CAP 4

REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS (SISTEMAS DISCRETOS)

SUMÁRIO

4.1. INTRODUÇÃO

Sistemas modernos de controle, geralmente, possuem muitas entradas e muitas saídas que se inter-relacionam de uma maneira complexa. Para análises desses sistemas é necessário o uso de modelos que permitam a redução da complexidade das expressões matemáticas, bem como a adequação para uso em sistemas computacionais.

4.2. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

É apropriada para sistemas que possuem várias entradas e várias saídas.

CASO DISCRETO

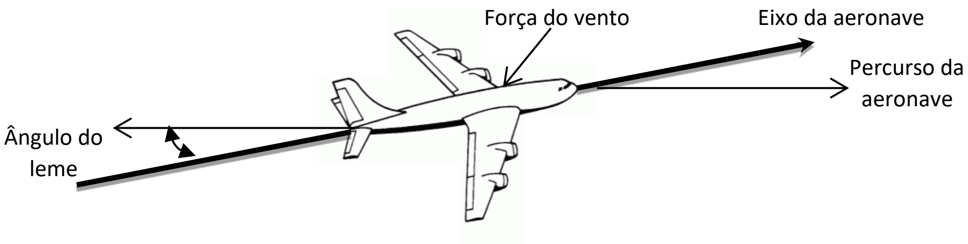
$$\vec{q}_{n\times 1}[k+1] = A_{n\times n}\vec{q}_{n\times 1}[k] + B_{n\times r}\vec{x}_{r\times 1}[k]$$
$$\vec{y}_{m\times 1}[k] = C_{m\times n}\vec{q}_{n\times 1}[k] + D_{m\times r}\vec{x}_{r\times 1}[k]$$

Exemplo 1 – Um sistema digital de controle de voo compensa a força do vento lateral, $x[k]$, ajustando o ângulo, $\theta[k]$, do leme da cauda da aeronave fazendo com que o percurso, $y[k]$, seja mantido mesmo com uma ligeira inclinação do eixo de direção da aeronave. As equações que descrevem o sistema de compensação estão relacionadas da seguinte forma:

$$\theta[k] = -3y[k-1] - \theta[k-1] + 4x[k]$$

$$y[k] = 2\theta[k-1] + 3\theta[k-2] + 5x[k]$$

Sabendo que **<u>a força do vento determina o posicionamento angular para manter o percurso</u>**, represente este sistema como um modelo no espaço de estados.



SOLUÇÃO

$$q_1[k] = \theta[k-2]$$

$$q_2[k] = q_1[k+1] = \theta[k-1]$$

$$q_2[k+1] = \theta[k] = -3y[k-1] - \theta[k-1] + 4x[k]$$

$$q_3[k] = y[k-1]$$

$$q_3[k+1] = y[k] = 2\theta[k-1] + 3\theta[k-2] + 5x[k]$$

Arrumando:

$$q_1[k+1] = q_2[k]$$

$$q_2[k+1] = -q_2[k] - 3q_3[k] + 4x[k]$$

$$q_3[k+1] = 3q_1[k] + 2q_2[k] + 5x[k]$$

$$\theta[k] = -q_2[k] - 3q_3[k] + 4x[k]$$

$$y[k] = 3q_1[k] + 2q_2[k] + 5x[k]$$

Colocando no EE

$$\begin{bmatrix} q_1[k+1] \\ q_2[k+1] \\ q_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \\ q_3[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} x[k]$$

$$\begin{bmatrix} \theta[k] \\ y[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[k] \\ q_2[k] \\ q_3[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} x[k]$$

4.3. TRANSFORMAÇÃO DE MODELOS DE SISTEMAS

A partir da representação no espaço de estados é possível obter a função de transferência para cada uma entrada e cada uma saída.

CASO DISCRETO

$$\begin{cases} \vec{q}[n+1] = A\vec{q}[n] + B\vec{x}[n] \\ \vec{y}[n] = C\vec{q}[n] + D\vec{x}[n] \end{cases}$$

No domínio Z

$$\begin{cases} zQ(z) = AQ(z) + BX(z) \\ Y(z) = CQ(z) + DX(z) \end{cases}$$

Assim,

$$Q(z)(zI - A) = BX(z)$$

$$Q(z) = \frac{B}{(zI - A)} X(z)$$

Substituindo na outra equação

$$Y(z) = CQ(z) + DX(z)$$

$$Y(z) = C\frac{B}{(zI - A)} X(z) + DX(z)$$

$$Y(z) = \left(C\frac{1}{(zI - A)} B + D \right) X(z)$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D}$$

Para obter a função de transferência para cada entrada e saída basta colocar zeros nas posições das matrizes B e D correspondentes às entradas que não serão consideradas.

A equação característica do sistema é a matriz

$$\boxed{E_c(z) = |zI - A|}$$

As raízes da equação característica (polos da função de transferência) são os ***autovalores***, λ, de A que são obtidos através do determinante da matriz característica e eles são invariantes a uma transformação linear sobre a matriz da equação característica.

$$\boxed{|zI - A| = 0}$$

onde, | | é o determinante.

OBS: A Inversa de uma matriz é obtida fazendo:

$$M^{-1} = \frac{Adj(M)}{|M|}$$

$$Adj(M) = Cof^{T}(M)$$

$$Cof(M) = (-1)^{i+j} Det\left(M_{-i,-j}\right)$$

4.4. MATLAB

Funções importantes: *ss*, *tf2ss*, *ss2tf*, *det*, *inv*, *residue*, *roots*, *eye*, *eig*.

4.5. LISTA DE EXERCÍCIOS

KUO 10 Ed: