

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

5.1 | Introdução

Em capítulos anteriores, foi dito que o primeiro passo para a análise de um sistema de controle é a obtenção de um modelo matemático do sistema. Uma vez obtido esse modelo, é possível analisar o desempenho do sistema a partir dos vários métodos disponíveis.

Na prática, o sinal de entrada de um sistema de controle não é conhecido previamente: ele é de caráter aleatório e seus valores instantâneos não podem ser expressos de maneira analítica. Somente em alguns casos especiais o sinal de entrada é conhecido antecipadamente e pode ser expresso de maneira analítica ou por meio de curvas, como no caso do controle automático das máquinas-ferramentas.

Na análise e no projeto de sistemas de controle, devemos ter uma base de comparação do desempenho de vários sistemas de controle. Essa base pode ser estabelecida detalhando-se sinais de entrada de teste específicos e, em seguida, comparando-se as respostas dos vários sistemas com esses sinais.

Muitos dos critérios de projeto têm como base as respostas a esses sinais ou a resposta dos sistemas às mudanças das condições iniciais (sem qualquer sinal de teste). O uso de sinais de teste pode ser justificado em virtude da correlação existente entre as características das respostas de um sistema a um sinal de entrada típico de teste e a capacidade de o sistema responder aos sinais de entrada reais.

Sinais típicos de testes. Os sinais de entrada de teste geralmente utilizados são as funções degrau, rampa, parábola de aceleração, impulso, senoidais e ruído branco. Neste capítulo, usamos sinais de teste como degrau, rampa, parábola de aceleração e impulso. Com esses sinais de teste, tanto a análise experimental como a análise matemática dos sistemas de controle podem ser obtidas facilmente, uma vez que esses sinais são funções de tempo muito simples.

Pode-se determinar quais desses sinais típicos de entrada devem ser utilizados na análise das características do sistema, pelo comportamento da entrada a que o sistema será submetido, com maior frequência, sob condições normais de operação. Se as entradas de um sistema de controle são funções de tempo que variam gradualmente, então a rampa em função do tempo pode ser um bom sinal de teste. Da mesma maneira, se um sistema estiver sujeito a variações bruscas de entrada, a função degrau poderá ser um bom sinal de teste. Da mesma forma, se o sistema estiver sujeito a entradas de impacto, uma função impulso poderá ser a melhor opção. Uma vez projetado o sistema de controle com base nos sinais de teste, o desempenho do sis-

tema em resposta a entradas reais geralmente é satisfatório. O uso desses sinais possibilita a comparação do desempenho de vários sistemas em relação à mesma base.

Resposta transitória e resposta estacionária. A resposta temporal de um sistema de controle consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. Por resposta transitória, entende-se aquela que vai do estado inicial ao estado final. Por resposta estacionária, entendemos o comportamento do sinal de saída do sistema na medida em que t tende ao infinito. Assim, a resposta $c(t)$ do sistema pode ser escrita como:

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é a resposta transitória e o segundo é a resposta estacionária.

Estabilidade absoluta, estabilidade relativa e erro estacionário. No projeto de um sistema de controle, deve ser possível prever seu comportamento dinâmico a partir do conhecimento de seus componentes. A característica mais importante do comportamento dinâmico do sistema de controle é a estabilidade absoluta, isto é, se o sistema é estável ou instável. Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer distúrbio ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado. Um sistema de controle linear e invariante no tempo é estável se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial. Um sistema de controle linear e invariante no tempo é criticamente estável se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua. É instável se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial. Nos casos reais, o sinal de saída de um sistema físico pode aumentar até certo valor, mas pode ser limitado por fins de curso mecânicos, ou o sistema pode se romper ou se tornar não linear, após o sinal de saída ultrapassar certa amplitude e, desse modo, as equações diferenciais do modelo não terão mais validade.

Outros comportamentos importantes do sistema (além da estabilidade absoluta), com os quais se deve ter uma consideração especial, são a estabilidade relativa e o erro estacionário. Como um sistema físico de controle contém energia armazenada, a saída do sistema, quando este é submetido a um sinal de entrada, não pode seguir a entrada imediatamente, mas apresenta uma resposta transitória antes que um regime permanente seja obtido. A resposta transitória de um sistema de controle prático frequentemente apresenta oscilações amortecidas antes de atingir o estado permanente. Se o sinal de saída de um sistema em regime permanente não coincidir exatamente com a entrada, diz-se que o sistema apresenta um erro estacionário. Esse erro é indicativo da precisão do sistema. Na análise de um sistema de controle, deve-se examinar o comportamento da resposta transitória e do estado estacionário.

Visão geral do capítulo. Este capítulo trata das respostas do sistema aos sinais aperiódicos (como degrau, rampa, aceleração e impulso, em função do tempo). Eis o resumo do capítulo: a Seção 5.1 apresenta a matéria introdutória do capítulo. A Seção 5.2 trata da resposta dos sistemas de primeira ordem a entradas aperiódicas. A Seção 5.3 apresenta a resposta transitória de sistemas de segunda ordem. São estudadas análises detalhadas das respostas dos sistemas de segunda ordem a excitações em degrau, rampa e impulso. A Seção 5.4 discute a análise da resposta transitória de sistemas de ordem superior. A Seção 5.5 apresenta uma introdução à abordagem do MATLAB na solução de problemas de resposta transitória. A Seção 5.6 fornece um exemplo de um problema de resposta transitória resolvido com o MATLAB. A Seção 5.7 apresenta o critério de estabilidade de Routh. A Seção 5.8 discute os efeitos das ações de controle integral e derivativa no desempenho dos sistemas. Por fim, a Seção 5.9 trata de erros estacionários e sistemas de controle com realimentação unitária.

5.2 | Sistemas de primeira ordem

Considere o sistema de primeira ordem mostrado na Figura 5.1(a). Fisicamente, esse sistema pode representar um circuito RC , um sistema térmico ou algo semelhante. A Figura 5.1(b) traz um diagrama de blocos simplificado. A relação entrada-saída é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5.1)$$

A seguir, analisaremos as respostas do sistema a entradas como as funções degrau unitário, rampa unitária e impulso unitário. As condições iniciais são consideradas nulas.

Note que todos os sistemas que têm a mesma função de transferência apresentarão a mesma saída em resposta ao mesmo impulso. Para determinado sistema físico, pode ser dada uma interpretação física à resposta matemática.

Resposta ao degrau unitário do sistema de primeira ordem. Como a transformada de Laplace da função degrau unitário é $1/s$, substituindo $R(s) = 1/s$ na Equação 5.1, obtemos:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s}$$

Expandindo $C(s)$ em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad (5.2)$$

Considerando a transformada inversa de Laplace da Equação 5.2, obtemos:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.3)$$

A Equação 5.3 estabelece que, inicialmente, a resposta $c(t)$ é zero e, no fim, torna-se unitária. Uma característica importante de uma curva de resposta exponencial $c(t)$ é que em $t = T$ o valor de $c(t)$ é 0,632 ou a resposta $c(t)$ alcançou 63,2% de sua variação total. Isso pode ser facilmente comprovado substituindo-se $t = T$ em $c(t)$. Ou seja,

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0,632$$

Note que, quanto menor a constante de tempo T , mais rapidamente o sistema responde. Outra característica importante da curva exponencial de resposta é que a inclinação da linha tangente em $t = 0$ é $1/T$, uma vez que

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (5.4)$$

A saída alcançaria o valor final em $t = T$ se fosse mantida a velocidade inicial de resposta. A partir da Equação 5.4, vemos que a inclinação da curva de resposta $c(t)$ decresce monotonicamente de $1/T$ em $t = 0$ a zero em $t = \infty$.

A curva exponencial de resposta $c(t)$ dada pela Equação 5.3 é mostrada na Figura 5.2. Em uma constante de tempo, a curva da resposta exponencial vai de 0% a 63,2% do valor final. Em duas constantes de tempo, a resposta atinge 86,5% da resposta final. Para $t = 3T$, $4T$ e $5T$, a resposta alcança 95%, 98,2% e 99,3%, respectivamente, da resposta final. Assim, para $t \geq 4T$, a resposta se mantém a 2% do valor final. Como se vê na Equação 5.3, o estado permanente é alcançado matematicamente apenas depois de um tempo infinito. Na prática, entretanto, é razoável que o tempo

FIGURA 5.1

(a) Diagrama de blocos de um sistema de primeira ordem;
(b) diagrama de blocos simplificado.

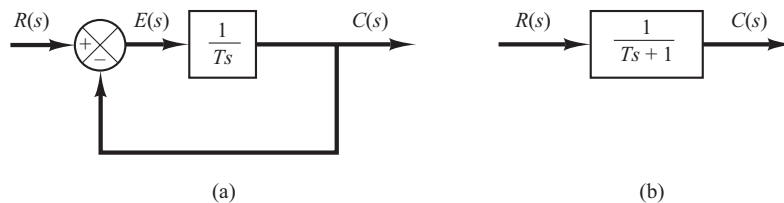
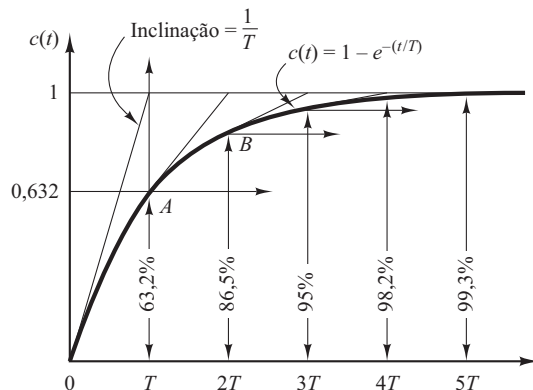


FIGURA 5.2

Curva exponencial de resposta.



estimado de resposta seja o intervalo de tempo necessário para a curva alcançar e permanecer a 2% da linha do valor final, ou quatro constantes de tempo.

Resposta à rampa unitária de sistemas de primeira ordem. Como a transformada de Laplace da rampa unitária é $1/s^2$, obtemos a saída do sistema da Figura 5.1(a) como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s^2}$$

Expandindo $C(s)$ em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \quad (5.5)$$

Considerando a transformada inversa de Laplace da Equação 5.5, obtemos:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.6)$$

Então, o sinal de erro $e(t)$ é:

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

Conforme t tende ao infinito, $e^{-t/T}$ se aproxima de zero e, assim, o sinal de erro $e(t)$ se aproxima de T ou

$$e(\infty) = T$$

A Figura 5.3 mostra a rampa unitária de entrada e a resposta do sistema. O erro do sistema para seguir a rampa unitária como sinal de entrada é igual a T para t suficientemente grande. Quanto menor a constante de tempo T , menor o erro estacionário ao seguir a entrada em rampa.

Resposta ao impulso unitário de sistemas de primeira ordem. Para o impulso unitário de entrada, $R(s) = 1$ e a resposta do sistema da Figura 5.1(a) pode ser obtida como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5.7)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.7 resulta em:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.8)$$

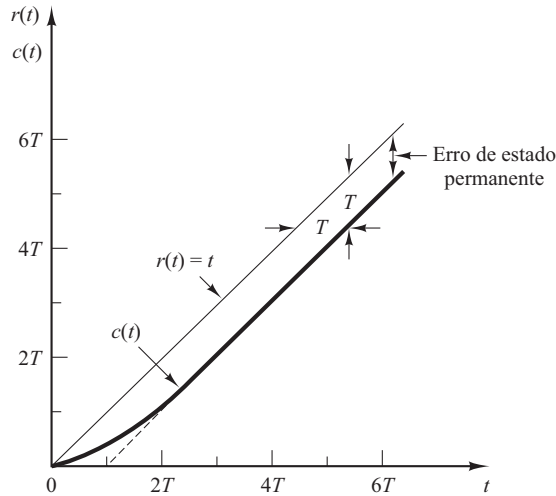
A curva de resposta dada pela Equação 5.8 é mostrada na Figura 5.4.

Uma propriedade importante de sistemas lineares invariantes no tempo. Na análise anterior, mostrou-se que, para a entrada em rampa unitária, a saída $c(t)$ é:

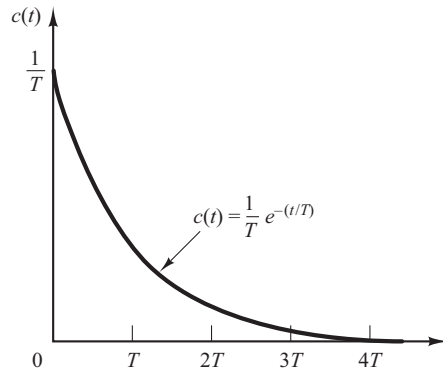
$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{Veja a Equação 5.6})$$

FIGURA 5.3

Resposta de rampa unitária do sistema mostrado na Figura 5.1(a).

**FIGURA 5.4**

Resposta ao impulso unitário do sistema exposto na Figura 5.1(a).



Para a entrada em degrau unitário, que é a derivada da entrada em rampa unitária, a saída $c(t)$ é:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{Veja a Equação 5.3})$$

Por fim, para a entrada em impulso unitário, que é a derivada da entrada em degrau unitário, a saída $c(t)$ é:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{Veja a Equação 5.8})$$

A comparação das respostas do sistema com essas três entradas indica claramente que a resposta à derivada de um sinal de entrada pode ser obtida diferenciando-se a resposta do sistema para o sinal original. Pode-se ver também que a resposta à integral do sinal original pode ser obtida pela integração da resposta do sistema ao sinal original e pela determinação da constante de integração a partir da condição inicial de resposta nula. Esta é uma propriedade dos sistemas lineares invariantes no tempo. Os sistemas lineares variantes no tempo e sistemas não lineares não possuem essa propriedade.

5.3 | Sistemas de segunda ordem

Nesta seção, obteremos a resposta do sistema de controle típico de segunda ordem às entradas em degrau, rampa e impulso. Aqui, consideraremos um servossistema como um exemplo de sistema de segunda ordem.

Servossistema. A Figura 5.5(a) mostra um servossistema constituído por um controlador proporcional e elementos de carga (elementos de inércia e de atrito viscoso). Suponha que se deseje controlar a posição da saída c de acordo com a posição de entrada r .

A equação para os elementos de carga é:

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = T$$

onde T é o torque produzido pelo controlador proporcional cujo ganho é K . Considerando as transformadas de Laplace de ambos os lados dessa última equação e supondo condições iniciais nulas, obtemos:

$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s)$$

Então, a função de transferência entre $C(s)$ e $T(s)$ é:

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}$$

Pelo uso dessa função de transferência, a Figura 5.5(a) pode ser redesenhada como na Figura 5.5(b), que pode ser modificada para o esquema mostrado na Figura 5.5(c). A função de transferência de malha fechada é então obtida como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

Esse sistema, em que a função de transferência de malha fechada possui dois polos, é chamado sistema de segunda ordem. (Alguns sistemas de segunda ordem podem conter um ou dois zeros.)

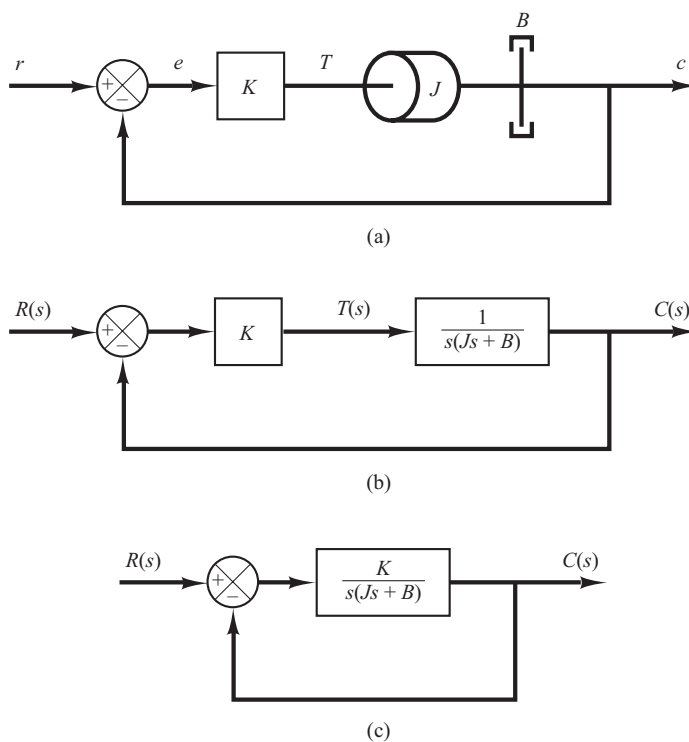
Resposta ao degrau do sistema de segunda ordem. A função de transferência de malha fechada do sistema mostrado na Figura 5.5(c) é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \quad (5.9)$$

que pode ser reescrita como:

FIGURA 5.5

(a) Servossistema;
(b) diagrama de blocos;
(c) diagrama de blocos simplificado.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]}$$

Os polos de malha fechada são complexos conjugados se $B^2 - 4JK < 0$ e são reais se $B^2 - 4JK \geq 0$. Na análise da resposta transitória, é conveniente escrever:

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

onde σ é chamado *atenuação*; ω_n é a *frequência natural não amortecida*; e ζ é o *coeficiente de amortecimento* do sistema. O coeficiente de amortecimento ζ é a relação entre o amortecimento real B e o amortecimento crítico ou $B_c = 2\sqrt{JK}$ ou

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

Em termos de ζ e ω_n , o sistema da Figura 5.5(c) pode ser modificado conforme mostra a Figura 5.6 e a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$, dada pela Equação 5.9, pode ser escrita como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.10)$$

Essa forma é chamada *forma-padrão* do sistema de segunda ordem.

O comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros ζ e ω_n . Se $0 < \zeta < 1$, os polos de malha fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano s . O sistema é então chamado *subamortecido*, e a resposta transitória é oscilatória. Se $\zeta = 0$, a resposta transitória não decai. Se $\zeta = 1$, o sistema é denominado *criticamente amortecido*. Os sistemas *superamortecidos* correspondem a $\zeta > 1$.

Determinaremos agora a resposta do sistema mostrado na Figura 5.6 a uma entrada em degrau unitário. Consideraremos três diferentes casos: *subamortecido* ($0 < \zeta < 1$), *criticamente amortecido* ($\zeta = 1$) e *superamortecido* ($\zeta > 1$).

(1) *Sistema subamortecido* ($0 < \zeta < 1$): nesse caso, $C(s)/R(s)$ pode ser escrito como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. A frequência ω_d é chamada *frequência natural amortecida* do sistema. Para uma entrada em degrau unitário, $C(s)$ pode ser escrita como:

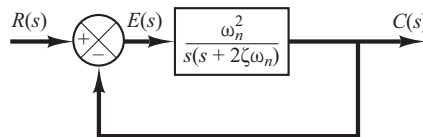
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (5.11)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.11 pode ser obtida facilmente se $C(s)$ for escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

FIGURA 5.6

Sistema de segunda ordem.



Consultando a tabela de transformadas de Laplace no Apêndice A, podemos demonstrar que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

Então, a transformada inversa de Laplace da Equação 5.11 é obtida como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[C(s)] &= c(t) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right), \quad \text{para } t \geq 0\end{aligned}\quad (5.12)$$

A partir da Equação 5.12, pode-se ver que a frequência da oscilação transitória é a frequência natural amortecida do sistema ω_d e, assim, varia de acordo com o coeficiente de amortecimento ζ . O sinal de erro para esse sistema é a diferença entre a entrada e a saída e é:

$$\begin{aligned}e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right), \quad \text{para } t \geq 0\end{aligned}$$

Esse sinal de erro apresenta uma oscilação senoidal amortecida. Em regime permanente ou em $t = \infty$, não existe erro entre a entrada e a saída.

Se o coeficiente de amortecimento ζ for igual a zero, a resposta não será amortecida e as oscilações continuarão indefinidamente. A resposta, $c(t)$ no caso de o amortecimento ser nulo, pode ser obtida substituindo $\zeta = 0$ na Equação 5.12, o que resulta em:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.13)$$

Assim, a partir da Equação 5.13, vemos que ω_n representa a frequência natural do sistema sem amortecimento. Isto é, ω_n é a frequência em que a resposta do sistema poderá oscilar, se o amortecimento for reduzido a zero. Se o sistema linear tiver algum amortecimento, a frequência natural não amortecida do sistema não poderá ser observada experimentalmente. A frequência que pode ser observada é a frequência natural amortecida, ω_d , que é igual a $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, que é sempre menor que a frequência natural não amortecida. Um aumento em ζ poderia reduzir a frequência natural amortecida ω_d . Se ζ for aumentado acima da unidade, a resposta se tornará superamortecida e não oscilará.

(2) *Sistema criticamente amortecido* ($\zeta = 1$): se os dois polos de $C(s)/R(s)$ forem iguais, o sistema será dito criticamente amortecido.

Para uma entrada em degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e $C(s)$ podem ser escritas como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad (5.14)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.14 pode ser determinada como:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.15)$$

Esse resultado pode também ser obtido fazendo-se ζ se aproximar da unidade na Equação 5.12 e utilizando o seguinte limite:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_d t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega_n t$$

(3) *Sistema superamortecido* ($\zeta > 1$): nesse caso, os dois polos de $C(s)/R(s)$ são reais, negativos e desiguais. Para uma entrada em degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e $C(s)$ podem ser escritas como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad (5.16)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.16 é:

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ e $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Assim, a resposta $c(t)$ inclui dois termos exponenciais decrescentes.

Quando ζ for, de modo considerável, maior que a unidade, uma das duas exponenciais decrescentes decai mais rápido que a outra e, assim, o termo que decai mais rápido (o que corresponde à menor constante de tempo) pode ser desprezado. Ou seja, se $-s_2$ estiver situado muito mais próximo do eixo $j\omega$ que $-s_1$ (que significa $|s_2| \ll |s_1|$), então, para uma solução aproximada, poderemos desprezar $-s_1$. Isso é permitido porque o efeito de $-s_1$ na resposta é muito menor que o de $-s_2$, já que o termo que contém s_1 na Equação 5.17 decresce muito mais rapidamente que o termo que contém s_2 . Uma vez que o termo exponencial que decresce mais rapidamente tenha desaparecido, a resposta será análoga à de um sistema de primeira ordem e $C(s)/R(s)$ poderá ser aproximada para:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

Esse modo de aproximação é uma consequência direta do fato de que os valores iniciais e finais, tanto de $C(s)/R(s)$ original como da aproximação, são coincidentes.

Com a função de transferência de $C(s)/R(s)$ aproximada, a resposta ao degrau unitário pode ser obtida como:

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

A resposta no tempo $c(t)$ é, então, igual a:

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Isso fornece uma resposta aproximada ao degrau unitário, quando um dos polos de $C(s)/R(s)$ puder ser desprezado.

A Figura 5.7 mostra uma família de curvas $c(t)$ como resposta ao degrau unitário para diversos valores de ζ , onde a abscissa é a variável adimensional $\omega_n t$. As curvas são funções somente de ζ . Essas curvas são obtidas a partir das equações 5.12, 5.15 e 5.17. O sistema descrito por essas equações inicialmente estava em repouso.

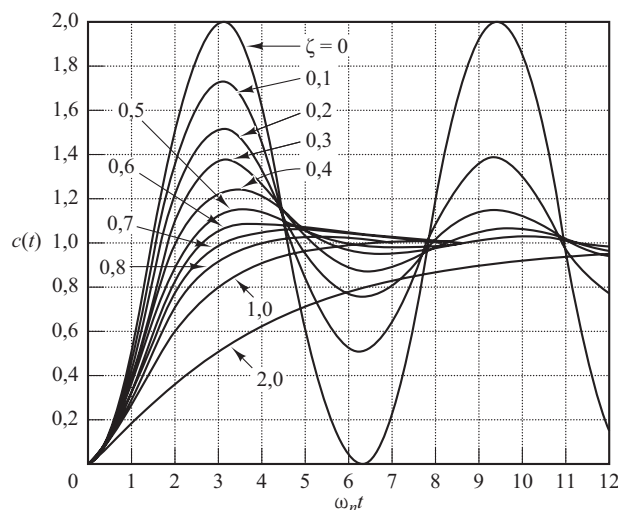
Note que dois sistemas de segunda ordem que tenham o mesmo valor de ζ , mas valores de ω_n diferentes, apresentam o mesmo sobressinal e o mesmo padrão oscilatório. Diz-se que esses sistemas têm a mesma estabilidade relativa.

A partir da Figura 5.7, vemos que um sistema subamortecido com ζ que varia entre 0,5 e 0,8 se aproxima mais rapidamente do valor final do que um sistema criticamente amortecido ou superamortecido. Entre os sistemas que apresentam resposta sem oscilação, um sistema criticamente amortecido é o que fornece a resposta mais rápida. A resposta de um sistema superamortecido é sempre mais lenta, qualquer que seja o sinal de entrada.

É importante notar que, para sistemas de segunda ordem cujas funções de transferência de malha fechada sejam diferentes da que foi apresentada pela Equação 5.10, as curvas de resposta ao degrau podem parecer completamente diferentes das mostradas na Figura 5.7.

FIGURA 5.7

Curva de resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.



Definição das especificações da resposta transitória. Com frequência, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos de resposta transitória a uma entrada em degrau unitário, já que se trata de entrada suficientemente brusca e gerada com facilidade. (Quando a resposta a uma entrada em degrau é conhecida, é possível calcular matematicamente a resposta a qualquer tipo de sinal de entrada.)

A resposta transitória de um sistema a uma entrada em degrau unitário depende das condições iniciais. Por conveniência, na comparação entre as respostas transitórias de vários sistemas, é uma prática comum utilizar uma condição inicial padrão que é a do sistema inicialmente em repouso, com o valor da variável de saída e todas as suas derivadas em função do tempo iguais a zero. Assim, as características de resposta dos vários sistemas poderão ser facilmente comparadas.

Na prática, antes de atingir o regime permanente, a resposta transitória de um sistema de controle apresenta, frequentemente, oscilações amortecidas. Na especificação das características das respostas transitórias de um sistema de controle a uma entrada em degrau unitário, é comum especificar o seguinte:

1. Tempo de atraso, t_d
2. Tempo de subida, t_r
3. Tempo de pico, t_p
4. Máximo sobressinal (ou apenas sobressinal), M_p
5. Tempo de acomodação, t_s

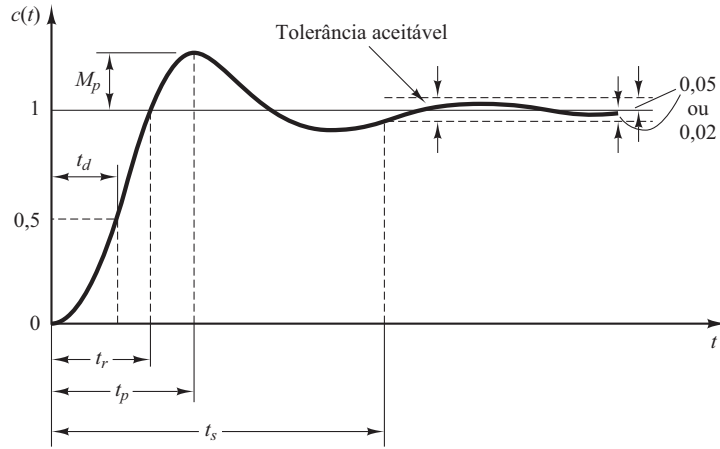
Essas especificações são definidas a seguir e são mostradas graficamente na Figura 5.8.

1. Tempo de atraso, t_d : trata-se do tempo requerido para que a resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida, t_r : é o tempo requerido para que a resposta passe de 10 a 90%, ou de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do valor final. Para sistemas de segunda ordem subamortecidos, o tempo de subida de 0% a 100% é o normalmente utilizado. Para os sistemas superamortecidos, o tempo de subida de 10% a 90% é o mais comumente utilizado.
3. Tempo de pico, t_p : é o tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobressinal.
4. Máximo sobressinal (em porcentagem), M_p : é o valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir da unidade. Se o valor final da resposta em regime permanente diferir da unidade, então é comum utilizar porcentagem máxima de sobressinal, definida por:

$$\text{Porcentagem máxima de sobressinal} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

FIGURA 5.8

Curva de resposta em degrau unitário que mostra t_d , t_r , t_p , M_p e t_s .



O valor máximo (em porcentagem) do sobressinal indica diretamente a estabilidade relativa do sistema.

5. Tempo de acomodação, t_s : é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa (geralmente de 2% ou 5%) em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente. O tempo de acomodação está relacionado à maior constante de tempo do sistema de controle. Pode-se determinar qual porcentagem deve ser utilizada no critério de erro a partir dos objetivos do projeto do sistema em questão.

As especificações no domínio de tempo dadas anteriormente são muito importantes, porque a maioria dos sistemas de controle é sistema no domínio de tempo, isto é, devem fornecer respostas temporais aceitáveis. (Isso quer dizer que o sistema de controle deve ser modificado até que a resposta transitória seja satisfatória.)

Observe que nem todas essas especificações se aplicam necessariamente a todos os casos dados. Por exemplo, para um sistema superamortecido, os termos tempo de pico e máximo sobressinal não se aplicam. (No caso dos sistemas que resultam em erros estacionários para entradas em degrau, esse erro deve ser conservado em um nível de porcentagem específico. Discussões detalhadas sobre erros estacionários serão apresentadas posteriormente na Seção 5.8.)

Alguns comentários sobre as especificações da resposta transitória. Exceto para certas aplicações nas quais as oscilações não podem ser toleradas, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e amortecida. Assim, para uma resposta transitória desejável de um sistema de segunda ordem, o coeficiente de amortecimento deve se situar entre 0,4 e 0,8. Valores pequenos de ζ (ou seja, $\zeta < 0,4$) resultam em excessivo sobressinal na resposta transitória, e um sistema com um grande valor de ζ (ou seja, $\zeta > 0,8$) responde lentamente.

Veremos adiante que o máximo sobressinal e o tempo de subida são conflitantes entre si. Em outras palavras, tanto o máximo sobressinal como o tempo de subida não podem ser diminuídos simultaneamente. Se um deles diminui, o outro necessariamente se torna maior.

Sistemas de segunda ordem e especificações da resposta transitória. A seguir, obteremos o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação do sistema de segunda ordem dado pela Equação 5.10. Esses valores serão obtidos em termos de ζ e ω_n . Supõe-se que o sistema seja subamortecido.

Tempo de subida t_r : referente à Equação 5.12, obtemos o tempo de subida t_r com $c(t_r) = 1$.

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad (5.18)$$

Como $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 1$, obtemos a partir da Equação 5.18 a seguinte equação:

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

Como $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$ e $\zeta \omega_n = \sigma$, temos

$$\operatorname{tg} \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Assim, o tempo de subida t_r é

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (5.19)$$

onde o ângulo β é definido na Figura 5.9. Evidentemente, para um menor valor de t_r , ω_d deve ser maior.

Tempo de pico t_p : com o auxílio da Equação 5.12, podemos obter o tempo de pico diferenciando $c(t)$ em relação ao tempo e igualando essa derivada a zero. Como

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &+ e^{-\zeta \omega_n t} \left(\omega_d \sin \omega_d t - \frac{\zeta \omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right) \end{aligned}$$

e os termos em cosseno nessa última equação cancelam-se mutuamente, dc/dt , calculada em $t = t_p$, pode ser simplificada para:

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = (\sin \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0$$

Dessa última equação resulta a seguinte expressão:

$$\sin \omega_d t_p = 0$$

ou

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Como o tempo de pico corresponde ao primeiro pico do sobressinal, $\omega_d t_p = \pi$. Então,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (5.20)$$

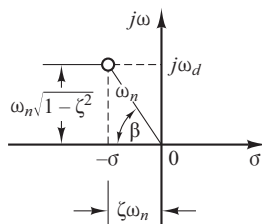
O tempo de pico t_p corresponde a meio ciclo da frequência de oscilação amortecida.

Máximo sobressinal M_p : o máximo sobressinal ocorre no tempo de pico ou em $t = t_p = \pi/\omega_d$. Ao supor que o valor final da saída seja unitário, M_p é obtido a partir da Equação 5.12 como:

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta \omega_n (\pi/\omega_d)} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma/\omega_d) \pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}) \pi} \end{aligned} \quad (5.21)$$

A porcentagem máxima de sobressinal é $e^{-(\sigma/\omega_d) \pi} \times 100\%$.

FIGURA 5.9
Definição do
ângulo β .



Se o valor final $c(\infty)$ da saída não for unitário, então será necessário utilizar a seguinte equação:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

Tempo de acomodação t_s : para um sistema subamortecido de segunda ordem, a resposta transitória é obtida a partir da Equação 5.12 como:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{para } t \geq 0$$

As curvas $1 \pm (e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2})$ são as curvas envoltórias da resposta transitória à entrada em degrau unitário. A curva-resposta $c(t)$ permanece sempre dentro de um par de curvas envoltórias, como mostra a Figura 5.10. A constante de tempo dessas curvas envoltórias é $1/\zeta\omega_n$.

A velocidade de decaimento da resposta transitória depende do valor da constante de tempo $1/\zeta\omega_n$. Para dado valor de ω_n , o tempo de acomodação t_s é uma função do coeficiente de amortecimento ζ . A partir da Figura 5.7, vemos que, para o mesmo ω_n e para uma faixa de valores de ζ entre 0 e 1, o tempo de acomodação t_s para um sistema ligeiramente amortecido é maior que para um sistema adequadamente amortecido. Para um sistema superamortecido, o tempo de acomodação t_s se torna grande porque a resposta é lenta.

O tempo de acomodação correspondente à faixa de tolerância $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$ pode ser medido em termos da constante de tempo $T = 1/\zeta\omega_n$ a partir das curvas da Figura 5.7 para valores diferentes de ζ . O resultado é mostrado na Figura 5.11. Para $0 < \zeta < 0,9$, se for utilizado o critério de 2% , t_s será aproximadamente quatro vezes a constante de tempo do sistema. Se for usado o critério de 5% , então t_s será aproximadamente três vezes a constante de tempo. Note que o tempo de acomodação atinge um valor mínimo em torno de $\zeta = 0,76$ (para o critério de 2%) ou $\zeta = 0,68$ (para o critério de 5%) e, então, aumenta quase linearmente para valores grandes de ζ . A descontinuidade nas curvas da Figura 5.11 surge porque uma variação infinitesimal do valor de ζ pode causar uma variação finita no tempo de acomodação.

Por conveniência, na comparação das respostas dos sistemas, definimos comumente o tempo de acomodação t_s como:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de } 2\%) \quad (5.22)$$

ou

FIGURA 5.10

Par de curvas envoltórias para a curva de resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.

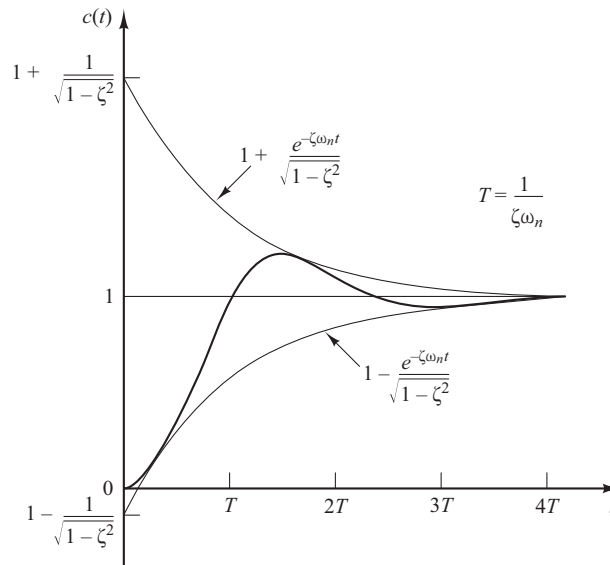
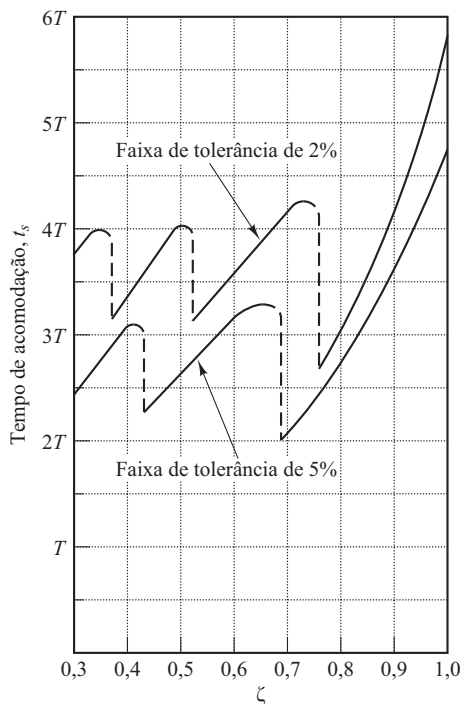


FIGURA 5.11

Curva de tempo de acomodação, t_s versus curvas ζ .

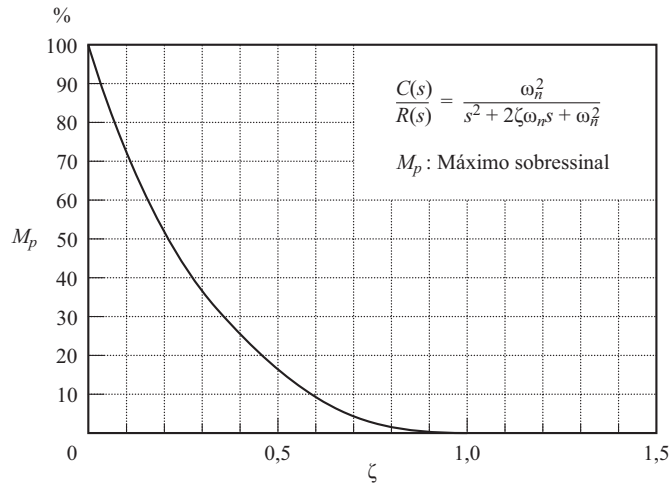


$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de 5\%}) \quad (5.23)$$

Note que o tempo de acomodação é inversamente proporcional ao produto do coeficiente de amortecimento pela frequência natural do sistema não amortecido. Como o valor de ζ é, em geral, determinado a partir da especificação do sobressinal máximo aceitável, o tempo de acomodação é determinado principalmente pela frequência natural não amortecida ω_n . Isso significa que a duração do período transitório pode variar, sem alteração do máximo sobressinal, pelo ajuste da frequência natural não amortecida ω_n .

A partir da análise anterior, é evidente que, para uma resposta rápida, ω_n deve ser grande. Para limitar o máximo sobressinal M_p e fazer que o tempo de acomodação seja pequeno, o coeficiente de amortecimento ζ não deve ser muito pequeno. A relação entre a porcentagem do máximo sobressinal e o coeficiente de amortecimento M_p é apresentada na Figura 5.12. Note que, se o coeficiente de amortecimento estiver situado entre 0,4 e 0,7, então a porcentagem do máximo sobressinal para a resposta ao degrau estará entre 25% e 4%.

É importante notar que as equações para a obtenção do tempo de subida, tempo de pico, máximo sobressinal e tempo de acomodação são válidas somente para o sistema-padrão de segunda ordem, definido pela Equação 5.10. Se o sistema de segunda ordem contiver um zero ou dois zeros, a forma da curva de resposta ao degrau unitário será muito diferente daquela mostrada na Figura 5.7.

FIGURA 5.12Curva de M_p
versus ζ .

Exemplo 5.1 Considere o sistema mostrado na Figura 5.6, onde $\zeta = 0,6$ e $\omega_n = 5$ rad/s. Obteremos o tempo de subida t_r , o tempo de pico t_p , o máximo sobressinal M_p , e o tempo de acomodação t_s quando o sistema for submetido a uma entrada em degrau unitário.

A partir dos valores de ζ e ω_n , obtemos $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$ e $\sigma = \zeta\omega_n = 3$.

Tempo de subida t_r : o tempo de subida é:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3,14 - \beta}{4}$$

onde β é dado por:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0,93 \text{ rad}$$

O tempo de subida t_r é, então, igual a:

$$t_r = \frac{3,14 - 0,93}{4} = 0,55 \text{ s}$$

Tempo de pico t_p : o tempo de pico é:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{4} = 0,785 \text{ s}$$

Máximo sobressinal M_p : o máximo sobressinal é:

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(3/4) \times 3,14} = 0,095$$

O máximo sobressinal em porcentagem é, então, 9,5%.

Tempo de acomodação t_s : para o critério de 2%, o tempo de acomodação é:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ s}$$

Para o critério de 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ s}$$

Servossistema com realimentação de velocidade. A derivada do sinal de saída pode ser utilizada para melhorar o desempenho do sistema. Na obtenção da derivada do sinal de saída de posição, é desejável utilizar um tacômetro em vez de diferenciar fisicamente o sinal de saída. (Note que a derivação amplifica os efeitos do ruído. De fato, se houver ruídos descontínuos, a derivação amplificará mais o ruído descontínuo do que o sinal útil. Por exemplo, o sinal de

saída de um potenciômetro é um sinal de tensão descontínuo, porque, com o cursor em movimento sobre as espirais do enrolamento, são induzidas tensões por ocasião da comutação entre espirais gerando, assim, transitórios. Portanto, a saída do potenciômetro não pode ser seguida por um elemento diferenciador.)

O tacômetro, um gerador *cc* especial, é frequentemente utilizado para medir a velocidade sem o processo de derivação. O sinal de saída de um tacômetro é proporcional à velocidade angular do motor.

Considere o servossistema mostrado na Figura 5.13(a). Nesse dispositivo, o sinal de velocidade, com o sinal de posição, é realimentado como sinal de entrada, produzindo o sinal de erro atuante. Em qualquer servossistema, esse sinal de velocidade pode ser gerado facilmente por um tacômetro. A Figura 5.13(a) mostra o diagrama de blocos que pode ser simplificado, como se pode ver na Figura 5.13(b), resultando em:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \quad (5.24)$$

Comparando-se as equações 5.24 e 5.9, notamos que a realimentação de velocidade tem como efeito aumentar o amortecimento. O coeficiente de amortecimento ζ torna-se:

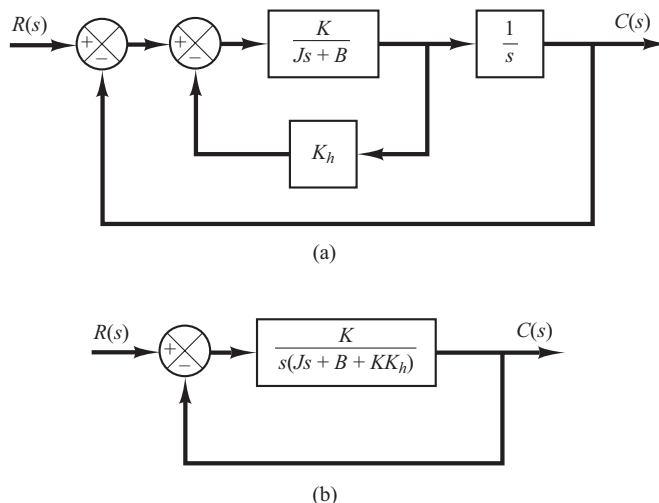
$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \quad (5.25)$$

A frequência natural não amortecida $\omega_n = \sqrt{K/J}$ não é afetada pela realimentação de velocidade. Observando que o máximo sobressinal da resposta a uma entrada em degrau unitário pode ser controlado pelo coeficiente de amortecimento ζ , podemos reduzir esse máximo sobressinal ajustando o valor da constante de realimentação de velocidade K_h , a fim de fazer que ζ fique situado entre 0,4 e 0,7.

Lembre-se de que a realimentação de velocidade tem o efeito de aumentar o coeficiente de amortecimento sem afetar a frequência natural não amortecida do sistema.

FIGURA 5.13

(a) Diagrama de blocos de um servossistema;
(b) diagrama de blocos simplificado.



Exemplo 5.2 Para o sistema da Figura 5.13(a), determine os valores de ganho K e a constante de realimentação de velocidade K_h , de modo que o máximo sobressinal da resposta ao degrau unitário seja 0,2 e o tempo de pico seja 1 s. Com esses valores de K e K_h , obtenha o tempo de subida e o tempo de acomodação. Suponha que $J = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ e $B = 1 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}/\text{s}$.

Determinação dos valores de K e K_h : o máximo sobressinal M_p é dado pela Equação 5.21 como:

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Esse valor deve ser 0,2. Assim,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0,2$$

ou

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,61$$

que resulta em:

$$\zeta = 0,456$$

O tempo de pico t_p é especificado como 1 s; portanto, a partir da Equação 5.20,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

ou

$$\omega_d = 3,14$$

Como ζ é 0,456, ω_n é igual a:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3,53$$

Como a frequência natural ω_n é igual a $\sqrt{K/J}$,

$$K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12,5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Então, a partir da Equação 5.25, K_h é:

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - \beta}{K} = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0,178 \text{ s}$$

Tempo de subida t_r : a partir da Equação 5.19, o tempo de subida t_r é:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

onde

$$\beta = \text{tg}^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \text{tg}^{-1} 1,95 = 1,10$$

Portanto, t_r é

$$t_r = 0,65 \text{ s}$$

Tempo de acomodação t_s : para o critério de 2%,

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2,48 \text{ s}$$

Para o critério de 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1,86 \text{ s}$$

Resposta ao impulso dos sistemas de segunda ordem. Para um impulso unitário de entrada $r(t)$, a transformada de Laplace correspondente é unitária, ou seja, $R(s) = 1$. A resposta ao impulso unitário $C(s)$ do sistema de segunda ordem mostrado na Figura 5.6 é igual a:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A transformada inversa de Laplace dessa equação fornece a solução para a resposta no tempo $c(t)$, como segue:

Para $0 \leq \zeta < 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.26)$$

Para $\zeta = 1$,

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.27)$$

Para $\zeta > 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.28)$$

Note que, sem necessidade de recorrer à transformada inversa de Laplace de $C(s)$, podemos também obter a resposta no tempo $c(t)$ derivando a resposta ao degrau unitário correspondente, já que a função impulso unitário é a derivada da função degrau unitário. Uma família de curvas de resposta ao impulso unitário dada pelas equações 5.26 e 5.27 para vários valores de ζ é mostrada na Figura 5.14. As curvas $c(t)/\omega_n$ estão representadas no gráfico em função da variável adimensional $\omega_n t$ e, portanto, são funções somente de ζ . Para os casos de amortecimento crítico e superamortecimento, a resposta ao impulso unitário é sempre positiva ou nula, isto é, $c(t) \geq 0$. Isso pode ser visto a partir das equações 5.27 e 5.28. Para o caso de subamortecimento, a resposta ao impulso unitário $c(t)$ oscila em torno de zero e assume valores tanto positivos como negativos.

A partir da análise anterior, podemos concluir que, se a resposta $c(t)$ ao impulso não muda de sinal, o sistema deve ser criticamente amortecido ou superamortecido, caso em que a resposta correspondente a um degrau não possui sobressinal, mas aumenta ou diminui monotonicamente, aproximando-se de um valor constante.

O máximo sobressinal para a resposta ao impulso unitário do sistema subamortecido ocorre em:

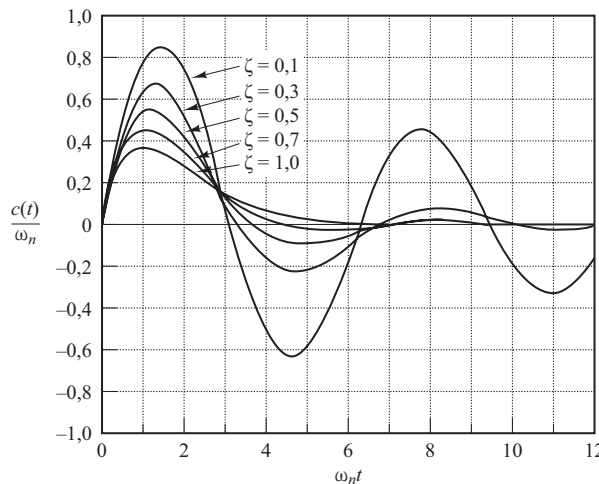
$$t = \frac{\text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \text{onde } 0 < \zeta < 1 \quad (5.29)$$

(A Equação 5.29 pode ser obtida igualando dc/dt a zero e determinando t .) O máximo sobressinal é:

$$c(t)_{\text{máx}} = \omega_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{onde } 0 < \zeta < 1 \quad (5.30)$$

FIGURA 5.14

Curvas de resposta ao impulso unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.

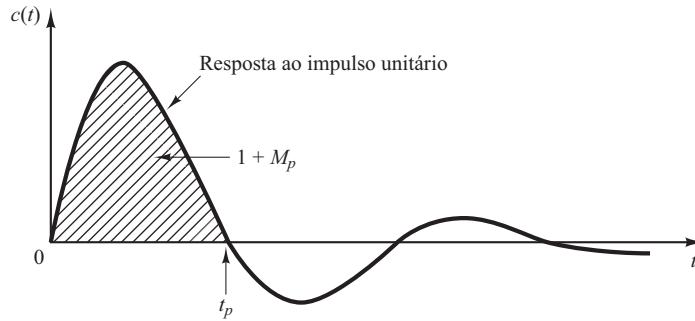


(A Equação 5.30 pode ser obtida substituindo a Equação 5.29 na Equação 5.26.)

Como a função de resposta ao impulso unitário é a derivada em relação ao tempo da função de resposta ao degrau unitário, o máximo sobressinal M_p para a resposta ao degrau unitário pode ser determinado a partir da resposta ao impulso unitário correspondente. Ou seja, a área sob a curva de resposta ao impulso unitário a partir de $t = 0$ até o instante do primeiro zero, como mostra a Figura 5.15, é $1 + M_p$, onde M_p é o máximo sobressinal (da resposta ao degrau unitário) dado pela Equação 5.21. O tempo de pico t_p (da resposta ao degrau unitário) dado pela Equação 5.20 corresponde ao tempo necessário para que a resposta ao impulso unitário cruze pela primeira vez o eixo do tempo.

FIGURA 5.15

Curva de resposta ao impulso unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.



5.4 | Sistemas de ordem superior

Nesta seção, apresentaremos uma análise da resposta transitória de sistemas de ordem superior em termos gerais. Veremos que a resposta dos sistemas de ordem superior é a soma das respostas de sistemas de primeira e de segunda ordem.

Resposta transitória de sistemas de ordem superior. Considere o sistema mostrado na Figura 5.16. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.31)$$

Em geral, $G(s)$ e $H(s)$ são dadas como relação de polinômios em s ou

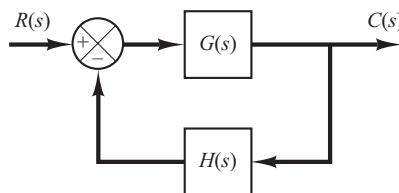
$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

onde $p(s)$, $q(s)$, $n(s)$ e $d(s)$ são polinômios em s . A função de transferência de malha fechada dada pela Equação 5.31 pode, então, ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m \leq n) \end{aligned}$$

FIGURA 5.16

Sistema de controle.



A resposta transitória desse sistema para dado sinal de entrada pode ser obtida por uma simulação de computador. (Veja a Seção 5.5.) Se uma expressão analítica para a resposta transitória for desejada, então é necessário fatorar o polinômio do denominador. [O MATLAB pode ser utilizado para encontrar as raízes do polinômio do denominador. Utilize o comando `roots(den)`.] Uma vez que o numerador e o denominador tenham sido fatorados, $C(s)/R(s)$ pode ser escrita como a seguir:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (5.32)$$

Examinaremos o comportamento da resposta desse sistema para uma entrada em degrau unitário. Considere primeiro o caso em que os polos de malha fechada são todos reais e distintos. Para uma entrada em degrau unitário, a Equação 5.32 pode ser escrita como:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i} \quad (5.33)$$

onde a_i é o resíduo do polo em $s = -p_i$. (Se o sistema contém polos múltiplos, então $C(s)$ terá termos multipolares.) [A expansão em frações parciais de $C(s)$, dada pela Equação 5.33, pode ser obtida facilmente com o MATLAB. Utilize o comando `residue`. (Consulte o Apêndice B.)]

Se todos os polos de malha fechada se situarem no semiplano esquerdo do plano s , os valores dos resíduos determinarão a importância relativa dos componentes na forma expandida de $C(s)$. Se existir um zero de malha fechada próximo a um polo de malha fechada, então o resíduo nesse polo será pequeno e o do termo correspondente da resposta transitória para esse polo se tornará pequeno. Um par de polos e zeros próximos vai se cancelar mutuamente. Se um polo estiver localizado muito longe da origem, o resíduo nesse polo poderá ser pequeno. Os transitórios correspondentes a esse polo remoto são pequenos e de curta duração. Os termos na forma expandida de $C(s)$ que tenham resíduos muito pequenos contribuem pouco para a resposta transitória e podem ser desprezados. Nesse caso, o sistema de ordem superior pode se aproximar de um de maior ordem. (Essa aproximação frequentemente nos possibilita avaliar as características da resposta de um sistema de ordem superior a partir de um sistema mais simplificado.)

A seguir, considere o caso em que os polos de $C(s)$ sejam constituídos pelos polos reais e de pares de polos complexos conjugados. Um par de polos complexos conjugados resulta em um termo de segunda ordem em s . Como a forma fatorada da equação característica de ordem elevada consiste em termos de primeira e segunda ordens, a Equação 5.33 pode ser reescrita como:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (q + 2r = n)$$

onde supomos que todos os polos de malha fechada sejam distintos. [Se entre os polos de malha fechada existirem polos múltiplos, $C(s)$ deverá ter termos multipolares.] A partir dessa última equação, vemos que a resposta de um sistema de ordem superior é composta por uma série de termos que contêm funções simples encontradas em respostas dos sistemas de primeira e segunda ordens. A transformada inversa de Laplace $c(t)$, da resposta ao degrau unitário $C(s)$, é, então, igual a:

$$\begin{aligned} c(t) = & a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \\ & + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Assim, a curva de resposta de um sistema estável de ordem superior é a soma de uma série de curvas exponenciais e curvas senoidais amortecidas.

Se todos os polos de malha fechada estiverem no semiplano esquerdo do plano s , então os termos exponenciais e os termos exponenciais amortecidos da Equação 5.34 tenderão a zero à medida que t aumentar. A saída em regime permanente é, então, $c(\infty) = a$.

Vamos supor que o sistema considerado seja estável. Então, os polos de malha fechada que estiverem situados distantes do eixo $j\omega$ terão grandes partes reais negativas. Os termos exponenciais que correspondem a esses polos decrescem rapidamente, tendendo a zero. (Note que a distância horizontal a partir de um polo de malha fechada até o eixo $j\omega$ determina o tempo de acomodação dos componentes transitórios daquele polo. Quanto menor a distância, maior é o tempo de acomodação.)

Devemos lembrar que o tipo de resposta transitória é determinado pelos polos de malha fechada, enquanto a forma da resposta transitória é determinada principalmente pelos zeros de malha fechada. Como vimos anteriormente, os polos da entrada $R(s)$ resultam em termos da resposta de regime permanente na solução, enquanto os polos de $C(s)/R(s)$ introduzem os termos da resposta transitória exponencial e/ou os termos da resposta transitória senoidal amortecida. Os zeros de $C(s)/R(s)$ não afetam os expoentes dos termos exponenciais, mas afetam os valores e os sinais dos resíduos.

Polos dominantes em malha fechada. O domínio relativo dos polos de malha fechada é determinado pela relação das partes reais dos polos de malha fechada, bem como pelo valor dos resíduos calculados nos polos. As magnitudes dos resíduos dependem tanto dos polos como dos zeros de malha fechada.

Se as relações das partes reais forem maiores que 5 e não houver zeros nas proximidades, então os polos de malha fechada mais próximos do eixo $j\omega$ serão dominantes no comportamento da resposta transitória porque correspondem aos termos da resposta transitória que decrescem lentamente. Os polos que têm efeitos dominantes no comportamento da resposta transitória são chamados polos *dominantes de malha fechada*. Muito frequentemente, os polos dominantes apresentam-se sob a forma de um par complexo conjugado. Os polos dominantes de malha fechada são os de maior importância entre todos os polos de malha fechada.

Note que o ganho de um sistema de ordem superior é frequentemente ajustado para ter um par de polos complexos conjugados dominantes de malha fechada. A presença desses polos em um sistema estável reduz o efeito de certas não linearidades, como zona morta, folga e atrito de Coulomb.

Análise de estabilidade no plano complexo. A estabilidade de um sistema linear de malha fechada pode ser determinada a partir da localização dos polos de malha fechada no plano s . Se qualquer um desses polos estiver no semiplano direito do plano s , então, com o decorrer do tempo, eles darão origem ao modo dominante e a resposta transitória aumentará monotonicamente ou oscilará com amplitude crescente. Isso representa um sistema instável. Assim que for ligada, a saída desse sistema poderá aumentar com o tempo. Se não for alcançado um ponto de saturação do sistema ou se não houver um fim de curso mecânico, então o sistema poderá estar sujeito a danos e apresentar falhas, já que a resposta de um sistema físico real não pode aumentar indefinidamente. Por isso, nos usuais sistemas lineares de controle, não são permitidos polos de malha fechada no semiplano direito do plano s . Se todos os polos de malha fechada se situarem à esquerda do eixo $j\omega$, qualquer resposta transitória poderá alcançar o equilíbrio. Isso caracteriza um sistema estável.

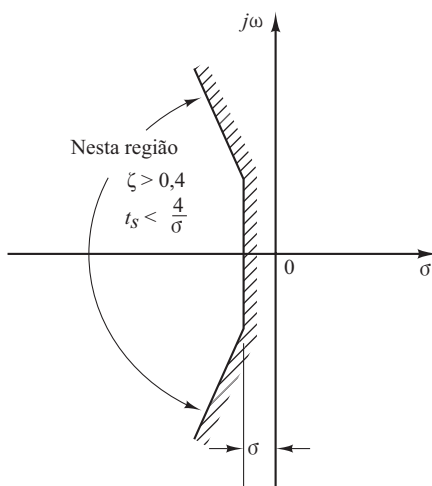
A estabilidade ou a instabilidade de um sistema linear é propriedade do próprio sistema e não depende da entrada ou da função de excitação do sistema. Os polos da entrada ou da função de excitação não afetam a estabilidade do sistema, mas contribuem somente para os termos da resposta de regime permanente na solução. Assim, o problema da estabilidade absoluta pode ser resolvido prontamente pela escolha dos polos de malha fechada no semiplano direito do plano s , incluindo o eixo $j\omega$. (Matematicamente, os polos de malha fechada no eixo $j\omega$ resultarão em oscilações cuja amplitude não vai decrescer nem aumentar com o tempo. Nos casos práticos, em que existem ruídos, entretanto, a amplitude das oscilações pode aumentar a uma taxa determinada pelo nível de potência do ruído. Portanto, um sistema de controle não deve ter polos de malha fechada no eixo $j\omega$.)

Observe que o simples fato de que todos os polos de malha fechada estejam situados no semiplano esquerdo do plano s não garante que as características da resposta transitória sejam satisfatórias. Se os polos complexos conjugados dominantes de malha fechada estiverem situados próximos ao eixo $j\omega$, a resposta transitória poderá apresentar oscilações excessivas ou poderá ser muito lenta. Dessa maneira, para garantir que as características da resposta transitória sejam rápidas, mas também suficientemente amortecidas, é necessário que os polos de malha fechada do sistema se situem em uma região conveniente do plano complexo, tal como a região delimitada pela área sombreada na Figura 5.17.

Como a estabilidade relativa e o desempenho da resposta transitória de um sistema de controle de malha fechada estão diretamente relacionados à configuração de polos e zeros de malha fechada no plano s , frequentemente é necessário ajustar um ou mais parâmetros do sistema, a fim de obter configurações satisfatórias. Os efeitos da variação dos parâmetros do sistema nos polos de malha fechada serão discutidos com detalhes no Capítulo 6.

FIGURA 5.17

Região no plano complexo que satisfaz as condições $\zeta > 0,4$ e $t_s < \frac{4}{\sigma}$.



5.5 | Análise da resposta transitória com o MATLAB

Introdução. O processo prático para a representação gráfica das curvas de resposta em função do tempo dos sistemas de ordem maior que 2 é feito por meio de simulação por computador. Nesta seção, apresentaremos a abordagem computacional para a análise da resposta transitória com o MATLAB. Em particular, discutiremos resposta ao degrau, resposta ao impulso, resposta à rampa e resposta a outras entradas simples.

Representação de sistemas lineares com o MATLAB. A função de transferência de um sistema é representada por dois vetores de números. Considere o sistema

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 25}{s^2 + 4s + 25} \quad (5.35)$$

Esse sistema pode ser representado por dois vetores-linha, cada um com os coeficientes dos polinômios com potências de s decrescentes, como segue:

$$\begin{aligned} \text{num} &= [2 \ 25] \\ \text{den} &= [1 \ 4 \ 25] \end{aligned}$$

Uma alternativa de representação é:

$$\begin{aligned} \text{num} &= [0 \ 2 \ 25] \\ \text{den} &= [1 \ 4 \ 25] \end{aligned}$$