

CAP 2

MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS DE CONTROLE (ANALÓGICO)

SUMÁRIO

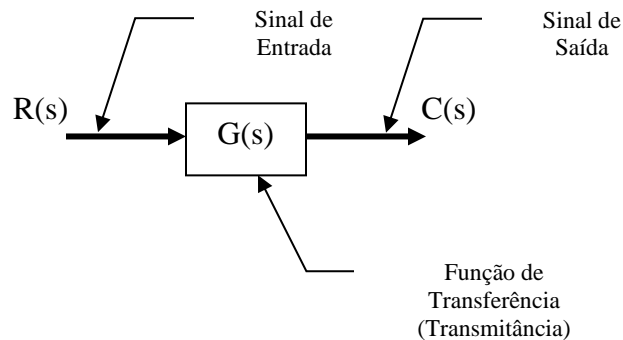
2.1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.2.	MODELAGEM MATEMÁTICA NO DIAGRAMA DE BLOCOS.....	1
2.2.1.	REPRESENTAÇÃO EM MATLAB	2
2.3.	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	3
2.3.1.	REPRESENTAÇÃO EM MATLAB E PYTHON	4
2.4.	OPERAÇÕES COM DIAGRAMAS DE BLOCOS	5
2.5.	MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS.....	10
2.5.1.	MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS	10
2.5.2.	MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS.....	17
2.5.3.	MODELAGEM DE SISTEMAS ELETROMECAÂNICOS	22
2.5.4.	MODELAGEM DE SISTEMAS FLUIDICOS	25
2.5.5.	MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS.....	30
2.6.	DIAGRAMA DE FLUXO DE SINAIS (DFS).....	33
2.6.1.	FÓRMULA DE GANHO DE MASON.....	37
2.7.	RESUMO DE FUNÇÕES DO MATLAB	42
2.8.	RESUMO DE FUNÇÕES DO PYTHON	42
2.9.	LISTA DE EXERCÍCIOS.....	42
2.10.	EXERCÍCIOS EXTRAS RESOLVIDOS.....	42

2.1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de sistemas de controle tem como objetivo obter um modelo matemático que represente uma relação de entrada e saída em um sistema de controle qualquer, ou seja, sua função de transferência. A representação gráfica do modelo matemático é baseada, principalmente, no Diagrama de Blocos.

2.2. MODELAGEM MATEMÁTICA NO DIAGRAMA DE BLOCOS

O Diagrama de Blocos contém informações relativas ao comportamento dinâmico do sistema de controle. Na modelagem matemática as variáveis de entrada e de saída são representadas no diagrama e o processo é representado por sua Função de Transferência, normalmente, no domínio de Laplace.

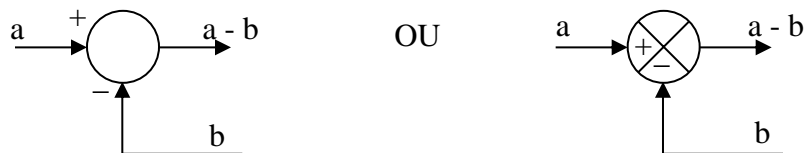


Somente três operações são representadas pelo Diagrama de Blocos:

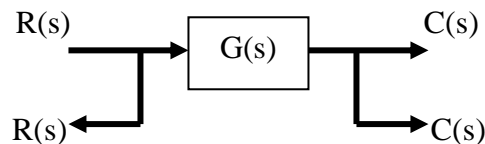
1ª Produto de Transmitância:

$$C(s) = G(s)R(s)$$

2ª Soma/Subtração:



3ª Ramificação:

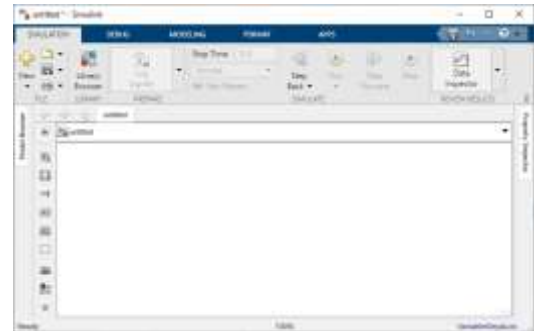


2.2.1. REPRESENTAÇÃO EM MATLAB

No Matlab os diagramas de blocos são representados no ambiente chamado *simulink*.



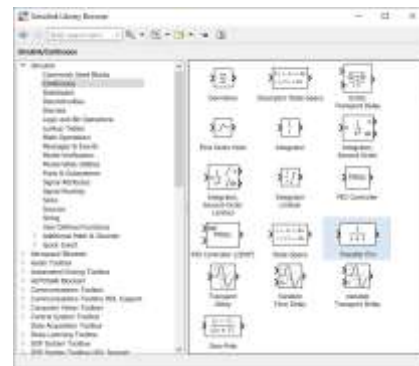
Clicando em
Blank Model



Clicando em *Library Browser*



Você pode
selecionar e
arrastar os
blocos para a
área de
projeto



Clicando 2x no Bloco **você** pode configurá-lo



Exemplo de Diagrama



2.3. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A função de transferência é uma relação matemática entre uma entrada e uma saída de um sistema de controle. Para sistemas contínuos utiliza-se a Transformada de Laplace para representar essa função.

$$\text{Função de Transferência} = G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Big|_{\text{condições iniciais nulas}}$$

O conceito de função de transferência é limitado a sistemas de equações diferenciais lineares e invariantes no tempo. Essas equações representadas no domínio de Laplace dão origem a funções polinomiais na forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad m \leq n$$

As raízes do polinômio do numerador da função de transferência são chamadas de ZEROS da função e as raízes do polinômio do denominador são os POLOS da função ou do sistema de controle.

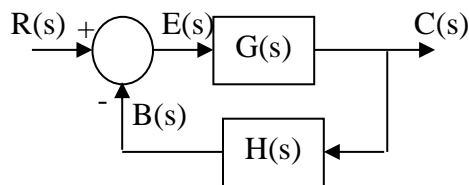
A resposta impulsiva de um sistema de controle permite obter o modelo do sistema, ou seja,

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ Y(s) &= G(s)\Delta(s) = G(s) \end{aligned}$$

Assim, a **função característica do sistema** é obtida pela transformada inversa de Laplace da resposta impulsiva do sistema de controle:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

Em um sistema realimentado, como o representado na figura abaixo,



a **função de transferência de malha aberta** é a relação entre o sinal de realimentação, $B(s)$, e o sinal de erro atuante, $E(s)$, ou seja:

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

A **função de transferência do ramo direto**, por outro lado, é a relação entre o sinal de saída, $C(s)$, e o erro atuante, $E(s)$:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Em sistemas com realimentação unitária a função de transferência do ramo direto é igual à função de transferência de malha aberta.

A relação entre o sinal de saída, $C(s)$, e o sinal de entrada, $R(s)$, de um sistema de malha fechada é chamada de **função de transferência de malha fechada** e é obtida, a partir do diagrama de blocos, da seguinte forma:

$$\begin{cases} C(s) = G(s)E(s) & (i) \\ E(s) = R(s) - B(s) & (ii) \\ B(s) = H(s)C(s) & (iii) \end{cases}$$

Substituindo (iii) em (ii) e o resultado em (i), tem-se:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)[R(s) - H(s)C(s)] \\ C(s) + G(s)H(s)C(s) &= G(s)R(s) \\ C(s)[1 + G(s)H(s)] &= G(s)R(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

2.3.1. REPRESENTAÇÃO EM MATLAB E PYTHON

A criação de funções de transferência em Matlab é bastante simples. Os códigos abaixo apresentam dois exemplos de criação das funções de transferência.

```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.

>> G = tf([1 0],[1 2 1])

G =

      8
-----
s^2 + 2 s + 1

Continuous-time transfer function.

fx >> |
```

```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.

>> s = tf('s');
>> G = s/(s^2 + 2*s + 1)

G =

      8
-----
s^2 + 2 s + 1

Continuous-time transfer function.

fx >> |
```

Em Python:

```
2 from control.matlab import tf, feedback # MATLAB-like functions
3
4 num = [1., 2.]
5 den = [9., 8., 7.]
6
7 # Função de Transferência
8 sys1 = tf(num, den)
9 # ou
10 s = tf('s')
11 G = (s + 1)/(s**2 + 2*s + 1)
```

2.4. OPERAÇÕES COM DIAGRAMAS DE BLOCOS

1) Funções de Transferência em Série (ou em cascata)



Prova:

$$X_2 = G_1 X_1$$

$$X_3 = G_2 X_2 \Rightarrow X_3 = G_2 (G_1 X_1) \Rightarrow X_3 = (G_1 G_2) X_1$$



Prova:

$$(X_1 \pm X_2)G = X_3 \Rightarrow X_1 G \pm X_2 G = X_3$$



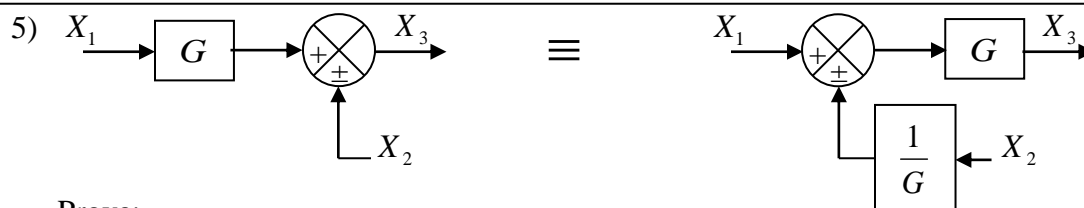
Prova:

$$X_1 G = X_2$$



Prova:

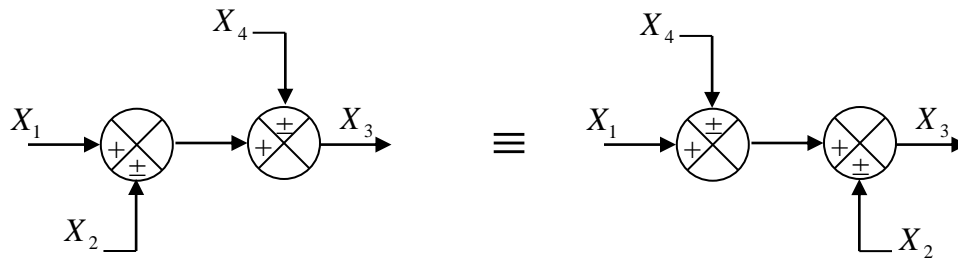
$$X_1 G = X_2 \Rightarrow X_1 = \frac{X_2}{G}$$



Prova:

$$X_1 G \pm X_2 = X_3 \Rightarrow \left(X_1 \pm \frac{X_2}{G} \right) G = X_3$$

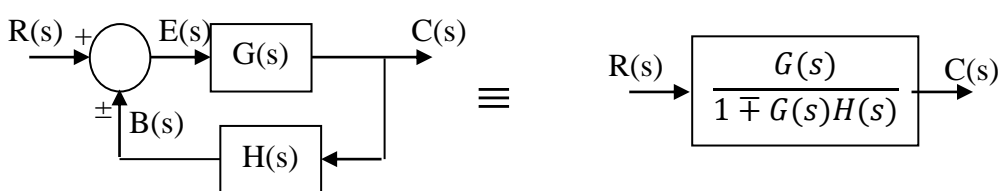
6)



Prova:

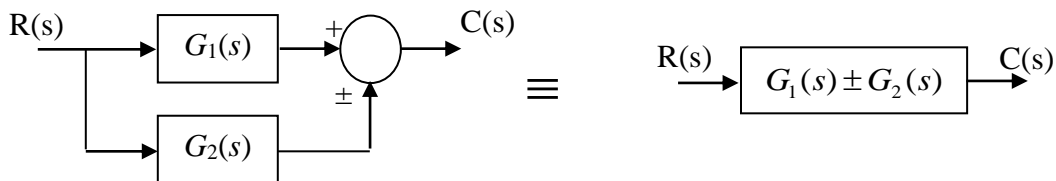
$$(X_1 \pm X_2) \pm X_4 = X_3 \Rightarrow (X_1 \pm X_4) \pm X_2 = X_3$$

7)



Prova: (Veja item 2.3 das notas de aula)

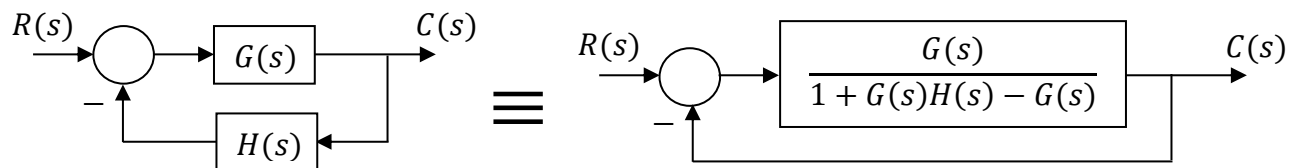
8) Funções de Transferência em Paralelo



Prova:

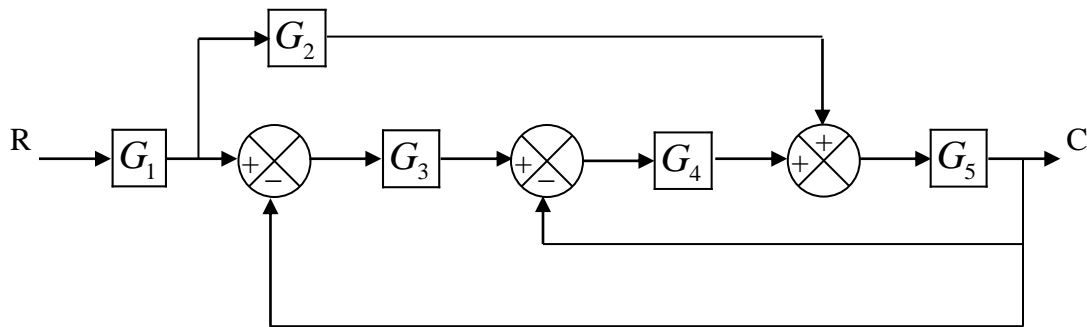
$$R(s)G_1(s) \pm R(s)G_2(s) = C(s) \Rightarrow R(s)(G_1(s) \pm G_2(s)) = C(s)$$

OBS1: Qualquer sistema de malha fechada pode ser convertido em um sistema com realimentação unitária

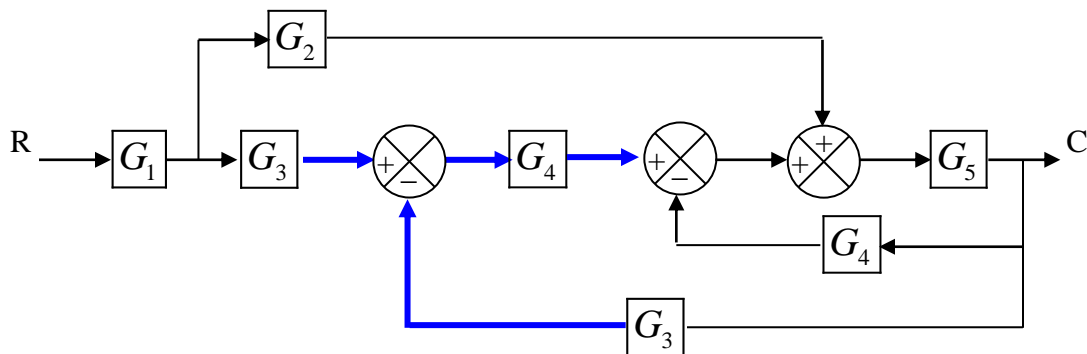
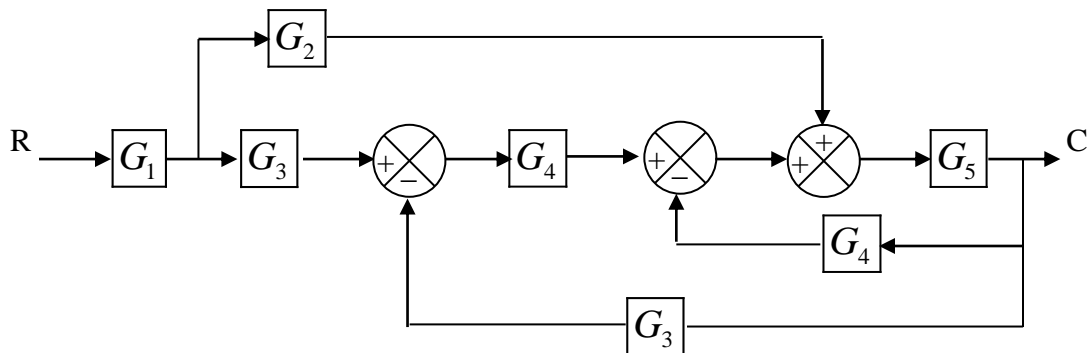
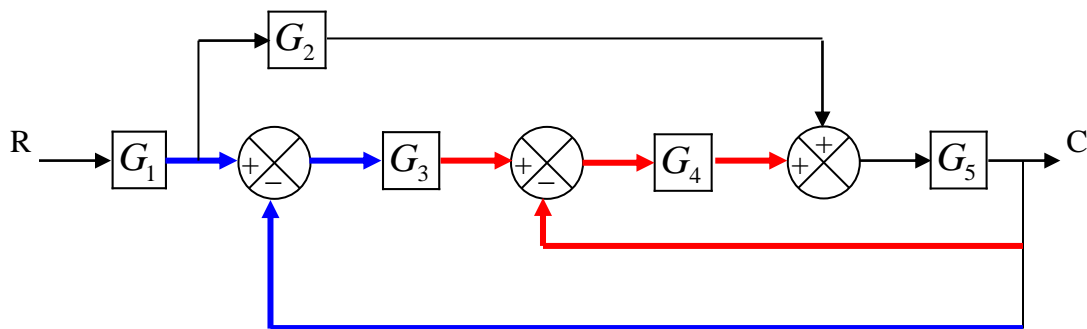


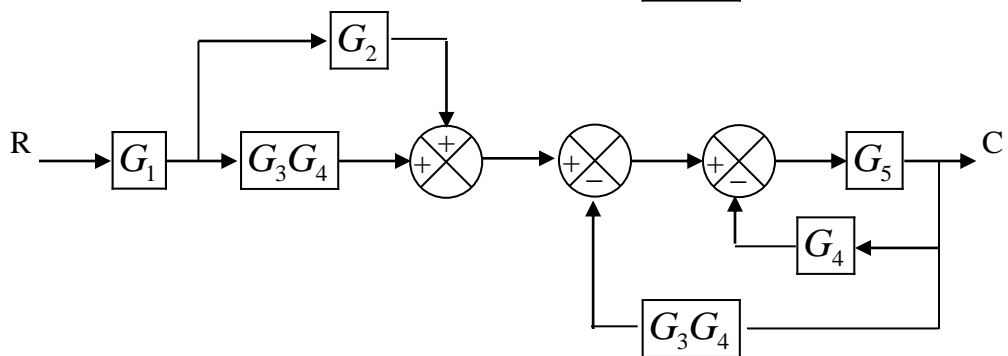
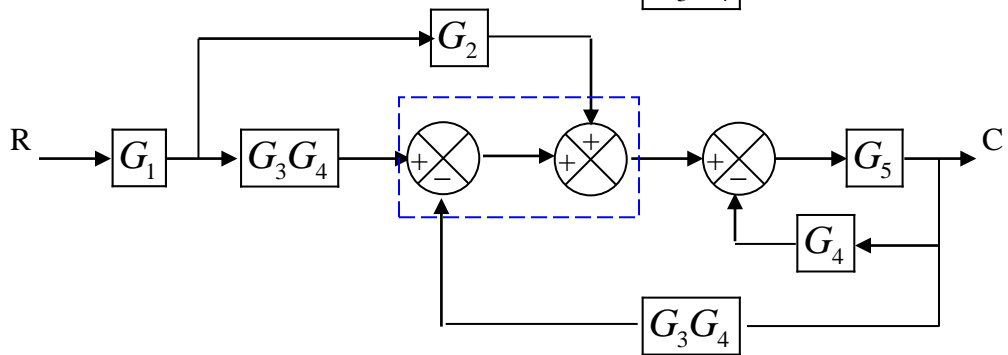
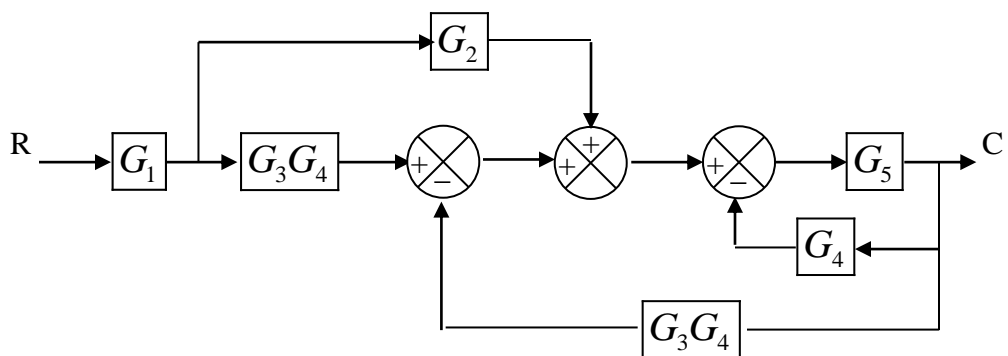
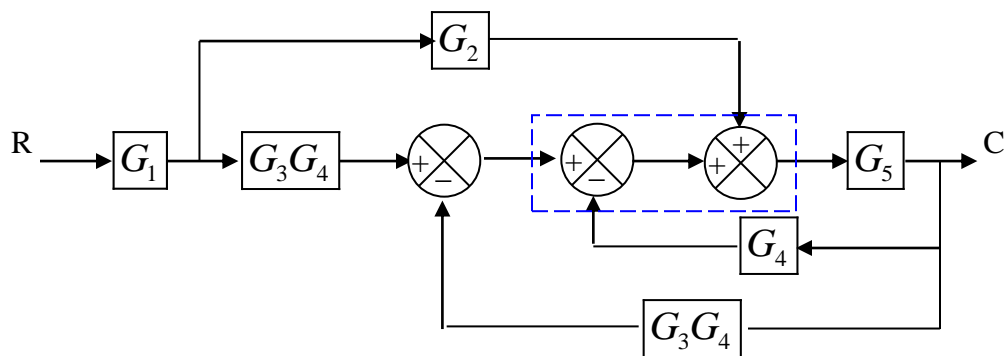
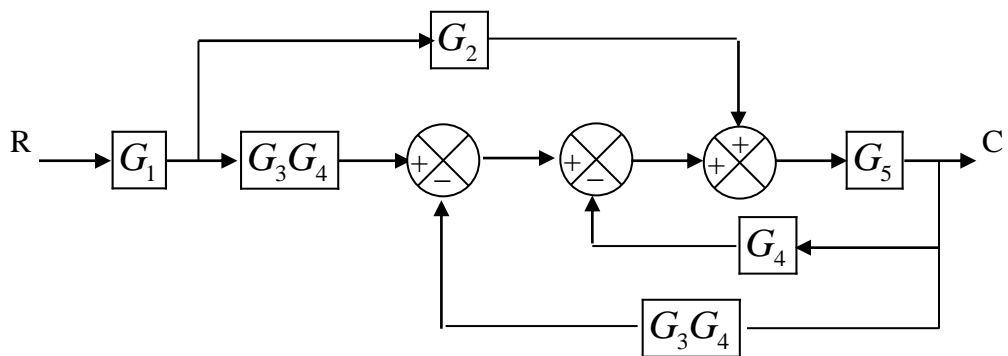
OBS2: A principal finalidade de construir diagramas de blocos matemáticos é a de se obter uma representação visual das equações que modelam o comportamento dinâmico do sistema, sem que seja necessário efetuar simplificações nestas equações, mas apenas ajustes. Assim, as simplificações do sistema são feitas por operações de simplificação do diagrama, como visto nesta seção, ou através da conversão do diagrama em um diagrama de fluxo de sinais, como será abordado adiante neste capítulo.

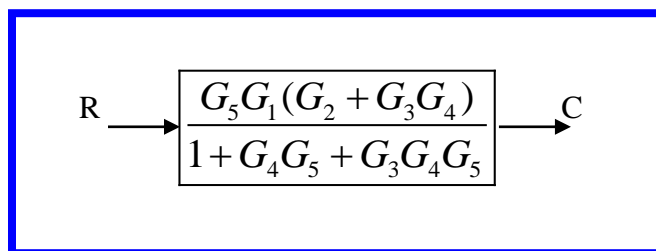
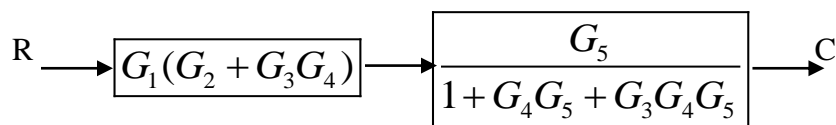
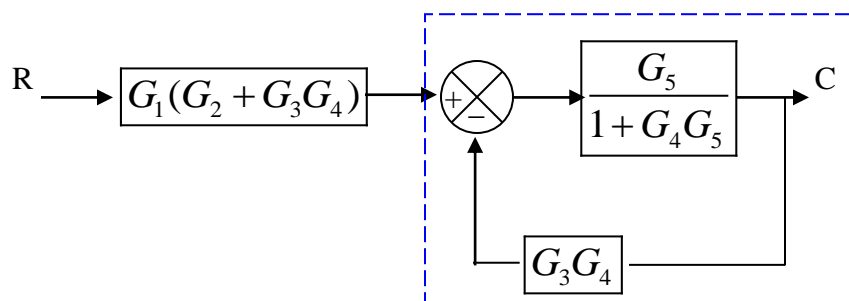
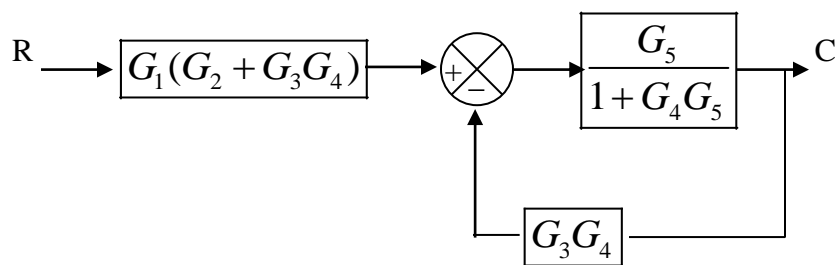
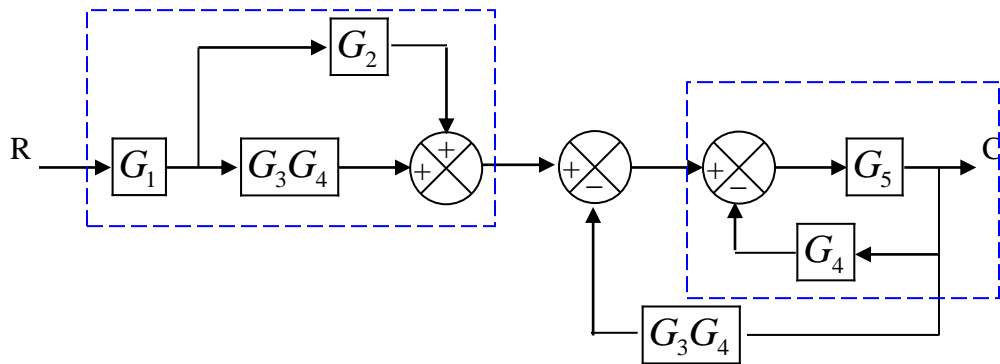
Exemplo 1 – Efetue a simplificação do Diagrama de Blocos Abaixo.



SOLUÇÃO







2.5. MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS

A modelagem matemática de sistemas físicos consiste basicamente à modelagem de sistemas mecânicos, elétricos, eletromecânicos, hidráulicos e térmicos.



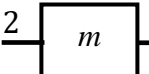
Variáveis Correspondentes a Cada Sistema

SISTEMAS	VARIÁVEIS	ELEMENTOS
Mecânico	Força (f) e torque (T_r)	Mola, freio (ou atrito), massa, redutor e momento de inércia
Elétrico	Carga (q), corrente (i) e tensão (v)	Resistor, capacitor, indutor e amplificador ideal
Eletromecânico	Força, torque, corrente e tensão	Motor DC
Fluídicos	Vazão (q), massa (m), volume (V), pressão (P), força (F_f), resistência (R), capacitância (C) e indutância (L)	Tanque, válvula e pistão
Térmico	Fluxo térmico (w), calor (Q), energia (E), fluxo de calor (q), capacitância, resistência e temperatura (T)	Sólidos, fluídos e recipientes adiabáticos


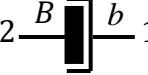
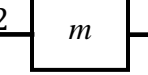
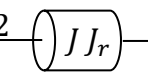
2.5.1. MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS

Elementos ideais básicos e suas equações para condições iniciais nulas.

Deslocamento Linear

ELEM	SÍMBOLO	EQUAÇÃO CONTÍNUA	
Mola		$f(t) = kx_{21}(t)$	$F(s) = kX_{21}(s)$
Freio		$f(t) = b\dot{x}_{21}(t)$	$F(s) = sbX_{21}(s)$
Massa		$f(t) = m\ddot{x}_{21}(t)$	$F(s) = s^2mX_{21}(s)$

Rotação

ELEM	SÍMBOLO	EQUAÇÃO CONTÍNUA	
Mola		$f(t) = k\theta_{21}(t)$	$F(s) = k\theta_{21}(s)$
Freio		$f(t) = b\dot{\theta}_{21}(t)$ $T_r(t) = B\dot{\theta}_{21}(t)$	$F(s) = sb\theta_{21}(s)$ $T_r(s) = sB\theta_{21}(s)$
Massa		$f(t) = mr\ddot{\theta}_{21}(t)$	$F(s) = s^2mr\theta_{21}(s)$
Inércia		$f(t) = J\ddot{\theta}_{21}(t)$ $T_r(t) = J_r\ddot{\theta}_{21}(t)$	$F(s) = s^2J\theta_{21}(s)$ $T_r(s) = s^2J_r\theta_{21}(s)$

r é o raio

T_r é o torque $\{T_r(t) = f(t) \times r\}$

Modelo Dinâmico de um Sistema

É o conjunto de equações diferenciais das variáveis que representam o comportamento dinâmico do sistema.

OBS: As integrais devem “desaparecer” do modelo de equações.

Modelagem de Pêndulo Simples

Regra de 3 simples:

Perímetro Ângulo

$2\pi L$ 2π

s θ

$$\therefore \boxed{s(t) = L\theta(t)}$$

A aceleração do pêndulo é dada por:

$$a = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \rightarrow \boxed{a(t) = L\ddot{\theta}(t)}$$

A força do pêndulo é dada por:

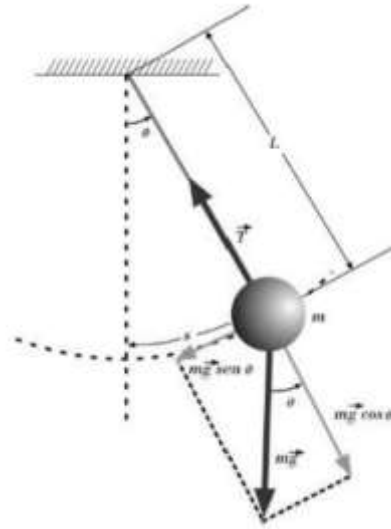
$$F(t) = ma(t) = mL\ddot{\theta}(t)$$

que é a soma vetorial de \vec{T} com $m\vec{g}$, assim:

$$F(t) = \vec{T}(t) + m\vec{g}$$

$$mL\ddot{\theta} = m\vec{g} \cos \theta - \{m\vec{g} \cos \theta + m\vec{g} \sin \theta\}$$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin \theta(t) = 0} \text{ (Equação de Mathieu)}$$



Para θ pequeno, $\sin \theta \cong \theta$, logo, $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \theta(t) = 0$, cuja solução da EDO é:

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \varphi \right),$$

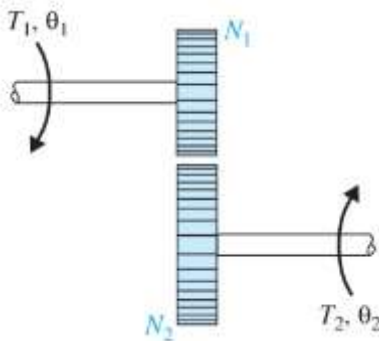
Assim, o período de oscilação do pêndulo é:

$$\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

O Torque é dado por:

$$T_r(t) = F(t) \times L = mL^2 \ddot{\theta}(t)$$

Modelagem de Caixa de Engrenagens



$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

onde r_1 e r_2 são os raios das engrenagens 1 e 2, respectivamente.

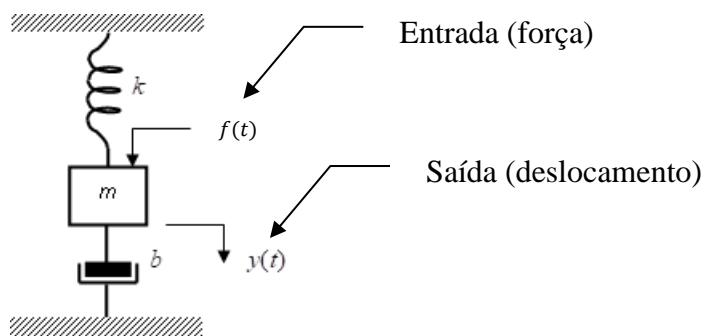
Exemplo 2 – Um sistema de amortecimento de impacto para veículos de passeio é mostrado na figura abaixo. Sabendo que o sistema possui uma mola e um dispositivo de freio para oscilação, obtenha:

- a representação esquemática do sistema,
- o seu modelo dinâmico,
- sua FT
- Simule a saída do sistema para o veículo passando por um quebra-molas com os seguintes parâmetros: $m = 1[kg]$, $b = 2[N \cdot s/m]$, $k = 1[N/m]$



SOLUÇÃO

a) Representação Esquemática do Sistema:



b) Modelagem Matemática Dinâmica:

$$\sum \text{forças} = 0$$

$$f(t) = ky(t) + b\dot{y}(t) + m\ddot{y}(t)$$

c) Função de Transferência:

No domínio de Laplace, considerando que o sistema se encontra em repouso com condições iniciais nulas.

$$F(s) = kY(s) + ms^2Y(s) + bsY(s)$$

$$F(s) = Y(s)(k + bs + ms^2)$$

$$\therefore \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

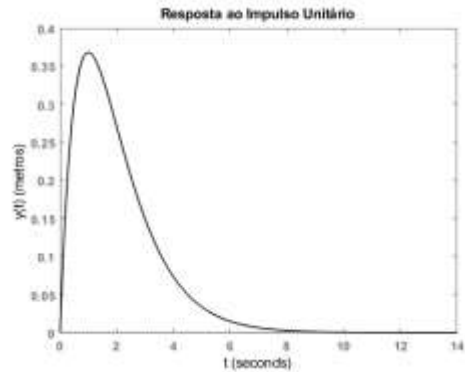
d) O modelo matemático fica:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} F(s) \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \Delta(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} U(s)$$

Se multiplicarmos a função por s e simularmos para uma entrada degrau, o resultado é a saída para a entrada ao impulso.

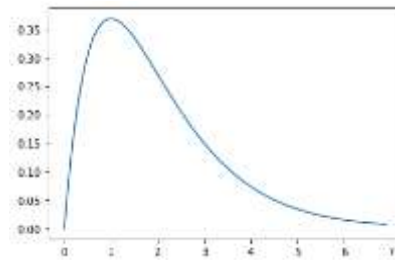
No Matlab:

```
Command Window
>> G = tf([1 0],[1 2 1])
G =
      s
-----
s^2 + 2 s + 1
Continuous-time transfer function.
>> step(G)
/ / >> |
```

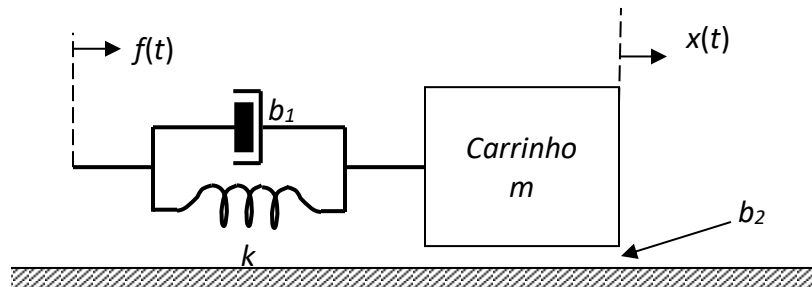


No Python:

```
2 import matplotlib.pyplot as plt # MATLAB plotting functions
3 from control.matlab import tf, step # MATLAB-like functions
4
5 num = [1., 0.]
6 den = [1., 2., 1.]
7
8 # Função de Transferência
9 sys1 = tf(num, den)
10
11 plt.figure(1)
12 yout, t = step(sys1)
13 plt.plot(t.T, yout.T)
14 plt.show(block=False)
```



Exemplo 3 – (DORF E2.20 Modificado) O sistema de posicionamento de alta precisão de uma peça deslizante está mostrado na figura abaixo. Determine a equação de comportamento dinâmico e sua função de transferência $X(s)/F(s)$ quando o coeficiente de atrito viscoso da haste acionadora é $b_1 = 1[N \cdot s/m]$, a constante de mola da haste acionadora é $k = 3[N/m]$, a massa é $m = 3[\text{kg}]$ e o atrito de deslizamento é $b_2 = 2[N \cdot s/m]$.



SOLUÇÃO

Os elementos b_1 e k representam uma deformação elástica amortecida do carrinho, pois $f(t)$ está aplicada no carrinho através desses elementos. Assim, a equação de Comportamento Dinâmico é:

$$\sum F = 0$$

$$f(t) = b_1 \dot{x}(t) + kx(t) + b_2 \dot{x}(t) + m\ddot{x}(t)$$

$$f(t) = b_1 \dot{x}(t) + kx(t) + b_2 \dot{x}(t) + m\ddot{x}(t)$$

Função de Transferência:

$$F(s) = b_1 sX(s) + kX(s) + b_2 sX(s) + ms^2X(s)$$

$$F(s) = X(s)[b_1 s + k + b_2 s + ms^2]$$

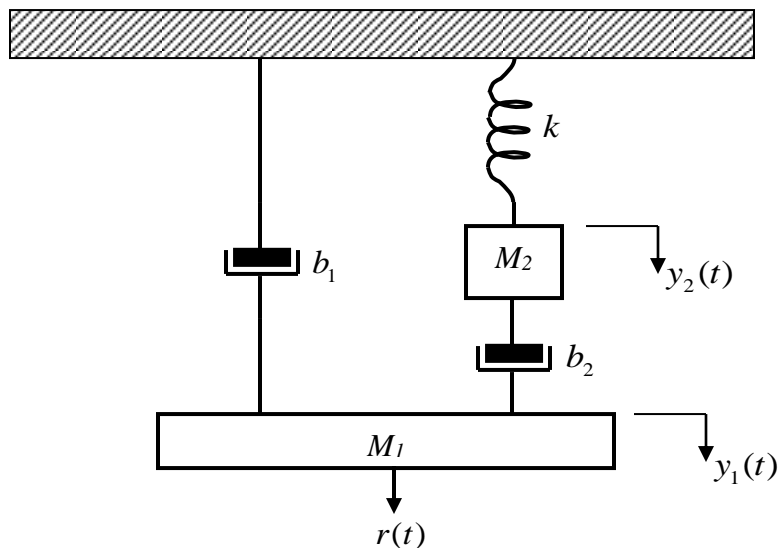
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + (b_1 + b_2)s + k}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{(b_1 + b_2)}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Assim,

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/3}{s^2 + s + 1}$$

Exemplo 4 – Um sistema de controle é mostrado na figura abaixo. Obtenha o Diagrama de Blocos desse sistema bem como suas funções de transferência. Considere $M_1 = 100[kg]$, $M_2 = 10[kg]$, $b_1 = 2[N \cdot s/m]$, $b_2 = 1[N \cdot s/m]$ e $k = 10 [N/m]$



SOLUÇÃO

Modelo Matemático

Modelagem do bloco M_1

$$\sum F_{M_1} = 0$$

$$r(t) = M_1 \ddot{y}_1(t) + b_1 \dot{y}_1(t) + b_2 \{\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\}$$

$$R(s) = \{M_1 s^2 + (b_1 + b_2)s\}Y_1(s) - b_2 s Y_2(s)$$

$$R(s) = (100s^2 + 3s)Y_1(s) - sY_2(s)$$

$$\frac{R(s)}{s} = (100s + 3)Y_1(s) - Y_2(s)$$

$$Y_2(s) = (100s + 3)Y_1(s) - \frac{R(s)}{s} \quad (i)$$

Modelagem do bloco M_2

$$\sum F_{M_2} = 0$$

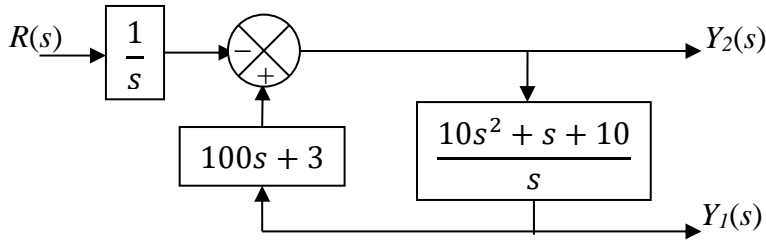
$$b_2 \{\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\} = M_2 \ddot{y}_2(t) + k y_2(t)$$

$$b_2 s Y_1(s) = \{M_2 s^2 + b_2 s + k\}Y_2(s)$$

$$s Y_1(s) = (10s^2 + s + 10)Y_2(s)$$

$$Y_1(s) = \left(\frac{10s^2 + s + 10}{s} \right) Y_2(s) \quad (ii)$$

O Diagrama de Blocos:



Para obtenção das funções de transferência $\frac{Y_1(s)}{R(s)}$ e $\frac{Y_2(s)}{R(s)}$ basta substituir a equação (ii) na equação (i) para $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$.

Substituindo em $Y_2(s)$ para obtenção da função de transferência $\frac{Y_1(s)}{R(s)}$:

$$\left\{ \frac{s}{10s^2 + s + 10} Y_1(s) \right\} = (100s + 3)Y_1(s) - \frac{R(s)}{s}$$

$$\left\{ \frac{s}{10s^2 + s + 10} - (100s + 3) \right\} Y_1(s) = -\frac{R(s)}{s}$$

$$\left\{ \frac{s - (100s + 3)(10s^2 + s + 10)}{10s^2 + s + 10} \right\} Y_1(s) = -\frac{R(s)}{s}$$

$$\left\{ \frac{1000s^3 + 130s^2 + 1002s + 30}{10s^2 + s + 10} \right\} Y_1(s) = \frac{R(s)}{s}$$

$$\frac{Y_1(s)}{R(s)} = \frac{10s^2 + s + 10}{s(1000s^3 + 130s^2 + 1002s + 30)}$$

Substituindo em $Y_1(s)$ para obtenção da função de transferência $\frac{Y_2(s)}{R(s)}$:

$$Y_2(s) = (100s + 3) \left\{ \frac{(10s^2 + s + 10)}{s} Y_2(s) \right\} - \frac{R(s)}{s}$$

$$sY_2(s) - (100s + 3)(10s^2 + s + 10)Y_2(s) = -R(s)$$

$$Y_2(s) \{s - (100s + 3)(10s^2 + s + 10)\} = -R(s)$$

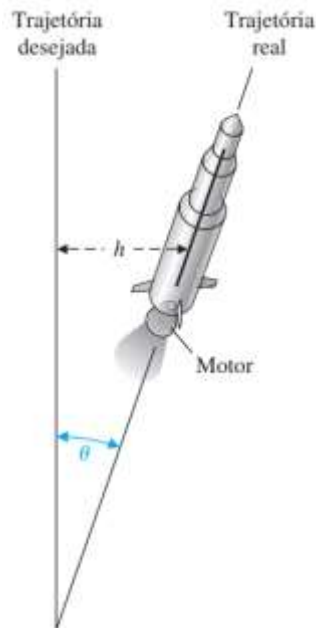
$$\frac{Y_2(s)}{R(s)} = -\frac{1}{s - (100s + 3)(10s^2 + s + 10)}$$

$$\frac{Y_2(s)}{R(s)} = \frac{1}{1000s^3 + 130s^2 + 1002s + 30}$$

Da teoria de Sinais e Sistemas, sabemos que se o sistema é LTI, então a equação característica deve ser a mesma para todo o sistema, independentemente da quantidade de entradas e saídas, assim,

$$\frac{Y_2(s)}{R(s)} = \frac{s}{s(1000s^3 + 130s^2 + 1002s + 30)}$$

Exemplo 5 – (Dorf P2.41 modificado) O controle lateral de um foguete toma a ação de controle para evitar o desvio lateral, h , de sua trajetória causado por um torque de distúrbio, T_d (veja figura). O foguete sobe com velocidade constante V no sentido de sua trajetória. O torque de controle, T_c , é proporcional ao desvio lateral. Obtenha o diagrama de blocos do modelo matemático linear do sistema.



SOLUÇÃO

A velocidade horizontal:

$$\dot{h} = V \sin \theta \cong V\theta \rightarrow \boxed{sH(s) = V\theta(s)}$$

$$\sum \text{forças} = 0$$

Assim,

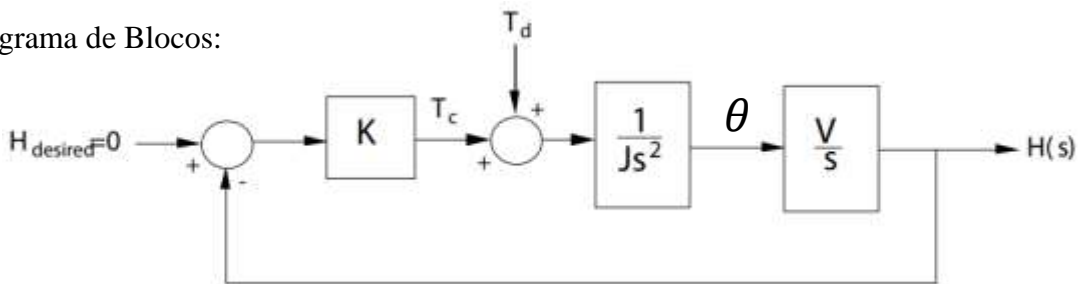
$$J\ddot{\theta} = T_c + T_d \rightarrow \boxed{Js^2\theta(s) = T_c(s) + T_d(s)}$$

onde, J é o momento de inércia do foguete.

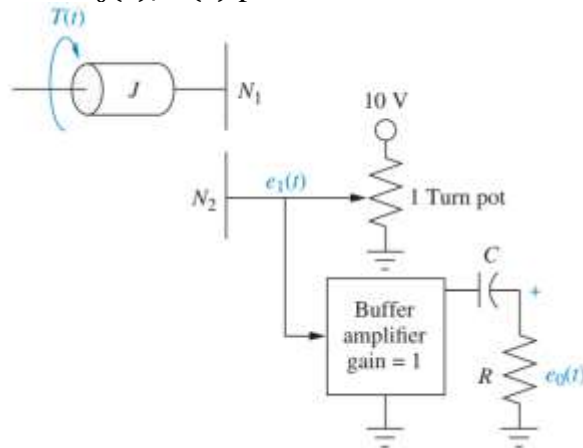
O torque de controle é proporcional ao desvio lateral, agindo em sentido contrário ao deslocamento, logo:

$$T_c = -Kh \rightarrow \boxed{T_c(s) = -KH(s)}$$

O Diagrama de Blocos:



Exemplo 6 – (Nise 5.20) Encontre $E_o(s)/T(s)$ para o sistema abaixo.



SOLUÇÃO

Para o sistema mecânico:

$$T(t) = J\ddot{\theta}_1(t) \rightarrow \frac{\theta_1(t)}{\theta_2(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

O torque aplicado ao potenciômetro através da caixa de engrenagens é:

$$T(t) = \frac{N_2}{N_1} J\ddot{\theta}_2(t) \rightarrow \boxed{T(s) = \frac{N_2}{N_1} Js^2\theta_2(s)}$$

Para o potenciômetro:

$$e_1 = \frac{\theta_2}{2\pi} 10 \rightarrow E_1(s) = \frac{5}{\pi} \theta_2(s)$$

Para o circuito:

$$e_0(t) = \frac{R}{R + X_c} e_1(t) \rightarrow E_0(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} E_1(s) \rightarrow \boxed{E_0(s) = \left(\frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \right) \frac{5}{\pi} \theta_2(s)}$$



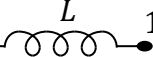
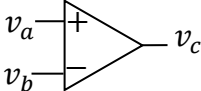
Assim,

$$\frac{E_0(s)}{T(s)} = \frac{\left(\frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \right) \frac{5}{\pi} \theta_2(s)}{\frac{N_2}{N_1} J s^2 \theta_2(s)} = \left(\frac{sRC}{sRC + 1} \right) \frac{5}{\pi} \frac{N_1}{N_2 J s^2} = \left(\frac{RC}{sRC + 1} \right) \frac{5N_1}{J\pi N_2 s} = \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \frac{5N_1}{J\pi N_2 s}$$

$$\boxed{\frac{E_0(s)}{T(s)} = \frac{\frac{5N_1}{J\pi N_2}}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)}}$$

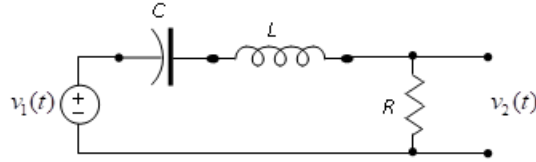
2.5.2. MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS

Elementos ideais básicos e suas equações.

ELEMENTO	SÍMBOLO	EQUAÇÃO CONTÍNUA	
Resistor	2  1	$v_{21}(t) = Ri(t)$	$V_{21}(s) = RI(s)$
Capacitor	2  1	$i(t) = C \frac{d}{dt} v_{21}(t)$	$I(s) = sCV_{21}(s)$
Indutor	2  1	$v_{21}(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$	$V_{21}(s) = sLI(s)$
Amplificador		$v_c(t) = K[v_a(t) - v_b(t)]$	$V_c(s) = K[V_a(s) - V_b(s)]$

OBS: O uso de impedâncias é válido somente quando as condições iniciais forem nulas.

Exemplo 7 – Um circuito de chaveamento é usado para converter um nível de tensão CC em uma saída de tensão CC. O circuito do filtro destinado a eliminar as frequências altas está mostrado na figura abaixo. Obtenha a equação que representa o comportamento dinâmico do sistema e a sua função de transferência $V_2(s)/V_1(s)$. Simule no Matlab a resposta de tensão do sistema para uma entrada de tensão em degrau unitário quando os componentes são: $R = 100[\Omega]$, $L = 2[mH]$ e $C = 1[\mu F]$.



SOLUÇÃO

Modelo Dinâmico:

$$v_1(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t)$$

Função de Transferência:

Levando o circuito para o domínio da frequência e fazendo o divisor de tensão:

$$V_2(s) = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} V_1(s)$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{sCR}{sCR + s^2CL + 1}$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s \frac{R}{L}}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{CL}}$$

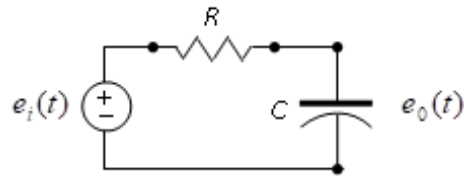
Para a simulação no Matlab,

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{5 \times 10^4 s}{s^2 + 5 \times 10^4 s + 5 \times 10^8}$$

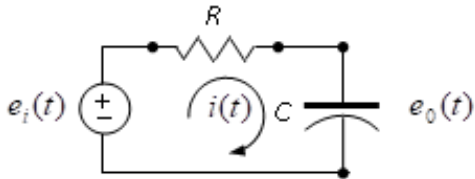
```
Command Window
>> G = tf([50000 1],[1 50000 500])
G =
      50000 s + 1
    -----
      s^2 + 50000 s + 500
Continuous-time transfer function.
>> step(G)
>> ylabel('V2(t) (volts)')
>> xlabel('t')
>> title('Resposta ao Degrau Unitário')
fig >> |
```



Exemplo 8 – Seja o circuito abaixo, obtenha o Diagrama de Blocos do Sistema e, a partir dele obtenha a função de transferência.



SOLUÇÃO



1º) Queda de tensão no resistor.

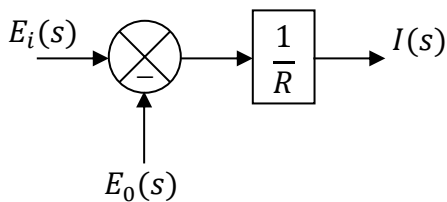
$$e_i(t) - e_o(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = \frac{e_i(t) - e_o(t)}{R}$$

Aplicando Laplace:

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

Diagrama de Blocos Parcial:

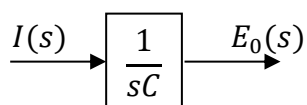


2º) Queda de tensão no capacitor.

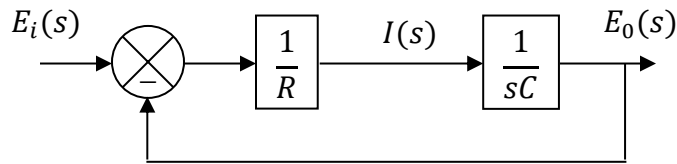
$$e_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Aplicando Laplace: $E_o(s) = \frac{I(s)}{sC}$

Diagrama de Blocos Parcial:



3º) O Diagrama de Blocos Completo



4º) A Função de Transferência

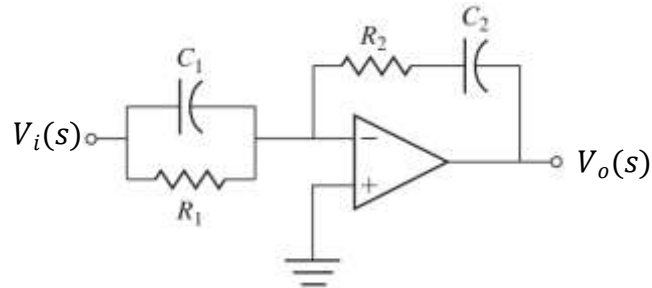
Da modelagem matemática de um sistema de malha fechada com realimentação negativa, temos:

$$FT = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

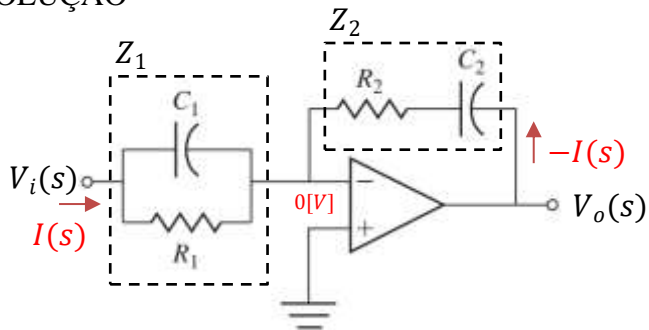
Do Diagrama de Blocos do Problema, $G(s) = \frac{1}{R} \times \frac{1}{sC}$, portanto, $G(s) = \frac{1}{sRC}$ e $H(s) = 1$.

Assim, a FT do sistema é: $\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{sRC}}{1 + \frac{1}{sRC} \times 1}$, portanto, $\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{sRC + 1}}$.

Exemplo 9 – Para o circuito abaixo, encontre o modelo matemático que o representa.



SOLUÇÃO



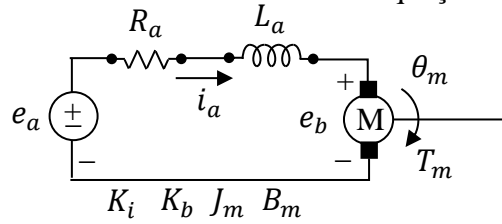
$$\frac{V_i(s)}{Z_1} = -\frac{V_o(s)}{Z_2} \rightarrow \boxed{\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{\left(\frac{1}{R_1} + sC_1\right)^{-1}} = -\frac{\frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2}}{\left(\frac{sR_1C_1 + 1}{R_1}\right)^{-1}} = -\frac{\frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2}}{\frac{R_1}{sR_1C_1 + 1}}$$

$$\boxed{\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{(sR_2C_2 + 1)(sR_1C_1 + 1)}{sR_1C_2}}$$

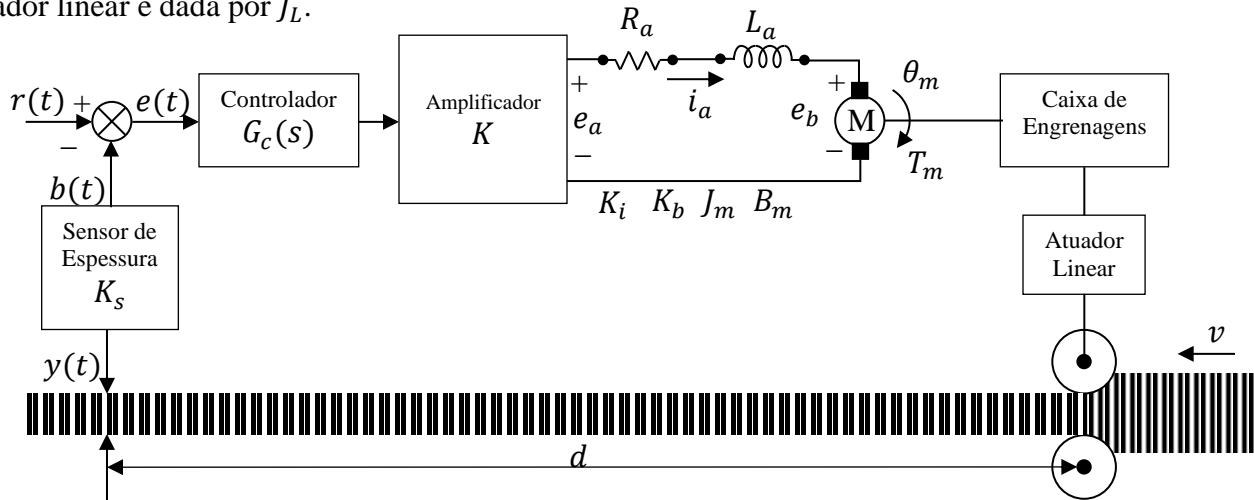
2.5.3. MODELAGEM DE SISTEMAS ELETROMECHANICOS

Motor de Corrente Contínua. Elementos ideais básicos e suas equações.



ELEMENTO	EQUAÇÃO CONTÍNUA	
Torque Gerado pelo Motor	$T_m(t) = K_i i_a(t)$	$T_m(s) = K_i I_a(s)$
Tensão da Força Contra Eletromotriz	$e_b(t) = K_b \frac{d}{dt} \theta_m(t)$	$E_b(s) = s K_b \theta_m(s)$
Torque da Inércia do Eixo do Motor	$T_j(t) = J_m \frac{d^2}{dt^2} \theta_m(t)$	$T_j(s) = s^2 J_m \theta_m(s)$
Torque do Atrito do Eixo do Motor	$T_b(t) = B_m \frac{d}{dt} \theta_m(t)$	$T_b(s) = s B_m \theta_m(s)$

Exemplo 10 – (Kuo 4.18 Adaptado) O diagrama esquemático de um laminador de placas a quente é mostrado na figura abaixo. A placa de aço passa por dois rolos compressores a uma velocidade v [m/s]. A distância entre os rolos e o sensor de espessura é de d [m], proporcionando um atraso de leitura após a deformação da placa. O ângulo de rotação do eixo do motor, θ_m , é convertido linearmente em deslocamento da distância entre os rolos de compressão, ou seja, $y_r(t) = n\theta_m(t)$, onde n é uma constante positiva dada em [m/rad]. A inércia equivalente da carga, representada pela caixa de engrenagens e atuador linear é dada por J_L .



OBS: O atraso é representado pela exponencial laplaciana do tempo de atraso: $e^{-(\text{atraso})s}$

- Obtenha as equações matemáticas que representem todo o modelo esquemático.
- Construa o Diagrama de Blocos Matemático do modelo esquemático.

SOLUÇÃO

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$b(t) = K_s y(t)$, onde $y(t)$ é o valor medido pelo sensor.

$$e_a(t) = K e(t) * g_c(t)$$

$$e_a(t) - R_a i_a(t) - L_a \frac{d}{dt} i_a(t) - e_b(t) = 0$$

$$e_b(t) = K_b \frac{d}{dt} \theta_m(t)$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t) = (J_m + J_L) \frac{d^2}{dt^2} \theta_m(t) + B_m \frac{d}{dt} \theta_m(t)$$

$$t_d = \frac{d}{v}$$

$y_r(t) = n \theta_m(t)$, onde $y_r(t)$ é o valor posicionado entre os rolos de compressão.

$$y(t) = y_r(t - t_d)$$

No domínio de Laplace:

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$B(s) = K_s Y(s)$$

$$E_a(s) = K E(s) G_c(s)$$

$$E_a(s) - E_b(s) = (R_a + sL_a) I_a(s)$$

$$E_b(s) = sK_b \theta_m(s)$$

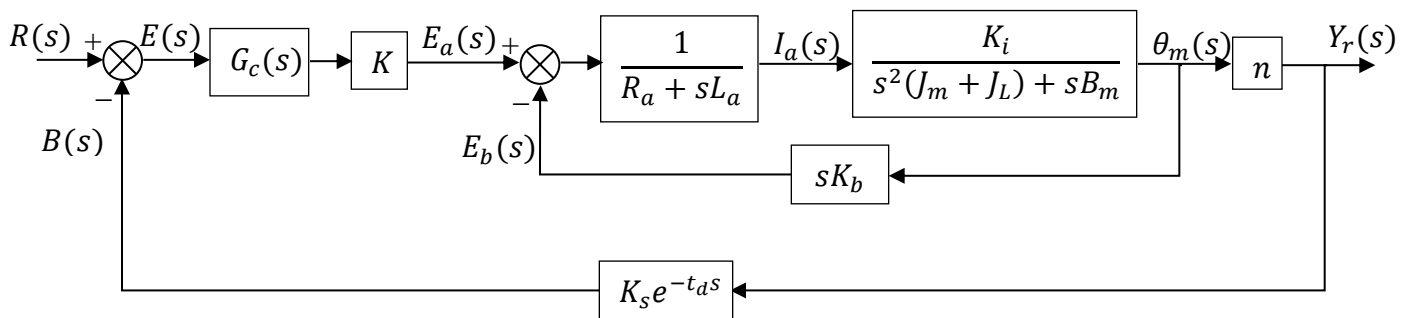
$$\theta_m(s) = \frac{K_i}{s^2(J_m + J_L) + sB_m} I_a(s)$$

$$t_d = \frac{d}{v}$$

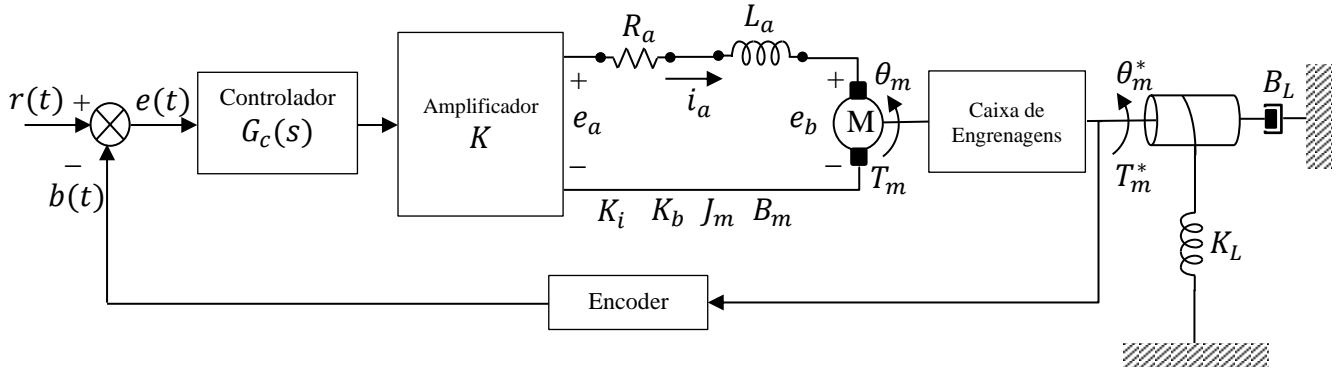
$$Y_r(s) = n \theta_m(s)$$

$$Y(s) = Y_r(s) e^{-t_d s}$$

Diagrama de Blocos



Exemplo 11 – O diagrama esquemático de um posicionador de porta é mostrado na figura abaixo. Um motor controla a abertura da porta posicionando-a em um ângulo desejado. O ângulo de rotação do eixo do motor, θ_m , é convertido pela caixa de engrenagens girando o eixo da porta que, por sua vez, está presa por uma mola localizada a 15cm do centro do eixo e um amortecedor para a porta não bater. A relação de transformação do torque da caixa de engrenagens é de 1:10. A inércia equivalente da carga, representada pelo cilindro e mola é dada por J_L . Com a porta fechada a mola não está tensionada. A equação do encoder é dada por $b(t) = K_e \theta_m(t)$.



- Obtenha as equações matemáticas que representem todo o modelo esquemático.
- Construa o Diagrama de Blocos Matemático do modelo esquemático.

SOLUÇÃO

- No Tempo:

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$$b(t) = K_e \theta_m^*(t)$$

$$e_a(t) = K e(t) * g_c(t)$$

$$e_a(t) - R_a i_a(t) - L_a \frac{d}{dt} i_a(t) - e_b(t) = 0$$

$$e_b(t) = K_b \frac{d}{dt} \theta_m(t)$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t)$$

$$\theta_m(t) = 10 \theta_m^*(t)$$

$$T_m^* = 10 \left(T_m - J_m \frac{d^2}{dt^2} \theta_m(t) - B_m \frac{d}{dt} \theta_m(t) \right)$$

$$T_m^* = J_L \frac{d^2}{dt^2} \theta_m^*(t) + B_L \frac{d}{dt} \theta_m^*(t) + T_{mola}$$

$$T_{mola} = r F_{mola} = 0,15 (K_L 0,15 \theta_m^*(t)) = 0,0225 K_L \theta_m^*(t)$$

$$T_m^* = J_L \frac{d^2}{dt^2} \theta_m^*(t) + B_L \frac{d}{dt} \theta_m^*(t) + 0,0225 K_L \theta_m^*(t)$$

Em Laplace:

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$B(s) = K_e \theta_m^*(s)$$

$$E_a(s) = KE(s)G_c(s)$$

$$I_a(s) = \frac{E_a(s) - E_b(s)}{R_a + sL_a}$$

$$E_b(s) = sK_b\theta_m(s)$$

$$\theta_m(s) = 10\theta_m^*(s)$$

$$T_m = K_i I_a(s)$$

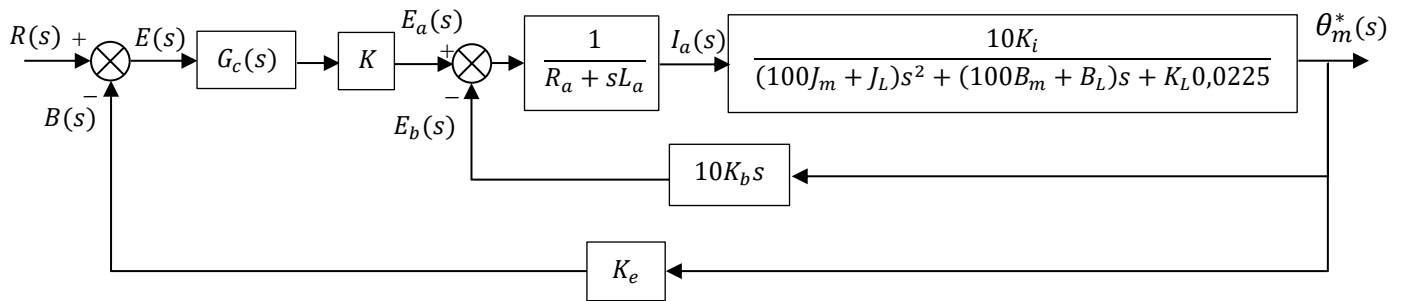
$$T_m^* = 10K_i I_a(s) - 10(J_m s^2 + B_m s)\theta_m(s) = (J_L s^2 + B_L s + K_L 0,0225)\theta_m^*(s)$$

$$10K_i I_a(s) - 100(J_m s^2 + B_m s)\theta_m^*(s) = (J_L s^2 + B_L s + K_L 0,0225)\theta_m^*(s)$$

$$10K_i I_a(s) = ((100J_m + J_L)s^2 + (100B_m + B_L)s + K_L 0,0225)\theta_m^*(s)$$

$$\theta_m^*(s) = \frac{10K_i}{(100J_m + J_L)s^2 + (100B_m + B_L)s + K_L 0,0225} I_a(s)$$

b) Diagrama:

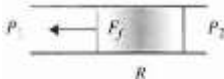


2.5.4. MODELAGEM DE SISTEMAS FLUIDICOS

Os sistemas fluidicos (líquidos ou gasosos) possuem natureza compressível (gases e alguns líquidos) e não compressíveis (líquidos). As variáveis utilizadas para a modelagem desses sistemas são:

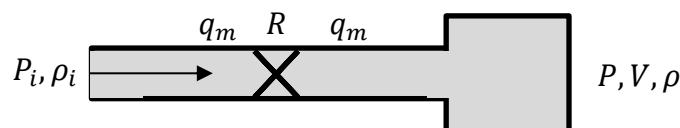
Grandeza	Símbolo	Unidade SI
Temperatura	T	$^{\circ}\text{C}$ ou $\text{K}(\text{Kelvin})$
Energia (Calor Armazenado)	Q	<i>Joule</i>
Vazão Volumétrica	q	m^3/s
Vazão Mássica	q_m	kg/s
Resistência Hidráulica	R	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{kg}$
Resistência Pneumática	R	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^3$
Capacitância Hidráulica	C	$\text{m} \cdot \text{s}^2$
Capacitância Pneumática	C	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{N}$
Indutância Fluida	L	kg/m^2
Constante de Tempo	$\tau = RC$	s
Massa Específica do Fluido	ρ	kg/m

A tabela abaixo mostra as equações úteis para a modelagem desses sistemas:

Grandeza	Modelo
Lei do gás perfeito	$PV = mR_gT$ R_g é a constante do gás
Fluxo de massa líquido (m)	$m(t) = \int q_m(t)dt = \rho(t)V(t)$
Vazão mássica (q_m)	$q_m(t) = \dot{m}(t) = \dot{\rho}(t)V(t) + \rho(t)\dot{V}(t)$ ρ é a massa específica do fluido
Vazão líquida volumétrica do fluido (q)	$q(t) = \dot{V}(t) = C\dot{P}(t)$
Resistência do fluxo líquido laminar (R) (fluido incompressível)	$R = \frac{\Delta P}{q_m}$  $\Delta P = P_1 - P_2$
Resistência do fluxo líquido turbulento (R_T) (fluido incompressível)	$R_T = \frac{\Delta P}{q_m^n}$ $R_T = \frac{n\Delta P}{q_m}$ (linearizado) n é um valor que depende do contorno usado
Resistência do fluxo gasoso laminar (R) (fluido compressível)	$R = \frac{\Delta P}{q_m}$
Resistência do fluxo gasoso turbulento (R_T) (fluido incompressível)	$R_T = \frac{\Delta P}{q_m^2}$
Força de resistência ao fluido (F_f) (fluido compressível)	$F_f = A\Delta P$ A é a área da seção transversal do tubo
Capacitância de um gás (C) (fluido compressivo)	$C = \frac{dm}{dP} = \frac{Vd\rho}{dP} = \frac{V\rho}{nP} = \frac{V}{nR_gT}$ n é o expoente politrópico
Capacitância de fluidos (C) (fluido incompressível)	$C = \frac{q(t)}{\dot{P}(t)}$ ou $C = \frac{q_m(t)}{\dot{P}(t)}$ ou $C = \frac{A}{g}$ g é a aceleração gravitacional
Pressão em um tanque de líquido (P_h)	$P_h = \rho gh$ h é a altura da coluna de líquido
Indutância fluida (ou inertância fluida) (L) (fluido incompressível)	$L = \frac{\rho \ell}{A}$ ℓ é o comprimento do tubo

Exemplo 12 – Considere o ar que passa através de uma válvula, com resistência de fluxo R , e entra em um sistema constituído de um recipiente rígido, conforme mostrado na figura abaixo. Neste caso a válvula é modelada como um orifício, a pressão de entrada é P_i , a vazão mássica é q_m , a massa específica do fluido antes de atingir a válvula é ρ_i , a massa específica do fluido no interior do recipiente é ρ , o volume do recipiente é V e a pressão no interior do recipiente é P .

- Obtenha a equação que representa o modelo do comportamento dinâmico deste sistema.
- Obtenha $P(s)/P_i(s)$.



SOLUÇÃO

a)

A pressão na entrada impulsiona a massa de ar (que é compressível, pois a massa específica varia com o tempo) para dentro do sistema, causando um aumento da pressão interna, logo, é preciso equacionar a taxa de variação da massa no recipiente.

A lei da conservação da massa estabelece que a massa que passa pela válvula é igual à massa que chega no interior do recipiente, assim,

$$\dot{m}_{válvula}(t) = \dot{m}_{recipiente}(t) \quad \rightarrow \quad q_{m_{válvula}}(t) = q_{m_{recipiente}}(t)$$

$$q_{m_{válvula}}(t) = \frac{\Delta P(t)}{R} \quad q_{m_{recipiente}}(t) = C \frac{dP(t)}{dt}$$

Portanto,

$$\frac{\Delta P(t)}{R} = C \frac{dP(t)}{dt}$$

Assim,

$$C \frac{dP(t)}{dt} = \frac{P_i(t) - P(t)}{R}$$

$$C \frac{dP(t)}{dt} + \frac{P(t)}{R} = \frac{P_i(t)}{R}$$

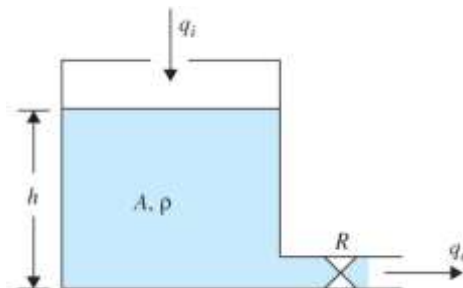
$$\boxed{RC\dot{P}(t) + P(t) = P_i(t)}$$

b)

$$RCsP(s) + P(s) = P_i(s)$$

$$\boxed{\frac{P(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}}$$

Exemplo 13 – Para o sistema de nível de líquido mostrado na figura abaixo um fluido incompressível entra no tanque a partir do topo e sai através de uma válvula na base. As vazões de entrada e de saída são q_i e q_o , respectivamente, e a válvula possui uma resistência R . O tanque tem área da seção transversal A e o líquido ocupa uma altura h no tanque. O líquido possui massa específica ρ . Encontre a equação do sistema para entrada q_i e saída h .



SOLUÇÃO

O fluido é incompressível, logo, $\rho = cte$.

Da lei de conservação das massas, $\dot{m}(t) = \rho \dot{V}(t) = \rho(q_i(t) - q_o(t)) = \rho q_i(t) - \rho q_o(t)$, onde $\rho q_i(t)$ é a vazão mássica de entrada e $\rho q_o(t)$ é a vazão mássica de saída. Como $\rho = cte$, a lei de conservação do volume também se aplica: $\dot{V}(t) = A\dot{h}(t) = q_i(t) - q_o(t)$. Assim, da lei de conservação das massas:

$$\rho \dot{V}(t) = \rho q_i(t) - \rho q_o(t) \quad (i)$$

A vazão mássica de saída é $\dot{m} = q_{mo}(t) = \frac{\Delta P(t)}{R} = \rho q_o(t)$, onde $\Delta P(t)$ é a variação da pressão entre a entrada e a saída da válvula.

$$\rho q_o(t) = \frac{\Delta P(t)}{R} = \frac{P_1(t) - P_2(t)}{R} = \frac{(P_{atm} + \rho g h(t)) - P_{atm}}{R}$$

$$\rho q_o(t) = \frac{\rho g h(t)}{R} \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i),

$$\rho \dot{V}(t) = \rho q_i(t) - \frac{\rho g h(t)}{R}$$

$$\rho A \dot{h}(t) + \frac{\rho g h(t)}{R} = \rho q_i(t)$$

$$\frac{RA}{R} \dot{h}(t) + \frac{g}{R} h(t) = q_i(t)$$

$$RCg\dot{h}(t) + gh(t) = Rq_i(t)$$

$$RC\dot{h}(t) + h(t) = \frac{R}{g} q_i(t)$$

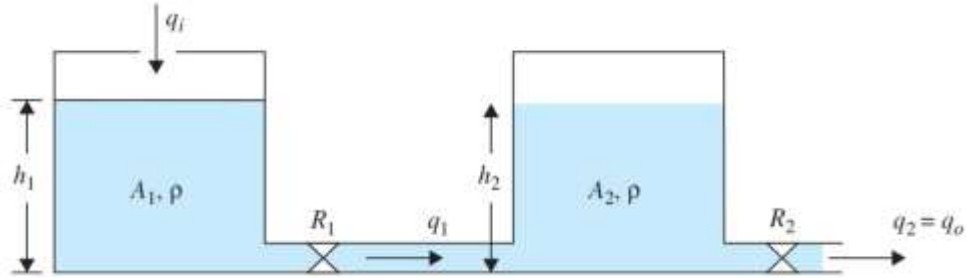
$$RCsH(s) + H(s) = \frac{R}{g} Q_i(s)$$

$$H(s)(RCs + 1) = \frac{R}{g} Q_i(s)$$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R/g}{RCs + 1}$$

$$\boxed{\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1/gC}{s + 1/RC}}$$

Exemplo 14 – Considere o sistema de dois tanques mostrado na figura abaixo, com h_1 e h_2 representando as alturas dos dois tanques, R_1 e R_2 as resistências das válvulas dos respectivos tanques e P_1 e P_2 as pressões nas bases dos tanques. A pressão na saída do tanque 2 é $P_3 = P_{atm}$. Obtenha o modelo de comportamento dinâmico desse sistema.



SOLUÇÃO

Do tanque 1,

$$V_1 = A_1 h_1 \rightarrow \dot{V}_1(t) = A_1 \dot{h}_1(t) \quad (i)$$

$$\dot{V}_1(t) = q_i(t) - q_1(t) \quad (ii)$$

Entre os dois tanques,

$$q_1(t) = \frac{P_1(t) - P_2(t)}{R_1} \quad (iii)$$

Substituindo (i) e (iii) em (ii) e arrumando,

$$A_1 \dot{h}_1(t) = q_i(t) - \frac{P_1(t) - P_2(t)}{R_1} = q_i(t) - \frac{P_{atm} + \rho g h_1(t) - (P_{atm} + \rho g h_2(t))}{R_1}$$

$$A_1 \dot{h}_1(t) + \frac{P_{atm} + \rho g h_1(t) - (P_{atm} + \rho g h_2(t))}{R_1} = q_i(t)$$

$$\boxed{A_1 \dot{h}_1(t) + \frac{\rho g}{R_1} h_1(t) - \frac{\rho g}{R_1} h_2(t) = q_i(t)}$$

Do tanque 2,

$$V_2 = A_2 h_2 \rightarrow \dot{V}_2(t) = A_2 \dot{h}_2(t) \quad (iv)$$

$$\dot{V}_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \quad (v)$$

Na saída do tanque 2,

$$q_2(t) = \frac{P_2(t) - P_3(t)}{R_2} \quad (vi)$$

Substituindo (iii), (iv) e (vi) em (v) e arrumando,

$$A_2 \dot{h}_2(t) = \frac{P_1(t) - P_2(t)}{R_1} - \frac{P_2(t) - P_3(t)}{R_2}$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) = \frac{P_{atm} + \rho g h_1(t) - (P_{atm} + \rho g h_2(t))}{R_1} - \frac{P_{atm} + \rho g h_2(t) - P_{atm}}{R_2}$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) = \frac{\rho g h_1(t) - \rho g h_2(t)}{R_1} - \frac{\rho g h_2(t)}{R_2}$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) = \frac{\rho g h_1(t)}{R_1} - \frac{\rho g h_2(t)}{R_1} - \frac{\rho g h_2(t)}{R_2}$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) - \frac{\rho g}{R_1} h_1(t) + \rho g \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_2(t) = 0$$

2.5.5. MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS

Em sistemas térmicos a variação da temperatura está associada aos eventos de troca de calor através da condução, convecção ou radiação. As variáveis utilizadas para a modelagem desses sistemas são:

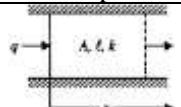
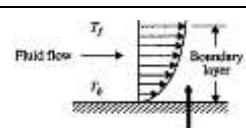
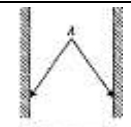
Grandeza	Símbolo	Unidade SI
Temperatura	T	$^{\circ}C$ ou K (Kelvin)
Energia (Calor Armazenado)	Q	Joule
Taxa de Fluxo de Calor	J/s ou W	m^3/s
Resistência Térmica	R	$^{\circ}C/W$
Capacitância Hidráulica	C	$J/kg \cdot ^{\circ}C$

Na **condução térmica** a transferência de calor ocorre, em geral, entre materiais sólidos através de sua superfície de contato.

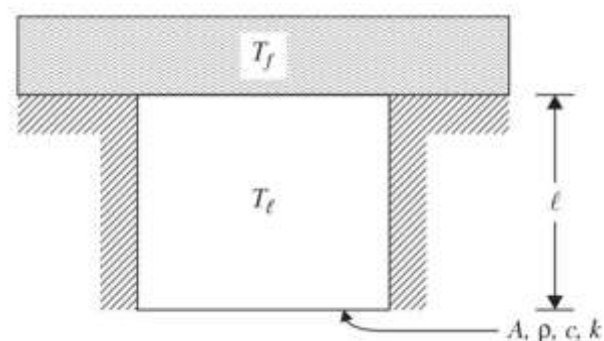
Na **convecção térmica**, a troca ocorre entre uma superfície sólida e um fluido exposto a ela. Na região de contato, a troca ocorre por condução, porém, o fluido muda sua posição de contato em função da sua mudança de temperatura.

Na **radiação térmica** a transferência de calor ocorre por radiação entre dois objetos separados.

As equações úteis são mostradas na tabela abaixo:

Grandeza		Modelo
Taxa de fluxo de calor (q)		$q(t) = \dot{Q}(t)$ Q é a energia térmica (ou o calor armazenado)
Capacitância térmica (C)		$C = \frac{q(t)}{\dot{T}(t)}$ $C = \rho c_p V$ T é a temperatura c_p é o calor específico do material ρ é a massa específica do material
Condução	Taxa de fluxo de calor (q)	$q = \frac{kA}{\ell} \Delta T = D_{1-2} \Delta T$  k é a condutibilidade térmica do material A é a área normal à direção x do fluxo de calor ΔT é a diferença entre a temperatura em $x = 0$ e $x = \ell$
	Resistência Térmica (R)	$R = \frac{\ell}{kA} = \frac{1}{D_{1-2}} = \frac{\Delta T}{q}$
Convecção	Taxa de fluxo de calor (q)	$q = hA\Delta T = D_0 \Delta T$  h é o coeficiente de transferência de calor convectivo A é a área da transferência de calor ΔT é a diferença entre a temp. de contorno e do fluido
	Resistência Térmica (R)	$R = \frac{1}{hA} = \frac{1}{D_0} = \frac{\Delta T}{q}$
Radiação	Taxa de fluxo de calor (q)	$q = \sigma A(T_1^4 - T_2^4)$  $\sigma = 5,667 \times 10^{-8} [W/m^2 K^4]$ A é a área normal ao fluxo de calor T_1 e T_2 são as temperaturas absolutas dos dois corpos

Exemplo 15 – A figura abaixo mostra um objeto sólido cúbico que é composto de um material que está em contato com um fluido em sua superfície superior, e está perfeitamente isolado em suas outras cinco superfícies. Obtenha a equação do processo de transferência de calor desse sistema.



SOLUÇÃO

A taxa de calor armazenado no sólido é,

$$q(t) = C\dot{T}_\ell(t)$$

A taxa de calor transferido do fluido por convecção é,

$$q(t) = hA(T_f(t) - T_\ell(t))$$

A equação de balanço de energia do sistema estabelece que o fluxo de calor q deve ser o mesmo entre o líquido e o sólido sem perdas. Assim,

$$C\dot{T}_\ell(t) = hA(T_f(t) - T_\ell(t)) = \frac{1}{R}(T_f(t) - T_\ell(t))$$

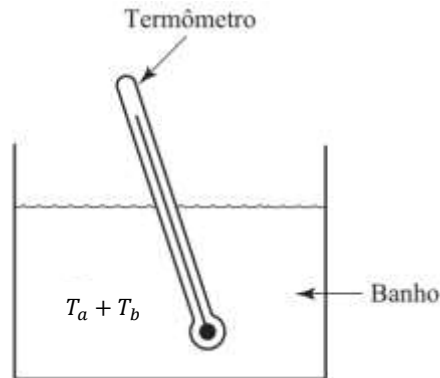
$$RC\dot{T}_\ell(t) + T_\ell(t) = T_f(t)$$

$$RCsT_\ell(s) + T_\ell(s) = T_f(s)$$

$$T_\ell(s)(RCs + 1) = T_f(s)$$

$$\boxed{\frac{T_\ell(s)}{T_f(s)} = \frac{1}{RCs + 1}}$$

Exemplo 16 – Considere um termômetro de mercúrio, inicialmente à temperatura ambiente constante, T_a , e um recipiente contendo um líquido com temperatura T_b , constante, acima a temperatura ambiente. Obtenha um modelo matemático dinâmico do sistema para quando o termômetro for imerso no banho.



SOLUÇÃO

Quando o termômetro for imerso no banho, sua temperatura instantânea será $T_a + T_t(t)$.

A capacitância e a resistência térmica do termômetro são:

$$C = \frac{q(t)}{\dot{T}(t)}; \quad R = \frac{\Delta T(t)}{q(t)}$$

Igualando as duas equações pelo fluxo de calor, $q(t)$,

$$q(t) = C\dot{T}(t) = \frac{\Delta T(t)}{R}$$

$$C \frac{d}{dt}(T_a + T_t(t)) = \frac{T_a + T_b - (T_a + T_t(t))}{R}$$

$$RC \frac{d}{dt}T_t(t) = T_b - T_t(t)$$

$$\boxed{RC\dot{T}_t(t) + T_t(t) = T_b}$$

2.6. DIAGRAMA DE FLUXO DE SINAIS (DFS)

O Diagrama de Fluxo de Sinais (DFS) ou Grafo de Fluxo de Sinais (GFS) é um diagrama que representa um conjunto de equações algébricas lineares simultâneas. Ele mostra o fluxo dos sinais de controle de um ponto a outro do sistema e contém as mesmas informações que o Diagrama de Blocos.

TERMINOLOGIA

Nó: É um ponto do diagrama que representa uma variável ou um sinal.

Transmitância: É o ganho entre dois nós e pode ser expresso em termos de funções de transferência entre os dois nós.

Ramo: É o segmento direcionado unindo os dois nós.

Nó de Entrada ou **Fonte:** É um nó que tem somente ramos de saída. Corresponde a uma variável independente.

Nó de Saída ou **Sorvedouro:** É um nó que tem somente ramos que chegam. Corresponde a uma variável dependente.

Nó Misto: Possui tanto ramos que chegam quanto ramos que saem.

Caminho: Percurso através dos ramos conectados no sentido das setas.

Malha: É um caminho fechado, ou seja, começa e termina no mesmo nó.

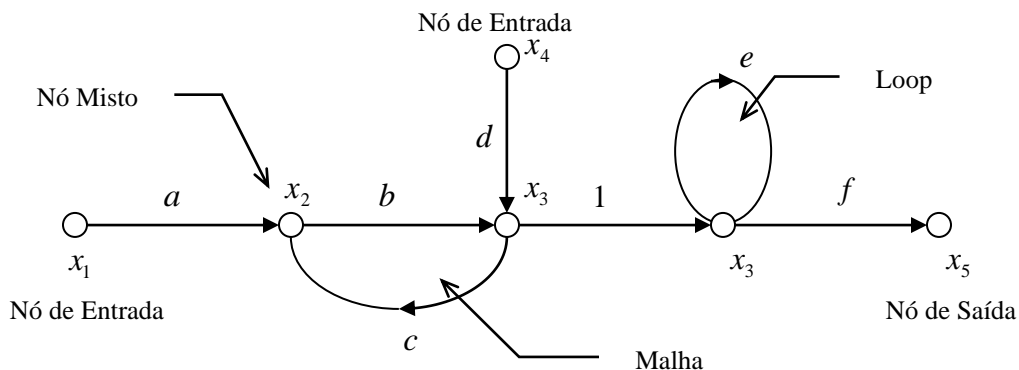
Loop: É uma malha que toca em apenas um nó.

Ganho de Malha: É o produto das transmitâncias dos ramos da malha.

Malhas que Não se Tocam: São as que não possuem nó em comum.

Caminho de Avanço: É o caminho que inicia em um nó fonte e termina em um nó sorvedouro sem passar mais de uma vez por algum nó.

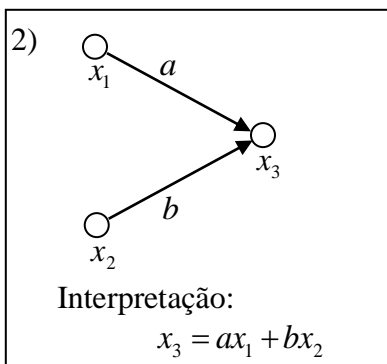
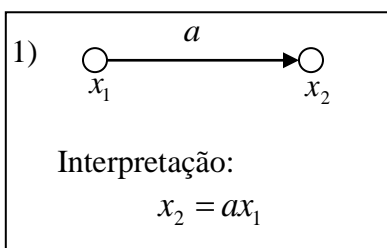
Ganho do Caminho de Avanço: É o produto das transmitâncias de seus ramos.



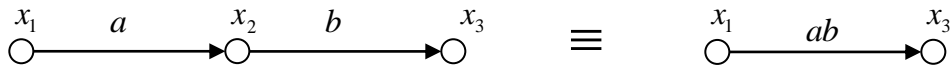
PROPRIEDADES

1. Um sinal percorre um ramo apenas no sentido da seta.
2. Um nó soma os sinais de todos os ramos que chegam e transmite a soma para todos os ramos que saem.
3. Para um dado sistema, o DFS não é único.

ÁLGEBRA DO DFS



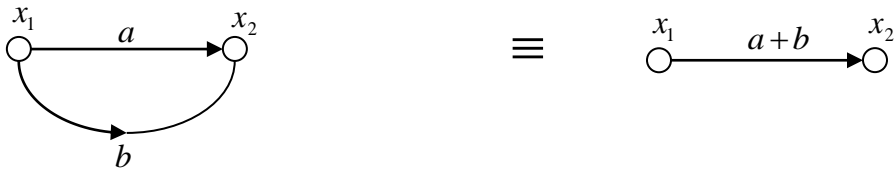
3)



Prova:

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 \\ x_3 &= bx_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= bx_2 = b(ax_1) \\ \therefore x_3 &= abx_1 \end{aligned}$$

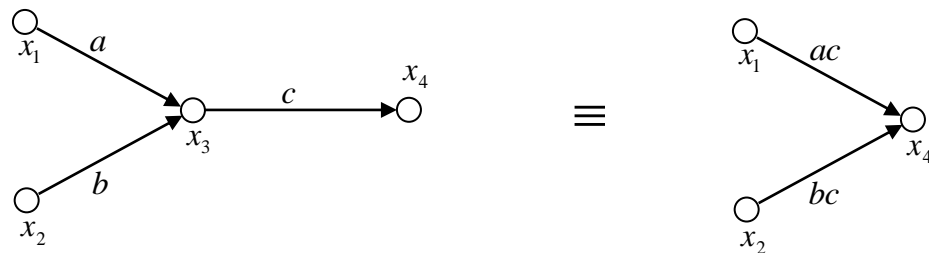
4)



Prova:

$$x_2 = ax_1 + bx_1 = (a+b)x_1$$

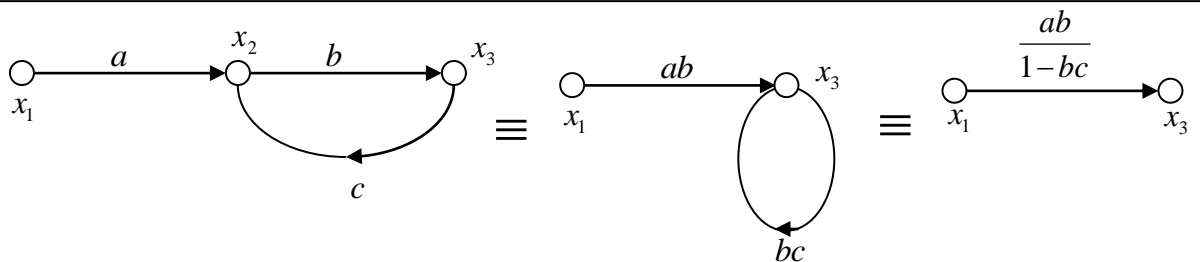
5)



Prova:

$$\begin{aligned} x_3 &= ax_1 + bx_2 \\ x_4 &= cx_3 \end{aligned} \Rightarrow x_4 = c(ax_1 + bx_2) = acx_1 + bcx_2$$

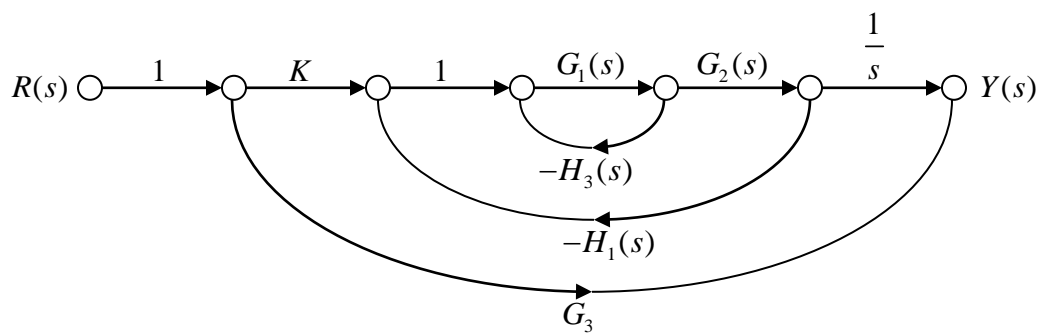
6)



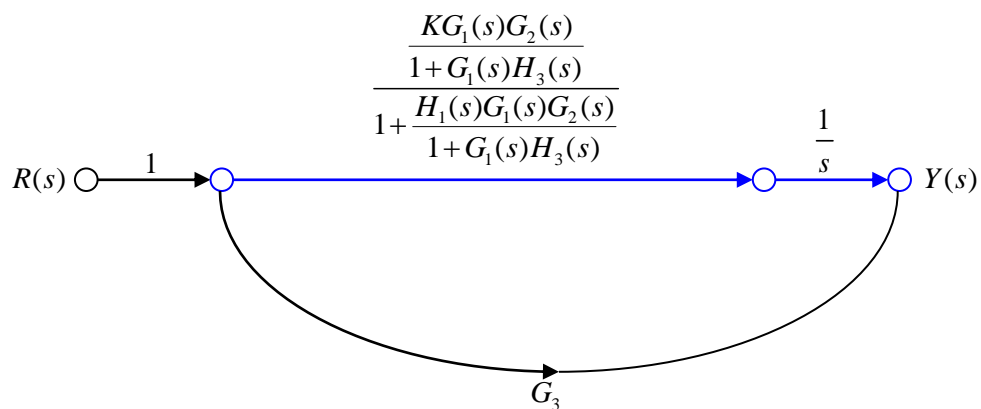
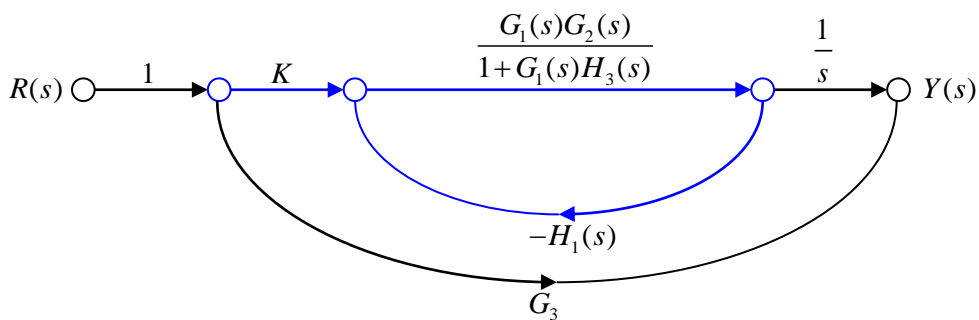
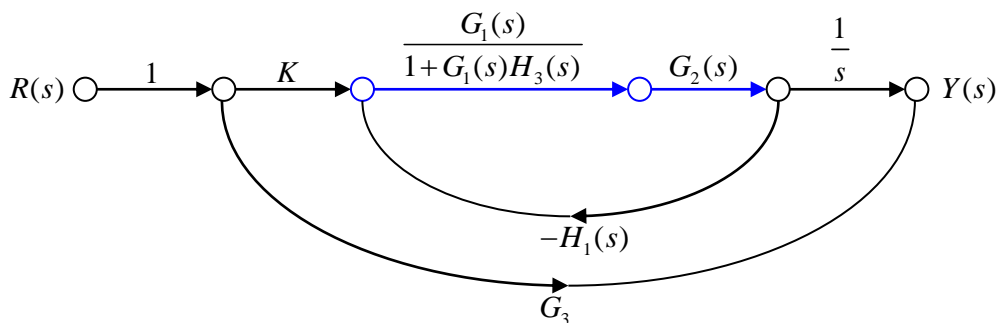
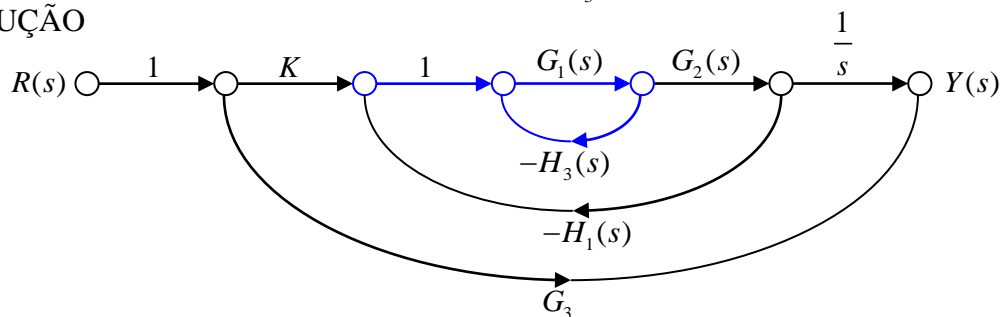
Prova:

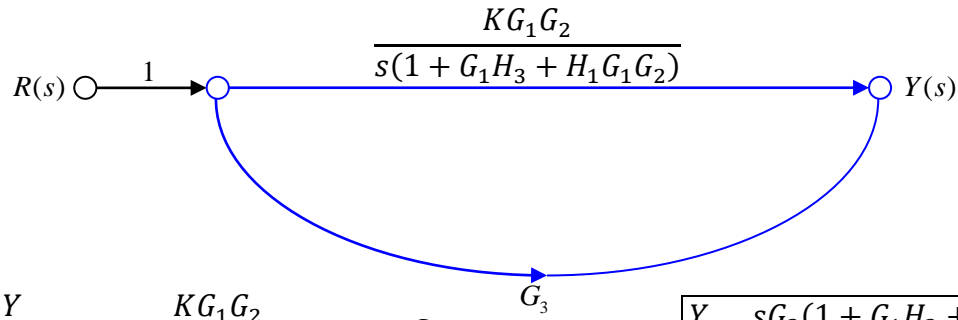
$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 + cx_3 \\ x_3 &= bx_2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{x_3}{b} = ax_1 + cx_3 \Rightarrow \boxed{x_3 = abx_1 + bcx_3} \Rightarrow x_3(1-bc) = abx_1 \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{ab}{1-bc} x_1}$$

Exemplo 17 – Simplifique o diagrama a seguir.



SOLUÇÃO





$$\frac{Y}{R} = \frac{KG_1G_2}{s(1 + G_1H_3 + H_1G_1G_2)} + G_3$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{sG_3(1 + G_1H_3 + H_1G_1G_2) + KG_1G_2}{s(1 + G_1H_3 + H_1G_1G_2)}$$

2.6.1. FÓRMULA DE GANHO DE MASON

Usada para a obtenção do **GANHO GERAL ENTRE DOIS NÓS** a partir do diagrama de fluxo de sinais.

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

Ganho do Caminho Direto de ordem k

Cofator do Caminho k

Determinante do Grafo

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{dfe} L_d L_e L_f + \dots$$

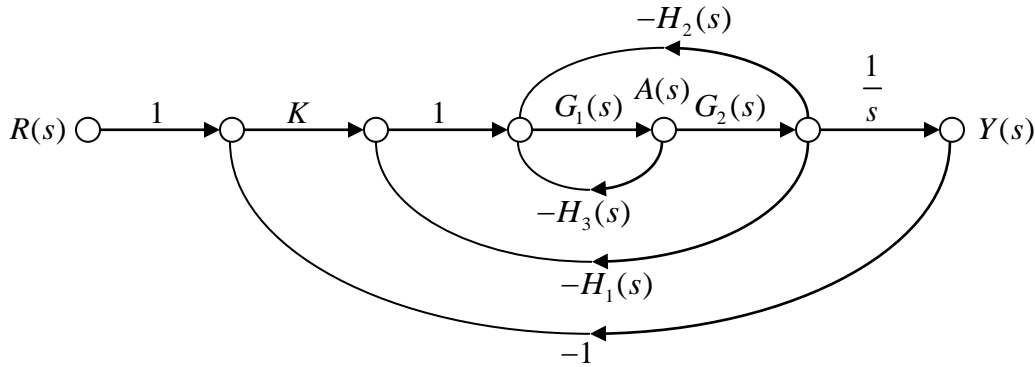
Soma dos ganhos das malhas.

Soma dos produtos dos ganhos das malhas de todas as possíveis combinações de 2 malhas que não se tocam.

Soma dos produtos dos ganhos das malhas de todas as possíveis combinações de 3 malhas que não se tocam.

Δ_k é obtido da mesma forma que Δ só que retirando todas as malhas que tocam o caminho direto P_k .

Exemplo 18 – O engenheiro de controle, N. Minorsky, no ano de 1930, projetou um sistema de direção de navio inovador para a marinha dos Estados Unidos. O sistema está representado pelo diagrama de fluxo de sinal mostrado abaixo, onde $Y(s)$ é o curso do navio, $R(s)$ é o curso desejado e $A(s)$ é o ângulo do leme. Determine a função de transferência $Y(s)/R(s)$ usando Mason.



SOLUÇÃO

$$FT = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k = \frac{P_1 \Delta_1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$$

$$\Delta = 1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 (H_1 + H_2) + \frac{K G_1 G_2}{s}$$

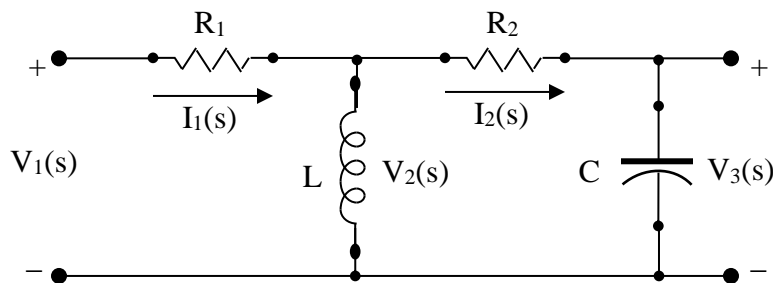
$$P_1 = \frac{K G_1 G_2}{s}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\therefore \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K G_1 G_2}{s}}{1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 (H_1 + H_2) + \frac{K G_1 G_2}{s}}$$

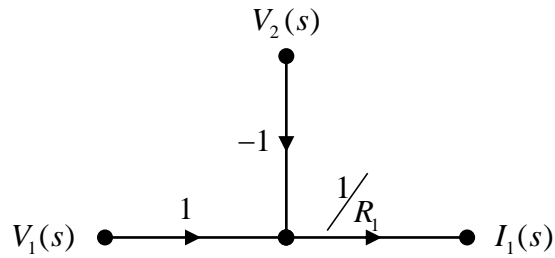
Exemplo 19 – Para o circuito da figura abaixo, elabore as seguintes tarefas:

- Construa o Diagrama de Fluxo de Sinais (DFS).
- Obtenha a FT usando Fórmula de Mason.

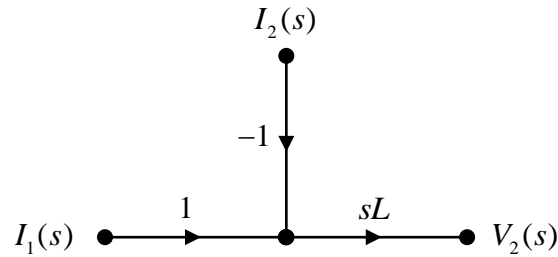


SOLUÇÃO

$$\boxed{\frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_1} = I_1(s)}$$



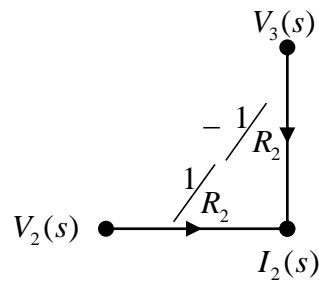
$$\boxed{V_2(s) = sL[I_1(s) - I_2(s)]}$$



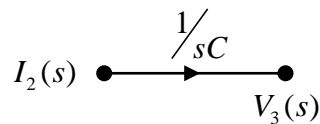
$$V_2(s) - R_2 I_2(s) = V_3(s)$$

$$R_2 I_2(s) = V_2(s) - V_3(s)$$

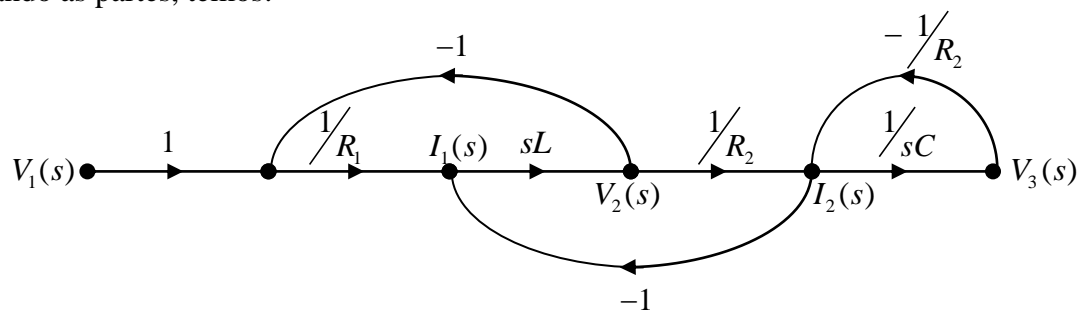
$$\boxed{I_2(s) = \frac{V_2(s)}{R_2} - \frac{V_3(s)}{R_2}}$$



$$\boxed{V_3(s) = \frac{I_2(s)}{sC}}$$



Juntando as partes, temos:



Obtenção da FT por Mason

$$\text{Caminhos Diretos: } P_1 = \frac{L}{CR_1R_2}$$

$$\text{Loops: } L_1 = -\frac{sL}{R_1} \quad L_2 = -\frac{sL}{R_2} \quad L_3 = -\frac{1}{sCR_2}$$

$$\text{Deltas: } \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_3 \quad \Delta_1 = 1$$

$$\text{A FT: } \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

$$\frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{L}{CR_1R_2}}{1 + \frac{sL}{R_1} + \frac{sL}{R_2} + \frac{1}{sCR_2} + \frac{sL}{R_1sCR_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{L}{CR_1R_2}}{\frac{sCR_1R_2 + s^2CLR_2 + s^2CLR_1 + R_1 + sL}{sCR_1R_2}}$$

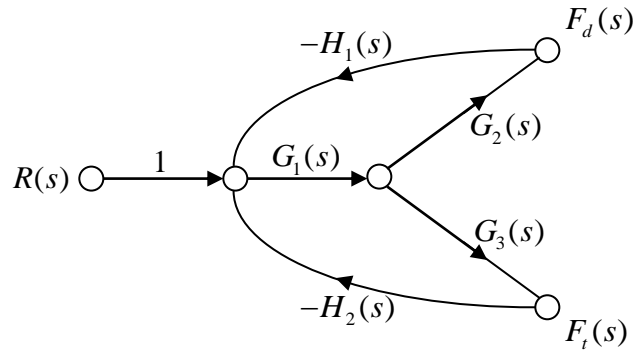
$$\frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{sL}{sCR_1R_2 + s^2CLR_2 + s^2CLR_1 + R_1 + sL}$$

$$\boxed{\frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{sL}{s^2LC(R_2 + R_1) + s(CR_1R_2 + L) + R_1}}$$

ou

$$\boxed{\frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{s \left(\frac{1}{C(R_2 + R_1)} \right)}{s^2 + s \left(\frac{CR_1R_2 + L}{LC(R_2 + R_1)} \right) + \left(\frac{R_1}{LC(R_2 + R_1)} \right)}}$$

Exemplo 20 – Um mecanismo antibloqueio do sistema de freio nas quatro rodas de um automóvel utiliza retroação eletrônica para controlar a força de frenagem em cada uma das rodas. Um diagrama de fluxo simplificado do sistema de controle de freio está mostrado na figura abaixo, em que $F_d(s)$ e $F_t(s)$ são, respectivamente, as forças de frenagem nas rodas dianteiras e traseiras e, $R(s)$ é a resposta desejada do automóvel em uma pista de rodovia. Determine $F_d(s)/R(s)$.



SOLUÇÃO

De acordo com o princípio da superposição, pode-se ignorar outras entradas/saídas no sistema para considerar a influência de uma entrada/saída específica. Essa característica do princípio é usada também com sinais de distúrbios. Ainda, a fórmula de Mason é do ganho total entre dois nós do grafo, assim.

Por Mason:

$$\frac{F_d(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2)$$

Existe 1 caminho direto

$$P_1 = G_1 G_2$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$L_1 = -G_1 G_2 H_1 \quad L_2 = -G_1 G_3 H_2$$

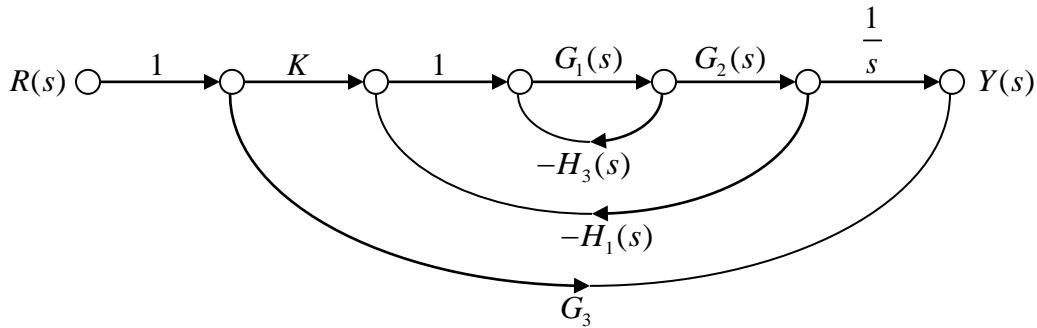
Assim

$$\frac{F_d(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k = \frac{1}{1 - (L_1 + L_2)} (P_1 \Delta_1)$$

$$\frac{F_d(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 - (-G_1 G_2 H_1 - G_1 G_3 H_2)}$$

$$\boxed{\frac{F_d(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 (G_2 H_1 + G_3 H_2)}}$$

Exemplo 21 – Obtenha a FT do grafo abaixo usando a fórmula de Mason.



SOLUÇÃO

$$FT = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{1 - (L_1 + L_2)}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$\Delta = 1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 H_1$$

$$P_1 = \frac{K G_1 G_2}{s}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_3$$

$$\Delta_2 = 1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 H_1$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{K G_1 G_2}{s} + G_3 (1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 H_1)}{1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 H_1}$$

$$\boxed{\frac{Y}{R} = \frac{G_3 (1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 H_1) s + K G_1 G_2}{s (1 + G_1 H_3 + G_1 G_2 H_1)}}$$

2.7. RESUMO DE FUNÇÕES DO MATLAB

Além do Simulink, as seguintes funções são úteis para uso no capítulo: *tf*, *step*, *impulse*, *lsim*, *feedback*.

2.8. RESUMO DE FUNÇÕES DO PYTHON

Funções úteis para uso no capítulo: *tf*, *step*, *impulse*, *lsim*, *plot*, *figure*.

2.9. LISTA DE EXERCÍCIOS

OGATA 4 Ed: A3.1 a A3.5, A3.14 a A3.20, A3.23 a A3.27, B3.1 a B3.3, B3.5 a B3.7, B3.13, B3.14, B3.16, B3.18 a B3.21, B3.25 a B3.29.

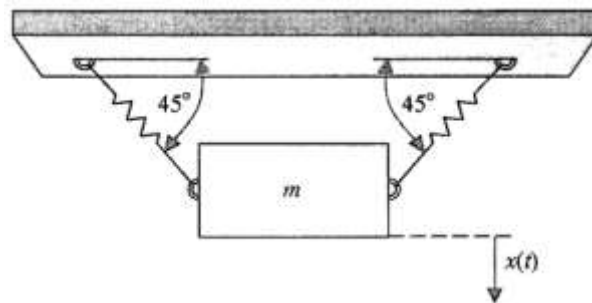
DORF 8 Ed: E2.1 a E2.3, E2.5 a E2.17, E2.20 a E2.26, E2.28 a E2.30, P2.1, P2.2(b), P2.3(b), P2.4, P2.5 a P2.18, P2.20 a P2.42, P2.44 a P2.49, P2.50(a,b,d), P2.51(a,b,d).

KUO:

2.10. EXERCÍCIOS EXTRAS RESOLVIDOS

(Dorf. P2.15 8ªed) Considere o sistema massa-mola da figura abaixo.

- Determine a equação diferencial que modela o comportamento dinâmico do movimento vertical da massa.
- Obter a resposta do sistema a um deslocamento inicial, $x(0) = 1$.



SOLUÇÃO

a)

A força de cada mola é dada por: $f_k(t) = kd(t)$; $d(t) = \frac{x(t)}{\sin(45)}$

A componente vertical da força de uma mola é: $f_{kx}(t) = f_k(t) \sin(45)$

Supondo um deslocamento inicial provocado por uma força, $f(t)$, e depois soltando a massa, ou seja, fazendo $f(t) = 0$ as duas forças que agem são a inércia do bloco e as duas molas.

$$f(t) = f_{inércia} + f_{molas} = 0$$

$$m\ddot{x}(t) + 2f_{kx}(t) = 0$$

$$m\ddot{x}(t) + 2f_k(t) \sin(45) = m\ddot{x}(t) + 2k \frac{x(t)}{\sin(45)} \sin(45) = m\ddot{x}(t) + 2kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + 2 \frac{k}{m} x(t) = 0$$

b)

Fazendo a Transformada de Laplace com condições iniciais,

$$s^2 X(s) - x(0)s - \dot{x}(0) + 2 \frac{k}{m} X(s) = 0$$

$$\left(s^2 + 2 \frac{k}{m}\right) X(s) = x(0)s + \dot{x}(0)$$

$$X(s) = \frac{x(0)s + \dot{x}(0)}{s^2 + 2 \frac{k}{m}}$$

$$X(s) = \left(\frac{s}{s^2 + 2 \frac{k}{m}} \right) x(0)$$

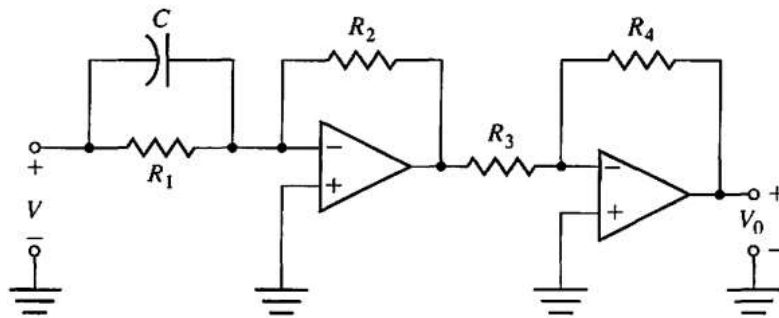
Da Tabela de Transformada Inversa, tem-se:

$$x(t) = x(0) \cos \left(\sqrt{2 \frac{k}{m}} t \right)$$

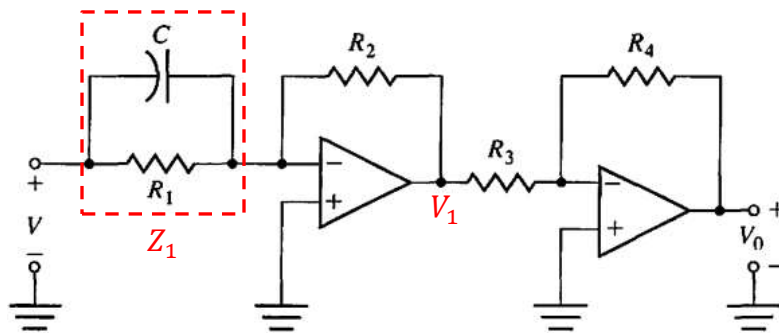
Para o deslocamento inicial $x(0) = 1$, a resposta do sistema é:

$$x(t) = \cos \left(\sqrt{2 \frac{k}{m}} t \right)$$

(Dorf E2.28 12ed) Determine a função de transferência para o circuito abaixo. Considere $R_1 = 167(\text{k}\Omega)$, $R_2 = 240(\text{k}\Omega)$, $R_3 = 1(\text{k}\Omega)$, $R_4 = 100(\text{k}\Omega)$ e $C = 1(\mu\text{F})$. Considere o amplificador ideal.



SOLUÇÃO



Do exemplo 8 temos:

$$\frac{V_0}{V_1} = -\frac{R_4}{R_3}$$

$$\frac{V_1}{V} = -\frac{R_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{\frac{R_1/sC}{R_1 + \frac{1}{sC}}} = -\frac{R_2}{\frac{R_1}{R_1sC + 1}} = -\frac{R_2R_1sC + R_2}{R_1}$$

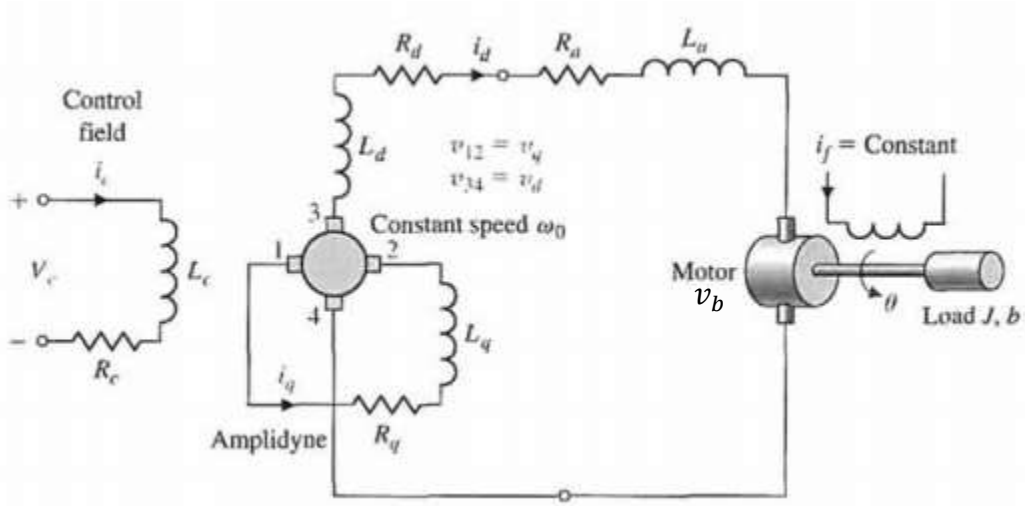
$$\frac{V_0}{V} = \frac{V_0}{V_1} \times \frac{V_1}{V} = -\frac{R_4}{R_3} \times -\frac{R_2R_1sC + R_2}{R_1} = \frac{R_2R_1R_4sC + R_2R_4}{R_1R_3}$$

$$\boxed{\frac{V_0}{V} = \frac{R_2R_4C}{R_3}s + \frac{R_2R_4}{R_1R_3}}$$

Substituindo os valores:

$$\boxed{\frac{V_0}{V} = 24s + 144}$$

(Dorf P2.11 12ed) Amplificadores rotativos são frequentemente usados em sistemas eletromecânicos que requeiram grandes amplificações de potência. O amplidíne é um amplificador de potência rotativo. Na figura abaixo são mostrados um amplidíne e um servomotor. Obtenha $\theta(s)/V_c(s)$ e o diagrama de blocos do sistema. Considere $v_d(t) = k_2 i_q(t)$ e $v_q(t) = k_1 i_c(t)$.



SOLUÇÃO

$$V_c(s) - (R_c + sL_c)I_c(s) = 0 \rightarrow I_c(s) = \frac{1}{R_c + sL_c} V_c(s)$$

$$V_{12}(s) - (R_q + sL_q)I_q(s) = 0 \rightarrow I_q(s) = \frac{1}{R_q + sL_q} V_{12}(s), \quad V_{12}(s) = V_q(s) = k_1 I_c(s)$$

$$\frac{V_{34}(s) - V_b(s)}{R_d + R_a + s(L_d + L_a)} = I_d(s) \rightarrow V_{34}(s) = V_d(s) = k_2 I_d(s)$$

$$V_b(s) = k_3 s \theta(s)$$

$$T_m(s) = k_m I_d(s)$$

$$T_m(s) - bs\theta(s) - Js^2\theta(s) = 0 \rightarrow \theta(s) = \frac{1}{bs + Js^2} T_m(s)$$

Arrumando na sequência:

$$I_c(s) = \frac{1}{R_c + sL_c} V_c(s)$$

$$V_q(s) = k_1 I_c(s)$$

$$I_q(s) = \frac{1}{R_q + sL_q} V_q(s)$$

$$V_d(s) = k_2 I_q(s)$$

$$\frac{V_d(s) - V_b(s)}{R_d + R_a + s(L_d + L_a)} = I_d(s)$$

$$V_b(s) = k_3 s \theta(s)$$

$$T_m(s) = k_m I_d(s)$$

$$\theta(s) = \frac{1}{bs + Js^2} T_m(s)$$

