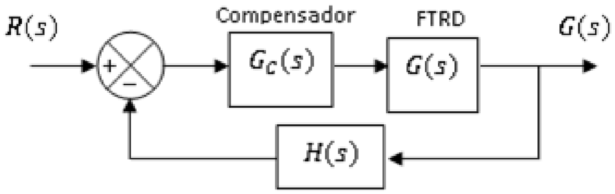
CAP 2

PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE PELO MÉTODO DO LR (SISTEMAS ANALÓGICOS)

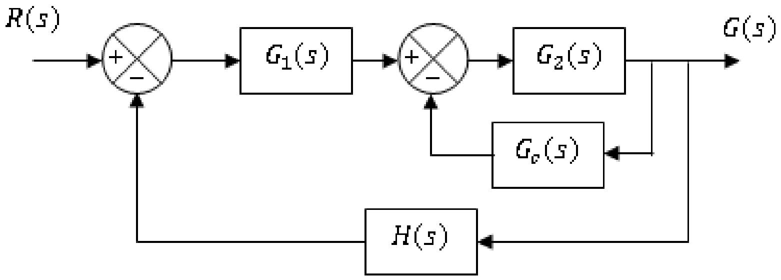
SUMÁRIO

2.1. INTRODUÇÃO

O projeto de sistemas de controle pelo método LR consiste em inserir polos e zeros, na forma de um compensador, sobre o eixo real na Função de Transferência do Ramo Direto (FTRD) do sistema, a fim de atribuir ao sistema de controle algumas qualidades desejáveis. A figura abaixo mostra o diagrama de blocos de um sistema compensado na configuração de *compensação em série* (ou *em cascata*).



A *compensação em paralelo* (ou *por realimentação*) é mostrada na figura abaixo



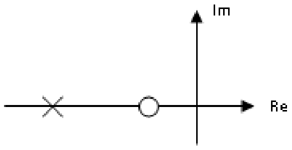
A escolha do tipo de compensação depende da natureza dos sinais no sistema, do nível de potência, da experiência do projetista, do custo etc.

A equação do compensador é dada por:

$$G_c(s) = k_c\alpha\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}\times\left(\frac{\frac{1}{\alpha\tau}}{\frac{1}{\alpha\tau}}\right) = k_c\frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\alpha\tau}} = k_c\frac{s-Zero_c}{s-Polo_c} \rightarrow \quad Zero_c = -\frac{1}{\tau}\ ; \quad Polo_c = -\frac{1}{\alpha\tau}$$

Funções do Compensador:
- → Estabilizar o Sistema
- → Tornar a Resposta Desejável

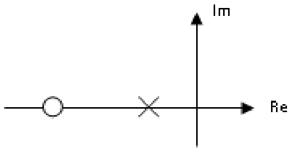
Tipos de Compensadores:
- → **Avanço de Fase**: A resposta em regime permanente a uma excitação senoidal apresenta um avanço da fase.



A adição de ZEROS a FTMA:
- Desloca o LR para ESQUERDA.
- Torna a acomodação da resposta mais RÁPIDA.
- Adiciona um controle derivativo ao sistema (PD).

O compensador por Avanço de Fase é usado para estabilizar um sistema de controle, ou para modificar a características indesejáveis da resposta transitória.

→ **Atraso de Fase**: A resposta em regime permanente à uma excitação senoidal apresenta um atraso da fase.



A adição de POLOS a FTMA:

- Desloca o LR para DIREITA
- Torna a acomodação da resposta mais LENTA.
- Adiciona um controle integral ao sistema (PI).

O compensador por Atraso de Fase é usado quando a resposta transitória possui características satisfatórias, mas as características em regime permanente não são.

→ **Atraso e Avanço de Fase**: A resposta em regime permanente a uma excitação senoidal apresenta um atraso da fase na região de baixa frequência e avanço de fase na região de alta frequência.

Cada compensador de avanço ou de atraso de fase insere uma contribuição angular no sistema medida como:

$$\phi = \angle\left(k_c \left.\frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\alpha\tau}}\right|_{s=P} \right)$$

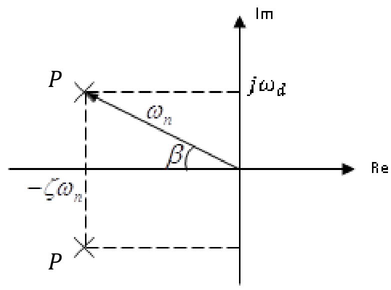
onde, P é a posição do polo dominante da FTMF do sistema sem compensar. Essa contribuição define quanto da fase será avançada ou atrasada.

2.2. COMPENSAÇÃO SÉRIE POR AVANÇO DE FASE

O procedimento proposto a seguir permite obter um compensador que possui o melhor desempenho (na maioria das vezes), maximizando o valor da constante de erro estático da velocidade através da obtenção do maior valor possível da constante α do compensador.

PROCEDIMENTO

1. Com base nas especificações de desempenho, determine a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada (P).



Considerando a entrada um degrau UNITÁRIO, e as relações no plano “s”, temos:

t_s	T	t_p	t_r	MP	ζ	β	ω_d
$4T$ ($\pm 2\%$) $3T$ ($\pm 5\%$)	$\frac{1}{\zeta\omega_n}$	$\frac{\pi}{\omega_d}$	$\frac{\pi-\beta}{\omega_d}$	$e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$	$\cos\beta$	$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n}\right)$	$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

2. Desenhe o LR do sistema de malha fechada não compensado e verifique se é possível, apenas com o ajuste do ganho, obter o posicionamento dos polos do sistema no lugar desejado.

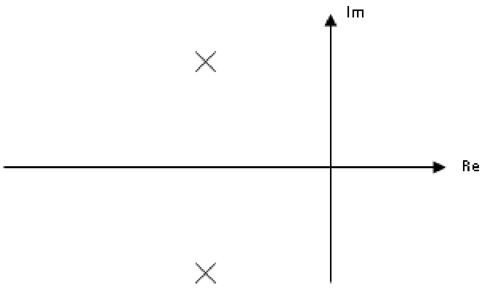
3. Não sendo possível localizar os polos no lugar desejado, efetue o seguinte procedimento:
   a. Obtenha o ângulo da FTMA para a localização desejada do polo de malha fechada escolhido.

$$\theta_P = \angle G(s)H(s)|_{s=P}$$

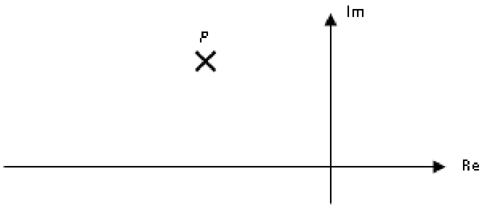
   b. Calcule a ***contribuição angular do compensador***, ϕ.

$$\phi = \left| |\theta_p| - 180 \right|$$

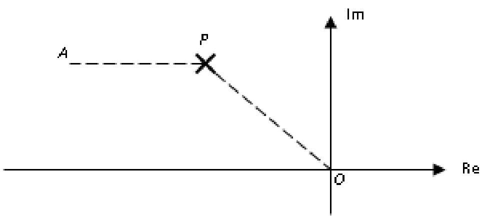
   c. Marque no plano “s” a localização desejada dos polos de malha fechada.



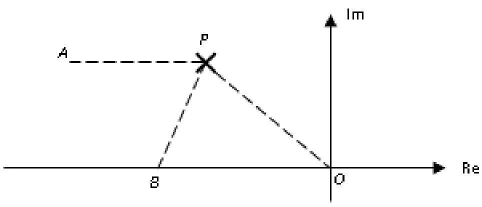
   d. Escolha um dos polos de malha fechada.



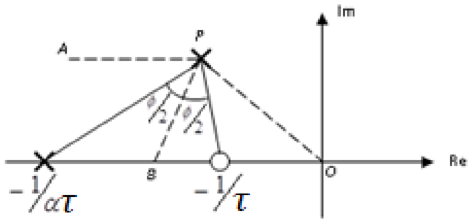
   e. Trace uma reta horizontal $\overline{AP}$ e uma reta conectando “P” à origem, $\overline{PO}$.



   f. Trace a bissetriz do ângulo entre $\overline{AP}$ e $\overline{PO}$, e chame de $\overline{PB}$.



g. A localização do polo e do zero do compensador por avanço de fase é dado por:



$$\alpha = \frac{Zero_c}{Polo_c} = \frac{-1/\tau}{-1/\alpha\tau}$$

h. Obtenha o ganho k_c do sistema compensado usando a condição de módulo:

$$|G_c(s)G(s)H(s)|\Big|_{s=P} = 1 \qquad\qquad |\cdot| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$

i. Escreva a FTMASC

$$FTMASC = G_c(s)G(s)H(s)$$

j. Verifique se todas as especificações de desempenho foram alcançadas, senão foram, repita o procedimento ajustando os polos e zeros do compensador.

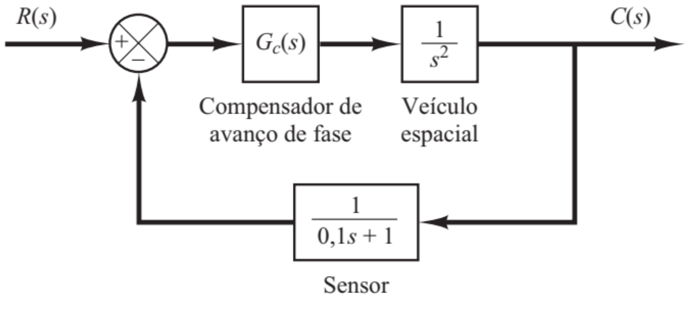
OBS: Geralmente, quanto maior for o valor de α, maior será o valor da constante de erro estático de velocidade, K_v, entretanto, se for requerido uma constante de erro estático elevada, será necessário acrescentar uma rede de atraso de fase em série ou substituir o compensador de avanço por um de atraso e avanço de fase.

O valor de K_v é calculado sobre a FTRDSC (do sistema compensado):

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$$

Quando as restrições do problema envolvem uma constante de erro estático, é preferível efetuar a compensação do sistema pela frequência.

Exemplo 1 – Considere o sistema abaixo e obtenha um compensador de forma que $\omega_n = 2[rad/s]$ e $\zeta = 0{,}5$. Compare a estabilidade para os dois sistemas (não compensado e compensado).



SOLUÇÃO

1. Com base nas especificações de desempenho, determine a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.

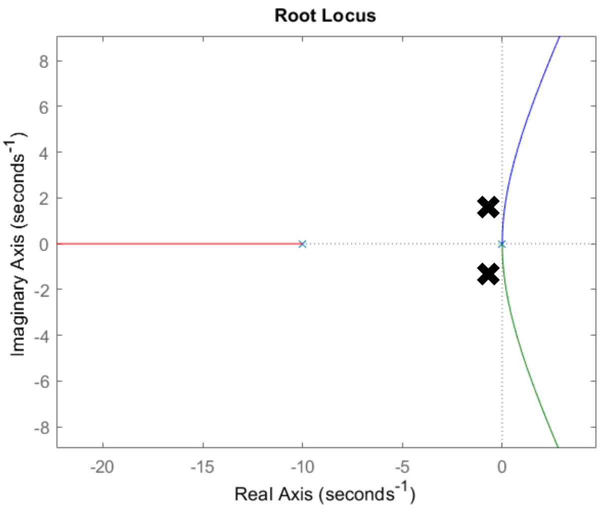
As condições são $\zeta = 0{,}5$ e $\omega_n = 2[rad/s]$, ou, $\zeta = cos\,\theta = 0{,}5 \Rightarrow \theta = 60^o$
Assim,

$$\begin{cases} \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{Im}{Re}\right) = 60^o \\ \omega_n = \sqrt{Re^2 + Im^2} = 2 \end{cases}$$

Do sistema de equações a localização desejada dos polos dominantes é:

$$\boxed{P = -1 \pm j\sqrt{3}}$$

2. Desenhe o LR do sistema de malha aberta não compensado e verifique se é possível, apenas com o ajuste do ganho, obter o posicionamento dos polos do sistema no lugar desejado.



Observe ainda que o sistema não compensado é INSTÁVEL, pois os polos assumem sempre valores reais positivos e próximos ao eixo imaginário.

Não é possível, apenas com ajuste do ganho, passar pela localização desejada do polo dominante, logo, devido aos polos desejados estarem localizados à esquerda do LR, o compensador a ser utilizado será o de avanço de fase.

3. Não sendo possível localizar os polos no lugar desejado, efetue o seguinte procedimento:
   a. Obtenha o ângulo da FTMA para a localização desejada do polo dominante de malha fechada escolhido.

$$\theta_P = \angle G(s)H(s)|_{s=P}$$

$$\theta_P = \angle\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{1}{0{,}1s + 1}\right)\Bigg|_{s=-1+j\sqrt{3}}$$

$$\theta_P = \angle\left(\frac{1}{0{,}1s^3 + s^2}\right)\Bigg|_{s=-1+j\sqrt{3}}$$

$$\theta_P = \angle(-0{,}0893 + j0{,}2577)$$

$$\theta_P = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}2577}{-0{,}0893}\right)$$

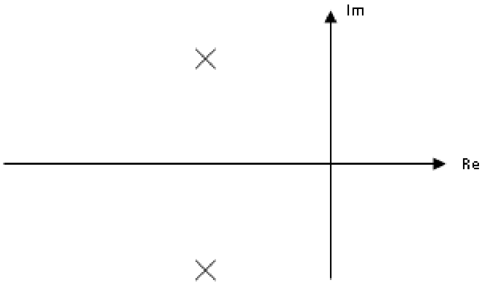
$$\boxed{\theta_P = 109{,}10^o}$$

b. Calcule a contribuição angular do compensador, ϕ.

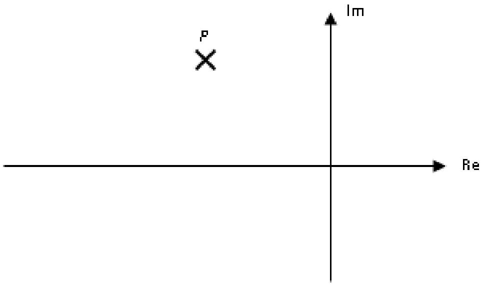
$$\phi = \left||\theta_p| - 180\right| = ||109{,}10| - 180|$$

$$\boxed{\phi = 70{,}89^{\circ}}$$

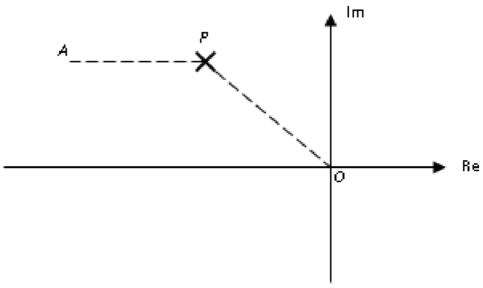
c. Marque no plano "s" a localização desejada dos polos de malha fechada.



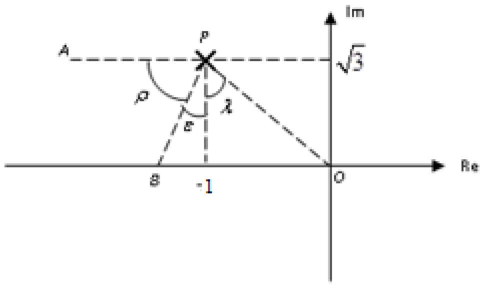
d. Escolha um dos polos dominantes de "P".



e. Trace uma reta horizontal $\overline{AP}$ e uma reta conectando "P" à origem, $\overline{PO}$.



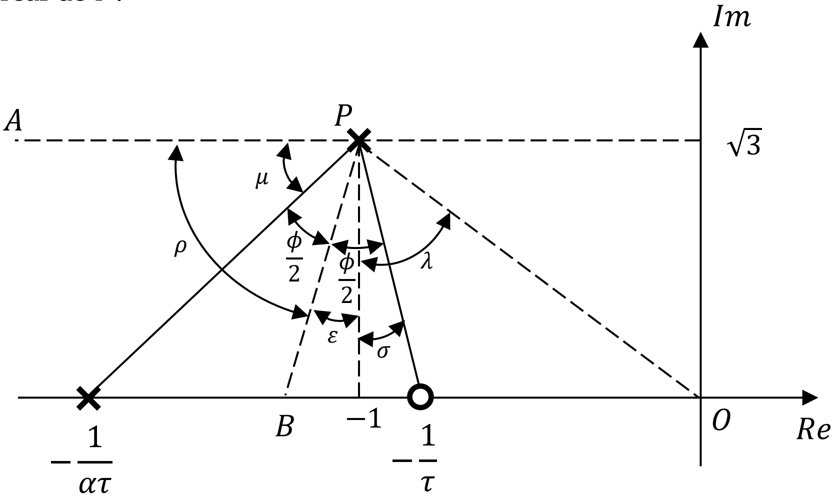
f. Trace a bissetriz do ângulo entre $\overline{AP}$ e $\overline{PO}$, e chame de $\overline{PB}$.

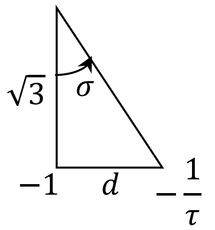


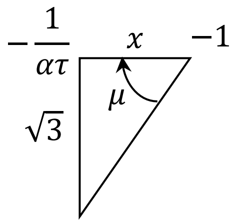
$$\lambda = tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow \boxed{\lambda = 30^{\circ}}$$

$$\rho = \frac{\lambda + 90}{2} \rightarrow \boxed{\rho = 60^{\circ}} \qquad \varepsilon = 90 - \rho \rightarrow \boxed{\varepsilon = 30^{\circ}}$$

g. A localização do polo e do zero do compensador por avanço de fase. Observe que ${}^{\phi}\!/_{2} > \varepsilon$, portanto, o zero do compensador fica a direita da parte real de P.







$$\sigma = \left|\frac{\phi}{2} - \varepsilon\right| = \left|\frac{70{,}89}{2} - 30\right| = 5{,}44^{\circ}$$

$$tg(\sigma) = \frac{d}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg(5{,}44^{\circ}) = \frac{d}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ d = 0{,}165 \Rightarrow \ -1 + d = -\frac{1}{\tau} \ \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\tau} = 0{,}835}$$

$$\mu = \left|\rho - \frac{\phi}{2}\right| = \left|60 - \frac{70{,}89}{2}\right| = 24{,}55^{\circ}$$

$$tg(\mu) = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow tg(24{,}55^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 3{,}79 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha\tau} + x = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha\tau} = 4{,}791}$$

$$\alpha = \frac{0{,}835}{4{,}791} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 0{,}174}$$

Obtenha o ganho k_c do sistema compensado por:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}} = k_c \frac{s + 0{,}835}{s + 4{,}791}$$

$$|G_c(s)G(s)H(s)|\Big|_{s=P} = 1$$

$$\left|k_c \left(\frac{s + 0{,}835}{s + 4{,}791}\right)\left(\frac{1}{0{,}1s^3 + s^2}\right)\right|\Bigg|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

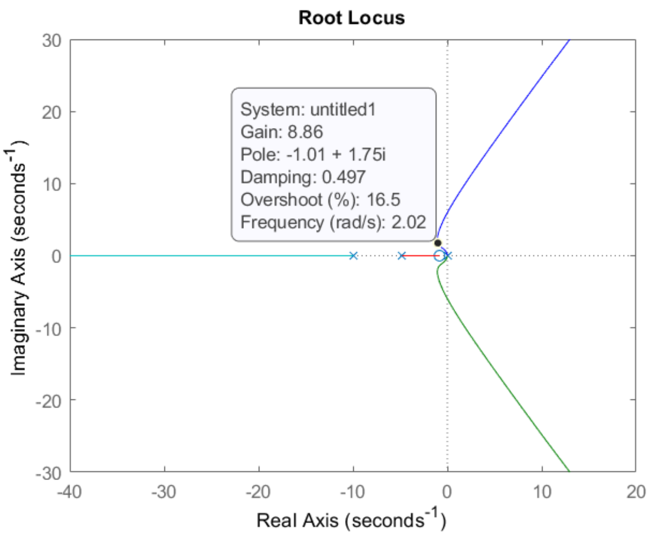
$$|k_c(-0{,}1139 + j0)| = 1$$

$$\boxed{k_c = 8{,}78}$$

h. Escreva a FTRDSC

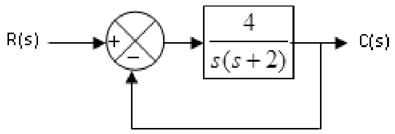
$$\boxed{FTRDSC = G_c(s)G(s) = 8{,}78\left(\frac{s+0{,}835}{s+4{,}791}\right)\left(\frac{1}{s^2}\right)}$$

i. Verifique se todas as especificações de desempenho foram alcançadas, senão foram, repita o procedimento ajustando os polos e zeros do compensador.



Como mostrado na figura acima, o LR passa pelo polo dominante desejado $-1 \pm j\sqrt{3}$.

Exemplo 2 – Considere o sistema abaixo e obtenha um sistema compensado de forma que $\omega_n = 4[rad/s]$ e $\zeta = 0{,}5$. Compare a resposta ao degrau para os dois sistemas (não compensado e compensado).



SOLUÇÃO

1. Com base nas especificações de desempenho, determine a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.

   As condições são $\zeta = 0{,}5$ e $\omega_n = 4\left[\frac{rad}{s}\right]$, ou, $\zeta = cos\,\theta = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^o$

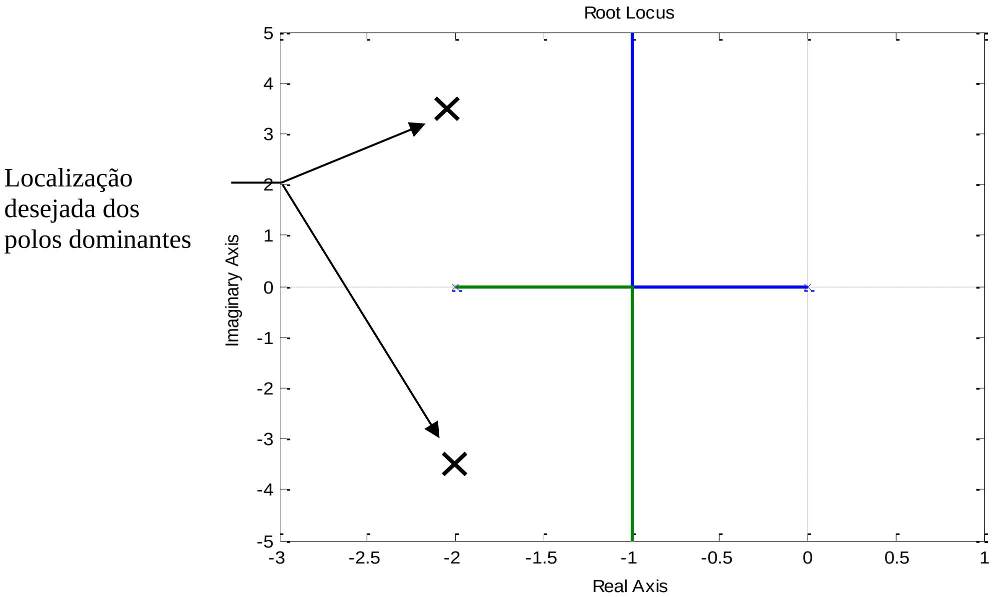
   Assim,

$$\begin{cases} \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right) = 60^o \\ \omega_n = \sqrt{Re^2 + Im^2} = 4 \end{cases}$$

   Do sistema de equações a localização desejada dos polos dominantes é:

$$\boxed{P = -2 \pm j2\sqrt{3}}$$

2. Desenhe o LDR do sistema de malha aberta não compensado e verifique se é possível, apenas com o ajuste do ganho, obter o posicionamento dos polos do sistema no lugar desejado.



Não é possível, apenas com ajuste do ganho, passar pela localização desejada do polo dominante, logo, devido aos polos desejados estarem localizados à esquerda do LR, o compensador a ser utilizado será o de avanço de fase.

3. Não sendo possível localizar os polos no lugar desejado, efetue o seguinte procedimento:
   a. Obtenha o ângulo da FTMA para a localização desejada do polo dominante de malha fechada escolhido.

$$\theta_P = \angle G(s)H(s)|_{s=P}$$

$$\theta_P = \angle \frac{4}{s(s+2)}\Bigg|_{s=-2+j2\sqrt{3}}$$

$$\theta_P = \angle \frac{1}{4}\left(-1 + j\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\theta_P = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/_3}{-1}\right)$$

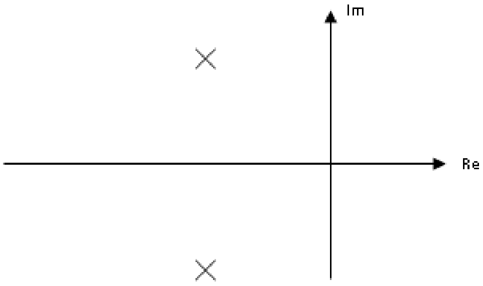
$$\boxed{\theta_P = 150^{\mathrm{o}}}$$

   b. Calcule a contribuição angular do compensador, ϕ.

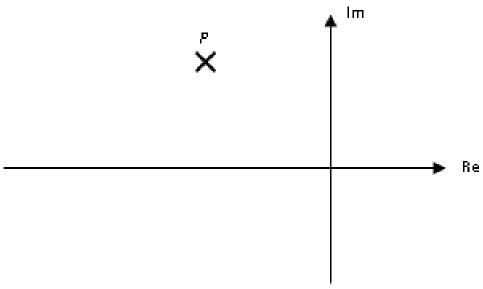
$$\phi = \Big||\theta_p| - 180\Big| = \big||150| - 180\big|$$

$$\boxed{\phi = 30^{\mathrm{o}}}$$

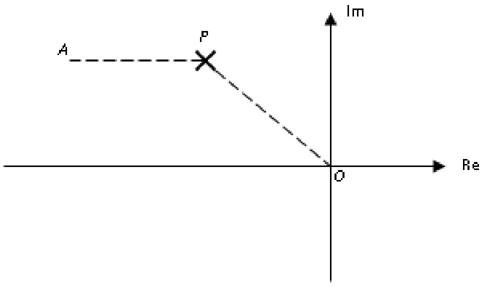
c. Marque no plano "s" a localização desejada dos polos de malha fechada.



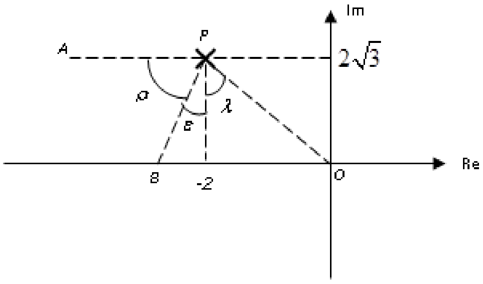
d. Escolha um dos polos dominantes de "P".



e. Trace uma reta horizontal $\overline{AP}$ e uma reta conectando "P" à origem, $\overline{PO}$.



f. Trace a bissetriz do ângulo entre $\overline{AP}$ e $\overline{PO}$, e chame de $\overline{PB}$.



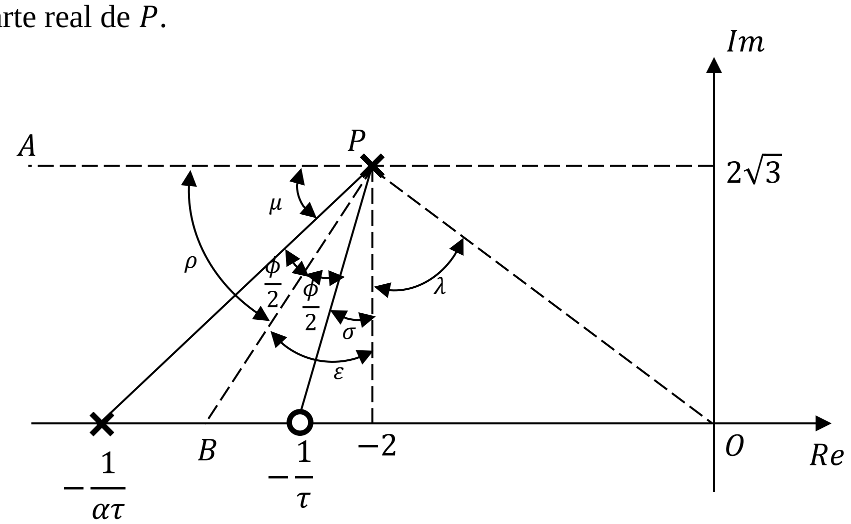
$\lambda = tg^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) \rightarrow \boxed{\lambda = 30°}$

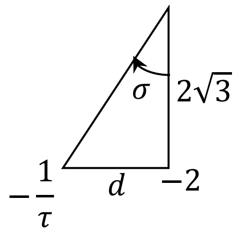
$\varepsilon + \lambda = \rho \qquad \rho + \varepsilon = 90°$

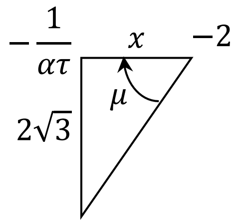
$\rho + \varepsilon + \lambda = 90° + \lambda \rightarrow \rho + \rho = \lambda + 90° \rightarrow \rho = \frac{\lambda+90}{2} \rightarrow \boxed{\rho = 60°}$

$\varepsilon = 90 - \rho \rightarrow \boxed{\varepsilon = 30°}$

g. A localização do polo e do zero do compensador por avanço de fase. Observe que $\phi/_2 < \varepsilon$, portanto, o zero do compensador fica a esquerda da parte real de P.







$$\sigma = \left|\varepsilon - \frac{\phi}{2}\right| = \left|30 - \frac{30}{2}\right| = 15^{\circ}$$

$$tg(\sigma) = \frac{d}{2\sqrt{3}} \Rightarrow tg(15^{\circ}) = \frac{d}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \ d = 0{,}928 \Rightarrow \ -\frac{1}{\tau} + d = -2 \ \Rightarrow \ \boxed{\frac{1}{\tau} = 2{,}928}$$

$$\mu = \left|\rho - \frac{\phi}{2}\right| = \left|60 - \frac{30}{2}\right| = 45^{\circ}$$

$$tg(\mu) = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow tg(45^{\circ}) = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 3{,}464 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha\tau} + x = -2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha\tau} = 5{,}464}$$

$$\alpha = \frac{2{,}928}{5{,}464} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 0{,}536}$$

Obtenha o ganho k_c do sistema compensado por:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}} = k_c \frac{s + 2{,}928}{s + 5{,}464}$$

$$|G_c(s)G(s)H(s)|\Big|_{s=P} = 1$$

$$\left|k_c\left(\frac{s + 2{,}928}{s + 5{,}464}\right)\left(\frac{4}{s^2 + 2s}\right)\right|\Bigg|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

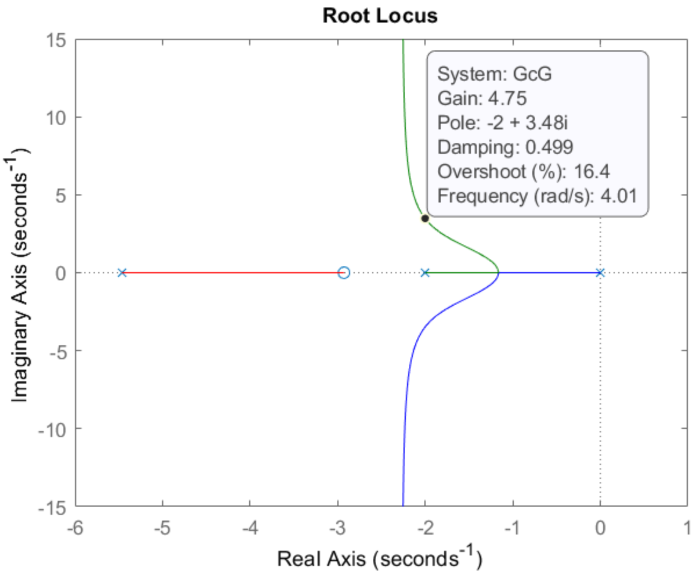
$$|k_c(-0{,}0017 - j0{,}1383)| = 1$$

$$\boxed{k_c = 4{,}73}$$

h. Escreva a FTRDSC

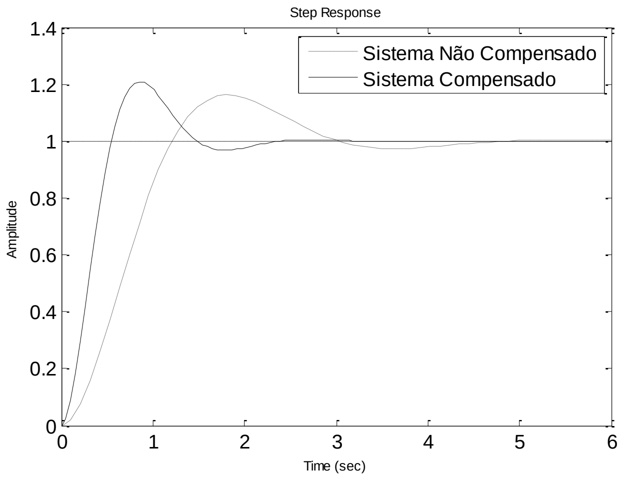
$$\boxed{FTRDSC = G_c(s)G(s) = 4{,}73\left(\frac{s+2{,}928}{s+5{,}464}\right)\left(\frac{4}{s^2+2s}\right)}$$

i. Verifique se todas as especificações de desempenho foram alcançadas, senão foram, repita o procedimento ajustando os polos e zeros do compensador.



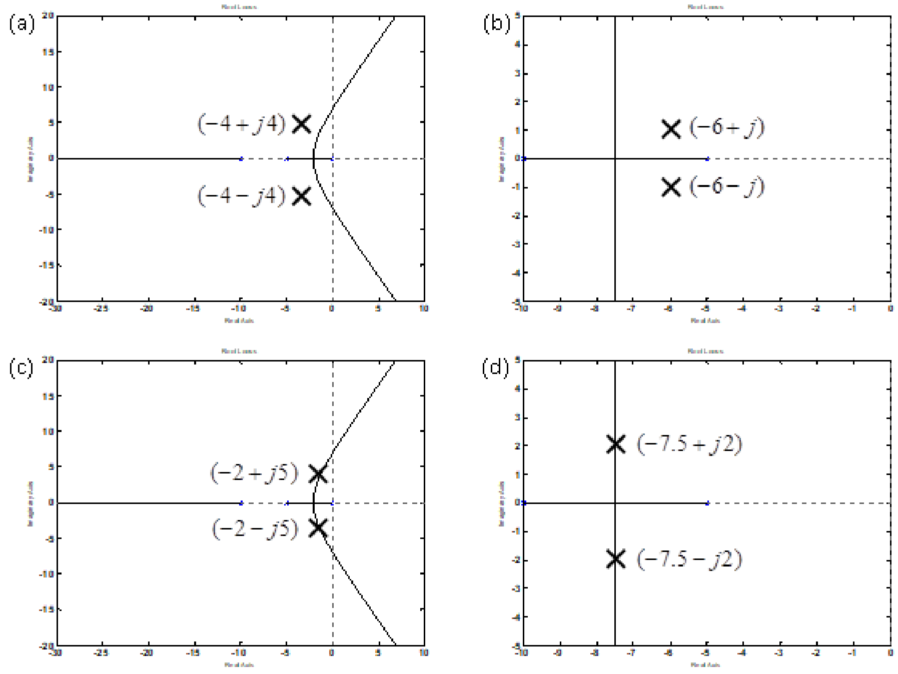
Como mostrado na figura acima, o LDR passa pelo polo dominante desejado $-2 \pm j2\sqrt{3}$.

O gráfico abaixo mostra a resposta ao degrau dos sistemas de malha fechada compensado e não compensado.



Pode-se verificar que, como o compensador é de avanço de fase, a acomodação da resposta é muito mais rápida que no sistema não compensado (no exemplo, é pelo menos a metade do tempo), todavia a máxima ultrapassagem geralmente é maior no sistema compensado, mesmo mantendo o número de oscilações (mas a frequência de oscilação é maior).

Exemplo 3 – Sejam os gráficos do LR de quatro sistemas. Qual compensador será necessário para atender à localização desejada dos polos em cada sistema? Explique.



SOLUÇÃO

a) Compensador de Avanço de Fase, pois, ele possui um zero dominante, o que leva a deslocar o LR para esquerda, permitindo um valor de ganho que coloque os polos da FTMF no lugar desejado.
b) Compensador de Atraso de Fase, pois, ele possui um polo dominante, o que leva a deslocar o LR para direita, permitindo um valor de ganho que coloque os polos da FTMF no lugar desejado.
c) e d) Não é necessário compensador, pois apenas com o ajuste do ganho é possível colocar os polos da FTMF no lugar desejado.

Exemplo 4 – Para o sistema do problema anterior que necessita de um compensador de avanço de fase, a FTMA é dada abaixo. Obtenha o compensador que satisfaz a localização do polo dominante de malha fechada.

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+10)}$$

SOLUÇÃO

O sistema da letra (a) necessita de um compensador por avanço de fase.

1. *Com base nas especificações de desempenho, determine a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.*

   A localização desejada foi fornecida no LR e é $P = -4 + j4$.

2. *Desenhe o LR do sistema de malha fechada não compensado e verifique se é possível, apenas com o ajuste do ganho, obter o posicionamento dos polos do sistema no lugar desejado.*

O LR está desenhado na letra (a) do problema anterior. Não é possível, com o ajuste do ganho, posicionar os polos de malha fechada do sistema no local desejado.

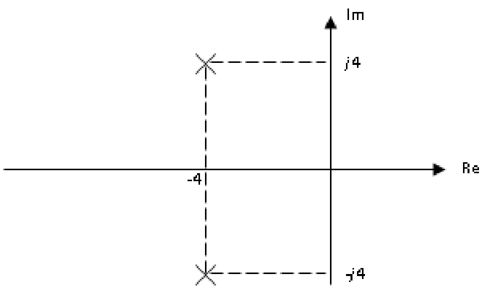
3. *Não sendo possível localizar os polos no lugar desejado, efetue o seguinte procedimento:*
   a. *Obtenha o ângulo da FTMA para a localização desejada do polo dominante de malha fechada escolhido.*

$$\theta_P = \angle G(s)H(s)|_{s=P}$$
$$\theta_P = \angle \left.\frac{1}{s(s+5)(s+10)}\right|_{s=-4+j4}$$
$$\theta_P = \angle(-0{,}025 + j0{,}054)$$
$$\theta_P = tg^{-1}\left(\frac{0{,}054}{-0{,}025}\right)$$
$$\boxed{\theta_P = 115{,}35^{\circ}}$$

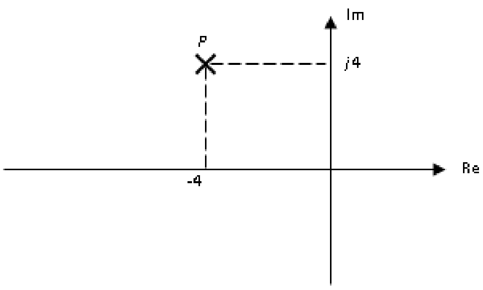
   b. *Calcule a contribuição angular do compensador, ϕ.*

$$\phi = \left||\theta_p| - 180\right| = \left||115{,}35| - 180\right|$$
$$\boxed{\phi = 64{,}65^{\circ}}$$

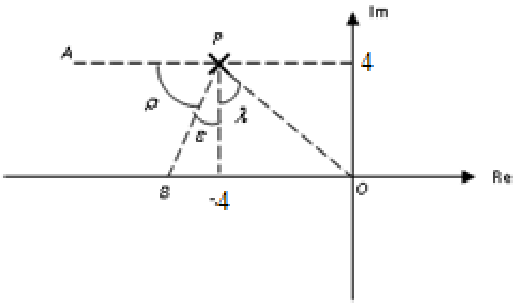
   c. *Marque no plano "s" a localização desejada dos polos de malha fechada.*



   d. *Escolha um dos polos dominantes de "P".*



   e. *Trace uma reta horizontal $\overline{AP}$ e uma reta conectando "P" à origem, $\overline{PO}$.*
   f. *Trace a bissetriz do ângulo entre $\overline{AP}$ e $\overline{PO}$, e chame de $\overline{PB}$.*

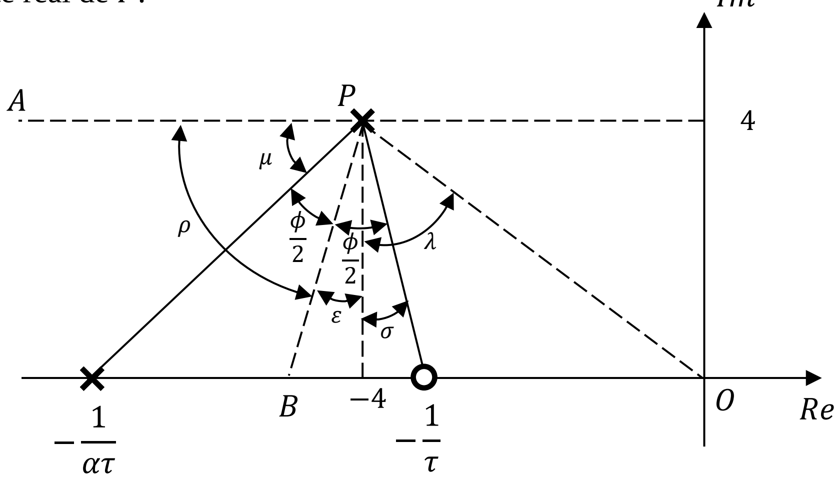


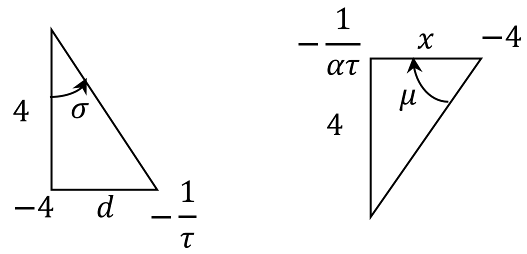
$\lambda = tg^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\lambda = 45^{o}}$

$\rho = \frac{\lambda+90}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho = 67{,}5^{o}}$

$\varepsilon = 90 - \rho \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = 22{,}5^{o}}$

g. A localização do polo e do zero do compensador por avanço de fase. Observe que $\phi/_2 > \varepsilon$, portanto, o zero do compensador fica a direita da parte real de P.





$\sigma = \left|\frac{\phi}{2} - \varepsilon\right| = \left|\frac{64{,}65}{2} - 22{,}5\right| = 9{,}82^{o}$

$tg(\sigma) = \frac{d}{4} \Rightarrow tg(9{,}82^{o}) = \frac{d}{4} \Rightarrow \ d = 0{,}692 \Rightarrow \ -4 + d = -\frac{1}{\tau} \ \Rightarrow \ \boxed{\frac{1}{\tau} = 3{,}307}$

$\mu = \left|\rho - \frac{\phi}{2}\right| = \left|67{,}5 - \frac{64{,}65}{2}\right| = 35{,}17^{o}$

$tg(\mu) = \frac{4}{x} \Rightarrow tg(35{,}17^{o}) = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 5{,}677 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha\tau} + x = -4 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha\tau} = 9{,}677}$

$\alpha = \frac{3{,}307}{9{,}677} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 0{,}342}$

Obtenha o ganho k_c do sistema compensado por:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}} = k_c \frac{s + 3{,}307}{s + 9{,}677}$$

$$|G_c(s)G(s)H(s)|\Big|_{s=P} = 1$$

$$\left|k_c\left(\frac{s+3{,}307}{s+9{,}677}\right)\left(\frac{1}{s(s+5)(s+10)}\right)\right|_{s=-4+j4} = 1$$

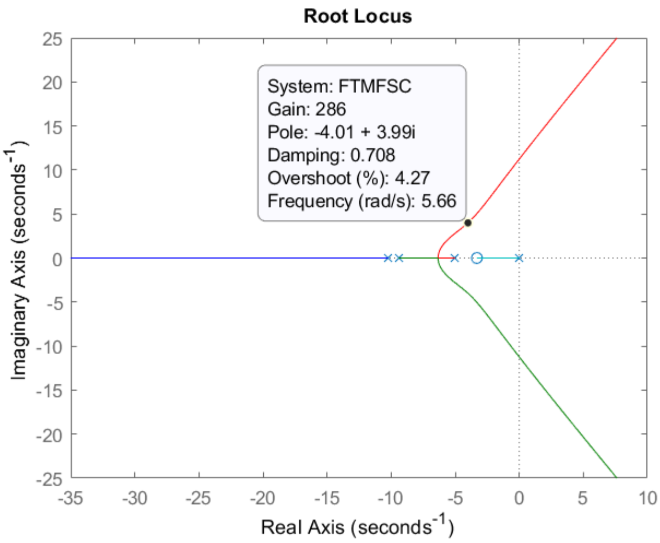
$$|k_c(-0{,}0035 - j0)| = 1$$

$$\boxed{k_c = 287{,}72}$$

h. *Escreva a FTRDSC*

$$\boxed{FTRDSC = 287{,}72\left(\frac{s+3{,}307}{s+9{,}677}\right)\left(\frac{1}{s(s+5)(s+10)}\right)}$$

i. *Verifique se todas as especificações de desempenho foram alcançadas, senão foram, repita o procedimento ajustando os polos e zeros do compensador.*



Especificações alcançadas.

Exemplo 5 – Para um sistema com retroação unitária a FTMA está representada abaixo. Efetue uma compensação de forma que os polos desejados estejam localizados em $-1 \pm j2$.

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s^2}$$

SOLUÇÃO
Traçando o LR:

1. O polinômio do denominador da FTMF é:

$$D(s) = 1 + \frac{k}{s^2}$$

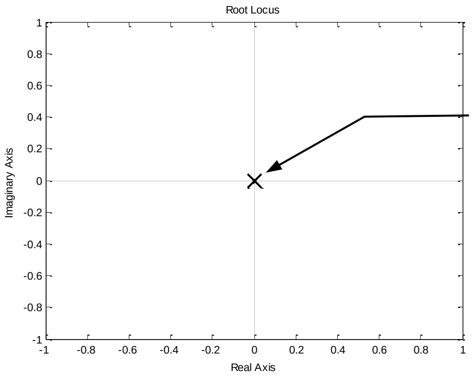
2. Reorganizando a equação acima na forma a isolar k:

$$D(s) = 1 + k\frac{1}{s^2}$$

logo,

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

3. Localizar os polos e zeros de $P(s)$ no plano complexo.



Polos Duplos

4. Marcar o LR sobre o eixo real (ver gráfico acima).

5. $LS = 2$

6. O LR é simétrico em relação ao eixo real.

7. $\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{N}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z} \Rightarrow \sigma_A = \frac{0+0}{2-0} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = 0}$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \times 180 \qquad q = 0,1,\cdots,(n_p - n_z - 1)$$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{2-0} \times 180 \qquad q = 0,1$$

$$\boxed{\varphi_A = 90°, 270°}$$

8. Determinação do ponto de saída sobre o eixo real

$$k = -\frac{1}{P(s)} = -s^2$$

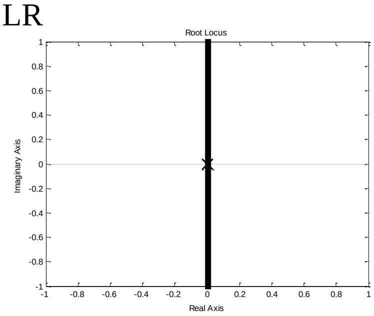
$$\frac{dk}{ds} = -2s = 0$$

$$\boxed{s = 0 \ \in \ LR}$$

9. Como os polos estão sobre o eixo real, eles saem a 90° para as assíntotas.

10. Os polos seguem a assíntota sobre o eixo imaginário.

11. Traçando o LR



PROJETO DO COMPENSADOR

1. *Com base nas especificações de desempenho, determine a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.*

   A localização desejada foi fornecida no LR e é $P = -1 \pm j2$.

2. *Desenhe o LR do sistema de malha fechada não compensado e verifique se é possível, apenas com o ajuste do ganho, obter o posicionamento dos polos do sistema no lugar desejado.*

   O LR está desenhado acima. Não é possível, apenas com ajuste do ganho, passar pela localização desejada dos polos dominantes, logo, devido aos polos desejados estarem localizados à esquerda do LR, o compensador a ser utilizado será o de avanço de fase.

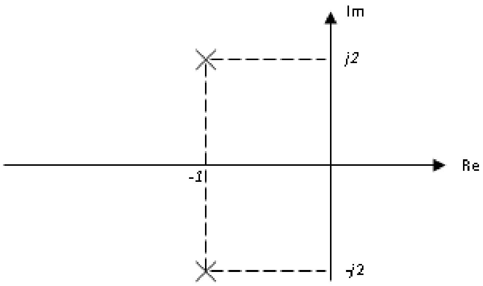
3. *Não sendo possível localizar os polos no lugar desejado, efetue o seguinte procedimento:*
   a. *Obtenha o ângulo da FTMA para a localização desejada do polo dominante de malha fechada escolhido.*

      $$\theta_P = \angle G(s)H(s)|_{s=P}$$
      $$\theta_P = \angle \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1+j2}$$
      $$\theta_P = \angle(-0{,}12 + j0{,}16)$$
      $$\boxed{\theta_P = 126{,}87°}$$

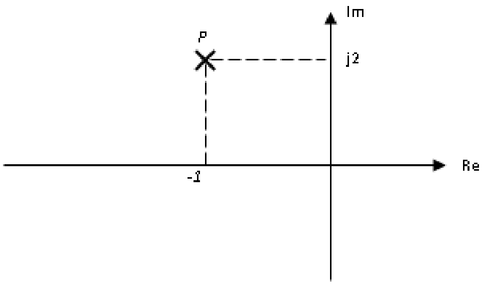
   b. *Calcule a contribuição angular do compensador, ϕ.*

      $$\phi = \big||\theta_p| - 180\big| = \big||126{,}87| - 180\big|$$
      $$\boxed{\phi = 53{,}13°}$$

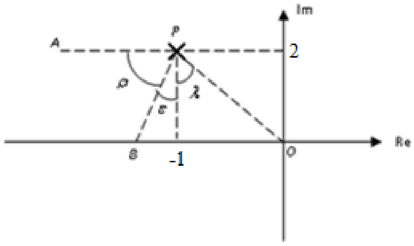
   c. *Marque no plano "s" a localização desejada dos polos de malha fechada.*



   d. *Escolha um dos polos dominantes de "P".*

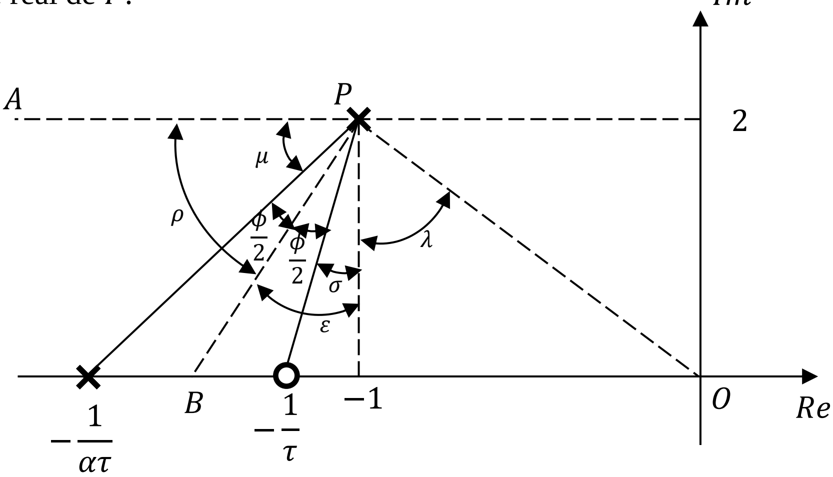


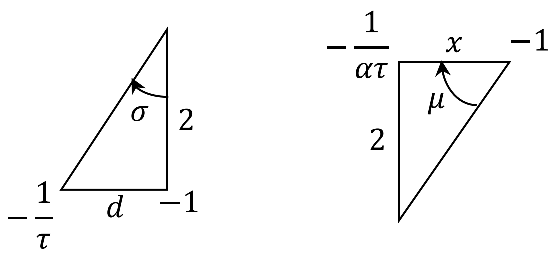
e. *Trace uma reta horizontal $\overline{AP}$ e uma reta conectando "P" à origem, $\overline{PO}$.*
f. *Trace a bissetriz do ângulo entre $\overline{AP}$ e $\overline{PO}$, e chame de $\overline{PB}$.*



$\lambda = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; \boxed{\lambda = 26{,}56^{o}}$
$\rho = \frac{\lambda+90}{2} \;\rightarrow\; \boxed{\rho = 58{,}28^{o}}$
$\varepsilon = 90 - \rho \;\rightarrow\; \boxed{\varepsilon = 31{,}72^{o}}$

g. A localização do polo e do zero do compensador por avanço de fase. Observe que ${}^{\phi}/_{2} < \varepsilon$, portanto, o zero do compensador fica a esquerda da parte real de P.





$$\sigma = \left|\varepsilon - \frac{\phi}{2}\right| = \left|31{,}72 - \frac{53{,}13}{2}\right| = 5{,}15^{o}$$
$$tg(\sigma) = \frac{d}{2} \Rightarrow tg(5{,}15^{o}) = \frac{d}{2} \Rightarrow \; d = 0{,}180 \Rightarrow -\frac{1}{\tau} + d = -1 \;\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\tau} = 1{,}180}$$

$$\mu = \left|\rho - \frac{\phi}{2}\right| = \left|58{,}28 - \frac{53{,}13}{2}\right| = 31{,}71^{o}$$
$$tg(\mu) = \frac{2}{x} \Rightarrow tg(31{,}71^{o}) = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 3{,}237 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha\tau} + x = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha\tau} = 4{,}237}$$
$$\alpha = \frac{1{,}180}{4{,}237} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 0{,}278}$$

Obtenha o ganho k_c do sistema compensado por:

$$G_c(s) = k_c \frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\alpha\tau}} = k_c \frac{s+1{,}180}{s+4{,}237}$$

$$|G_c(s)G(s)H(s)|\big|_{s=P} = 1$$

$$\left|k_c\left(\frac{s+1{,}180}{s+4{,}237}\right)\left(\frac{1}{s^2}\right)\right|\Bigg|_{s=-1+j2} = 1$$

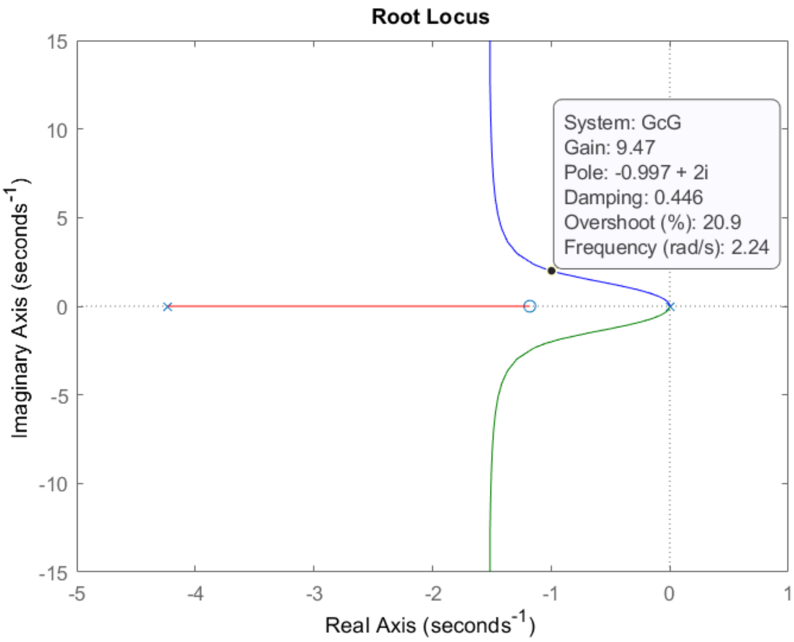
$$|k_c(-0{,}1055 - j0)| = 1$$

$$\boxed{k_c = 9{,}47}$$

h. *Escreva a FTRDSC*

$$\boxed{FTRDSC = 9{,}47\left(\frac{s+1{,}180}{s^3+4{,}237s^2}\right)}$$

i. *Verifique se todas as especificações de desempenho foram alcançadas, senão foram, repita o procedimento ajustando os polos e zeros do compensador.*



Especificações alcançadas.

2.3. COMPENSAÇÃO SÉRIE POR ATRASO DE FASE

A compensação por atraso de fase consiste essencialmente no aumento do ganho de malha aberta do sistema sem que as características da resposta transitória sejam muito alteradas. Isso significa que o lugar das raízes próximo aos polos dominantes de malha fechada não deve ser modificado significantemente.

Para não modificar substancialmente a localização dos polos dominantes da FTMF a contribuição angular da rede de atraso de fase deve ser limitada a um valor pequeno ($\approx 5°$). Para assegurar que isso ocorra, coloca-se o polo e o zero do compensador bem próximos entre si e próximos à origem do plano S. Assim,

$$-5° < \angle\left(\frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\alpha\tau}}\right) < 0°$$

e

$$|G_c(s)| = \left|K_c\frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\alpha\tau}}\right| \cong K_c$$

Logo, se o ganho do compensador for definido próximo de um, ou seja, se K_c for definido próximo de um, as características da resposta transitória não serão alteradas e o ganho da FTMA pode ser aumentado de um fator $\alpha > 1$.

Se o polo e o zero do compensador estão próximos à origem, então o valor de α pode ser aumentado a valores muito altos.

O valor de τ deve ser elevado, mas seu valor exato não é crítico, entretanto não é bom aumentar muito o valor de τ para evitar dificuldades na implementação física do compensador.

É importante notar que um aumento no ganho implica no aumento das constantes de erro estático.

O principal efeito negativo do compensador por atraso de fase é a existência de um zero próximo à origem, o que vai gerar um polo de malha fechada que irá seguir esse zero, tornando a resposta ao degrau de calda longa e de baixa amplitude, aumentando o tempo de acomodação.

PROCEDIMENTO

1. Obtenha a FTMF do sistema.
2. Localize os polos dominantes de MF, chamando um deles de P.
3. Calcule o erro estático do sistema.

4. Obtenha α que satisfaz a restrição de erro estático imposta no problema, de forma que:

$$\alpha = \frac{Novo\ Erro\ Estático}{Erro\ Estático\ Atual}$$

5. Localize o polo e o zero do compensador pela relação:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\alpha\tau}} = \frac{zero}{polo}$$

de forma que fiquem próximos à origem do plano S (ou seja, $\tau \gg 1$).

6. Obtenha a FTMASC.
7. Obtenha K_c de modo que o ganho da FTMASC no polo dominante seja unitário.

$$|G_c(s)G(s)H(s)|_{s=P} = 1$$

Colocando K_c em evidência, tem-se:

$$K_c = \left| \frac{1}{\left(\frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\alpha\tau}}\right) G(s)H(s)} \right|_{s=P}$$

8. Verifique se a fase do compensador no polo dominante de MF é menor que 5°.
9. Construa o LR do sistema compensado.
10. Localize sobre o novo LR a posição dos novos polos dominantes da FTMF do sistema compensado.
11. Verifique se a nova função de transferência satisfaz as especificações do problema.

Exemplo 6 – Considere um sistema com realimentação unitária de FTRD dada por

$$G(s) = \frac{1{,}06}{s(s+1)(s+2)}$$

Deseja-se tornar a constante de erro estático de velocidade para esse sistema igual a 5 s^{-1} sem alterar substancialmente a resposta transitória.

SOLUÇÃO

Para manter as características da resposta transitória é necessário utilizar um compensador de atraso de fase.

A FTMF do sistema é

$$FTMF = \frac{1{,}06}{s(s+1)(s+2)+1{,}06} = \frac{1{,}06}{s^3+3s^2+2s+1{,}06}$$

$$FTMF = \frac{1{,}06}{(s+0{,}3307 \pm j0{,}5864)(s+2{,}3386)}$$

Os polos dominantes são $(s = 0{,}3307 \pm j0{,}5864)$, então temos:

$$P = 0{,}3307 + j0{,}5864$$

O erro estático de velocidade do sistema é:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1{,}06}{s(s+1)(s+2)}\right)$$

$$\boxed{K_v = 0{,}53s^{-1}}$$

O valor de α é

$$\alpha = \frac{Novo\ Erro\ Estático}{Erro\ Estático\ Atual}$$

$$\alpha = \frac{5}{0{,}53}$$

$$\alpha = 9{,}434$$

Aproximando, tem-se:

$$\boxed{\alpha = 10}$$

Escolhendo o polo e o zero próximos à origem pela relação

$$\alpha = \frac{zero}{polo}$$

Temos: $s = -0{,}05$ e $s = -0{,}005$

Assim,

$$G_c(s) = K_c\frac{s+0{,}05}{s+0{,}005}$$

A FTRDSC é

$$\boxed{FTRDSC = G_c(s)G(s) = K_c\frac{s+0{,}05}{s+0{,}005}\left(\frac{1{,}06}{s(s+1)(s+2)}\right)}$$

Ganho de malha aberta do sistema compensado no polo dominante:

$$K_c = \left| \frac{1}{\left(\frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}} \right) G(s)H(s)} \right|_{s=P}$$

$$K = \left| \frac{1}{\frac{s + 0{,}05}{s + 0{,}005}\left(\frac{1{,}06}{s(s+1)(s+2)} \right)} \right|_{s=-0{,}33+j0{,}58}$$

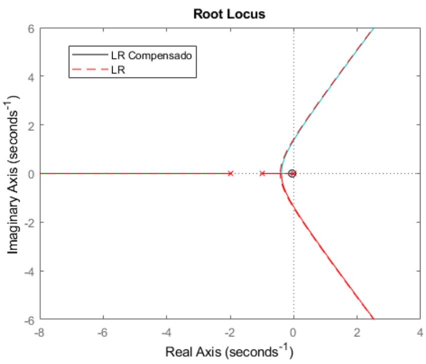
$$\boxed{K_c = 1{,}03}$$

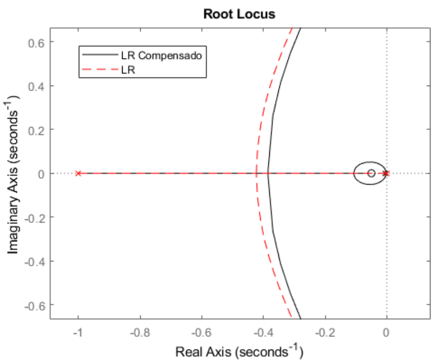
A contribuição angular do compensador é:

$$\phi = \angle\left(K_c \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}} \bigg|_{s=P} \right) = \angle\left(1{,}03 \frac{s + 0{,}05}{s + 0{,}005} \bigg|_{s=-0{,}33+j0{,}58} \right)$$

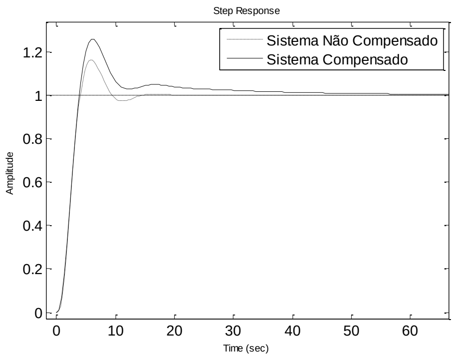
$$\boxed{\phi = -3{,}47°}$$

O LR dos dois sistemas, observe o deslocamento para direita:





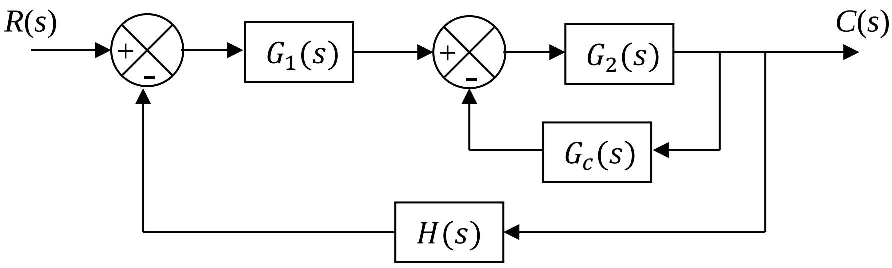
A resposta ao degrau dos sistemas é:



Pode-se verificar que, como o compensador é de atraso de fase, a acomodação da resposta é muito mais lenta que no sistema não compensado, todavia a máxima ultrapassagem geralmente é maior no sistema compensado devido ao aumento do ganho de malha aberta, mesmo mantendo praticamente inalterada as características da resposta transitória.

2.4. COMPENSAÇÃO EM PARALELO

O sistema da figura abaixo apresenta a configuração da compensação em paralelo.



A função de transferência do sistema é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_c(s) + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

A equação característica do sistema é:

$$1 + G_2(s)G_c(s) + G_1(s)G_2(s)H(s) = 0$$

Dividindo a equação característica por $1 + G_1(s)G_2(s)H(s)$, temos:

$$1 + \frac{G_2(s)G_c(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = 0$$

Arrumando,

$$1 + G_c(s)\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = 0$$

Chamando:

$$\boxed{G_f(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}}$$

A equação característica se resume a

$$1 + G_c(s)G_f(s) = 0$$

E o cálculo do compensador se resume ao cálculo dos modelos em série.

2.5. MATLAB

Funções úteis: *tf*, *rlocus*, *sgrid*, *rlocfind*, *pole*, *zero*, *lsim*, *step*, *impulse*, *residue*, *roots*, *ord2*, *rmodel*, *zpk*, *poly*, *sisotool* e *printsys*.

2.6. SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS

Livro Dorf 12ªed: E10.1 a E10.3, E10.8, E10.12, E10.18, E10.19, E10.21, P10.1, P10.3 a P10.6, P10.10, P10.11, P10.16, P10.17, P10.25
Livro Ogata 5ªed: B6.14 a B6.18, B6.22 a B6.26.

2.7. EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

(**Ogata 5ª ed. Ex. A.6.14 – Modificado**) Considere uma planta instável com FT dada abaixo. Utilizando o LR, projete um controlador PD que estabilize o sistema e forneça uma resposta subamortecida com $\zeta = 0{,}7$ e $\omega_n = 0{,}5[rad/s]$.

$$G(s) = \frac{1}{10000(s^2 - 1{,}085)}$$

SOLUÇÃO

As condições são $\zeta = 0{,}7$ e $\omega_n = 0{,}5\left[\frac{rad}{s}\right]$, ou, $\zeta = cos\,\theta = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45{,}573°$

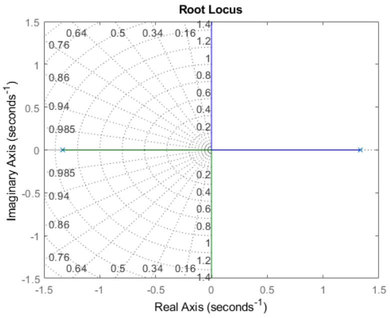
Assim,

$$\begin{cases} \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{Im}{Re}\right) = 45{,}573° \\ \omega_n = \sqrt{Re^2 + Im^2} = 0{,}5 \end{cases}$$

Do sistema de equações a localização desejada dos polos dominantes é:

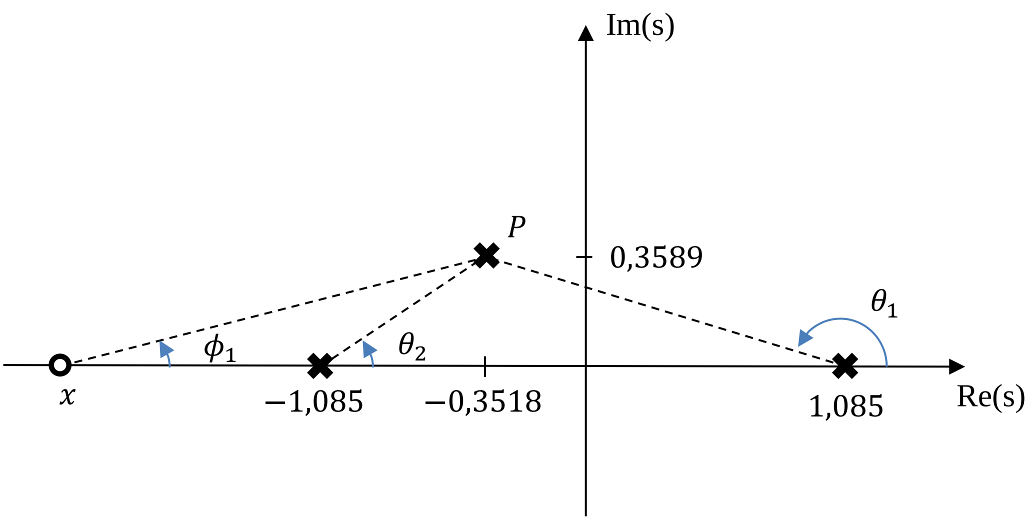
$$\boxed{P = -0{,}3518 \pm j0{,}3589}$$

Desenhando o LR, temos:



Observe que o ponto P está localizado à esquerda do LR, portanto, o PD terá efeito de avanço na compensação do LR.

O controlador PD apenas adiciona um único zero no sistema, e não um polo e um zero como nos compensadores, assim, a obtenção da localização do zero é feita de maneira mais simples usando somente a condição angular do LR.



$$\sum_{i=1}^{n_z} \phi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = \pm 180°(2n+1) \qquad n = 0,1,\ldots$$

$$\phi_1 - (\theta_1 + \theta_2) = \pm 180$$

$$\phi_1 - \left(180° - \tan^{-1}\left(\frac{0{,}3589}{1{,}085 + 0{,}3518}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{0{,}3589}{1{,}085 - 0{,}3518}\right)\right) = \pm 180°$$

$$\phi_1 - (165{,}9753° + 26{,}0803°) = \pm 180°$$

$$\boxed{\phi_1 = 12{,}0556°}$$

$$\tan\phi_1 = \frac{0{,}3589}{x - 0{,}3518} \quad \rightarrow \quad x = \frac{0{,}3589 + 0{,}3518 \tan\phi_1}{\tan\phi_1}$$

$$\boxed{x = 2{,}0322}$$

Assim, o zero do PD está localizado em $\boxed{s = -2{,}0322}$, ou $-\frac{1}{T_d} = -2{,}0322$ assim, $\boxed{T_d = 0{,}4921}$, portanto, a equação do controlado PD é: $\boxed{G_c(s) = 1 + 0{,}4921s}$

O valor do ganho para atingir o ponto P é calculado usando a condição de módulo do LR, ou seja:

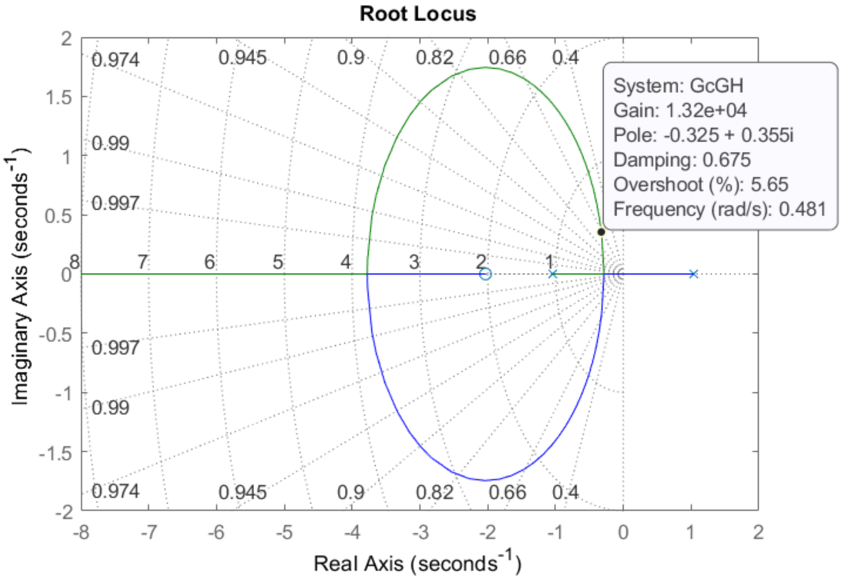
$$|KG_c(s)G(s)H(s)|_{s=P} = 1$$

$$\left|K(1 + T_d s)\left(\frac{1}{10000(s^2 - 1{,}085)}\right)\right|_{s=P} = 1$$

$$\left|K(1 + 0{,}4921s)\left(\frac{1}{10000(s^2 - 1{,}085)}\right)\right|_{s=-0{,}3518+j0{,}3518} = 1$$

$$\boxed{K = 13233}$$

Desenhando o LR após inserir o controlador PD,



Observe que os valores calculados são aproximados da resposta do Matlab.
O gráfico do LR mostra que o controlador PD estabiliza o sistema e permite que a resposta seja da forma desejada no problema.

(**Dorf 12ª Ed. Ex. 7.16 Adaptado**) Um sistema de controle de velocidade de veículos mantém a velocidade entre dois veículos e possui como variável controlada a velocidade relativa entre os dois veículos. As especificações de projeto são:

- Erro de estado estacionário zero, sobreposição inferior a 5% e o tempo de assentamento menor que 1,5 [s] (critério de 2%) para uma entrada em degrau;
- Erro de estado estacionário menor que 25% da magnitude da entrada para uma entrada em rampa;

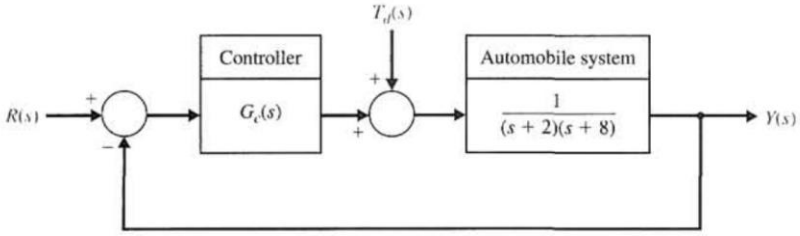
A FTRD do sistema com realimentação unitária é,

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)}$$

Obtenha um controlador para este sistema usando o método do LR.

SOLUÇÃO

O diagrama de blocos de controle deve ser assim:



Restrições:

1. O Erro de Estado Estacionário zero para entrada em degrau ocorre para sistemas do tipo 1 ou acima, portanto, como o sistema é do tipo 0, o **controlador deverá possuir um integrador**, logo,
$$G_c(s) = \frac{K_p}{s}$$

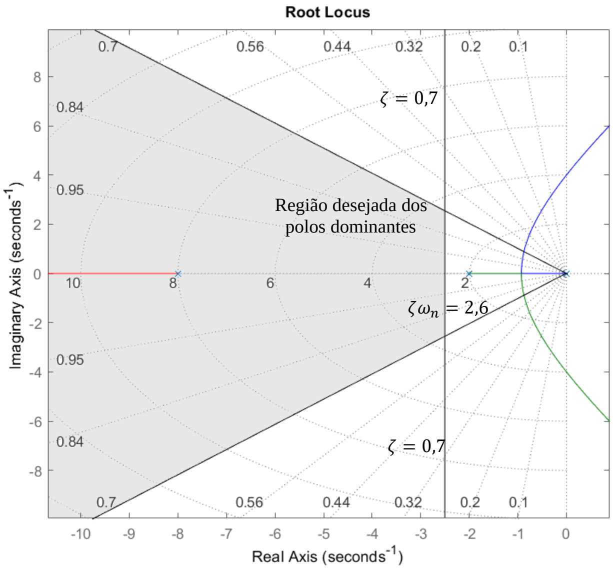
2. Da restrição de sobreposição inferior a 5% para uma entrada em degrau,
$$MP = e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} < 0{,}05$$
Resulta em
$$\boxed{\zeta > 0{,}69}$$

3. Da restrição de tempo de assentamento menor que 1,5 [s] (critério de 2%) para uma entrada em degrau,
$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n} < 1{,}5$$
Resulta em
$$\boxed{\zeta\omega_n > 2{,}6}$$

Das restrições acima, o LR do sistema, com a área dos polos dominantes que atendem ao problema é dado abaixo.

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_p}{s(s+2)(s+8)}$$

É possível verificar que os polos dominantes não estão na área de interesse.



Assim, para atender as restrições é necessário incluir um zero no sistema tendo, assim, um controlador PI.

$$G_c(s) = \frac{K_p\left(s + \frac{K_I}{K_p}\right)}{s}$$

logo,

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_p\left(s + \frac{K_I}{K_p}\right)}{s(s+2)(s+8)}$$

A equação característica do sistema é,

$$Q(s) = s^3 + 10s^2 + (16 + K_p)s + K_I$$

Usando o critério de Routh,

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & (16 + K_p) \\ s^2 & 10 & K_I \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & K_I & \end{array}$$

$$16 + K_p > 0 \quad \rightarrow \quad K_p > -16$$

$$K_I > 0$$

$$b_1 = 16 + K_p - \frac{K_I}{10} > 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{K_p > \frac{K_I}{10} - 16}$$

O Erro de Estado Estacionário menor que 25% da magnitude da entrada para uma entrada em rampa, implica na necessidade de ter o erro estático de velocidade constante (sistema do tipo 1),

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) > \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0{,}25} = 4$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{K_p s + K_I}{s(s+2)(s+8)} = \lim_{s\to 0} s\frac{K_p\left(s+\frac{K_I}{K_p}\right)}{s}\frac{1}{(s+2)(s+8)} = \frac{K_I}{16} > 4 \;\rightarrow\; \boxed{K_I > 64}$$

Sabe-se que um sistema com três polos $(0,-2,-8)$ e um zero $\left(-\frac{K_I}{K_p}\right)$ terão 2 assíntotas a $\pm 90^\circ$ partindo do eixo real no ponto σ_A. Da restrição em que $\zeta\omega_n > 2{,}6$ resulta em escolher $\sigma_A < -2{,}6$ para garantir que tenham polos na área desejada.

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{N}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z} < -2{,}6$$

$$\sigma_A = \frac{-2-8-0-\left(-\frac{K_I}{K_p}\right)}{3-1} < -2{,}6$$

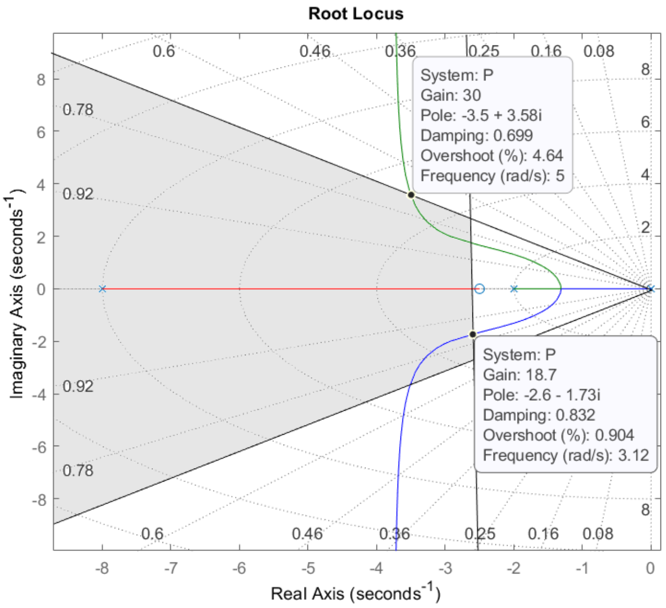
$$-5 + \frac{K_I}{2K_p} < -2{,}6 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{K_I}{K_p} < 4{,}7}$$

Escolhendo, por exemplo, $\frac{K_I}{K_p} = 2{,}5$ a equação característica será:

$$1 + \frac{K_p\left(s+\frac{K_I}{K_p}\right)}{s}\frac{1}{(s+2)(s+8)} = 0$$

$$1 + K_p\frac{s+2{,}5}{s(s+2)(s+8)} = 0$$

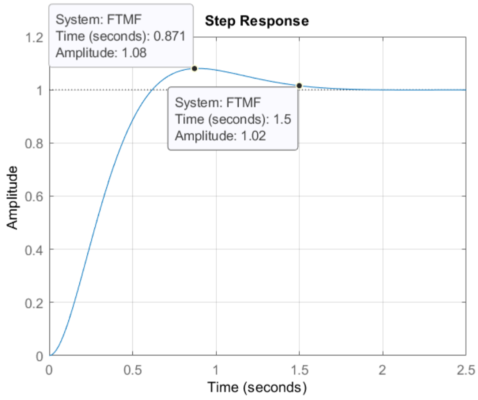
Fazendo o LR, o valor limite de K_p na região desejada é $\boxed{18{,}7 < K_p < 30}$.



Escolhendo, por exemplo, $K_p = 26$, temos que $K_I = 65$, que atende às condições intervalares, portanto,

$$\boxed{G_c(s) = 26 + \frac{65}{s}}$$

A resposta ao degrau do sistema compensado é,



Observe que a máxima ultrapassagem não é satisfeita (8%) e que pequenos ajustes são necessários para adequar a resposta à ultrapassagem desejada (5%).

(**Dorf 12ª Ed. Ex. 10.8 Adaptado**) Um sistema de realimentação unitária tem uma planta

$$G(s) = \frac{2257}{s(2,8 \times 10^{-3}s + 1)}$$

Obtenha um compensador

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Tal que as raízes dominantes da equação característica tenham $\zeta = 1/\sqrt{2}$. Plote o gráfico da saída para uma entrada em degrau unitário.

SOLUÇÃO

A equação característica do sistema é:

$1 + G(s)H(s) = 1$

$$1 + \frac{2257}{s(2,8 \times 10^{-3}s + 1)} K_P \left(\frac{s + \frac{K_I}{K_P}}{s} \right) = 0$$

$$s^2(2,8 \times 10^{-3}s + 1) + 2257K_P \left(s + \frac{K_I}{K_P} \right) = 0$$

$$2,8 \times 10^{-3}s^3 + s^2 + 2257K_P s + 2257K_I = 0$$

$$\boxed{s^3 + 357,14s^2 + 806.071,42K_P s + 806.071,42K_I = 0}$$

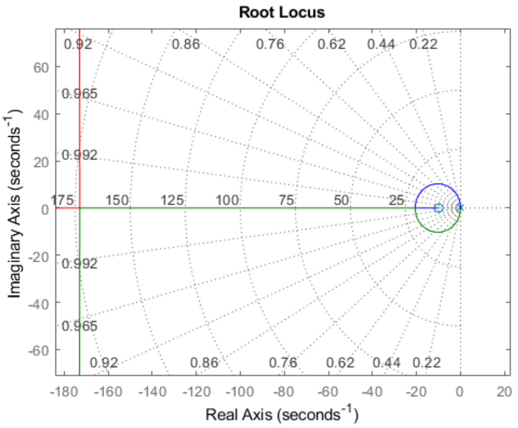
Do critério de Routh,

$$\boxed{\frac{K_P}{K_I} < 357,14} \quad \boxed{K_P > 0} \quad \boxed{K_I > 0}$$

Observe que o polo do compensador se localiza na origem e o zero em K_P/K_I. Assim, escolhendo o zero de forma a atender ao critério de Routh, por exemplo, em $s = -10$, temos o compensador da forma:

$$G_c(s) = K_P\left(\frac{s+10}{s}\right)$$

Fazendo o LR do sistema compensado, temos:



O problema pede a escolha dos polos dominantes com $\zeta = 0{,}707$, assim, ampliando o LR, o objetivo é encontrar o ganho em que a isolinha de $\zeta = 0{,}707$ toca o LR. O valor desse ganho é o próprio K_P. Logo, como é desconhecido o valor de ω_n, a solução é obtida graficamente pela observação do ponto de intersecção da reta com o LR.