tem-se

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

e

$$\phi = \underline{/G(j\omega)} = \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega$$

Assim, a resposta em regime permanente é

$$y_{ss}(t) = \frac{XT_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega)$$

Constata-se, a partir desta expressão, que se $T_1 > T_2$ então $\tan^{-1}T_1\omega - \tan^{-1}T_2\omega > 0$. Portanto, se $T_1 > T_2$, a estrutura é de avanço de fase. Se $T_1 < T_2$, o circuito é uma estrutura de atraso de fase.

5-10 ERRO ESTACIONÁRIO EM SISTEMAS DE CONTROLE COM RETROAÇÃO UNITÁRIA

Num sistema de controle, os erros podem ser atribuídos a muitos fatores. Mudanças no sinal de referência acarretarão erros inevitáveis durante o regime transitório e também podem ocasionar erros em regime estacionário. Imperfeições tais como atrito seco, folgas e derivas dos amplificadores, bem como envelhecimento ou deterioração dos componentes, produzirão erros em regime permanente. Nesta seção, contudo, não serão discutidos erros devidos a imperfeições dos componentes do sistema. Em vez disto, será investigado um tipo de erro estacionário que é causado pela incapacidade do sistema em seguir tipos particulares de sinais de excitação. Qualquer sistema de controle físico apresenta inerentemente erro estacionário na resposta a certos tipos de sinais de entrada. Um sistema pode não apresentar erro estacionário quando submetido a solicitações em degrau, mas o mesmo sistema pode apresentar erro estacionário não-nulo para uma excitação em rampa. (A única maneira de se eliminar este erro é modificando a estrutura do sistema.) O fato de um sistema apresentar erro estacionário para um dado tipo de sinal de entrada depende do tipo de função de transferência a malha aberta do sistema, o que será discutido a seguir.

Classificação dos sistemas de controle. Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com a sua habilidade em seguir sinais de entrada em degrau, em rampa, em parábola etc. Este é um critério razoável de classificação porque as excitações reais podem ser freqüentemente consideradas como uma combinação de tais sinais. Os valores dos erros estacionários devidos a estas entradas individuais são indicativos da "qualidade" do sistema.

Considere-se o sistema de controle com retroação unitária com a seguinte função de transferência a malha aberta $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots(T_m s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots(T_p s + 1)}$$

Ela envolve o termo s^N no denominador, representando um pólo de multiplicidade N na origem. O presente critério de classificação é baseado no número de integrações indicadas pela função de transferência a malha aberta. Um sistema é chamado de tipo 0, do tipo 1, do tipo 2 ... se $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$ ..., respectivamente. Note-se que esta classificação é diferente daquela que diz respeito à ordem de um sistema. À medida que se aumenta o número N, melhora a precisão mas agrava o problema da estabilidade. É sempre necessário um compromisso entre precisão em regime estacionário e estabilidade relativa. Na prática, raramente se tem um sistema de tipo 3 ou maior porque, em geral, é difícil projetar sistemas estáveis com mais de duas integrações no percurso direto.

Será visto mais tarde que, se $G(s)$ for escrita de tal forma que cada termo no numerador e no denominador, exceto o termo s^N, tenda à unidade quando s tende a zero, então o ganho de malha aberta K está diretamente relacionado com o erro estacionário.

Erros estacionários. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 5-53. A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

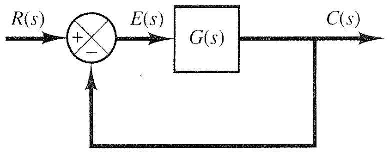


Fig. 5-53 Sistema de controle.

A função de transferência entre o sinal de erro atuante $e(t)$ e o sinal de entrada $r(t)$ é

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

onde o erro atuante $e(t)$ é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída.

O teorema do valor final provê uma maneira conveniente de se determinar o desempenho em regime estacionário de um sistema estável. Como $E(s)$ é

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

o erro estacionário é

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Os coeficientes de erro estático definidos a seguir são figuras de mérito dos sistemas de controle. Quanto maiores os valores dos coeficientes, menor o erro estacionário. Em um dado sistema, a grandeza de saída pode ser posição, velocidade, pressão, temperatura etc. A forma física da grandeza de saída é, entretanto, irrelevante nesta análise. Assim, daqui em diante, o sinal de saída será chamado de "posição", a taxa de variação do sinal de saída de "velocidade" etc. Isto significa que, em um sistema de controle de temperatura, "posição" representa a temperatura de saída, "velocidade" representa a taxa de variação da temperatura de saída etc.

Coeficiente de erro estático de posição K_p. O erro estacionário do sistema a uma excitação em degrau unitário é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1 + G(0)} \end{aligned}$$

O coeficiente de erro estático de posição K_p é definido por

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

Assim, o erro estacionário, em termos do coeficiente de erro estático de posição K_p, é dado pela expressão

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para um sistema do tipo 0

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 1 ou maior

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 1$$

Portanto, para um sistema do tipo 0, o coeficiente de erro estático de posição K_p é finito, enquanto para um sistema do tipo 1 ou maior, K_p é infinito.

Para uma excitação em degrau unitário, o erro estacionário e_{ss} pode ser resumido como se segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}, \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 1 ou maior}$$

Da análise feita, vê-se que a resposta de um sistema de controle com retroação unitária para uma entrada em degrau envolve um erro estacionário se não houver integração no percurso direto. (Se erros pequenos à solicitação em degrau puderem ser tolerados, então um sistema do tipo 0 pode ser admissível, contanto que o ganho K seja suficientemente grande. Entretanto, se o ganho K for grande demais, fica difícil obter-se uma estabilidade relativa adequada.) Se for desejado um erro estacionário nulo para uma solicitação em degrau, então o tipo do sistema deve ser 1 ou maior.

Coeficiente de erro estático de velocidade K_v. O erro estacionário do sistema a uma excitação em rampa unitária é dado por

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

O coeficiente de erro estático de velocidade K_v é definido por

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

Assim, o erro estacionário, em termos do coeficiente de erro estático de velocidade, é dado pela expressão

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

O termo *erro de velocidade* é usado aqui para designar o erro estacionário a uma excitação em rampa. A dimensão do erro de velocidade é a mesma do erro do sistema, isto é, o erro de velocidade não é um erro na velocidade, mas um erro na posição devido a uma entrada em rampa.

Para um sistema do tipo 0,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 2 ou maior,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 2$$

O erro estacionário e_{ss} para uma entrada em rampa unitária pode ser resumido como se segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty, \quad \text{para sistemas tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}, \quad \text{para sistemas tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0, \quad \text{para sistemas tipo 2 ou maior}$$

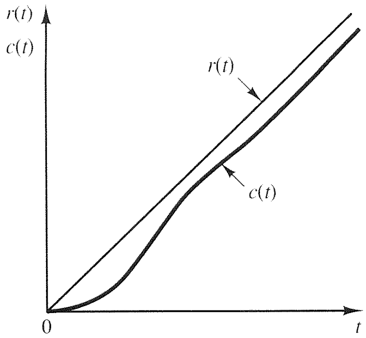


Fig. 5-54 Resposta de um sistema com retroação unitária, do tipo 1, a uma solicitação em rampa unitária.

A análise feita mostra que um sistema do tipo 0 é incapaz de seguir, em regime estacionário, uma solicitação em rampa. O sistema do tipo 1 com retroação unitária pode seguir o sinal de entrada em rampa com um erro finito. Em operação estacionária, a velocidade de saída é exatamente igual à velocidade de entrada, mas há um erro de posição. Este erro é proporcional à velocidade de entrada e inversamente proporcional ao ganho K. A Fig. 5-54 mostra um exemplo da resposta de sistema tipo 1 com retroação unitária a uma entrada em rampa. O sistema de ordem 2 ou maior pode seguir uma entrada em rampa com erro estacionário nulo.

Coeficiente de erro estático de aceleração K_a. O erro estacionário do sistema a uma solicitação em parábola unitária (entrada de aceleração), que é definida por

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^2}{2}, \quad \text{para } t \geq 0 \\ &= 0, \quad \text{para } t < 0 \end{aligned}$$

é dado por

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)} \end{aligned}$$

O coeficiente e erro de aceleração estático K_a é definido pela equação

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

O erro estacionário é então

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Note-se que o erro de aceleração, o erro estacionário devido a uma solicitação em parábola, é um erro em posição.

Os valores de K_a são obtidos como a seguir:

Para sistemas do tipo 0,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para sistemas do tipo 1,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

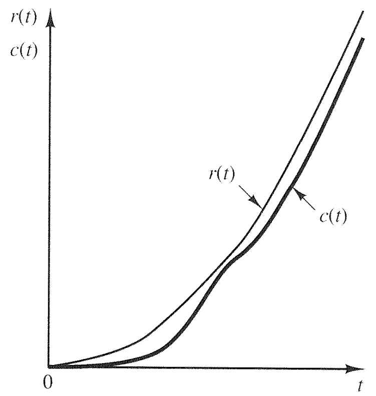


Fig. 5-55 Resposta de um sistema com retroação unitária, do tipo 2, a uma solicitação em parábola.

Para sistemas do tipo 2,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2K(T_as + 1)(T_bs + 1)\cdots}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)\cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 3 ou maior,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2K(T_as + 1)(T_bs + 1)\cdots}{s^N(T_1s + 1)(T_2s + 1)\cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 3$$

Portanto, o erro estacionário para um sinal de entrada em parábola unitária é

$$e_{ss} = \infty, \quad \text{para sistemas do tipo 0 e do tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}, \quad \text{para sistemas do tipo 2}$$

$$e_{ss} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 3 ou maior}$$

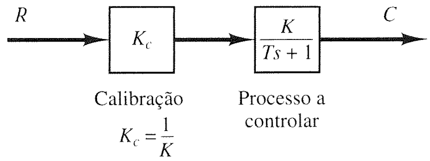
Note-se que tanto sistemas do tipo 0 como do tipo 1 são incapazes de seguir, em regime permanente, uma solicitação em parábola. Os sistemas do tipo 2 com retroação unitária podem seguir uma entrada em parábola com um erro finito. A Fig. 5-55 mostra um exemplo da resposta de um sistema do tipo 2 com retroação unitária a uma excitação em parábola. O sistema do tipo 3 ou maior com retroação unitária segue uma entrada em parábola com erro nulo em regime estacionário.

Resumo. A Tabela 5-2 resume os erros estacionários para sistemas do tipo 0, tipo 1 e tipo 2 quando sujeitos aos vários sinais de entrada. Os valores finitos para erro estacionário aparecem na linha diagonal. Acima da diagonal, os erros estacionários são infinitos; abaixo da diagonal eles são nulos.

É bom lembrar que os termos *erro de posição*, *erro de velocidade* e *erro de aceleração* significam desvios em regime estacionário na posição de saída. Um erro de velocidade finita significa que depois de os transitórios desaparecerem, a entrada e a saída se movem com a mesma velocidade, mas com uma diferença de posição finita.

Tabela 5-2 Erro estacionário em função do ganho K

	Entrada em degrau $r(t) = 1$	Entrada em rampa $r(t) = t$	Entrada em aceleração $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$



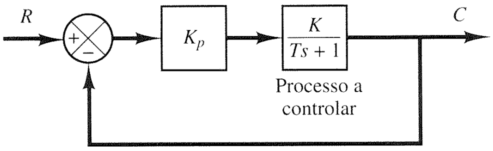


Fig. 5-56 Diagramas de blocos de um sistema de controle a malha aberta e de um sistema de controle a malha fechada.

Os coeficientes de erro K_p, K_v e K_a descrevem a habilidade de um sistema com retroação unitária em reduzir ou eliminar erros estacionários. Portanto, eles são indicativos de desempenho em regime estacionário. Em geral é desejável aumentar os coeficientes de erro, enquanto se mantém a resposta transitória dentro de limites aceitáveis. Se houver algum conflito entre o coeficiente de erro de velocidade e o coeficiente de erro de aceleração, então o último pode ser considerado menos importante do que o anterior. Nota-se que para melhorar o desempenho em regime estacionário, pode-se aumentar o tipo do sistema adicionando um integrador ou integradores no percurso direto. Entretanto, isto introduz problemas adicionais de estabilidade. O projeto de um sistema satisfatório com mais de dois integradores no percurso direto é geralmente difícil.

Comparação entre os erros estacionários de sistemas a malha aberta e de sistemas a malha fechada. Sejam os sistemas de controle a malha aberta e a malha fechada mostrados na Fig. 5-56. No sistema a malha aberta o ganho K_c é calibrado de modo a se ter $K_c = 1/K$. Assim, a função de transferência do sistema de controle a malha aberta é

$$G_0(s) = \frac{1}{K}\frac{K}{Ts+1} = \frac{1}{Ts+1}$$

No sistema de controle a malha fechada, o ganho K_p do controlador é ajustado de modo que $K_pK \gg 1$.

Admitindo-se uma excitação em degrau unitário, vamos comparar os erros estacionários nestes dois sistemas. Para o sistema de controle a malha aberta, o sinal de erro é

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

ou

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= [1 - G_0(s)]R(s) \end{aligned}$$

O erro estacionário a uma solicitação em degrau unitário é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s[1 - G_0(s)]\frac{1}{s} \\ &= 1 - G_0(0) \end{aligned}$$

Se $G_o(0)$, o ganho estático do sistema de controle a malha aberta, for igual à unidade, então o erro de regime permanente será nulo. Contudo, devido a mudanças no ambiente e ao envelhecimento dos componentes, o ganho estático $G_o(0)$ se afastará do valor unitário à medida que o tempo passa e o erro estacionário deixará de ser nulo. Este erro permanecerá no sistema a malha aberta até que se faça uma nova calibração do sistema.

Para o sistema de controle a malha fechada, o sinal de erro é

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= \frac{1}{1 + G(s)}R(s) \end{aligned}$$

onde

$$G(s) = \frac{K_p K}{Ts + 1}$$

O erro estacionário a uma excitação em degrau unitário é

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1 + G(s)}\right]\frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{1 + G(0)} \\
&= \frac{1}{1 + K_p K}
\end{aligned}$$

No sistema de controle a malha fechada, o ganho K_p é ajustado para ter um valor grande em comparação com $1/K$. Assim, o erro estacionário pode ser feito muito pequeno, embora não exatamente igual a zero.

Admita-se a seguinte variação na função de transferência do processo a controlar, supondo-se K_c e K_p constantes:

$$\frac{K + \Delta K}{Ts + 1}$$

Por simplicidade, sejam os seguintes valores, $K = 10$, $\Delta K = 1$, ou $\Delta K/K = 0{,}1$. Então o erro estacionário na resposta ao degrau unitário se torna, para o sistema de controle a malha aberta,

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= 1 - \frac{1}{K}(K + \Delta K) \\
&= 1 - 1{,}1 = -0{,}1
\end{aligned}$$

Para o sistema de controle a malha fechada, se K_p for ajustado no valor $100/K$, então o erro de regime estacionário da resposta ao degrau unitário se torna

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{1}{1 + G(0)} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{100}{K}(K + \Delta K)} \\
&= \frac{1}{1 + 110} = 0{,}009
\end{aligned}$$

Assim, o sistema de controle a malha fechada é superior ao sistema de controle a malha aberta, em presença de mudanças no ambiente, envelhecimento dos componentes e efeitos similares que afetam o desempenho em regime permanente.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

A-5-1. Explicar por que o controle proporcional de um processo que não possua propriedade de integração (o que significa que a função de transferência do processo não inclui o fator $1/s$) apresenta um erro residual na resposta a excitações em degrau.

Solução. Considere-se, por exemplo, o sistema mostrado na Fig. 5-57. Em regime permanente, se c fosse igual a uma constante r nula, então $e = 0$ e $u = Ke = 0$, resultando em $c = 0$, o que contradiz a hipótese de se ter $c = r =$ constante não-nula.

Para que um tal sistema de controle funcione de forma adequada, deve existir, necessariamente, um erro residual. Em outras palavras, em regime permanente, se e for igual a $r/(1 + K)$, então $u = Kr/(1 + K)$ e $c = Kr/(1 + K)$, que resulta no valor de erro anteriormente suposto $e = r/(1 + K)$. Portanto, o erro residual $r/(1 + K)$ é inerente a um sistema como este.

A-5-2 Seja o sistema mostrado na Fig. 5-58. Mostrar que o valor de regime permanente do erro de acompanhamento de um sinal em rampa unitária é B/K. Este erro pode ser feito pequeno escolhendo-se B pequeno e/ou K grande. Contudo, reduzir o valor de B e/ou aumentar