

# Sistemas Realimentados - 2023/1

Nome: William Fernandes Pereira

Data de entrega limite: 4/4

## Trabalho 1

Referências para ler para este trabalho

- [Manual rápido do Matlab](#)
- [Resposta transitória e estacionária](#)

## Resposta transitória e de regime de sistemas dinâmicos

Definições:

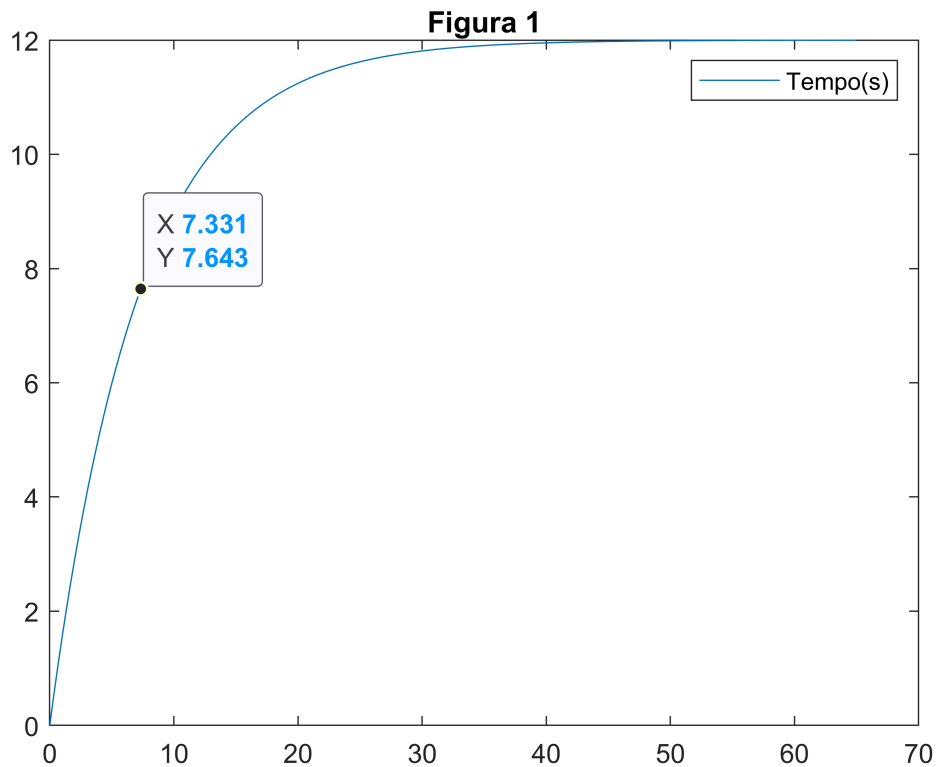
```
datetime('now')
```

```
ans = datetime  
05-Apr-2023 15:25:25
```

```
I=29;  
[tau,zeta,wn,teta,p] = init(I);  
g1=tf(p,[tau 1]);  
g2=tf(wn^2,[1 2*zeta*wn wn^2]);  
g0=tf(p,[tau 1], 'InputDelay',teta);  
g3=tf(p^3,poly(-[p p p]));  
[y0,t0]=step(g0);  
[y1,t1]=step(g1);  
[y2,t2]=step(g2);
```

1) Obtenha a constante de tempo, o tempo de estabilização e o ganho do sistema cuja resposta ao degrau unitário é mostrada na figura 1.

```
figure;  
plot(t1,y1);legend('Tempo(s)');title('Figura 1');  
  
xlim('auto')  
ylim('auto')  
ax = gca;  
chart = ax.Children(1);  
datatip(chart,7.20,7.56);
```



Resposta:

**- Constante de tempo:**

Temos que a constante de tempo é obtida analisando o gráfico e observando o valor em regime, sendo o tempo em que a saída atinja 63% do valor de regime. Como na figura 1 o valor em regime é 12, temos que 63% do valor em regime é 7.56. Então, analisando o gráfico, temos que **T = 7.2s**.

**- Tempo de estabilização:**

Podemos aproximar o tempo de estabilização como sendo  $4T$ , ou seja,  $t_s = 4 * 7.2s \therefore t_s = 28.8s$ .

**- Ganho:**

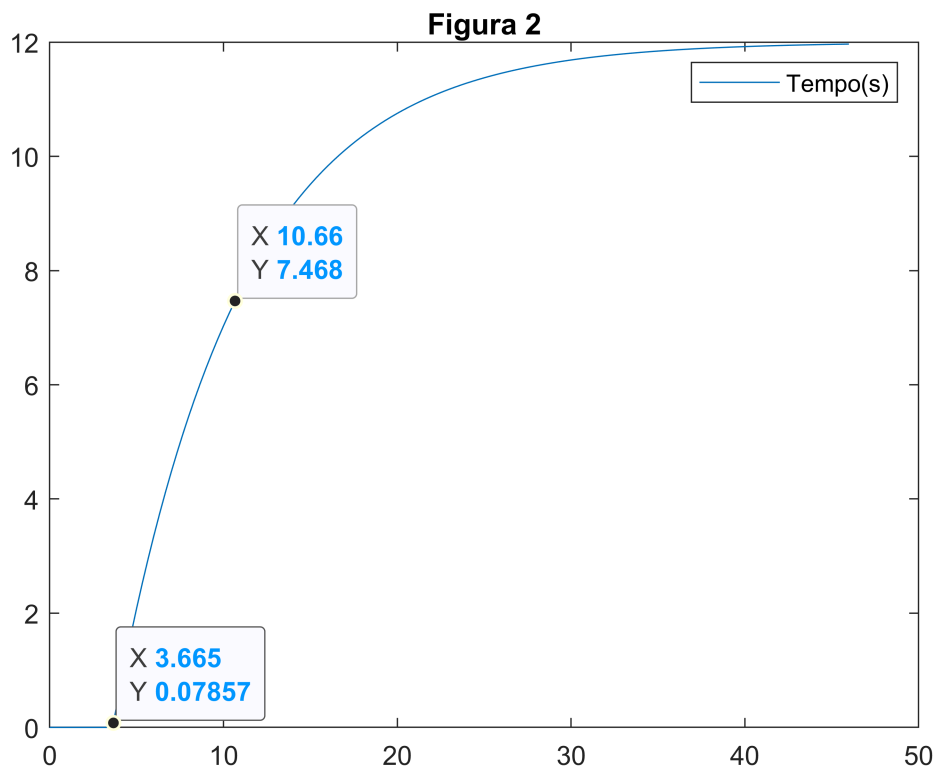
O ganho é a relação entre entrada e saída, saída = k \* entrada. Sabemos que a entrada é um degrau unitário e a saída, em regime, é 12.

Então  $12 = k * 1 \therefore$  o ganho é **K = 12**.

2) Obtenha a constante de tempo, o tempo morto, o tempo de estabilização e o ganho do sistema cuja resposta degrau unitário é mostrada na figura 2.

```
figure;
plot(t0,y0);legend('Tempo(s)');title('Figura 2');
ax = gca;
chart = ax.Children(1);
datatip(chart,10.66,7.468);
```

```
ax = gca;
chart = ax.Children(1);
datatip(chart,3.665,0.07857);
```



Resposta:

#### - Constante de tempo

Assim como na questão anterior, o valor em regime é 12 e 63% do valor em regime também é 7.56. Mas nesse caso temos um atraso ou ponto morto de 3.5s, assim, podemos obter a constante de tempo sendo  $T = 10.8s - 3.6s \therefore T = 7.2s$ .

#### - Tempo morto

Analisando o gráfico, podemos obter o tempo morto sendo de 3.6s.

#### - Tempo de estabilização

Podemos aproximar o tempo de estabilização como sendo  $4T$ , ou seja,  $t_s = 4 * 7.2s \therefore t_s = 28.8s$ .

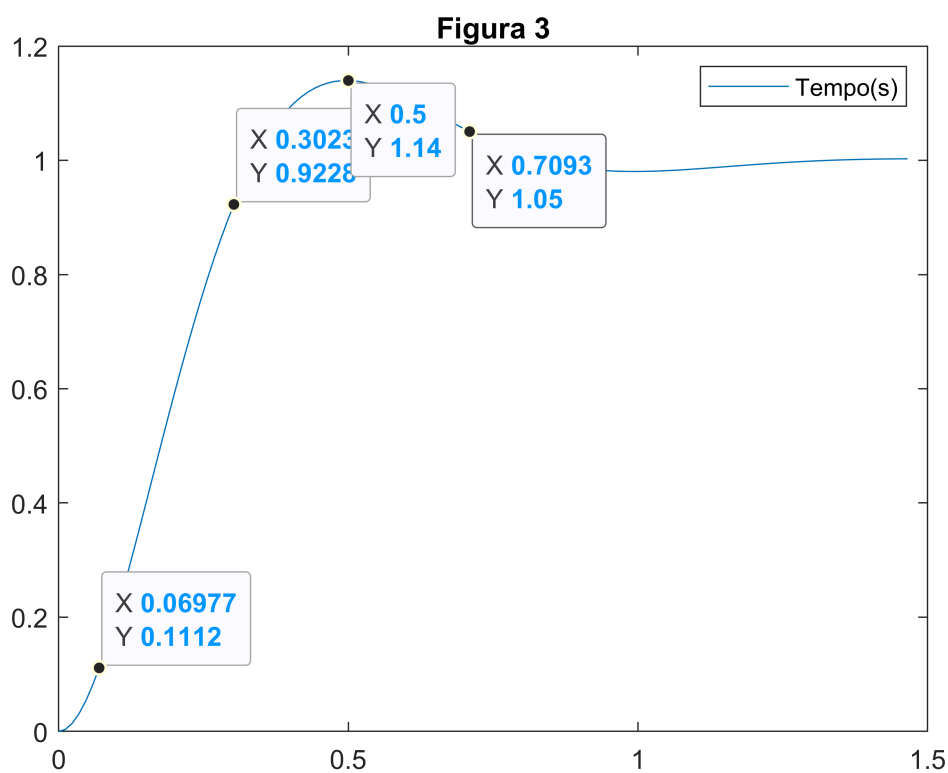
#### - Ganho

O ganho é a relação entre entrada e saída, saída = k \* entrada. Sabemos que a entrada é um degrau unitário e a saída, em regime, é 12.

Então  $12 = k * 1 \therefore$  o ganho é **K = 12**.

3) Obtenha o tempo de subida, a sobre-elevação (0 a 100%), o tempo de estabilização, o ganho do sistema cuja resposta ao degrau unitário é mostrada na figura 3.

```
figure;  
plot(t2,y2);legend('Tempo(s)');title('Figura 3');  
  
ax = gca;  
chart = ax.Children(1);  
datatip(chart,0.3023,0.9228);  
  
ax = gca;  
chart = ax.Children(1);  
datatip(chart,0.06977,0.1112);  
  
ax = gca;  
chart = ax.Children(1);  
datatip(chart,0.5,1.14);  
  
ax = gca;  
chart = ax.Children(1);  
datatip(chart,0.7093,1.05);
```



Resposta:

- Tempo de subida

O tempo de subida é o tempo que leva para a resposta ir de 10% para 90% do valor em regime. Pelo gráfico, vemos que o valor em regime é de 1, então 10% é 0.1 e 90% é 0.9. Também pelo gráfico, podemos dizer que  $t(0.1) = 0.06s$  e  $t(0.9) = 0.30s$ .

Temos que  $t_r = t(0.9) - t(0.1) = 0.30s - 0.06s \therefore \mathbf{t_r = 0.24s}$

### - Sobre-elevação (0 a 100%)

A sobre-elevação é a diferença entre o valor máximo e o valor em regime da resposta, em porcentagem. Do gráfico, obtemos que o valor máximo da resposta é de 1.14 e já sabemos que o valor em regime é 1.

$$\text{Assim, } UP = \frac{V_{\text{máx}} - V_{\text{rp}}}{V_{\text{rp}}} = \frac{1.14 - 1}{1} = 0.14 \quad \mathbf{UP = 14\%}$$

### - Tempo de estabilização

Em sistemas de 2º ordem, o tempo de estabilização é o tempo necessário para que a resposta se estabilize dentro de uma faixa específica, nesse caso de 5% em torno do valor final. Como o valor final da nossa resposta é 1, a faixa está entre 0.95 e 1.05.

Analisando o gráfico, temos que  $\mathbf{t_s = 0.70s}$

### - Ganho

O ganho é a relação entre entrada e saída, saída = k \* entrada. Sabemos que a entrada é um degrau unitário e a saída, em regime, é 1.

Então  $1 = k * 1 \therefore$  o ganho é  $\mathbf{K = 1}$ .

4) Na figura 4 mostra-se o efeito do amortecimento  $\zeta$  na sobre-elevação (UP) e tempo de estabilização (ts).

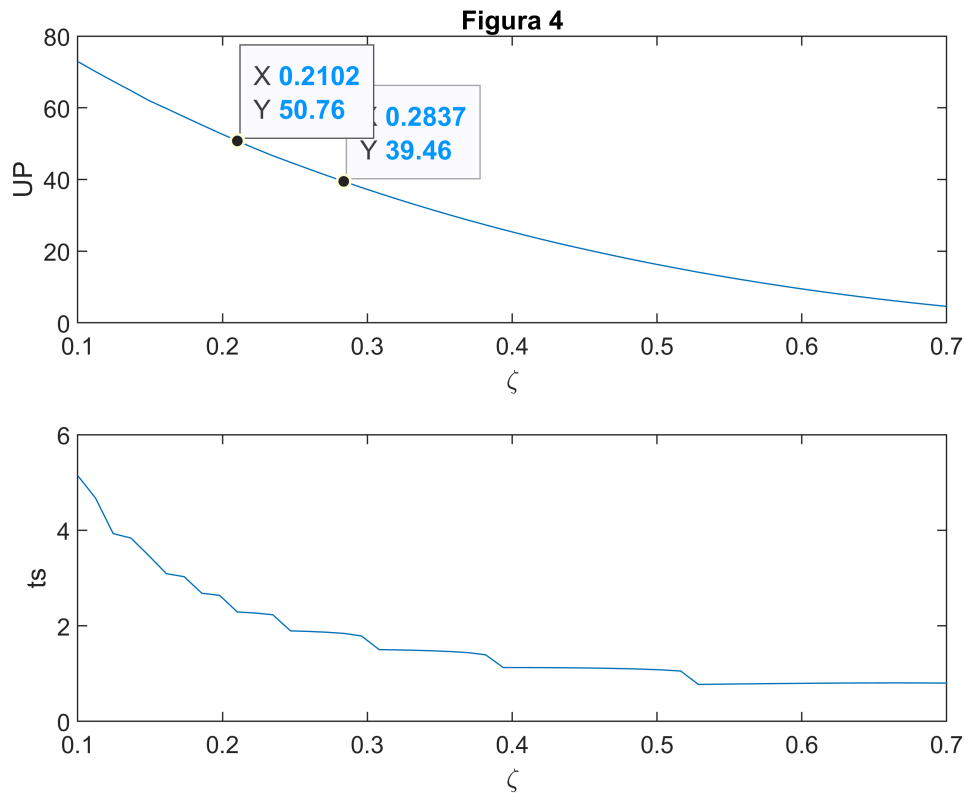
A relação UP com  $\zeta$  é dada por  $UP = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$ , e a relação de ts com  $\zeta$  é dada aproximadamente por

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \quad 0 < \zeta < 0.9.$$

```
z=linspace(0.1,0.7,50);
ts=[];UP=[];
for i=1:50
    m=tf(wn^2,[1 2*z(i)*wn wn^2]);
    S=stepinfo(m);
    ts(i,1)=S.SettlingTime;
    UP(i,1)=S.Overshoot;
end
figure;
subplot(211);plot(z,UP);xlabel('\zeta');ylabel('UP');title('Figura 4')
subplot(212);plot(z,ts);xlabel('\zeta');ylabel('ts')

subplot(2,1,1)
ax = gca;
chart = ax.Children(1);
datatip(chart,0.2837,39.46);
```

```
subplot(2,1,1)
ax = gca;
chart = ax.Children(1);
datatip(chart,0.2102,50.76);
```



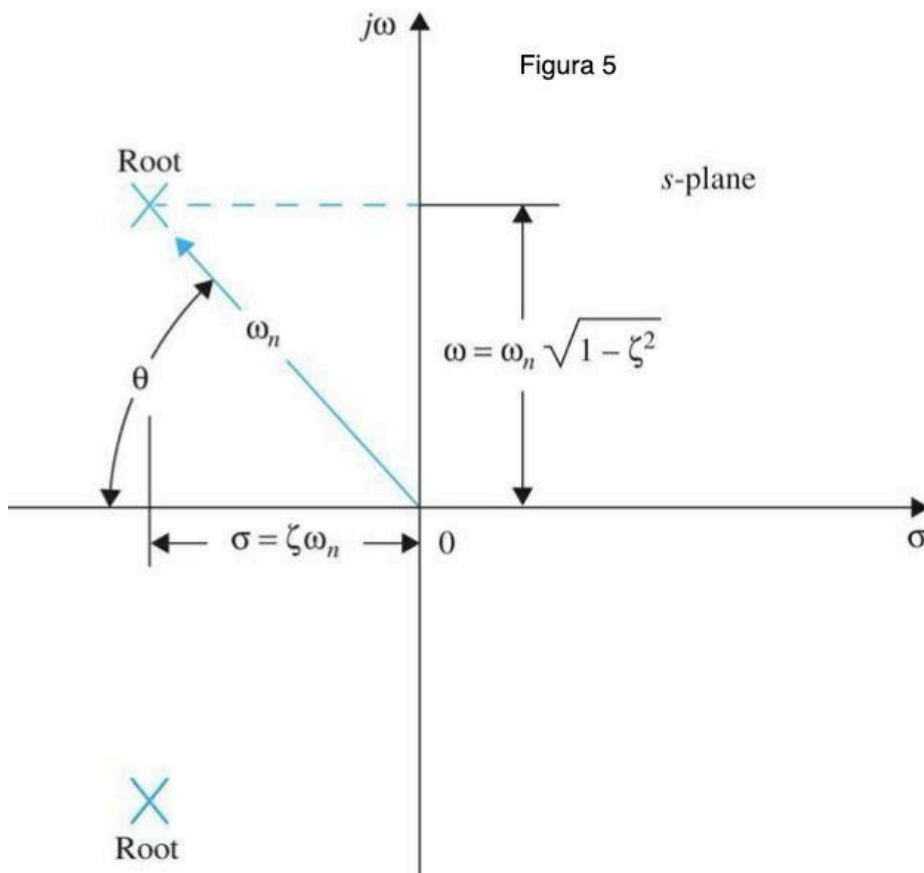
Explique, observando as figuras, como  $\zeta$  se relaciona com  $UP$  e  $ts$ , e obtenha a faixa de valores de  $\zeta$  para os quais a sobre-elevação esteja entre 40 e 50%, verificando a que faixa de valores de tempo de estabelecimento isso corresponde.

Resposta:

Observando a figura 4, podemos observar que quanto maior é o amortecimento, menores são a sobre-elevação e o tempo de estabelecimento. O que faz muito sentido, visto que quanto mais amortecido é um sistema, menor será a sobre-elevação e, com baixa sobre-elevação, o tempo para que o sistema atinja o seu valor de regime será menor.

Do gráfico, temos que o intervalo de  $\zeta$  para que a sobre-elevação esteja entre 40% e 50% é  $0.21 < \zeta < 0.28$ , nessa faixa de valores, o tempo de estabelecimento se encontra entre  $1.84 < ts < 2.29$ .

Seja a localização do par de polos complexos de uma FT de um protótipo de segunda ordem mostrada na figura 5.



5) Use a expressão que relaciona de  $t_s$  com  $\zeta$  e  $\omega_n$  para explicar onde devem estar os polos de malha fechada para um menor tempo de estabilização.

Resposta:

Sabendo que  $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$  e que a distância, no eixo  $\sigma$ , é  $\sigma = \zeta \omega_n$ , podemos afirmar que  $t_s$  é inversamente

proporcional à distância entre os polos e o eixo  $j\omega$ , ou seja, os pólos devem estar à **esquerda** do eixo  $j\omega$  (pois se estivessem à direita, o sistema seria instável e não estabilizaria) e **quanto mais longe os pólos de malha fechada estiverem do eixo  $j\omega$ , menor será o tempo de estabilização.**

6) Sabendo que  $\zeta = \cos(\theta)$ , em que região do plano complexo devem estar os polos para que UP seja menor que 5%?

Resposta:

Temos  $UP = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$ , e  $UP < 5$ , então podemos resolver da seguinte maneira:

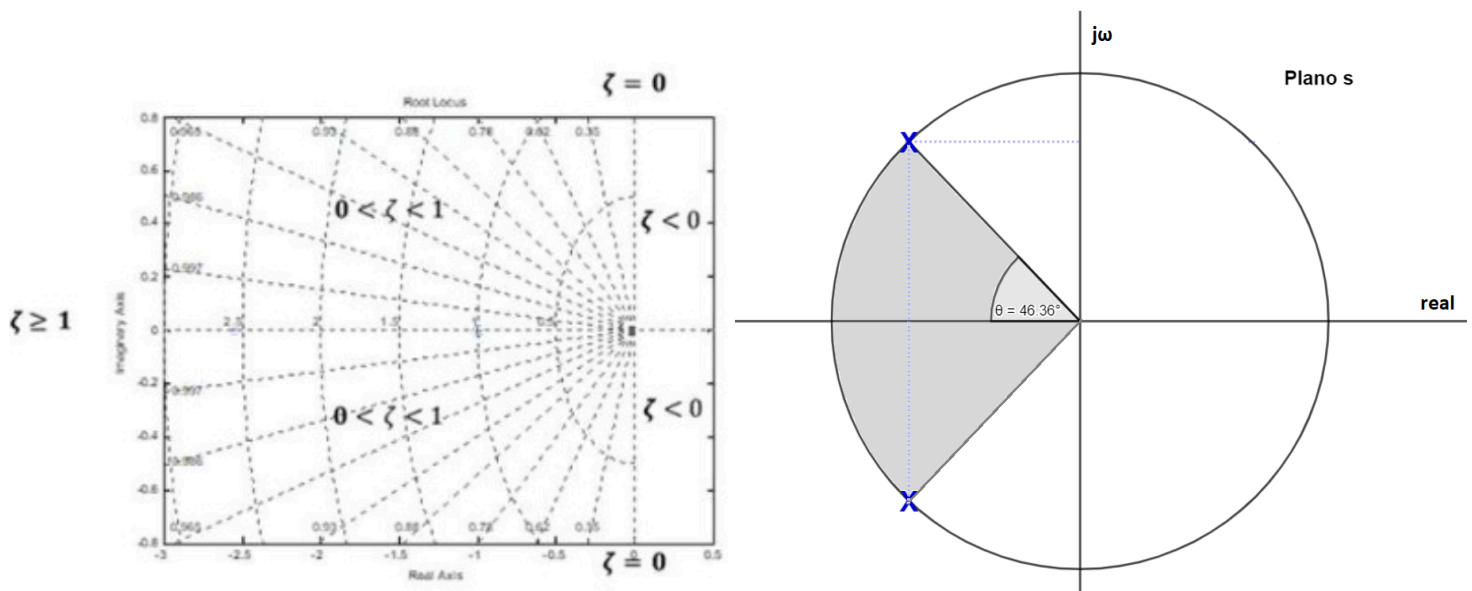
$$5 > 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$0,05 > e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \ln(0,05) > \ln(e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}) \rightarrow -2.9957 > \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow 2.9957 < \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

então, temos que  $\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} > \frac{2.9957}{\pi} \therefore \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} > 0.9535$ .

Com isso, resolvemos a inequação com  $\zeta > 0.69$ , sendo  $UP < 5$  no intervalo  $0.69 < \zeta < 0.9$ . Como  $\zeta = \cos(\theta)$ , temos a condição angular de  $\cos(\theta) > 0.69$ , ou seja,  $\theta > 46.36^\circ$

Analisando a figura abaixo da esquerda (*fonte: material do Prof. Klaus*), podemos afirmar que para  $\zeta$  ser maior que 0.69 e  $UP < 5$ , os polos devem estar à esquerda do eixo  $j\omega$ . E como encontramos a condição angular para  $\theta$ , podemos especificar melhor a região onde os polos devem estar, como mostrado na figura abaixo da direita (*fonte: produção do próprio autor*). Obs: as duas fatias foram hachuradas pois os polos são espelhados em relação ao eixo real.

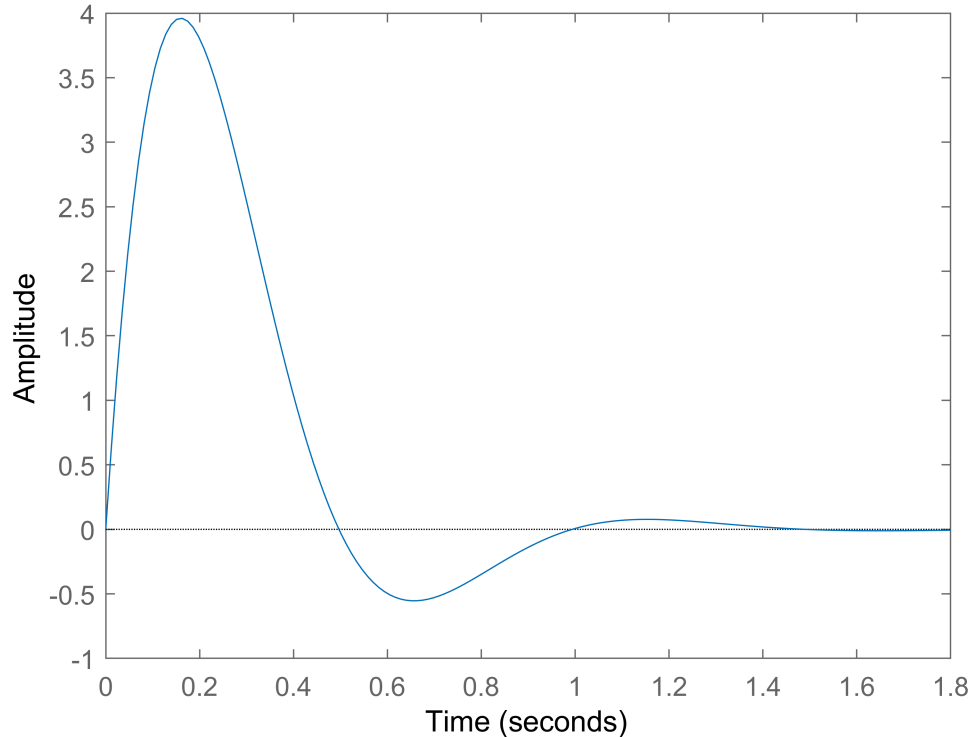


7) A figura 6 mostra a resposta ao impulso do sistema de segunda ordem do item 3. Explique como obter a resposta ao impulso a partir de  $G(s)$  usando a transformada de Laplace.

```
figure; impulse(g2); title('Figura 6')
```



**Figura 6**



Resposta:

Partindo do pressuposto de que **o sistema é linear e invariante no tempo**, podemos obter a resposta ao impulso a partir de  $G(s)$ , usando a transformada de Laplace. Basta seguir o passo a passo abaixo:

- Definir a função de transferência  $G(s)$  do sistema, que nesse caso é  $G_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{7.4615^2}{s^2 + 2 * 0.5308 * 7.4615s + 7.4615^2}$ .
- Após isso, devemos aplicar um impulso unitário  $\delta(t)$  à entrada do sistema.
- Agora, encontramos a transformada de Laplace  $U(s)$  da entrada impulso  $\delta(t)$ . Porém a transformada do impulso é conhecida, sendo  $L^{-1}\{\delta(t)\} = 1$ .
- Calcula-se a transformada de Laplace da resposta do sistema  $y(s)$  para a entrada  $U(s)$  usando a função de transferência  $G(s)$ . Porém,  $U(s) = 1$ , então, temos:

$$y(s) = G(s) * U(s) \rightarrow y(s) = G(s) * 1 \quad \therefore \quad \mathbf{y(s) = G(s)}$$

- Para facilitar os cálculos subsequentes, devemos escrever a função de transferência  $G(s)$  na forma de soma de frações parciais, no seguinte formato:

$$\mathbf{G(s) = \frac{K_1}{(s - p_1)} + \frac{K_2}{(s - p_2)} + \frac{K_3}{(s - p_3)} + \dots + \frac{K_n}{(s - p_n)}}$$

- Com isso, calculamos a transformada inversa de Laplace de  $y(s)$  para obter a resposta ao impulso  $h(t)$  do sistema.

$$h(t) = L^{-1}\{G(s)\}$$

- Enfim, obtemos a resposta ao impulso de  $G(s)$  através da transformada de Laplace, para o intervalo de  $0 \leq \zeta \leq 1$ .

$$\text{sendo } G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \text{temos } g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \text{ para } t \geq 0.$$

8) Observe a resposta ao degrau do item 3) e escolha um tempo de amostragem de 10% do valor do tempo de estabilização medido. Discretize o modelo  $g_2$  usado com o comando `c2d` e plote no mesmo gráfico a resposta ao degrau dos sistemas contínuo e discreto.

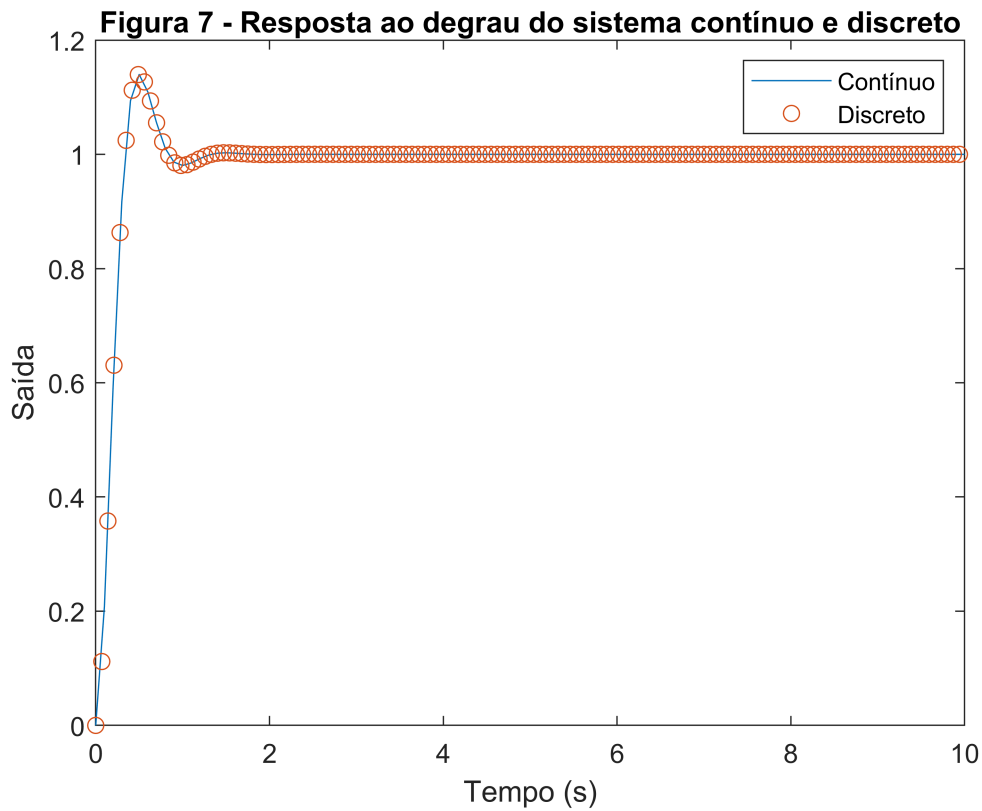
```
ts = 0.7; % tempo de estabilização do sistema, medido no item 3
t_amostragem = 0.1*ts; % tempo de amostragem de 10% do tempo de estabilização.
%----- Sistema Contínuo -----

t = 0:0.1:10; % vetor de tempo de 0 a 10 segundos, com passo de 0.01s
u = ones(size(t)); % entrada degrau unitário com tamanho igual ao do vetor
y = lsim(g2,u,t); % resposta do sistema contínuo ao degrau.

%----- Sistema Discreto -----

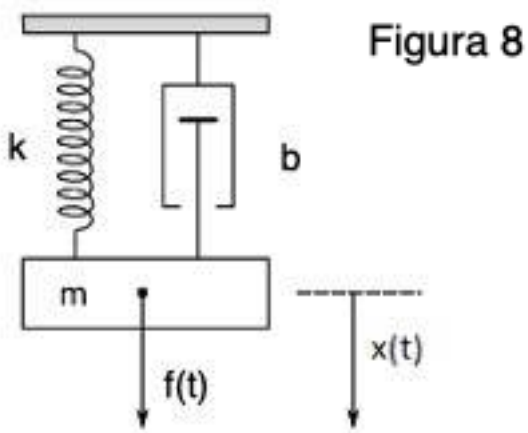
g2d = c2d(g2, t_amostragem, 'zoh'); % modelo discretizado usando o método ZOH (Hold zero-order)
td = 0:t_amostragem:10; % vetor de tempo discreto de 0 a 10 segundos, com passo de t_amostragem
ud = ones(size(td)); % entrada degrau unitário com tamanho igual ao do vetor
yd = lsim(g2d, ud, td); % resposta do sistema discreto ao degrau

%----- Plotando o Gráfico -----
plot(t,y,'-', td,yd,'o') % plotando ambos os gráficos juntos
legend('Contínuo','Discreto')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saída')
title('Figura 7 - Resposta ao degrau do sistema contínuo e discreto')
```



9) Seja o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na figura 8 e a equação diferencial que gere seu comportamento.  $x$  é o deslocamento em metros e  $F$  a força aplicada em Newtons.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$



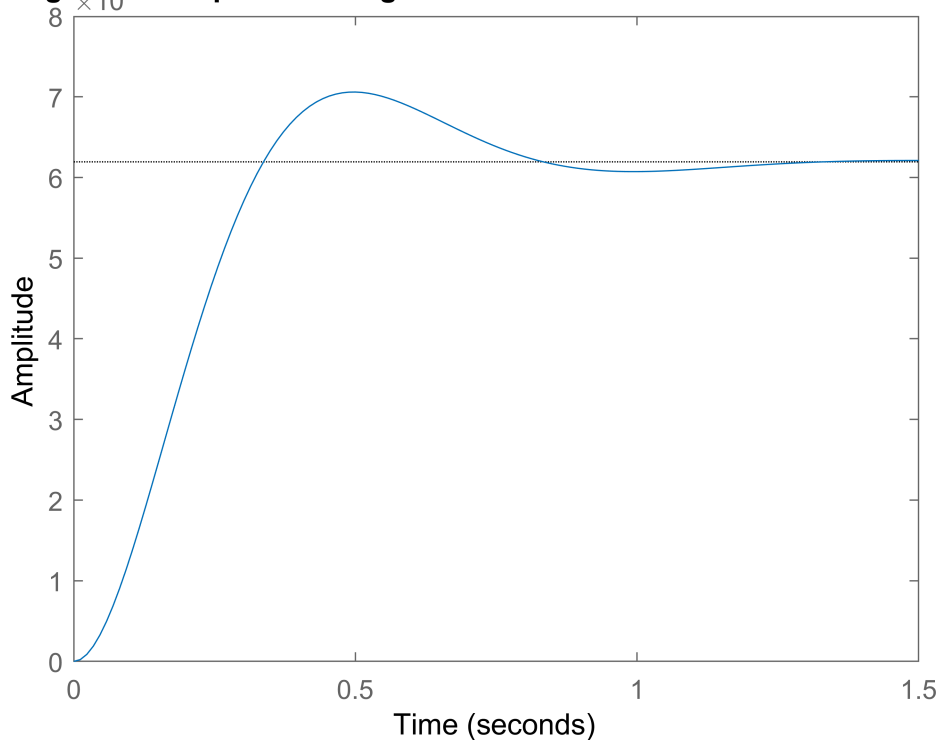
Obtenha a função de transferência  $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$  e faça sua simulação ao degrau com os parâmetros  $M, K, B$  definidos abaixo. Qual o deslocamento máximo da massa e qual seu tempo de estabelecimento?

Resposta:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k}$$

```
M=1;
K=M*wn^2;
B1=2*M*zeta*wn; % Aqui precisei renomear a variável de B para B1, para que não dê problema com
g = tf(1, [M B1 K]);
step(g)
title('Figura 9 - Resposta ao Degrau do sistema massa-mola-amortecedor');
```

**Figura 9- Resposta ao Degrau do sistema massa-mola-amortecedor**



Com a aplicação de uma força de 1 N (aplicou-se entrada ao degrau no sistema), foi gerado o gráfico da figura 9, onde podemos tirar as seguintes conclusões:

#### - Deslocamento máximo:

O deslocamento da massa com a resposta ao degrau é observado no gráfico da figura 9 como a amplitude da saída. O deslocamento máximo pode ser dito como o valor da amplitude máxima da saída, assim sendo, o deslocamento máximo é de  $7.059 \times 10^{-4}$  m, como marcado no gráfico.

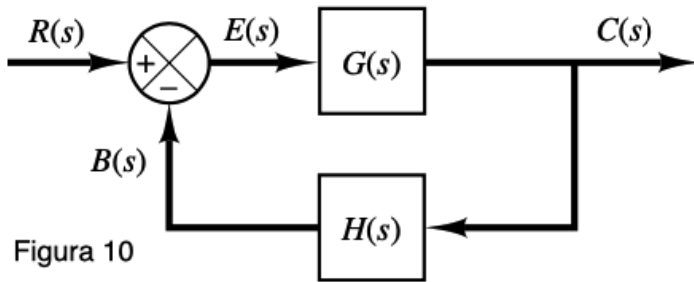
#### - Tempo de estabelecimento:

O sistema massa-mola é de 2º ordem, sendo assim, o tempo de estabilização é o tempo necessário para que a resposta se estabilize dentro de uma faixa específica, nesse caso de 5% em torno do valor final. Como o valor final da resposta é  $6,211 \times 10^{-4}$ , a faixa está entre  $5,900 \times 10^{-4}$  e  $6,521 \times 10^{-4}$ .

Com essas condições e analisando o gráfico, temos que **ts = 0.77s**.

obs: nessa questão tentei deixar marcado o ponto no gráfico, porém estava dando erro no código, por isso não está marcado.

10) Seja o diagrama de blocos mostrado abaixo.



Obtenha:

$$\frac{E(s)}{R(s)} \rightarrow \text{Sabemos que } \mathbf{E(s) = R(s) - B(s)}, \mathbf{B(s) = C(s)H(s)} \text{ e } \mathbf{C(s) = E(s)G(s)}.$$

$$\text{Assim, } E(s) = R(s) - C(s)H(s) \therefore E(s) = R(s) - E(s)G(s)H(s)$$

$$\text{Organizando os termos, temos que } E(s)[1 + G(s)H(s)] = R(s)$$

Passando  $R(s)$  para o lado esquerdo e  $[1 + G(s)H(s)]$  para o lado direito, ambos dividindo, concluímos que:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} \rightarrow \text{Temos que } \mathbf{C(s) = E(s)G(s)}, \mathbf{R(s) = E(s) + B(s)} \text{ e } \mathbf{B(s) = C(s)H(s)}.$$

$$\text{Então } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{E(s)G(s)}{E(s) + B(s)}$$

$$\text{como } \mathbf{B(s) = C(s)H(s)}, \text{ temos: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{E(s)G(s)}{E(s) + C(s)H(s)} \rightarrow$$

$$\text{mas } \mathbf{C(s) = E(s)G(s)}, \text{ então: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{E(s)G(s)}{E(s) + E(s)G(s)H(s)}$$

$$\text{isolando } E(s), \text{ temos: } \frac{E(s)}{E(s)} * \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\therefore \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

11) Seja o sistema massa-mola-amortecedor do item 9. Obtenha o modelo em variáveis de estado definido pelas matrizes [A,B,C,D] de modo que  $x_1(t)$  seja a posição e  $x_2(t)$  seja a velocidade. Aplique então um degrau e plote os dois estados, explicando seu comportamento. Dica: veja o comando tf2ss.

sendo  $x_1(t)$  a posição da massa e  $x_2(t)$  a velocidade da massa, temos:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \text{ (a derivada da posição é a velocidade)}$$

$$\dot{x}_2(t) = \left(\frac{-B}{M}\right) * x_2(t) + \left(\frac{-K}{M}\right) * x_1(t) + \left(\frac{1}{M}\right) * u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] * [x_1(t); x_2(t)]$$

onde  $u(t)$  é a entrada do sistema (**força, em N, aplicada na massa**) e  $y(t)$  é a saída do sistema (**posição da massa**).

Como pedido no enunciado, temos as Matrizes [A, B, C, D], sendo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-K}{M} & \frac{-B}{M}; 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0]$$

$$D = 0$$

```
% Obtendo as matrizes para o modelo em variáveis de estado.
[A, B, C, D] = tf2ss(1, [M, B1, K]);
```

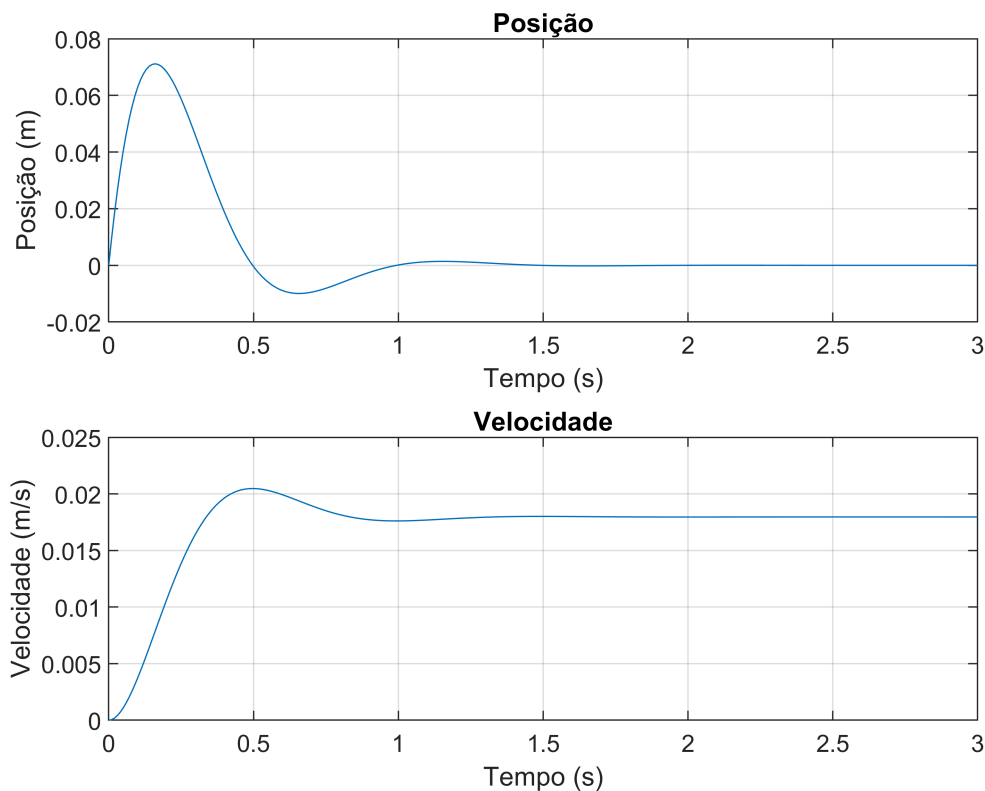
```
% Definindo o vetor de tempo e a entrada degrau
t = 0:0.01:3;
u = ones(size(t));
```

```
% Simulando a resposta do sistema
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [0; 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0);
```

```
% Plotando as variáveis de estado
subplot(2,1,1);
plot(t, x(:,1));
title('Posição');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Posição (m)');
grid on;
```

```
subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,2));
title('Velocidade');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Velocidade (m/s)');
```

```
grid on;
```



A resposta do sistema pode ser analisada em relação à sua estabilidade e amortecimento. Se o sistema for estável, a massa irá oscilar em torno do ponto de equilíbrio sem aumentar ou diminuir a amplitude. Se for instável, a amplitude das oscilações aumentará com o tempo, afastando a massa do ponto de equilíbrio. Como podemos observar no gráfico, trata-se de um sistema estável, pois a massa oscila em torno do ponto de equilíbrio (posição = 0 m), tendendo para esse ponto à medida em que o tempo aumenta.

12) Seja  $g_{ma}$  definida abaixo.

```
gma=tf(wn^2*[1/p 1],[1 2*zeta*wn 0])
```

$g_{ma} =$

$$\frac{4.64 s + 55.67}{s^2 + 7.921 s}$$

Continuous-time transfer function.

Obtenha seus polos e zeros de malha aberta e de malha fechada.

Resposta:

**Polos e Zeros de  $g_{ma}$ :**

```
% Obtendo os Polos de gma usando a função pole() do matlab.  
pole(gma)
```

```
ans = 2x1
      0
     -7.9207
```

```
% Obtendo os Zeros de gma usando a função zero() do matlab.
zero(gma)
```

```
ans = -12.0000
```

### Polos e Zeros de gmf:

```
% Usando a função feedback para obter a gmf.
gmf = feedback(gma,1)
```

```
gmf =

      4.64 s + 55.67
      -----
      s^2 + 12.56 s + 55.67
```

Continuous-time transfer function.

```
% Obtendo os Polos de gmf usando a função pole() do matlab.
pole(gmf)
```

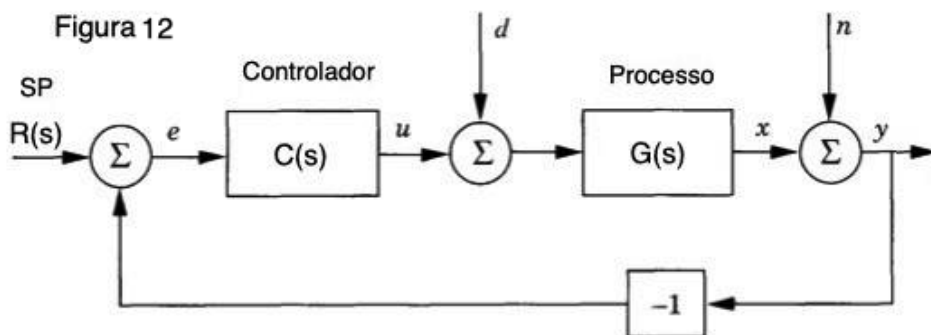
```
ans = 2x1 complex
     -6.2801 + 4.0292i
     -6.2801 - 4.0292i
```

```
% Obtendo os Zeros de gmf usando a função zero() do matlab.
zero(gmf)
```

```
ans = -12.0000
```

Análise do erro em regime. Seja o diagrama de blocos mostrado abaixo com  $G(s)$  definida abaixo.

```
G=tf(p^2,poly(-[p p]));
```



13) Qual o erro em regime para uma entrada degrau unitário caso  $C(s) = K$ ?

Resposta:



**Entrada degrau unitário:**  $R(s) = \frac{1}{s}$

Como consta no material de apoio, o erro em regime pode ser calculado da seguinte maneira:

$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)}$ , considerando  $C(s) = k$  e a entrada  $R(s) = \frac{1}{s}$ , temos que:

$$\frac{E(s)}{\frac{1}{s}} = 1 - \frac{K}{\frac{1}{s}}$$

$$E(s) = \frac{1}{s} - K$$

O erro em regime é obtido pelo **teorema do valor final**:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \left( \frac{1}{s} - K \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} 1 - \lim_{s \rightarrow \infty} sK = 1 - \infty \quad \therefore \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot E(s) = -\infty$$

**O Erro em regime para uma entrada degrau para caso  $C(s) = K$  é  $-\infty$ .**

14. Repita o item 13 para  $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$

Resposta:

**Entrada degrau unitário:**  $R(s) = \frac{1}{s}$

Como consta no material de apoio, o erro em regime pode ser calculado da seguinte maneira:

$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)}$ , considerando  $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$  e a entrada  $R(s) = \frac{1}{s}$ , temos que:

$$\frac{E(s)}{\frac{1}{s}} = 1 - \frac{K_p + \frac{K_I}{s}}{\frac{1}{s}} \quad \rightarrow \quad \frac{E(s)}{\frac{1}{s}} = 1 - K_p \cdot s - K_I$$

$$E(s) = \frac{1}{s} - K_p - \frac{K_I}{s}$$

O erro em regime é obtido pelo **teorema do valor final**:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \left( \frac{1}{s} - K_p - \frac{K_I}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} 1 - \lim_{s \rightarrow \infty} sK_p - \lim_{s \rightarrow \infty} K_I = 1 - \infty - K_I \quad \therefore \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot E(s) = -\infty$$

Assim como no item anterior, para  $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$ , o erro em regime também tende a  $-\infty$

15. Caso um distúrbio  $d(t) = 1$  afete a malha de controle, como verificar seu efeito no erro  $E(s)$  para um dado controlador  $C(s)$ ?

Ilustre aplicando o degrau em  $d(t) = 1$  e plotando  $y(t)$ , com  $r(t) = 0$ . Use  $C(s) = K$ , onde  $K$  garante estabilidade.

Resposta:

Para verificar o efeito do distúrbio  $d(t) = 1$  na malha de controle, temos que analisar o comportamento do erro  $E(s)$  na presença desse distúrbio. Do material de apoio e dos estudos em AMSD, sabemos que o erro é definido como a diferença entre o sinal de entrada  $r(t)$  e o sinal de saída do sistema  $y(t)$ . Nesse caso, o sinal de entrada é zero ( $r(t) = 0$ ), portanto o erro é igual a  $-y(t)$ ,  $e(t) = -y(t)$ .

Usando  $C(s) = K$ , podemos determinar a função de transferência da malha fechada  $G(s)$  como

$G(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_p(s)}$ . Onde  $G_p(s)$  é a função de transferência do processo.

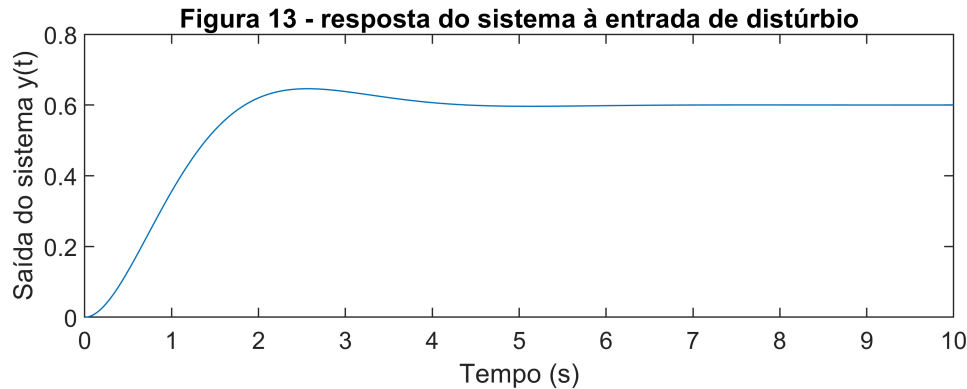
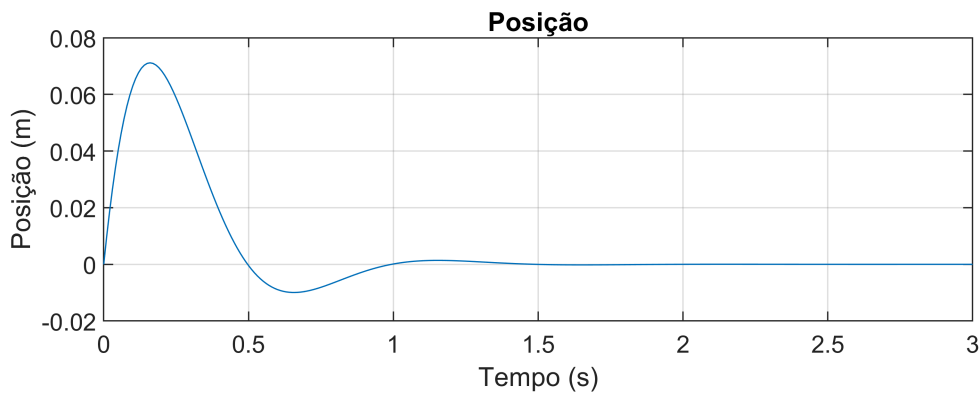
Como o controlador é proporcional  $C(s) = K$ , a função de transferência do controlador  $C(s)$  é simplesmente  $K$ . Assumindo que o sistema é estável, podemos determinar o valor de  $K$  que garante estabilidade,  **$K = 1.5$** .

Para ilustrar o efeito do distúrbio  $d(t) = 1$ , podemos simular a resposta do sistema com o código abaixo.

```
Gp = tf([1],[1 2 1]);           % Função de transferência Gp(s) do processo.
K = 1.5;                         % Ganho K do controlador.
G = feedback(K*Gp,1);           % Aqui usamos a função feedback para criar a malha fechada a pa

t = 0:0.01:10;                  % vetor de tempo de 0 a 10 segundos com passo de 0.01s
d = ones(size(t));              % sinal de degrau para o distúrbio d(t) = 1.
r = zeros(size(t));             % sinal de entrada r(t) = 0.
[y,t] = lsim(G,d,t,r);          % simulação da resposta do sistema

plot(t,y);                      % plotando a resposta do sistema.
title('Figura 13 - resposta do sistema à entrada de distúrbio')
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Saída do sistema y(t)');
```



O resultado da simulação foi um gráfico que mostra a resposta do sistema à entrada de distúrbio. Observa-se que a presença do distúrbio causa um aumento no valor da saída do sistema, indicando que o erro do sistema aumentou (em módulo), pois  $e(t) = -y(t)$ , ou seja, esse é o efeito do distúrbio no erro do sistema para  $C(s) = k$ .

16. Verifique os valores de K para estabilidade de  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_3(s)}{1 + KG_3(s)}$  (g3 foi definida em init).

Resposta:

Para verificar os valores de k para estabilidade de  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_3(s)}{1 + KG_3(s)}$ , podemos usar o **critério de estabilidade de Routh-Hurwitz**, seguindo o passo a passo abaixo:

**- Determinar a equação característica:**

A equação característica é o denominador da FTMF, sendo  $1 + kG_3(s)$  e devemos igualar a 0, ficando:  $1 + kG_3(s) = 0$

**- Função  $G_3(s)$ :**

g3

g3 =

1728

$$s^3 + 36s^2 + 432s + 1728$$

Continuous-time transfer function.

- Então, temos a equação característica:

$$1 + \frac{k \cdot 1728}{s^3 + 36s^2 + 432s + 1728} = 0$$

- Resolvendo os termos, temos:

$$s^3 + 36s^2 + 432s + 1728 + k \cdot 1728 = 0 \rightarrow s^3 + 36s^2 + 432s + 1728(1 + k) = 0$$

- Agora, chegamos ao polinômio em s da seguinte maneira:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \text{ onde } n = 3 \text{ e } a_0 = 1 ; a_1 = 36 ; a_2 = 432 \text{ e } a_3 = 1728(1 + k)$$

- Assim, podemos montar a tabela para aplicar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz:

$s^3$	1	432
$s^2$	36	$1728(1+k)$
$s^1$	$\frac{36 \cdot 432 - 1 \cdot [1728(1+k)]}{36}$	0
$s^0$	$\frac{(384 - 48k) \cdot [1728(1+k)]}{384 - 48k}$	0

simplificando  $\rightarrow$

$s^3$	1	432
$s^2$	36	$1728 \cdot (1 + k)$
$s^1$	$48 \cdot (8 - k)$	0
$s^0$	$1728 \cdot (1 + k)$	0

Para que o sistema seja **estável**, os valores de da 2º coluna da tabela acima da direita não podem mudar de sinal, pois o número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal na 2º coluna, e se o sistema tiver raiz com parte real positiva, ele está à direita do eixo  $j\omega$ , ou seja, sistema instável.

Para que não haja mudanças de sinal na 2º coluna e o sistema seja estável, temos 2 condições:

$$1^\circ \rightarrow 48(8 - k) > 0, \text{ ou seja } k < 8$$

$$2^\circ \rightarrow 1728(1 + k) > 0; \text{ ou seja, } k > -1$$

Então, considerando apenas ganho positivo (**k > 0**), os valores de k para que o sistema seja estável está no intervalo **0 < k < 8**.