CAP 4

REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS (ANALÓGICO)

SUMÁRIO

4.1. INTRODUÇÃO

Sistemas modernos de controle, geralmente, possuem muitas entradas e muitas saídas que se inter-relacionam de uma maneira complexa. Para análises desses sistemas é necessário o uso de modelos que permitam a redução da complexidade das expressões matemáticas, bem como a adequação para uso em sistemas computacionais.

4.2. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

É apropriada para sistemas que possuem várias entradas e várias saídas.

CASO CONTÍNUO

Matriz de Estado

Vetor de Estados

Matriz de Entrada

$$\dot{\vec{q}}_{n\times 1}(t) = A_{n\times n}\vec{q}_{n\times 1}(t) + B_{n\times r}\vec{x}_{r\times 1}(t)$$
$$\vec{y}_{m\times 1}(t) = C_{m\times n}\vec{q}_{n\times 1}(t) + D_{m\times r}\vec{x}_{r\times 1}(t)$$

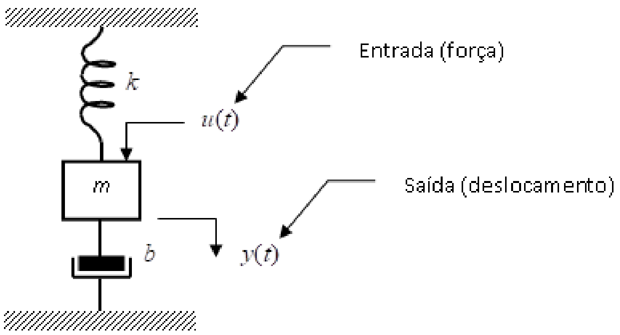
Vetor de Entrada

Matriz de Saída

Matriz de Transmissão Direta

Vetor de Saída

Exemplo 1 – Obtenha a representação no espaço de estados do sistema abaixo.



SOLUÇÃO

Modelagem Matemática

$$\sum forças = 0$$

$$u(t) = ky(t) + m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t)$$

O sistema é de segunda ordem. Para a representação no espaço de estados, devemos representar o sistema através de equações de primeira ordem. Assim, fazendo:

$$q_1(t) = y(t)$$
$$q_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{q}_1(t)$$

Podemos representar o sistema como:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = q_2(t) \\ \dot{q}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}q_1(t) - \frac{b}{m}q_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) = q_1(t) \end{cases}$$

Colocando na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix} + [0]u(t)$$

Que é a representação no espaço de estados do sistema.

Exemplo 2 – Um sistema de controle é modelado e representado pela seguinte equação diferencial:

$$2\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 10u(t)$$

obtenha a representação desse sistema no espaço de estado.

SOLUÇÃO

Efetuando a seguinte substituição de variáveis:

$$\begin{aligned}
&q_1(t) = y(t)\\
&q_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{q}_1(t)\\
&q_3(t) = \ddot{y}(t) = \dot{q}_2(t)\\
&\dot{q}_3(t) = \dddot{y}(t) = -2\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) - 4y(t) + 5u(t)\\
&\dot{q}_3(t) = \dddot{y}(t) = -2q_3(t) - 3q_2(t) - 4q_1(t) + 5u(t)
\end{aligned}$$

Assim, podemos representar o sistema na forma matricial.

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 5\end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix} + [0]u$$

Exemplo 3 – Um sistema é descrito por duas equações diferenciais como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y - 2u + aw = 0$$
$$\frac{d^2w}{dt^2} - by + 4u = 0$$

onde *w* e *y* são funções do tempo e *u* é uma entrada em função do tempo.

a) Selecione um conjunto de variáveis de estado.
b) Represente o sistema na forma matricial.

SOLUÇÃO

a) As variáveis de estado para esse sistema são.

$$\begin{aligned}
&q_1 = y && q_3 = w\\
&q_2 = \dot{y} = \dot{q}_1 && q_4 = \dot{w} = \dot{q}_3\\
&\dot{q}_2 = \ddot{y} = -aw + 2u - y && \dot{q}_4 = \ddot{w} = -4u + by
\end{aligned}$$

Adequando as equações, temos:

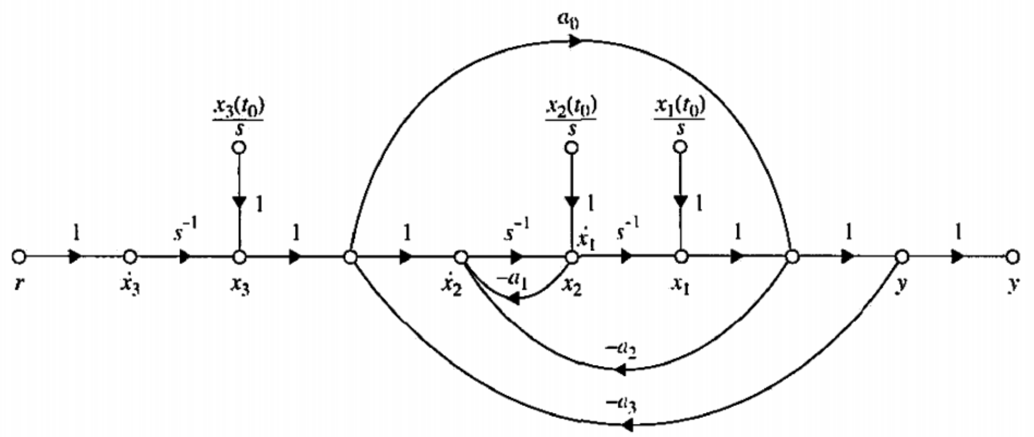
$$\begin{aligned}
&q_1 = y && q_3 = w\\
&q_2 = \dot{y} = \dot{q}_1 && q_4 = \dot{w} = \dot{q}_3\\
&\dot{q}_2 = \ddot{y} = -aq_3 + 2u - q_1 && \dot{q}_4 = \ddot{w} = -4u + bq_1
\end{aligned}$$

b) A representação na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} u$$

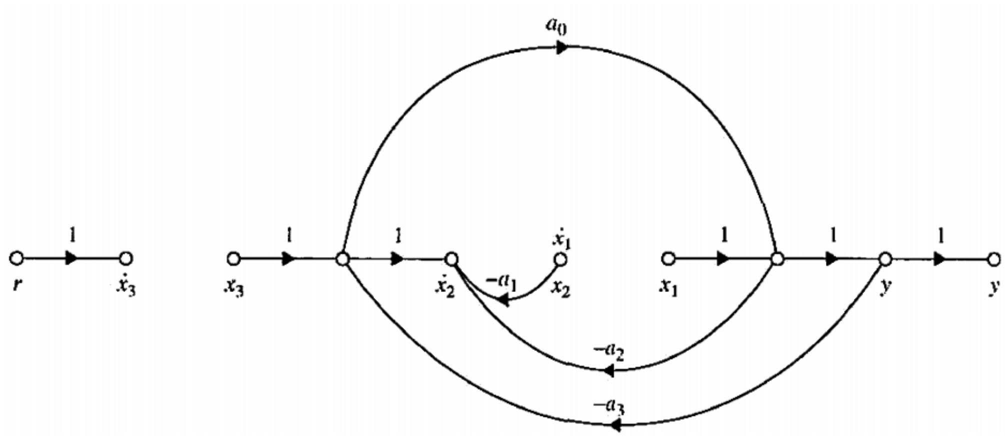
$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Exemplo 4 – Dado o GFS abaixo, obtenha o modelo no E.E.



SOLUÇÃO

Retirando os integradores e as condições iniciais, temos:



Montando as equações de nó nas variáveis de estado:

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 + (x_3 - a_3 y) - a_2\big(x_1 + a_0(x_3 - a_3 y)\big)$

$\dot{x}_3 = r$

$y = x_1 + a_0(x_3 - a_3 y)$

Arrumando, temos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-(a_2+a_3)}{1+a_0a_3} & -a_1 & \dfrac{1-a_0a_2}{1+a_0a_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{1+a_0a_3}x_1(t) + \frac{a_0}{1+a_0a_3}x_3(t)$$

4.3. TRANSFORMAÇÃO DE MODELOS DE SISTEMAS

A partir da representação no espaço de estados é possível obter a função de transferência para cada uma entrada e cada uma saída.

CASO CONTÍNUO

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}}(t) = A\vec{q}(t) + B\vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) = C\vec{q}(t) + D\vec{x}(t) \end{cases}$$

No domínio de Laplace

$$\begin{cases} sQ(s) = AQ(s) + BX(s) \\ Y(s) = CQ(s) + DX(s) \end{cases}$$

Assim,

$$Q(s)(sI - A) = BX(s)$$

$$Q(s) = \frac{B}{(sI - A)}X(s)$$

Substituindo na outra equação

$$Y(s) = CQ(s) + DX(s)$$

$$Y(s) = C\frac{B}{(sI - A)}X(s) + DX(s)$$

$$Y(s) = \left(C\frac{1}{(sI - A)}B + D\right)X(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

Para obter a função de transferência para cada entrada e saída basta colocar zeros nas posições das matrizes B e D correspondentes às entradas que não serão consideradas.

A equação característica do sistema é a matriz

$$\boxed{E_c(s) = |sI - A|}$$

As raízes da equação característica (polos da função de transferência) são os ***autovalores***, λ, de A que são obtidos através do determinante da matriz característica e eles são invariantes a uma transformação linear sobre a matriz da equação característica.

$$\boxed{|sI - A| = 0}$$

onde, | | é o determinante.

OBS: A Inversa de uma matriz é obtida fazendo:

$$M^{-1} = \frac{Adj(M)}{|M|}$$

$$Adj(M) = Cof^T(M)$$

$$Cof(M) = (-1)^{i+j} Det(M_{-i,-j})$$

Exemplo 5 – Obtenha a inversa de M

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

$$Cof(M) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{1+2} det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{1+3} det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ (-1)^{2+1} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{2+2} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{2+3} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ (-1)^{3+1} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{3+2} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{3+3} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

$$Cof(M) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Adj(M) = Cof^T(M) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Det(M) = 0 - (-1) = 1$$

$$\boxed{M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Exemplo 6 – Obtenha a inversa de M

$$M = (sI - A) = \begin{bmatrix} \mathrm{s} - 1 & 0 & -1 \\ -2 & \mathrm{s} - 3 & 0 \\ -1 & 1 & \mathrm{s} - 2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

$$Cof(M) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} det\left(\begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{1+2} det\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{1+3} det\left(\begin{bmatrix} -2 & s-3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ (-1)^{2+1} det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{2+2} det\left(\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{2+3} det\left(\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ (-1)^{3+1} det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ s-3 & 0 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{3+2} det\left(\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{3+3} det\left(\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

$$Cof(M) = \begin{bmatrix} (s-3)(s-2) & 2(s-2) & -2 + (s-3) \\ -1 & (s-1)(s-2) - 1 & -(s-1) \\ (s-3) & -2 & (s-1)(s-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 - 5s + 6 & 2s - 4 & s - 5 \\ -1 & s^2 - 3s + 1 & 1 - s \\ s - 3 & -2 & s^2 - 4s + 3 \end{bmatrix}$$

$$Adj(M) = Cof^T(M) = \begin{bmatrix} s^2 - 5s + 6 & -1 & s - 3 \\ 2s - 4 & s^2 - 3s + 1 & -2 \\ s - 5 & 1 - s & s^2 - 4s + 3 \end{bmatrix}$$

$$Det(M) = (s-1)(s-3)(s-2) + 2 - (s-3) = s^3 - 6s^2 + 10s - 1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{s^3 - 6s^2 + 10s - 1}\begin{bmatrix} s^2 - 5s + 6 & -1 & s - 3 \\ 2s - 4 & s^2 - 3s + 1 & -2 \\ s - 5 & 1 - s & s^2 - 4s + 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – A tarefa de pairar em baixa altitude sobre uma pista de aterrissagem móvel de um pequeno navio, sob comando manual, é muito difícil, em particular sob condições adversas de tempo e de mar. A condição de pairar é representada pela matriz ***A***, abaixo. Encontre as raízes da equação característica desse sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

$$|sI - A| = 0$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - 0 & -1 & 0 \\ 0 & s - 0 & -1 \\ 0 & 4 & s + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s - 0 & -1 & 0 \\ 0 & s - 0 & -1 \\ 0 & 4 & s + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2(s + 1) + 4s = 0$$

$$s^3 + s^2 + 4s = 0$$

As raízes são: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0{,}5 + j1{,}93$ e $\lambda_3 = -0{,}5 - j1{,}93$

Exemplo 8 – Considere o sistema abaixo com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Obtenha a função de transferência $Y_2(s)/U_1(s)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$

$$Y(s) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}U(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s + 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s + 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 25}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s + 4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 25}\left\{\begin{bmatrix} s + 4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 25}\left\{\begin{bmatrix} s + 4 & s + 5 \\ -25 & s - 25 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2+4s+25} & \dfrac{s+5}{s^2+4s+25} \\ -\dfrac{25}{s^2+4s+25} & \dfrac{s-25}{s^2+4s+25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

A função de transferência pedida tem $U_2(s) = 0$ para a saída $Y_2(s)$

$$\boxed{\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{25}{s^2+4s+25}}$$

Observe que todas as funções de transferência possuem a mesma equação característica, ou seja, quem determina o comportamento do sistema é a equação característica.

Exemplo 9 – Um sistema de controle possui sua FTMF dada abaixo. Represente o sistema no modelo de Espaço de Estados.

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

SOLUÇÃO

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_1 s + b_0)X(s)$$

$$\left(s^2 + a_2 s + a_1 + \frac{a_0}{s}\right)Y(s) = \left(b_1 + \frac{b_0}{s}\right)X(s)$$

$$s^2Y(s) + a_2 sY(s) + a_1 Y(s) + \frac{a_0}{s}Y(s) = b_1 X(s) + \frac{b_0}{s}X(s)$$

$$s^2Y(s) + a_2 sY(s) + a_1 Y(s) = b_1 X(s) + \left(\frac{b_0}{s}X(s) - \frac{a_0}{s}Y(s)\right)$$

$$\boxed{P_1(s) = \frac{b_0}{s}X(s) - \frac{a_0}{s}Y(s)} \qquad (i)$$

$$s^2Y(s) + a_2 sY(s) + a_1 Y(s) = b_1 X(s) + P_1(s)$$

$$sY(s) + a_2 Y(s) + \frac{a_1}{s}Y(s) = \frac{b_1}{s}X(s) + \frac{1}{s}P_1(s)$$

$$sY(s) + a_2 Y(s) = \left(\frac{b_1}{s}X(s) + \frac{1}{s}P_1(s) - \frac{a_1}{s}Y(s)\right)$$

$$\boxed{P_2(s) = \frac{b_1}{s}X(s) + \frac{1}{s}P_1(s) - \frac{a_1}{s}Y(s)} \qquad (ii)$$

$$sY(s) + a_2 Y(s) = P_2(s)$$

$$\boxed{sY(s) = P_2(s) - a_2 Y(s)} \qquad (iii)$$

Assim, arrumando as equações (i), (ii) e (iii):

$$\begin{cases} sP_1(s) = b_0 X(s) - a_0 Y(s) \\ sP_2(s) = b_1 X(s) + P_1(s) - a_1 Y(s) \\ sY(s) = P_2(s) - a_2 Y(s) \end{cases}$$

Fazendo a Transformada Inversa de Laplace:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = b_0 x(t) - a_0 y(t) \\ \dot{p}_2(t) = b_1 x(t) + p_1(t) - a_1 y(t) \\ \dot{y}(t) = p_2(t) - a_2 y(t) \end{cases}$$

Escolhendo as variáveis de estado:

$q_1(t) = p_1(t) \qquad q_2(t) = p_2(t) \qquad q_3(t) = y(t)$

Substituindo nas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = b_0 x(t) - a_0 q_3(t) \\ \dot{q}_2(t) = b_1 x(t) + q_1(t) - a_1 q_3(t) \\ \dot{q}_3(t) = q_2(t) - a_2 q_3(t) \end{cases}$$

Arrumando as equações:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = -a_0 q_3(t) + b_0 x(t) \\ \dot{q}_2(t) = q_1(t) - a_1 q_3(t) + b_1 x(t) \\ \dot{q}_3(t) = q_2(t) - a_2 q_3(t) \end{cases}$$

$y(t) = q_3(t)$

Representando no EE:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + [0] x(t)$$

4.4. MATLAB

Funções importantes: *ss*, *tf2ss*, *ss2tf*, *det*, *inv*, *residue*, *roots*, *eye*, *eig*.

4.5. LISTA DE EXERCÍCIOS

OGATA 4 Ed: B11.4, B11.10 a B11.12

DORF 12 Ed: E3.1 a E3.5, E3.8, E3.9, E3.11 a E3.23, P3.1 a P3.9, P3.14, P3.17, P3.18, P3.21 a P3.23

4.6. EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

(Dorf. E3.23) Considere o sistema modelado via equações diferenciais e terceira ordem,

$$\dddot{x}(t) + 3\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + x(t) = \dddot{u}(t) + 2\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + u(t)$$

Desenvolva uma representação no E.E. e obtenha um diagrama de blocos do sistema assumindo como saída $x(t)$ e como entrada $u(t)$.

SOLUÇÃO

No domínio de Laplace:

$$s^3X(s) + 3s^2X(s) + 3sX(s) + X(s) = s^3U(s) + 2s^2U(s) + 4sU(s) + U(s)$$

$$s^2X(s) + 3sX(s) + 3X(s) + \frac{X(s)}{s} = s^2U(s) + 2sU(s) + 4U(s) + \frac{U(s)}{s}$$

$$\boxed{Q_1(s) = \frac{U(s)}{s} - \frac{X(s)}{s}}$$

$$s^2X(s) + 3sX(s) + 3X(s) = s^2U(s) + 2sU(s) + 4U(s) + Q_1(s)$$

$$sX(s) + 3X(s) + 3\frac{X(s)}{s} = sU(s) + 2U(s) + 4\frac{U(s)}{s} + \frac{Q_1(s)}{s}$$

$$\boxed{Q_2(s) = 4\frac{U(s)}{s} + \frac{Q_1(s)}{s} - 3\frac{X(s)}{s}}$$

$$sX(s) + 3X(s) = sU(s) + 2U(s) + Q_2(s)$$

$$X(s) + 3\frac{X(s)}{s} = U(s) + 2\frac{U(s)}{s} + \frac{Q_2(s)}{s}$$

$$\boxed{Q_3(s) = 2\frac{U(s)}{s} + \frac{Q_2(s)}{s} - 3\frac{X(s)}{s}}$$

$$X(s) = U(s) + Q_3(s)$$

Escrevendo as equações no tempo:

$$\dot{q}_1(t) = u(t) - x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = 4u(t) + q_1(t) - 3x(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = 2u(t) + q_2(t) - 3x(t)$$

$$x(t) = u(t) + q_3(t)$$

Arrumando:

$$\dot{q}_1(t) = u(t) - \big(u(t) + q_3(t)\big) = -q_3(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = 4u(t) + q_1(t) - 3\big(u(t) + q_3(t)\big) = q_1(t) - 3q_3(t) + u(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = 2u(t) + q_2(t) - 3\big(u(t) + q_3(t)\big) = q_2(t) - 3q_3(t) - u(t)$$

$$x(t) = q_3(t) + u(t)$$

No E.E.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + u$$

O Diagrama de Blocos a partir das Equações de Estado: