



Universidade Federal do Espírito Santo - Centro Tecnológico  
Departamento de Engenharia Elétrica

**Laboratório de Controle**  
**Projeto do Controlador Avanço-Atraso de Fase via gráficos de Bode**

**Erro em regime**

Como este controlador não aumentam o tipo do sistema, o erro em regime geralmente deve satisfazer aumentando o ganho do controlador.

Como a FT do controlador é dada por  $G_C(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$ , ou seja, o valor de afeta seu ganho, calcula-se o ganho  $K'$  tal

que ao adicionar  $K'/a$  resulte o ganho desejado.

A FT do controlador passa , então a ser

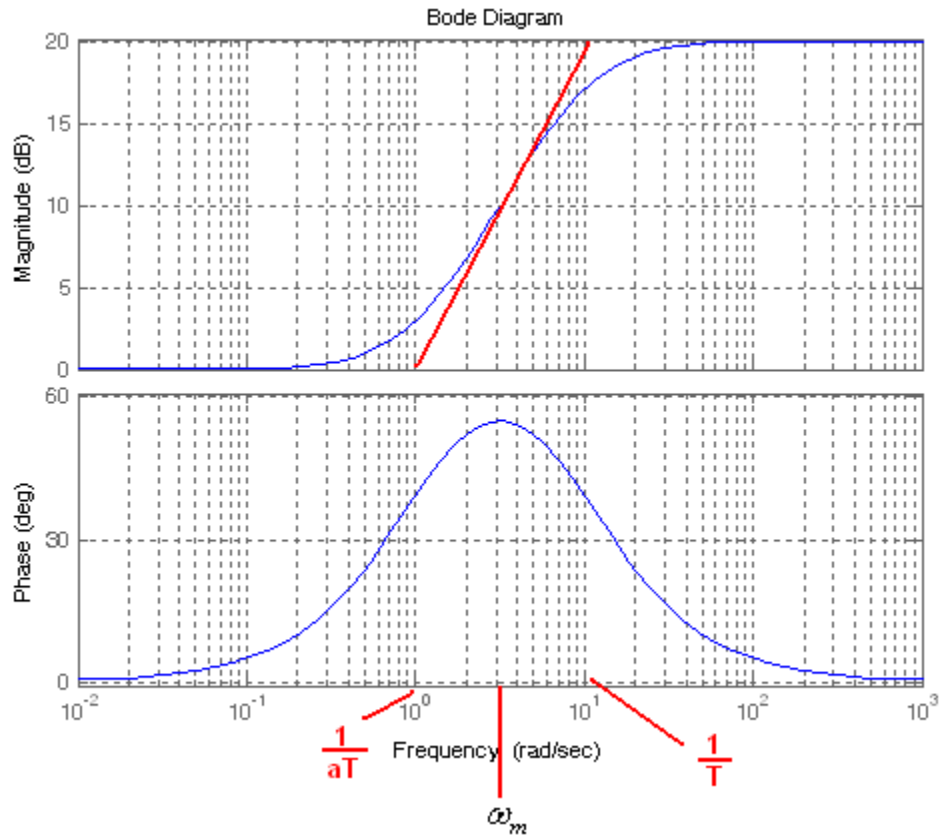
$$G_C(s) = K \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

O aumento do ganho reduz a margem de fase do sistema. Quando ganhos muito grandes são necessários para atender a especificação de regime, este controlador pode não conseguir estabilizar o sistema.

**Projeto do Controlador Avanço de Fase**

O controlador avanço de fase tem a forma  $G_C(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$ , com  $a > 1$

A figura abaixo ilustra o gráfico de Bode deste controlador com  $a=10$  e  $T=0.1$ .



O ganho começa com 0dB e atinge o máximo de 20dB. O valor máximo da fase do controlador é 55o.

O zero do controlador está em  $1/aT=1\text{rad/s}$ . O polo está em  $1/T=10\text{rad/s}$ . O ganho começa aumentar 20dB/dec a partir de 1rad/s (gráfico assintótico). Nesta mesma frequência a fase já aumentou 45 graus.

Em aproximadamente 10rad/s (polo) a inclinação da curva de módulo passa a ser 0, e a fase continua em 45 graus, devido à fase somada pelo zero e subtraída pelo polo. Uma década após o polo (100rad/s), a fase volta a ser 0 graus e o módulo se mantém em 20dB.

Um maior valor de  $a$  faz o zero e polo estarem mais distantes, aumentando a contribuição de fase (Margem de Fase).

A frequência  $\omega_m$  onde o avanço de fase é máximo é a frequência média entre  $1/T$  e  $1/aT$ , logo

$$\log_{10} \omega_m = \frac{1}{2} \left( \log_{10} \frac{1}{aT} + \log_{10} \frac{1}{T} \right) \text{ ou } \log_{10} \omega_m = \log_{10} \frac{1}{\sqrt{aT}}$$

Assim,

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

O avanço de fase é dado por

$$\angle G_c(j\omega) = \phi(j\omega) = \text{tg}^{-1} \omega a T - \text{tg}^{-1} \omega T$$

Substituindo  $\omega = \omega_m$  nesta expressão e manipulando, vem

$$\text{sen} \phi_m = \frac{a-1}{a+1} \quad \text{ou} \quad a = \frac{1 + \text{sen} \phi_m}{1 - \text{sen} \phi_m}$$

O módulo adicionado pelo controlador é dado por

$$M(j\omega) = 20 \log_{10} \omega a T - 20 \log_{10} \omega T$$

$$M\left(j \frac{1}{aT}\right) = 0$$

$$M\left(j \frac{1}{T}\right) = 20 \log_{10} a$$

$$M\left(j \frac{1}{\sqrt{a}T}\right) = 10 \log_{10} a$$

Logo, na frequência  $\omega_m$  são adicionados  $\phi_m$  graus à fase e  $10 \log_{10} a$  dB ao módulo

### Estratégia de projeto:

Aumentar a fase próximo a frequência de cruzamento de ganho (wg) compensando o efeito do ganho do controlador.

A relação entre a fase adicionada  $\phi_m$  e **a** é  $a = \frac{1 + \text{sen} \phi_m}{1 - \text{sen} \phi_m}$ . Por exemplo, caso se queira adicionar  $30^\circ$ , basta escolher

**a=3.** O módulo adicionado em  $\omega_m$  será  $10 \log_{10} 3 = 4.77 \text{ dB}$

**Logo, os passos de projeto são:**

- 1) Obtenha o ganho  $K'$  que atenda a condição de regime:  $\frac{K}{a} = K' \geq \dots$
- 2) Desenhe o gráfico de Bode de  $G(s)$  com o ganho  $K'$  obtido no passo 1)
- 3) Verifique a quantidade de fase  $\phi_m$  que deve ser adicionada à curva de fase, de modo que  $MF + \phi_m$  seja igual a  $MF'$ , a margem de fase desejada
- 4) Calcular **a** para obter  $\phi_m$  de  $a = \frac{1 + \text{sen} \phi_m}{1 - \text{sen} \phi_m}$
- 5) Verificar a quantidade de módulo adicionada pelo controlador  $= 10 \log_{10} a$
- 6) Obter do gráfico de Bode a frequência  $\omega_m$  onde  $|G(j\omega_m)| = -10 \log_{10}(a)$
- 7) Obter  $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$
- 1) Ajustar o ganho da planta  $K$ , de modo que  $K = a * K'$

**Problemas de projeto:** quando a fase a ser adicionada for grande, isto resulta em um valor de **a** também grande, o que pode inviabilizar o projeto deste controlador.

**Exemplo:** Seja  $G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s+10)}$  e supondo que o erro em regime esteja satisfeito.

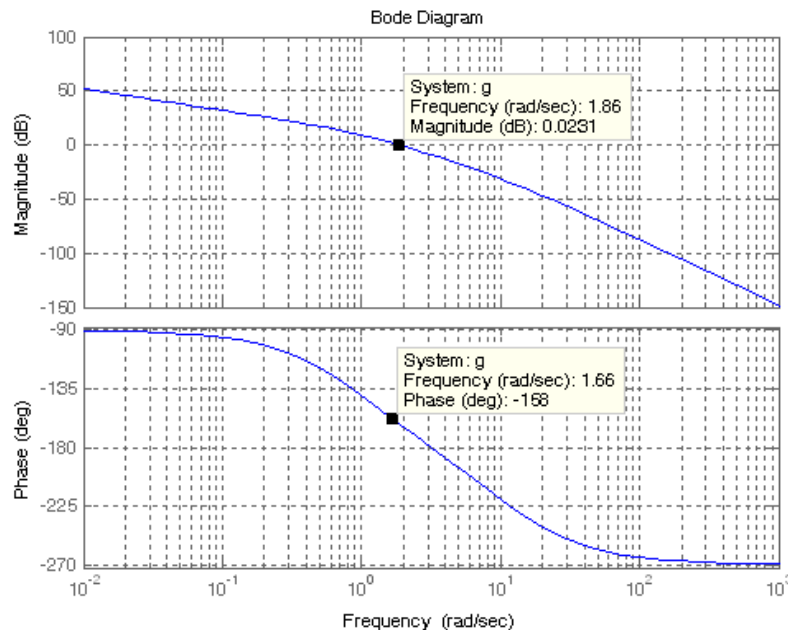
No gráfico de bode abaixo observa-se que MF=22 Graus.

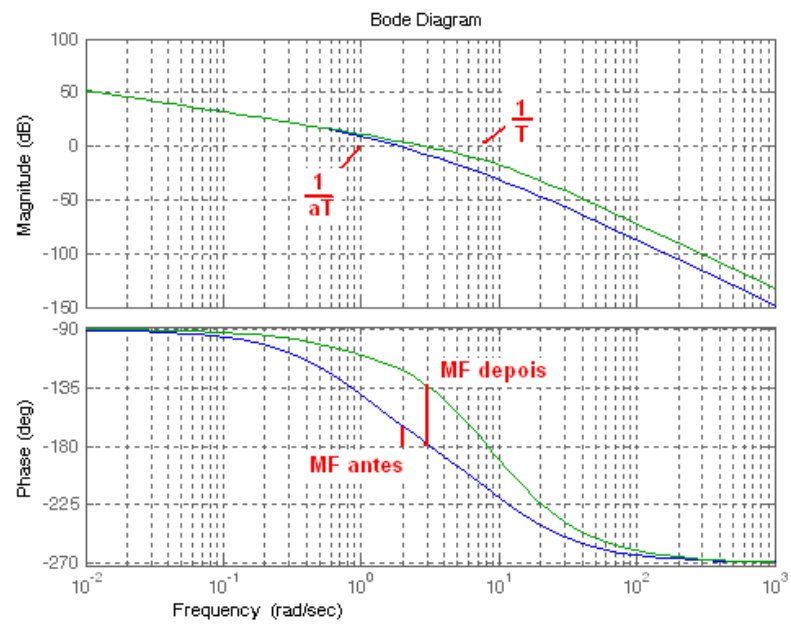
Vamos projetar um controlador para adicionarmos 45 graus à Margem de fase.

Para isto,

$$a = \frac{1 + \sin 45}{1 - \sin 45} = 5.82$$

O módulo adicionado é  $10 \log_{10} 5.82 = 7.65 \text{ dB}$  Logo, o avanço de fase deve ser colocado na frequência 3 rad/s. Observa-se que nesta frequência a fase é zero graus, logo serão adicionados 45 graus e zero graus, e não à margem de fase que é de 22 graus. No gráfico de Bode compensado a margem de fase resultante foi de 45 graus, coincidindo neste caso com o valor de fase adicionado.

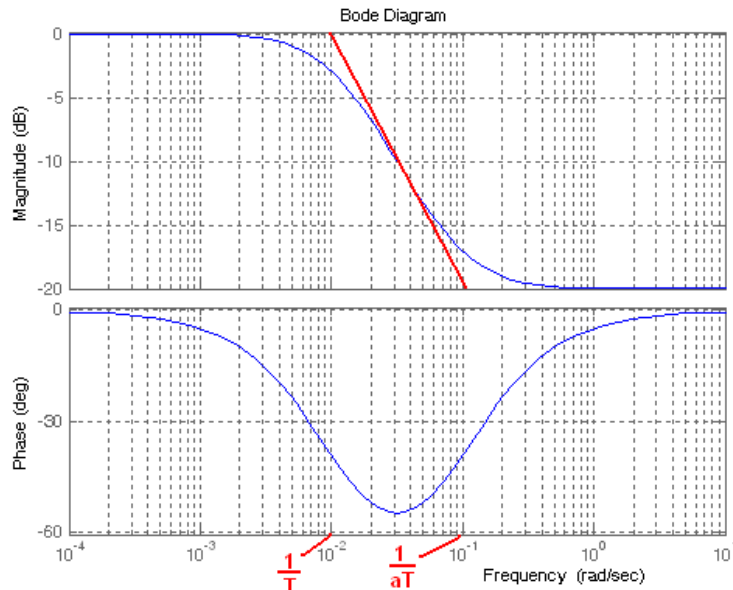




## Projeto do Controlador Atraso de Fase

O controlador avanço de fase tem a forma  $G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1+aTs}{1+Ts}$ , com  $a < 1$

A figura abaixo ilustra o gráfico de Bode deste controlador com  $a=0.1$  e  $T=100$ .



O ganho começa com 0dB e atinge o máximo de -20dB. O valor mínimo da fase do controlador é -55°.

O zero do controlador está em  $1/aT=0.1\text{rad/s}$ . O polo está em  $1/T=0.01\text{rad/s}$ . O ganho começa a diminuir 20dB/dec a partir de 0.01rad/s (gráfico assintótico). Nesta mesma frequência a fase já diminuiu 45 graus. Em aproximadamente 0.1rad/s (polo) a inclinação da curva de módulo passa a ser 0, e a fase continua em -45graus, devido à fase somada pelo zero e subtraída pelo polo. Uma década após o polo (1rad/s), a fase volta a ser 0 graus e o módulo se mantém em -20dB.

Um menor valor de  $a$  faz a curva de módulo diminuir, aumentando a Margem de Fase.

### Estratégia de projeto:

Escolher  $a < 1$  tal que a nova frequência de cruzamento de ganho ( $\omega_g'$ ) produza a Margem de Fase desejada, localizando o atraso de fase uma década antes desta nova frequência de cruzamento de fase ( $\omega_g'$ )

### Passos de projeto:

- 1) Obtenha o ganho  $K'$  que atenda a condição de regime:  $\frac{K}{a} = K' \geq \dots$
- 2) Desenhe o gráfico de Bode de  $G(s)$  com o ganho  $K'$  obtido no passo 1)
- 3) Escolha  $\omega_g'$ , a frequência onde a curva de módulo de  $K'.G(s)$  deveria cruzar 0dB para se ter  $MF'$ , a margem de fase desejada
- 4) Calcule o valor de  $a < 1$  tal que  $20\log_{10} a = -|G(j\omega_g')|_{\text{dB}}$
- 5) Coloque o zero do Atraso ( $1/aT$ ) uma década antes de  $\omega_g'$ , de modo que a fase não seja alterada próxima a  $\omega_g'$
- 6) Obtenha  $T$  de  $\frac{1}{aT} = \frac{\omega_g'}{10}$

7) Ajustar o ganho da planta K, de modo que  $K=a \cdot K'$

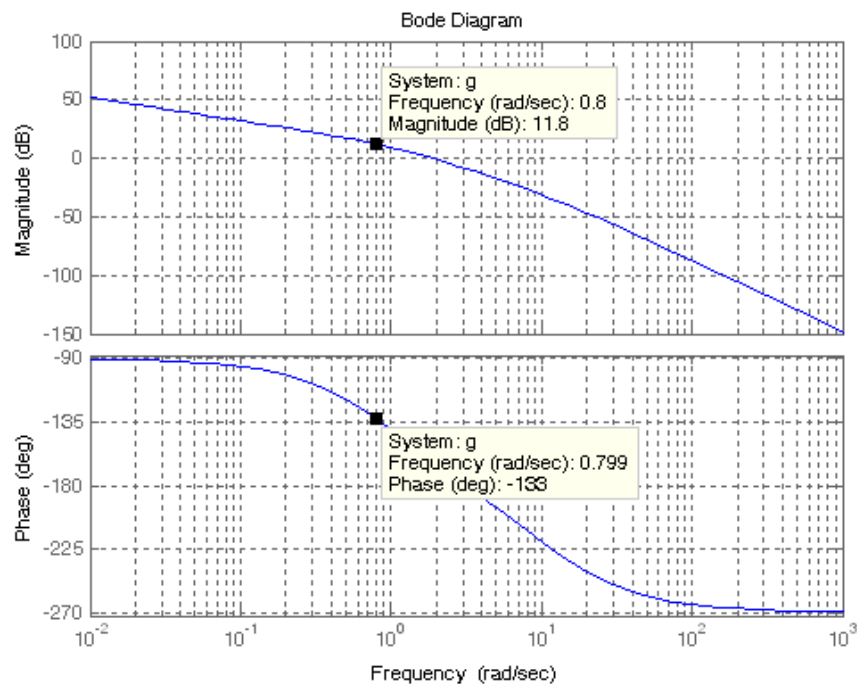
**Problemas de projeto:** da mesma forma que o PI, se a atenuação necessária for muito grande, isto pode inviabilizar o projeto deste controlador

**Exemplo:** Seja  $G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s+10)}$  e supondo que o erro em regime esteja satisfeito.

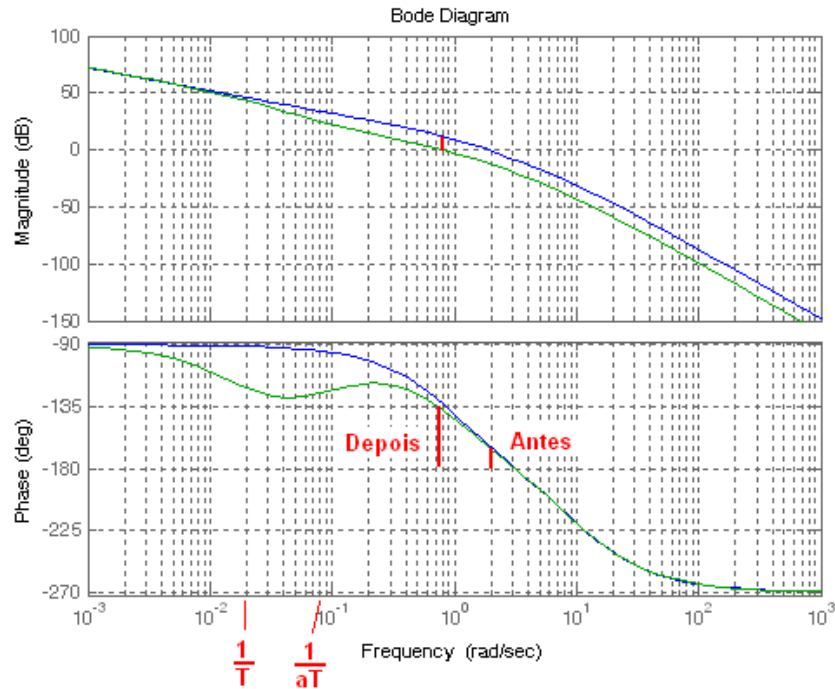
Observa-se no gráfico de Bode que para que a margem de fase seja de 45 graus, o módulo deve ser reduzido em 11.8 dB na frequência  $\omega_g = 0.8$  rad/s.

Para isto escolhemos  $a$  de modo que  $20 \log_{10} a = -11.8 \text{ dB}$ , ou  $a=0.257$

O zero  $1/aT$  deve ser colocado em  $0.8/10$ . Logo,  $T=48.6$



O gráfico de bode a seguir mostra o sistema compensado com este controlador.



A margem de fase mudou de 22 graus para 45 graus. O polo ficou em  $1/T=0.02$  e o zero em  $1/aT=0.07$ . A curva de módulo foi reduzida em  $20\log_{10}a=11.8$  dB a partir do zero em  $1/aT$ .

### Projeto do controlador avanço-atraso de fase

Basta fazer os dois projetos separadamente.

O gráfico de bode abaixo mostra a compensação da mesma FT  $G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s+10)}$  para um compensador avanço seguido de um compensador atraso.

$$G_{av}(s) = \frac{1+0.62s}{1+0.21s}$$

$$G_{at}(s) = \frac{1+9.6s}{1+31s}$$

$$\text{Compensador final } G_{av}(s)G_{at}(s) = \frac{6s^2 + 10.4s + 1}{6.4s^2 + 31.2s + 1}$$

Deixar o compensador avanço por último permite adicionar melhorias na margem de fase, de forma similar ao controlador PD.

O segundo controlador  $G_{av}(s)$  é projetado para a FT mais o primeiro controlador, isto, é, para  $G_{at}(s)G(s)$ .



