CAP 5

ANÁLISE DA RESPOSTA TRANSITÓRIA
E DE REGIME ESTACIONÁRIO (ANALÓGICO)

SUMÁRIO

5.1. INTRODUÇÃO

Na análise e no projeto de sistemas de controle o uso de sinais de teste na entrada permite efetuar a comparação de desempenho entre diferentes sistemas. Os critérios de projeto têm como base a resposta a esses sinais ou a resposta dos sistemas às mudanças das condições iniciais (sem qualquer sinal de teste).

A resposta temporal, $c(t)$, de um sistema de controle é dada pela equação:

$$c(t) = \underbrace{c_{tr}(t)}_{\text{Resposta Transitória}} + \underbrace{c_{ss}(t)}_{\text{Resposta Estacionária}}$$

A resposta transitória permite analisar o comportamento dinâmico do sistema às variações do sinal de entrada, enquanto a resposta estacionária permite verificar a precisão através do valor do erro estacionário.

Os principais sinais de teste normalmente empregados são as funções: impulso, degrau, rampa, senoidais e parábola de aceleração.

A escolha do sinal de teste depende do comportamento da entrada, a que o sistema será submetido com maior frequência, sob condições normais de operação.

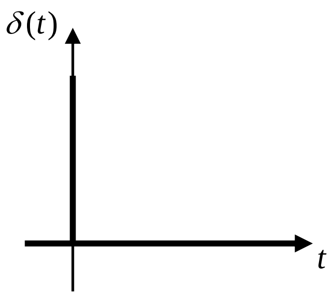
5.2. SINAIS DE TESTE

São utilizados com objetivo de testar os sistemas de controle quanto à sua natureza de resposta a determinados estímulos.

5.2.1. FUNÇÃO IMPULSO UNITÁRIO, $\boldsymbol{\delta(t)}$

Permite avaliar o sistema quando submetido a entradas abruptas instantâneas. A função impulso também é utilizada quando se quer determinar a função de transferência de um sistema de controle LIT.

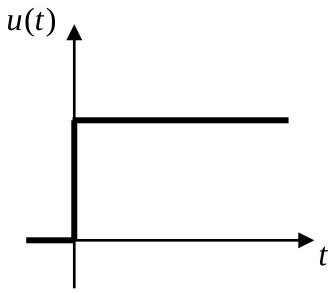
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad L\{\delta(t)\} = 1$$



5.2.2. FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO, $\boldsymbol{u(t)}$

Permite avaliar o sistema quando submetido a variações abruptas e sustentadas da entrada.

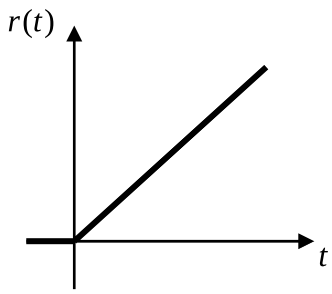
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$



5.2.3. FUNÇÃO RAMPA, $\boldsymbol{r(t)}$

Permite avaliar o sistema quando submetido a variações graduais da entrada.

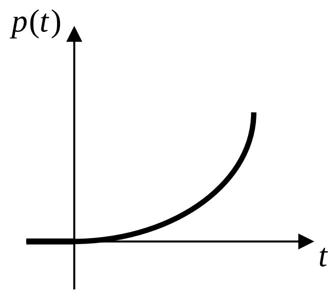
$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s^2}$$



5.2.4. FUNÇÃO POLINOMIAL, $\boldsymbol{p(t)}$

Permite avaliar o sistema quando submetido à aceleração da entrada.

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\{p(t)\} = \frac{1}{s^3}$$



5.2.5. FUNÇÃO SENO

Permite avaliar o sistema quando submetido a diferentes frequências do sinal de entrada. Será estudada no capítulo de resposta em frequência de sistemas de controle – Sistemas Realimentados.

OBS: Existe uma relação entre os sinais de teste dado por suas derivadas.

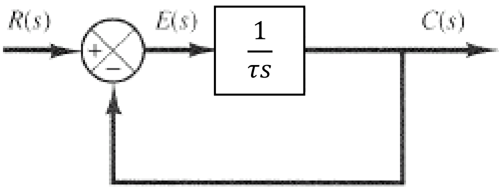
$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t) \quad \text{e} \quad \frac{d^2r(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

5.3. RESPOSTA DE SISTEMAS DE 1ª ORDEM

Um sistema de 1ª ordem possui a seguinte FTMA

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s}$$

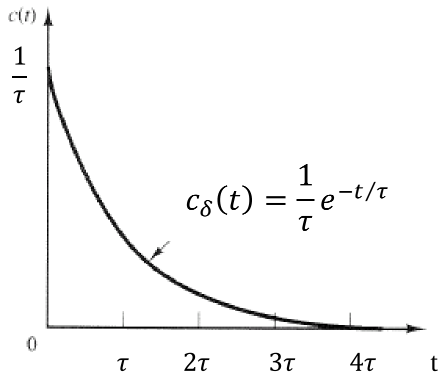
Um sistema de 1ª ordem com realimentação unitária possui a FTMF dada por:



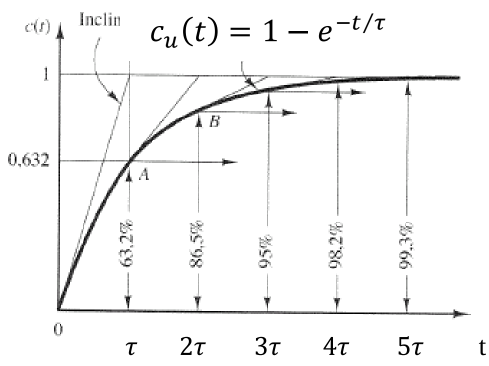
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

A resposta de sistemas de 1ª ordem de malha fechada é obtida substituindo $R(s)$ pelos sinais de controle apresentados acima.

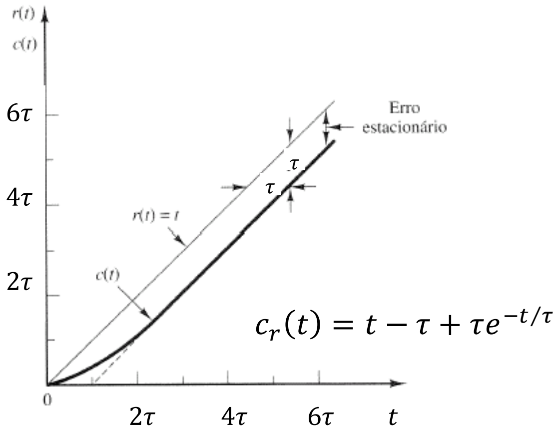
5.3.1. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO IMPULSO



5.3.2. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO DEGRAU



5.3.3. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO RAMPA



OBS: A resposta à derivada de um sinal de entrada é igual à derivada da resposta do sistema ao sinal original (sem derivar). Isso é válido para qualquer sistema LIT.

$$\frac{d}{dt}\{c_r(t)\} = c_u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\{c_u(t)\} = c_\delta(t)$$

Exemplo 1 – Um termômetro é imerso em um líquido à temperatura constante. O termômetro atinge a marca de 98% do valor da temperatura do líquido após 1 minuto.

a. Supondo o termômetro um sistema linear realimentado, determine a sua constante de tempo.
b. Se a temperatura do líquido variar linearmente a uma taxa de 10ºC/min, qual será o erro apresentado pelo termômetro?

SOLUÇÃO

a. A excitação de entrada no sistema (termômetro) é em degrau (líquido à temperatura constante). Podemos considerar o sistema como realimentado, ou seja, a temperatura do termômetro influencia na temperatura do líquido, mesmo que de forma desprezível. O valor de 98% da resposta ocorre para aproximadamente 4τ, conforme o gráfico de resposta ao degrau. Como o tempo até esse patamar é de 1 minuto (60 segundos), então:

$$4\tau = 60$$

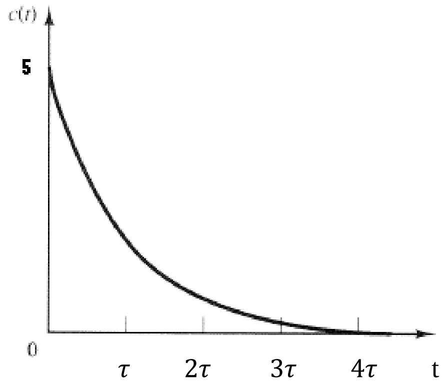
$$\boxed{\tau = 15\ seg}$$

b. Nesse caso a excitação do sistema é em rampa, pois o líquido tem sua temperatura variando linearmente a 10º por minuto.

   Pelo gráfico da resposta à rampa de um sistema de 1ª ordem o erro estacionário é $e_{ss} = \tau$. Assim, em um minuto (60 [s]), $\tau = 15[s]$ representa 25%, portanto, se o sistema varia a temperatura a uma taxa de 10º por minuto, então, 25% disso é o erro estacionário.

$$\boxed{e_{ss} = \frac{2{,}5°}{min}}$$

Exemplo 2 – Obtenha a função de transferência de malha fechada e a equação da curva de resposta do sistema de 1ª ordem cuja saída à uma excitação de um sinal de controle está representada na figura abaixo.



SOLUÇÃO

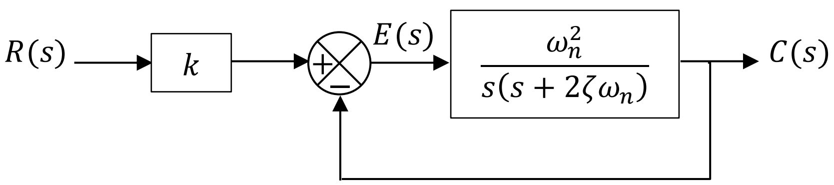
O gráfico representa a resposta à excitação pela função impulso, logo, a constante de tempo será $\frac{1}{\tau} = 5$, portanto a $FTMF = \frac{1}{\tau s+1} = \frac{1}{0{,}2s+1}$ e equação da curva de resposta é $c(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} = 5e^{-5t}$.

5.4. RESPOSTA DE SISTEMAS DE 2ª ORDEM

Um sistema de 2ª ordem possui a seguinte FTMA

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

onde, ζ é a constante de amortecimento e ω_n é a frequência natural não amortecida do sistema.
Um sistema de 2ª ordem com realimentação unitária possui a FTMF dada por:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se $\zeta < 0$, os polos estão no semiplano direito e o sistema é INSTÁVEL.
Se $\zeta = 0$, a resposta é oscilatória sem decaimento (não há amortecimento). Os dois polos estão sobre o eixo imaginário, e o sistema é MARGINALMENTE ESTÁVEL.

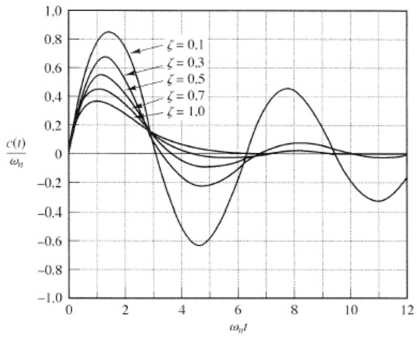
Se $0 < \zeta < 1$, a resposta é oscilatória subamortecida. Os dois polos estão no semiplano esquerdo do plano complexo.

Se $\zeta = 1$, a resposta não oscila e o sistema é criticamente amortecido. Os dois polos são reais negativos e iguais a ω_n.

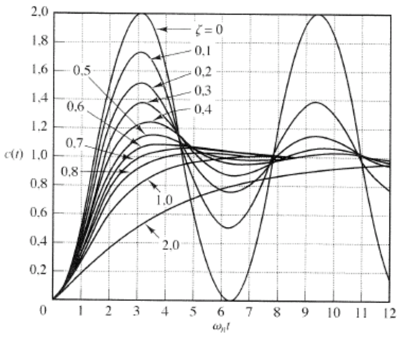
Se $\zeta > 1$, a resposta não oscila e o sistema é superamortecido. Os dois polos são reais negativos e diferentes.

A resposta de sistemas de 2ª ordem é obtida substituindo $R(s)$ pelos sinais de controle apresentados acima.

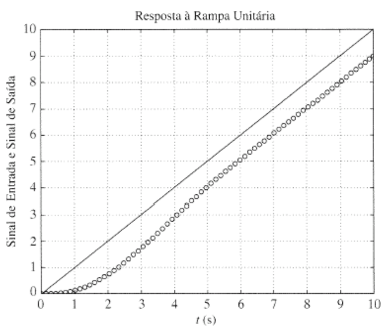
5.4.1. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO IMPULSO



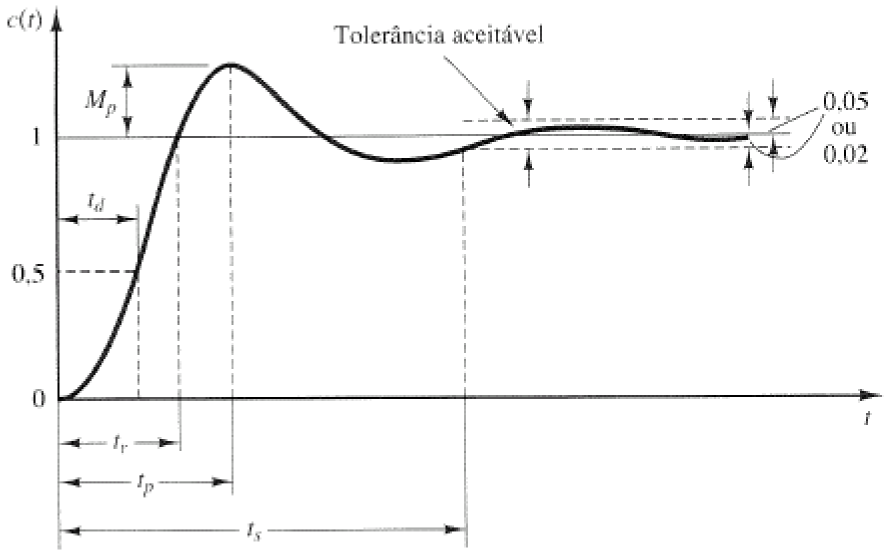
5.4.2. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO DEGRAU



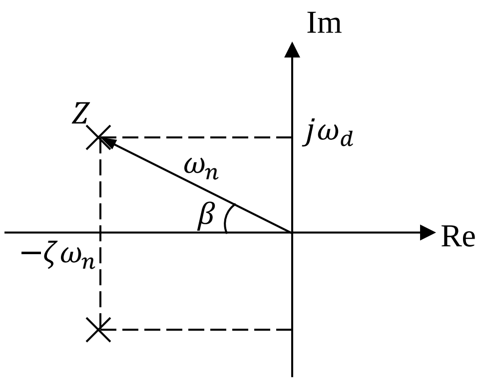
5.4.3. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO RAMPA



5.4.4. ANÁLISE DA RESPOSTA À EXCITAÇÃO EM DEGRAU



t_d - Tempo de Atraso.
t_r - Tempo de Subida.
t_p - Tempo de Pico.
t_s - Tempo de Acomodação (ou Tempo de Assentamento ou Regime)
M_p - Máximo Sobressinal (ou Máxima Ultrapassagem ou *Overshoot*)



Considerando a entrada um degrau UNITÁRIO, e o modelo padrão de sistema de 2ª ordem, temos:

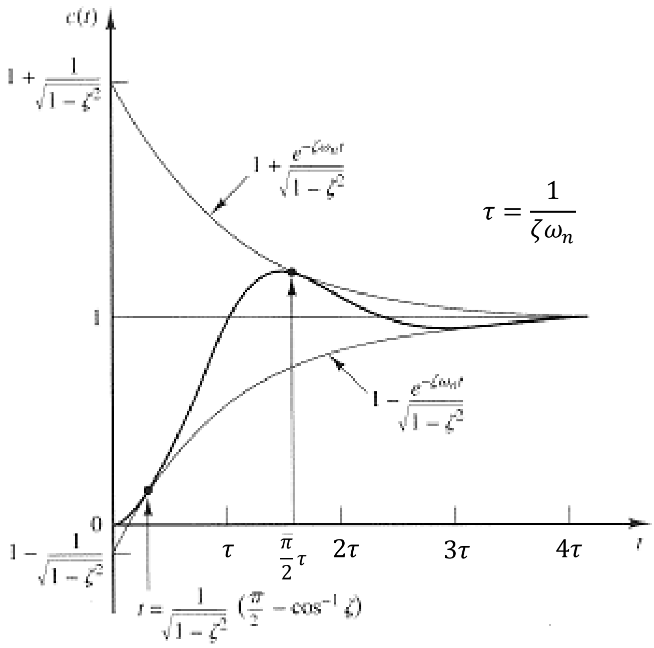
t_s	t_p	t_r	MP	ζ	β	ω_d	τ
$4\tau\ (\pm 2\%)$ $3\tau\ (\pm 5\%)$	$\dfrac{\pi}{\omega_d}$	$\dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}$	$e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$	$\cos\beta$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_d}{\zeta\omega_n}\right)$	$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	$\dfrac{1}{\zeta\omega_n}$

OBS:
- Sistemas de 2ª ordem que possuam o mesmo ζ, mas diferentes valores de ω_n apresentam o mesmo sobre-sinal e o mesmo andamento oscilatório, assim, diz-se que estes sistemas possuem a mesma **estabilidade relativa**.
- A resposta de um sistema superamortecido é sempre mais lenta, qualquer que seja o sinal de entrada.
- A máxima ultrapassagem e o tempo de subida são inversamente proporcionais.
- O tempo de pico corresponde a meio ciclo da frequência de oscilação amortecida.

- Se o valor final da resposta, $c(\infty)$, não for unitário, o máximo sobresinal é calculado como:

$$MP = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

- A curva de resposta, $c(t)$, permanece sempre dentro de um par de envoltórias:



- Observe que a distância do polo à origem no eixo real define o tempo de acomodação dos componentes transitórios do polo no sistema. Quanto menor a distância, maior é o tempo de acomodação.
- O tipo da resposta transitória é determinado principalmente pelos polos da função de transferência de malha fechada, enquanto os zeros determinam a forma da resposta transitória.
- **Na maioria dos sistemas reais é desejável que os polos estejam localizados na região do semiplano esquerdo do plano S limitada por $Re(polos) < \zeta\omega_n$, $\zeta > 0,4$ e $t_s < 4/\zeta\omega_n$.**
- A relação de τ para t_s deixa de ser verdadeira para valores grandes de ζ. Normalmente se considera válida para valores de $\zeta \leq 1,6$.

Exemplo 3 – Obtenha valores possíveis para A e B da F.T. abaixo de forma que a resposta transitória a um degrau seja a mais rápida possível para uma ultrapassagem inferior a 5%. Além disso, o tempo de assentamento para uma faixa de 2% do valor final deve ser inferior a 4 segundos. Informe os tempos de subida e de pico aproximados.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{10}{s^2 + As + B}} \longrightarrow C(s)$$

SOLUÇÃO

Máxima Ultrapassagem < 5%

$M_p < 0,05$

$e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} < 0,05$

$-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) < \frac{ln(0,05)}{\pi} \quad \times (-1)$

$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} > 0,953 \quad \Rightarrow \quad \zeta^2 > 0,91(1-\zeta^2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\zeta > 0,69} \\ \zeta < -0,69 \end{cases}$

Tempo de Assentamento < 4 segundos

$$4\tau < 4seg$$
$$4\frac{1}{\zeta\omega_n} < 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_n > \zeta^{-1}[rad/s]}$$

Obtenção de A e B.

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + As + B} \equiv \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

portanto, escolhendo $\zeta = 0,7$, podemos escolher $\omega_n = 1,5[rad/s]$, assim:

$$A = 2\zeta\omega_n = 2(0,7)(1,5) \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 2,1}$$
$$B = \omega_n^2 = (1,5)^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{B = 2,25}$$

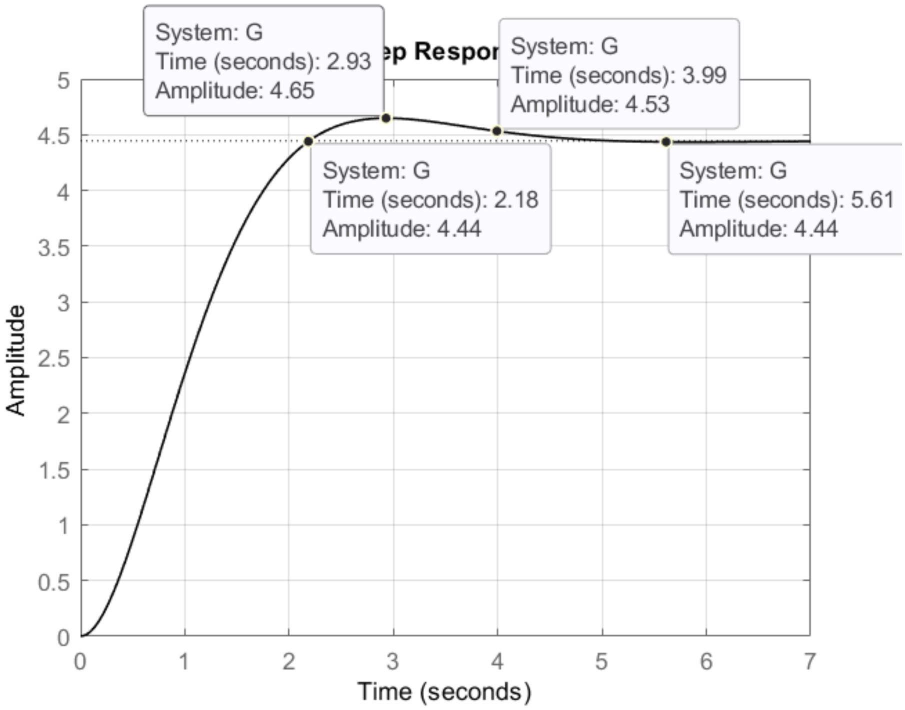
Obtenção do Tempo de Subida

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi - \cos^{-1}(0,7)}{1,5\sqrt{1-(0,7)^2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{t_r = 2,19[s]}$$

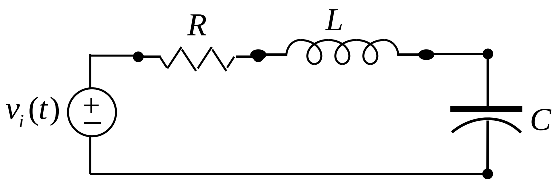
Obtenção do Tempo de Pico

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{1,5\sqrt{1-(0,7)^2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{t_p = 2,93[s]}$$

Simulação da resposta ao degrau deste sistema no Matlab:



Exemplo 4 – No circuito mostrado na figura abaixo, se $v_i(t)$ for uma tensão em degrau, obtenha o valor do resistor de modo que seja vista uma tensão sobre o capacitor com uma ultrapassagem de 20%. Obtenha, ainda, o tempo de pico na tensão sobre o capacitor e o tempo de carga do mesmo para uma tolerância de carga de 2%. $C = 10^{-6}F$ e $L = 1H$



SOLUÇÃO

$$\frac{V_c(s)}{V_i(s)} = ?$$

Por divisor de tensão

$$V_c(s) = V_i(s)\frac{X_c}{R + X_c + X_L}$$

$$\frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC} + sL} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

$$\boxed{\frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\therefore\ \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 1000\ [rad/s]}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{R = 2\zeta\omega_n L}$$

Para MP = 20%

$$e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0{,}2 \Rightarrow \boxed{\zeta = 0{,}45}$$

Assim,

$$R = 2\zeta\omega_n L \Rightarrow \boxed{R = 912\Omega}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \boxed{t_p = 3{,}5\ [ms]} \qquad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \boxed{t_s = 8{,}9\ [ms]}$$

Exemplo 5 – Seja a função de transferência de um sistema qualquer:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Determine $y(t)$ para uma excitação impulsiva nesse sistema. Dado $L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$.

SOLUÇÃO

Podemos reescrever o sistema como $Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}R(s)$

Para análise da resposta impulsiva, $R(s) = 1$.

Assim, $y(t)$ será a transformada inversa de Laplace de $Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$.

Efetuando a expansão em frações parciais:

$Y(s) = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$

$a_k = [(s+p_k)Y(s)]_{s=-p_k} \quad \Rightarrow \quad a_1 = [(s+p_1)Y(s)]_{s=-p_1}$

$$a_1 = \left[(s+1)\left(\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right)\right]_{s=-1}$$

$$a_1 = \left[\left(\frac{s+3}{s+2}\right)\right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = [(s+p_2)Y(s)]_{s=-p_2}$$

$$a_2 = \left[(s+2)\left(\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right)\right]_{s=-2}$$

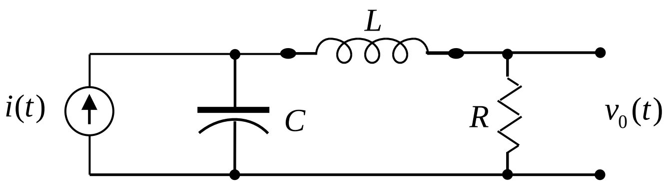
$$a_2 = \left[\left(\frac{s+3}{s+1}\right)\right]_{s=-2} = -1$$

$\therefore Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

De acordo com os dados fornecidos

$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad p/t \geq 0$

Exemplo 6 – Dado o circuito abaixo, encontre o valor de R e a relação entre L e C quando o sistema possui $\zeta = 0{,}5$.



SOLUÇÃO

$V_C(s) = V_L(s) + V_0(s) \qquad (i)$
$I(s) = I_C(s) + I_L(s) \qquad (ii)$
$V_0(s) = RI_L(s) \qquad (iii)$

Resolvendo (*i*) e (*ii*):
$V_C(s) = sLI_L(s) + RI_L(s) = (sL + R)I_L(s) \qquad (iv)$
$I(s) = sCV_C(s) + I_L(s) \qquad (v)$

Substituindo (*iv*) em (*v*):
$I(s) = sC(sL + R)I_L(s) + I_L(s) = (CLs^2 + CRs + 1)I_L(s) \qquad (vi)$

De (*iii*) e (*vi*), temos:

$$\frac{V_0(s)}{I(s)} = \frac{RI_L(s)}{(CLs^2 + CRs + 1)I_L(s)}$$

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{I(s)} = \frac{\frac{R}{CL}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}}}$$

$\omega_n^2 = \frac{R}{LC} = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 1}$
$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{1}{\omega_n}}$
$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n}C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{\omega_n}}$
$\therefore \boxed{L = C}$

5.5. RESPOSTA DE SISTEMAS DE ORDEM SUPERIOR

Seja um sistema de controle com a função de transferência

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} \qquad n \geq m$$

onde z e p são os zeros e os pólos da função de transferência, respectivamente.

Efetuando-se a expansão em frações parciais, temos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(s + p_i)}$$

onde a_i é o resíduo do pólo em $s = -p_i$.

O domínio relativo dos polos de malha fechada é determinado pela relação das partes reais dos polos de malha fechada e pelo valor dos resíduos da expansão em frações parciais dos respectivos polos.

Se todos os polos de malha fechada se situarem no semiplano esquerdo do plano S, os valores dos resíduos da expansão em frações parciais determinarão a importância relativa dos componentes da função de transferência.

Assim, se existir um zero de malha fechada próximo a um polo de malha fechada então o resíduo desse polo será pequeno. Isso porque um par de polos e zeros próximos vão se cancelar mutuamente.

Se um polo estiver localizado muito longe da origem o resíduo desse polo poderá ser pequeno. Os transitórios correspondentes a esse polo serão pequenos e de curta duração, logo, esse polo pode ser desprezado.

Em geral, se as relações das partes reais dos polos forem maiores que 5 e não houver zeros nas proximidades, então os polos de malha fechada mais próximos do eixo imaginário serão dominantes no comportamento da resposta transitória, porque correspondem aos termos da resposta transitória que decrescem lentamente. Geralmente apresentam-se como pares conjugados e são os mais importantes dos polos de malha fechada.

Observe que a relação acima não obriga a anulação dos polos mais distantes do eixo imaginário da equação, mas apenas define quem domina mais a resposta do sistema.

Entretanto, para sistemas de 3ª ordem, a resposta pode ser aproximada da resposta de um sistema de 2ª ordem por suas raízes dominantes, desde que a parte real de duas raízes dominantes seja inferior à $1/10$ da parte real da 3ª raiz em módulo, ou seja, a 3ª raiz pode ser eliminada da equação.

De outra maneira, seja um sistema com função de transferência a malha fechada

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1+bs)}$$

Se $a \gg \zeta\omega_n$ e $b \ll \zeta\omega_n$, então o zero e o polo terão pouco efeito sobre a resposta ao degrau.

Exemplo 7 – Seja o sistema

$$T(s) = \frac{62{,}5(s+2{,}5)}{(s^2+6s+25)(s+20)}$$

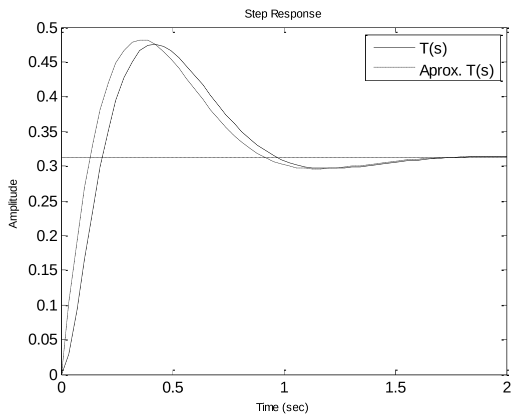
Para separar b da equação acima é necessário dividir o numerador e o denominador por 20. Assim,

$$T(s) = \frac{3{,}12(s+2{,}5)}{(s^2+6s+25)(0{,}05s+1)}$$

Têm-se $\zeta\omega_n = 3$. Observa-se que $a = 2{,}5$ não é muito maior que $\zeta\omega_n$, logo, o zero não pode ser desprezado, entretanto, $b = 0{,}05 \ll \zeta\omega_n$, então o polo pode ser desprezado, assim, a equação fica:

$$T(s) \approx \frac{3{,}12(s+2{,}5)}{s^2+6s+25}$$

A resposta ao degrau de $T(s)$ e de sua aproximação é dada no gráfico abaixo.



5.6. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

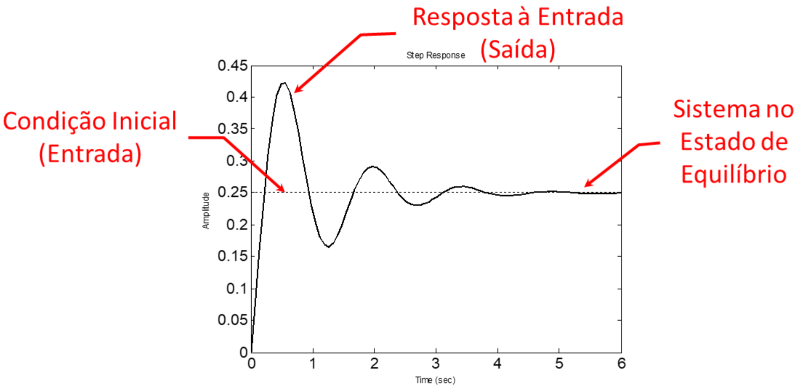
A característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle é a **estabilidade absoluta**, isto é, se um sistema é ESTÁVEL ou INSTÁVEL.

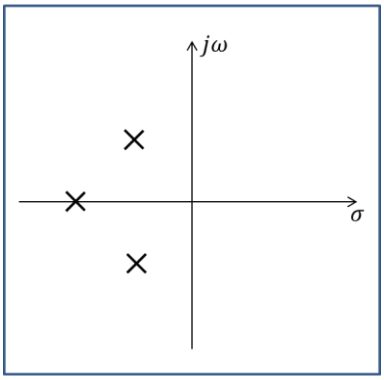
Do conceito de estabilidade, precede o conceito de equilíbrio:

> *"Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer distúrbio, ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado."*

Assim, podemos definir a estabilidade absoluta:

> *"Um sistema de controle LTI (Linear Time Invariant) é ESTÁVEL se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial."*

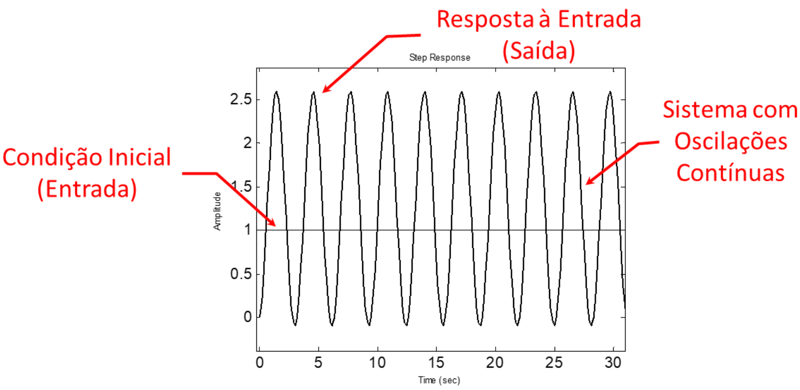


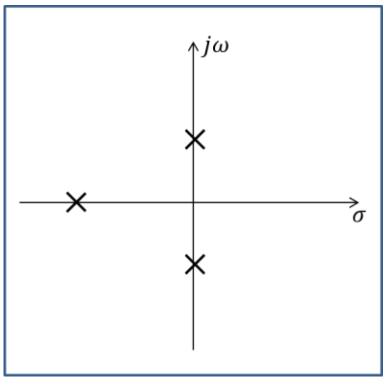


Isso ocorre sempre que o sistema possuir polos no semiplano esquerdo do Plano S

Por outro lado, pode-se definir a estabilidade crítica:

> *"Um sistema de controle LTI (Linear Time Invariant) é CRITICAMENTE ESTÁVEL se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua."*

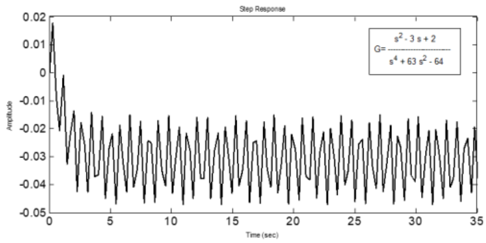


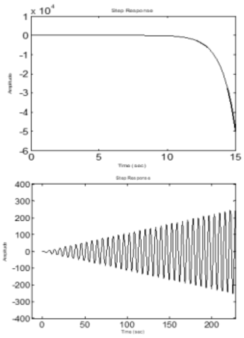


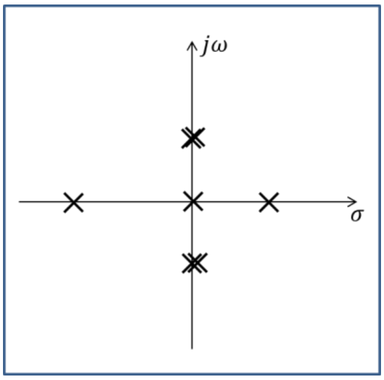
Isso ocorre sempre que o sistema possuir polos simples sobre o eixo imaginário do Plano S

Por fim a instabilidade:

> *"Um sistema de controle LTI (Linear Time Invariant) é INSTÁVEL se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial."*







Isso ocorre sempre que o sistema possuir polos múltiplos sobre o eixo imaginário, polos na origem e no semiplano direito do Plano S

5.6.1. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ

$$FT = \frac{\text{Polinômio do Numerador}}{\text{Polinômio do Denominador}}$$

Equação Característica:

- É o Polinômio do Denominador.
- Determina a Estabilidade de Sistemas Lineares.

Como:

ZEROS: Raízes do Polinômio do Numerador.
POLOS: Raízes do Polinômio do Denominador.

Então, os POLOS da FT é que determinam a estabilidade do sistema.

PROCEDIMENTO

1. Represente a equação característica no domínio de Laplace como

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

2. Se existir pelo menos um coeficiente nulo, então o sistema NÃO É ESTÁVEL (pode ser INSTÁVEL ou MARGINALMENTE ESTÁVEL).

EXEMPLOS

a) $s^5 + s^4 + 2s^2 + s + 1$

SOLUÇÃO
O coeficiente do termo em s^3 é nulo, logo, o sistema NÃO É ESTÁVEL.

CONSTATAÇÃO
Suas raízes são -1,65; 0,62 ± j0,98; -0,3 ± j0,6; logo, com raízes de parte real positiva o sistema é INSTÁVEL.

b) $s^2 + 25$

SOLUÇÃO O coeficiente do termo em s é nulo, logo, o sistema NÃO É ESTÁVEL. CONSTATAÇÃO Suas raízes são: ± j5; logo este sistema é MARGINALMENTE ESTÁVEL.

3. Se existir trocas de sinais nos coeficientes, então, existem raízes da equação característica no semiplano direito do plano s, ou seja, existem raízes reais positivas, logo, o sistema é INSTÁVEL.

EXEMPLO:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$$

SOLUÇÃO Há trocas de sinais nos coeficientes da equação característica, logo, o sistema é INSTÁVEL. CONSTATAÇÃO Suas raízes são ±1; -2; ± j5; como existem raízes reais positivas, este sistema é INSTÁVEL.

4. Se não existir coeficientes nulos, nem trocas de sinais nos coeficientes da equação característica, então, aplica-se o método de Routh.

MÉTODO DE ROUTH

Determina a ESTABILIDADE ABSOLUTA de sistemas lineares.

O Método:

1. Seja a equação característica do problema:

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

2. Represente a equação característica na forma:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ \hline s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ s^0 & h_{n-1} & & & \end{array}$$

onde:

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

e assim por diante.

Caso 1: Se existir troca de sinal nos elementos da 1ª coluna então o sistema é INSTÁVEL. O número de trocas de sinal nos elementos da 1ª coluna é igual ao número de raízes da equação característica com parte real positiva, ou seja, é igual ao número de polos do sistema no semiplano direito do plano s.

EXEMPLO:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 - 1}{s^3 + s^2 + 2s + 24}$$

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ \hline s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & \end{array}$$

Duas trocas de sinal na 1ª coluna, ou seja, duas raízes com parte real positiva, logo, o sistema é INSTÁVEL.

CONSTATAÇÃO

Suas raízes são -3; 1 ± j2,6; existem duas raízes complexas com partes reais positivas, este sistema é INSTÁVEL.

Caso 2: Se **não existe troca de sinal** nos elementos da 1ª coluna e **não existe elemento nulo na 1ª coluna**, então o sistema é ESTÁVEL.

EXEMPLO:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 2 & 0 \\ \hline s^0 & 1 & \end{array}$$

Não há trocas de sinais na 1ª coluna, logo, o sistema é ESTÁVEL

CONSTATAÇÃO

Suas raízes são -1; -1; existem duas raízes reais negativas, este sistema é ESTÁVEL.

Caso 3: Se houver **elemento nulo na 1ª coluna** e não existir zeros na linha que contém o zero na 1ª coluna, então, substitua o zero por uma letra grega e efetue o método normalmente. Se não houver trocas de sinal na 1ª coluna, então o sistema é ESTÁVEL.

EXEMPLO:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10}$$

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
\hline
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & -12/\varepsilon & 10 & 0 \\
s^1 & 6 & 0 & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}$$

$$\frac{4\varepsilon - 2 \times 6}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon}$$

$$\frac{-\frac{12}{\varepsilon} \times 6 - 10\varepsilon}{-\frac{12}{\varepsilon}} = \frac{-\frac{12}{\varepsilon} \times 6}{-\frac{12}{\varepsilon}} = 6$$

Duas trocas de sinal na 1ª coluna, ou seja, duas raízes com parte real positiva, logo, o sistema é INSTÁVEL.

CONSTATAÇÃO

Suas raízes são -1,3; -1,2 ± j; 0,9 ± j1,4 existem duas raízes complexas com partes reais positivas, este sistema é INSTÁVEL.

Caso 4: Se surgir uma **linha de zeros** no Arranjo de Routh. Essa condição ocorre quando o polinômio possui singularidades localizadas simetricamente em torno da origem do plano S. Se as raízes estão sobre o eixo imaginário, ou seja, quando ocorrem fatores como $(s \pm j\omega)$, então o sistema oscila, sendo MARGINALMENTE ESTÁVEL. Quando as raízes estão sobre o eixo real, ou seja, quando ocorrem fatores como $(s \pm \sigma)$, o sistema é INSTÁVEL (nesse caso sempre haverá trocas de sinais entre os coeficientes do polinômio característico não havendo a necessidade de desenvolver o Arranjo de Routh).

A obtenção dos fatores é feita da seguinte forma:

1. Encontre o polinômio auxiliar (obtido da linha acima da linha de zeros). A ordem do polinômio auxiliar quando é par e indica o número de pares de raízes simétricas.
2. Obtenha as raízes do polinômio auxiliar, elas são as raízes simétricas do problema, ou seja, o polinômio auxiliar é um fator do polinômio característico.
3. As raízes do polinômio auxiliar é que irão definir se o sistema é marginalmente estável ou instável.

Não sendo possível calcular as raízes do polinômio auxiliar devido ao elevado grau, ou devido à necessidade de determinação de uma constante K no polinômio, pode-se efetuar o seguinte procedimento:

PROCEDIMENTO: Substitua a linha de zeros pelos coeficientes da derivada do polinômio auxiliar e continue o procedimento. Havendo trocas de sinal, o sistema é INSTÁVEL, não havendo, é apenas MARGINALMENTE ESTÁVEL, sendo necessário verificar a ocorrência de raízes repetidas.

EXEMPLOS

a. $q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + 8$

SOLUÇÃO

s^5	1	2	4
s^4	2	4	8
s^3	8	8	0
s^2	2	8	0
s^1	-24	0	
s^0	8		

$U(s) = 2s^4 + 4s^2 + 8$
$U'(s) = 8s^3 + 8s$

Seria uma linha de zeros

Há troca de sinal na 1ª coluna, logo o sistema é INSTÁVEL. De fato, há duas raízes com parte real positiva.

b. $q(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50$

s^5	1	24	25
s^4	2	48	50
s^3	8	96	0
s^2	24	50	
s^1	79,3	0	
s^0	50		

$U(s) = 2s^4 + 48s^2 + 50$
$U'(s) = 8s^3 + 96s$

Seria uma linha de zeros

As raízes de $U(s)$ não são repetidas e não há troca de sinal na 1ª coluna, logo o sistema é MARGINALMENTE ESTÁVEL.

Para confirmar os resultados, as raízes de $q(s)$ são:
$q(s) = (s + 2)(s + 4{,}78j)(s - 4{,}78j)(s + 1{,}04j)(s - 1{,}04j)$

c. $q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$

SOLUÇÃO

s^3	1	4
s^2	2	K
s^1	$\frac{8-K}{2}$	0
s^0	K	

$0 < K < 8$, ESTÁVEL
$K = 8$, ESTABILIDADE MARGINAL, pois o polinômio auxiliar: $U(s) = 2s^2 + 8$ possui raízes simétricas $(s + 2j)(s - 2j)$ sobre o eixo imaginário (OSCILAÇÃO).

Caso 5: Equação característica com **raízes repetidas sobre o eixo imaginário**. Raízes simples sobre o eixo imaginário promovem um sistema oscilatório MARGINALMENTE ESTÁVEL, mas se as raízes forem repetidas (duplas, triplas etc.) o sistema será oscilatório INSTÁVEL. A verificação dessa situação é feita observando-se as raízes do polinômio auxiliar.

EXEMPLO

$q(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$

SOLUÇÃO

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 1 \\
s^4 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
s^3 & 4 & 4 & 0 \\
s^2 & 1 & 1 & 0 \\
s^1 & 2 & 0 & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

Duas linhas iguais, logo, surge uma linha de zeros. Como não há troca de sinais na 1ª coluna, o sistema é, a princípio, MARGINALMENTE ESTÁVEL, porém, as raízes dos polinômios auxiliares são:

$$U_1(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = (s + j)^2(s - j)^2$$
$$U_2(s) = s^2 + 1 = (s + j)(s - j)$$

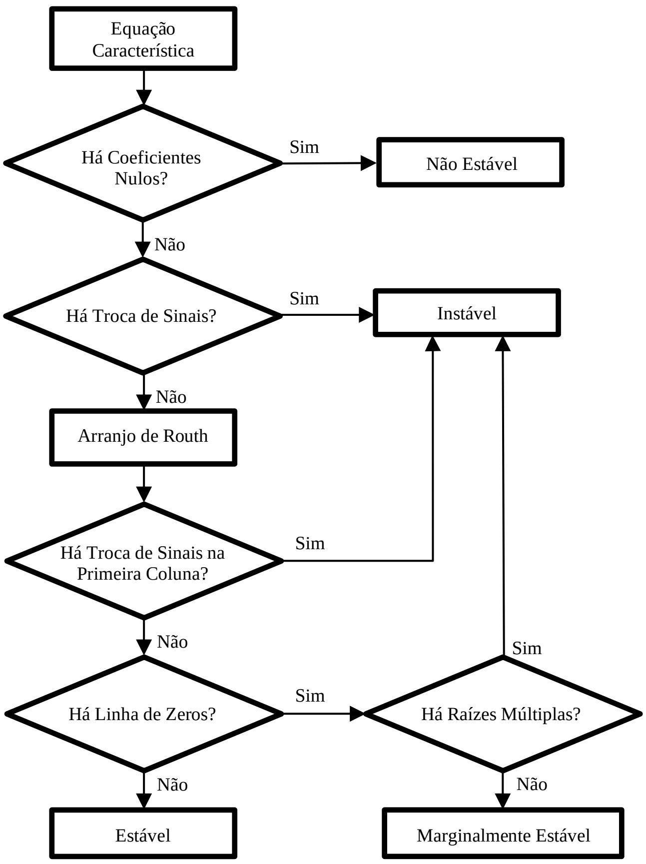
Como as raízes de $U_1(s)$ são repetidas (duplas), então esse sistema é INSTÁVEL.

OBS: Observe que as raízes de $U_2(s)$ são as mesmas de $U_1(s)$, ou seja, o sistema não possui raízes triplas, mas apenas raízes duplas. O sistema é de 5ª ordem não podendo ter 6 raízes (2 triplas)

OBSERVAÇÃO

No Arranjo de Routh uma linha inteira pode ser multiplicada ou dividida por um número positivo, de modo que simplifique os cálculos, sem comprometimento da conclusão sobre a estabilidade.

FLUXOGRAMA DA APLICAÇÃO DO CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ



5.6.2. ANÁLISE DA ESTABILIDADE RELATIVA

O Critério de Routh fornece a informação da estabilidade absoluta de sistemas. É possível utilizá-lo para obter informações sobre a estabilidade relativa. O método consiste em deslocar o eixo imaginário do plano s por uma constante σ, ou seja, substituir $s = \hat{s} - \sigma$ na equação característica do sistema e aplicar o Critério de Routh.

O número de trocas de sinais na primeira coluna do Arranjo de Routh equivale ao número de raízes que se situam à direita da linha vertical $s = -\sigma$.

5.6.3. FINALIDADE DO USO DO CRITÉRIO DE ROUTH

O uso de critérios para a análise de estabilidade de sistemas se justifica somente quando, na equação característica, faz-se uso de parâmetros ajustáveis. Quando a equação característica possui coeficientes numéricos, basta calcular suas raízes e observar suas localizações para avaliar o sistema quanto à sua estabilidade.

Exemplo 8 – Encontre K que resulte na estabilidade marginal do polinômio característico.

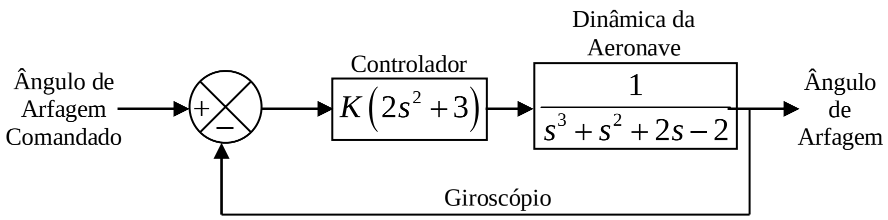
$$q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K$$

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & K \\ s^3 & 1 & 1 & 0 \\ \hline s^2 & \varepsilon & K & \\ s^1 & -K/\varepsilon & 0 & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

$K \neq 0$, (INSTÁVEL), pois há trocas de sinal na 1ª coluna.
$K = 0$, (INSTÁVEL), pois o termo independente da equação característica é nulo.
Portanto, o sistema é INSTÁVEL $\forall\, K$.

Exemplo 9 – Um modelo para malha de arfagem de um avião é mostrado na figura abaixo. Determine a faixa de valores de K que manterá o sistema estável. Informe também para que valor de K o sistema é marginalmente estável.



SOLUÇÃO

$$G(s) = \frac{K(2s^2+3)}{s^3+s^2+2s-2} \qquad H(s) = 1$$

Obtenção da Equação Característica

$$FTMF = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad \Rightarrow \quad FTMF = \frac{\dfrac{K(2s^2+3)}{s^3+s^2+2s-2}}{1+\dfrac{K(2s^2+3)}{s^3+s^2+2s-2}}$$

$$FTMF = \frac{\dfrac{K(2s^2+3)}{s^3+s^2+2s-2}}{\dfrac{s^3+s^2+2s-2+K(2s^2+3)}{s^3+s^2+2s-2}}$$

$$FTMF = \frac{K(2s^2+3)}{s^3+(2K+1)s^2+2s+3K-2}$$

$$\therefore q(s) = s^3+(2K+1)s^2+2s+3K-2$$

Fazendo o Arranjo de Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2K+1 & 3K-2 \\ \hline s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & 3K-2 & \end{array} \qquad b_1 = \frac{K+4}{2K+1}$$

Para estabilidade,

$$2K+1>0 \Rightarrow \boxed{K>-\frac{1}{2}}$$

$$3K-2>0 \Rightarrow \boxed{K>\frac{2}{3}}$$

$$b_1>0 \Rightarrow \begin{cases} K+4>0 \Rightarrow \boxed{K>-4} \\ 2K+1>0 \Rightarrow \boxed{K>-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Portanto, a estabilidade ocorre para o trecho de interseção dos intervalos que é $\boxed{K>\frac{2}{3}}$. Para a estabilidade marginal, $b_1 = \frac{K+4}{2K+1} = 0$, portanto, $K+4=0 \Rightarrow \boxed{K=-4}$, porém para $K=-4$ o sistema é INSTÁVEL, pois a última linha do Arranjo de Routh é negativa para esse valor de K. Logo, $\nexists K$ para que o sistema seja Marginalmente Estável.

Exemplo 10 – Um sistema possui a seguinte equação característica

$$q(s) = s^6+9s^5+31{,}25s^4+61{,}25s^3+67{,}75s^2+14{,}75s+k$$

Obtenha k que torne o sistema ESTÁVEL e MARGINALMENTE ESTÁVEL.

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 31{,}25 & 67{,}75 & k \\ s^5 & 9 & 61{,}25 & 14{,}75 & 0 \\ \hline s^4 & 24{,}44 & 66{,}11 & k & \\ s^3 & 36{,}90 & \dfrac{360{,}49-9k}{24{,}44} & 0 & \\ s^2 & \dfrac{2078{,}97+9k}{36{,}90} & k & & \\ s^1 & 14{,}75-\dfrac{k}{2{,}72}-\dfrac{1361{,}61k}{(2078{,}97+9k)} & 0 & & \\ s^0 & k & & & \end{array}$$

Para Estabilidade

$$\frac{2078{,}97+9k}{36{,}90} > 0 \text{ (i)}$$

$$14{,}75 - \frac{k}{2{,}72} - \frac{1361{,}61k}{(2078{,}97+9k)} > 0 \text{ (ii)}$$
$$k > 0 \text{ (iii)}$$

Assim, da equação (i),

$$\frac{2078{,}97 + 9k}{36{,}90} > 0 \quad \Rightarrow \boxed{k > -231}$$

Da equação (ii),

$$14{,}75 - \frac{k}{2{,}72} - \frac{1361{,}61k}{(2078{,}97+9k)} > 0$$
$$-\frac{k}{2{,}72} - \frac{1361{,}61k}{(2078{,}97 + 9k)} > -14{,}75$$
$$\frac{k}{2{,}72} + \frac{1361{,}61k}{(2078{,}97 + 9k)} < 14{,}75$$
$$\frac{9k^2 + 5782{,}55k}{5654{,}8 + 24{,}44k} < 14{,}75$$
$$9k^2 + 5422{,}06k - 83408{,}3 < 0$$
$$\therefore \boxed{-617{,}4 < k < 15}$$

Fazendo a interseção dos resultados obtidos das equações (i), (ii) e (iii), temos que, para ESTABILIDADE, **0 < *k* < 15**.

Para Estabilidade Marginal

$$k > 0 \text{ (iii)}$$
$$14{,}75 - \frac{k}{2{,}72} - \frac{1361{,}61k}{(2078{,}97+9k)} = 0 \text{ (iv)}$$

Do desenvolvimento da equação (ii) acima, temos que $9k^2 + 5422{,}06k - 83408{,}3 = 0$ com raízes -617,4 e 15 é o resultado da equação (iv).

Fazendo a interseção dos resultados obtidos das equações (iii) e (iv), temos que, para ESTABILIDADE MARGINAL, ***k* = 15**.

5.7. MATLAB

a) Características dos Sistemas de Controle
   i. [ω_n,ζ] = *damp*(sys);
   ii. Outras funções: *pzmap*, *pole*, *zero*, *lsim*, *step*, *stepinfo*, *impulse*, *lsiminfo*, *residue*, *roots*, *ord2*, *rmodel*, *zpk*, *poly* e *printsys*.

5.8. LISTA DE EXERCÍCIOS

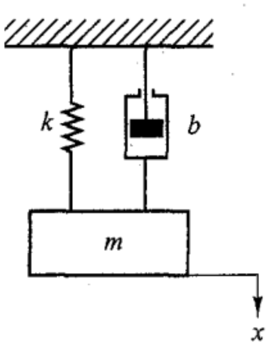
Livro Dorf 8 Ed: E2.4, E2.18, P2.43, P2.50c, P2.51c, E5.1 a E5.17, P5.1 a P5.14, P5.16 a P5.19, PA5.1 a PA5.6, PP5.1 a PP5.6.

Livro Ogata 4 Ed: A5.1 a A5.17, A5.24, A5.25, A5.28, A5.29, B5.1 a B5.11, B5.14, B5.22.

5.9. EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

(Ogata. A-5-8 4ªed) No sistema mostrado na figura, os valores numéricos de m, b e k são $m = 1kg$, $b = 2\ N\_sec/m$ e $k = 100N/m$. A massa está distante $0{,}05\ m$ e deixada sem velocidade inicial. A referência de x é medida a partir do ponto de equilíbrio.

a) Encontre a frequência observada na vibração.
b) Encontre a amplitude após 4 ciclos.



SOLUÇÃO
O modelo dinâmico do sistema é dado por:
$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0$

A Transformada de Laplace com condições iniciais é dada por:
$ms^2X(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) + bX(s) - bx(0) + kX(s) = 0$

Arrumando, com $\dot{x}(0) = 0$:

$$X(s) = x(0)\frac{ms + b}{ms^2 + bs + k}$$

$$\boxed{X(s) = x(0)\frac{s + \frac{b}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}}$$

Do sistema de 2ª ordem,

$$\boxed{\frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n}$$

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega_n^2}$$

a) Frequência de vibração

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_n = 10\ [rad/s]}$$

$$\frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n \quad \rightarrow \quad \boxed{\zeta = 0{,}1}$$

Assim,

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = 10\sqrt{1 - 0{,}01}$$

$$\boxed{\omega_d = 9{,}95\ [rad/s]}$$

b) Amplitude em 4 ciclos

$$\omega_n^2 = \omega_d^2\left(\frac{1}{1-\zeta^2}\right) = \omega_d^2\left(1+\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}\right) = \omega_d^2 + \frac{\omega_d^2\zeta^2}{1-\zeta^2} = \omega_d^2 + \zeta^2\omega_n^2$$

Sabe-se que:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_d^2 + \zeta^2\omega_n^2 = (s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

Então,

$$X(s) = x(0)\frac{s+\frac{b}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} = x(0)\frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

Assim,

$$X(s) = x(0)\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2} + x(0)\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

$$x(t) = x(0)\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2} + x(0)\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

Da tabela de transformadas, temos:

$$\mathcal{L}\left\{e^{\mp at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{\omega}{(s\pm a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{\mp at}\cos(\omega t)\right\} = \frac{s\pm a}{(s\pm a)^2+\omega^2}$$

Logo,

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t) + x(0)\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)e^{-at}\sin(\omega_d t)$$

$$\boxed{x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\cos(\omega_d t) + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin(\omega_d t)\right\}}$$

O período é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta\omega_n nT}\left\{\cos(\omega_d nT) + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin(\omega_d nT)\right\}$$

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta 2n\pi\frac{\omega_n}{\omega_d}}\left\{\cos(2n\pi) + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin(2n\pi)\right\}$$

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta 2n\pi\frac{\omega_n}{\omega_d}}\left\{1 + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)0\right\}$$

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta 2n\pi\frac{\omega_n}{\omega_d}}$$

Para 4 ciclos,

$$x(4T) = x(0)e^{-\zeta 8\pi\frac{\omega_n}{\omega_d}}$$

$$\boxed{x(4T) = 0{,}4[mm]}$$