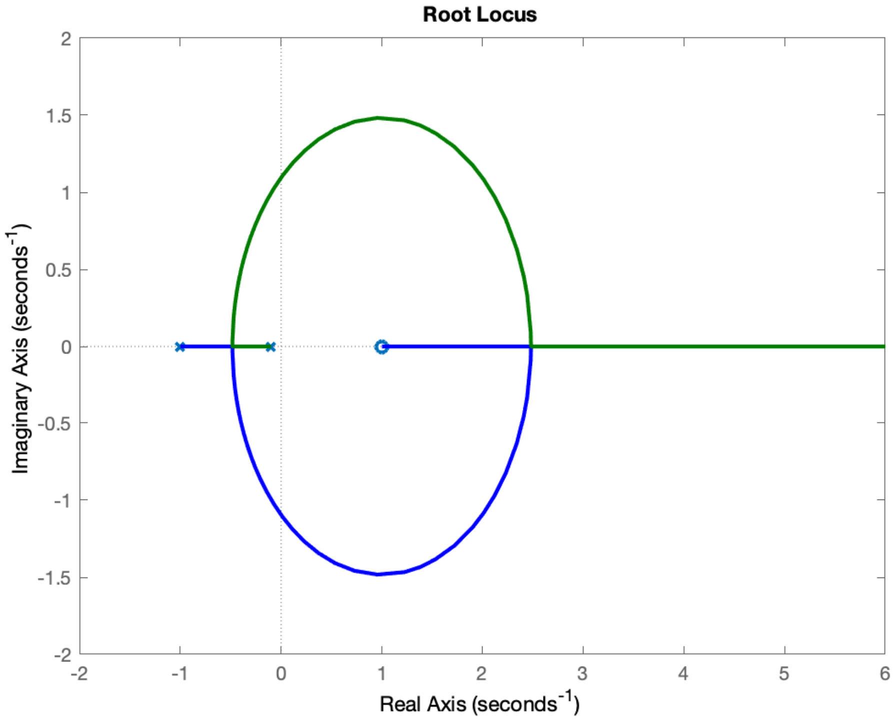
$$e^{-2s} = \frac{-s+1}{s+1}$$

$$1 + (-)K\frac{5(s-1)}{(10s+1)(s+1)} = 0$$

$$G(s) = \frac{5K(-s+1)}{(10s+1)(s+1)}$$

$$1 + K\frac{5(-s+1)}{(10s+1)(s+1)} = 0$$





O método do LR – regras de construção

Regra 7 - Pontos de sela

São os pontos sobre o eixo real onde há raízes múltiplas, ou seja, onde raízes reais se tornam complexas ou raízes complexas se tornam reais

Os pontos de sela de $1 + K\dfrac{N(s)}{D(s)} = 0$ devem satisfazer $\dfrac{dN(s)/D(s)}{ds} = 0$

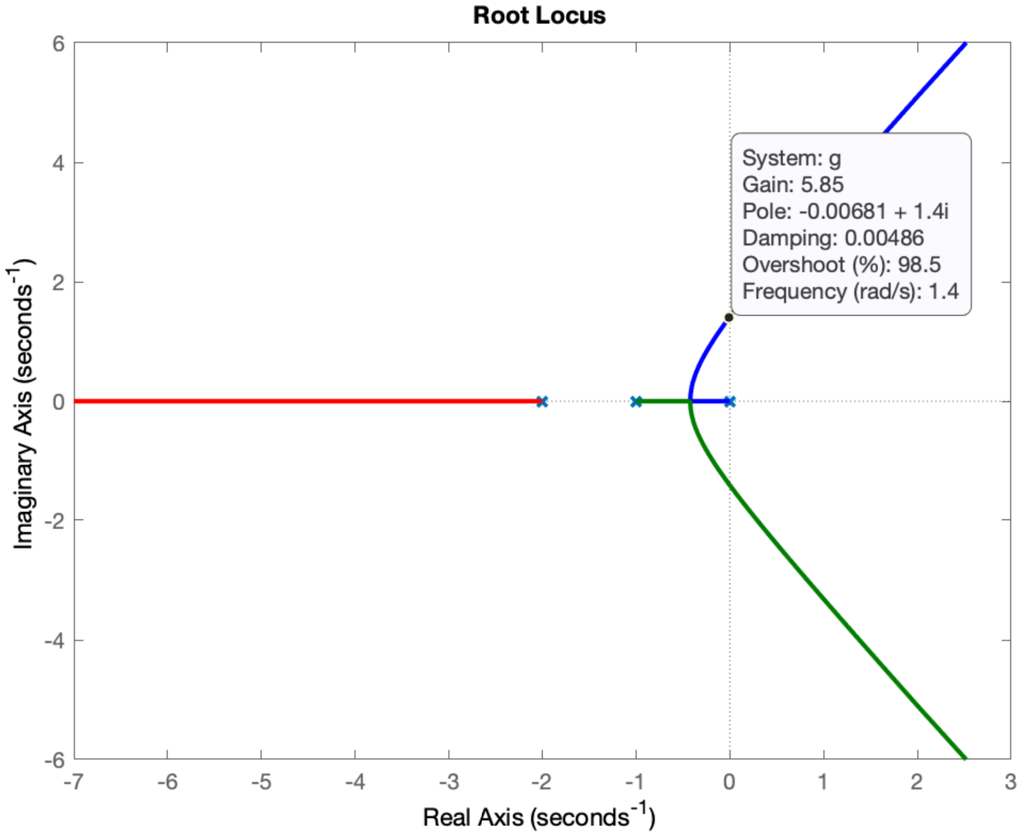
Lembramos que $dN(s)/D(s) = \dfrac{\dot{N}(s)D(s) - N(s)\dot{D}(s)}{D(s)^2}$

$$\boxed{\dot{N}(s)D(s) - N(s)\dot{D}(s) = 0}$$

O método do LR – regras de construção

Regra 7 - Pontos de sela : Exemplo

Lugar das raízes de $s(s+1(s+2)+k=0$



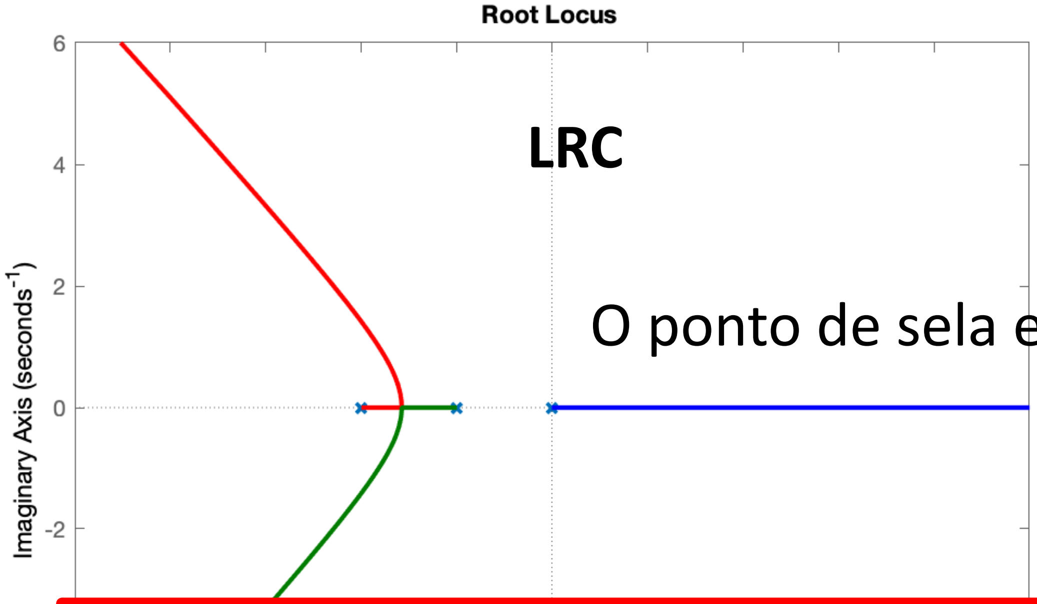
Há um ponto de sela entre 0 e -1.
Para obtê-lo, fazemos

$$\frac{d\,\frac{1}{s^3+3s^2+s}}{ds}=\frac{(0)(s^3+3s^2+s)-(1)*(3s^2+6s+2)}{(s^3+3s^2+s)^2}=0,$$ Ou seja,

$3s^2+6s+2=0$ cujas raízes são {-0.42 e -1.57}

O ponto de sela -1.57 ocorre para K<0

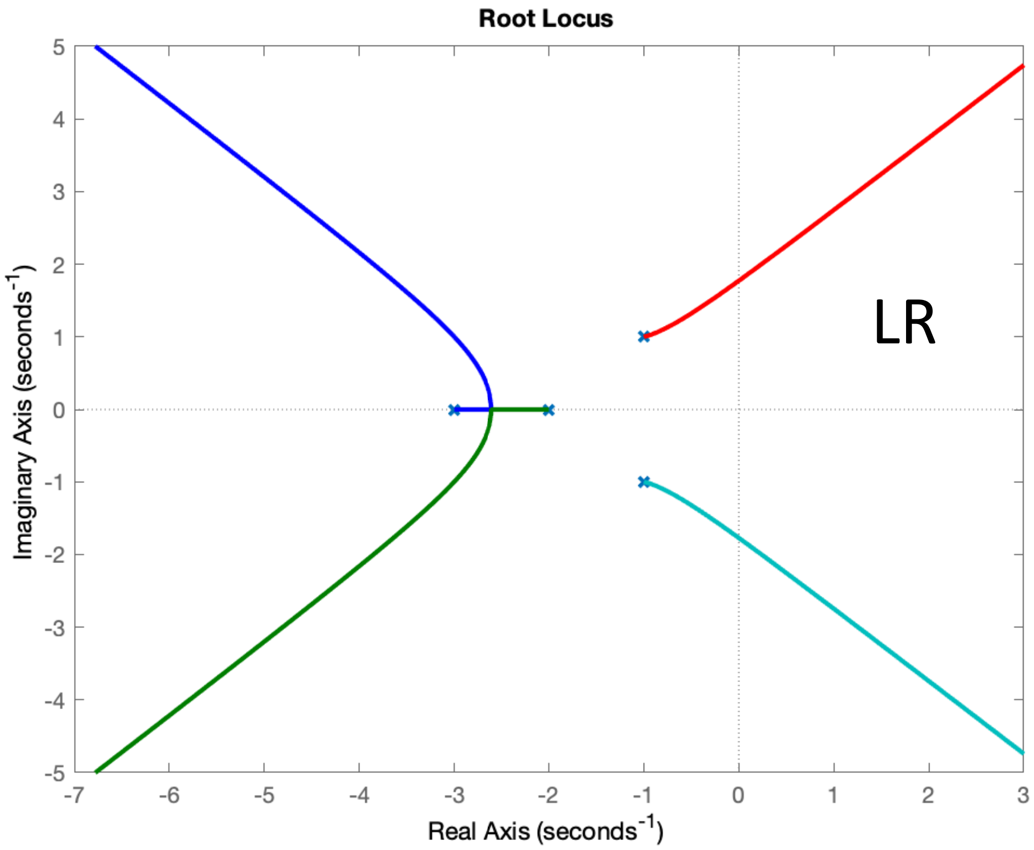
O método do LR – regras de construção



O ponto de sela em -1.57 para K<0

Nem todas raízes de $\frac{dN(s)/D(s)}{ds} = 0$ são pontos de sela, mas havendo pontos de sela, eles serão raízes desta equação

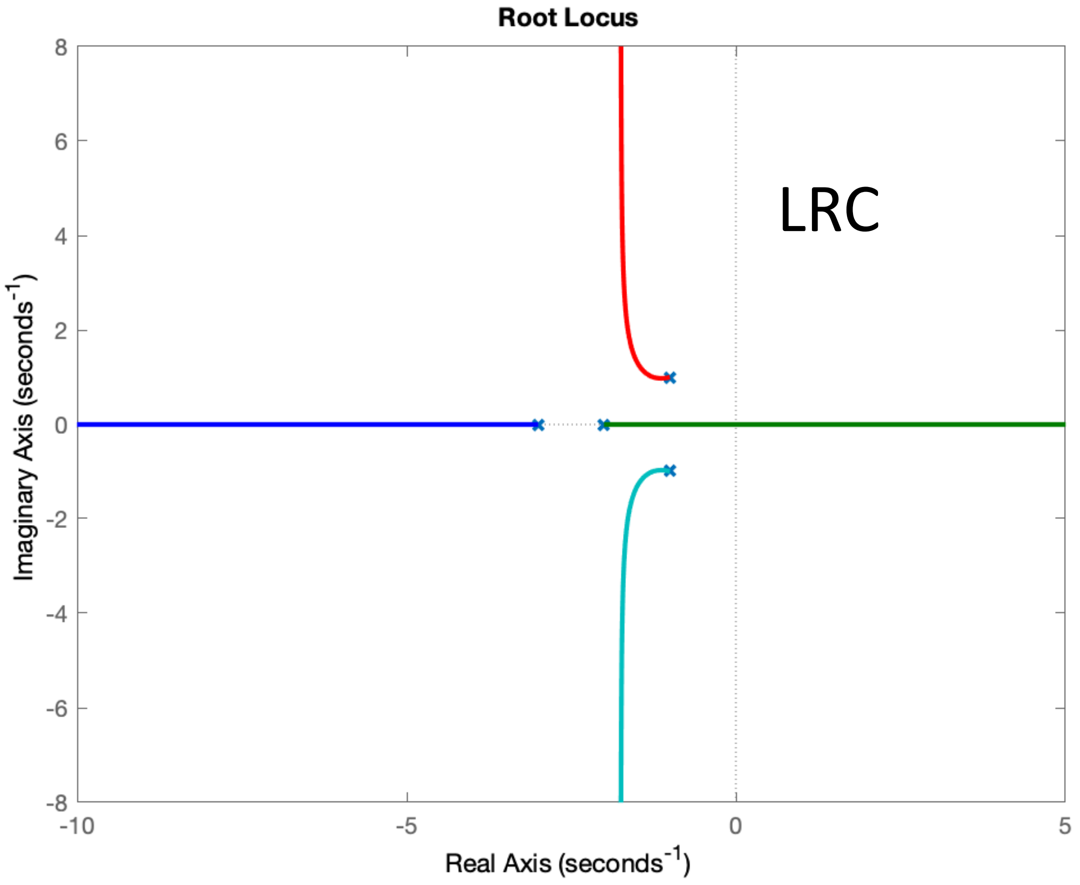
O método do LR – regras de construção



$$1 + K\frac{1}{(s-1 \pm j)(s+2)(s+3)} = 0$$

Onde há pontos de sela?

O método do LR – regras de construção



$$1 + K\frac{-1}{(s-1\pm j)(s+2)(s+3)} = 0$$

Onde há pontos de sela?

O método do LR – regras de construção

Obtenção do ganho K a partir do LR:

O LR é desenhado para $1 + K\dfrac{N(s)}{D(s)} = 0$.

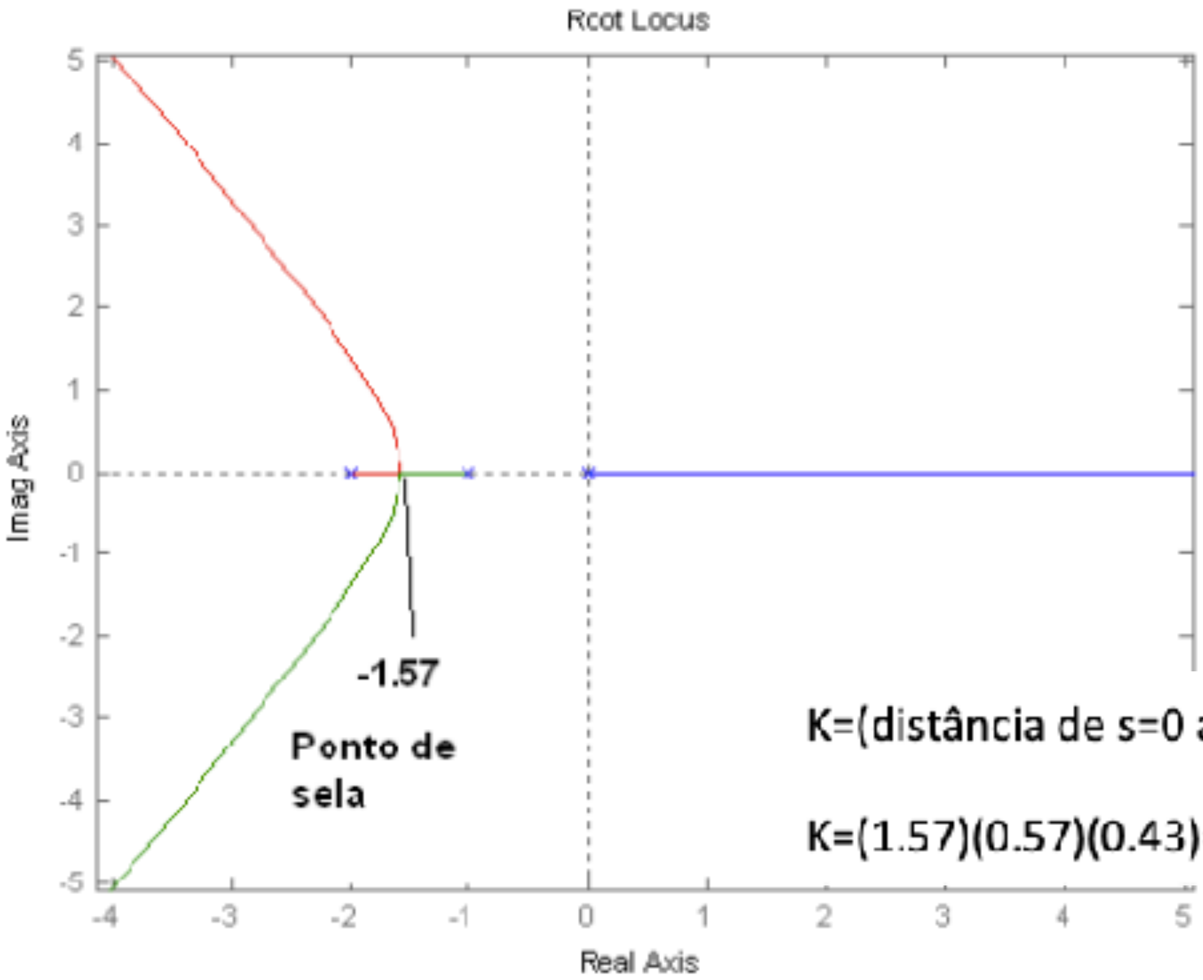
Logo, $K = -\dfrac{D(s)}{N(s)}$

Pode-se também usar o método gráfico:

$$|K| = \frac{|D(s)|}{|N(s)|} = \frac{|s+p1||s+p2|\ldots|s+pn|}{|s+z1||s+z2|\ldots|s+zn|}$$

Neste caso, mede-se a distância do zero z ou polo p ao ponto s, e usa-se na expressão acima.

O método do LR – regras de construção



Exemplo: qual o ganho K para o qual há raízes no ponto de sela em s=-1.57?

Método analítico:

$$K = -s^3 + 3s^2 + 2s \,\Big|_{s=-1.57} = -0.38$$

Método gráfico:

K=(distância de s=0 a -1.57)(distância de s=-1 a -1.57)(distância s=-2 a -1.57)

K=(1.57)(0.57)(0.43)=-0.38 (- sinal – é por quê o LR é para K<0)

O método do LR – regras de construção

Observação importante:

Para que o ganho K seja obtido diretamente do lugar das raízes, deve-se saber qual seu ganho com os polos e zeros normalizados.

Por exemplo, as duas equações abaixo fornecem o mesmo LR.

$$1 + K\frac{10}{s(s+2)(s+10)} = 0 \qquad\qquad 1 + K\frac{10/20}{s(0.5s+1)(0.1s+1)} = 0$$

Ao se fazer o LR no Matlab, o ganho K é informado corretamente ao se clicar sobre o LR. Entretanto, caso se deseje obter K diretamente do gráfico sem conhecer a FT, tem-se

$$K = -\frac{s(s+2)(s+10)}{10}$$

Se o ganho 10 não for conhecido, K será calculado incorretamente!

O método do LR – regras de construção

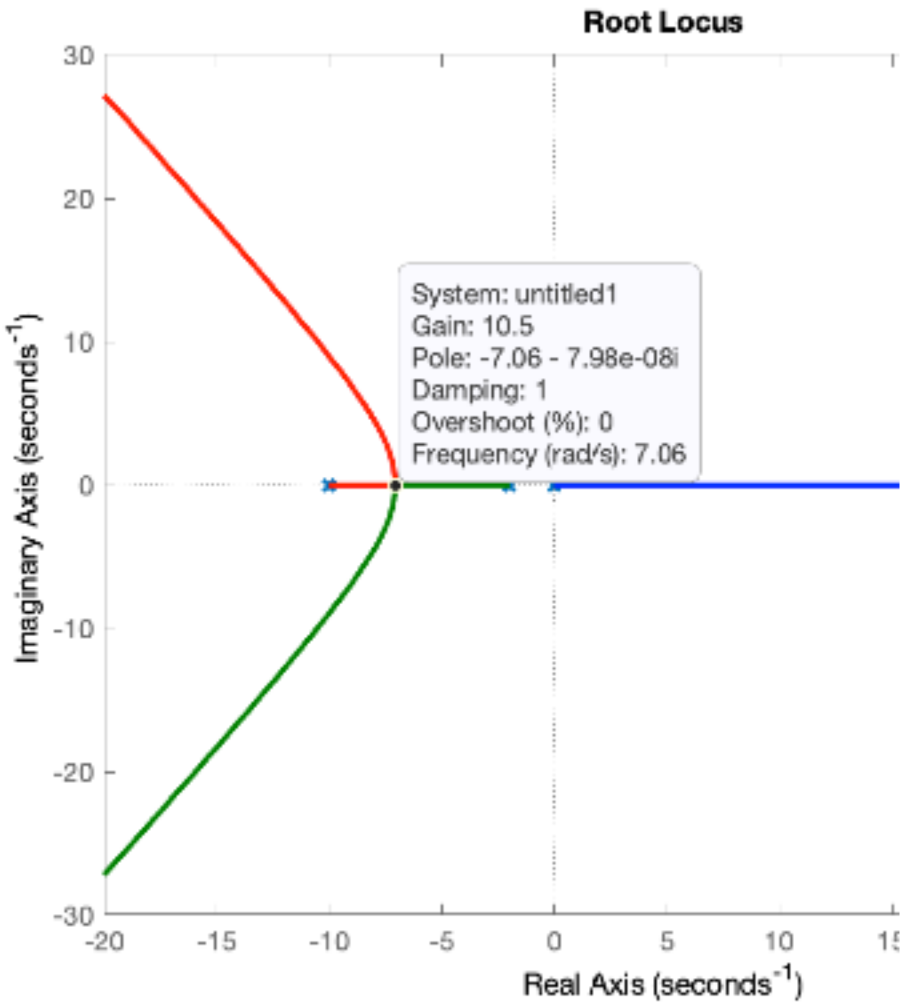
$$K = -\frac{s(s+2)(s+10)}{10}$$

Usando s=-7.06 como ponto de sela obtido do LRC,

$$K = -\frac{(-7.06)(-7.06+2)(-7.06+10)}{10}$$

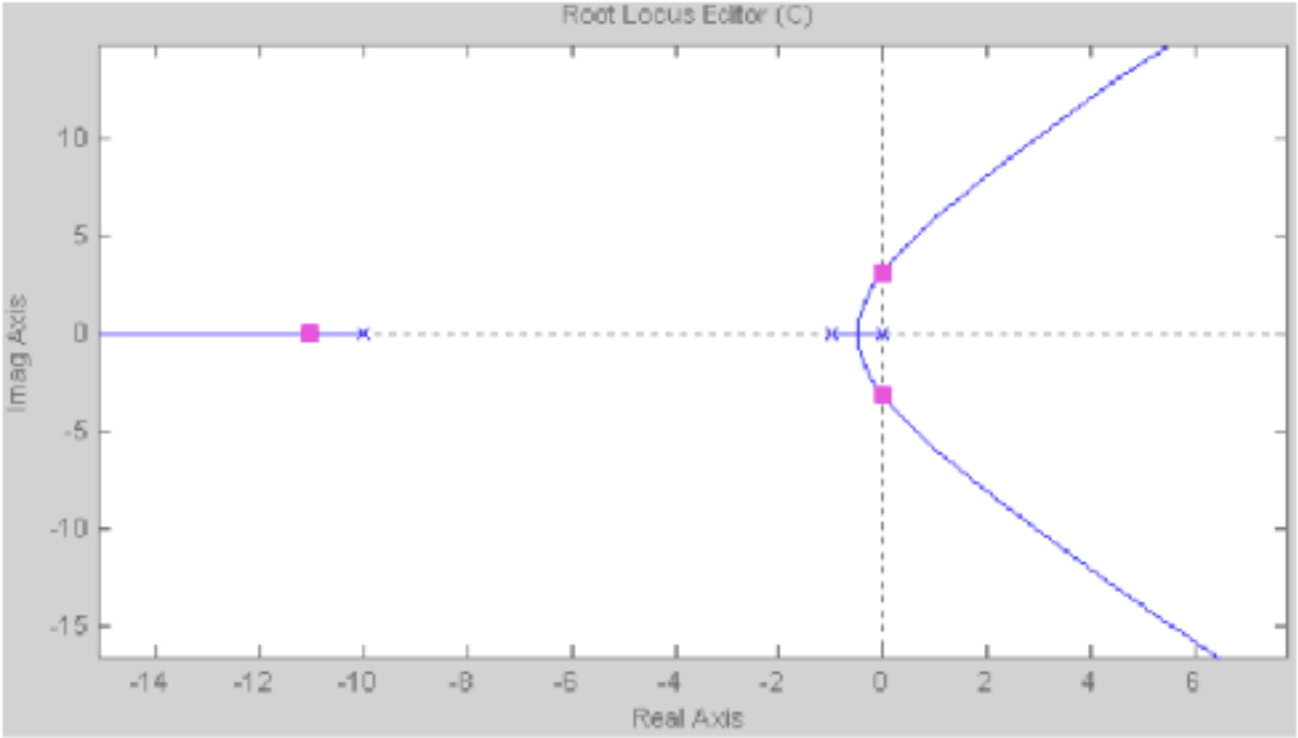
$$K = -10.5$$

Por fim, substituir um valor de s que não esteja sobre o LR resulta em um valor complexo para o ganho K!



O método do LR – regras de construção

Exemplo 5: desenho e análise do LR



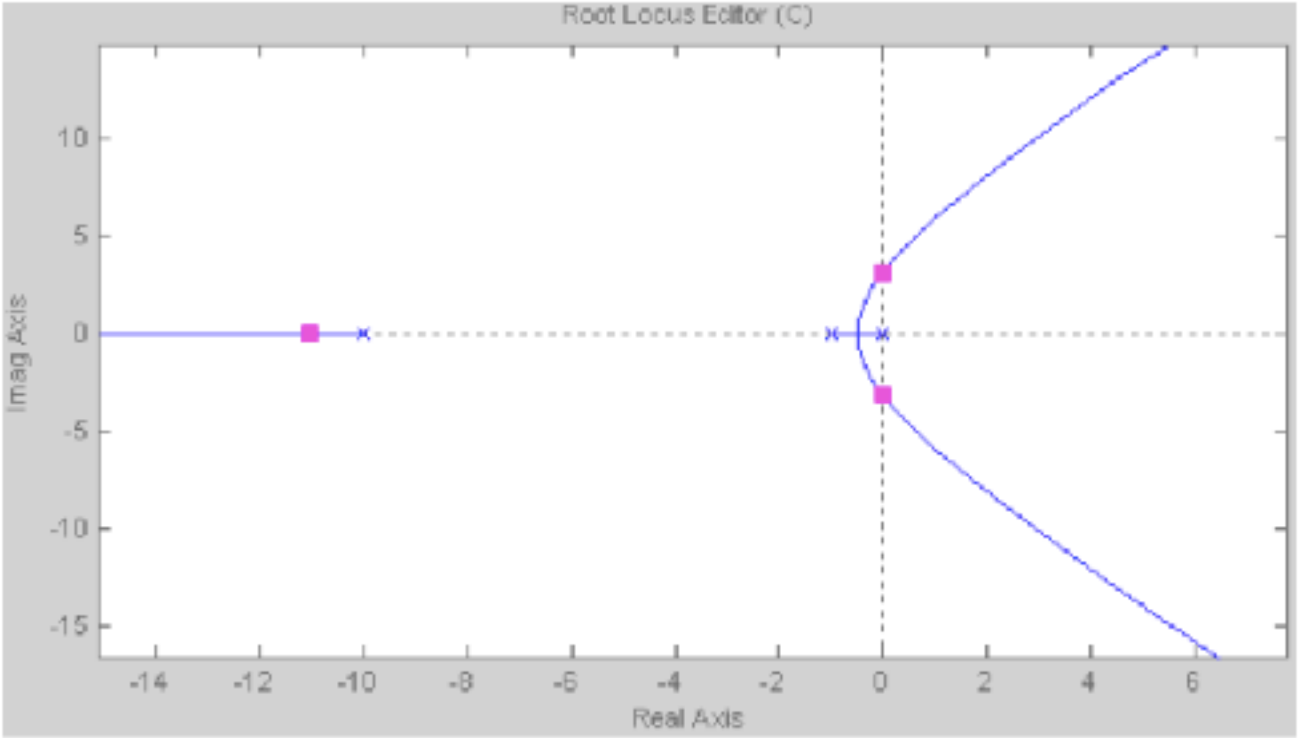
Há lugar das raízes entre os polos 0 e -1, e à esquerda do polo em -10.

O polo em s=-1 tende a -∞.

Os polos 0 e -1 tendem a assíntotas de +60graus e -60graus.

O método do LR – regras de construção

Exemplo 5: desenho e análise do LR



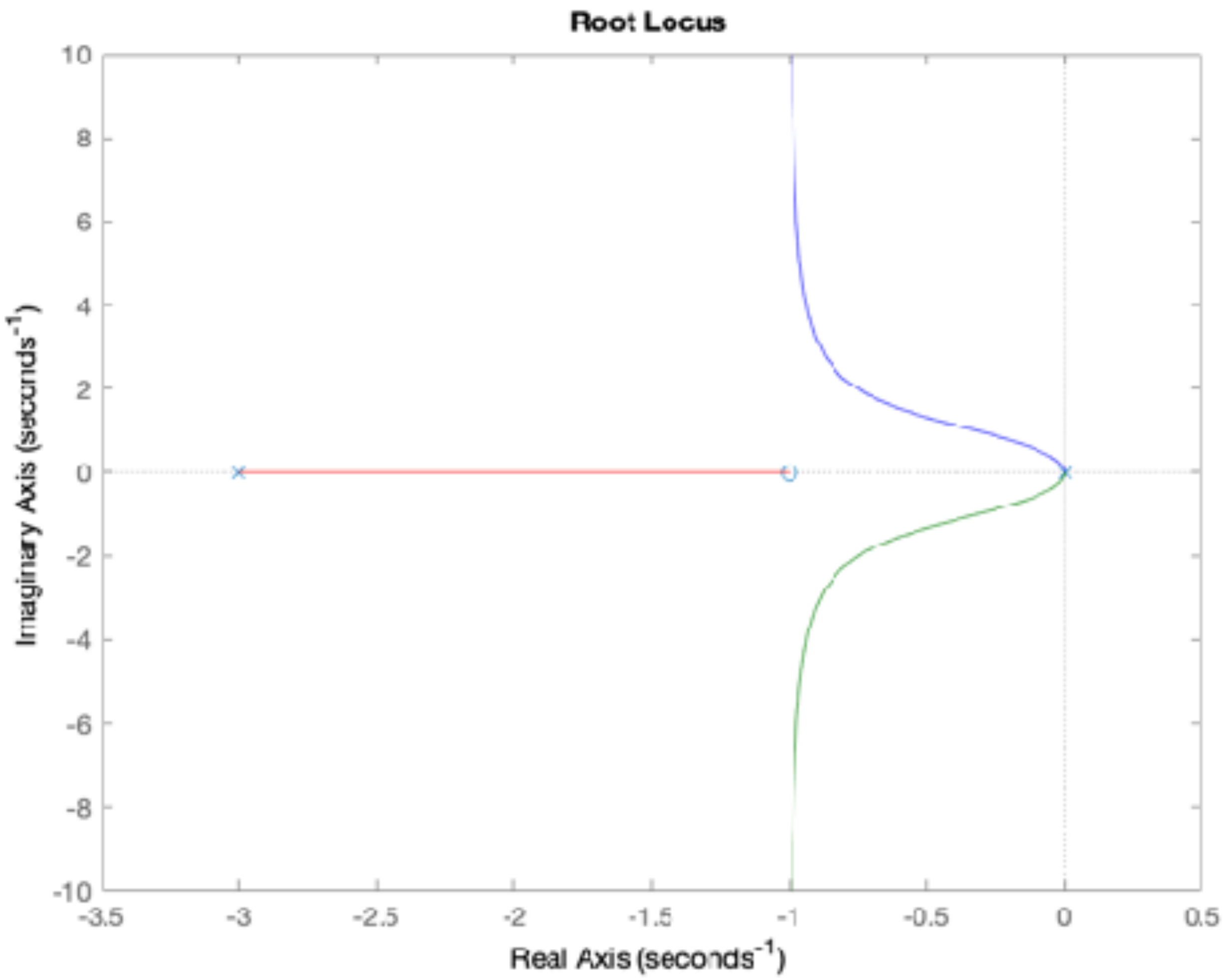
A interseção com o eixo imaginário é obtida via critério do Routh Hurzwitz, sendo igual $\sqrt{10}$.

O ganho para o qual isto ocorre também é obtido, sendo K=110.

O ponto de sela, no qual as duas raízes reais se tornam complexas é s=-0.48.

O método do LR

Exemplo 6: Análise de um LR



2.1 Quais são os polos e zeros de G(s)?

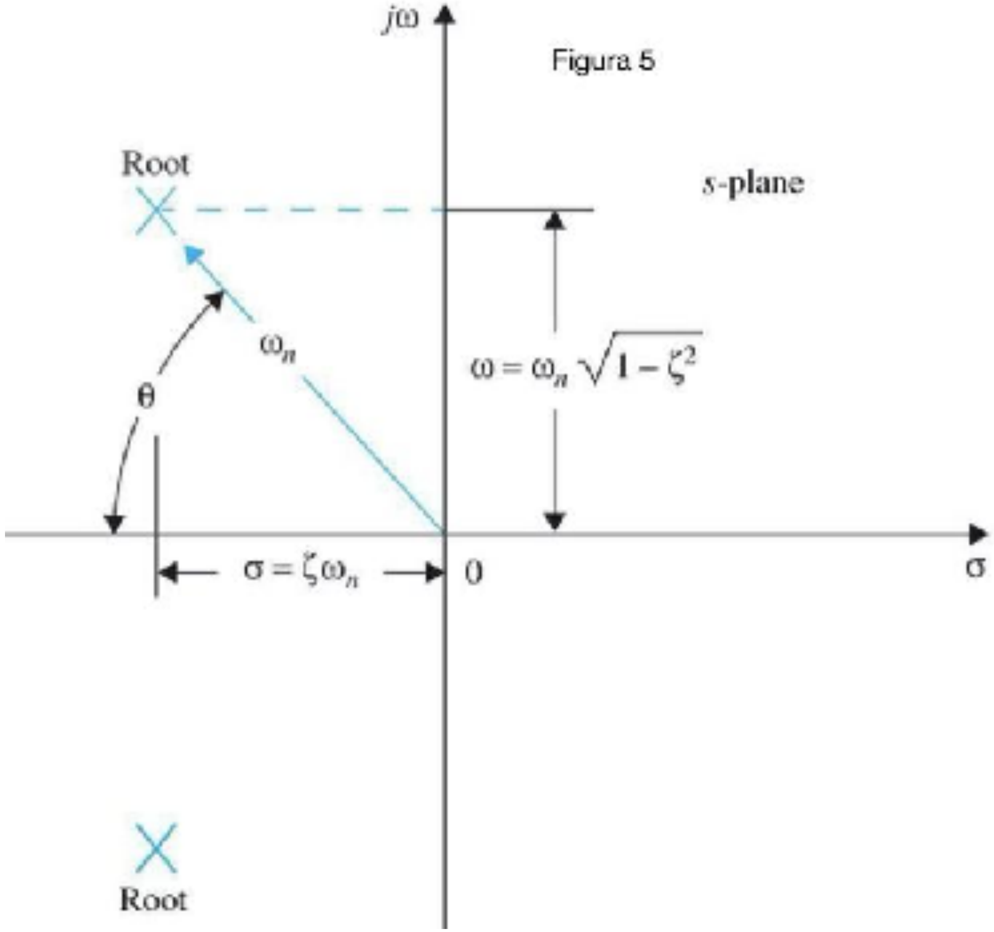
2.2 Quais são as raízes quando K=0 e $K \to \infty$?

2.3 Para que valores de K esse sistema é estável?

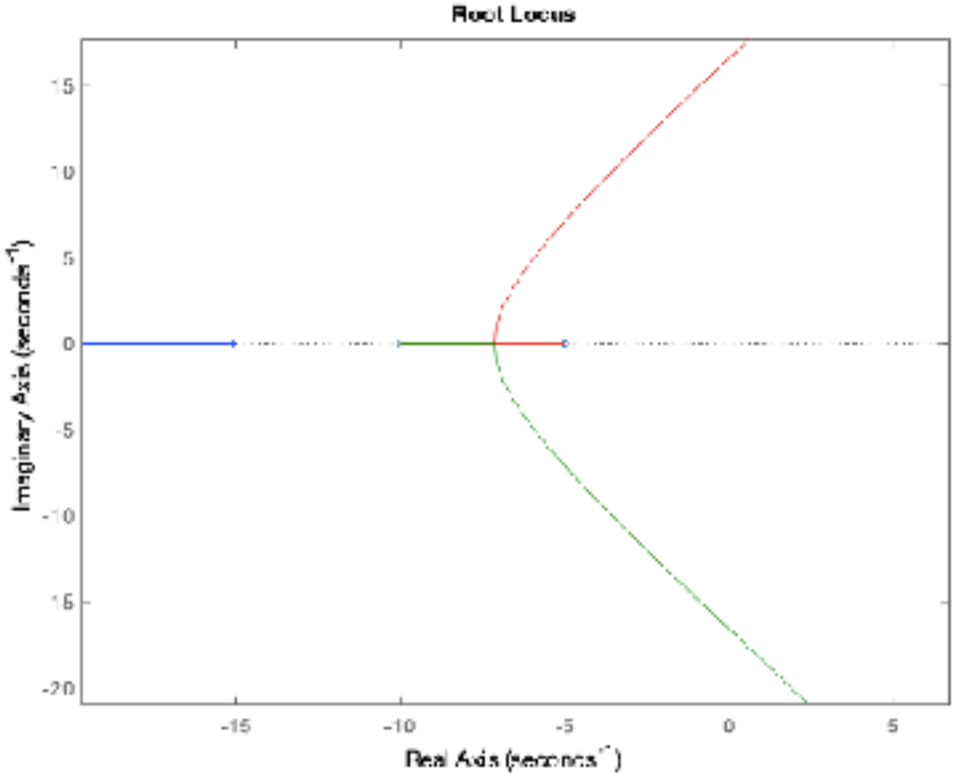
2.4 Para que valores de K o par de polos complexos tem amortecimento > 0.707?

O método do LR

Uso do LR para análises

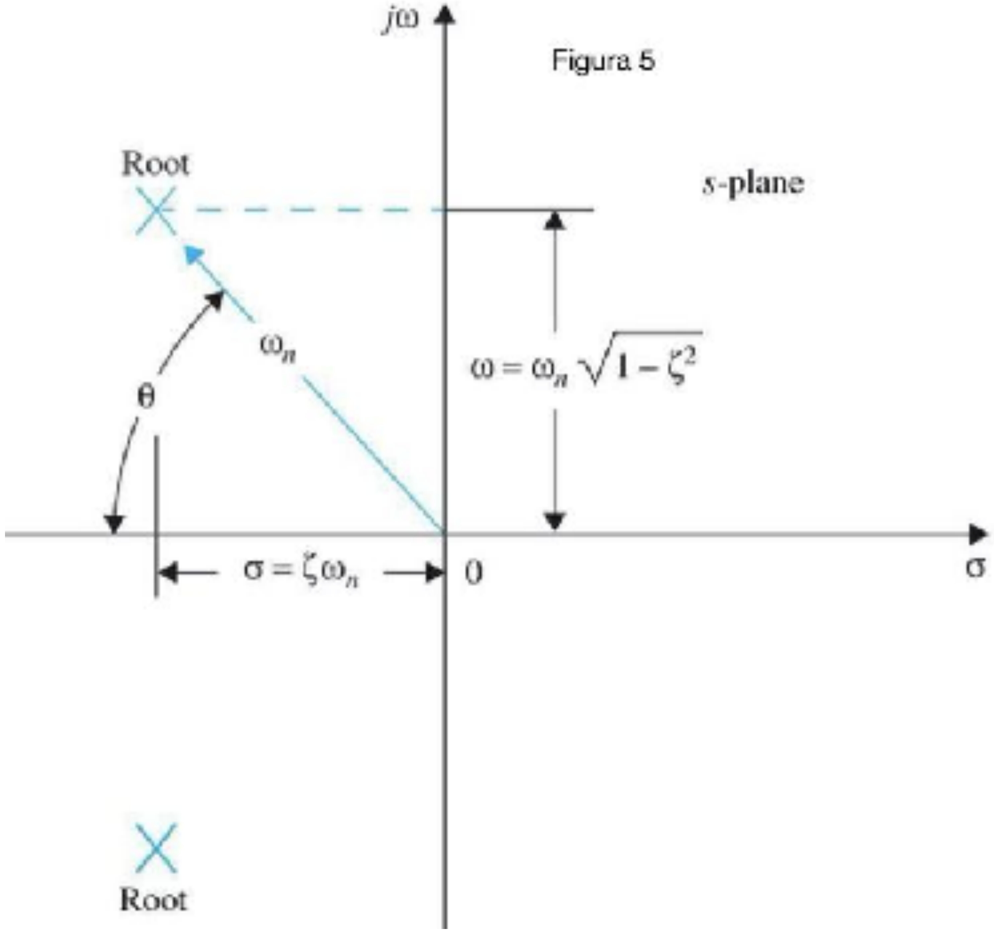


Existe K para o qual ts<1s e zeta>0.707?

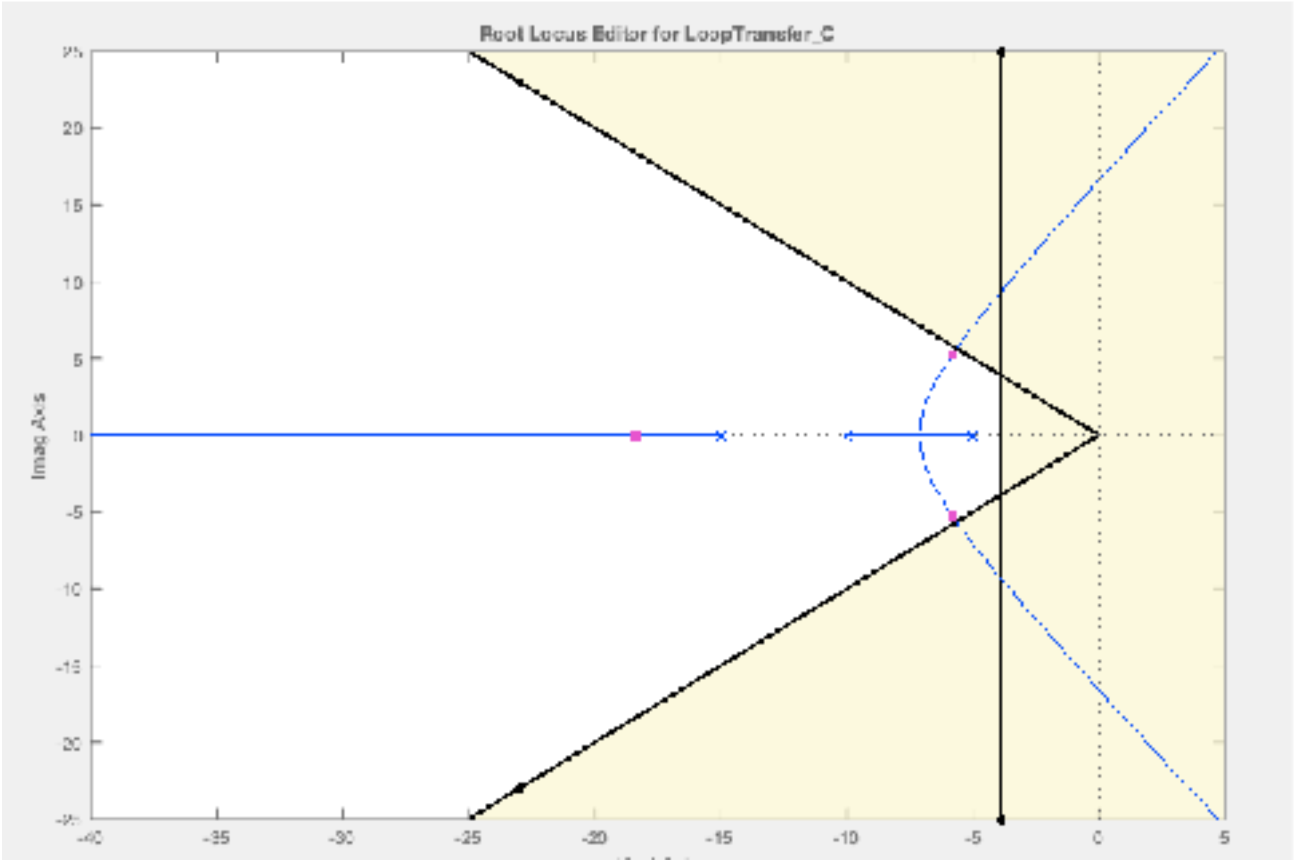


O método do LR

Uso do LR para análises



Existe K para o qual ts<1s e zeta>0.707?

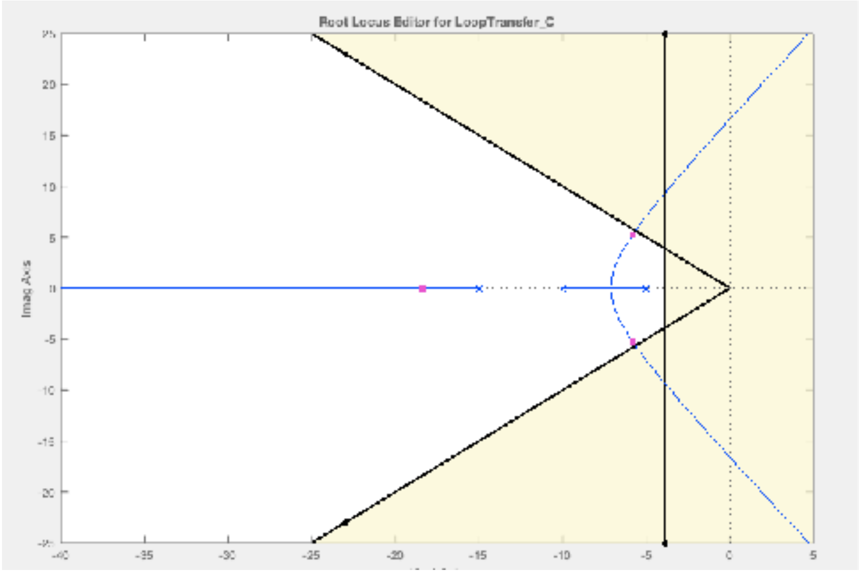


O método do LR

Muito importante:

As análises anteriores são válidas quando o par de polos complexos em análise é dominante.

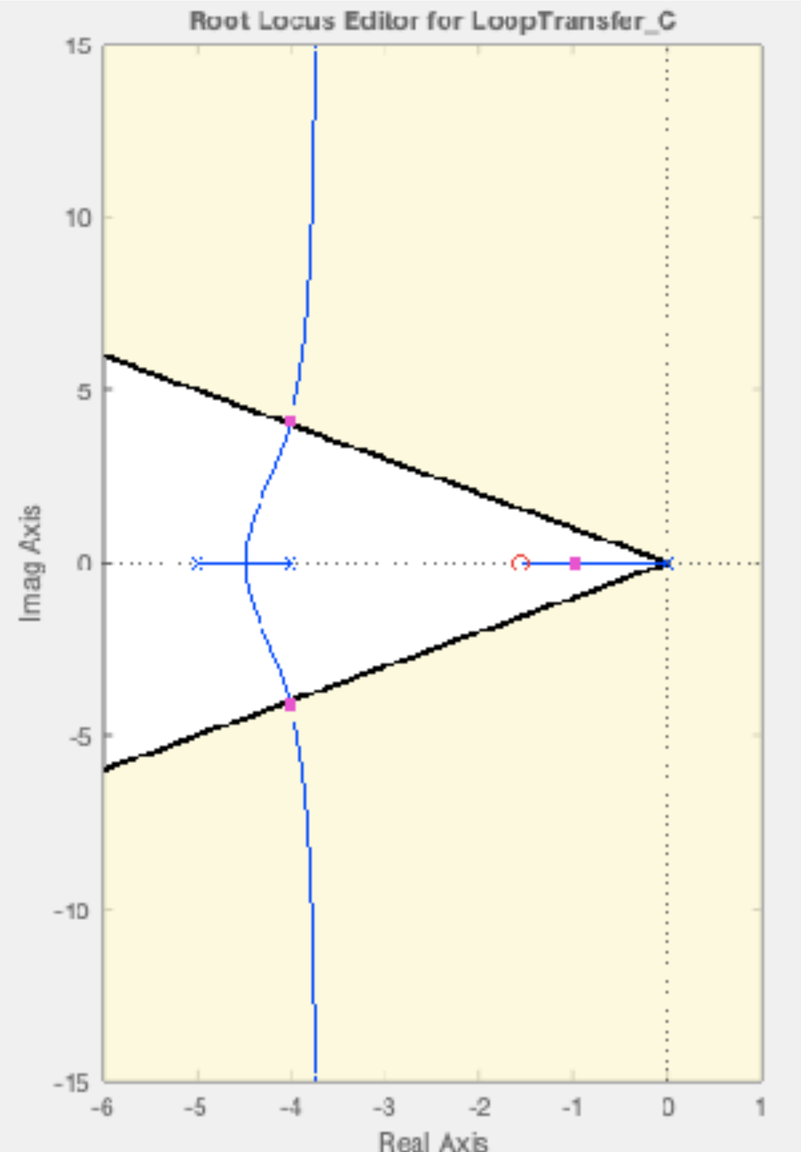
No caso abaixo, por exemplo, o terceiro polo é real e bem mais rápido que o par de polos complexo. Assim, os polos complexos dominam a resposta.



O método do LR

O caso é diferente.
Pelo par de polos complexos, a sobreelevação seria de 5%.

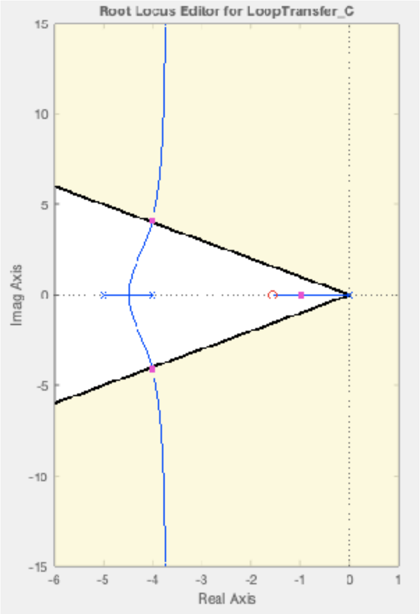
Entretanto, o zero e o polo à direita do par complexo altera completamente a resposta.

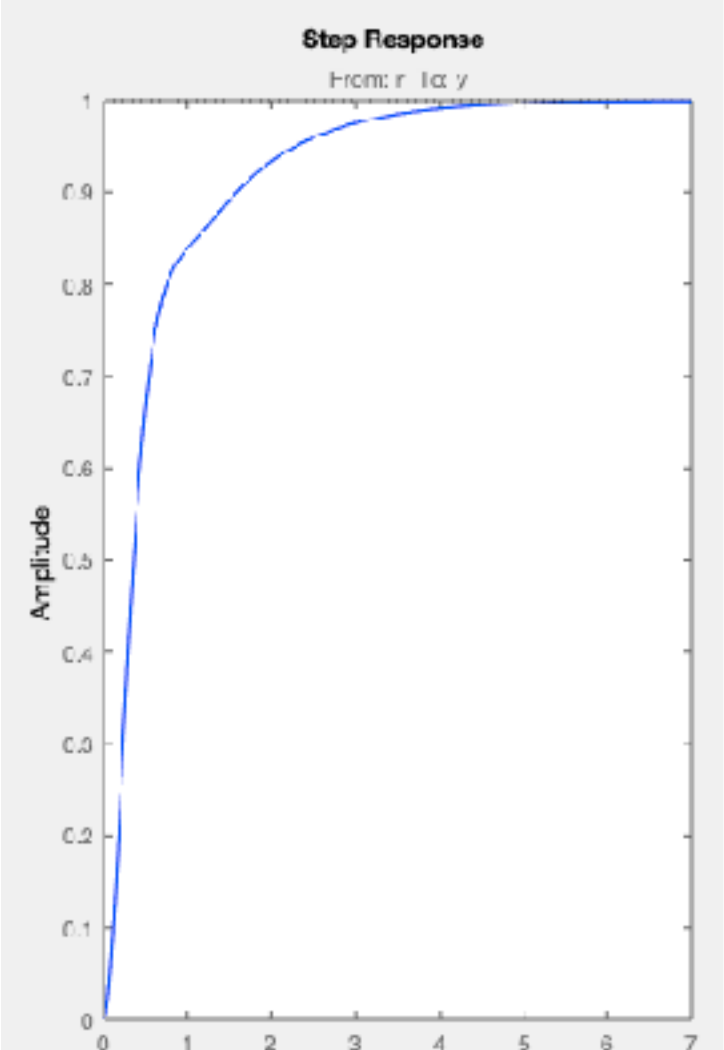


O método do LR

O caso ao lado é bem, conhecido.
Pelo par de polos complexos, a sobreelevação seria de 5%

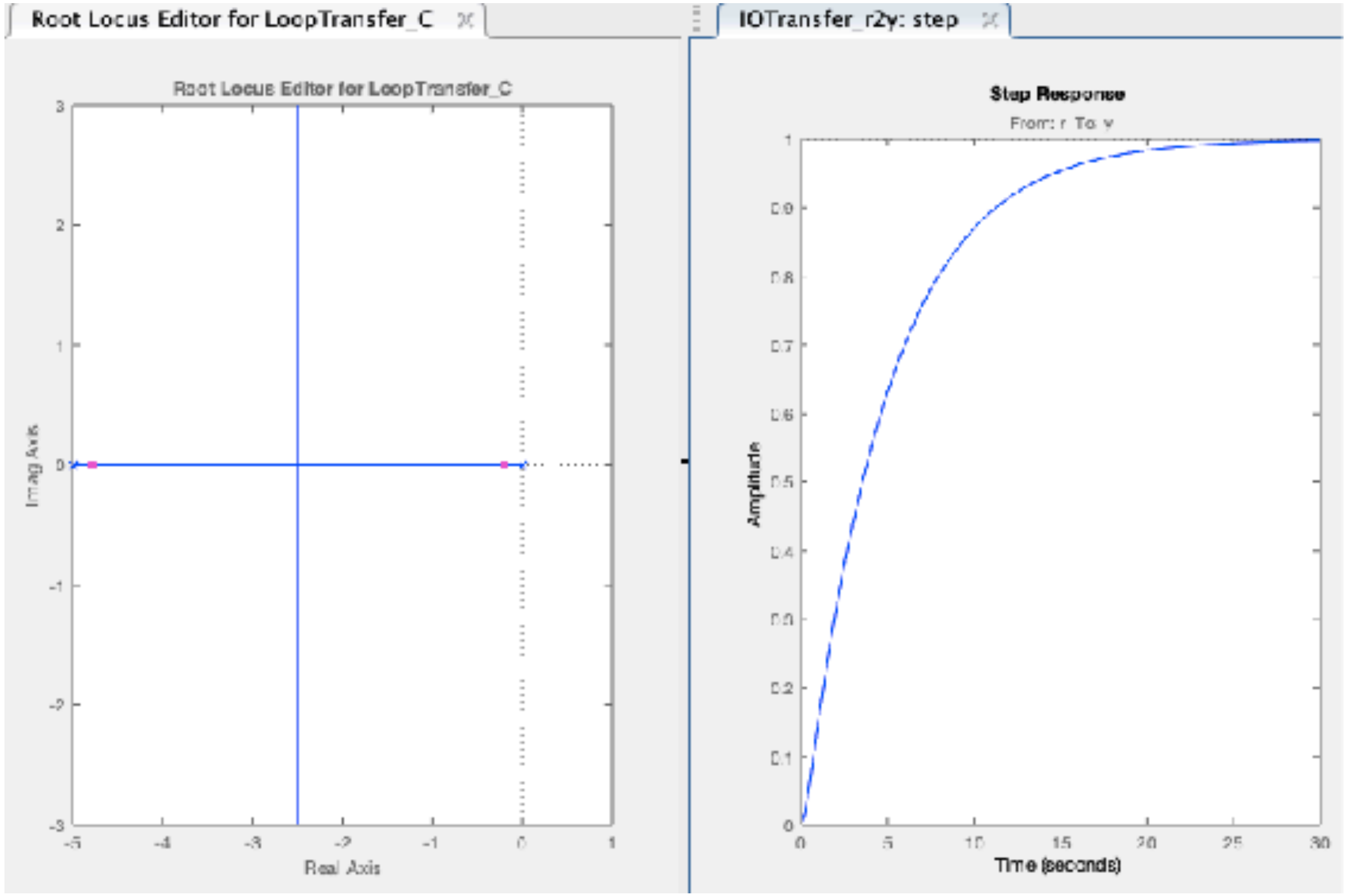
Entretanto, o zero e o polo à direita do par complexo altera completamente a resposta.





Uso do rltool no Matlab

A figura abaixo mostra o uso do rltool para $1 + K\dfrac{1}{s(s+5)} = 0.$

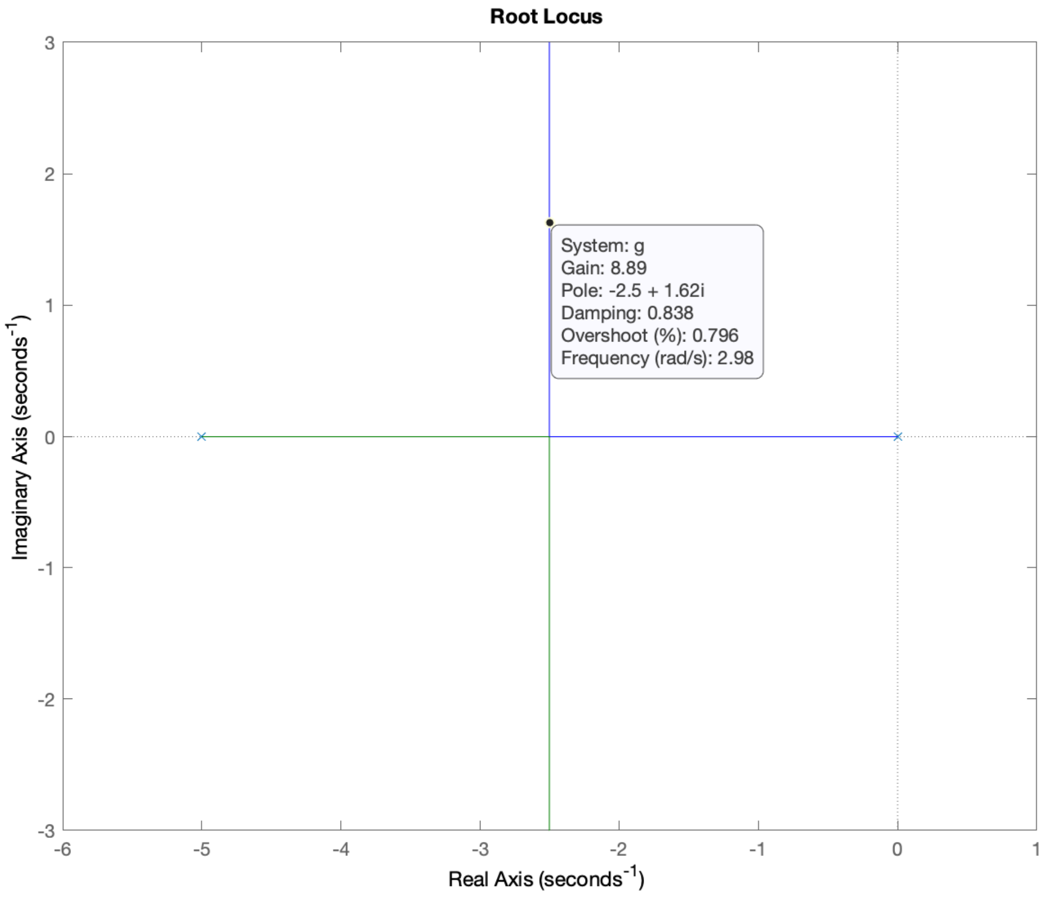


Ao clicar sobre o ponto do LR e arrastar, ele se desloca para qualquer ponto do LR.

Os demais polos de malha fechada também se alteram, e assim pode-se ver onde estão todos os polos de malha fechada para um determinado ganho K.

O ganho K informado é aquele que coloca todos os polos nas localizações indicadas.

Uso do comando rlocus



O comando rlocus pode ser dado na linha de comando, e é menos interativo que o rltool.

Ao clicar sobre um ponto, obtem-se variadas informações, entre elas o ganho que coloca o polo no lugar selecionado.

O método do LR para sistemas discretos

Não há diferenças no método usado para desenhar o LR quando se considera o caso discreto.
O que muda é seu uso, que deve considerar o círculo unitário ao invés do semiplano esquerdo para análise de estabilidade e desempenho (UP e ts).

$$1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$ Caso contínuo.

$$1 + K\frac{N(z)}{D(z)} = 0$$ Caso discreto.

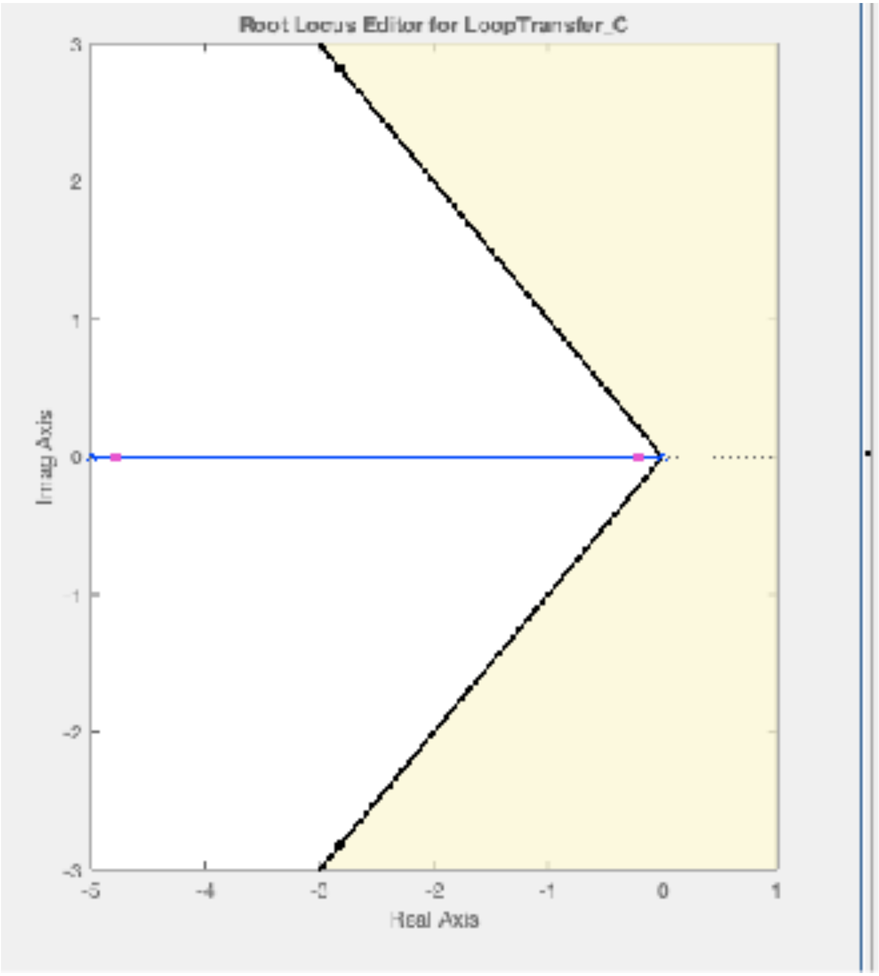
O método do LR para sistemas discretos

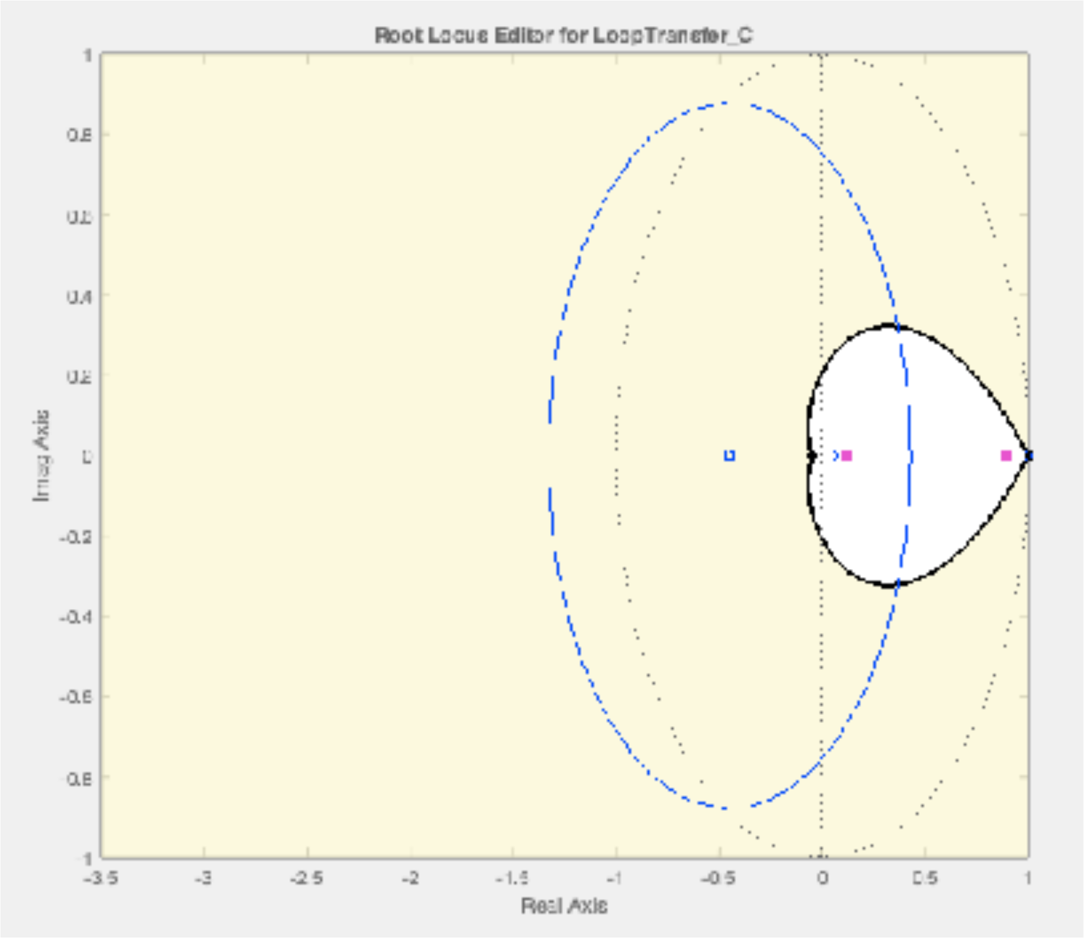
Sobre desempenho:

- as curvas de amortecimento constante são bem diferentes.
- as respostas rápidas para sistemas discretos correspondem a polos mais próximos da origem, enquanto para o caso contínuo os polos devem estar afastados da origem.

O método do LR para sistemas discretos

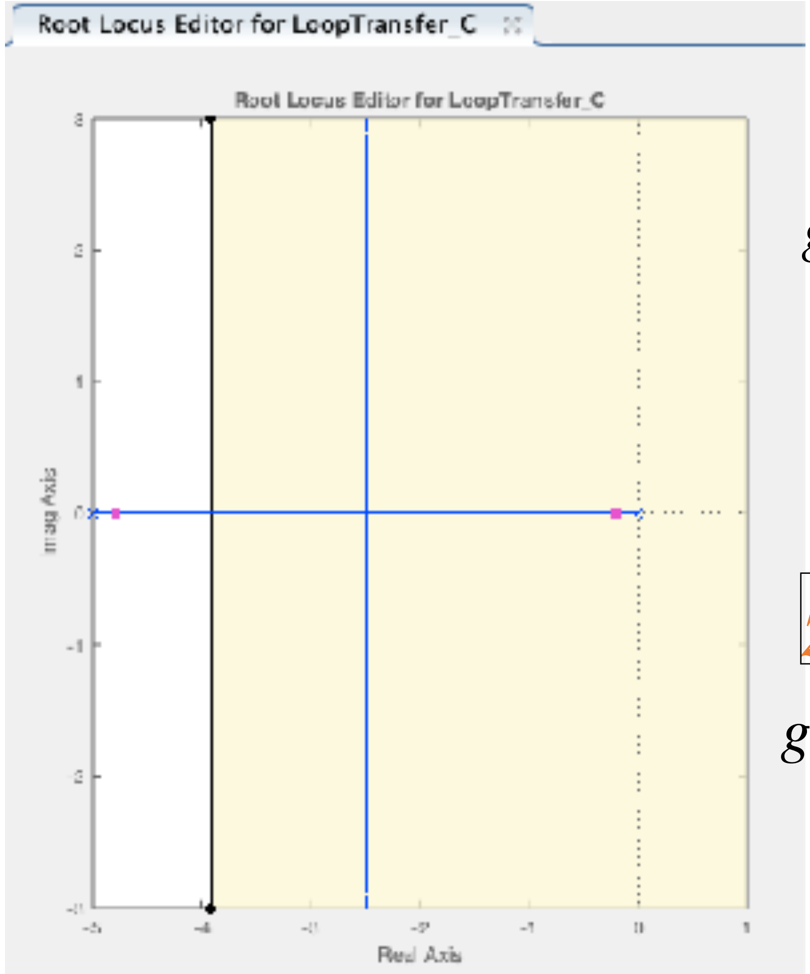
Diferença nas curvas de amortecimento constante: $UP \leq 5\,\%$





O método do LR para sistemas discretos

Diferença no tempo de estabelecimento: $t_s \leq 1s$



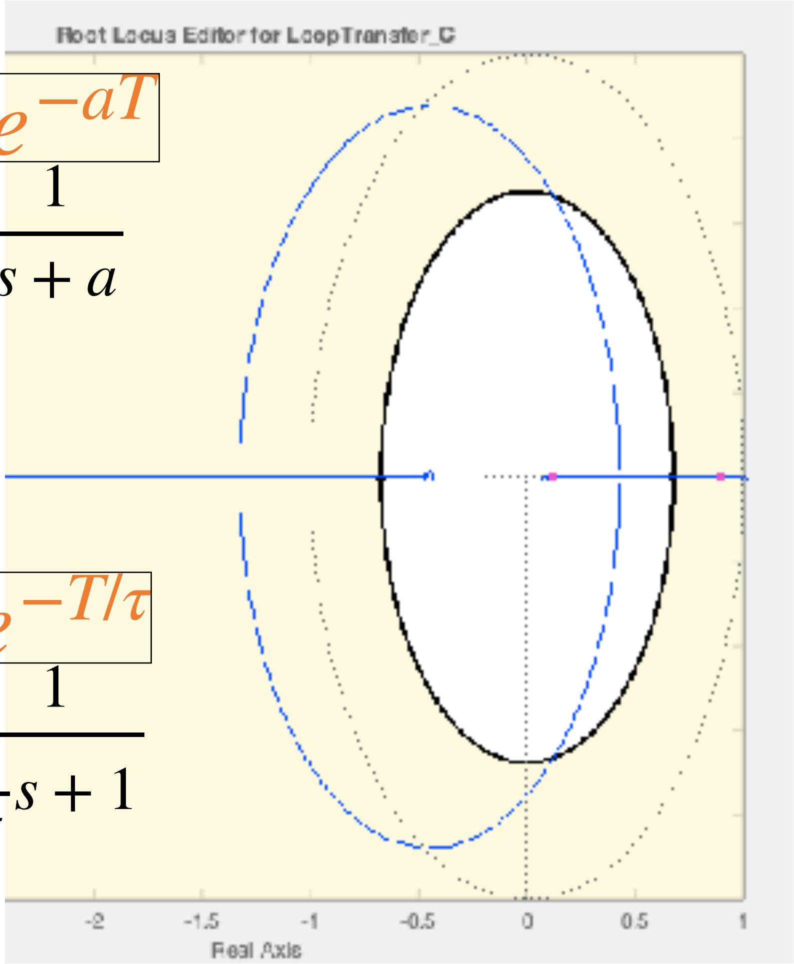
$$\boxed{z = e^{-aT}}$$

$$g(s) = \frac{1}{s+a}$$

Ou

$$\boxed{z = e^{-T/\tau}}$$

$$g(s) = \frac{1}{\frac{1}{\tau}s + 1}$$



O método do LR para sistemas discretos

Exemplo:

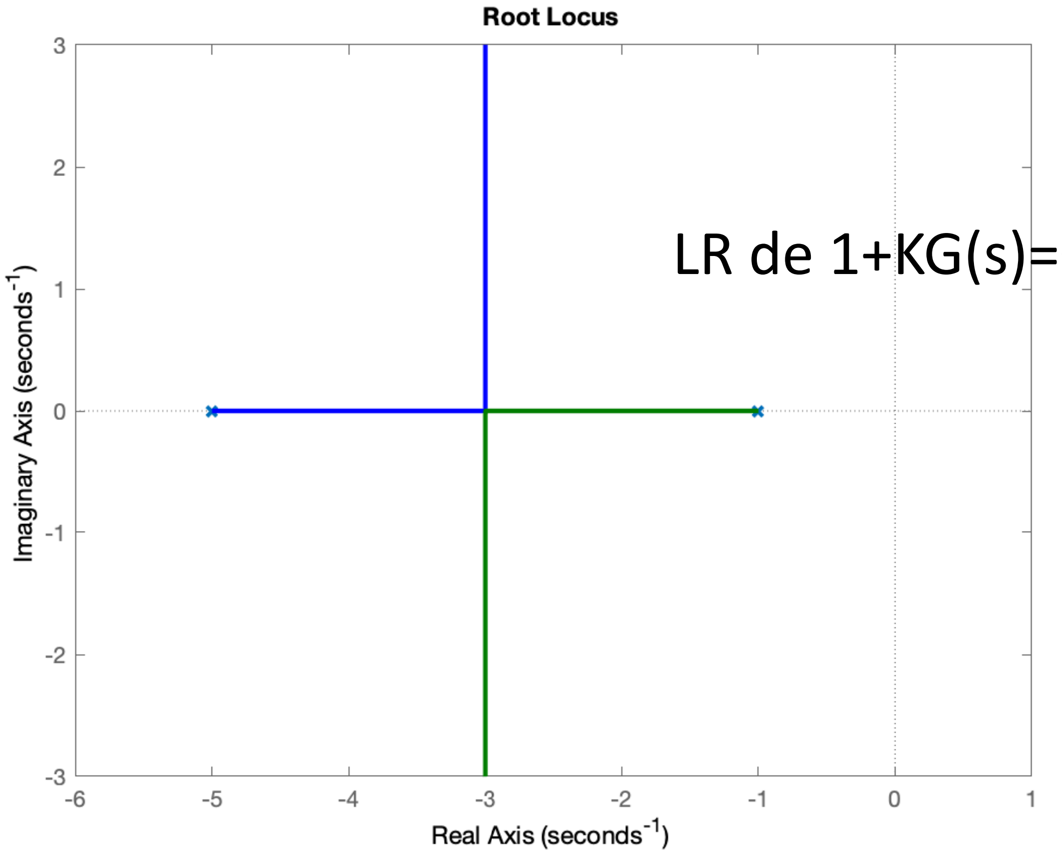
```
g =

      10
  -------------
  s^2 + 6 s + 5

Continuous-time transfer function.

>> gd=c2d(g,0.5)

gd =

     0.5247 z + 0.1976
  ------------------------
  z^2 - 0.6886 z + 0.04979

Sample time: 0.5 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Fazer LR de 1+KG(s)=0 e analisar no semiplano esquerdo

Fazer LR de 1+KG(z)=0 e analisar no círculo unitário

O método do LR para sistemas discretos

```
g =

         10
  -------------
  s^2 + 6 s + 5

Continuous-time transfer funct

>> gd=c2d(g,0.5)

gd =

       0.5247 z + 0.1976
  -----------------------
  z^2 - 0.6886 z + 0.04979

Sample time: 0.5 seconds
Discrete-time transfer function.
```

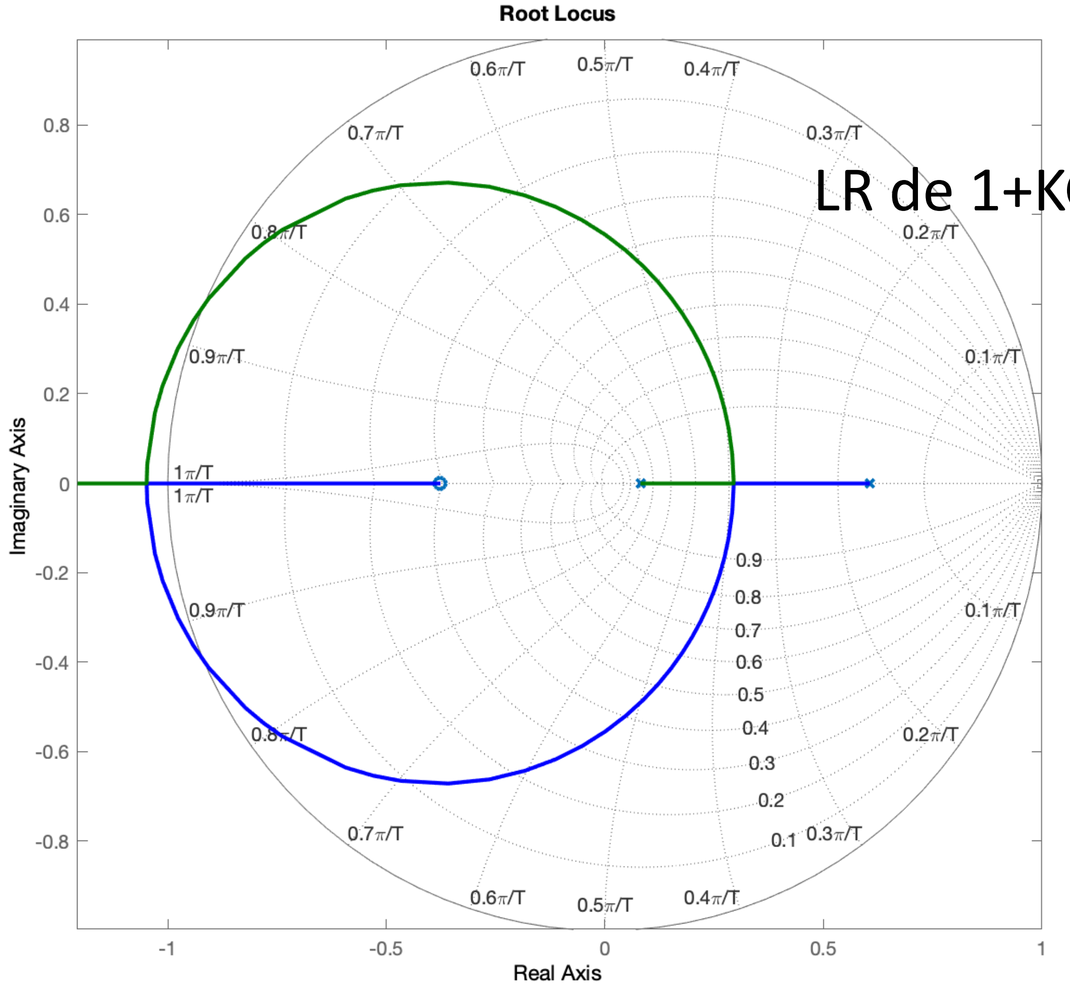


LR de 1+KG(s)=0

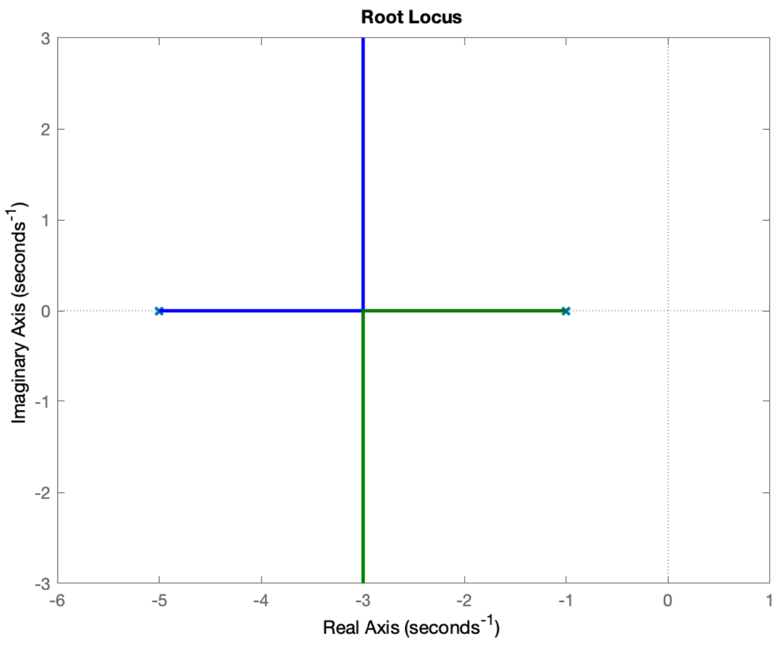
O método do LR para sistemas discretos

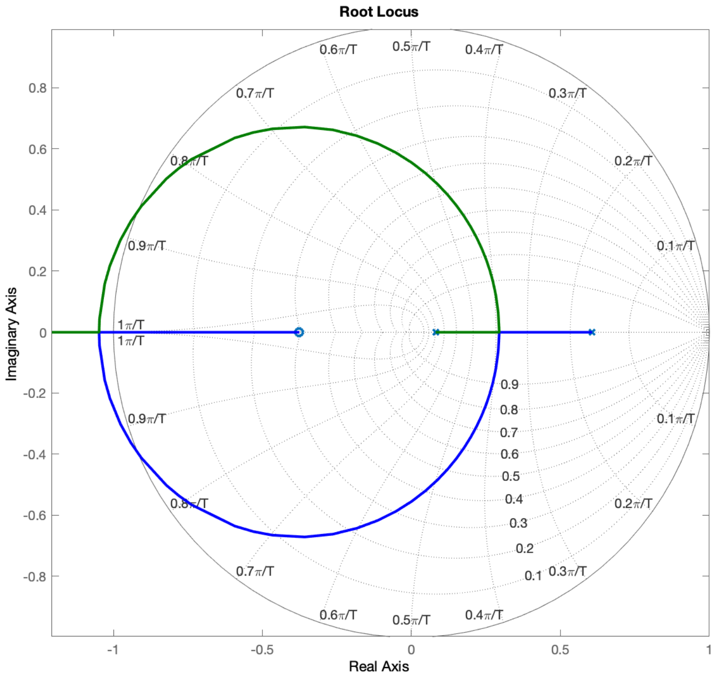
```
g =

       10
  -------------
  s^2 + 6 s + 5

Continuous-time transfer function

>> gd=c2d(g,0.5)

gd =

     0.5247 z + 0.1976
  ------------------------
  z^2 - 0.6886 z + 0.04979

Sample time: 0.5 seconds
Discrete-time transfer function.
```

LR de 1+KG(z)=0:



O método do LR para sistemas discretos





Para o exemplo, nos casos contínuo e discreto, o aumento do ganho reduz o amortecimento.

No caso discreto, ganhos altos tornam o sistema instável.

O método do LR para sistemas discretos

Exemplo: Vamos agora avaliar o efeito do ganho K na resposta em malha fechada de $G(s) = \dfrac{5Ke^{-2s}}{10s+1}$ discretizada!

Usaremos tempo de amostragem Ts=0.5 segundos para representar o tempo morto e a constante de tempo.

Neste caso, não precisamos aproximar por Padé:

Discretizando G(s) com SOZ: $G_0(s) = \dfrac{5}{10s+1}$ $\qquad G_0(z) = \dfrac{0.2439}{z-0.9512}$

Discretizando o atraso: $e^{-2s} \to z^{-4}$

Ou seja, 2 segundos de tempo morto correspondem a 4 tempos de amostragem

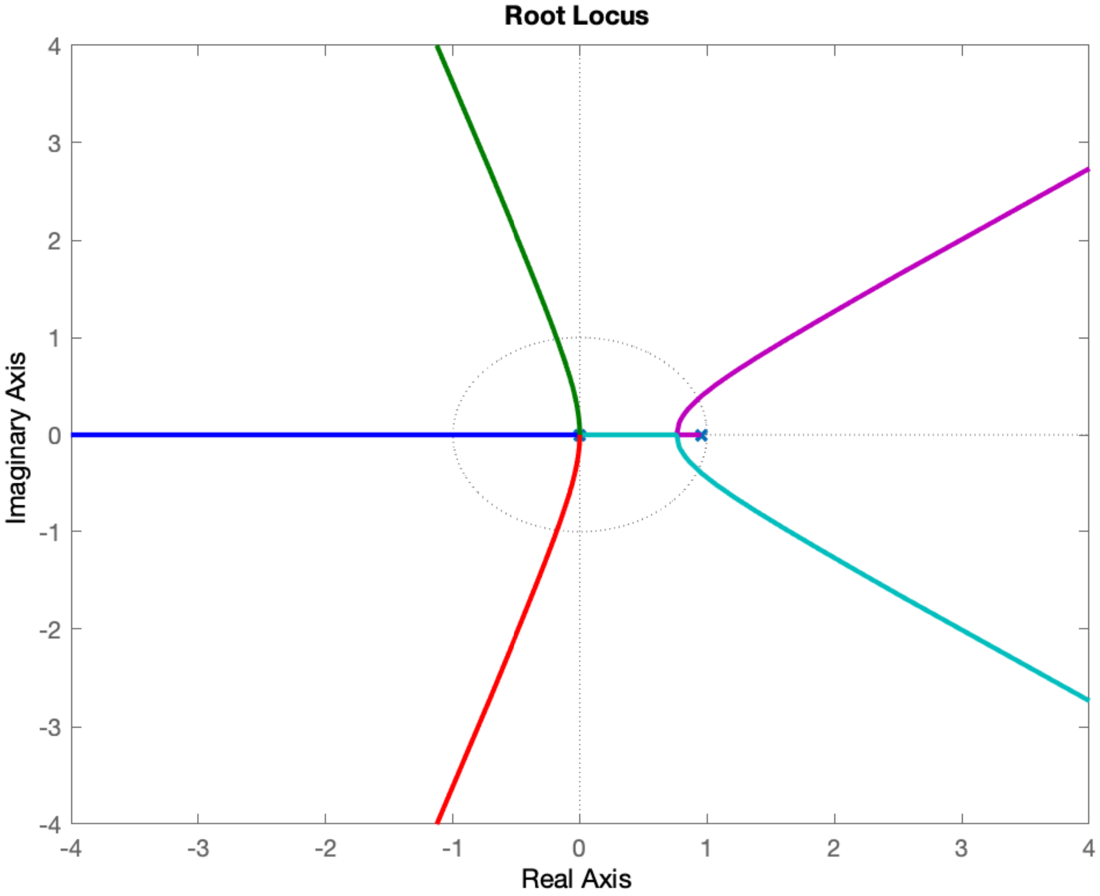
Logo, $G(z) = \dfrac{0.2439z^{-4}}{z-0.9512}$

O método do LR para sistemas discretos

Fazendo o LR de $1 + K\dfrac{0.2439z^{-4}}{z - 0.9512} = 0$ $\quad 1 + K\dfrac{0.2439}{z^4(z - 0.9512)} = 0$

Como obter o ganho K para o qual o sistema se torna instável?

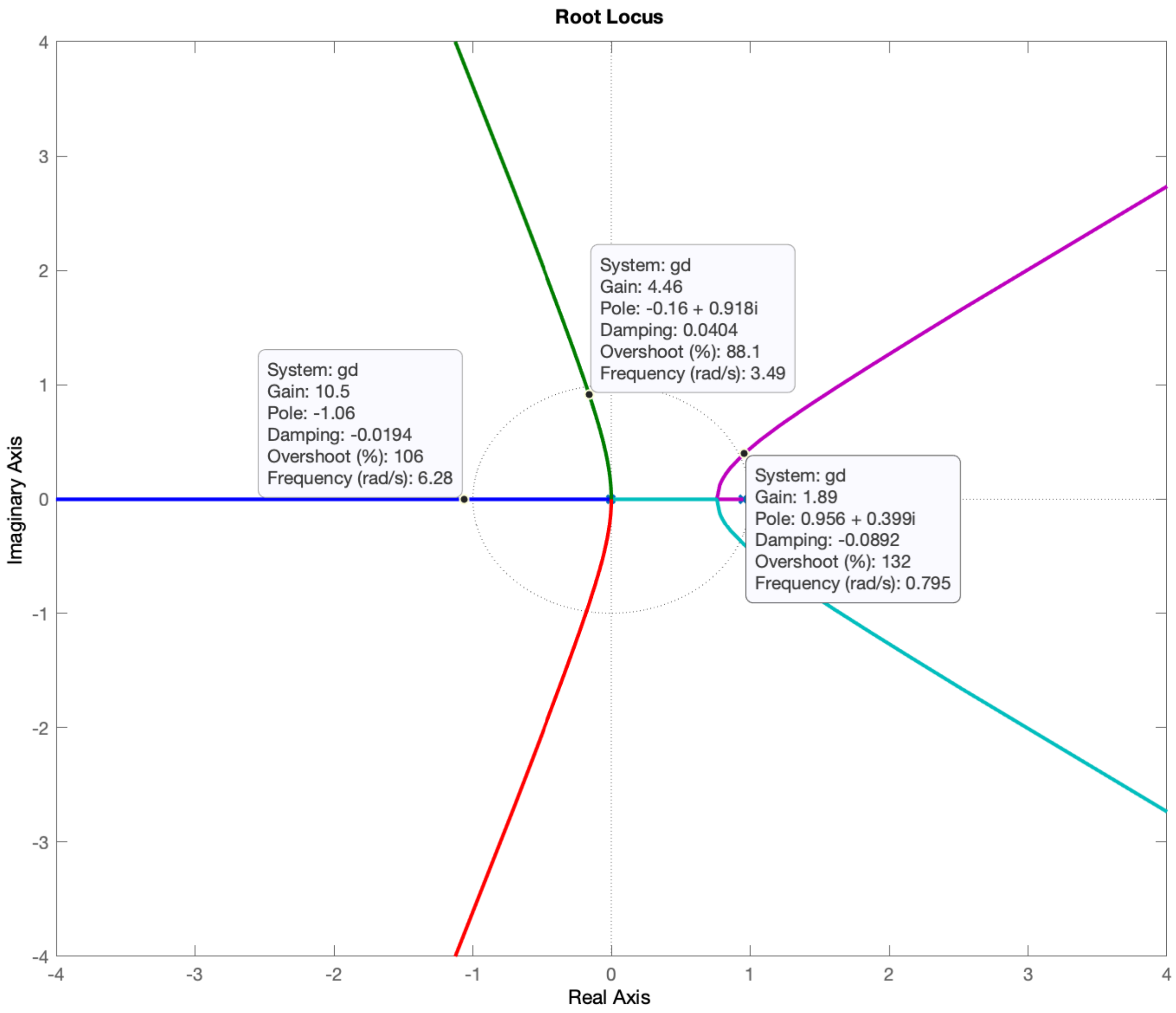
Temos neste caso 4 polos na origem e um polo em $z = 0.9512.$



Qual o efeito do aumento do ganho K neste caso?

Compare com o caso contínuo!

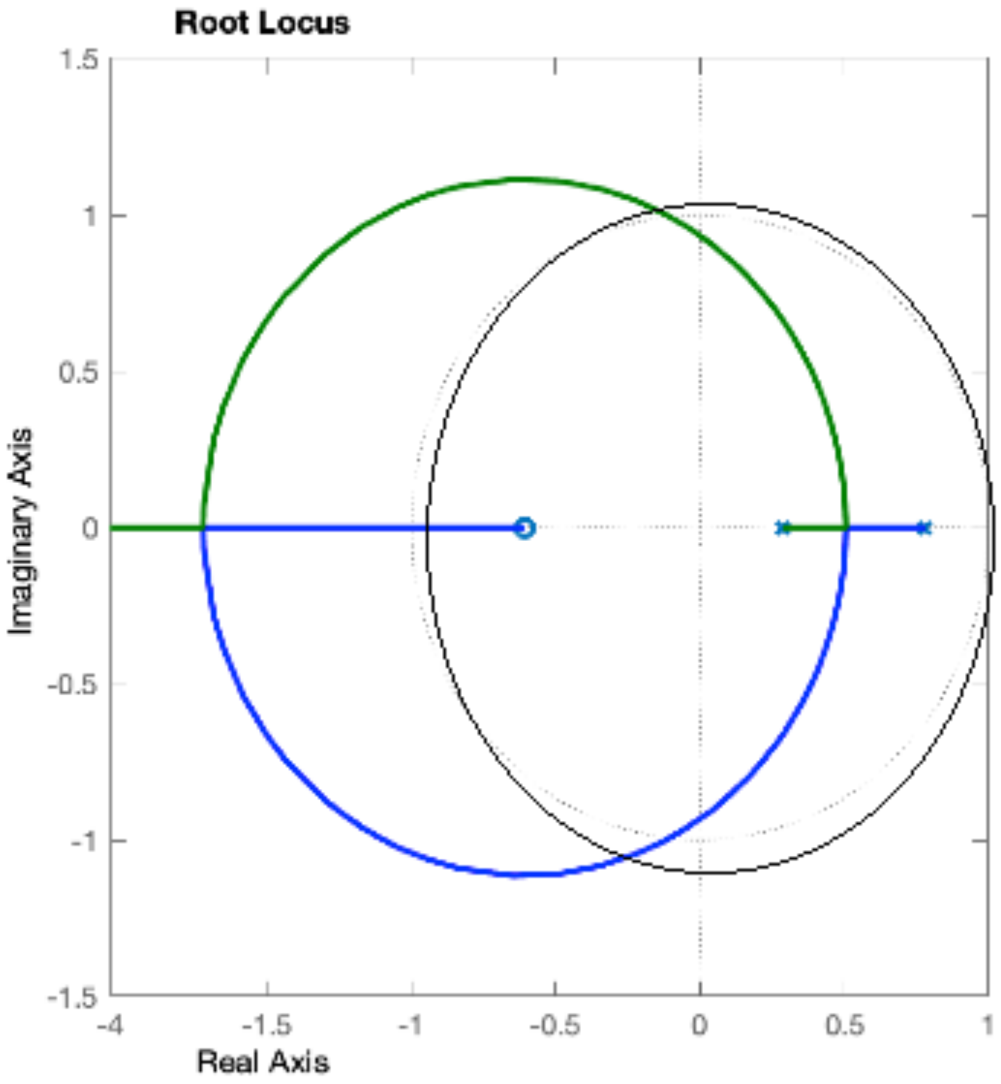
O método do LR para sistemas discretos



Exercício

g=tf(2,[1 6 5]), Ts=0.25

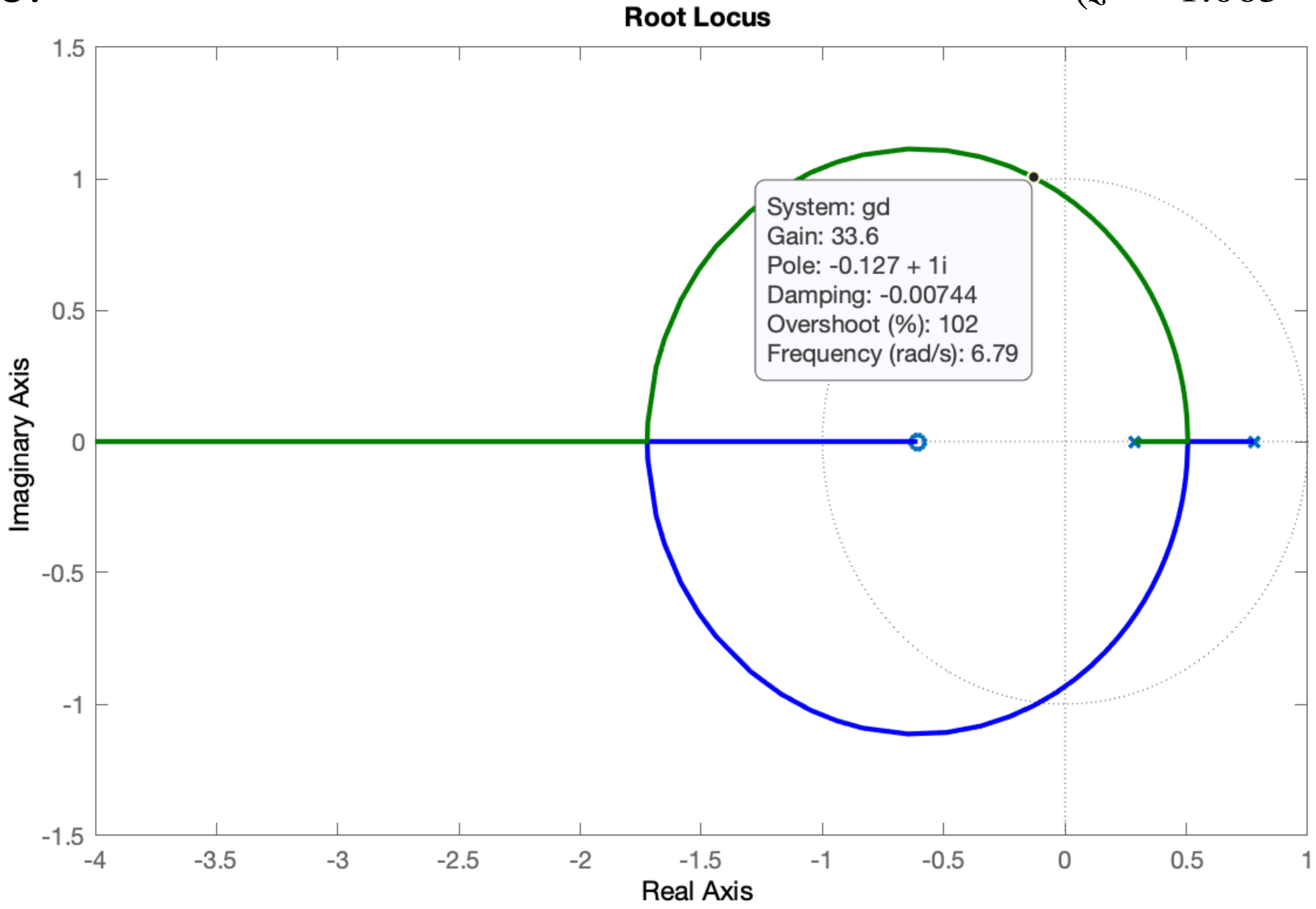
$$1 + K\frac{(0.03925 * z + 0.02388)}{(z^2 - 1.065 * z + 0.2231)} = 0$$



Obtenha os valores de $K < 0$ e $K > 0$ para os quais o sistema é estável.

Solução:

$$1 + K\frac{(0.03925 * z + 0.02388)}{(z^2 - 1.065 * z + 0.2231)} = 0$$



$$z = -0.127 + i$$

$$K = 33.5$$

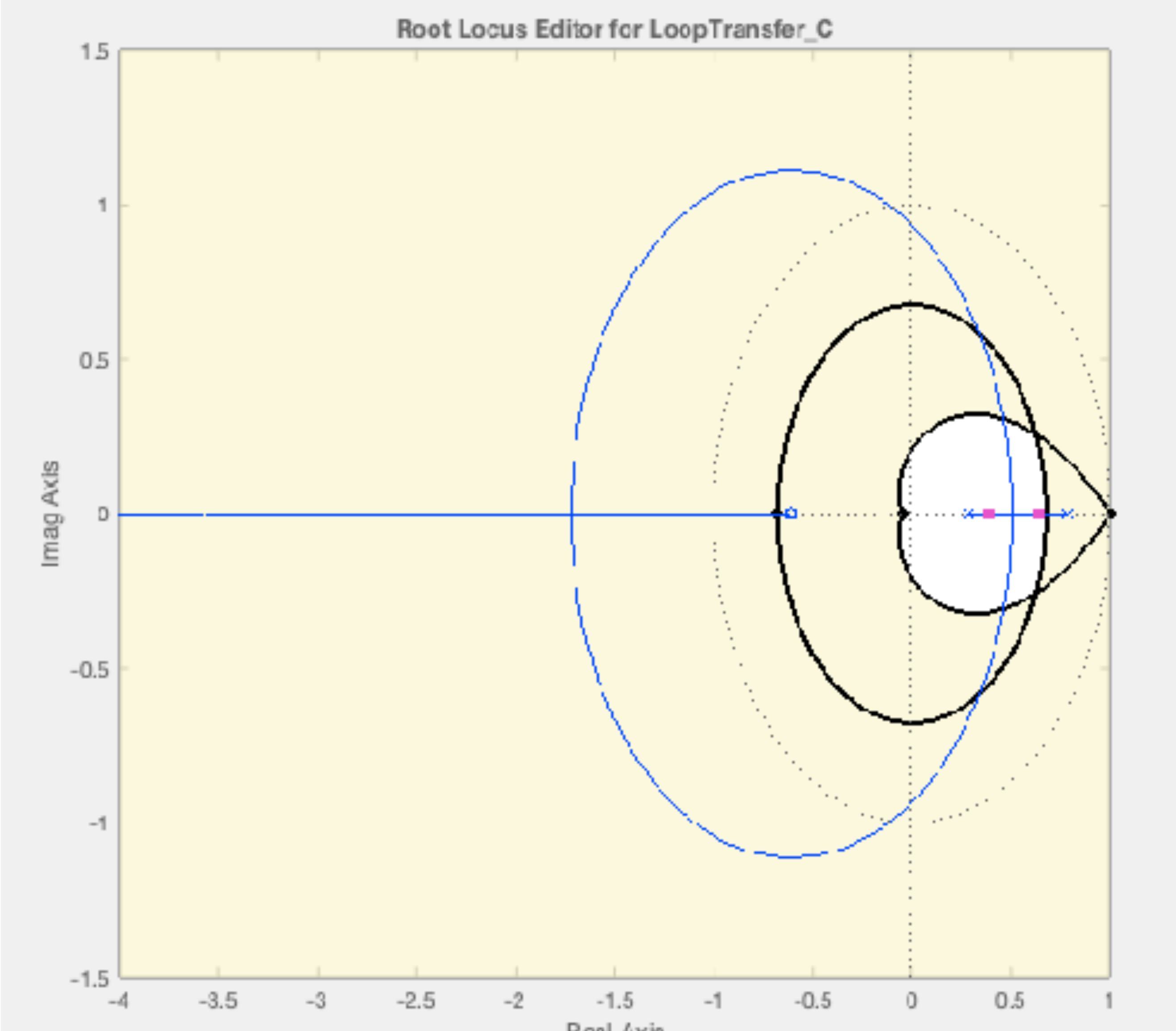
$$K < 0 \rightarrow z = 1$$

$$1 + K(0.3993) = 0$$

Exercício

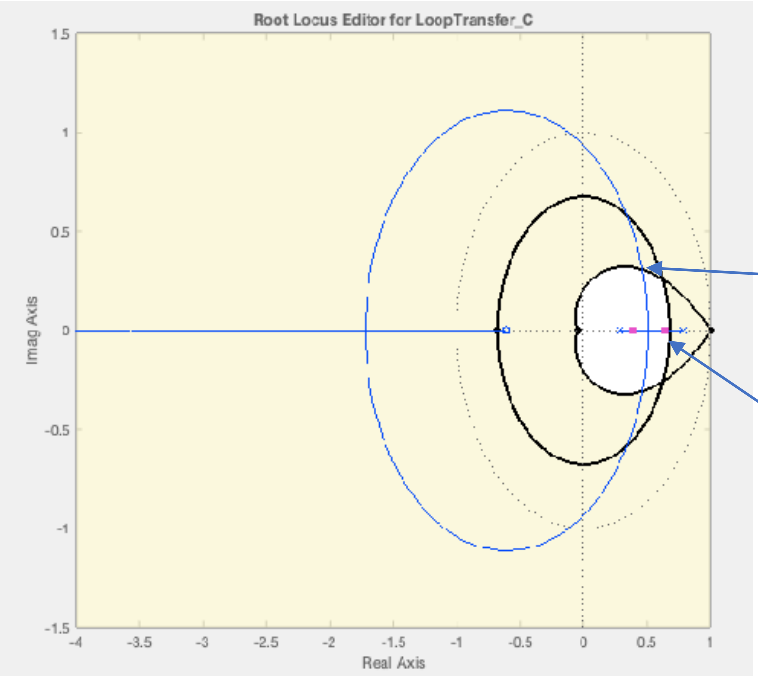
g=tf(2,[1 6 5]), Ts=0.25

$$1 + K\frac{(0.03925 * z + 0.02388)}{(z^2 - 1.065 * z + 0.2231)} = 0$$

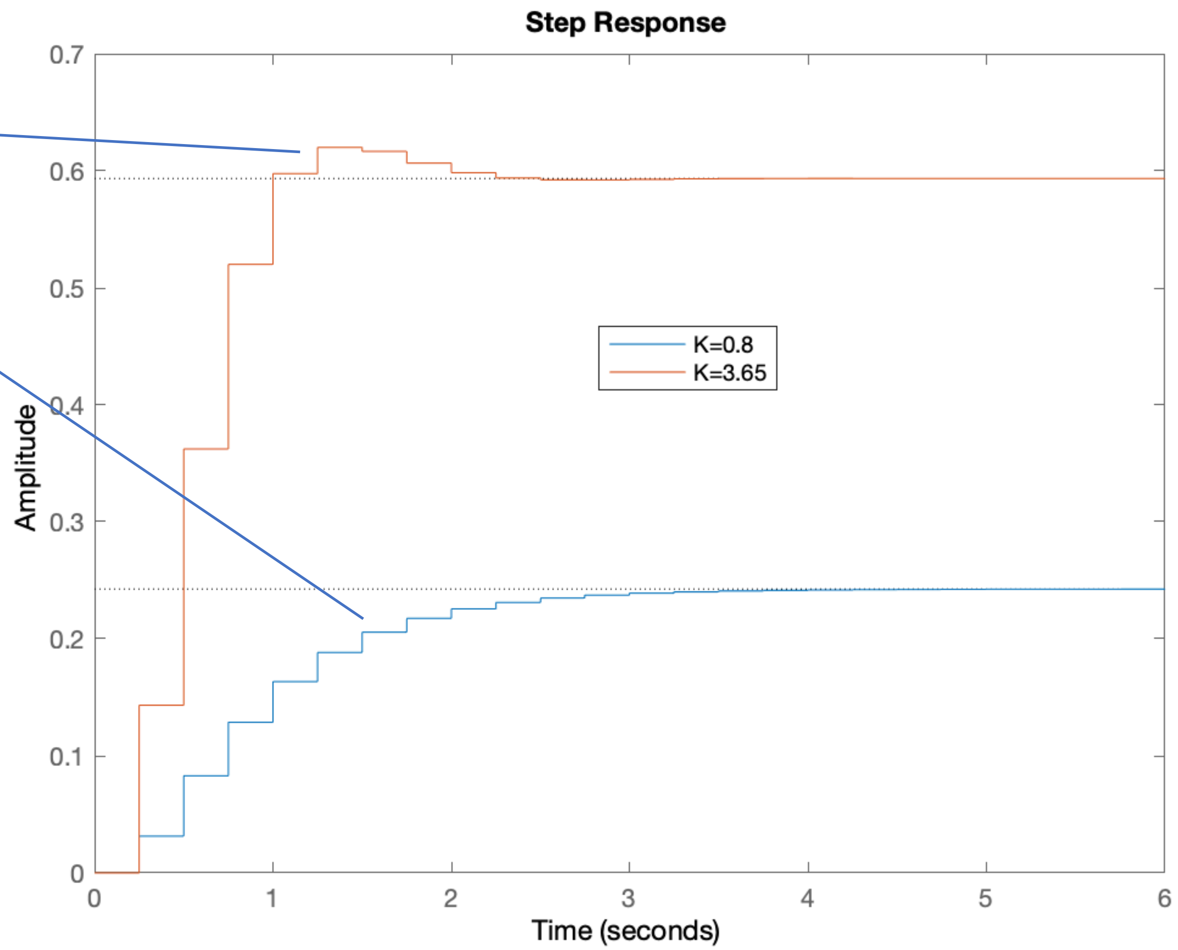


Obtenha os valores de K tal que UP<5% e ts<2.5s.

Exercício

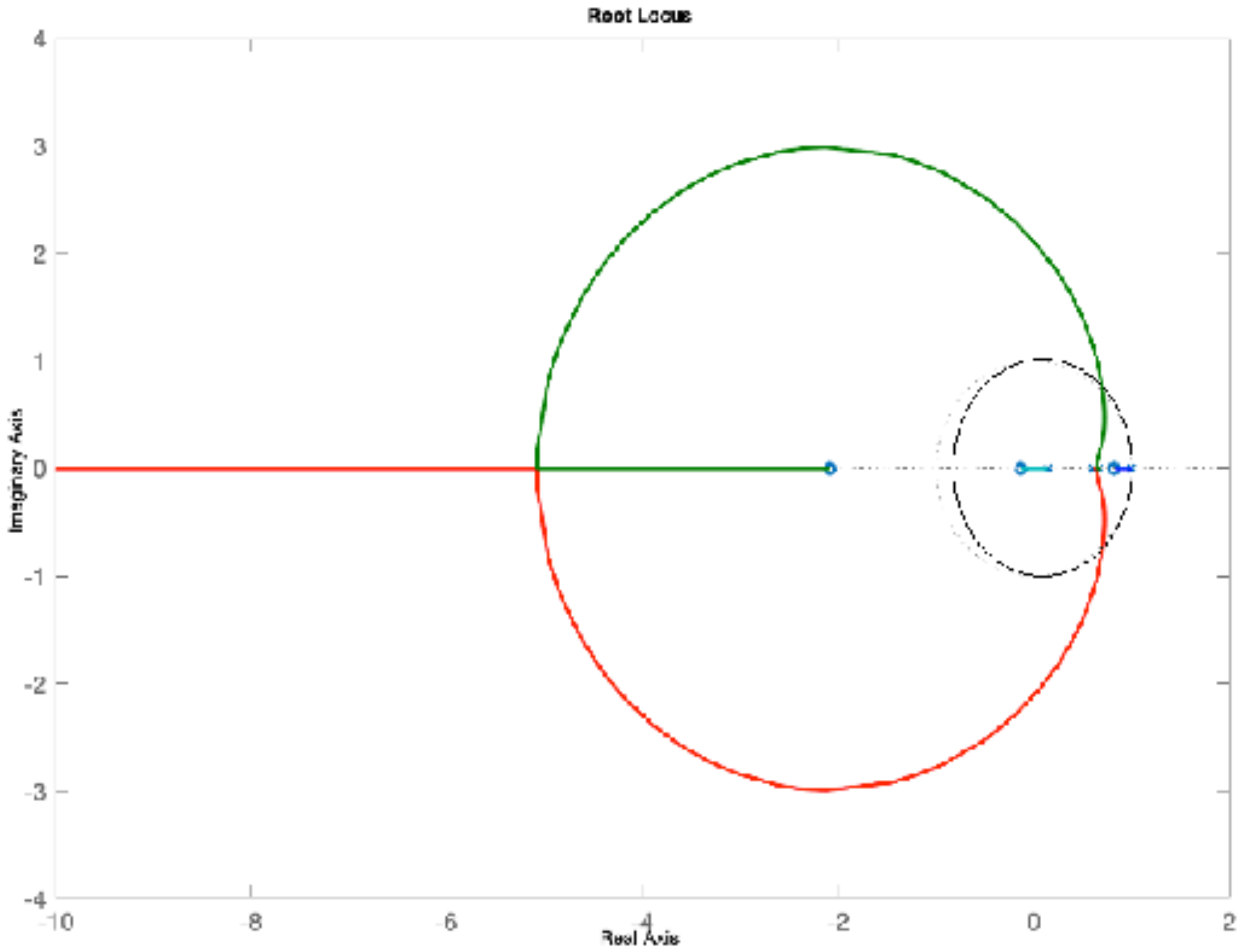


Obtenha os valores de K tal que UP<5% e ts=2.5s.



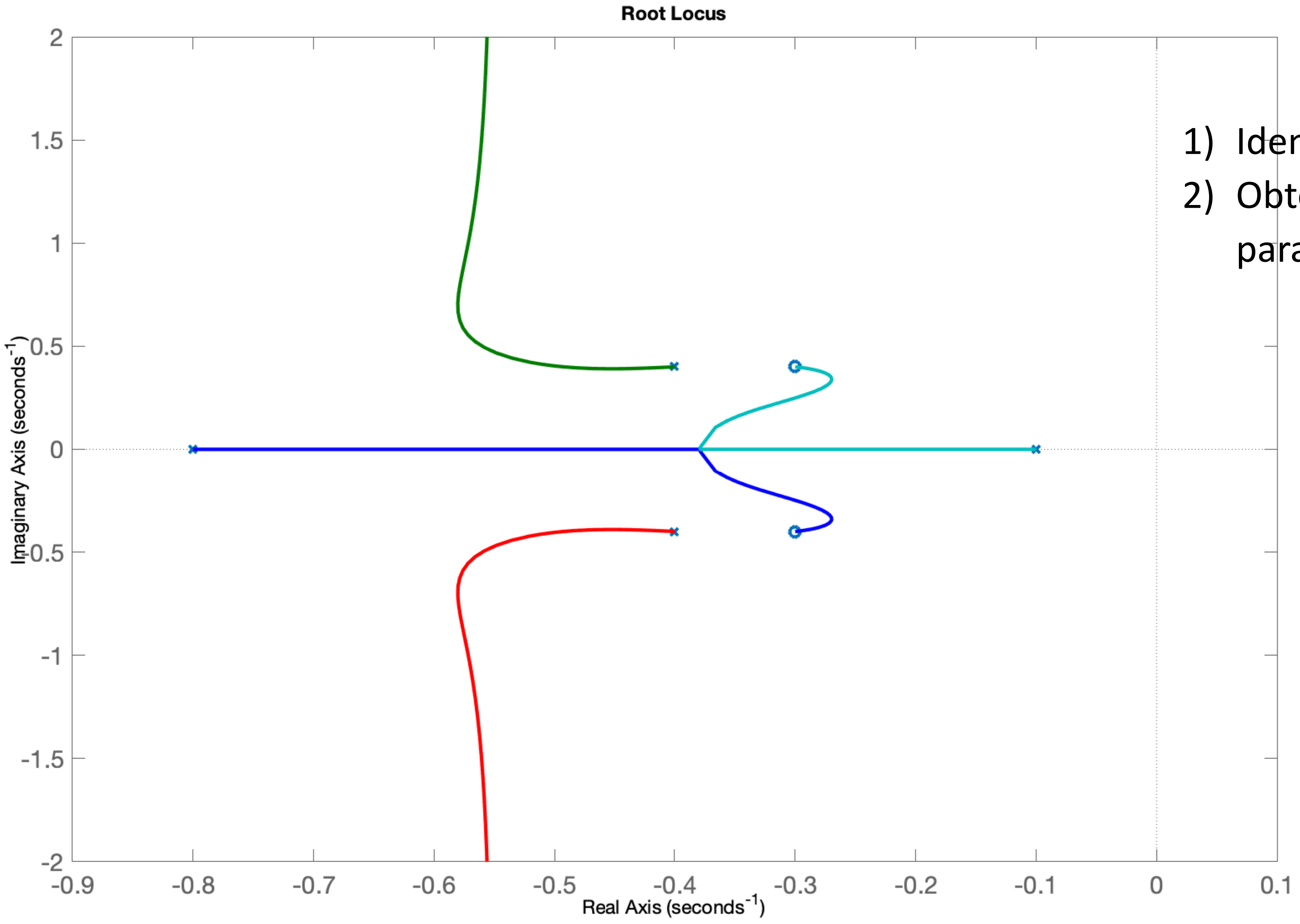
$$1 + K\frac{(0.03925 * z + 0.02388)}{(z^2 - 1.065 * z + 0.2231)} = 0$$

Exercícios: interpretacão de LR



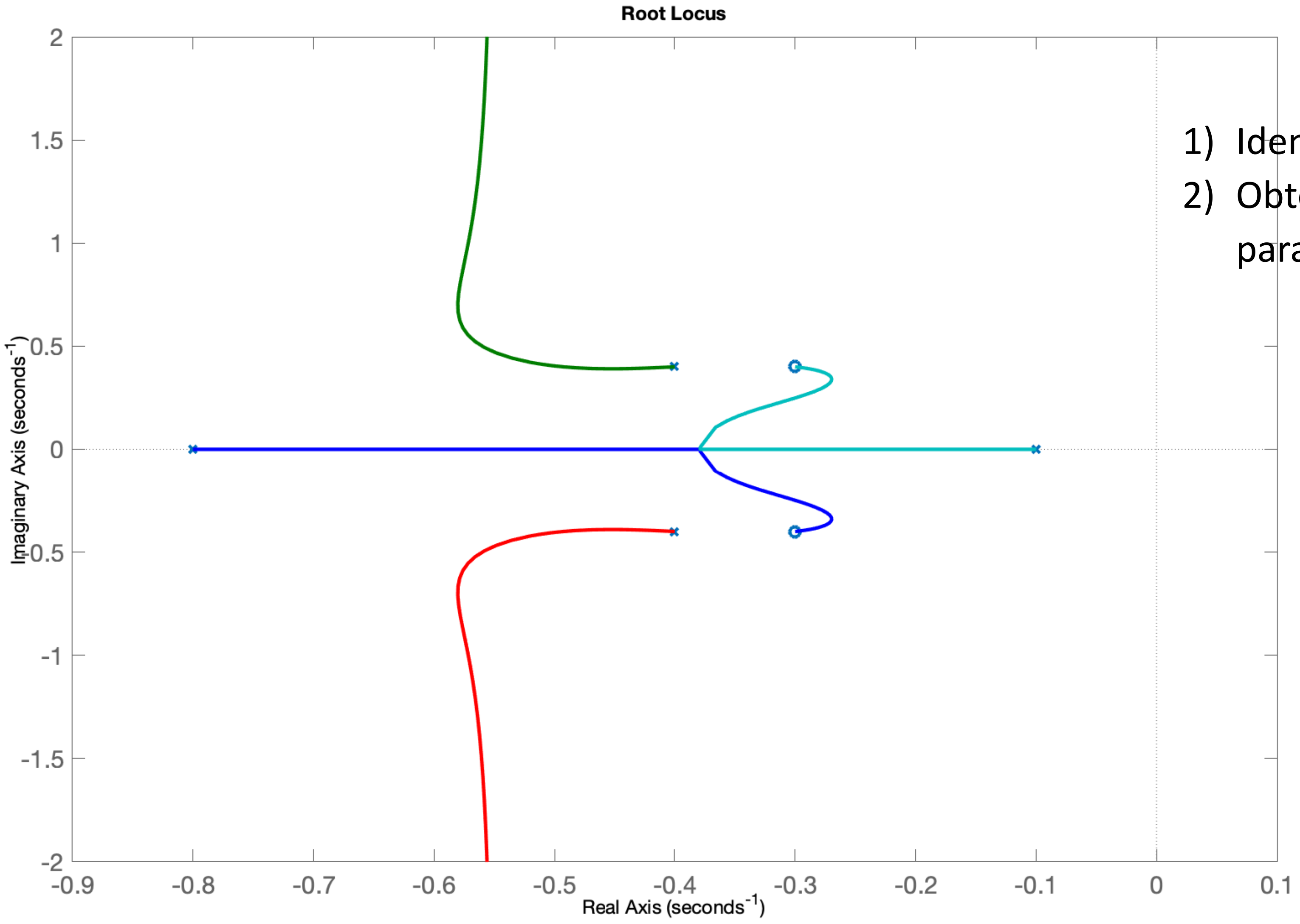
1) Identificar polos e zeros
2) Obter as raízes para $K \rightarrow 0$ e para $K \rightarrow \infty$.

Exercícios: interpretacão de LR



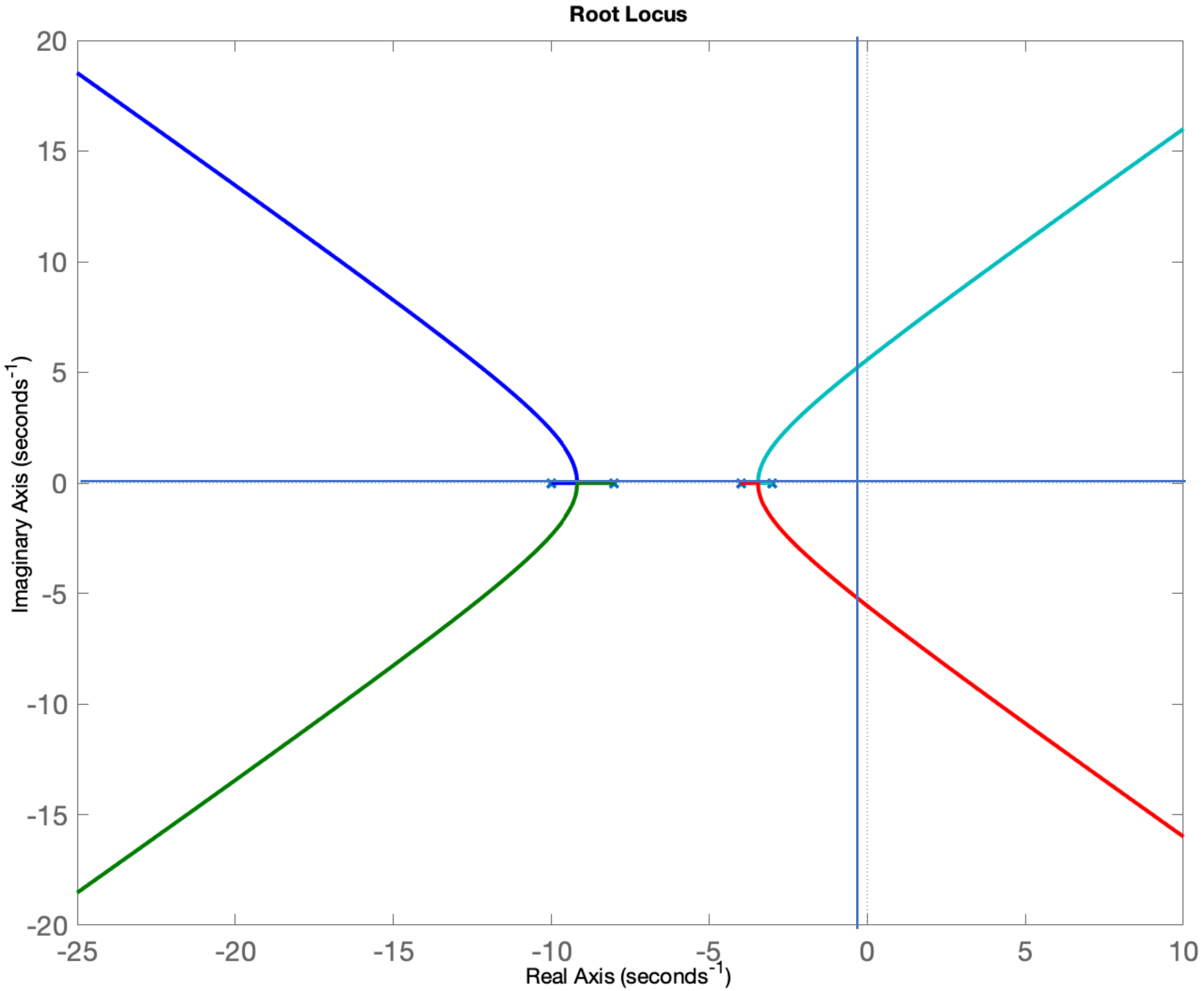
1) Identificar polos e zeros
2) Obter as raízes para $K \to 0$ e para $K \to \infty$.

Exercícios: interpretacão de LR



1) Identificar polos e zeros
2) Obter as raízes para $K \to 0$ e para $K \to \infty$.

Exercícios: interpretação de LR



$$1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

$$N(s) = ?$$

$$D(s) = ?$$

Verifique se existe K tal que

$$UP \leq 5\,\%$$
$$t_s \leq 1.6s$$

Exercícios: esboço do LR

Analise o efeito do ganho K sobre os polos de malha fechada.