

CAP 4

PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE PELA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (SISTEMAS ANALÓGICOS E DIGITAIS)

SUMÁRIO

| | | |
|--------|--|----|
| 4.1. | INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 4.2. | COMPENSAÇÃO POR AVANÇO DE FASE | 2 |
| 4.3. | COMPENSAÇÃO POR ATRASO DE FASE..... | 7 |
| 4.4. | COMPENSAÇÃO POR ATRASO E AVANÇO DE FASE..... | 14 |
| 4.5. | COMPENSADORES DIGITAIS | 20 |
| 4.6. | PROJETO DE CONTROLADORES..... | 20 |
| 4.6.1. | PROJETO DO CONTROLADOR PD | 20 |
| 4.6.2. | PROJETO DO CONTROLADOR PI | 24 |
| 4.6.3. | PROJETO DO CONTROLADOR PID | 27 |
| 4.7. | MATLAB | 29 |
| 4.8. | LISTA DE EXERCÍCIOS..... | 29 |
| 4.9. | EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES | 29 |

4.1. INTRODUÇÃO

A análise de projeto pelo LR fornece informações diretas acerca da resposta transitória dos sistemas de malha fechada. Na técnica baseada na resposta em frequência as especificações da resposta transitória ocorrem de maneira indireta, ou seja, o desempenho da resposta transitória é especificado em termos das:

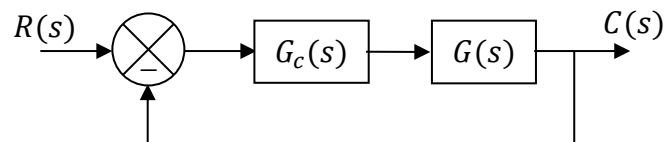
- MF, MG e amplitude do pico de ressonância (dão uma ideia do amortecimento);
- Frequência de cruzamento de ganho, frequência de ressonância e banda passante (dão uma estimativa da velocidade da resposta transitória); e
- Constantes de erro estático (determinam a precisão em regime permanente).

Para fins de projeto de compensadores, todos os sistemas são compensados considerando a realimentação unitária, assim, a FTMA, representada pelo produto $G(s)H(s)$ será mostrada aqui apenas como $G(s)$.

As regiões de frequência do sistema de controle de malha aberta indicam características distintas do sistema:

- Região de **baixa** frequência: indica o comportamento em regime permanente do sistema de malha fechada;
- Região de **média** frequência (próxima ao ponto $-1 + j0$ do lugar geométrico no diagrama polar): indica a estabilidade relativa; e
- Região de **alta** frequência (bem acima da frequência de cruzamento de ganho): indica a complexidade do sistema.

O uso de compensadores permite alterar o desempenho da resposta transitória de um sistema pré-existente.



onde,

$$G_c(s) = k_c \alpha \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

A compensação por **avanço de fase** ($0 < \alpha < 1$) resulta, essencialmente, em uma melhoria da resposta transitória e em uma pequena variação da precisão em regime permanente. Ela pode acentuar os efeitos dos ruídos de alta frequência.

A compensação por **atraso de fase** ($\alpha \geq 1$) produz uma melhoria na precisão do regime estacionário à custa de um aumento da duração da resposta transitória. Ela ainda suprime os efeitos dos sinais de ruído de alta frequência.

A compensação por **atraso e avanço de fase** combina as características dos dois compensadores, porém, pode aumentar a ordem do sistema em até duas unidades (a menos do cancelamento entre polos e zeros) tornando o sistema mais complexo e de controle do comportamento da resposta transitória mais difícil.

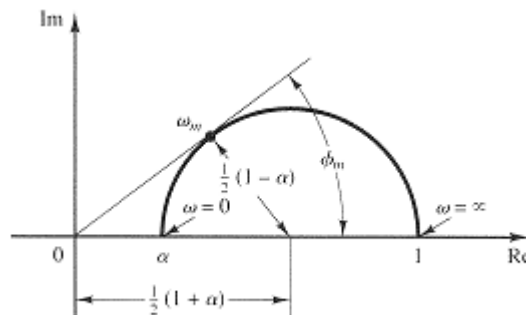
4.2. COMPENSAÇÃO POR AVANÇO DE FASE

OBJETIVO: Reconfigurar a curva de resposta em frequência para conseguir um ângulo de avanço de fase suficiente para compensar o atraso de fase excessivo associado aos componentes de um sistema fixo.

$$G_c(s) = k_c \alpha \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \quad 0 < \alpha < 1$$

- O Zero fica sempre localizado à direita do Polo.
- Quando $\alpha \rightarrow 0$, o Polo localiza-se distante à esquerda. Por isso, não se utiliza valores de $\alpha < 0,05$, ou seja, a máxima compensação de avanço é de 65° .
- É um filtro HP.

O diagrama polar do compensador de avanço de fase é mostrado na figura abaixo:

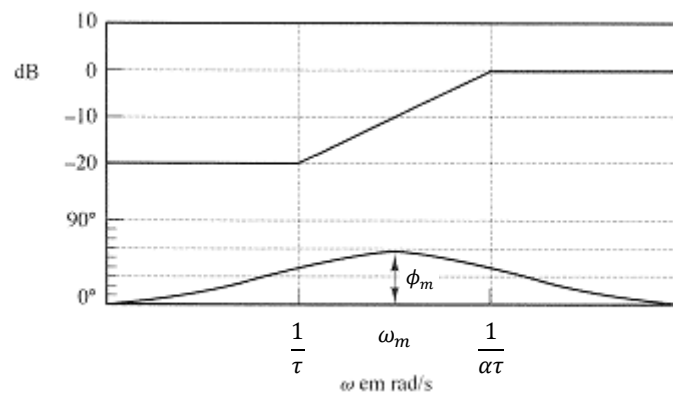


onde

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{1/\alpha}}{\tau}$$

O diagrama de bode do compensador para $k_c = 1$ é mostrado na figura abaixo. O compensador é um filtro passa alta (HP).



PROCEDIMENTO

- 1°. Obtenha a equação de malha aberta do sistema não compensado, $G_1(s)$.

$$G_1(s) = KG(s), \quad K = k_c \alpha$$

- 2°. Determine o valor de K que satisfaz a condição de erro estático dada para $G_1(s)$.

- 3°. Faça o diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K .

- 4°. Avalie a Margem de Fase.

- 5°. Determine o ângulo máximo de avanço de fase, ϕ_m , necessário a ser acrescentado no sistema. Esse ângulo é verificado pelas condições requeridas para a compensação.

$$\text{Equação útil: } \zeta = 0,01\phi_m$$

- 6°. Adicione uma tolerância para compensar a inserção do compensador. O compensador de avanço de fase desloca a frequência de cruzamento de ganho para a direita e diminui a margem de fase.

$$5^\circ \text{ a } 12^\circ$$

- 7°. Determine o fator de atenuação α .

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

- 8°. Determine a nova frequência de cruzamento de ganho ω_c em que o módulo do sistema não compensado de malha aberta seja:

$$|G_1(j\omega_c)| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Selecione essa frequência como a nova frequência de cruzamento de ganho, que corresponde a ω_m .

- 9°. Calcule o zero do compensador por avanço de fase, τ , fazendo $\omega_m = \omega_c$.

$$\tau = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}}$$

- 10°. Obtenha o polo do compensador por avanço de fase, $\alpha\tau$,

$$\alpha\tau = \frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_c}$$

- 11°. Obtenha k_c a partir de,

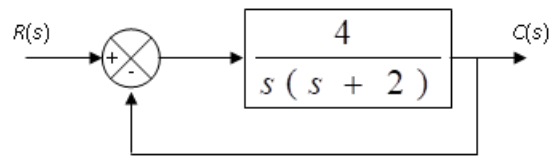
$$K = k_c \alpha$$

- 12°. Coloque os resultados obtidos na equação da FTMA do sistema compensado.

$$FTMAS_C = G_c(s)G(s)$$

- 13°. Verifique se a Margem de Ganho é satisfatória, senão, repita o procedimento pela modificação dos polos e zeros do compensador até o resultado ser satisfatório.

Exemplo 1 – Considere o sistema



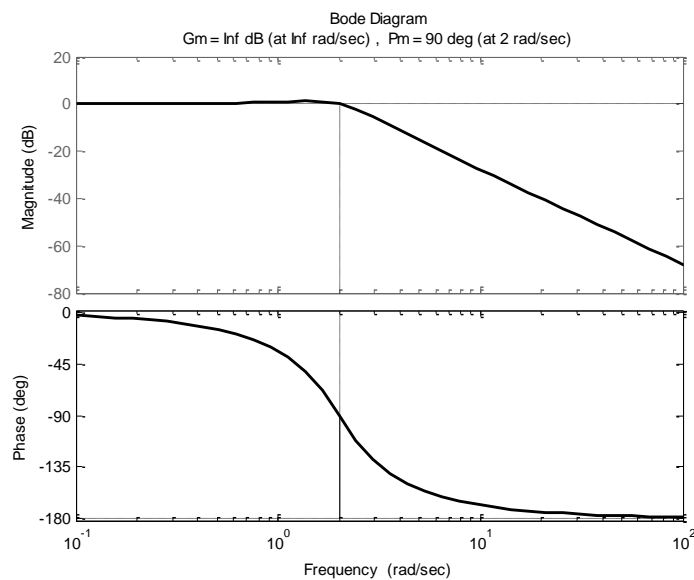
Projete um compensador de modo que a constante de erro estático da velocidade, K_v , seja $20s^{-1}$, o amortecimento seja pelo menos 0,5 e a MG se mantenha positiva.

SOLUÇÃO

As características do sistema antes da compensação são:

$$FTMF = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \Rightarrow \omega_n = 2 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad \zeta = 0,5$$

Diagrama de Bode do Sistema



$$MG = \infty$$

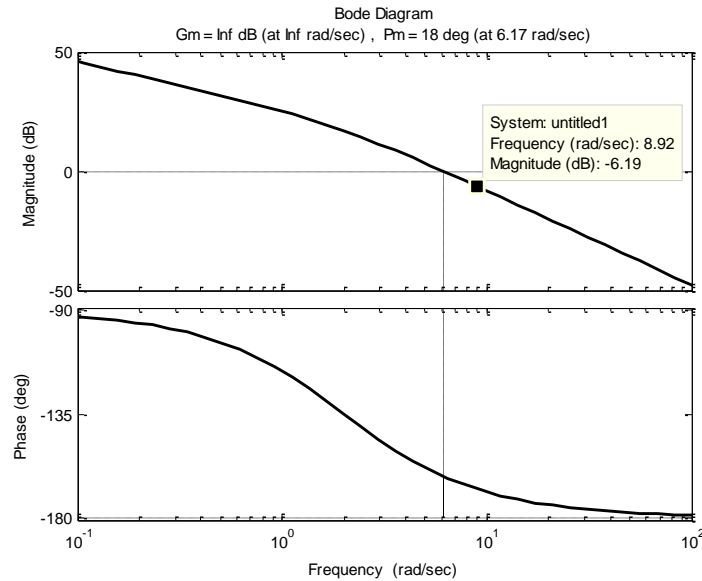
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{4s}{s^2 + 2s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{4}{s + 2} \right) = 2$$

Aplicando o Procedimento para Obtenção do Compensador por Avanço de Fase:

$$1^\circ. G_1(s) = KG(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

$$2^\circ. k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s4K}{s(s+2)} = 2K = 20 \therefore \boxed{K = 10}$$

$$3^\circ. \text{Bode de } G_1(s) = \frac{40}{s(s+2)} = \frac{20}{s(0,5s+1)}$$



4º. $MF = 18^\circ$

5º. $\phi_m = \frac{\zeta}{0,01} - MF + Tolerância = \frac{0,5}{0,01} - 18 + 6$

6º. $\phi_m = 38^\circ$

7º. $\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = 0,24$

8º. $|G_1(s)| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{0,24}} = -6,2dB$, pelo diagrama, $\omega_c \cong 9 [rad/s]$

9º. $\tau = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 0,22$

10º. $\alpha \tau = \frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_c} = 0,05$

11º. $k_c = \frac{K}{\alpha} = 41,7$

12º. $G_c(s)G(s) = 10 \left(\frac{0,227s+1}{0,054s+1} \right) \left(\frac{4}{s(s+2)} \right)$

13º. Verificação das especificações:

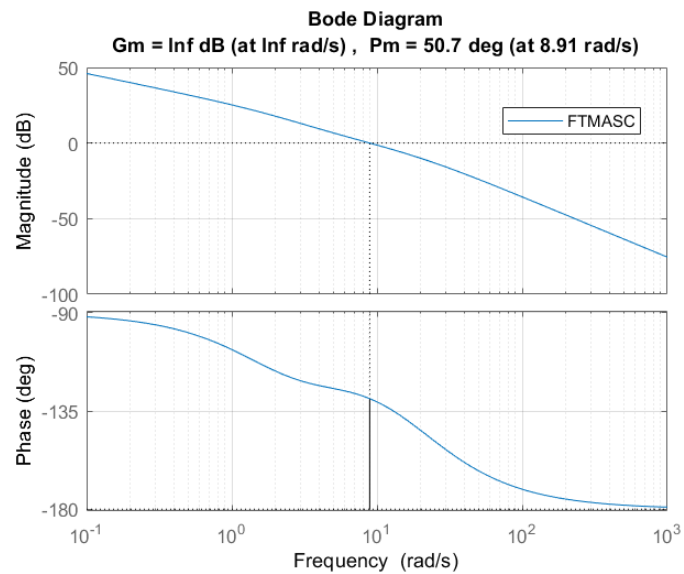
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 10 \left(\frac{0,227s+1}{0,054s+1} \right) \left(\frac{4s}{s(s+2)} \right)$$

$$K_v = 20$$

$$\text{A FTMASC é } G_c(s)G(s) = \frac{9,08s+40}{0,054s^3+1,108s^2+2s}$$

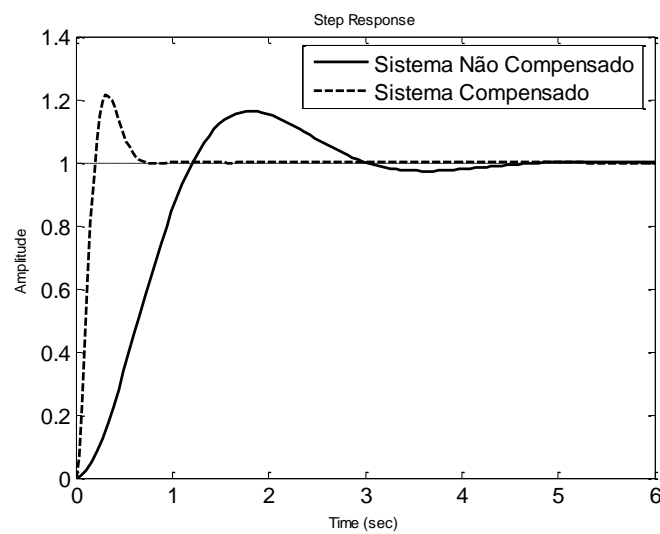
$$\text{Fechando a malha: } FTMFSC = \frac{9,08s+40}{0,054s^3+1,108s^2+11,08s+40}$$

O diagrama de Bode do sistema é



A $MG = \infty$, $\zeta = 0,65$ (função damp do Matlab) e K_v atentem às especificações.

Comparação das respostas ao degrau:



No sistema compensado a resposta é mais rápida (avançada).

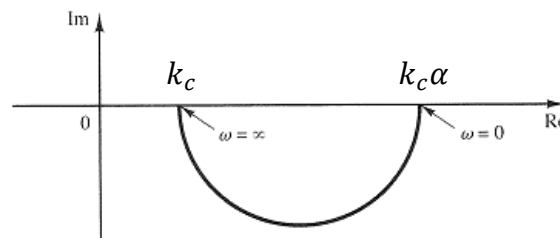
4.3. COMPENSAÇÃO POR ATRASO DE FASE

OBJETIVO: Produzir atenuação na faixa de altas frequência para fornecer ao sistema uma Margem de Fase suficiente.

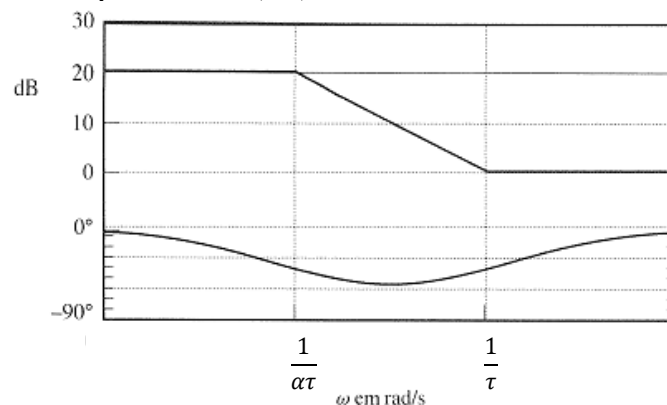
$$G_c(s) = k_c \alpha \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \quad \alpha \geq 1$$

- O Zero fica sempre localizado à esquerda do Polo.
- É um filtro LP uma vez que permite um alto ganho em baixas frequência (o que melhora o desempenho do sistema em regime permanente) e reduz o ganho no intervalo de frequência críticas mais altas de modo que melhore a margem de fase e reduz a banda passante.
- O compensador de atraso de fase é utilizado mais pela característica de atenuação do sinal em altas frequência do que pelo atraso de fase que ele proporciona.
- Uma característica interessante desse tipo de compensador é que não importa a localização exata do polo e do zero do compensador, basta que eles estejam localizados próximo à origem e que a relação *zero/polo* do compensador seja igual ao fator de multiplicação requerido para a constante de erro estático de velocidade.
- A resposta transitória a uma entrada de perturbação pode ter uma duração muito longa.
- Atua como um controlador PI, integrando o sinal de entrada, por isso tende a ser menos estável. Para evitar essa característica indesejável a constante de tempo τ do compensador deve ser suficiente maior que a maior constante de tempo do sistema.

O diagrama polar do compensador de atraso de fase é mostrado na figura abaixo:



O diagrama de bode do compensador para $k_c = 1$ é mostrado na figura abaixo. O compensador é um filtro passa baixa (LP).



PROCEDIMENTO

- 1°. Obtenha a equação de malha aberta do sistema não compensado, $G_1(s)$.

$$G_1(s) = KG(s), \quad K = k_c \alpha$$

- 2°. Determine o valor de K que satisfaz a condição de erro estático dada para $G_1(s)$.

- 3°. Faça o diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K .

- 4°. Avalie a Margem de Fase.

- 5°. Adicione à Margem de Fase Requerida, MF_r , uma tolerância de 5° a 12° para compensar o atraso de fase do compensador.

- 6°. Determine o ponto de frequência, ω_c , onde o ângulo de fase de $G_1(s)$ seja igual a -180° mais a Margem de Fase Requerida.

$$\angle G_1(j\omega_c) = -180^\circ + MF_r$$

$$\text{Equação útil: } \zeta = 0,01\phi_m$$

- 7°. Selecione a frequência ω_c como a nova frequência de cruzamento de ganho.

- 8°. Para prevenir efeitos nocivos do atraso de fase compensador, escolha o polo e o zero do compensador bem abaixo da frequência de cruzamento de ganho, ou seja, escolha a frequência de canto, ω_z , correspondente ao zero do compensador, em frequência uma oitava a uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho, ω_c .

$$\tau = \frac{1}{\omega_z}$$

- 9°. Determine a atenuação/ganho necessário, G_A , para trazer a curva do módulo em torno de 0 dB na frequência ω_c , determinada no item 7.

- 10°. Determine o valor de α :

$$\alpha = 10^{-\frac{G_A}{20}}$$

- 11°. Obtenha o polo do compensador por atraso de fase, $\alpha\tau$,

$$\omega_p = \frac{1}{\alpha\tau}$$

- 12°. Obtenha k_c a partir de,

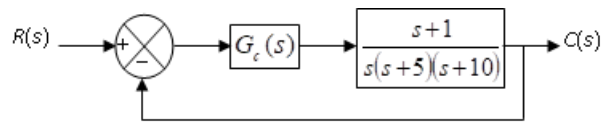
$$K = k_c \alpha$$

- 13°. Coloque os resultados obtidos na equação da FTMA do sistema compensado.

$$FTMASC = G_c(s)G(s)$$

- 14°. Verifique se a Margem de Ganho é satisfatória, senão, repita o procedimento pela modificação dos polos e zeros do compensador até o resultado ser satisfatório.

Exemplo 2 – Considere o sistema abaixo. Deseja-se projetar um compensador de modo que a constante de erro estático da velocidade seja $1,0s^{-1}$ e a margem de fase seja de 100° . (OBS: Use tolerância de 5°).



SOLUÇÃO

- 1º. Obtenha a equação de malha aberta do sistema não compensado, $G_1(s)$.

$$G_1(s) = KG(s), \quad K = k_c \alpha$$

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s(s+5)(s+10)}$$

- 2º. Determine o valor de K que satisfaz a condição de erro estático dada para $G_1(s)$.

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s)$$

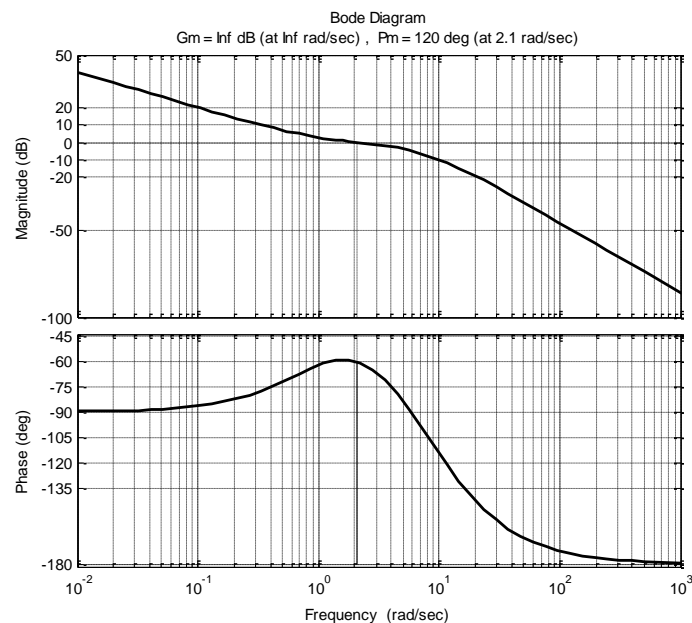
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(s+1)}{s(s+5)(s+10)} = 1$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(s+1)}{(s+5)(s+10)} = 1$$

$$k_v = \frac{K}{50} = 1$$

$$\boxed{K = 50}$$

- 3º. Faça o diagrama de Bode de $G_1(s)$.



- 4º. Avalie a Margem de Fase.

$$MF = 120^\circ$$

A margem de fase requerida é 100° , portanto será necessário usar um compensador de atraso de fase.

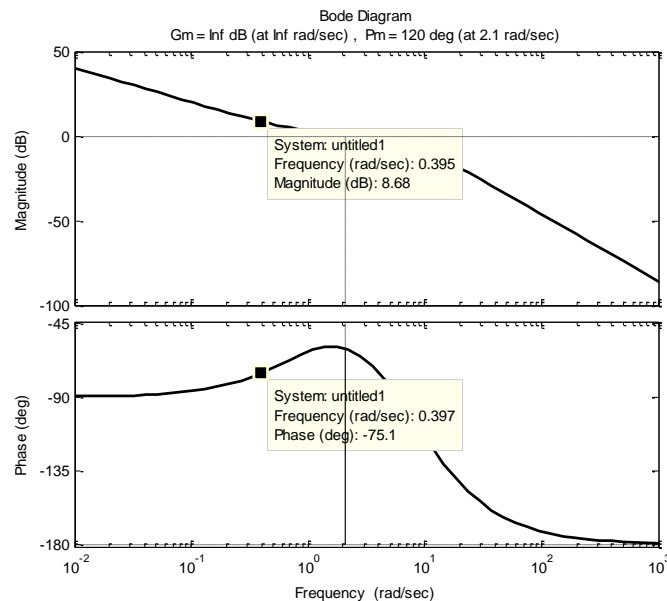
- 5°. Adicione à Margem de Fase Requerida, MF_r uma tolerância de 5° a 12° para compensar o atraso de fase do compensador.

$$MF_r = 100^\circ + 5^\circ = 105^\circ$$

- 6°. Determine o ponto de frequência, ω_c , onde o ângulo de fase de $G_1(s)$ seja igual a -180° mais a Margem de Fase Requerida.

$$\angle G_1(j\omega_c) = -180^\circ + MF_r$$

$$\angle G_1(j\omega_c) = -180^\circ + 105^\circ = -75^\circ$$



$$\omega_c \approx 0,4 \text{ [rad/s]}$$

- 7°. Selecione a frequência ω_c como a nova frequência de cruzamento de ganho.

- 8°. Escolhendo uma década abaixo:

$$\omega_z = 0,04 = \frac{1}{\tau}$$

$$\tau = 25$$

- 9°. Determine a atenuação/ganho necessário, G_A , para trazer a curva do módulo em torno de 0 dB na frequência ω_c , determinada nos itens 6 e 8.

Pelo diagrama de Bode:

$$G_A \approx -9 \text{ dB}$$

- 10°. Determine o valor de α :

$$\alpha = 10^{-\frac{G_A}{20}} = 10^{-\frac{(-9)}{20}}$$

$$\alpha = 2,8$$

- 11°. Obtenha o polo do compensador por atraso de fase, $\alpha\tau$,

$$\omega_p = \frac{1}{\alpha\tau} = 0,014$$

$$\alpha\tau = 70$$

12°. Obtenha k_c a partir de,

$$K = k_c \alpha$$

$$k_c = \frac{K}{\alpha}$$

$$k_c = \frac{50}{\alpha}$$

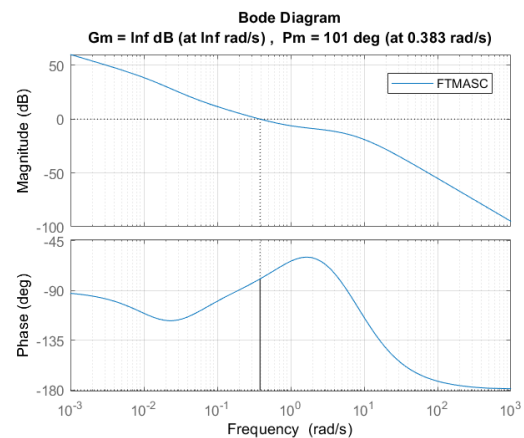
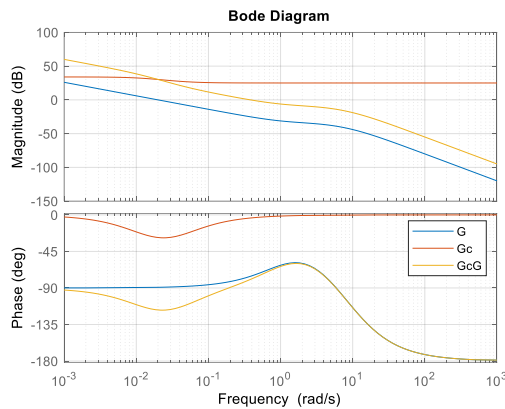
$$\boxed{k_c = 17,85}$$

13°. Coloque os resultados obtidos na equação da FTMA do sistema compensado.

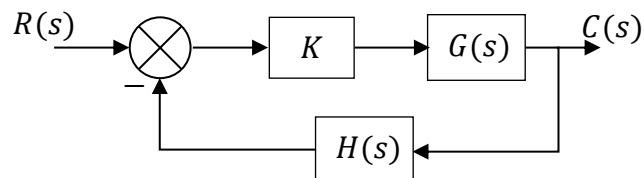
$$FTMASC = G_c(s)G(s)$$

$$G_c(s)G(s) = 50 \frac{25s + 1}{70s + 1} \left(\frac{s + 1}{s(s + 5)(s + 10)} \right)$$

14°. Verifique se a Margem de Ganho é satisfatória, senão, repita o procedimento pela modificação dos polos e zeros do compensador até o resultado ser satisfatório.



Exemplo 3 – Considere o sistema,



Com:

$$K = 1; \quad G(s) = \frac{1}{s(s + 1)(0,5s + 1)}; \quad H(s) = 1$$

Projete um compensador de modo que a constante de erro estático da velocidade, k_v , seja $5s^{-1}$, a MF seja pelo menos 40° e a MG seja pelo menos 10dB.

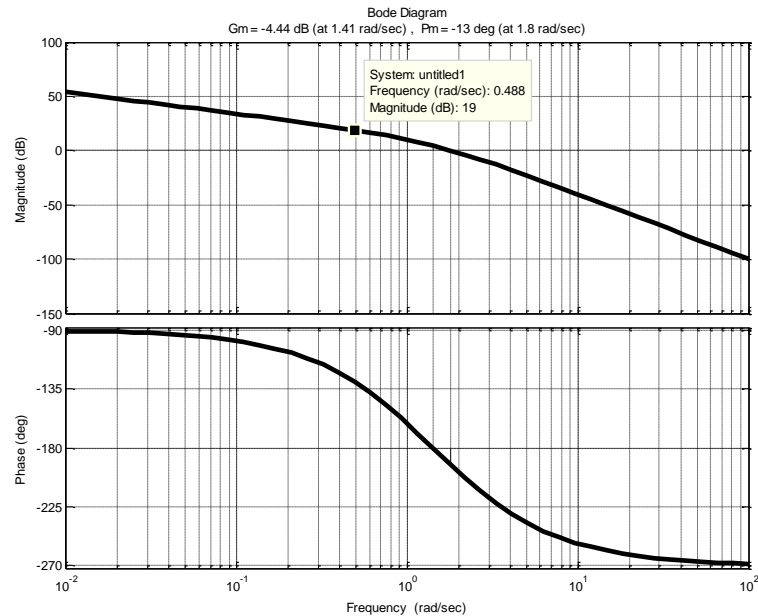
SOLUÇÃO

Esse exercício utiliza do efeito colateral no ganho para utilizar um compensador de atraso de fase em que normalmente seria indicado um compensador de avanço.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s}{s(s + 1)(0,5s + 1)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(s + 1)(0,5s + 1)} \right) = 1$$

PROCEDIMENTO

- 1°. $G_1(s) = KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(0,5s+1)}$
- 2°. $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK}{s(s+1)(0,5s+1)} = K = 5 \quad \therefore K = 5$
- 3°. Bode de $G_1(s) = \frac{5}{s(s+1)(0,5s+1)}$



- 4°. $MF = -13^\circ$ e $MG = -4,44dB$

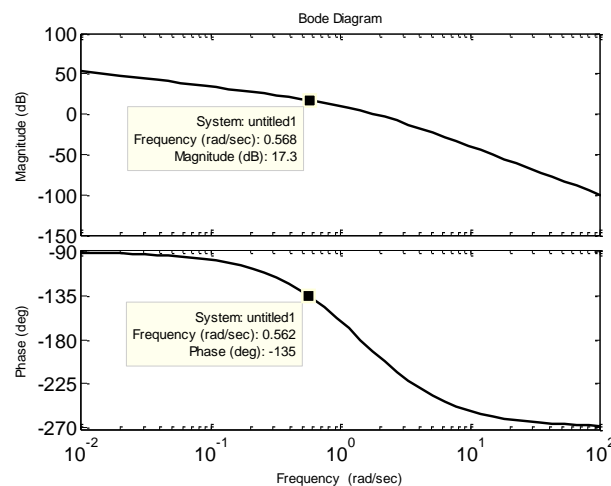
A margem de fase requerida é 40° , portanto será necessário usar um compensador de avanço de fase, todavia, devido ao efeito de aumento do ganho em baixas frequências do compensador de atraso é possível efetuar a compensação por atraso em frequências mais baixas, modificando o ponto de marcação da margem de fase.

$$\angle G_1(j\omega_c) = -180^\circ + MF_r$$

- 5°. Adicionar a tolerância à margem de fase requerida. $MF_r = 40^\circ + 5^\circ = 45^\circ$.

- 6°. $\angle G_1(j\omega_c) = -180^\circ + MF_r = -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$.

- 7°. Pelo diagrama de Bode, a fase de -135° ocorre na frequência $\omega_c \approx 0,56 \text{ [rad/s]}$.



8º. Escolhendo ω_z uma década abaixo, tem-se $\omega_z \approx 0,05$ [rad/s].

$$\tau = \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{0,05}$$

$$\boxed{\tau = 20 \text{ [s]}}$$

9º. Pelo diagrama de Bode, o valor de G_A para $\omega_c \approx 0,56$ [rad/s] é
 $G_A \approx -17,3$ [dB]

10º. O valor de α é

$$\alpha = 10^{\frac{G_A}{20}} = 10^{\frac{(-17,3)}{20}}$$

$$\boxed{\alpha = 7,33}$$

11º. O polo do compensador é localizado na frequência ω_p

$$\omega_p = \frac{1}{\alpha\tau} = \frac{1}{7,33 \times 20}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\alpha\tau} = 0,007 \text{ [rad/s]}$$

12º. O valor de k_c

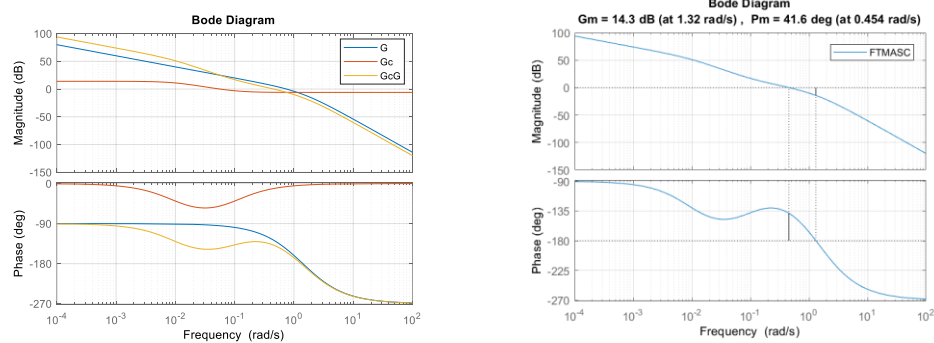
$$k_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{5}{7,33}$$

$$\boxed{k_c = 0,68}$$

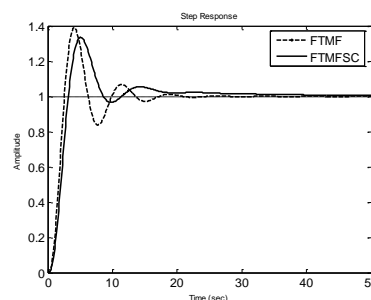
A FTMASC é

$$G_c(s)G(s) = 5 \left(\frac{20s + 1}{146,6s + 1} \right) \left(\frac{1}{s(s + 1)(0,5s + 1)} \right)$$

13º. O Diagrama de Bode da FTMASC é



A resposta ao degrau dos dois sistemas de malha fechada é:



Observe que o sistema compensado (atrasado) demora a atingir a resposta em regime.

4.4. COMPENSAÇÃO POR ATRASO E AVANÇO DE FASE

OBJETIVO: Aumentar a margem de fase na frequência de cruzamento de ganho (avanço) e fornece atenuação perto e acima da frequência de cruzamento de ganho, aumentando o ganho na faixa de baixa frequência e melhorando o desempenho em regime permanente (atraso).

$$G_c(s) = k_c \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_1}}{s + \frac{\gamma}{\tau_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_2}}{s + \frac{1}{\alpha\tau_2}} \right) \quad \gamma > 1 \text{ e } \alpha > 1$$

O termo $\left(\frac{s + \frac{1}{\tau_1}}{s + \frac{\gamma}{\tau_1}} \right)$ produz o efeito de avanço de fase e o termo $\left(\frac{s + \frac{1}{\tau_2}}{s + \frac{1}{\alpha\tau_2}} \right)$ o efeito de atraso.

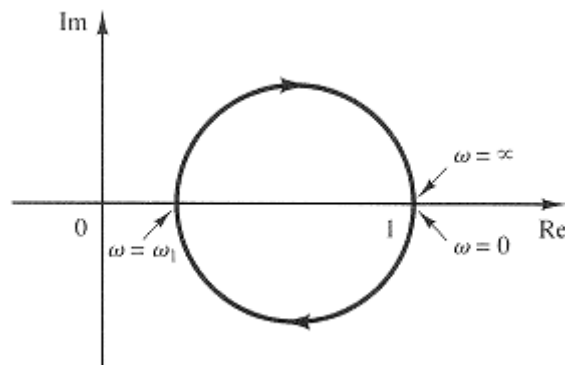
A compensação por atraso e avanço:

- Possui respostas rápidas com precisão em regime permanente.
- Maior ganho em baixas frequências (melhor precisão em regime permanente), maior banda passante e margem de estabilidade.

No projeto do compensador de atraso e avanço de fase, frequentemente selecionamos $\gamma = \alpha$ (apesar de não ser necessário), assim, será usada essa condição,

$$G_c(s) = k_c \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_1}}{s + \frac{\alpha}{\tau_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_2}}{s + \frac{1}{\alpha\tau_2}} \right) \quad \alpha > 1$$

O diagrama polar do compensador de atraso e avanço de fase com $k_c = 1$ e $\gamma = \alpha$ é mostrado na figura abaixo:

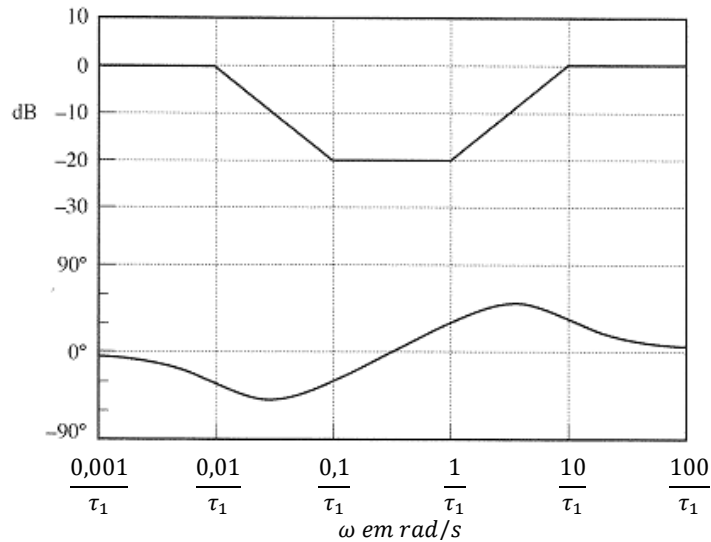


Observe que para $0 < \omega < \omega_1$, o compensador atua como um compensador por atraso de fase, enquanto para $\omega_1 < \omega < \infty$ ele atua como um compensador por avanço de fase.

A frequência em que o ângulo de fase é zero, ω_1 , é dada por:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

O diagrama de bode do compensador para $k_c = 1$, $\gamma = \alpha = 10$ e $\tau_2 = 10\tau_1$ é mostrado na figura abaixo. O compensador é um filtro rejeita banda.



PROCEDIMENTO

- 1°. Obtenha a equação de malha aberta do sistema não compensado, $G_1(s)$.
 $G_1(s) = KG(s), \quad K = k_c \alpha$
- 2°. Determine o valor de K que satisfaz a condição de erro estático dada para $G_1(s)$.
- 3°. Faça o diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K .
- 4°. Avalie a Margem de Fase.
- 5°. Determine o ângulo máximo de avanço de fase, ϕ_m , necessário a ser acrescentado no sistema. Esse ângulo é verificado pelas condições requeridas para a compensação.
Equação útil: $\zeta = 0,01\phi_m$
- 6°. Adicione uma tolerância para compensar a inserção do compensador. O compensador de avanço de fase desloca a frequência de cruzamento de ganho para a direita e diminui a margem de fase.
5° a 12°
- 7°. Determine o fator de atenuação α .

$$\sin \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$
- 8°. Determine a nova frequência de cruzamento de ganho ω_c em que o módulo do sistema não compensado de malha aberta seja:

$$|G_1(j\omega_c)| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$
Selecione essa frequência como a nova frequência de cruzamento de ganho, que corresponde a ω_m .

PARA O TERMO DE ATRASO DE FASE

- 9°. Determine a frequência de canto, ω_{cz} , correspondente ao zero do compensador da porção de atraso, uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho ω_m .

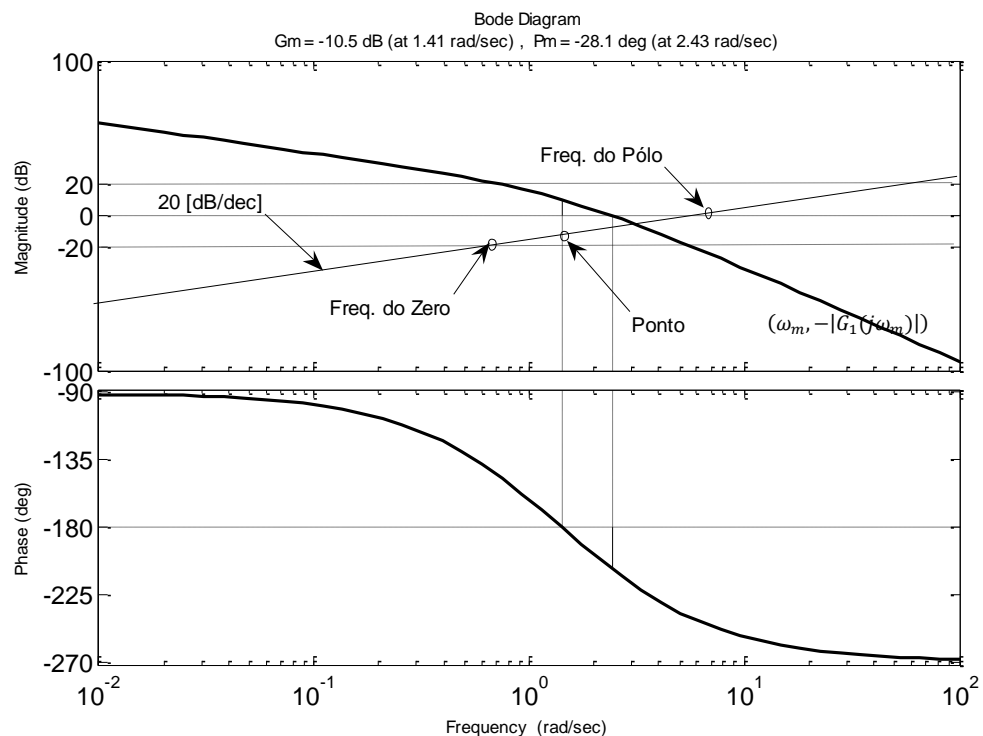
$$\omega_{cz} = \frac{1}{\tau_2}$$

- 10°. Determine a frequência de canto, ω_{cp} , correspondente ao polo do compensador da porção de atraso, pela relação.

$$\omega_{cp} = \frac{1}{\alpha\tau_2}$$

PARA O TERMO DE AVANÇO DE FASE

- 11°. Trace uma reta com inclinação 20 [dB/dec] passando pela nova frequência de cruzamento de ganho ω_m com módulo igual a $-|G_1(j\omega_m)|$. As intercessões dessa reta com a reta 0 [dB] e com a linha -20 [dB] determinam as frequências de canto do polo e do zero, respectivamente, do termo de avanço.



Exemplo 4 – Considere o sistema com realimentação unitária cuja FTRD é dada abaixo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Deseja-se $K_v \cong 10s^{-1}$, $MF_r \cong 50^\circ$ e $MG_r \geq 10dB$.

SOLUÇÃO

1º. Obtenha a equação de malha aberta do sistema não compensado, $G_1(s)$.

$$G_1(s) = KG(s), \quad K = k_c \alpha$$

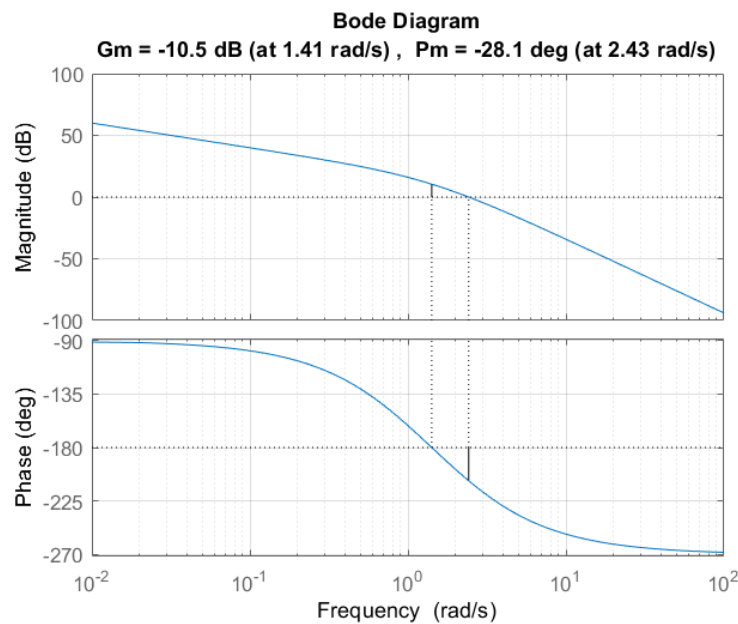
$$G_1(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

2º. Determine o valor de K que satisfaz a condição de erro estático dada para $G_1(s)$.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(s+1)(s+2)} = \frac{K}{2} = 10 \rightarrow \boxed{K = 20}$$

3º. Faça o diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K .

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$$



4º. Avalie a Margem de Fase.

$$MF = -28,1^\circ$$

5º. Determine o ângulo máximo de avanço de fase, ϕ_m , necessário a ser acrescentado no sistema. Esse ângulo é verificado pelas condições requeridas para a compensação.

$$MF_r = MF + \phi_m \rightarrow 50 = -28,1 + \phi_m$$

$$\boxed{\phi_m = 78,1^\circ}$$

Não é possível efetuar a compensação por avanço de fase pois a contribuição angular é maior que 65° , assim, será necessário efetuar um atraso em baixa frequência para trazer o ponto de cruzamento do ganho mais para a esquerda e um avanço em alta frequência para garantir a estabilidade do sistema.

PARA O TERMO DE ATRASO DE FASE

Assim, escolhendo a frequência do ponto em que a fase é -180° , tem-se $\omega_m = 1,41 \text{ rad/s}$. A frequência do zero do compensador de atraso é escolhida uma década abaixo, logo:

$$\omega_{czd} = \frac{\omega_m}{10} \rightarrow \boxed{\omega_{czd} = 0,141 \text{ rad/s}} \quad \omega_{czd} = \frac{1}{\tau_2} \rightarrow \boxed{\tau_2 = 7,1}$$

Fazendo o ângulo de compensação de atraso em ω_m igual a $MF_r + \text{Tolerância}$, temos

$$\boxed{\phi_m = 55^\circ}$$

6°. Adicione uma tolerância para compensar a inserção do compensador. O compensador de avanço de fase desloca a frequência de cruzamento de ganho para a direita e diminui a margem de fase.
Já adicionada (5°)

7°. Determine o fator de atenuação α .

$$\sin \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \rightarrow \boxed{\alpha \cong 10}$$

8°. Determine a frequência de canto, ω_{cpd} , correspondente ao polo do compensador da porção de atraso, pela relação.

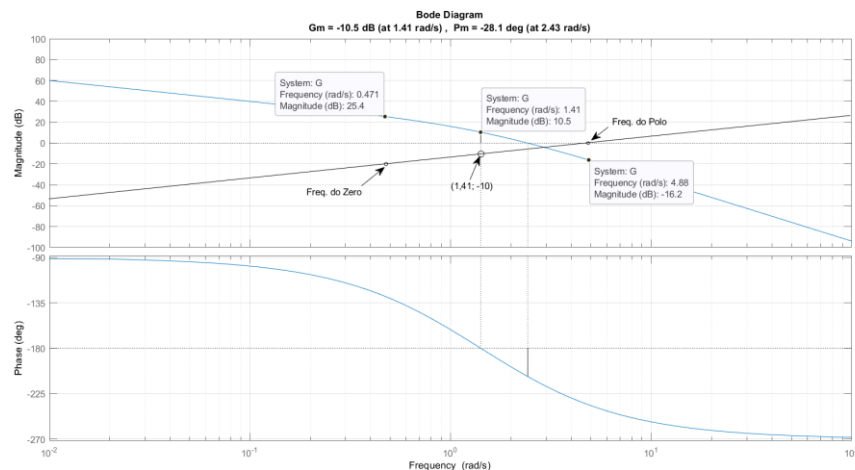
$$\omega_{cpd} = \frac{1}{\alpha \tau_2} \rightarrow \boxed{\omega_{cpd} = 0,0141 \text{ rad/s}}$$

PARA O TERMO DE AVANÇO DE FASE

9°. Determine o ganho na frequência de cruzamento de ganho ω_m em que o módulo do sistema não compensado de malha aberta seja:

$$|G_1(j\omega_m)| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow \boxed{|G_1(j1,41)| = 10 \text{ dB}}$$

10°. Trace uma reta com inclinação 20 [dB/dec] passando pela coordenada $(\omega_m; -|G(j\omega_m)|)$. As intercessões dessa reta com a reta 0 [dB] e com a linha -20 [dB] determinam as frequências de canto do polo e do zero, respectivamente, do termo de avanço. Coordenada: $(1,41 \text{ rad/s}; -10 \text{ dB})$



$$\boxed{\omega_{cza} = 0,47 \text{ rad/s}} \quad \omega_{cza} = \frac{\alpha}{\tau_1} = 1,21 \text{ rad/s} \rightarrow \boxed{\tau_1 = 21,27}$$

$$\boxed{\omega_{cpa} = 4,88 \text{ rad/s}}$$

Assim, o compensador de atraso/avanço será:

$$G_c(s) = k_c \left(\frac{s + \omega_{czd}}{s + \omega_{cpd}} \right) \left(\frac{s + \omega_{cza}}{s + \omega_{cpa}} \right) = k_c \left(\frac{s + 0,141}{s + 0,0141} \right) \left(\frac{s + 0,47}{s + 4,88} \right)$$

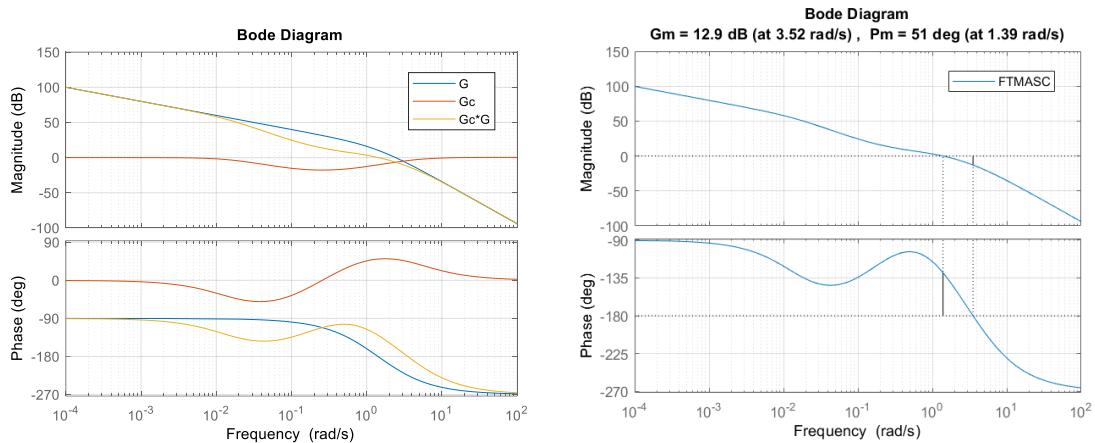
É possível ajustar k_c avaliando K_v novamente, para $K = 20$:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} k_c s \left(\frac{s + 0,141}{s + 0,0141} \right) \left(\frac{s + 0,47}{s + 4,88} \right) \frac{20}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1,32k_c}{0,137} = 10$$

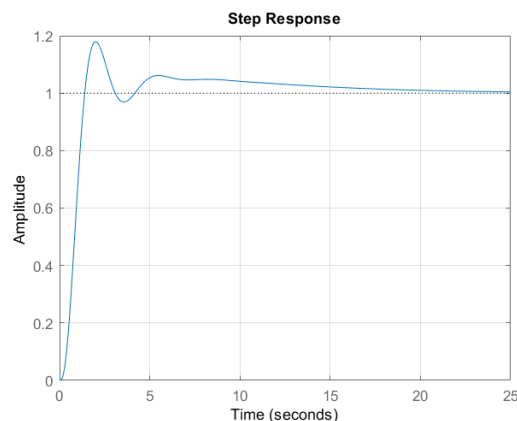
$$\boxed{k_c = 1,04}$$

Verificação:

Para a FTMASC, tem-se:



O valor de K_v é $10,02s^{-1}$; $MF = 51$ e $MG = 12,9$ o que atende às condições iniciais do problema. A resposta ao degrau do sistema de malha fechada compensado é dada abaixo.



4.5. COMPENSADORES DIGITAIS

Os compensadores digitais são obtidos a partir do projeto dos compensadores analógicos e da forma com que foi apresentado no Cap. 2 para Sistemas Digitais para o Método $G_c(s) \rightarrow D(z)$.

4.6. PROJETO DE CONTROLADORES

O projeto dos controladores PI, PD e PID no domínio da frequência é apresentado de maneira simplificada nas seções seguintes.

4.6.1. PROJETO DO CONTROLADOR PD

O controlador PD é dado pela seguinte equação:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right)$$

O K_p é escolhido para atender ao erro em regime e o tempo de assentamento, enquanto o K_d é escolhido para atender à margem de fase. O controlador PD pode aumentar o amortecimento de um sistema sem alterar sua resposta em regime estacionário.

PROCEDIMENTO

1. Obtenha a equação de malha aberta do sistema não compensado, $G_1(s)$.
 $G_1(s) = K_p G(s)$
2. Determine o valor de K_p que satisfaz a condição de erro estático dada para $G_1(s)$.
3. Faça o diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K_p .
4. Localize a frequência ω_g onde o gráfico de bode do módulo de $G_1(s)$ é 0dB.
5. Avalie a MF de $G_1(s)$.
6. Localize o zero de $G_c(s)$, ou seja, K_d/K_p próximo de ω_g de modo a atender à MF desejada.

Exemplo 5 – Considere o sistema com realimentação unitária cuja FTRD é dada abaixo

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)}$$

Deseja-se um sistema estável com $K_v \cong 10s^{-1}$ e $MF_r > 95^\circ$.

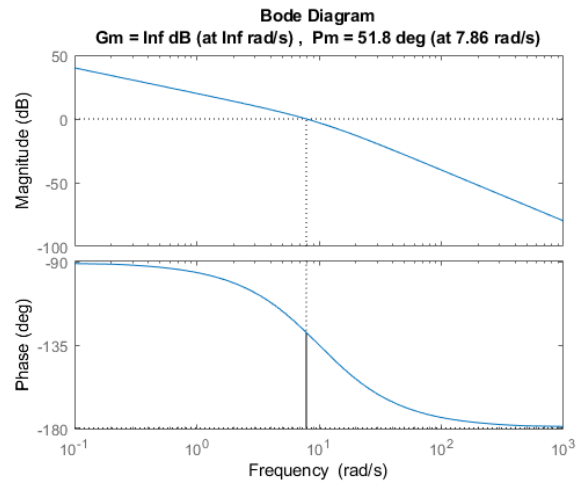
SOLUÇÃO

Projetando um controlador PD.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p}{s + 10} = \frac{K_p}{10} = 10 \rightarrow \boxed{K_p = 100}$$

Diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K_p .

$$G_1(s) = \frac{100}{s(s + 10)}$$



Pelo gráfico, $\omega_g = 7,86[rad/s]$ e a $MF = 51,8^\circ$.

Se o zero do controlador PD for colocado na frequência ω_g , o módulo não será alterado neste ponto, mas a fase irá subir 45° aumentando a MF . Assim, escolhas do zero em torno de ω_g permitirão escolhas melhores para a MF .

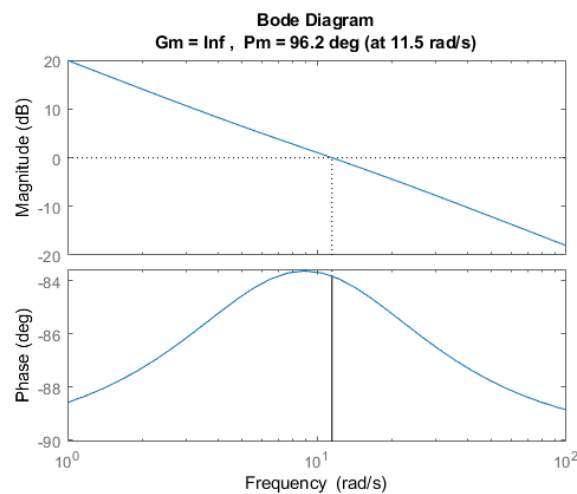
Escolhendo o zero em $\omega_g = 8[rad/s]$, logo,

$$K_d = \frac{K_p}{\omega_g} = \frac{100}{8} = 12,5$$

Assim,

$$G_c(s) = K_p + K_d s = 100 + 12,5s$$

Fazendo o Bode da FTMA do sistema compensado,



Exemplo 6 – Considere o sistema com realimentação unitária cuja FTRD é dada abaixo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Projete um controlador que torne o sistema estável com $K_v \cong 10s^{-1}$ e $MF_r > 5^\circ$.

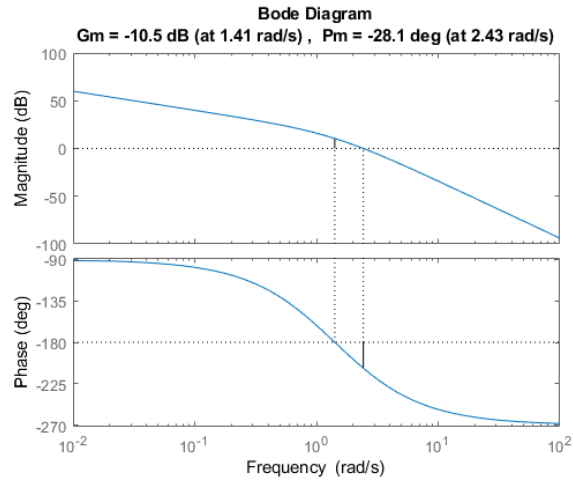
SOLUÇÃO

Projetando um controlador PD.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_p}{2} = 10 \rightarrow \boxed{K_p = 20}$$

Diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K_p .

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$$



Pelo gráfico, $\omega_g = 2,43[rad/s]$ e a $MF = -28,1$ e $MG < 0$.

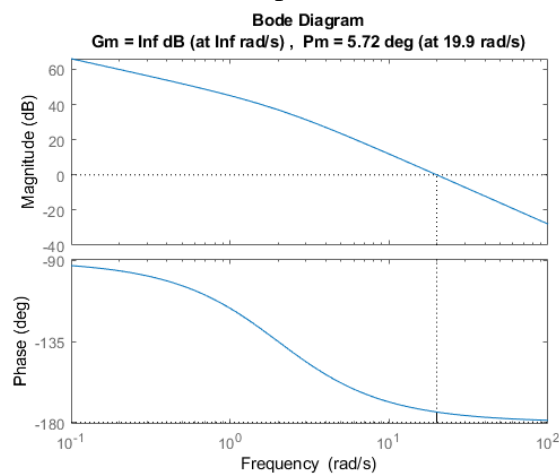
Escolhendo o zero em $\omega_g = 1[rad/s]$, logo,

$$K_d = \frac{K_p}{\omega_g} = \frac{20}{1} = 20$$

Assim,

$$G_c(s) = K_p + K_d s = 20 + 20s$$

Fazendo o Bode da FTMA do sistema compensado,



Exemplo 7 – Considere o sistema com realimentação unitária cuja FTRD é dada abaixo

$$G(s) = \frac{1,5 \times 10^7}{s(s^2 + 3408,3s + 1204000)}$$

Deseja-se um sistema estável com:

- $e_{ss} < 0,000443$ para uma entrada em rampa.
- $MF \cong 70^\circ$

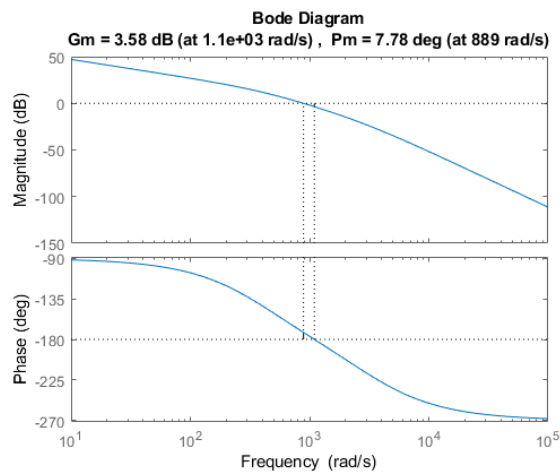
SOLUÇÃO

Calculando o valor de K_p que atende ao erro de estado estacionário.

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s K_p G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1,5 \times 10^7 K_p}{s(s^2 + 3408,3s + 1204000)}} = \frac{1}{12,458 K_p} < 0,000443$$

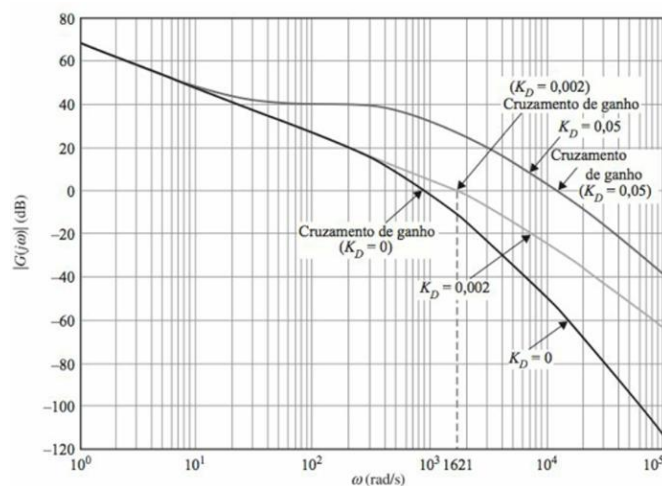
$$K_p = 181,17$$

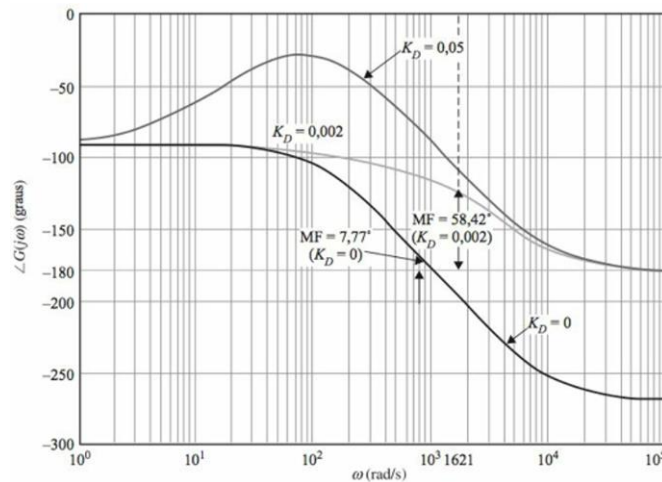
Diagrama de Bode de $K_p G(s)$



Pelo gráfico, $\omega_g = 889[\text{rad/s}]$ e a $MF = 7,78^\circ$.

O diagrama de bode abaixo mostra as curvas de módulo e de fase para diferentes valores de K_D . Observe que a maior MF obtida é próxima e inferior a 60° e ocorre para $K_D = 0,002$. Isso se deve à mudança da curva de ganho causada pela inclusão do controlador PD no sistema.





O projeto no domínio da frequência mostra que o controlador PD falha na tentativa de atender aos requisitos de desempenho impostos ao sistema.

4.6.2. PROJETO DO CONTROLADOR PI

O controlador PI é dado pela seguinte equação:

$$G_c(s) = K_p \left(\frac{s + \frac{K_I}{K_p}}{s} \right)$$

O K_p é escolhido para atender ao erro em regime e o tempo de assentamento, enquanto o K_I é escolhido para atender à margem de fase. O controlador PI pode melhorar a estabilidade relativa e o erro de regime estacionário ao mesmo tempo, porém, o tempo de subida é aumentado.

PROCEDIMENTO

1. Obtenha a equação de malha aberta do sistema não compensado, $G_1(s)$.
 $G_1(s) = KG(s)$
2. Determine o valor de K que satisfaz a condição de erro estático dada para $G_1(s)$.
3. Faça o diagrama de Bode de $G_1(s)$ com o valor calculado de K .
4. Localize a frequência ω'_g onde a MF assume o valor desejado.
5. Calcule o valor de K_p pela equação (objetivo é que $G_s(s)$ leve a 0dB em ω'_g):

$$K_p = K \times 10^{-\frac{|G_1(j\omega'_g)|_{dB}}{20}}$$

6. Calcule K_I pela equação¹:

$$K_I = \frac{K_p \omega'_g}{10} \quad \text{ou} \quad K_I = \frac{K_p \omega'_g}{100}$$

7. Os valores calculados de K_p e K_I são os pontos de partida para o ajuste.

¹ Se a frequência de canto do $G_c(s)$ é posicionada abaixo de ω'_g , o atraso de fase do controlador PI apresentará um efeito desprezível na fase do sistema compensado nas proximidades de ω'_g . Por outro lado, a posição do zero (valor de K_I/K_p) não deve ser muito pequeno, pois, assim, a banda passante do sistema será muito baixa, tendo como consequência um tempo de subida e um tempo de assentamento muito longo. Como regra geral, K_I/K_p deve corresponder a uma frequência que seja, no mínimo, uma década, e algumas vezes até duas décadas, abaixo de ω'_g .

Exemplo 8 – Considere o sistema com realimentação unitária cuja FTRD é dada abaixo

$$G(s) = \frac{4500K}{s(s + 361,2)}$$

Deseja-se um sistema estável com erro de estado estacionário para uma entrada em rampa, $e_{ss} \leq 0,000443$ e margem de fase, $MF \cong 65^\circ$.

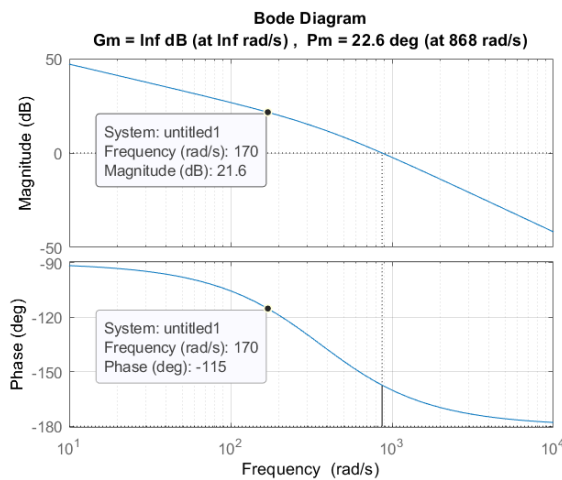
SOLUÇÃO

O erro estacionário do sistema não compensado é obtido ajustando-se K como segue,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4500K}{s(s + 361,2)} = \frac{4500K}{361,2} = 12,45K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \leq 0,000443 \rightarrow \frac{1}{12,45K} \leq 0,000443 \rightarrow \boxed{K \geq 181,19}$$

Fazendo os diagramas de Bode do sistema com o valor calculado de K ,



Projetando um controlador PI.

1. Procura-se no diagrama e Bode pela nova frequência de cruzamento de ganho ω'_g para a qual a margem de fase de 65° seja obtida. Isso ocorre quando a fase é -115° , ou seja, na frequência de $170 [rad/s]$. A magnitude de $G(s)$ nesta frequência é de $21,6dB$. Assim, o controlador PI deve gerar uma atenuação de $-21,6dB$ em $\omega'_g = 170 [rad/s]$. Assim,

$$K_p = K \times 10^{-\frac{|G(j\omega'_g)|_{dB}}{20}} = 181,19 \times 10^{-\frac{|G(j170)|_{dB}}{20}} = 181,19 \times 10^{-\frac{21,6}{20}} = 15,057$$

2. K_I é determinado a partir do valor de K_p pela relação (duas décadas abaixo de ω'_g),

$$K_I = \frac{K_p \omega'_g}{100} = \frac{15,057 \times 170}{100} = 25,597$$

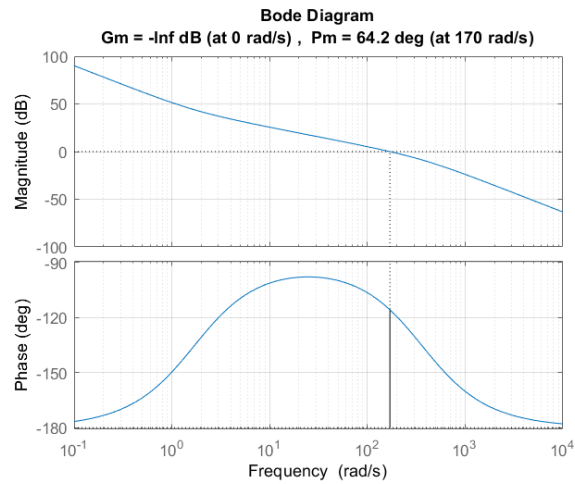
Assim,

$$G_c(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s} \right) = 15,057 + \frac{25,597}{s}$$

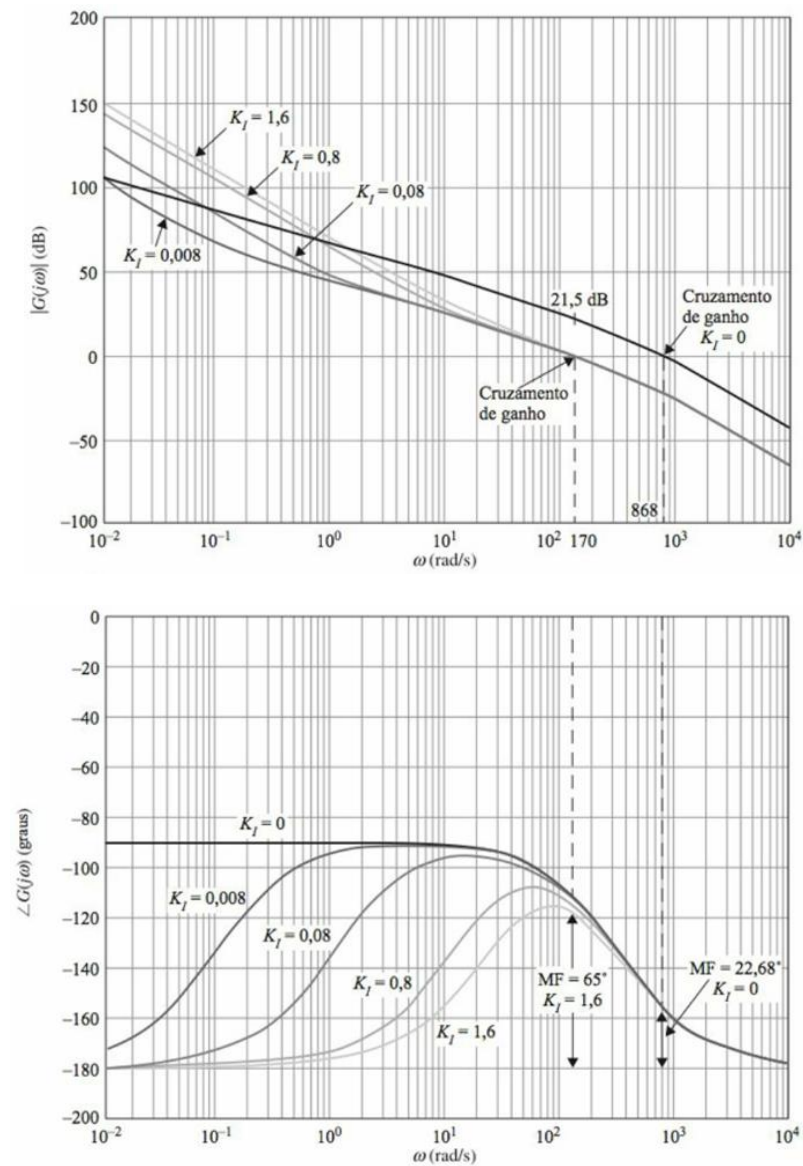
Então,

$$G_c(s)G(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s} \right) \left(\frac{4500}{s(s + 361,2)} \right) = \left(15,057 + \frac{25,597}{s} \right) \left(\frac{4500}{s(s + 361,2)} \right)$$

Fazendo o Bode da FTMA do sistema compensado, temos que a MF é atendida.

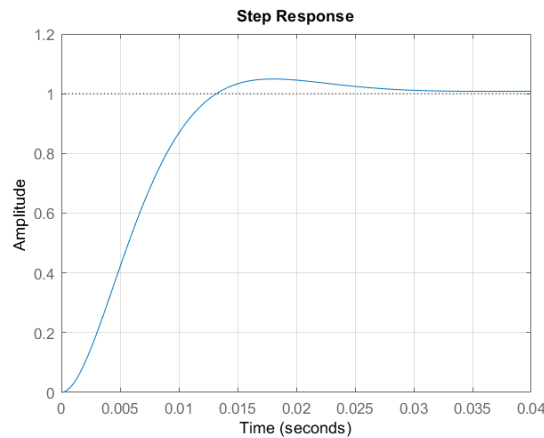


Os diagramas de bode a seguir mostram o traçado para diferentes valores de K_I



Fazendo a resposta ao degrau do sistema de malha fechada com realimentação unitária,

$$FTMF = \frac{6,776 \times 10^4 s + 1,152 \times 10^5}{s^3 + 361,2s^2 + 6,776 \times 10^4 s + 1,152 \times 10^5}$$



4.6.3. PROJETO DO CONTROLADOR PID

O controlador PID é dado pela seguinte equação:

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = (1 + K_{D1}s) \left(K_{P2} + \frac{K_{I2}}{s} \right)$$

onde,

$$K_P = K_{P2} + \frac{K_{D1}}{K_{P1}} K_{I2}$$

$$K_D = \frac{K_{D1}}{K_{P1}} K_{P2}$$

$$K_I = K_{I2}$$

O PID une as qualidades do PD e do PI em um único controlador.

PROCEDIMENTO

1. Realize o procedimento para o controle PD
2. A partir do resultado, realize o procedimento para o controle PI.

Exemplo 9 – Considere o sistema com realimentação unitária cuja FTRD é dada abaixo

$$G(s) = \frac{1,5 \times 10^7}{s(s + 400,26)(s + 3008)}$$

Deseja-se um sistema estável com:

- $e_{ss} < 0,000443$ para uma entrada em rampa.
- $MF \cong 70^\circ$

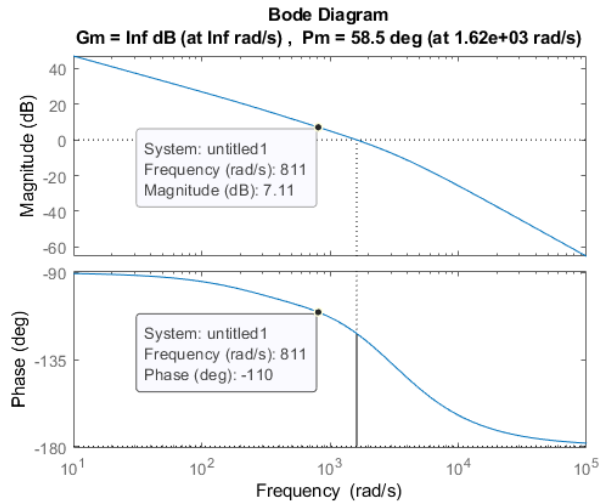
SOLUÇÃO

Do Exemplo 7 temos o PD com melhor MF dado pela equação abaixo,

$$G_1(s) = \frac{1,5 \times 10^7 K_{P1} (1 + K_{D1}s)}{s(s + 400,26)(s + 3008)} = \frac{2,718 \times 10^9 (1 + 0,002s)}{s(s + 400,26)(s + 3008)}$$

onde, $K_{P1} = 181,17$ e $K_{D1} = 0,002$

O diagrama de Bode de $G_1(s)$ é:



Assim, a nova frequência de cruzamento de ganho ω'_g para a qual a margem de fase de 70° é obtida ocorre quando a fase é -110° , ou seja, na frequência de 811 [rad/s]. A magnitude de $G(s)$ nesta frequência é de 7,11dB. Assim, o controlador PI deve gerar uma atenuação de $-7,11dB$ em $\omega'_g = 811$ [rad/s]. Logo,

$$K_{P2} = K_{P1} \times 10^{-\frac{|G(j\omega'_g)|_{dB}}{20}} = 181,17 \times 10^{-\frac{|G(j811)|_{dB}}{20}} = 181,17 \times 10^{-\frac{7,11}{20}} = 79,91$$

$$K_{I2} = \frac{K_{P2}\omega'_g}{100} = \frac{79,91 \times 811}{100} = 648,04$$

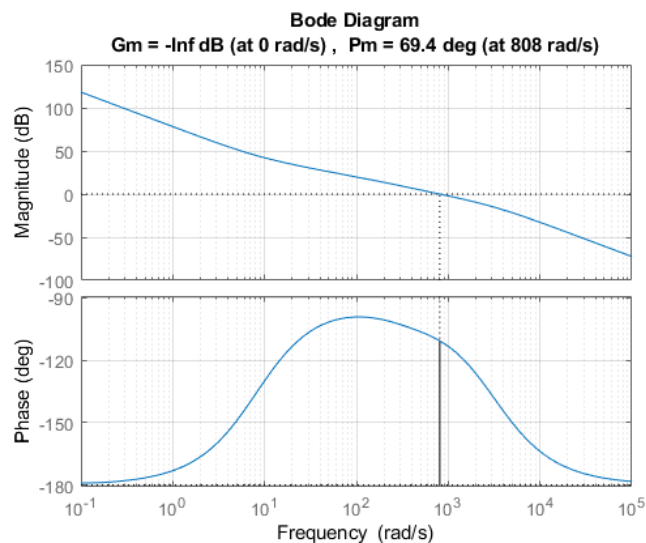
Assim,

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = (K_{P2} + K_{D1}K_{I2}) + (K_{D1}K_{P2})s + \frac{K_{I2}}{s}$$

$$G_c(s) = 81,2 + 0,16s + \frac{648,04}{s}$$

O diagrama de bode do sistema compensado:

$$G_c(s)G(s) = \left(81,2 + 0,16s + \frac{648,04}{s}\right) \left(\frac{1,5 \times 10^7}{s(s + 400,26)(s + 3008)}\right)$$



4.7. MATLAB

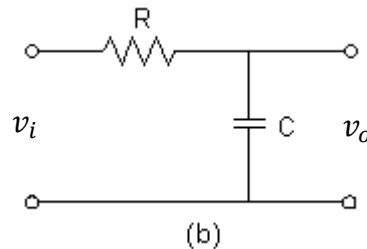
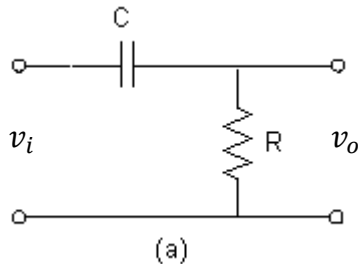
Funções importantes: *bode*, *margin*, *step*, *tf*, *conv*, *roots* e *sisotool*.

4.8. LISTA DE EXERCÍCIOS

OGATA: B.9.1 a B.9.9

4.9. EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

(Ogata B9.1 Modificado) Desenhe os diagramas de bode dos circuitos abaixo e mostre que eles podem ser vistos como aproximações de compensadores identificando qual circuito se aproxima de um compensador de avanço e qual se aproxima de um compensador de atraso. Suponha que $R = 50k\Omega$ e $C = 10\mu F$.



SOLUÇÃO

Resolvendo o circuito (a) por divisor de tensão, tem-se:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{RI(s)}{RI(s) + \frac{I(s)}{sC}} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

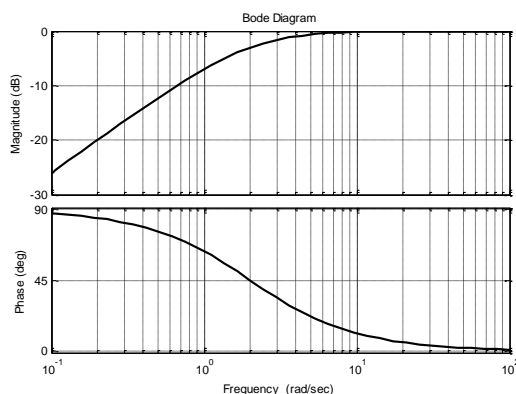
$$\boxed{\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s + 1/RC}}$$

Substituindo os valores de R e C , tem-se:

$$\boxed{\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s + 2}}$$

O sistema apresenta um zero na origem e um polo em -2 , ou seja, o zero está à direita do polo, logo, o circuito representa um compensador de avanço de fase, em baixas frequências.

Os diagramas de Bode são:



Como o circuito desloca a fase para cima, ele representa uma compensação por **avanço de fase**.

De maneira análoga para o circuito (b):

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{I(s)}{sC}}{RI(s) + \frac{I(s)}{sC}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

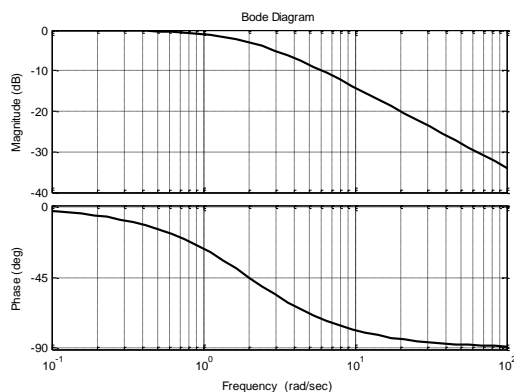
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

Substituindo os valores de R e C , tem-se:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2}{s + 2}$$

O sistema apresenta apenas um polo em -2 . Fazendo o LR é possível observar uma assíntota em -180° , ou seja, o polo procura pelo zero à sua esquerda em $-\infty$, assim, o zero estando à esquerda do polo mostra que o circuito representa um compensador de atraso de fase, em altas frequências.

Os diagramas de Bode são:



Como o circuito desloca a fase para baixo, ele representa uma compensação por **atraso de fase**.