CAP 5

ANÁLISE DA RESPOSTA TRANSITÓRIA E DE REGIME ESTACIONÁRIO (DISCRETO)

SUMÁRIO

5.1. INTRODUÇÃO

Na análise e no projeto de sistemas de controle o uso de sinais de teste na entrada permite efetuar a comparação de desempenho entre diferentes sistemas. Os critérios de projeto têm como base a resposta a esses sinais ou a resposta dos sistemas às mudanças das condições iniciais (sem qualquer sinal de teste).

A resposta temporal, $c[nT_s]$, de um sistema de controle é dada pela equação:

$$c[nT_s] = \underbrace{c_{tr}[nT_s]}_{\text{Resposta Transitória}} + \underbrace{c_{ss}[nT_s]}_{\text{Resposta Estacionária}}$$

A resposta transitória permite analisar o comportamento dinâmico do sistema às variações do sinal de entrada, enquanto a resposta estacionária permite verificar a precisão através do valor do erro estacionário.

Os principais sinais de teste normalmente empregados são as funções: impulso, degrau, rampa, senoidais e parábola de aceleração.

A escolha do sinal de teste depende do comportamento da entrada, a que o sistema será submetido com maior frequência, sob condições normais de operação.

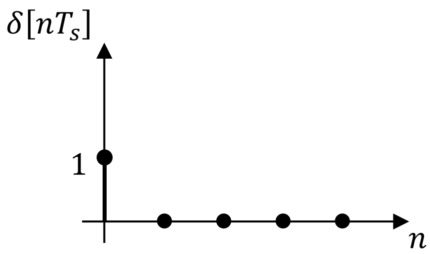
5.2. SINAIS DE TESTE

São utilizados com objetivo de testar os sistemas de controle quanto à sua natureza de resposta a determinados estímulos.

5.2.1. FUNÇÃO IMPULSO UNITÁRIO, $\delta[nT_s]$

Permite avaliar o sistema quando submetido a entradas abruptas instantâneas. A função impulso também é utilizada quando se quer determinar a função de transferência de um sistema de controle LIT.

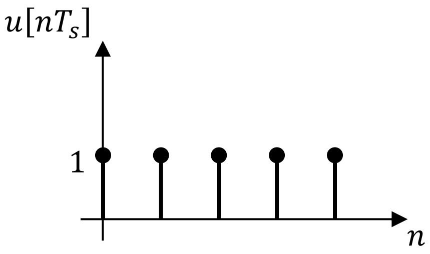
$$\delta[nT_s] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Z}\{\delta[nT_s]\} = 1$$



5.2.2. FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO, $u[nT_s]$

Permite avaliar o sistema quando submetido a variações abruptas e sustentadas da entrada.

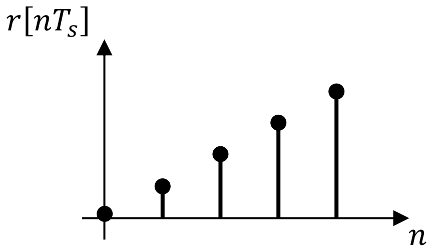
$$u[nT_s] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Z}\{u[nT_s]\} = \frac{z}{z-1}$$



5.2.3. FUNÇÃO RAMPA, $r[nT_s]$

Permite avaliar o sistema quando submetido a variações graduais da entrada.

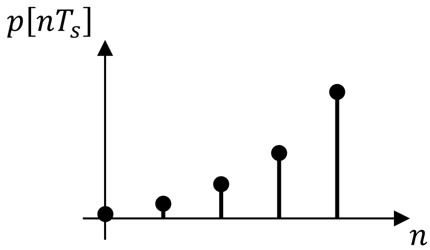
$$r[nT_s] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Z}\{r[nT_s]\} = T_s \frac{z}{(z-1)^2}$$



5.2.4. FUNÇÃO POLINOMIAL, $p[nT_s]$

Permite avaliar o sistema quando submetido à aceleração da entrada.

$$p[nT_s] = \begin{cases} n^2 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Z}\{p[nT_s]\} = \lim_{a \to 0} \left\{ \frac{d^2}{da^2} \left(\frac{z}{z - e^{-aT_s}} \right) \right\}$$



5.2.5. FUNÇÃO SENO

Permite avaliar o sistema quando submetido a diferentes frequências do sinal de entrada. Será estudada no capítulo de resposta em frequência de sistemas de controle – Sistemas Realimentados.

OBS: Existe uma relação entre os sinais de teste dado por suas derivadas.

$$\nabla_r[n] = u[n] \quad \text{e} \qquad \nabla_r^2[n] = \nabla_u[n] = \delta[n]$$

5.3. RESPOSTA DE SISTEMAS DE 1ª ORDEM

Um sistema de 1ª ordem possui a seguinte FTMA

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{\tau s}\right\} = \frac{1}{\tau}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Um sistema de 1ª ordem com realimentação unitária possui a FTMF dada por:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{\tau s + 1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1/\tau}{s + 1/\tau}\right\} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{z}{z - e^{-T_s/\tau}}\right)$$

A resposta de sistemas de 1ª ordem de malha fechada é obtida substituindo $R(z)$ pelos sinais de controle apresentados acima. Observe que a análise é impraticável analiticamente.

5.3.1. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO IMPULSO

Essa análise é computacional em sistemas discretos.

5.3.2. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO DEGRAU

Essa análise é computacional em sistemas discretos.

5.3.3. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO RAMPA

Essa análise é computacional em sistemas discretos.

OBS: A resposta à diferença de um sinal de entrada é igual à diferença da resposta do sistema ao sinal original (sem diferenciar). Isso é válido para qualquer sistema LIT.

$$\nabla_{c_r}[n] = c_u[n]$$
$$\nabla_{c_u}[n] = c_\delta[n]$$

5.4. RESPOSTA DE SISTEMAS DE 2ª ORDEM

Um sistema de 2ª ordem possui a seguinte FTMA

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \mathcal{Z}\left\{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\right\} = \left(\frac{\omega_n}{2\zeta}\right)\frac{\left(1-e^{-2\zeta\omega_n T_s}\right)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-2\zeta\omega_n T_s})}$$

onde, ζ é a constante de amortecimento e ω_n é a frequência natural não amortecida do sistema analógico. Um sistema de 2ª ordem com realimentação unitária possui a FTMF cuja análise é impraticável analiticamente.

5.4.1. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO IMPULSO

Essa análise é computacional em sistemas discretos.

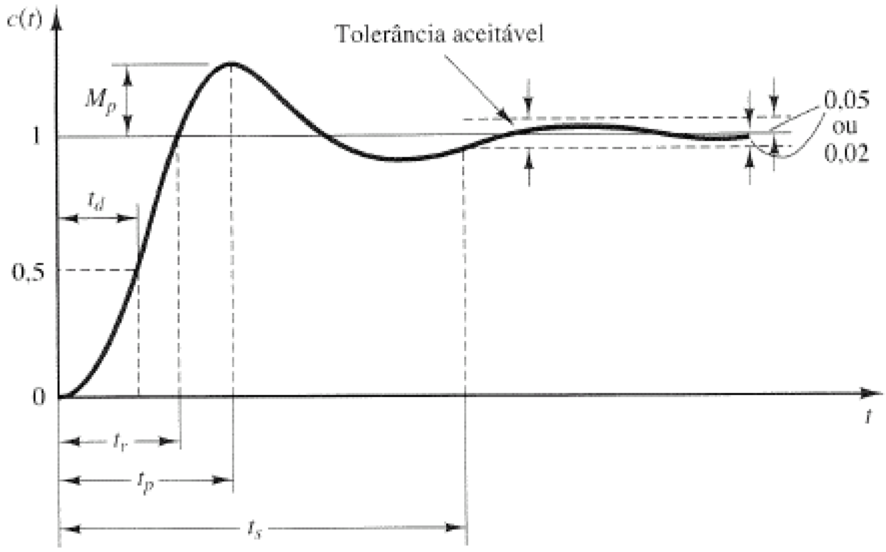
5.4.2. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO DEGRAU

Essa análise é computacional em sistemas discretos.

5.4.3. RESPOSTA À EXCITAÇÃO PELA FUNÇÃO RAMPA

Essa análise é computacional em sistemas discretos.

5.4.4. ANÁLISE DA RESPOSTA À EXCITAÇÃO EM DEGRAU



t_d - Tempo de Atraso.
t_r - Tempo de Subida.
t_p - Tempo de Pico.
t_s - Tempo de Acomodação (ou Tempo de Assentamento ou Regime)
M_p - Máximo Sobressinal (ou Máxima Ultrapassagem ou *Overshoot*)

Essa análise é computacional em sistemas discretos.

5.5. RESPOSTA DE SISTEMAS DE ORDEM SUPERIOR

O domínio relativo dos polos de malha fechada é determinado pela posição dos polos de malha fechada.

Se todos os polos de malha fechada se situarem dentro do círculo de raio unitário do plano $\mathcal{Z}$, os valores dos resíduos da expansão em frações parciais determinarão a importância relativa dos componentes da função de transferência.

Assim, se existir um zero de malha fechada próximo a um polo de malha fechada então o resíduo desse polo será pequeno. Isso porque um par de polos e zeros próximos vão se cancelar mutuamente.

A dominância está relacionada a aproximação dos polos na coordenada 1 do eixo real do plano complexo e na proximidade com o círculo de raio unitário.

5.6. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

A característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle é a **estabilidade absoluta**, isto é, se um sistema é ESTÁVEL ou INSTÁVEL.

Do conceito de estabilidade, precede o conceito de equilíbrio:

> *"Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer distúrbio, ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado."*

Assim, podemos definir a estabilidade absoluta:

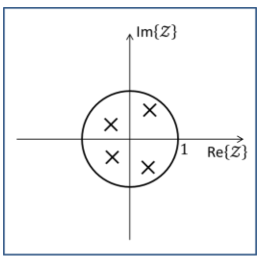
> *"Um sistema de controle LTI (Linear Time Invariant) é ESTÁVEL se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial."*

Por outro lado, pode-se definir a estabilidade crítica:

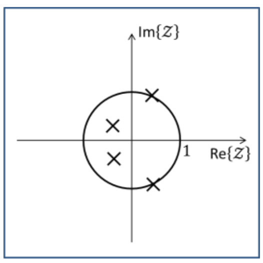
> *"Um sistema de controle LTI (Linear Time Invariant) é CRITICAMENTE ESTÁVEL se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua."*

Por fim a instabilidade:

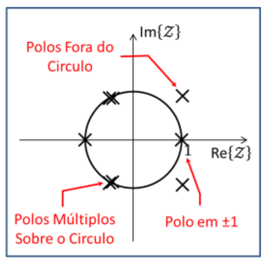
> *"Um sistema de controle LTI (Linear Time Invariant) é INSTÁVEL se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial."*



Estável



Marginalmente Estável



Instável

5.6.1. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE JURY

Nem sempre é possível obter as raízes da equação característica para determinar sua localização no plano $\mathcal{Z}$ complexo. Neste caso utiliza-se o critério de Jury para a determinação da estabilidade absoluta.

Dada a equação característica de um sistema em $\mathcal{Z}$

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

O teste de Jury para estabilidade absoluta consiste em verificar se as seguintes condições são verdadeiras:

1. $|a_0| < a_n$
2. $Q(1) > 0$
3. $Q(-1) \begin{cases} > 0 \; para \; n \; par \\ < 0 \; para \; n \; ímpar \end{cases}$

Se alguma não for verdadeira, então o sistema é NÃO ESTÁVEL. Sendo todas verdadeiras é necessário montar a tabela de Jury e verificar se

4. $|b_0| > |b_{n-1}|, \qquad |c_0| > |c_{n-2}|, \qquad \cdots$

onde,
$b_0 = a_0^2 - a_n^2$
$b_1 = a_0 a_1 - a_n a_{n-1}$
e assim sucessivamente, conforme a tabela de Jury.

A Tabela de Jury

Linha	z^0	z^1	z^2	z^3	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n	
	a_0				$\cdots$			a_n	b_0
	a_n				$\cdots$			a_0	
	a_0				$\cdots$		a_{n-1}		b_1
	a_n				$\cdots$		a_1		
1	a_0				$\cdots$	a_{n-2}			b_2
2	a_n				$\cdots$	a_2			
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_0		a_2		$\cdots$				b_{n-2}
	a_n		a_{n-2}		$\cdots$				
	a_0	a_1			$\cdots$				b_{n-1}
	a_n	a_{n-1}			$\cdots$				
	b_0				$\cdots$		b_{n-1}		c_0
	b_{n-1}				$\cdots$		b_0		
	b_0				$\cdots$	b_{n-2}			c_1
3	b_{n-1}				$\cdots$	b_1			
4	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	b_0		b_2		$\cdots$				c_{n-3}
	b_{n-1}		b_{n-3}		$\cdots$				
	b_0	b_1			$\cdots$				c_{n-2}
	b_{n-1}	b_{n-2}			$\cdots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n-3$	q_2	q_1	q_0						

Exemplo 1 – Examine a estabilidade para a seguinte equação característica

$$Q(z) = z^4 - 1{,}2z^3 + 0{,}07z^2 + 0{,}3z - 0{,}08 = 0$$

SOLUÇÃO

Aplicando o critério de Jury

1. $|a_0| < a_4 \Rightarrow 0{,}08 < 1$, Ok!
2. $Q(1) = 1^4 - 1{,}2(1)^3 + 0{,}07(1)^2 + 0{,}3(1) - 0{,}08 = 0{,}09 > 0$, Ok!
3. $Q(-1) = (-1)^4 - 1{,}2(-1)^3 + 0{,}07(-1)^2 + 0{,}3(-1) - 0{,}08 = 1{,}89 > 0$, (n par) Ok!

Montando a tabela de Jury

Linha	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	
1 2	a_0				a_4	b_0
	a_4				a_0	
	a_0			a_3		b_1
	a_4			a_1		
	a_0		a_2			b_2
	a_4		a_2			
	a_0	a_1				b_3
	a_4	a_3				
3 4	b_0			b_3		c_0
	b_3			b_0		
	b_0		b_2			c_1
	b_3		b_1			
	b_0	b_1				c_2
	b_3	b_2				
5	c_2	c_1	c_0			

Assim:

Linha	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	
1 2	-0,08				1	$b_0 = -0{,}994$
	1				-0,08	
	-0,08			-1,2		$b_1 = 1{,}176$
	1			0,3		
	-0,08		0,07			$b_2 = -0{,}0756$
	1		0,07			
	-0,08	0,3				$b_3 = -0{,}204$
	1	-1,2				
3 4	-0,994			-0,204		$c_0 = 0{,}946$
	-0,204			-0,994		
	-0,994		-0,0756			$c_1 = -1{,}184$
	-0,204		1,176			
	-0,994	1,176				$c_2 = 0{,}315$
	-0,204	-0,0756				
5	0,946	-1,184	0,315			

Verificações

4. $|b_0| > |b_3| \Rightarrow 0{,}994 > 0{,}204$, Ok!
   $|c_0| > |c_2| \Rightarrow 0{,}946 > 0{,}315$, Ok!

Assim, como todas as quatro condições foram satisfeitas, o sistema em questão é ESTÁVEL, ou seja, todas as raízes de $Q(z)$ estão dentro do círculo unitário. Como pode ser verificado:

$$Q(z) = (z - 0{,}8)(z + 0{,}5)(z - 0{,}5)(z - 0{,}4)$$

5.7. MATLAB

a) Características dos Sistemas de Controle
   i. $[\omega_n, \zeta]$ = *damp*(sys);
   ii. Outras funções: *pzmap, pole, zero, lsim, step, stepinfo, impulse, lsiminfo, residue, roots, ord2, rmodel, zpk, poly* e *printsys*.

5.8. LISTA DE EXERCÍCIOS

Livro Kuo 10 Ed: