CAP 2

MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS DE CONTROLE (DISCRETO)

SUMÁRIO

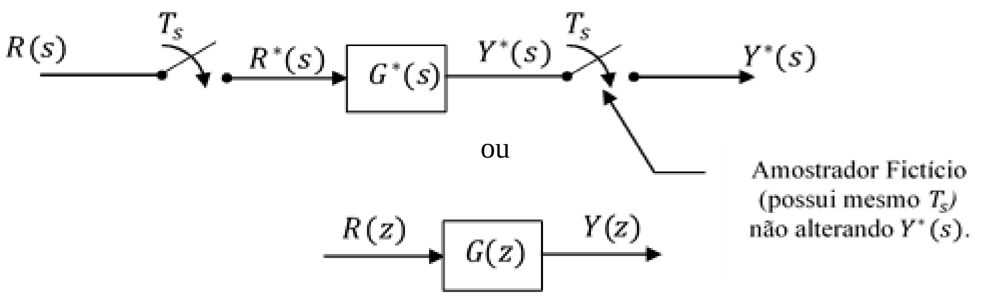
2.1. INTRODUÇÃO 2
2.2. MODELAGEM MATEMÁTICA NO DIAGRAMA DE BLOCOS 2
2.2.1. REPRESENTAÇÃO EM MATLAB 2
2.3. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA 2
2.3.1. REPRESENTAÇÃO EM MATLAB 4
2.4. TRANSFORMAÇÕES COM DIAGRAMAS DE BLOCOS 4
2.5. MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS 4
2.6. MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS 10
2.7. DIAGRAMA DE FLUXO DE SINAIS (DFS) 12
2.7.1. FÓRMULA DE GANHO DE MASON 12
2.7.2. GRAFO DE FLUXO DE SINAIS AMOSTRADO 12
2.8. MATLAB 16
2.9. LISTA DE EXERCÍCIOS 16

2.1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de sistemas de controle tem como objetivo obter um modelo matemático que represente uma relação de entrada e saída em um sistema de controle qualquer, ou seja, sua função de transferência. A representação gráfica do modelo matemático é baseada, principalmente, no Diagrama de Blocos.

2.2. MODELAGEM MATEMÁTICA NO DIAGRAMA DE BLOCOS

Para sistemas de controle digital utiliza-se a transformada pulsada ou a transformada $\mathcal{Z}$ para a representação das funções de transferência.



2.2.1. REPRESENTAÇÃO EM MATLAB

No Matlab os diagramas de blocos são representados no ambiente chamado *simulink*. De forma análoga aos sistemas analógicos, basta incluir os blocos correspondentes aos sistemas discretos.

2.3. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A função de transferência é uma relação matemática entre uma entrada e uma saída de um sistema de controle. Para sistemas discretos utiliza-se a Transformada $\mathcal{Z}$ para representar essa função.

$$Função\ de\ Transferência = G(z) = \left.\frac{\mathcal{Z}[saída]}{\mathcal{Z}[entrada]}\right|_{condições\ iniciais\ nulas}$$

O conceito de função de transferência é limitado a sistemas de equações diferenciais lineares e invariantes no tempo. Essas equações representadas no domínio de Laplace dão origem a funções polinomiais na forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \qquad m \leq n$$

As raízes do polinômio do numerador da função de transferência são chamadas de ZEROS da função e as raízes do polinômio do denominador são os POLOS da função ou do sistema de controle.

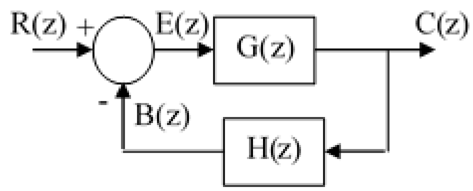
A resposta impulsiva de um sistema de controle permite obter o modelo do sistema, ou seja,

$$Y(z) = G(z)X(z)$$
$$Y(z) = G(z)\Delta(z) = G(z)$$

Assim, a ***função característica do sistema*** é obtida pela transformada $\mathcal{Z}$ inversa da resposta impulsiva do sistema de controle:

$$g[n] = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$$

Em um sistema realimentado, como o representado na figura abaixo,



a **função de transferência de malha aberta** é a relação entre o sinal de realimentação, $B(z)$, e o sinal de erro atuante, $E(z)$, ou seja:

$$\frac{B(z)}{E(z)} = G(z)H(z)$$

A **função de transferência do ramo direto**, por outro lado, é a relação entre o sinal de saída, $C(z)$, e o erro atuante, $E(z)$:

$$\frac{C(z)}{E(z)} = G(z)$$

Em sistemas com realimentação unitária a função de transferência do ramo direto é igual à função de transferência de malha aberta.

A relação entre o sinal de saída, $C(z)$, e o sinal de entrada, $R(z)$, de um sistema de malha fechada é chamada de **função de transferência de malha fechada** e é obtida, a partir do diagrama de blocos, da seguinte forma:

$$\begin{cases} C(z) = G(z)E(z) & (i) \\ E(z) = R(z) - B(z) & (ii) \\ B(z) = H(z)C(z) & (iii) \end{cases}$$

Substituindo (iii) em (ii) e o resultado em (i), tem-se:

$$C(z) = G(z)[R(z) - H(z)C(z)]$$
$$C(z) + G(z)H(z)C(z) = G(z)R(z)$$

$$C(z)[1 + G(z)H(z)] = G(z)R(z)$$
$$\boxed{\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}}$$

2.3.1. REPRESENTAÇÃO EM MATLAB

A criação de funções de transferência em Matlab é bastante simples. O código abaixo apresenta dois exemplos de criação das funções de transferência.

```
Command Window
>> z = tf('z',1);
>> G = z/(z^2 + 2*z + 1)

G =

        z
  -------------
  z^2 + 2 z + 1

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

fx >>
```

```
Command Window
>> G = tf([1 0],[1 2 1],1)

G =

        z
  -------------
  z^2 + 2 z + 1

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

fx >>
```

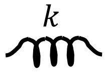
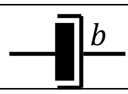
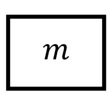
2.4. TRANSFORMAÇÕES COM DIAGRAMAS DE BLOCOS

Idem aos sistemas analógicos.

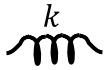
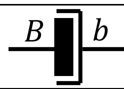
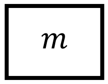
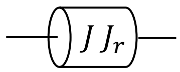
2.5. MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS

Elementos ideais básicos e suas equações para condições iniciais nulas.

Deslocamento Linear

ELEM	SÍMBOLO	MODELAGEM DISCRETA	
Mola	k 	$f[nT_s] = kx[nT_s]$	$F(z) = kX(z)$
Freio		$f[nT_s] = b\nabla_x[nT_s]$	$F(z) = \frac{b}{T_s}(1 - z^{-1})X(z)$
Massa		$f[nT_s] = m\nabla_x^2[nT_s]$	$F(z) = \frac{m}{T_s}(1 - z^{-1})^2X(z)$

Rotação

ELEM	SÍMBOLO	MODELAGEM DISCRETA	
Mola	 k	$f[nT_s] = k\theta[nT_s]$	$F(z) = k\theta(z)$
Freio	 B b	$f[nT_s] = b\nabla_\theta[nT_s]$ $T_r[nT_s] = B\nabla_\theta[nT_s]$	$F(z) = \frac{b}{T_s}(1 - z^{-1})\theta(z)$
Massa	 m	$f[nT_s] = mr\nabla_\theta^2[nT_s]$	$F(z) = \frac{m}{T_s} r(1 - z^{-1})^2\theta(z)$
Inércia	 $J\, J_r$	$f[nT_s] = J\nabla_\theta^2[nT_s]$	$F(z) = \frac{J}{T_s}(1 - z^{-1})^2\theta(z)$

$$\nabla_x[nT_s] = \frac{1}{T_s}\{x[nT_s] - x[nT_s - T_s]\}$$
$$\nabla_x^2[nT_s] = \frac{1}{T_s}\{x[nT_s] - 2x[nT_s - T_s] + x[nT_s - 2T_s]\}$$

T_s é o período de amostragem
r é o raio
T_r é o torque $\{T_r[nT_s] = f[nT_s] \times r\}$

$$\mathcal{Z}\{\nabla_x[nT_s]\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{T_s}\{x[nT_s] - x[nT_s - T_s]\}\right\} = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})X(z)$$
$$\mathcal{Z}\{\nabla_x^2[nT_s]\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{T_s}\{x[nT_s] - 2x[nT_s - T_s] + x[nT_s - 2T_s]\}\right\} = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})^2X(z)$$

Modelo Dinâmico de um Sistema

É o conjunto de equações diferenciais das variáveis que representam o comportamento dinâmico do sistema.
OBS: As integrais devem “desaparecer” do modelo de equações.

OBS: Pêndulo Simples

Regra de 3 simples:

Perímetro	Ângulo
$2\pi L$	2π
$s[n]$	$\theta[n]$

$\therefore \boxed{s[n] = L\theta[n]}$

A aceleração do pêndulo é dada por:

$a[n] = \nabla_s^2[n] \to \boxed{a[n] = L\nabla_\theta^2[n]}$

A força do pêndulo é dada por:

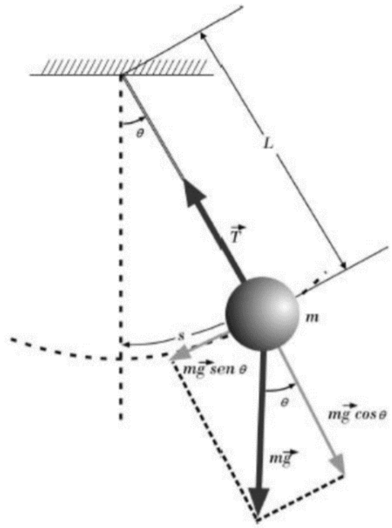
$F[n] = ma[n] = mL\nabla_\theta^2[n]$

que é a soma vetorial de $\vec{T}$ com $m\vec{g}$, assim:

$F[n] = \vec{T}[n] + m\vec{g}$

$mL\nabla_\theta^2[n] = m\vec{g}\cos\theta[n] - \{m\vec{g}\cos\theta[n] + m\vec{g}\sin\theta[n]\}$

$\boxed{\nabla_\theta^2[n] + \frac{\vec{g}}{L}\sin\theta[n] = 0}$ (Equação de Mathieu)



Para θ pequeno, $\sin\theta \cong \theta$, logo,

$\nabla_\theta^2[n] + \frac{\vec{g}}{L}\theta[n] = 0$, cuja solução da EDO é:

$\theta[n] = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}n + \varphi\right)$,

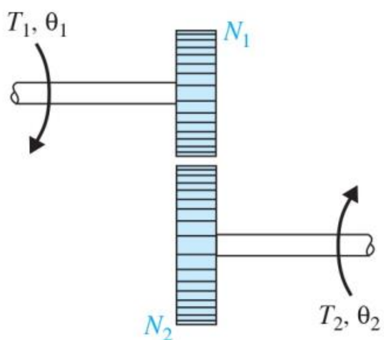
Assim, o período de oscilação do pêndulo é:

$\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T_0} \to \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$

O Torque é dado por:

$T_r[n] = F[n] \times L = mL^2\nabla_\theta^2[n]$

OBS: Caixa de Engrenagens

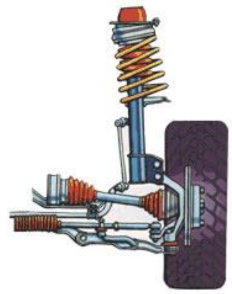


$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Onde r_1 e r_2 são os raios das engrenagens 1 e 2, respectivamente.

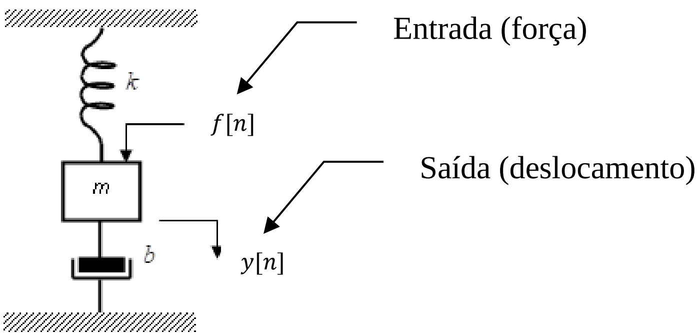
Exemplo 1 – Um sistema de amortecimento de impacto para veículos de passeio é mostrado na figura abaixo. Sabendo que o sistema possui uma mola e um dispositivo de freio para oscilação, obtenha:

a) a representação esquemática do sistema discreto,
b) o seu modelo discreto dinâmico,
c) sua FT discreta



SOLUÇÃO

a) Representação Esquemática do Sistema:



b) Modelagem Matemática Dinâmica:

$$\sum forças = 0$$

$$\boxed{f[n] = ky[n] + b\nabla_y[n] + m\nabla_y^2[n]}$$

c) Função de Transferência:

No domínio $\mathcal{Z}$, considerando que o sistema se encontra em repouso com condições iniciais nulas.

$$F(z) = \mathcal{Z}\left\{ky[n] + b\frac{1}{T_s}\{y[n] - y[n-1]\} + m\frac{1}{T_s}\{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]\}\right\}$$

$$F(z) = kY(z) + b\frac{1}{T_s}\{Y(z) - z^{-1}Y(z)\} + m\frac{1}{T_s}\{Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z)\}$$

$$F(z) = Y(z)\left\{\left(k + \frac{1}{T_s}(b+m)\right) - z^{-1}\frac{1}{T_s}(b+2m) + z^{-2}\frac{1}{T_s}m\right\}$$

$$F(z) = Y(z)\frac{1}{T_s}\{(kT_s + b + m) - z^{-1}(b + 2m) + z^{-2}m\}$$

$\therefore$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{T_s}{(kT_s + b + m) - z^{-1}(b + 2m) + z^{-2}m}}$$

Exemplo 2 – Para o sistema do exemplo anterior, usando os parâmetros: $m = 1[kg]$, $b = 2[N \cdot s/m]$, $k = 1[N/m]$ e $T_s = 1[s]$.

a) Obtenha a equação da FT do sistema analógico e discreto.
b) Usando o Matlab, obtenha o modelo discretizado a partir do modelo analógico usando a transformação bilinear.
c) Ainda com o Matlab, plote os gráficos de resposta ao degrau dos sistemas analógico, discreto e discretizado.
d) O que ocorre com a resposta dos sistemas discreto e discretizado?

SOLUÇÃO

a) O modelo analógico foi obtido no capítulo de modelagem analógica e é:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

O modelo discreto é:

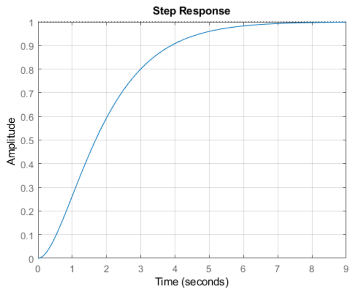
$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{T_s}{(kT_s + b + m) - z^{-1}(b + 2m) + z^{-2}m} = \frac{1}{4 - 4z^{-1} + z^{-2}} = \frac{0{,}25z^2}{z^2 - z + 0{,}25}$$

b) O modelo discretizado, usando o Matlab (com arrumação dos coeficientes) é:

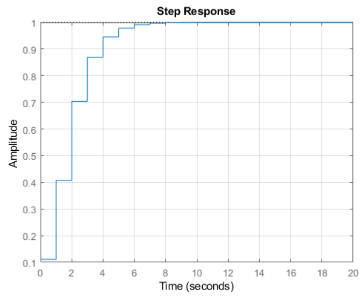
```
Command Window
>> Numc = 1; Denc = [1 2 1];
>> Gs = tf(Numc,Denc)

Gs =

        1
  -------------
  s^2 + 2 s + 1

Continuous-time transfer function.

>> [Numd,Dend] = bilinear(Numc,Denc,1);
>> Gz = tf(Numd,Dend,1)

Gz =

  0.1111 z^2 + 0.2222 z + 0.1111
  ------------------------------
     z^2 - 0.6667 z + 0.1111

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

$$\boxed{\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{z^2 + 2z + 1}{9z^2 - 6z + 1}}$$

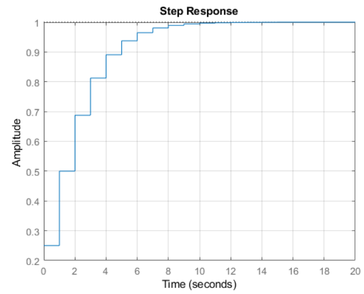
c) Gráficos da resposta ao degrau



Analógico



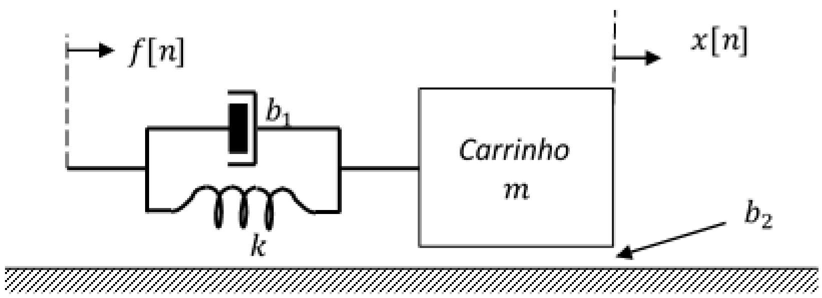
Discretizado



Discreto

d) Os gráficos são muito semelhantes e adequados para a representação do sistema. A diferença se deve à transformação bilinear não ser exata.

Exemplo 3 – (DORF E2.20 Modificado) O sistema de posicionamento de alta precisão de uma peça deslizante está mostrado na figura abaixo. Determine a equação de comportamento dinâmico e sua função de transferência $X(z)/F(z)$ quando o coeficiente de atrito viscoso da haste acionadora é $b_1 = 1[N \cdot s/m]$, a constante de mola da haste acionadora é $k = 3[N/m]$, a massa é $m = 3$[kg], o atrito de deslizamento é $b_2 = 2[N \cdot s/m]$ e $T_s = 1[s]$.



SOLUÇÃO

Equação de Comportamento Dinâmico:

$$\sum F = 0$$

$$f[n] = b_1 \nabla_x[n] + kx[n] + b_2 \nabla_x[n] + m\nabla_x^2[n]$$

$$f[n] = b_1 \frac{1}{T_s}\{x[nT_s] - x[nT_s - T_s]\} + kx[n] + b_2 \frac{1}{T_s}\{x[nT_s] - x[nT_s - T_s]\} +$$
$$m\frac{1}{T_s}\{x[nT_s] - 2x[nT_s - T_s] + x[nT_s - 2T_s]\}$$

$$f[n] = b_1\{x[n] - x[n-1]\} + kx[n] + b_2\{x[n] - x[n-1]\} + m\{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]\}$$

$$\boxed{f[n] = (k + b_1 + b_2 + m)x[n] - (b_1 + b_2 + 2m)x[n-1] + mx[n-2]}$$

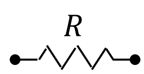
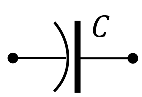
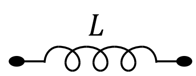
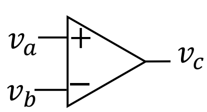
Função de Transferência:

$$F(z) = (k + b_1 + b_2 + m)X(z) - (b_1 + b_2 + 2m)z^{-1}X(z) + mz^{-2}X(z)$$
$$F(z) = X(z)[(k + b_1 + b_2 + m) - (b_1 + b_2 + 2m)z^{-1} + mz^{-2}]$$
$$\boxed{\frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{(k + b_1 + b_2 + m) - (b_1 + b_2 + 2m)z^{-1} + mz^{-2}}}$$

Assim,
$$\boxed{\frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{9 - 9z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{z^2}{9z^2 - 9z + 3}}$$

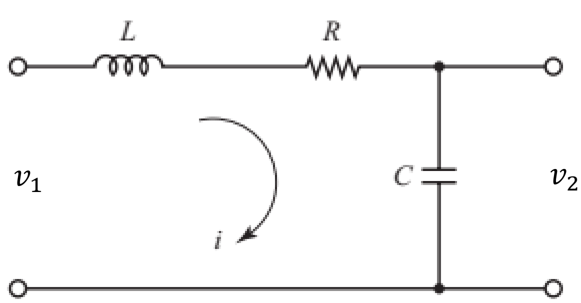
2.6. MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS

Elementos ideais básicos e suas equações.

ELEMENTO	SÍMBOLO	MODELAGEM DISCRETA	
Resistor		$v[nT_s] = Ri[nT_s]$	$V(z) = RI(z)$
Capacitor		$i[nT_s] = C\nabla_v[nT_s]$	$I(z) = \frac{C}{T_s}(1 - z^{-1})V(z)$
Indutor		$v[nT_s] = L\nabla_i[nT_s]$	$V(z) = \frac{L}{T_s}(1 - z^{-1})I(z)$
Amplificador		$v_c[nT_s] = K\big[v_a[nT_s] - v_b[nT_s]\big]$	$V(z) = K[V_a(z) - V_b(z)]$

OBS: O uso de impedâncias é válido somente quando as condições iniciais forem nulas.

Exemplo 4 – Um circuito de chaveamento é usado para converter um nível de tensão CC em uma saída de tensão CC. O circuito do filtro destinado a eliminar as frequências altas está mostrado na figura abaixo. Obtenha a equação que representa o comportamento dinâmico do sistema discreto e a sua função de transferência $V_2(z)/V_1(z)$. Considere $T_s = 1[ms]$. Simule no matlab a resposta de tensão do sistema para uma entrada em degrau unitário quando os componentes são: $R = 10[k\Omega]$, $L = 20[mH]$ e $C = 100[\mu F]$.



SOLUÇÃO

Modelo Dinâmico:

$$v_1[n] = L\nabla_i[n] + Ri[n] + \frac{1}{C}\sum i[n]$$

$$\boxed{\nabla_{v_1}[n] = L\nabla_i^2[n] + R\nabla_i[n] + \frac{1}{C}i[n]}$$

$$\boxed{\nabla_{v_2}[n] = \frac{1}{C}i[n]}$$

Função de Transferência:

$$\frac{\nabla_{v_2}[n]}{\nabla_{v_1}[n]} = \frac{\frac{1}{C}i[n]}{L\nabla_i^2[n] + R\nabla_i[n] + \frac{1}{C}i[n]}$$

$$\frac{\frac{1}{T_s}\{v_2[nT_s] - v_2[nT_s - T_s]\}}{\frac{1}{T_s}\{v_1[nT_s] - v_1[nT_s - T_s]\}} = \frac{\frac{1}{C}i[n]}{L\frac{1}{T_s}\{i[nT_s] - 2i[nT_s - T_s] + i[nT_s - 2T_s]\} + R\frac{1}{T_s}\{i[nT_s] - i[nT_s - T_s]\} + \frac{1}{C}i[n]}$$

$$\frac{\{v_2[n] - v_2[n-1]\}}{\{v_1[n] - v_1[n-1]\}} = \frac{\frac{1}{C}i[n]}{L\{i[n] - 2i[n-1] + i[n-2]\} + R\{i[n] - i[n-1]\} + \frac{1}{C}i[n]}$$

Fazendo a Transformada $\mathcal{Z}$

$$\frac{V_2(z)(1 - z^{-1})}{V_1(z)(1 - z^{-1})} = \frac{\frac{1}{C}I(z)}{L\{I(z) - 2z^{-1}I(z) + z^{-2}I(z)\} + R\{I(z) - z^{-1}I(z)\} + \frac{1}{C}I(z)}$$

$$\frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{\frac{1}{C}I(z)}{I(z)\left[L + R + \frac{1}{C} - z^{-1}(2L + R) + z^{-2}L\right]}$$

$$\boxed{\frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{\frac{1}{C}}{\left(L + R + \frac{1}{C}\right) - (2L + R)z^{-1} + Lz^{-2}}}$$

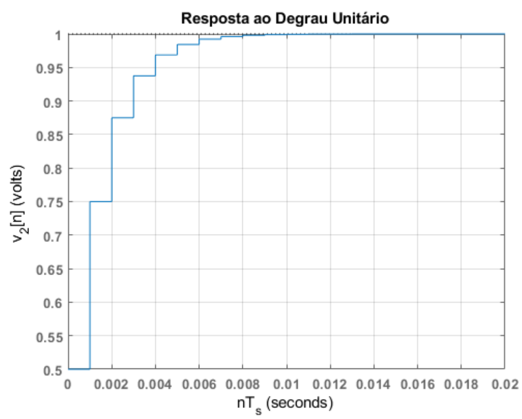
Para a simulação no Matlab:

$$\frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{10^4}{(20 \times 10^{-3} + 10000 + 10^4) - (40 \times 10^{-3} + 10000)z^{-1} + 20 \times 10^{-3}z^{-2}}$$

$$\frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{10^4 z^2}{2 \times 10^4 z^2 - 10^4 z + 20 \times 10^{-3}}$$

$$\boxed{\frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{0{,}5z^2}{z^2 - 0{,}5z + 6{,}25 \times 10^{-8}}}$$

```
Command Window
>> G = tf(0.5*[1 0 0],[1 -0.5 6.25*10^-8],0.001)

G =

        0.5 z^2
  ----------------------
  z^2 - 0.5 z + 6.25e-08

Sample time: 0.001 seconds
Discrete-time transfer function.

>> step(G)
>> xlabel('nT_s')
>> ylabel('v_2[n] (volts)')
>> title('Resposta ao Degrau Unitário')
>> grid on
>>
```



2.7. DIAGRAMA DE FLUXO DE SINAIS (DFS)

Idem aos sistemas analógicos.

2.7.1. FÓRMULA DE GANHO DE MASON

Idem aos sistemas analógicos.

2.7.2. GRAFO DE FLUXO DE SINAIS MISTO

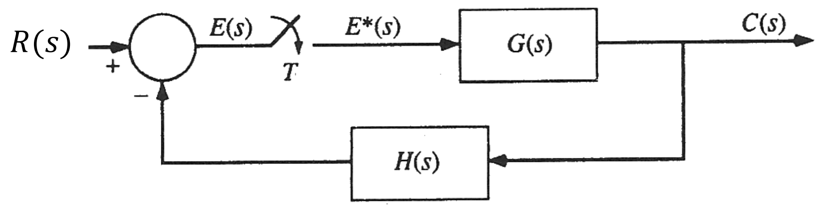
Uma vez que sistemas de controle com dados discretos contém sinais tanto analógicos quanto discretos, a Fórmula do Ganho de Mason não pode ser utilizada diretamente no sistema original. Ela pode ser usada em um sistema com todos os componentes analógicos ou todos discretos, mas não com a mistura destes.

O primeiro passo para obter um grafo de sinais amostrado é expressar todas as equações como variáveis discretas seguindo as seguintes etapas:

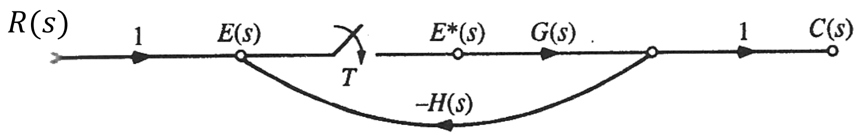
1. Identifique as variáveis de entrada e de saída.

   Entradas: $R(s)$, $E^*(s)$
   Saídas: $E(s)$, $C(s)$

2. Construa um GFS equivalente ao diagrama de blocos do sistema.



(a)



(b)

3. Escreva as equações de causa e efeito do sistema para o GFS equivalente.

Relação entre $R(s)$ e $E(s)$: $E(s) = R(s)$

Relação entre $R(s)$ e $C(s)$: Não há

Relação entre $E^*(s)$ e $E(s)$: $E(s) = -G(s)H(s)E^*(s)$

Relação entre $E^*(s)$ e $C(s)$: $C(s) = G(s)E^*(s)$

4. Aplique a transformada pulsada nos dois lados de cada equação de causa e efeito.

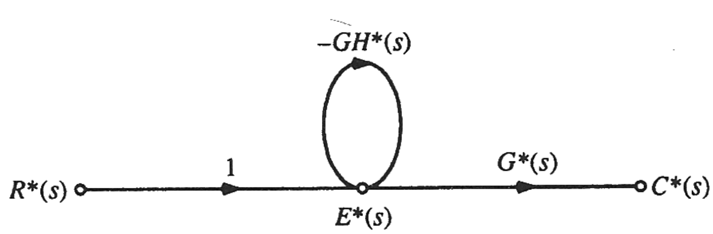
$$\boxed{E^*(s) = R^*(s)}$$

$$E^*(s) = [-G(s)H(s)E^*(s)]^*$$
$$\boxed{E^*(s) = -GH^*(s)E^*(s)}$$

$$C^*(s) = [G(s)E^*(s)]^*$$
$$\boxed{C^*(s) = G^*(s)E^*(s)}$$

OBS: Propriedade da Transformada Pulsada.
$\mathcal{P}\{G_1(s)\ \times G_2(s)\} \neq \mathcal{P}\{G_1(s)\} \times \mathcal{P}\{G_2(s)\}$
$G_1(s)\ \times G_2(s) = H(s) = G_1G_2(s)$
$\mathcal{P}\{G_1(s)\ \times G_2(s)\} = \mathcal{P}\{H(s)\} = H^*(s) = G_1G_2^*(s)$

5. Desenhe o GFS amostrado usando apenas as equações com as variáveis discretas obtidas no passo anterior.

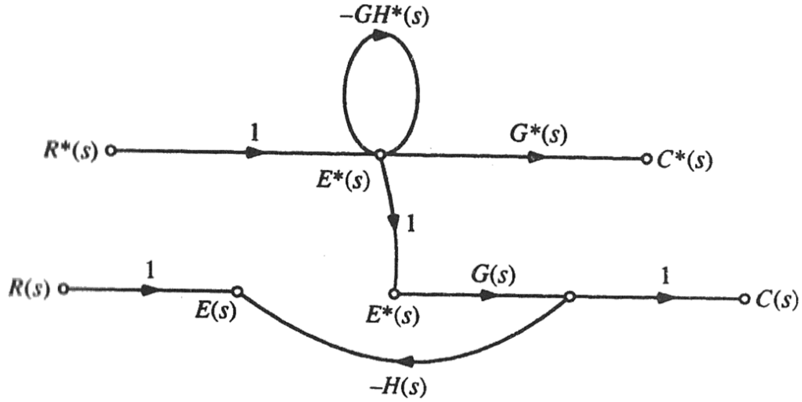


6. Uma vez tendo o GFS amostrado é possível utilizar a Fórmula de Mason.

$$\boxed{\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + GH^*(s)}}$$

$$\frac{E^*(s)}{R^*(s)} = \frac{1}{1 + GH^*(s)}$$

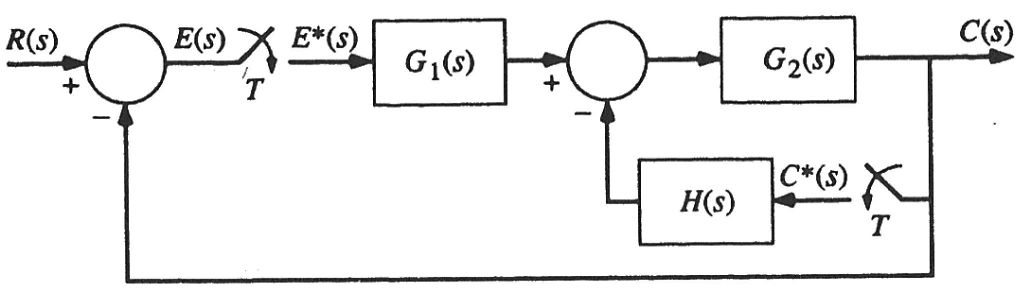
7. O GFS composto é obtido combinando o GFS equivalente com o GFS amostrado.



A fórmula de Mason pode ser usada para calcular os ganhos no GFS composto.

$$\boxed{\frac{C(s)}{R^*(s)} = \frac{G(s)}{1 + GH^*(s)}}$$

Exemplo 5 – O Diagrama de Blocos de um sistema de controle discreto multimalha é mostrado na figura abaixo. Obtenha GFS Composto.

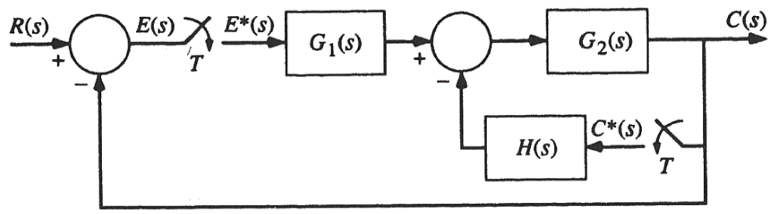


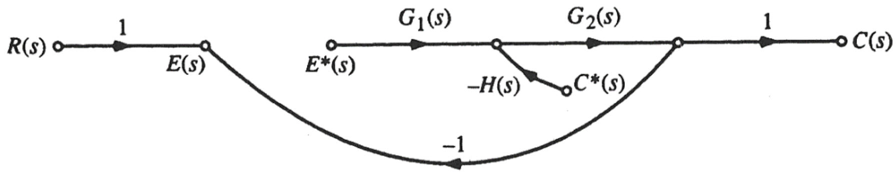
SOLUÇÃO

1. Identifique as variáveis de entrada e de saída.

   Entradas: $R(s)$, $E^*(s)$, $C^*(s)$
   Saídas: $E(s)$, $C(s)$

2. Construa um GFS equivalente ao diagrama de blocos do sistema.





3. Escreva as equações de causa e efeito do sistema para o GFS equivalente.

Relação entre $R(s)$ e $E(s)$: $E(s) = R(s)$

Relação entre $R(s)$ e $C(s)$: Não há

Relação entre $E^*(s)$ e $E(s)$: $E(s) = -G_1(s)G_2(s)E^*(s)$

Relação entre $E^*(s)$ e $C(s)$: $C(s) = G_1(s)G_2(s)E^*(s)$

Relação entre $C^*(s)$ e $E(s)$: $E(s) = H(s)G_2(s)C^*(s)$

Relação entre $C^*(s)$ e $C(s)$: $C(s) = -H(s)G_2(s)C^*(s)$

4. Aplique a transformada pulsada nos dois lados de cada equação de causa e efeito.

$$\boxed{E^*(s) = R^*(s)}$$

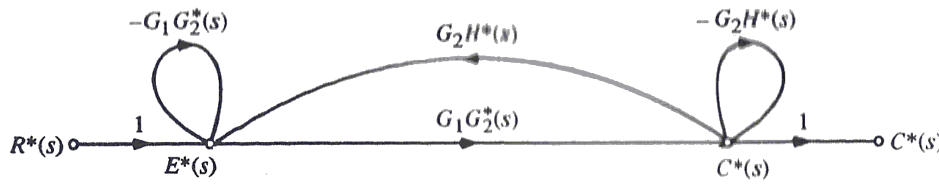
$$E^*(s) = [-G_1(s)G_2(s)E^*(s)]^*$$
$$\boxed{E^*(s) = -G_1G_2{}^*(s)E^*(s)}$$

$$C^*(s) = [G_1(s)G_2(s)E^*(s)]^*$$
$$\boxed{C^*(s) = G_1G_2{}^*(s)E^*(s)}$$

$$E^*(s) = [G_2(s)H(s)C^*(s)]^*$$
$$\boxed{E^*(s) = G_2H^*(s)C^*(s)}$$

$$C^*(s) = [-G_2(s)H(s)C^*(s)]^*$$
$$\boxed{C^*(s) = -G_2H^*(s)C^*(s)}$$

5. Desenhe o GFS amostrado usando apenas as equações com as variáveis discretas obtidas no passo anterior.

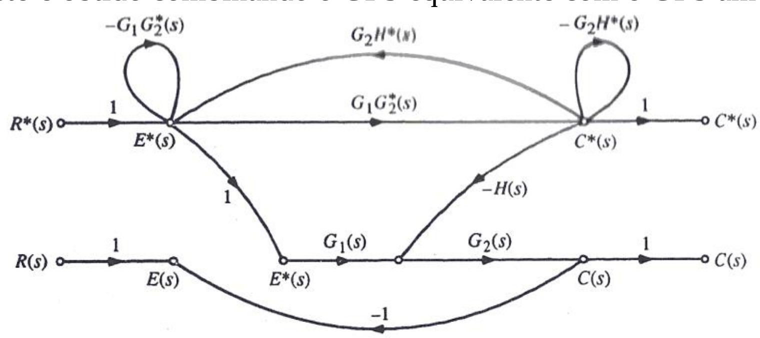


6. Uma vez tendo o GFS amostrado é possível utilizar a Fórmula de Mason.

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G_1G_2{}^*(s)}{1 + G_1G_2{}^*(s) + G_2H^*(s) - G_1G_2{}^*(s)G_2H^*(s) + G_1G_2{}^*(s)G_2H^*(s)}$$

$$\boxed{\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G_1G_2{}^*(s)}{1 + G_1G_2{}^*(s) + G_2H^*(s)}}$$

7. O GFS composto é obtido combinando o GFS equivalente com o GFS amostrado.



A fórmula de Mason pode ser usada para calcular os ganhos no GFS composto.

$$\boxed{\frac{C(s)}{R^*(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)[1 + G_2H^*(s)] - G_2(s)H(s)G_1G_2{}^*(s)}{1 + G_1G_2{}^*(s) + G_2H^*(s)}}$$

2.8. MATLAB

a) Funções de Transferência
   i. sys = *tf*(num,den);
   ii. [num,den] = *series*(num1,den1,num2,den2);
   iii. [num,den] = *parallel*(num1,den1,num2,den2);
   iv. [num,den] = *feedback*(num1,den1,num2,den2);

2.9. LISTA DE EXERCÍCIOS

KUO: Apêndice H.