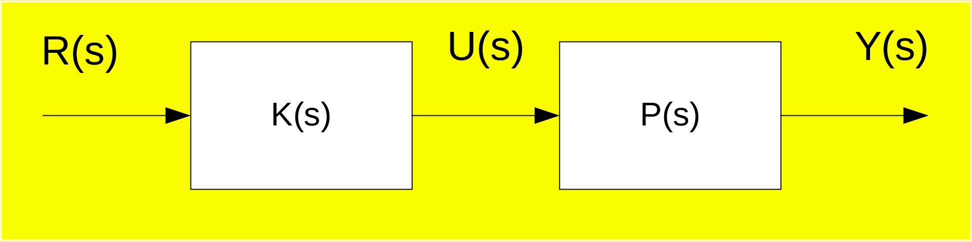
ERROS ESTACIONÁRIOS

- Controle Malha Aberta e Fechada
- Constantes de erro
- Tipos de sistemas
- Erros unitários
- Exemplo

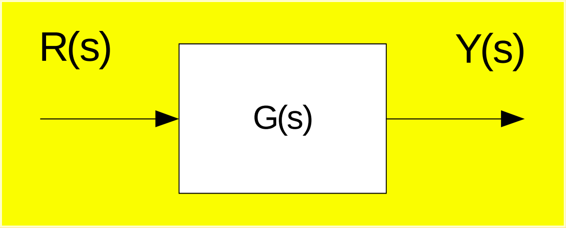
Controle em malha aberta

- Ação básica, sem realimentação
- A entrada do controlador é um sinal de referência
- A saída do controlador é o sinal de controle que leva a planta à saída desejada



Função de transferencia malha aberta

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = K(s)P(s)$$



Controle em malha fechada

- Faz uso da realimentação da saída
- O erro é a diferença entre a entrada e a saída
- O controlador transforma o erro no sinal de controle

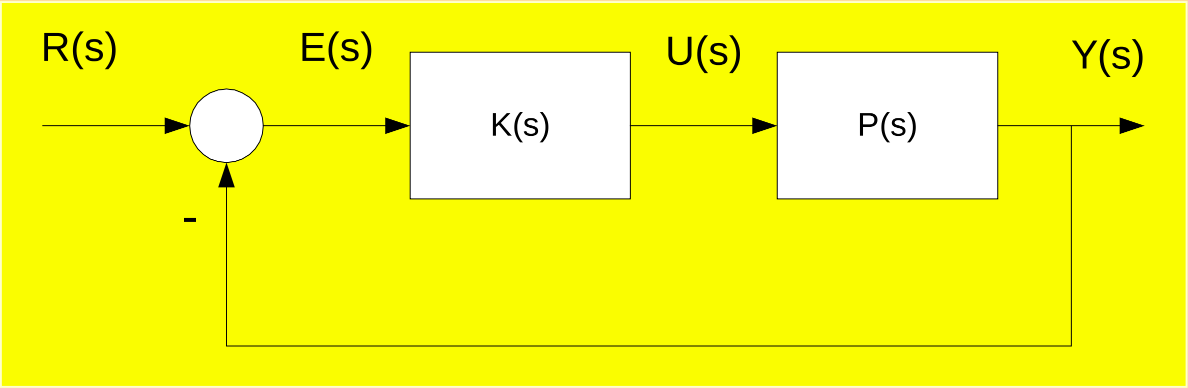
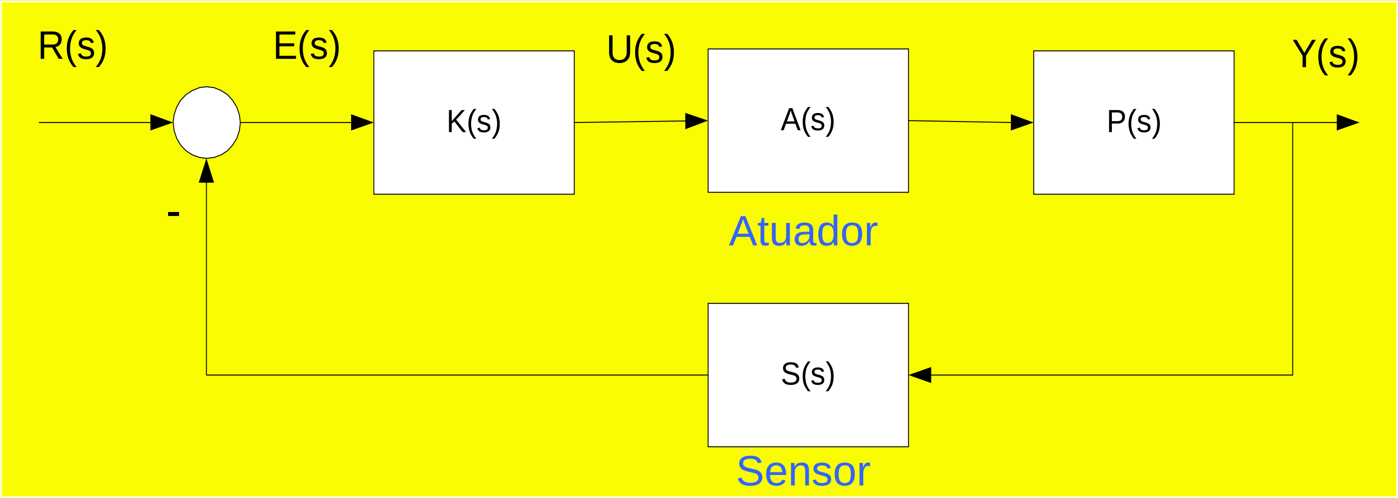


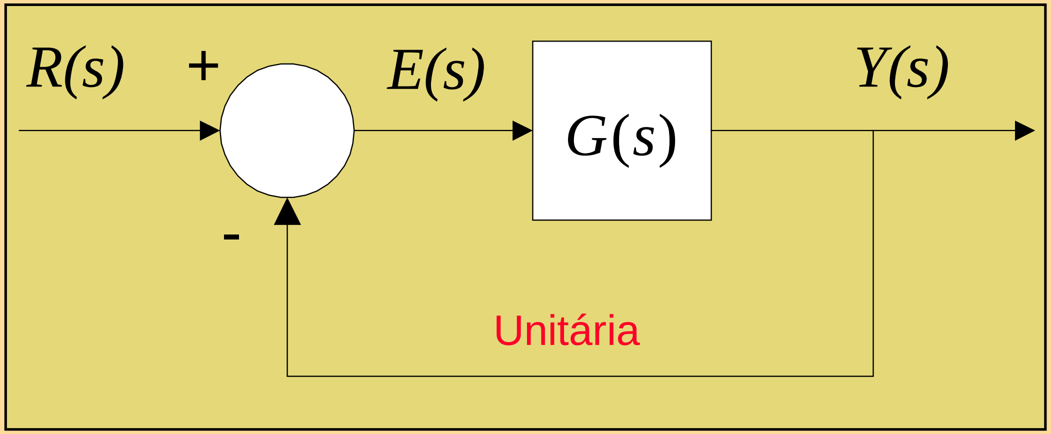
Diagrama completo

- Explicitando a dinâmica do sensor e do atuador
- Em geral esses modelos são incluídos na planta



Análise de Erro Estacionário

Dado o sistema de realimentação unitária negativa da figura abaixo, serão definidas as constantes de erro.



CONSTANTES DE ERRO

Definições

- Erro de posição: $$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$
- Erro de velocidade: $$K_v = \lim_{s \to 0} [sG(s)]$$
- Erro de aceleração: $$K_a = \lim_{s \to 0} [s^2 G(s)]$$

TIPOS DE SISTEMAS

- Uma planta qualquer pode ser escrita como:

$$\boxed{G(s)=\frac{K(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{s^m(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots}}$$

- O tipo do sistema é o índice m, ou seja, o número de pólos em zero da planta.

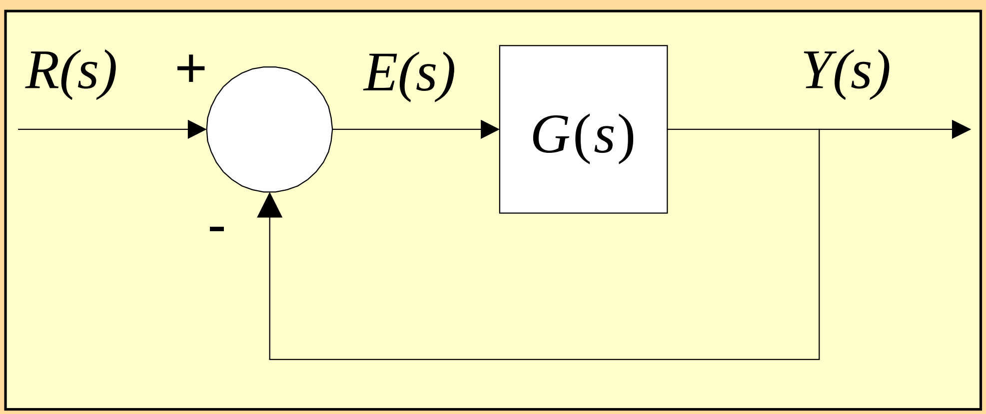
TEOREMA DO VALOR FINAL

- O limite de uma função no domínio do tempo quando o tempo tende a infinito pode ser encontrado através do limite do produto da transformada de Laplace da função pela variável de Laplace quando esta tende a zero.

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[sF(s)]}$$

CONSIDERANDO O ERRO

- Do diagrama de realimentação negativa unitária:



$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

APLICANDO O TEOREMA DO VF

Como o erro estacionário pode ser calculado para qualquer entrada *r(t)* e é dado por

$$e_{est} = \lim_{t\to\infty}\big(\underbrace{r(t) - y(t)}_{e(t)}\big)$$

- portanto o erro estacionário é o limite do erro quando o tempo tende a infinito:

$$e_{est} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}[sE(s)] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{sR(s)}{1+G(s)}\right]$$

PARA DEGRAU UNITÁRIO

- Considerando a entrada de referência como um degrau unitário

$$e_{est} = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s\left(\frac{1}{s} \right)}{1 + G(s)} \right] = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)}$$

$$e_{est} = \frac{1}{1 + K_p}$$

pois

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

PARA RAMPA UNITÁRIA

- Considerando a entrada de referência como uma rampa unitária

$$e_{est} = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s\left(1/s^2 \right)}{1 + G(s)} \right] = \frac{1}{\lim_{s \to 0} [s + sG(s)]}$$

$$e_{est} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} [sG(s)]} = \frac{1}{K_v}$$

pois

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

PARA PARÁBOLA UNITÁRIA

- Considerando a entrada de referência como uma parábola unitária

$$e_{est} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s\left(\frac{1}{s^3}\right)}{1+G(s)}\right] = \frac{1}{\lim_{s\to 0}[s^2 G(s)]}$$

$$e_{est} = \frac{1}{K_a}$$

pois

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

CONSTANTES DE ERRO PARA SISTEMAS TIPO 0

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{K(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = K$$

$$K_v = \lim_{s\to 0}[sG(s)] = \frac{sK(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = 0$$

$$K_a = \lim_{s\to 0}[s^2 G(s)] = \frac{s^2 K(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = 0$$

ERROS ESTACIONÁRIOS DE MALHA FECHADA DE SISTEMAS DE MALHA ABERTA DO TIPO 0

- Para degrau unitário:

$$e_{est} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+K}$$

- Para rampa:

$$e_{est} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

- Para parábola:

$$e_{est} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

Obs.: MALHA FECHADA COM REALIMENTAÇÃO UNITÁRIA

CONSTANTES DE ERRO PARA SISTEMAS TIPO 1

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{K(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s\to 0}[sG(s)] = \frac{sK(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = K$$

$$K_a = \lim_{s\to 0}[s^2 G(s)] = \frac{s^2 K(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = 0$$

ERROS ESTACIONÁRIOS DE MALHA FECHADA DE SISTEMAS DE MALHA ABERTA DO TIPO 1

- Para degrau unitário:

$$e_{est} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

- Para rampa:

$$e_{est} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

- Para parábola:

$$e_{est} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

CONSTANTES DE ERRO PARA SISTEMAS TIPO 2

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{K(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s\to 0}[sG(s)] = \frac{sK(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = \infty$$

$$K_a = \lim_{s\to 0}[s^2 G(s)] = \frac{s^2 K(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots} = K$$

ERROS ESTACIONÁRIOS DE MALHA FECHADA DE SISTEMAS DE MALHA ABERTA DO TIPO 2

- Para degrau unitário:

$$e_{est} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

- Para rampa:

$$e_{est} = \frac{1}{K_v} = 0$$

- Para parábola:

$$e_{est} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$

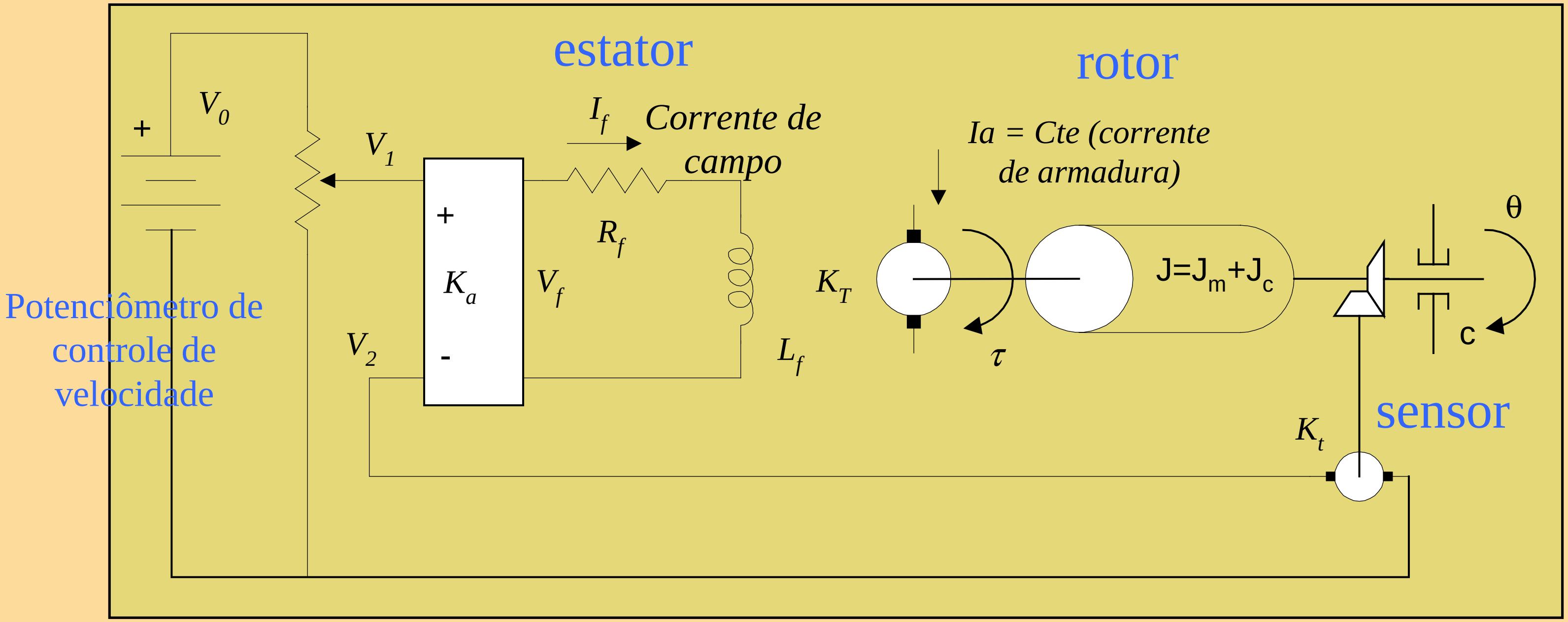
Tabela de erros estacionários

Tipo do sistema	Degrau unitário	Rampa unitária	Parábola unitária
0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K}$

EXEMPLO

- Para um motor CC abaixo, encontre os erros estacionários para o degrau, a rampa e a parábola unitários. Considerar:

R_f = 1 Ω, L_f = 0,2 H, J_m = 0,05 N-m/rad/s², J_c = 0,20 N-m/rad/s, c = 0,5 N-m/rad/s, K_T = 0,1N-m/A e K_t = 1 V/rad/s.

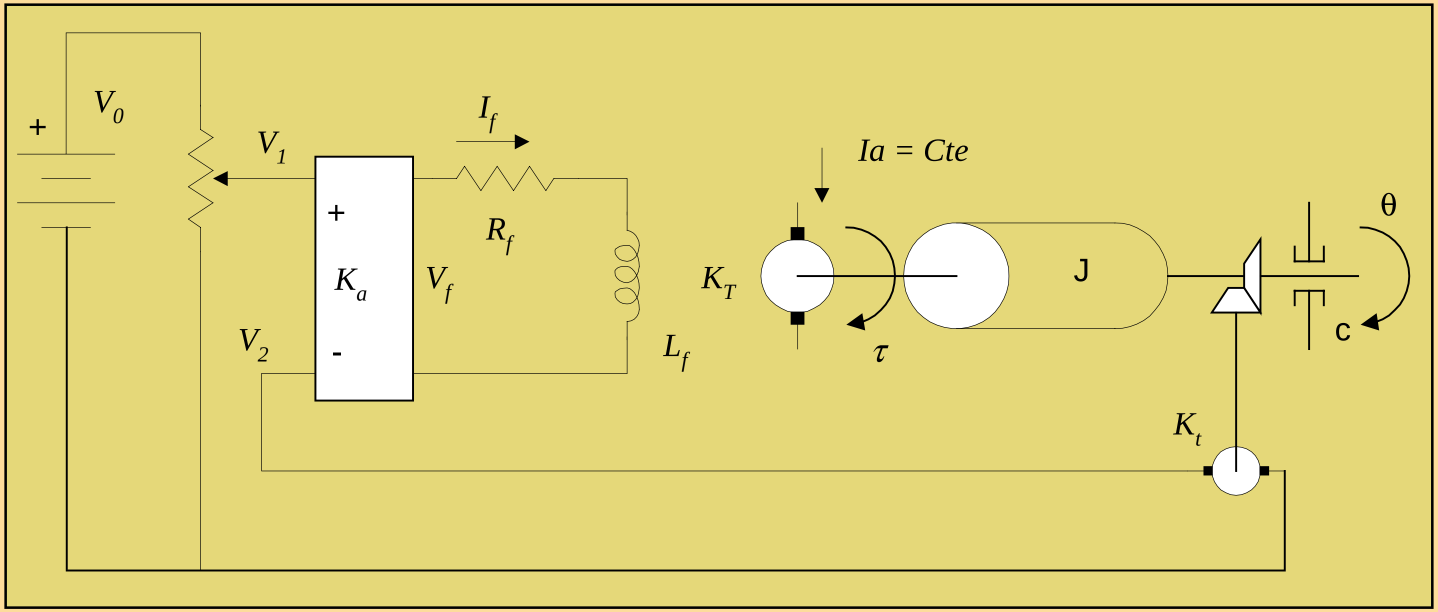


Metodologia de solução

- Estabelecer as equações básicas
- Desenhar o diagrama de blocos
- Determinar a função de transferência de malha aberta
- Determinar o tipo do sistema
- Achar as constantes de erro
- Achar os erros respectivos

Equações do sistema

As seguintes equações descrevem o comportamento do sistema



$$V_f = K_a(V_1 - V_2)$$

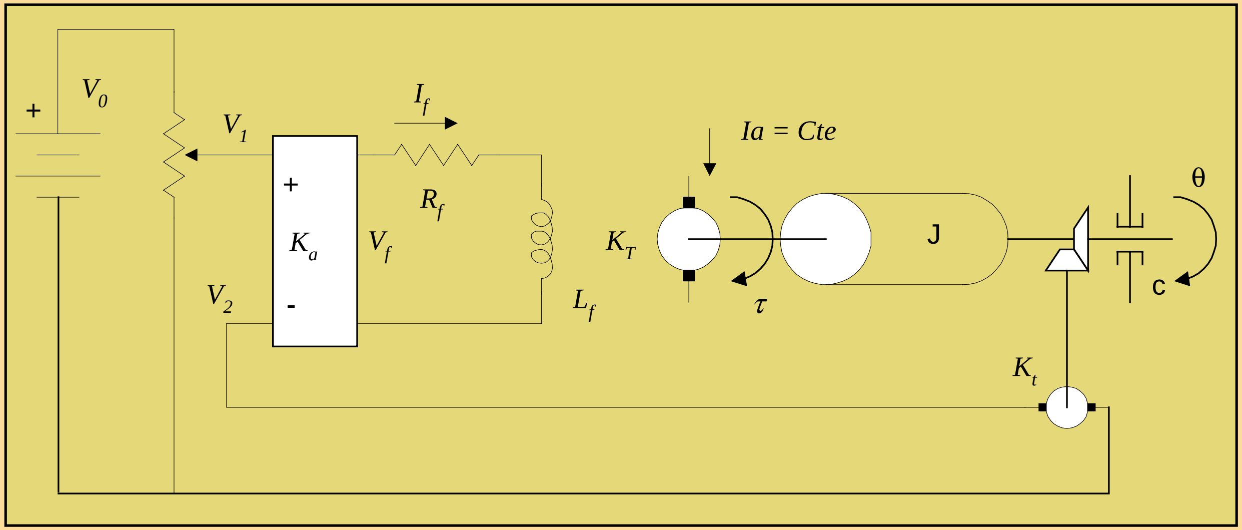
$$\tau = K_T I_f$$

$$V_2 = K_t \Omega$$

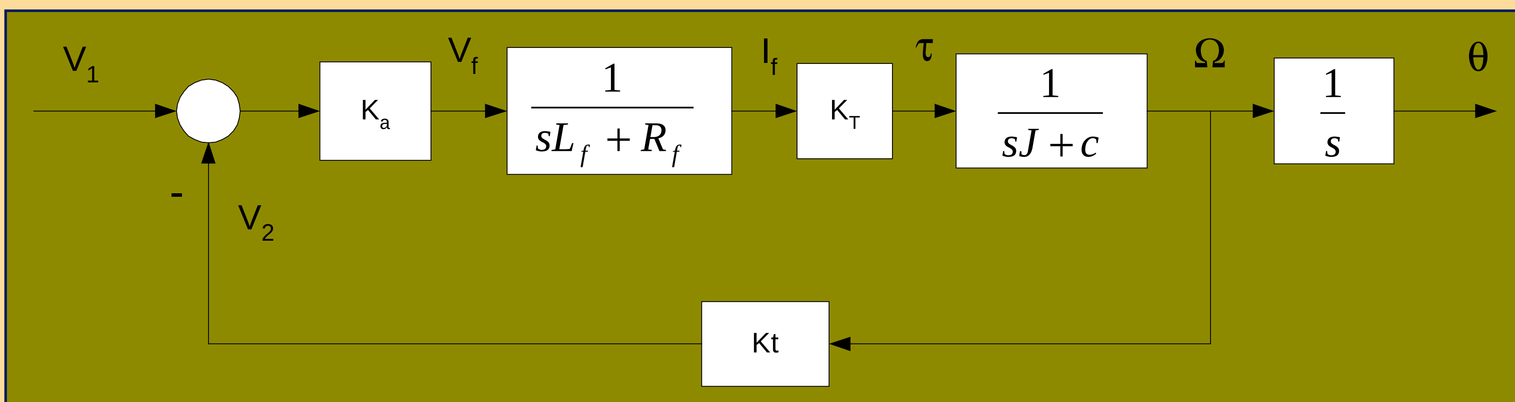
$$I_f = \frac{1}{sL_f + R_f} V_f$$

$$\theta = \frac{1}{(J_m + J_c)s^2 + cs} \tau$$

Diagrama de blocos



A partir das equações pode-se então desenhar o DB correspondente



FT de malha aberta

- A seguinte FTMA é obtida após substituição dos valores.
- Observar que a realimentação é unitária (K_t=1)

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0{,}1K_a}{(0{,}2s+1)(0{,}25s+0{,}5)}$$

Tipo do sistema

- Pode-se reescrever a FTMA (*2/*2) na forma padrão:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0{,}2K_a}{(0{,}2s+1)(0{,}5s+1)}$$

- Conclui-se que o sistema é do tipo 0

Erros

- Portanto, o erro da rampa e da parábola são infinitos
- O erro da resposta ao degrau é $$\frac{1}{1+K}$$
- Substituindo o K, o erro é $$\frac{1}{1+0,2Ka}$$

Exercício

- Resolver o exemplo anterior considerando a resistência de campo nula