Resposta transitória e de regime

Definição das especificações da resposta transitória

Seja o sistema de controle em malha fechada mostrado na Figura 0. Acredita-se que o controlador C(s) em série à FT G(s) do processo permitam que a saída Y(s) siga a entrada R(s) de acordo com alguma especificação.

O que se quer, em geral, é que a saída y(t) tenda à entrada r(t) o mais rapidamente possível (transitório), e assim permaneça (em regime). A cada mudança da entrada, a saída deve acompanhá-la. Caso um distúrbio D(s) afete a malha, o controlador deve fazer com que seu efeito na saída seja mínimo.

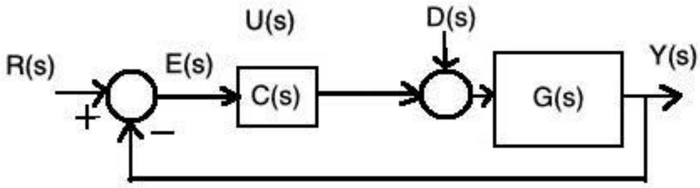

Figura 0. Sistema de controle em malha fechada

Deve-se, portanto, especificar o comportamento desejado desta malha, e posteriormente projetar o controlador C(s), ou seja, escolher seus parâmetros.

Com frequência, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos de resposta transitória a uma entrada em degrau unitário, já que se trata de entrada suficientemente brusca e gerada com facilidade.

A resposta transitória de um sistema a uma entrada em degrau unitário depende das condições iniciais. Por conveniência, na comparação entre as respostas transitórias de vários sistemas, é uma prática comum utilizar uma condição inicial padrão que é a do sistema inicialmente em repouso, com valor da variável de saída e todas as duas derivadas em função do tempo iguais a zero. Assim, as características de resposta dos vários sistemas poderão ser facilmente comparadas.

Para um sistema de primeira ordem, a resposta típica é mostrada na figura 1. A constante de tempo T é definida como o tempo para que a saída atinja 63% do valor de regime. O tempo de estabelecimento é aquele necessário para que a saída se aproxime do valor de regime. Nesse caso, pode ser aproximado por 4T ou 5T, conforme a aproximação desejada.

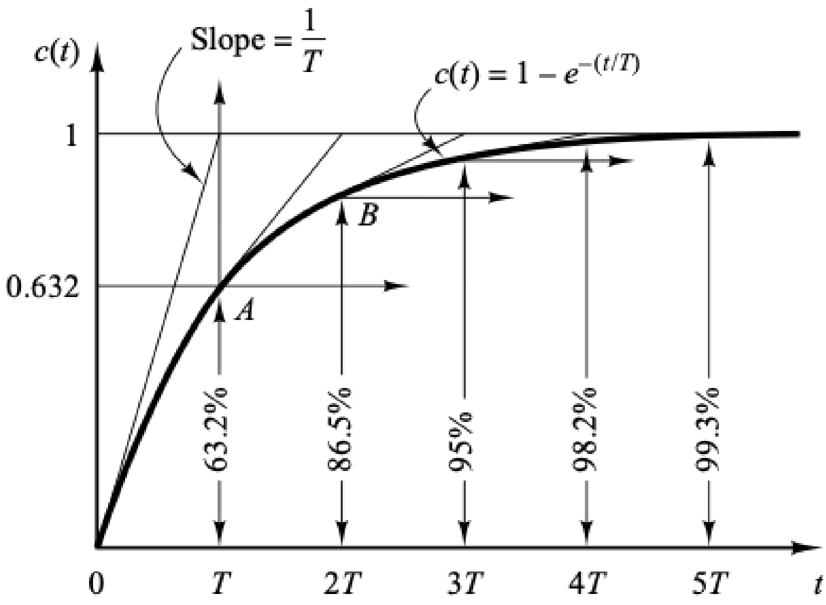

Figura 1. Resposta de um sistema de primeira ordem.

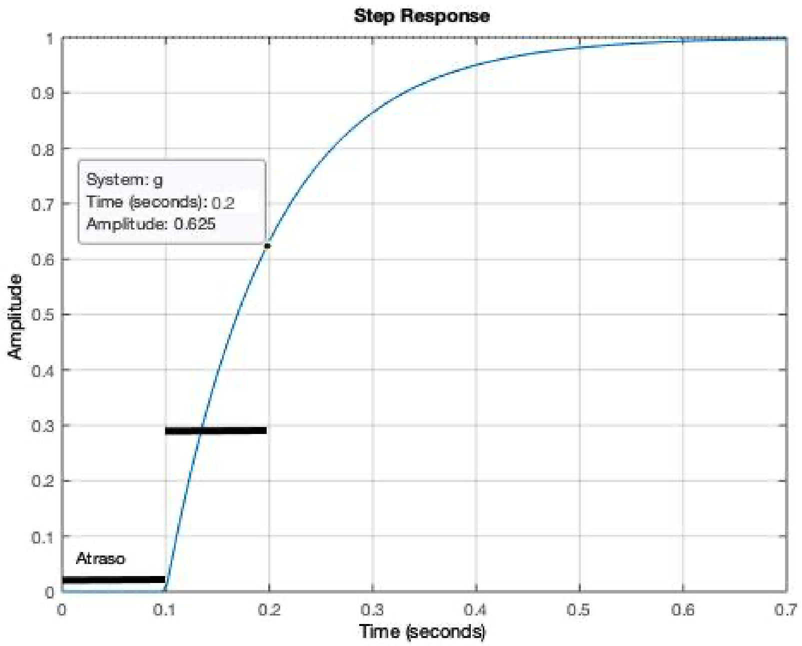

Figura 2. Sistema de primeira ordem com atraso (ou tempo morto)

Deve-se ter atenção para os casos em que o valor de regime não é 1, ao se analisar funções de transferência de malha aberta com ganho não unitário. Por isso, a constante de tempo é calculada observando o valor do regime.

No caso de haver um atraso, também chamado de tempo morto, a saída passa a mudar para uma alteração na entrada somente depois de transcorrido este tempo.

Isso é mostrado na figura 2. Observe que no instante 0.2s a saída atingiu 63% do valor de regime, mas começou a mudar apenas no instante 0.1s. Logo, a constante de tempo é T=0.2-0.1=0.1s. E o tempo morto é 0.1s.

Ao especificar a resposta transitória desejada nos casos de sistemas de primeira ordem, com ou sem tempo morto, escolhe-se qual a constante de tempo de malha fechada desejada.

Para sistemas de ordem dois ou superior, antes de atingir o regime permanente, a resposta transitória de um sistema de controle apresenta, frequentemente, oscilações amortecidas. Nestes casos, na especificação de características das respostas transitórias de um sistema de controle a uma entrada em degrau unitário, é comum especificar (ver figura 3):

- Tempo de atraso, $t_d\ ou\ \theta$: trata-se do tempo requerido para que uma resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez. Não confundir com o conceito de tempo morto.
- Tempo de subida, t_r: é o tempo requerido para que a resposta passe de 10% a 90% do valor final.
- Tempo de pico, t_p: é o tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobressinal.
- Máximo sobressinal (ou apenas sobressinal), M_p: é o valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir da unidade. Se o valor final da resposta em regime permanente diferir da unidade, então é comum utilizar porcentagem máxima de sobressinal, definida por:

$$M_P = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \tag{1}$$

- Tempo de acomodação ou de estabelecimento, t_s: é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa de 2% em torno do valor final. Esse tempo está relacionado à maior constante de tempo do sistema de controle.

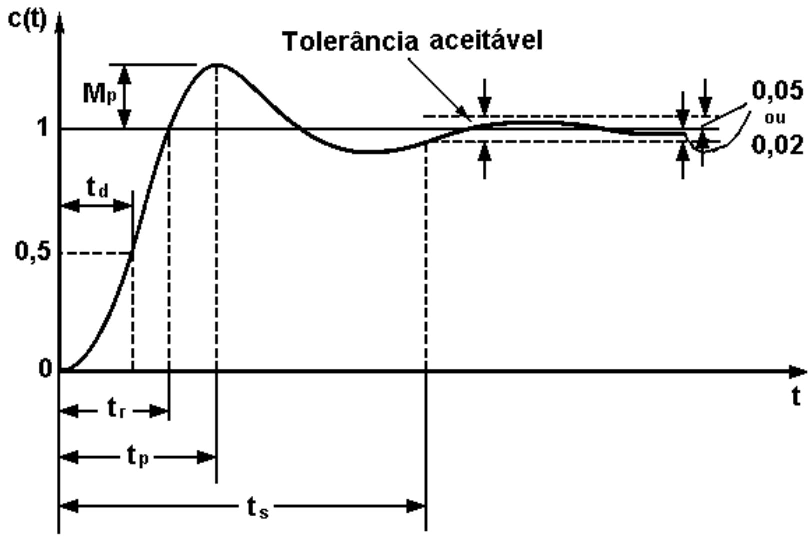

Figura 3 - Curva de resposta ao degrau unitário

Para o protótipo de segunda ordem, tem-se em malha fechada a função de transferência

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (2)$$

na qual ω_n é a frequência natural não amortecida e ζ é o amortecimento.

Neste caso, o tempo de subida (t_r), tempo de estabelecimento (t_s), sobressinal (M_P) podem ser escritos em função de ω_n e ζ (ver Figura 4):

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi - \theta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (3)$$

na qual $\zeta = cos\,\theta$ ou $\theta = \cos^{-1}\zeta$ (4)

$$M_P = 100.\,e^{-\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad (5)$$

$$t_s = \frac{4}{\omega_n\zeta} \qquad (6)$$

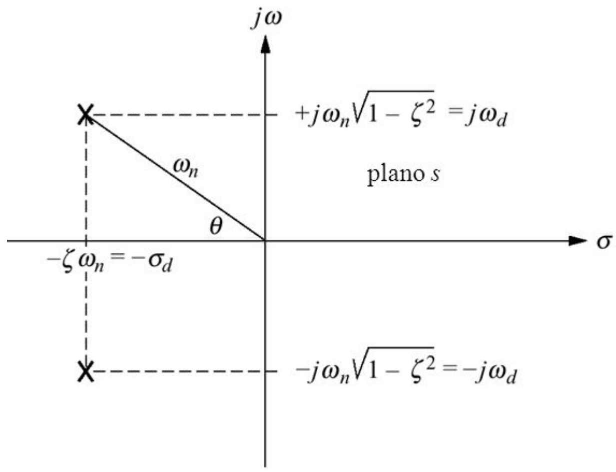

Figura 4. Valores de ω_n e ζ a partir dos polos

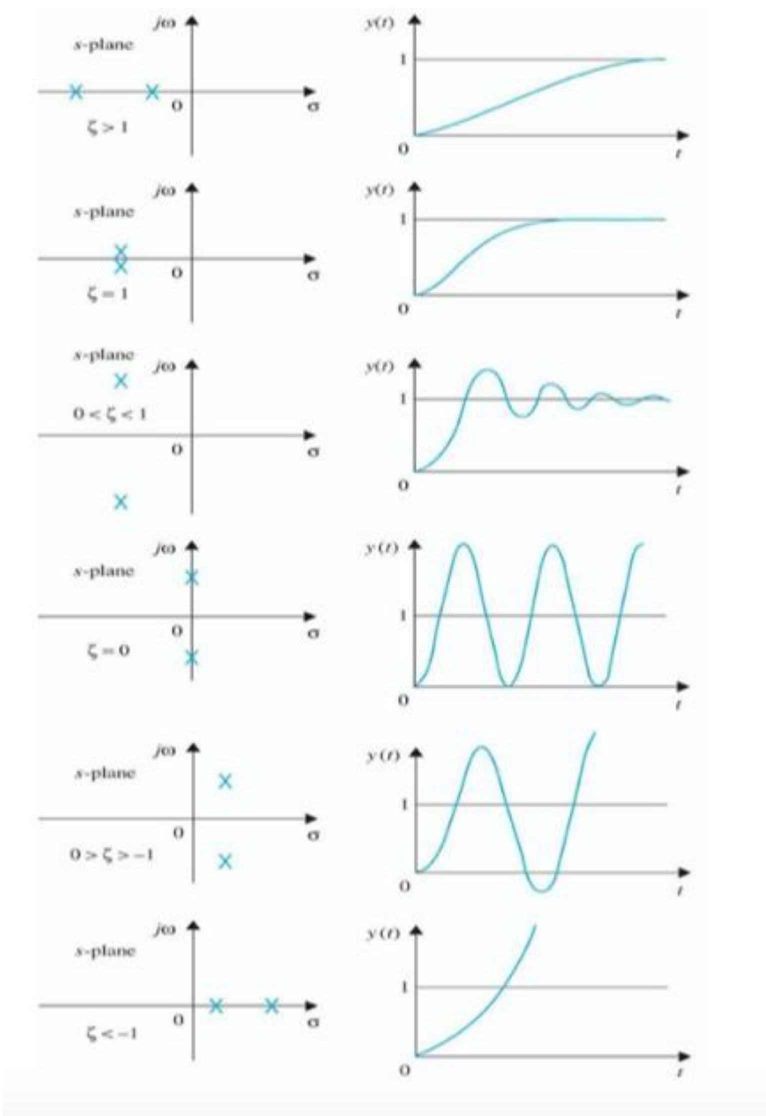

Figura 5. Relação entre a localização dos polos e a resposta no tempo

Na figura 5 mostra-se a relação entre a localização dos polos e a resposta do tempo. Quando os polos são reais, a resposta tende a ser sobre-amortecida. Para o caso de polos complexos, a resposta é tão mais oscilatória quanto maior for a parte imaginária em relação à parte real (maior ângulo θ na figura 4). Polos à esquerda do semiplano que estão mais distantes da origem produzem respostas mais rápidas. Polos próximos da origem produzem respostas mais lentas. Para o caso de polos à direita, tem-se um sistema instável.

Erro em regime

Espera-se que em regime a saída tenha uma diferença da referência menor ou igual à especificada.

Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com sua habilidade em seguir os sinais de entrada. Considere o sistema de controle com realimentação unitária, com a seguinte função de transferência de malha aberta $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} \qquad (7)$$

Essa função de transferência contém o termo s^N no denominador, representado um polo de multiplicidade N na origem. O presente método de classificação tem como base o número de integrações indicadas pela função de transferência de malha aberta. Um sistema é chamado tipo 0, tipo 1, tipo 2, ... , se $N = 0, N = 1, N = 2$, ..., respectivamente. Note que essa classificação é diferente da que se refere à ordem do sistema.

Por exemplo, os sistemas dados pelas FTs

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+2)} \text{ e } G_2(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

são ambos de ordem 2. Entretanto, G_1 é tipo 1 enquanto G_2 é tipo 0.

Para analisar o erro em regime ou erro estacionário, considere o diagrama de blocos com realimentação unitária mostrado na Figura 6. A função de transferência de malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \qquad (8)$$

A função de transferência entre o sinal de erro $e(t)$ e o sinal de entrada $r(t)$ é:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \tag{9}$$

O erro $e(t)$ é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída.

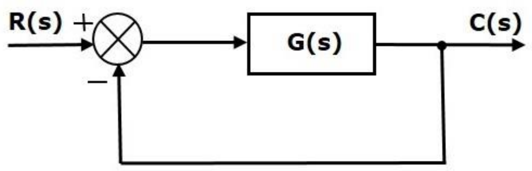

Figura 6 - Sistema em malha fechada

Para realimentação não unitária, em que $H(s)$ não é igual a 1, ver as referências ao final.

O teorema do valor final oferece um modo conveniente de determinar o desempenho em regime permanente de um sistema estável a partir da função de transferência. Como $E(s)$ é dado por

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) \tag{10}$$

o erro estacionário é obtido via teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} \tag{11}$$

<u>Erro em regime para sistema de segunda ordem tipo 0</u>

Dado um sistema de segunda ordem com ganho proporcional em malha fechada:

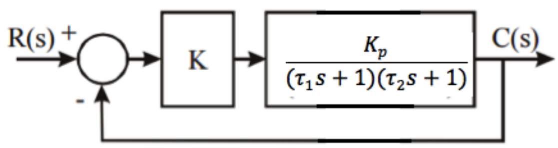

Figura 7 - Sistema de segunda ordem em malha fechada

Para entrada degrau unitário:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} \tag{12}$$

Com $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + KK_p} \tag{13}$$

Erro em regime para sistema de segunda ordem tipo 1

Neste caso, $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$. Usando a equação (12) com $R(s) = \frac{1}{s}$, resulta

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \; = \; 0$$

Seja K o ganho direto de $G(s)$ obtido quando s tende zero, ou seja $K = G(0)$ e A a amplitude da entrada (degrau, rampa ou parábola). O erro em regime vai depender do tipo, do ganho K e da entrada conforme a Tabela 1 (ver Referência [2]):

Tabela 1. Erro em regime em função do tipo, ganho e entrada

Tipo	Entrada R(s) utilizada		
	Degrau	Rampa	Parábola
0	A/(1+K)	Infinito	Infinito
1	0	A/K	Infinito
2	0	0	A/K

Exemplo: Seja o diagrama de blocos mostrado na figura 8.

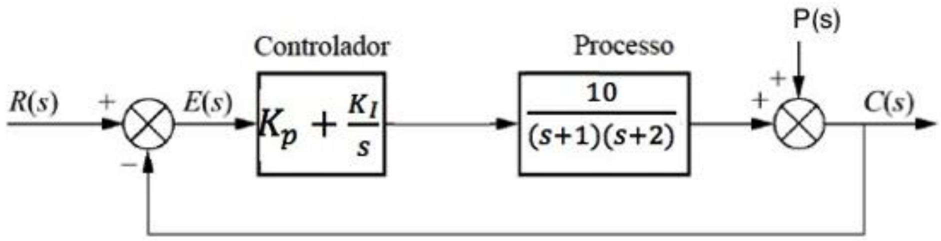

Figura 8. Exemplo de erro em regime

O tipo da FT do processo é 0. Entretanto o tipo do controlador é 1. Logo, a FT de malha aberta unindo controlador e processo é 1. Da tabela 1, conclui-se que o erro em regime para uma entrada degrau R(s) será zero. Caso a entrada seja uma rampa, o erro será finito e dado por $\frac{1}{5Ki}$ (verifique!).

Referências

[1] Ogata, K., Engenharia de Controle Moderno, Prentice-Hall do Brasil, 2003, 4a. ed.

[2] Kuo, B. C., Automatic Control Systems, Prentice-Hall do Brasil, 1995, 7a. ed.

[3] Seborg, D. E. et al. Process dynamics and control. 3rd ed. Hoboken, N.J.: Wiley, 2011

[4] Philips, C. L., Nagle, H.T., Digital control system analysis and design, Prentice Hall, 3a. ed., 1995.

[5] MATLAB User's Guide. The Math Works Inc., R2015a edition, 2015.