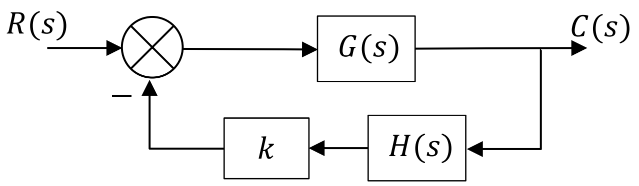
CAP 1

ANÁLISE DO LUGAR DAS RAÍZES (LR) DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA (SISTEMAS ANALÓGICOS)

SUMÁRIO

1.1. INTRODUÇÃO

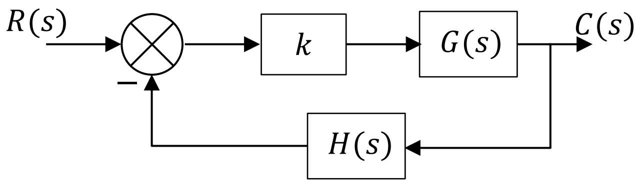
O Lugar das Raízes (LR) é uma representação gráfica da **localização das raízes da equação característica da FTMF** (polos) a partir do conhecimento da localização dos polos e zeros da FTMA, **quando um parâmetro**, normalmente o ganho no ramo de realimentação, **varia de ZERO a INFINITO**. Observe que quando $K = 0$, não há realimentação. Ex.:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + kG(s)H(s)}$$

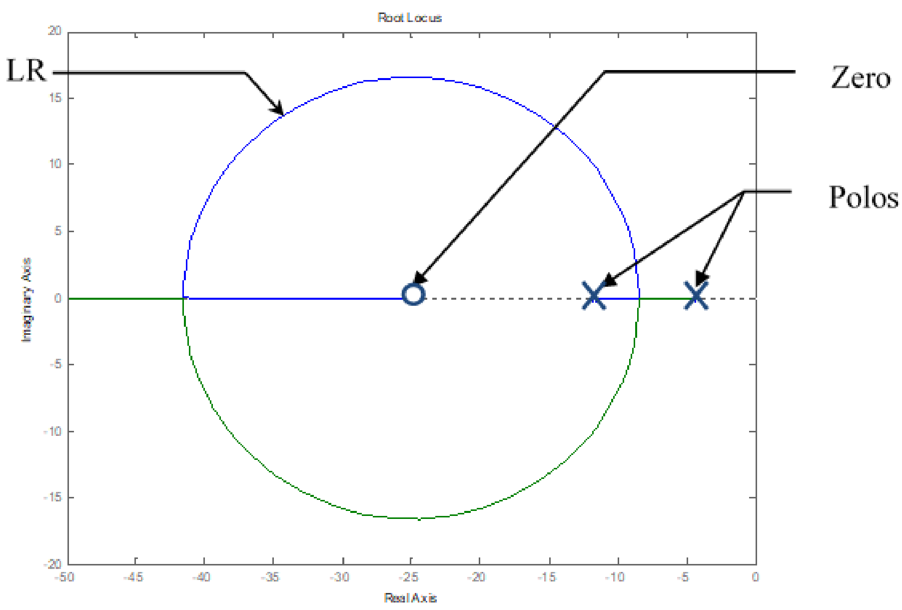
OBS:

- O sistema abaixo possui a mesma equação característica, logo, o mesmo LR.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)H(s)}$$

No Matlab, o LR é traçado usando o comando: *rlocus*($G*H$)



O LR possui o mesmo traçado e é construído da mesma forma, tanto para os **Sistemas Contínuos** (Analógicos) quanto para os **Sistemas Discretos** (Digitais).

1.2. ESPECIFICAÇÃO DE SISTEMAS PELA FASE

Os sistemas de controle são definidos quanto à fase como sendo sistemas de ***fase mínima***, de ***fase máxima*** e sistemas de ***fase não mínima***.

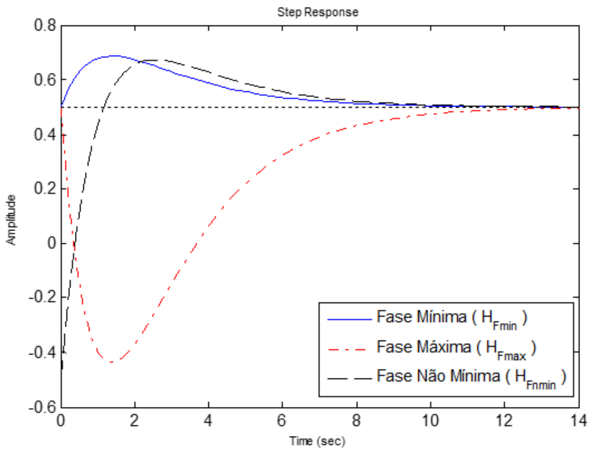
Se **todos os polos e zeros** de um sistema contínuo estiverem no **semiplano esquerdo** do plano S, o sistema será chamado de ***fase mínima***. Havendo pelo menos um polo ou zero à direita no plano S, o sistema será de *fase não mínima*. Sistemas com polos no semiplano direito são instáveis.

Sistemas estáveis são ditos de ***fase máxima*** quando **todos os zeros** estão localizados no **semiplano direito** do plano S. Observe que sistemas de fase máxima também são sistemas de fase não mínima, porém a recíproca não é verdadeira.

A derivada da resposta de fase de um sistema é uma medida do atraso temporal que as componentes de frequência sofrem quando passam através do sistema. Uma característica de fase mínima implica em uma função de atraso mínima, enquanto uma característica de fase máxima indica uma função de atraso máximo.

O gráfico abaixo exemplifica isso para os sistemas:

Fase Mínima	Fase Máxima	Fase Não Mínima
$H_{Fmin}(s) = \dfrac{\left(s+\frac{1}{4}\right)(s+2)}{(2s+1)(s+1)}$	$H_{Fmax}(s) = \dfrac{\left(-s+\frac{1}{4}\right)(-s+2)}{(2s+1)(s+1)}$	$H_{Fnmin}(s) = \dfrac{\left(s+\frac{1}{4}\right)(-s+2)}{(2s+1)(s+1)}$



1.3. CONDIÇÕES PARA ELABORAÇÃO DO LR

Dada a equação característica de um sistema de malha fechada de **fase mínima** e **realimentação negativa**, a *condição angular* é:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180°(2n+1), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

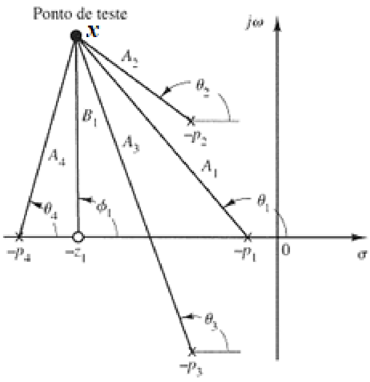
e a *condição modular* é:

$$|G(s)H(s)| = 1$$

Os valores de "*s*" que satisfazem tanto a *condição angular* quanto a *condição modular* são as raízes da equação característica, ou, os polos da FTMF.

O lugar dos valores de "s" que satisfazem somente a *condição angular* é denominado de lugar das raízes (LR).

Para um ponto de teste qualquer, as condições de módulo e fase são dadas de acordo com a figura abaixo.



A condição de fase é

$$\boxed{\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^{n_z} \phi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = \pm 180°(2n+1), \quad n = 0,1,2,\cdots}$$

No caso da figura

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = \pm 180°(2n+1), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

A condição de módulo é

$$\boxed{|G(s)H(s)| = k\frac{\prod_i B_i}{\prod_j A_j} = 1}$$

No caso da figura

$$|G(s)H(s)| = k\frac{B_1}{A_1A_2A_3A_4} = 1$$

1.4. MÉTODO PARA OBTENÇÃO DO LR EM SISTEMAS DE FASE MÍNIMA

1. Represente o polinômio do denominador da FTMF do sistema:

   $D(s) = 1 + G(s)H(s)$

2. Reorganize o polinômio de forma que o parâmetro de interesse apareça como um fator multiplicativo.

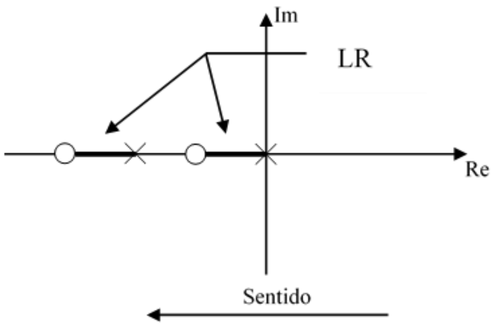
   $D(s) = 1 + kP(s)$

3. Fatore $P(s)$ para escrever a equação na forma:

   $$P(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s + p_j)}$$

4. Localize os polos e os zeros de $P(s)$ no plano complexo.

5. Localize os segmentos do eixo real que são lugares de raízes.
   → A seção do LR sobre o eixo real possui sempre um número ímpar de polos e zeros à sua direita.
   → Cubra todo o LR e caminhe no sentido da seta.
   → À medida que os polos e zeros vão aparecendo marca-se o eixo real apenas quando a quantidade de polos e zeros visíveis for ímpar. Ex:



6. Determine o número de lugares separados
   → O LR inicia-se nos polos de $P(s)$ (quando $k \to 0$) e termina nos zeros de $P(s)$ (quando $k \to \infty$).
   → Quando o número de polos, n_p, é maior que o número de zeros, n_z, $n_p - n_z$ polos buscarão zeros no infinito.
   → O número de lugares separados refere-se ao número de trajetórias distintas dos polos em busca dos zeros, logo, o número de lugares separados (LS) é igual ao número de polos $LS = n_p$.

7. Encontre as assíntotas dos polos que caminham para infinito
   → O número de assíntotas para infinito é dado por $n_p - n_z$.
   → As assíntotas são centradas em σ_A

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n_p}(-p_j) - \sum_{i=1}^{n_z}(-z_i)}{n_p - n_z}$$

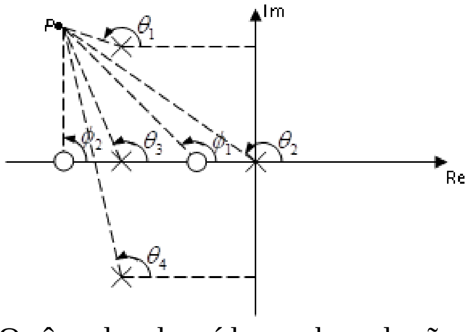
→ Os ângulos das assíntotas são determinados por

$$\phi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z}180°, \quad q = 0,1,2,\cdots,(n_p - n_z - 1)$$

OBS: Como as raízes complexas ocorrem sempre em pares conjugados, o LR será sempre simétrico em relação ao eixo real.

8. Determinar, caso exista, os pontos de saída/chegada/cruzamento dos polos/zeros sobre o eixo real.
   a. Da equação $1 + kP(s) = 0$, obtenha $k = -\frac{1}{P(s)}$
   b. Derive a equação obtida em relação à "s". Como "k" é constante, $\frac{dk}{ds} = 0$.
   c. Obtenha as raízes da equação acima. As raízes sobre o eixo real que pertencem ao LR são os pontos de saída/chegada dos polos do LR.
   d. Se duas ou mais raízes pertencerem ao LR e houver apenas um ponto de saída/chegada este será o da raiz real que tiver maior valor em módulo.

9. Determinar o ângulo de saída do polo e o ângulo de chegada no zero.
   → Se o polo está sobre o eixo real, o ângulo de saída do polo será de 90°.
   → Se o zero está sobre o eixo real, o ângulo de chegada do polo será de 90°.
   → Se o polo (ou zero) estiver fora do eixo real, efetue o seguinte procedimento:
      a. Escolha um ponto arbitrário "P" próximo ao polo (ou zero) em que se queira determinar o ângulo de saída (ou chegada).
      b. Verifique o ângulo de cada polo e zero em relação ao ponto "P", conforme exemplo abaixo.



      c. Os ângulos de saída ou chegada são obtidos pela relação:

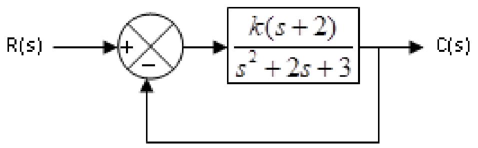
$$\sum_{i=1}^{n_z}\phi_i - \sum_{j=1}^{n_p}\theta_j = 180°\,(2n+1)$$

10. Determinar os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário (caso ocorra).
   → A partir da equação característica, obtenha "k" que torne o sistema MARGINALMENTE ESTÁVEL.
   → Se não for possível obter "k", então o sistema não toca o eixo imaginário.

→ Caso exista "k", os pontos em que o LR toca o eixo imaginário são as raízes do polinômio auxiliar.

11. Desenhe o LR.

Exemplo 1 – Esboce o LR do sistema abaixo.



SOLUÇÃO

1. *Obtenha polinômio do denominador da FTMF do sistema.*

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{k(s+2)}{s^2+2s+3}1$$

2. *Reorganize o polinômio de forma que o parâmetro de interesse apareça como um fator multiplicativo.*

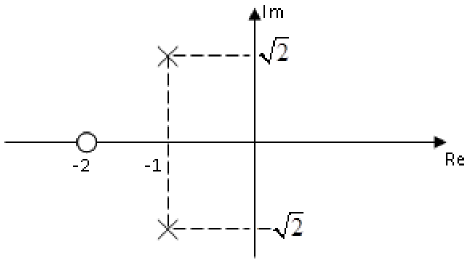
$$D(s) = 1 + k\frac{(s+2)}{s^2+2s+3}$$

$$P(s) = \frac{(s+2)}{s^2+2s+3}$$

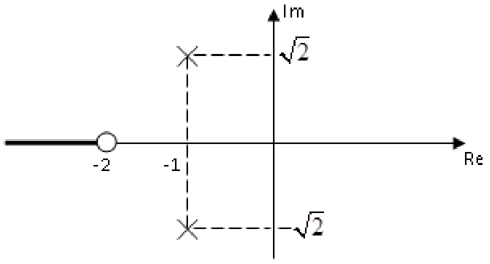
3. *Fatore $P(s)$ para escrever a equação na forma:*

$$P(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s+p_j)} = \frac{(s+2)}{(s+1+j\sqrt{2})(s+1-j\sqrt{2})}$$

4. *Localize os polos e os zeros de $P(s)$ no plano complexo.*



5. *Localize os segmentos do eixo real que são lugares de raízes.*



6. *Determine o número de lugares separados*

$$LS = n_p = 2$$

7. *Encontre as assíntotas dos polos que caminham para infinito*
   → *O número de assíntotas para infinito é dado por* $n_p - n_z = 2 - 1 = 1$.
   → *As assíntotas são centradas em* σ_A

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n_p}(-p_j) - \sum_{i=1}^{n_z}(-z_i)}{n_p - n_z}$$

$$\sigma_A = \frac{\left(\left(-1 - j\sqrt{2}\right) + \left(-1 + j\sqrt{2}\right)\right) - (-2)}{2 - 1}$$

$$\boxed{\sigma_A = 0}$$

   → *Os ângulos das assíntotas são determinados por*

$$\varphi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} \cdot 180°, \quad q = 0,1,2,\ldots,\left(n_p - n_z - 1\right)$$

$$\varphi_A = \frac{(2q+1)}{2 - 1} \cdot 180°, \quad q = 0$$

$$\boxed{\varphi_A = 180°}$$

8. *Determinar, caso exista, os pontos de saída/chegada dos polos sobre o eixo real.*
   a. *Da equação* $1 + kP(s) = 0$, *obtenha* $k = -\frac{1}{P(s)}$

$$k = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

   b. *Derive a equação em relação a "s". Como "k" é constante,* $\frac{dk}{ds} = 0$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}\right) = 0$$

$$-\frac{(2s+2)(s+2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s+2)^2} = 0$$

$$-\frac{(s^2 + 4s + 1)}{(s+2)^2} = 0$$

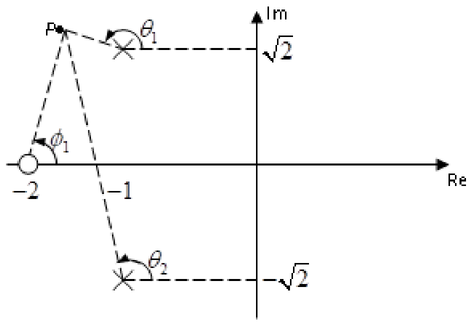
$$s^2 + 4s + 1 = 0$$

   c. *Obtenha as raízes da equação acima. As raízes sobre o eixo real que pertencem ao LR são os pontos de saída/chegada dos polos do LR.*

$$\boxed{\begin{aligned} s_1 &= -3{,}732 \\ s_2 &= -0{,}268 \end{aligned}}$$

Apenas s_1 pertence ao LR, logo, $\mathbf{-3,732}$ **é o ponto de chegada do LR sobre o eixo real.**

9. *O zero está sobre o eixo real, logo, o LR chega no zero em um ângulo de 90°. O polo está fora do eixo real, logo, é preciso determinar o ângulo de saída do polo.*



O ângulo de saída, θ_1, é obtido pela relação:

$$\sum_{i=1}^{n_z} \phi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = 180° \ (2n+1)$$

$$\phi_1 - (\theta_1 + \theta_2) = 180°$$

$$\frac{180°}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) - \theta_1 - 90° = 180°$$

$$\boxed{\theta_1 = 145°}$$

10. *Determinar os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário (caso ocorra).*

$$1 + k\frac{(s+2)}{s^2+2s+3} = 0$$

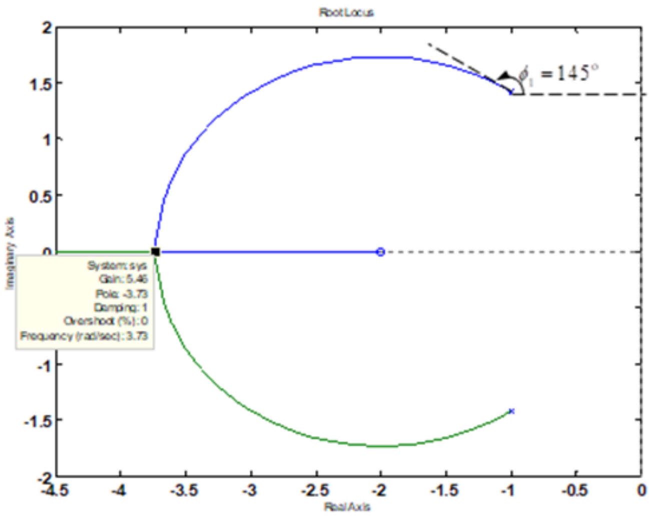
$$\frac{s^2+2s+3+k(s+2)}{s^2+2s+3} = 0$$

$$q(s) = s^2 + (2+k)s + 3 + 2k$$

s^2	1	$(3+2k)$
s^1	$(2+k)$	0
s^0	$(3+2k)$	

Para que o sistema seja Marginalmente Estável (ou seja, com os polos sobre o eixo imaginário), temos que $(2+k) = 0 \Rightarrow k = -2$, porém, se $k = -2$, então $(3+2k) = (3-4) < 0$, logo $\nexists k$ que torne o sistema Marginalmente Estável, ou seja, o LR não toca o eixo imaginário.

11. *Desenhar o LR.*



Exemplo 2 – Trace o LR para o sistema com realimentação unitária e FTRD dada por:

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s}$$

SOLUÇÃO

1. *Obtenha o polinômio do denominador da FTMF do sistema.*

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{1}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s}1$$

2. *Reorganize o polinômio de forma que o parâmetro de interesse apareça como um fator multiplicativo.*

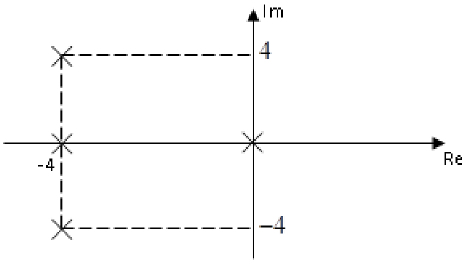
$$D(s) = 1 + k\left(\frac{1}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s}\right)$$

$$P(s) = \frac{1}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s}$$

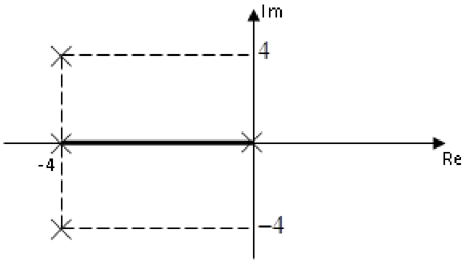
3. *Fatore $P(s)$ para escrever a equação na forma:*

$$P(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s + p_j)} = \frac{1}{s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)}$$

4. *Localize os polos e os zeros de $P(s)$ no plano complexo.*



5. *Localize os segmentos do eixo real que são lugares de raízes.*



6. *Determine o número de lugares separados*

   $LS = n_p = 4$

7. *Encontre as assíntotas dos polos que caminham para infinito*
   - → *O número de assíntotas para infinito é dado por* $n_p - n_z = 4 - 0 = 4$.
   - → *As assíntotas são centradas em* σ_A

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n_p}(-p_j) - \sum_{i=1}^{n_z}(-z_i)}{n_p - n_z}$$

$$\sigma_A = \frac{\big((-0) + (-4) + (-4 - j4) + (-4 + j4)\big)}{4 - 0}$$

$$\sigma_A = \frac{-4 - 4 - 4}{4}$$

$$\boxed{\sigma_A = -3}$$

   - → *Os ângulos das assíntotas são determinados por*

$$\varphi_A = \frac{(2q + 1)}{n_p - n_z} \cdot 180°, \quad q = 0,1,2, \dots, \big(n_p - n_z - 1\big)$$

$$\varphi_A = \frac{(2q + 1)}{4 - 0} \cdot 180°, \quad q = 0,1,2,3$$

$$\boxed{\varphi_A = 45°, 135°, 225° \ e \ 315°}$$

8. *Determinar, caso exista, os pontos de saída/chegada dos polos sobre o eixo real.*
   a. *Da equação* $1 + kP(s) = 0$, *obtenha* $k = -\frac{1}{P(s)}$

$$k = -(s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s)$$

   b. *Derive a equação em relação à "s". Como "k" é constante,* $\frac{dk}{ds} = 0$

$$\frac{dk}{ds} = -(4s^3 + 36s^2 + 128s + 128) = 0$$

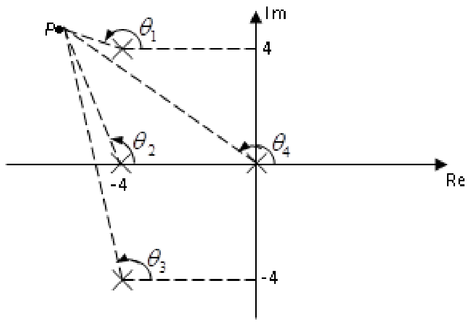
$$4s^3 + 36s^2 + 128s + 128 = 0$$

c. *Obtenha as raízes da equação acima. As raízes sobre o eixo real que pertencem ao LR são os pontos de saída/chegada dos polos do LR.*

$$\boxed{\begin{aligned} s_1 &= -1{,}57 \quad \in LR \\ s_2 &= -3{,}71 + j2{,}55 \\ s_3 &= -3{,}71 - j2{,}55 \end{aligned}}$$

Apenas s_1 pertence ao eixo real e ao LR, logo, **é o ponto de saída dos polos no eixo real**.

9. *Determinar o ângulo de partida dos polos.*



O ângulo de partida, θ_1, é obtido pela relação:

$$\sum_{i=1}^{n_z} \phi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = 180° \; (2n+1)$$

$$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 180°$$

$$\theta_1 + 90° + 90° + (180° - 45°) = 180°$$

$$\boxed{\theta_1 = -135°}$$

10. *Determinar os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário (caso ocorra).*

$$1 + k\left(\frac{1}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s}\right) = 0$$

$$\frac{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + k}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0$$

$$q(s) = s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + k$$

s^4	1	64	k
s^3	12	128	0
s^2	53.3	k	
s^1	$(128-0.22k)$	0	
s^0	k		

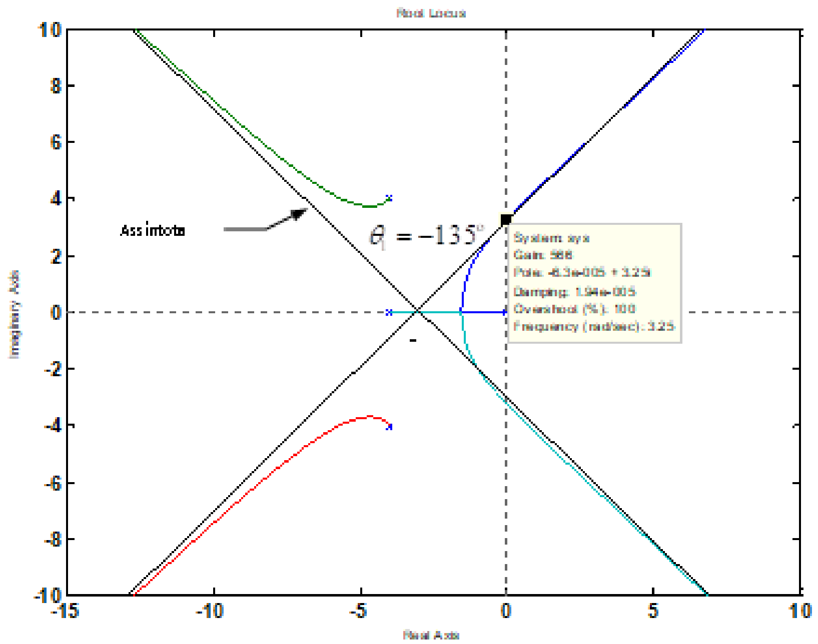
Para que o sistema seja Marginalmente Estável, temos que $(128 - 0{,}22k) = 0 \Rightarrow k = 568{,}8$.
Os pontos sobre o eixo imaginário são as raízes do polinômio auxiliar:

$$53{,}3s^2 + k = 0$$

$$53{,}3s^2 + 568{,}8 = 0$$

$$\boxed{s = \pm j3{,}26}$$

11. Desenhar o LR.



Exemplo 3 – Para um sistema com FTMA representada abaixo. Construa o LR calculando todos os elementos críticos.

$$A(s) = \frac{k}{s(s+6)(s+9)}$$

SOLUÇÃO

1. A FTMF do sistema é $FTMF = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$, onde $G(s)H(s)$ é dada pela equação acima. Assim, o polinômio do denominador da FTMF é $1 + G(s)H(s)$, portanto:

$$D(s) = 1 + \frac{k}{s(s+6)(s+9)}$$

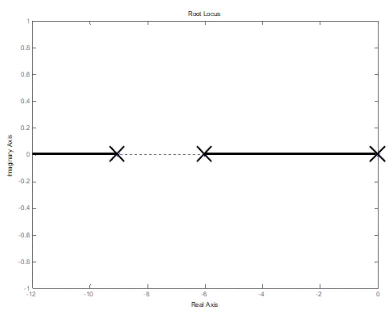
2. Reorganizando a equação acima na forma $1 + kP(s)$, temos:

$$D(s) = 1 + k\frac{1}{s(s+6)(s+9)}$$

logo,

$$P(s) = \frac{1}{s(s+6)(s+9)}$$

3. Localizar os polos e zeros de $P(s)$ no plano complexo.



4. Marcar o LR sobre o eixo real (ver gráfico acima).

5. $LS = 3$

6. O LR é simétrico em relação ao eixo real.

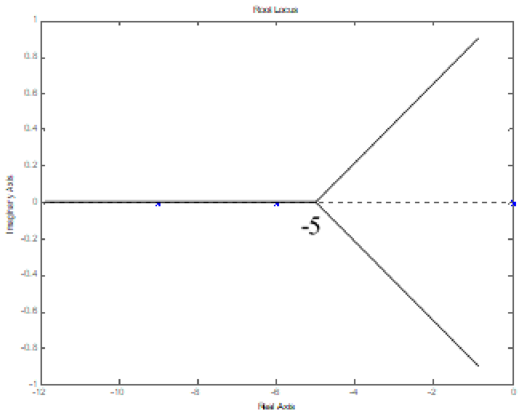
7. Assíntotas

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{N}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z} \Rightarrow \sigma_A = \frac{0-6-9-0}{3-0} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = -5}$$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \times 180 \qquad q = 0,1,\cdots,(n_p - n_z - 1)$$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \times 180 \qquad q = 0,1,2$$

$$\boxed{\varphi_A = 60°, 180°, 300°}$$



8. Determinação do ponto de saída dos polos sobre o eixo real

$$k = -\frac{1}{P(s)} = -(s^3 + 15s^2 + 54s)$$

$$\frac{dk}{ds} = -(3s^2 + 30s + 54) = 0$$

$$\boxed{s = -7{,}64} \quad \notin LR \qquad \boxed{s = -2{,}35} \quad \in \; LR$$

9. Como os polos estão sobre o eixo real, eles saem com ângulo de 90° para as assíntotas.

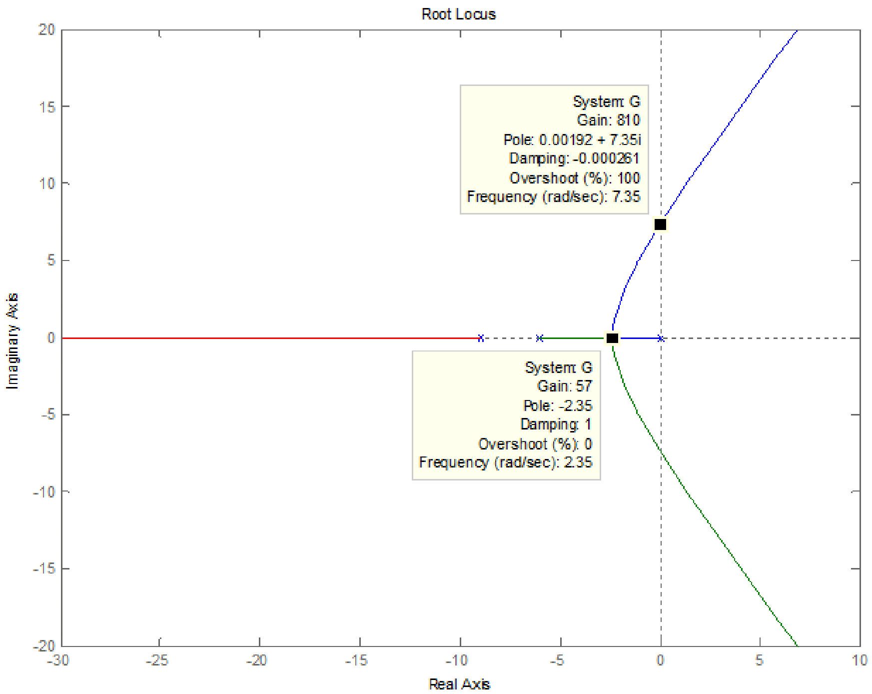
10. Usando o arranjo de Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 54 \\ s^2 & 15 & k \\ \hline s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{810 - k}{15}$$

Para haver oscilação, $b_1 = 0$, portanto, $\boxed{k = 810}$
Substituindo k no polinômio auxiliar $p_{aux}(s) = 15s^2 + 810 = 0 \therefore \boxed{s = \pm j7{,}35}$ são os pontos de interseção no eixo imaginário.

11. Traçando o LR



Exemplo 4 – Um sistema possui a FTMA representada abaixo. Obtenha o LR.

$$G(s)H(s) = \frac{s^2 + 6s + 10}{s(s+2)(s+3)}$$

SOLUÇÃO

1. *Obtenha o polinômio do denominador da FTMF do sistema.*

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{s^2 + 6s + 10}{s(s+2)(s+3)}$$

2. *Reorganize o polinômio de forma que o parâmetro de interesse apareça como um fator multiplicativo,*

$$D(s) = 1 + kP(s) = 1 + k\frac{s^2 + 6s + 10}{s(s+2)(s+3)}$$

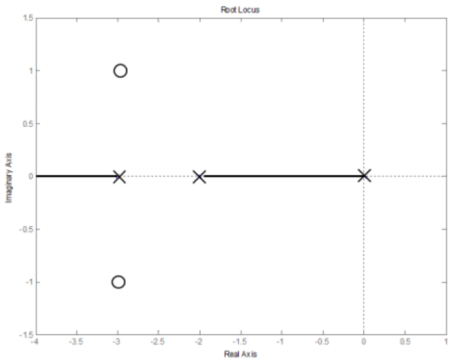
$$P(s) = \frac{s^2 + 6s + 10}{s(s+2)(s+3)}$$

3. *Fatore $P(s)$ para escrever a equação na forma:*

$$P(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s+p_j)} = \frac{(s+3-j)(s+3+j)}{s(s+2)(s+3)}$$

4. *Localize os polos e os zeros de $P(s)$ no plano complexo.*

5. *Localize os segmentos do eixo real que são lugares de raízes.*



6. *Determine o número de lugares separados.* $LS = 3$

7. *Encontre as assíntotas dos polos que caminham para infinito*

Ponto de Saída das Assíntotas

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{N}(-p_j)-\sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p-n_z} \Rightarrow \sigma_A = \frac{0-2-3-(-3-j-3+j)}{3-2} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = 1}$$

Ângulos das Assíntotas

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p-n_z} \times 180 \qquad q = 0,1,\cdots,(n_p-n_z-1)$$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p-n_z} \times 180 \qquad q = 0$$

$$\varphi_A = \frac{2(0)+1}{3-2} \times 180$$

$$\boxed{\varphi_A = 180°}$$

8. *Determinar, caso exista, os pontos de saída/chegada dos polos sobre o eixo real.*

$$k = -\frac{1}{P(s)} = -\frac{s(s+2)(s+3)}{s^2+6s+10}$$

$$k = -\frac{s^3+5s^2+6s}{s^2+6s+10}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\left(\frac{(3s^2+10s+6)(s^2+6s+10)-(s^3+5s^2+6s)(2s+6)}{(s^2+6s+10)^2}\right)$$

$$0 = 3s^4+18s^3+30s^2+10s^3+60s^2+100s+6s^2+36s+60-2s^4 -10s^3-12s^2-6s^3-30s^2-36s$$

$$s^4+12s^3+54s^2+100s+60 = 0$$

As raízes do polinômio acima são: $\begin{cases} -4{,}11 \pm j1.74 \\ -1{,}15 \\ -2{,}62 \end{cases}$

Logo, a raiz que pertence ao LR é $\mathbf{-1{,}15}$.

9. *Determinar o ângulo de saída do polo e o ângulo de chegada no zero.*

Como os polos estão sobre o eixo real, eles saem a 90° para as assíntotas. Escolhendo um ponto *P* próximo ao zero no segundo quadrante, o ângulo de chegada nos zeros é:

$$\sum_{i=1}^{n_z} \varphi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = \pm 180(2n+1)$$

$$(\varphi_1 + 90) - \left[90 + \left(180 - \frac{180}{\pi} arctan\left(\frac{1}{1}\right)\right) + \left(180 - \frac{180}{\pi} arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right] = \pm 180(2n+1)$$

$$\varphi_1 - 135 - 161{,}57 = 180$$

$$\varphi_1 = 476{,}57° \rightarrow \boxed{\varphi_1 = 116{,}57°}$$

10. *Determinar os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário (caso ocorra).*

$$1 + k\frac{s^2 + 6s + 10}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

$$s(s+2)(s+3) + k(s^2 + 6s + 10) = 0$$

$$s^3 + (k+5)s^2 + 6(k+1)s + 10k = 0$$

Usando o arranjo de Routh

s^3	1	$6k+6$
s^2	$k+5$	$10k$
s^1	b_1	0
s^0	$10k$	

$$b_1 = \frac{(k+5)(6k+6) - 10k}{k+5}$$

Para haver oscilação, $b_1 = 0$: $\frac{(k+5)(6k+6)-10k}{k+5} = 0$

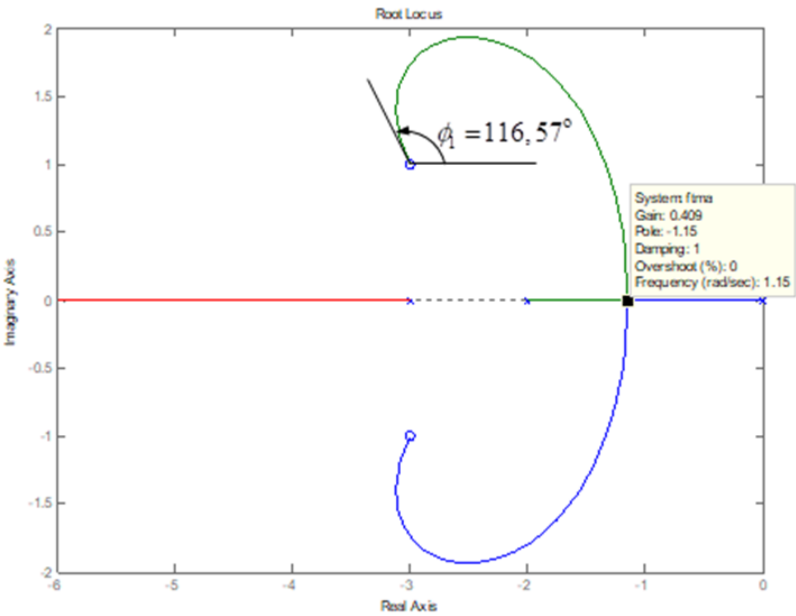
$(k+5)(6k+6) - 10k = 0 \qquad e \qquad k \neq -5$

$6k^2 + 26k + 30 = 0$

$\boxed{k = -2{,}16 \pm j0{,}55}$

k assume valores complexos, portanto, o LR não corta o eixo imaginário.

11. Desenhe o LR.



Exemplo 5 – Para um sistema com retroação unitária a FTRD está representada abaixo. Construa o LR calculando todos os elementos críticos.

$$G(s) = \frac{k(s+3)}{s(s+1)}$$

SOLUÇÃO

1. A FTMF do sistema é $FTMF = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$, onde $G(s)$ é dada pela equação acima e $H(s) = 1$. Assim, o polinômio do denominador é:

$$D(s) = 1 + \frac{k(s+3)}{s(s+1)}$$

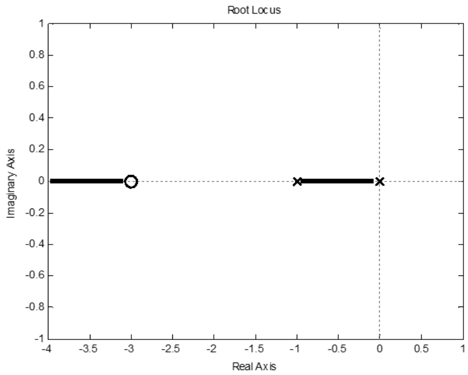
2. Reorganizando a equação acima na forma $1 + kP(s)$, temos:

$$D(s) = 1 + k\frac{s+3}{s(s+1)}$$

logo,

$$P(s) = \frac{s+3}{s(s+1)}$$

3. Localizar os polos e zeros de $P(s)$ no plano complexo.



4. Marcar o LR sobre o eixo real (ver gráfico acima).

5. $LS = 2$

6. O LR é simétrico em relação ao eixo real.

7. $\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{N}(-p_j)-\sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p-n_z} \Rightarrow \sigma_A = \frac{0-1-(-3)}{2-1} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = 2}$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p-n_z} \times 180 \qquad q = 0,1,\cdots,(n_p-n_z-1)$$
$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p-n_z} \times 180 \qquad q = 0$$
$$\boxed{\varphi_A = 180°}$$

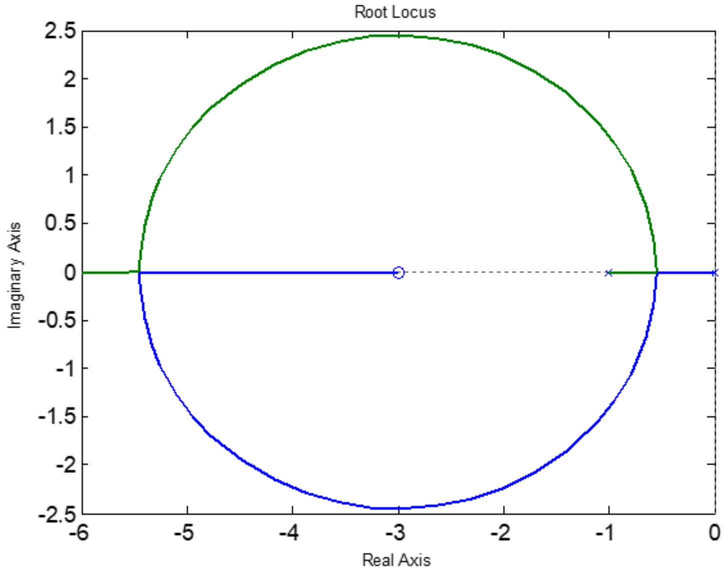
8. Determinação do ponto de saída sobre o eixo real

$$k = -\frac{1}{P(s)} = -\frac{s^2+s}{s+3}$$
$$\frac{dk}{ds} = \left\{\frac{(2s+1)(s+3)-(s^2+s)}{(s+3)^2}\right\} = 0$$
$$(2s+1)(s+3)-(s^2+s) = 0$$
$$s^2+6s+3 = 0$$
$$\boxed{\begin{array}{l} s = -5{,}45 \ \in \ LR \\ s = -0{,}55 \ \in \ LR \end{array}}$$

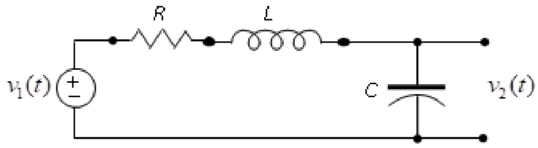
9. Como os polos estão sobre o eixo real, eles saem a 90° para as assíntotas.

10. Os polos buscam por zeros, logo, um polo irá para o zero e o outro segue a assíntota em 180º para infinito, logo o LR não corta o eixo imaginário.

11. Traçando o LR



Exemplo 6 – Obtenha o gráfico do LR para o circuito abaixo, sendo $LC = 1$ e $\frac{R}{L} = 2$:



SOLUÇÃO

$$V_1(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{I(s)}{sC}$$

$$V_2(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\boxed{\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

O LR:

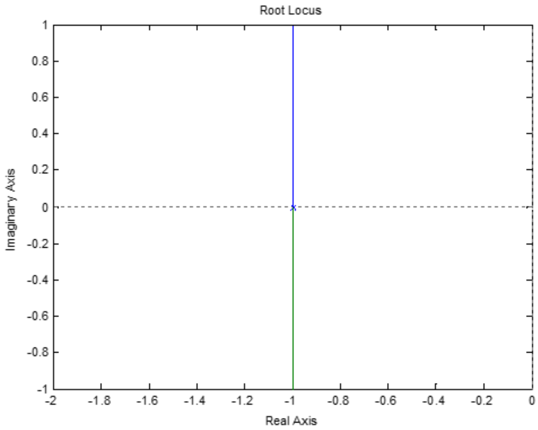
O sistema é de malha fechada com realimentação unitária. O LR simula o comportamento de malha fechada com realimentação k, em que $0 \leq k \leq \infty$.

- Polos duplos em -1
- Polos sobre o eixo real partem a 90º e 270º em direção às assíntotas no infinito

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \times 180 \qquad q = 0,1,\cdots,(n_p - n_z - 1)$$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{2-0} \times 180 \qquad q = 0,1$$

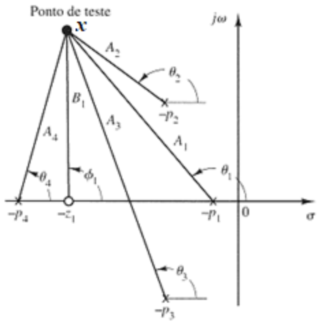
$$\boxed{\varphi_A = 90°, 270°}$$



1.5. GRADUAÇÃO DO PARÂMETRO k

O valor do parâmetro "k" em uma raiz "x" do LR, ou seja, em uma posição "x" do LR (ponto de teste), é obtido pela relação

$$k_x = \frac{produto\ da\ distância\ entre\ o\ ponto\ x\ e\ os\ polos}{produto\ da\ distância\ entre\ o\ ponto\ x\ e\ os\ zeros}$$



ou seja, conforme a figura acima:

$$k_x = \frac{A_1 A_2 A_3 A_4}{B_1}$$

que pode também ser obtida pela equação:

$$\boxed{k_x = \left|\frac{\prod_{j=1}^{n_p}(s \pm p_j)}{\prod_{i=1}^{n_z}(s \pm z_i)}\right|_{s=x}}$$

Exemplo 7 – Para o sistema com realimentação unitária, e FTRD dada abaixo, obtenha "k" para a localização do polo em $j3{,}26$.

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s}$$

SOLUÇÃO

$$k_x = \left|\frac{\prod_{j=1}^{n_p}(s \pm p_j)}{\prod_{i=1}^{n_z}(s \pm z_i)}\right|_{s=x}$$

$$k_{j3,26} = |s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s|_{s=j3,26}$$

$$k_{j3,26} = |(j3{,}26)^4 + 12(j3{,}26)^3 + 64(j3{,}26)^2 + 128(j3{,}26)|$$
$$k_{j3,26} = |112{,}94 - j416 - 680{,}16 + j416|$$
$$\boxed{k_{j3,26} \cong 567}$$

Exemplo 8 – Utilize o Matlab para conferir o resultado obtido no Exemplo 1.

SOLUÇÃO
Como a realimentação é unitária ($H(s) = 1$), temos:

Command Window

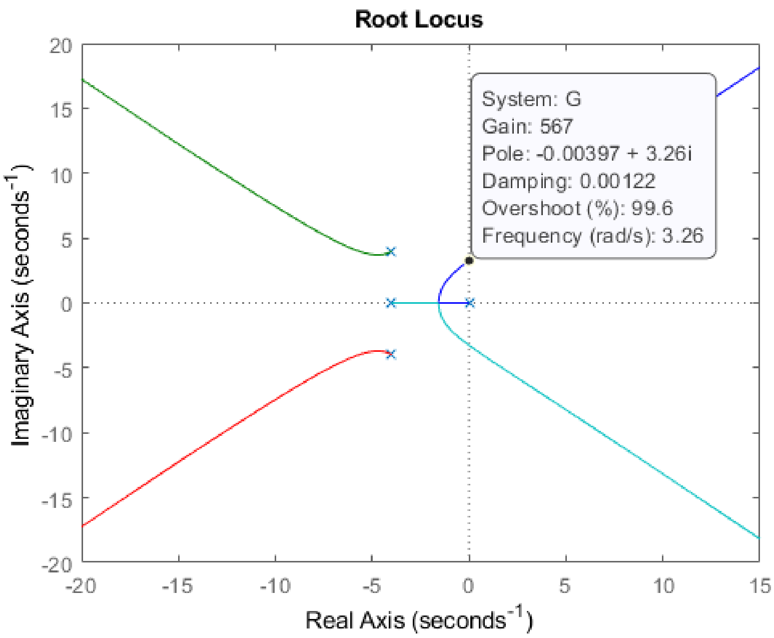
```
>> G = tf(1,[1 12 64 128 0])

G =

                1
  ----------------------------
  s^4 + 12 s^3 + 64 s^2 + 128 s

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(G)
```



1.6. CARACTERÍSTICAS DO LR

A equação característica de um sistema cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad (n \geq m)$$

é uma equação algébrica de grau n em s. Para qualquer polinômio na forma

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$$

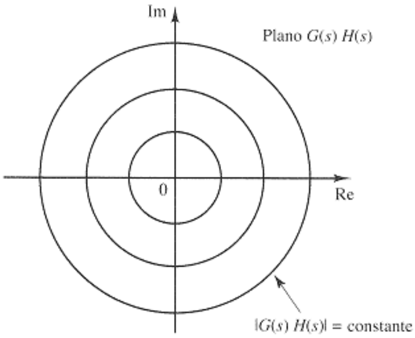
a soma de suas raízes resulta em a_1 com o sinal trocado.

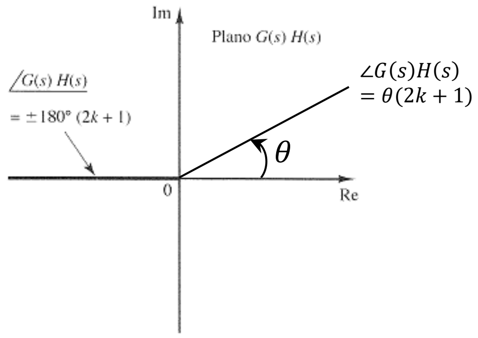
Assim, se $m \leq n - 2$, e alguns polos se deslocarem para a esquerda sobre o LR à medida que K aumenta, então os outros se deslocarão para a direita para manter a relação de soma igual a a_1.

LUGARES GEOMÉTRICOS DE GANHO E FASE CONSTANTE

$|G(s)H(s)|$ é constante para um mesmo raio no plano $G(s)H(s)$.

$\angle G(s)H(s)$ é constante para um mesmo ângulo no plano $G(s)H(s)$.

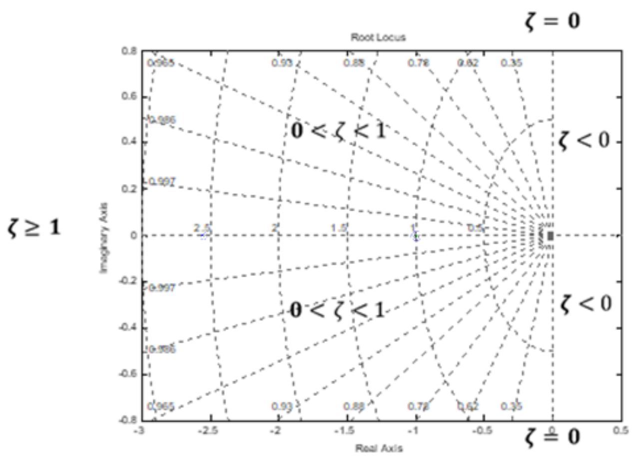




LUGARES GEOMÉTRICOS DE ζ E ω_n CONSTANTES

ω_n é constante para um mesmo raio no plano s.

ζ é constante para um mesmo ângulo no plano s.



1.7. MÉTODO PARA OBTENÇÃO DO LR EM SISTEMAS DE FASE NÃO MÍNIMA

Em sistemas de fase não mínima, a condição angular depende do número de polos e zeros no semiplano direito. O cálculo da condição angular consiste primeiramente em reescrever a equação de $G(s)H(s)$ na forma

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s \pm z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s \pm p_j)}$$

Se ao arrumar a equação ficar um sinal positivo na frente da fração, então a condição angular (ou de fase) se mantém em $\pm 180°\ (2n+1),\ n = 0,1,2,\cdots$, caso apareça um sinal negativo, a condição angular passa para 0°:

$$\angle G(s)H(s) = n360° \qquad ;\ n = 0,1,2,\cdots$$

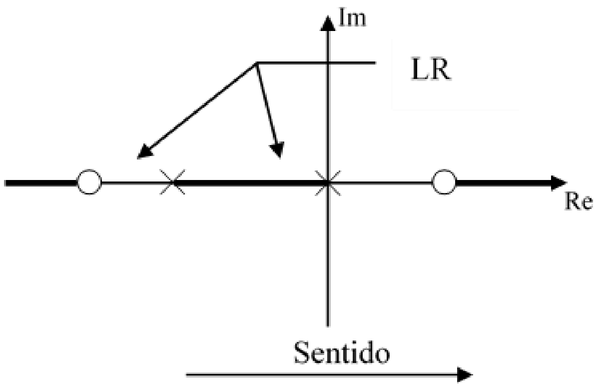
Em sistemas de fase não mínima "se" a condição angular for 0°, será necessário modificar os seguintes passos:

Passo 5 – Localize os segmentos do eixo real que são lugares de raízes.

→ A seção do LR sobre o eixo real possui sempre um número par de polos e zeros à sua direita (zero é par).

→ Posicione-se à esquerda do LR, visualizando todo o plano s.

→ Caminhe no sentido da seta marcando o eixo real sempre que o número de polos e zeros visíveis for par. Ex:



Passo 7 – Os ângulos das assíntotas são determinados por

$$\phi_A = \frac{q}{n_p - n_z} 360°, \quad q = 0,1,2,\cdots,(n_p - n_z - 1)$$

Passo 9 – Os ângulos de saída ou chegada são obtidos pela relação:

$$\sum_{i=1}^{n_z} \phi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = n360° \quad ;\ n = 0,1,2,\cdots$$

→ Se o polo está sobre o eixo real, então o ângulo de saída do polo poderá não ser de 90°.

→ Se o zero está sobre o eixo real, então o ângulo de chegada do polo poderá não ser de 90°.

Exemplo 9 – Para um sistema com retroação unitária a FTRD está representada abaixo. Construa o LR calculando todos os elementos críticos.

$$G(s) = \frac{k(-s+3)}{s(s+1)}$$

SOLUÇÃO

O sistema é de fase não mínima, pois existe um zero no semiplano direito. Arrumando a equação na forma abaixo para verificar a condição angular, temos:

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s \pm z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s \pm p_j)}$$

$$G(s)H(s) = -\frac{k(s-3)}{s(s+1)}$$

O sistema possui um sinal negativo, logo a condição de fase é 0°.

Aplicando o procedimento, temos:

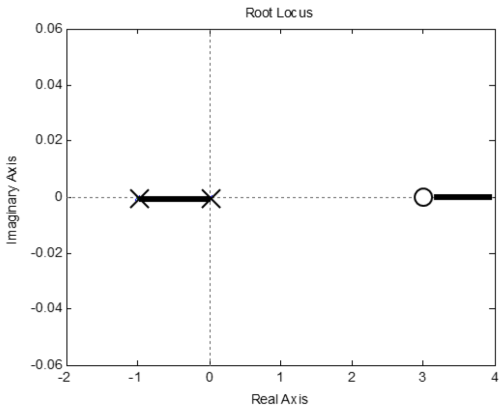
1. O polinômio do denominador do sistema é:

$$D(s) = 1 + \frac{k(-s+3)}{s(s+1)}$$

2. Reorganizando a equação acima na forma $1 + kP(s)$, temos:

$$P(s) = -\frac{s-3}{s(s+1)}$$

3. Localizar os polos e zeros de $P(s)$ no plano complexo.



4. Marcar o LR sobre o eixo real (ver gráfico acima).
5. $LS = 2$
6. O LR é simétrico em relação ao eixo real.
7. $\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{N}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z} \Rightarrow \sigma_A = \frac{0-1-(3)}{2-1} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = -4}$

Existe apenas um zero no semiplano direito do plano S, logo o número de polos e zeros é ímpar, assim, a condição angular é 0° e a equação de ângulo das assíntotas é:

$$\phi_A = \frac{q}{n_p - n_z} 360°, \quad q = 0,1,2, \cdots, \left(n_p - n_z - 1\right)$$

$$\phi_A = \frac{q}{n_p - n_z} 360°, \quad q = 0$$

$$\boxed{\phi_A = 0°}$$

8. Determinação do ponto de saída sobre o eixo real

$$k = -\frac{1}{P(s)} = \frac{s^2 + s}{s - 3}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{(2s + 1)(s - 3) - (s^2 + s)}{(s - 3)^2} = 0$$

$$(2s + 1)(s - 3) - (s^2 + s) = 0$$

$$s^2 - 6s - 3 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} s = 6{,}46 & \in LR \\ s = -0{,}46 & \in LR \end{array}}$$

9. Os polos estão sobre o eixo real e, nesse caso, eles saem a 90° para as assíntotas.

10. Os polos buscam por zeros, logo, um polo irá para o zero e o outro segue a assíntota em 0º para infinito, logo o LR corta o eixo imaginário.

$$1 + \frac{k(-s + 3)}{s(s + 1)} = 0$$

$$\frac{s(s + 1) + k(-s + 3)}{s(s + 1)} = 0$$

$$s(s + 1) + k(-s + 3) = 0$$

$$Q(s) = s^2 + s(1 - k) + 3k$$

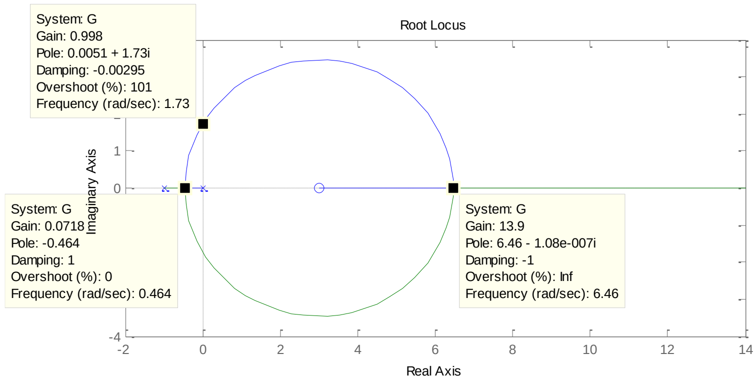
$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 3k \\ s^1 & 1 - k & 0 \\ \hline s^0 & 3k & \end{array}$$

Para estabilidade marginal, $k = 1$. Usando o polinômio auxiliar, temos:

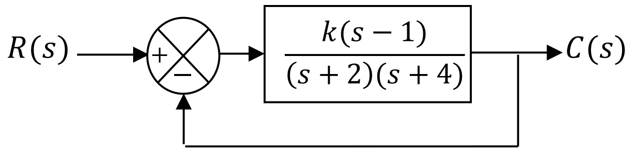
$$s^2 + 3 = 0$$

$$\boxed{s = \pm j\sqrt{3}}$$

11. Traçando o LR



Exemplo 10 – Trace o gráfico do LR para o sistema abaixo explicando o porquê dos valores obtidos quando o cálculo for desnecessário em todos os passos do procedimento de construção do LR. Obtenha o valor de k quando o LR cruzar o eixo imaginário.



SOLUÇÃO

O sistema é de fase não mínima, pois existe um zero no semiplano direito. Arrumando a equação na forma abaixo para verificar a condição angular, temos:

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s \pm z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s \pm p_j)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{k(s-1)}{(s+2)(s+4)}$$

O sistema possui um sinal positivo, logo a condição de fase é 180°. Aplicando o procedimento, temos:

1. *Obtenha o polinômio do denominador do sistema.*

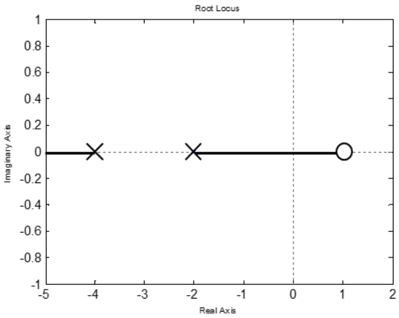
$$D(s) = 1 + G(s)H(s)$$

$$D(s) = 1 + k\frac{(s-1)}{(s+2)(s+4)}$$

Assim,

$$P(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+4)}$$

2. *Localize os polos e os zeros de $P(s)$ no plano complexo e os locais do eixo real que são lugares de raízes.*



3. *Determine o número de lugares separados $LS = 2$*
4. *Encontre as assíntotas dos polos que caminham para infinito*

Ponto de Saída das Assíntotas

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{N}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n_p - n_z} \Rightarrow \sigma_A = \frac{(-2-4)-(+1)}{2-1} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = -7{,}0}$$

Ângulos das Assíntotas

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \times 180 \qquad q = 0,1,\cdots,(n_p - n_z - 1)$$

$$\varphi_A = \frac{2q+1}{3-1} \times 180 \qquad q = 0$$

$$\boxed{\varphi_A = 180°}$$

5. *Determinar, caso exista, os pontos de saída/chegada dos polos sobre o eixo real.*

Os polos e zero estão sobre o eixo real e a assíntota está em 180°, logo não há chegadas ou saídas do eixo real

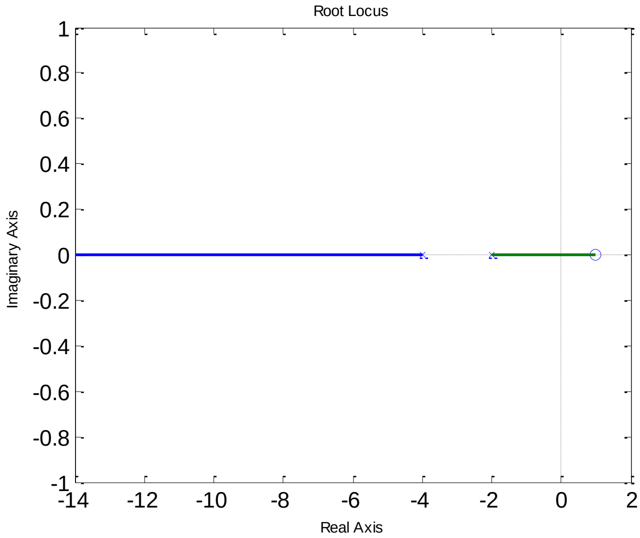
6. *Determinar o ângulo de saída do polo e o ângulo de chegada no zero.*

Como os polos estão sobre o eixo real, e a assíntota está sobre o eixo real, não é necessário calcular ângulo de saída/chegada.

7. *Determinar os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário (caso ocorra).*

Um polo cruza o eixo imaginário na origem, quando caminha para o zero no semiplano direito.

8. Desenhe o LR.



Graduação do Parâmetro k

Observe que o LR passa sobre o eixo real cruzando o eixo imaginário em $s = 0$.

$$Q(s) = 1 + k\frac{(s-1)}{(s+2)(s+4)} = 0$$

$$k = -\left.\frac{(s+2)(s+4)}{(s-1)}\right|_{s=0} = -\frac{(0+2)(0+4)}{(0-1)}$$

$$\boxed{k = 8}$$

1.8. SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO POSITIVA

Os sistemas com realimentação positiva podem existir dentro de plantas com realimentação negativa, sendo esta responsável por estabilizar toda a planta.

A elaboração do LR para sistemas com realimentação positiva é realizada da seguinte forma:

- Para sistemas de fase mínima, adotam-se as alterações propostas para sistemas de fase não mínima com condição angular igual a 0°.
- Para sistemas de fase não mínima, se ocorrer sinal negativo na forma geral, então a condição angular será 180° e efetua-se o procedimento como se o sistema fosse de fase mínima. Caso contrário, a condição angular é 0° e o método segue as alterações propostas para sistemas de fase não mínima com condição angular igual a 0°.

Quadro resumo para condição de fase:

<table>
<tr><th rowspan="4">REALIMENTAÇÃO</th><th colspan="3">FASE</th></tr>
<tr><th rowspan="3">MÍNIMA</th><th colspan="2">NÃO MÍNIMA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Sinal Multiplicador da Fração da Forma Geral</td></tr>
<tr><th>POSITIVO</th><th>NEGATIVO</th></tr>
<tr><td>Negativa</td><td>180°</td><td>180°</td><td>0°</td></tr>
<tr><td>Positiva</td><td>0º</td><td>0°</td><td>180°</td></tr>
</table>

1.9. MATLAB

Funções úteis: *rlocus, sgrid, rlocfind, pzmap, pole, zero, lsim, step, impulse, residue, roots, ord2, rmodel, zpk, poly* e *printsys*.

1.10. SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS

Livro Dorf 8ªed: E7.1 a E7.23, P7.1 a P7.39, PA7.1 a PA7.12, PP7.1 a PP7.13.
Livro Ogata 4ªed: A6.1 a A6.18, B6.1 a B6.17.

1.11. EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. (Dorf AD7.3 Adaptado) Um sistema de controle de posição utiliza realimentação unitária e possui a seguinte função de transferência de ramo direto,

$$G_c(s)G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+k)}$$

Desenhe o LR como uma função de k. Determine o valor de k de forma que os polos complexos da equação característica tenha $\zeta = 1/\sqrt{2}$.

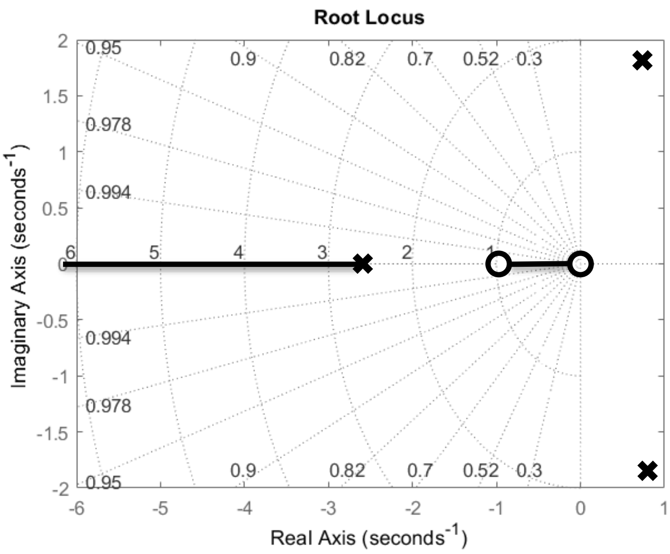
SOLUÇÃO
Polinômio do Denominador
$D(s) = 1 + Gc(s)G(s)H(s)$
$D(s) = 1 + \dfrac{10}{s(s+1)(s+k)}$

Arrumando para isolar o parâmetro k
$1 + \dfrac{10}{s(s+1)(s+k)} = 0$
$\dfrac{s(s+1)(s+k)+10}{s(s+1)(s+k)} = 0$
$s^3 + ks^2 + s^2 + ks + 10 = 0$
$s^3 + s^2 + 10 + ks(s+1) = 0$
$\boxed{1 + k\dfrac{s(s+1)}{s^3+s^2+10} = 0}$

Fazendo o LR:
$P(s) = \dfrac{s(s+1)}{s^3+s^2+10}$

1. Localizar os polos e zeros de $P(s)$ no plano complexo.

$p_1 = -2{,}54$ $\quad$ $p_2 = 0{,}77 + j1{,}83$ $\quad$ $p_3 = 0{,}77 - j1{,}83$



2. Marcar o LR sobre o eixo real (ver gráfico acima).
3. LS = 3
4. O LR é simétrico em relação ao eixo real.
5. O LR possui um polo a mais que zeros, com uma assíntota a 180° sobre o eixo real.
6. Determinação do ponto de chegada dos polos sobre o eixo real

$$k = -\frac{s^3 + s^2 + 10}{s(s+1)}$$

$$\frac{dk}{ds} = \left\{\frac{(3s^2 + 2s)(s^2 + s) - (s^3 + s^2 + 10)(2s+1)}{s^2(s+1)^2}\right\} = 0$$

$$3s^4 + 3s^3 + 2s^3 + 2s^2 - 2s^4 - 2s^3 - 20s - s^3 - s^2 - 10 = 0$$

$$s^4 + 2s^3 + s^2 - 20s - 10 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} s = 2{,}27 \ \notin \ LR \\ s = -0{,}49 \in \ LR \\ s = -1{,}89 \pm j2{,}29 \ \notin LR \end{array}}$$

7. Determinar o ângulo de saída do polo e o ângulo de chegada no zero.

Escolhendo um ponto P próximo ao polo no primeiro quadrante:

$$\sum_{i=1}^{n_z} \varphi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = \pm 180(2n+1)$$

$$\frac{180}{\pi}\left\{arctan\left(\frac{1{,}83}{0{,}77}\right) + arctan\left(\frac{1{,}83}{1{,}77}\right) - \left[\theta_1 + arctan\left(\frac{1{,}83}{2{,}54 + 0{,}77}\right) + \frac{\pi}{2}\right]\right\} = 180$$

$$67{,}18 + 45{,}95 - \theta_1 - 28{,}93 - 90 = 180$$
$$\theta_1 = -185{,}8$$
$$\boxed{\theta_1 = 174{,}2^{\circ}}$$

Como os zeros estão sobre o eixo real, os polos chegam a 90° no eixo.

8. Determinar os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário.

$$1 + k\frac{s(s+1)}{s^3 + s^2 + 10} = 0$$

$$s^3 + s^2 + 10 + ks(s+1) = 0$$

$$s^3 + (k+1)s^2 + ks + 10 = 0$$

Usando o arranjo de Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & k \\ s^2 & (k+1) & 10 \\ \hline s^1 & b & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

$$b = \frac{k^2 + k - 10}{k + 1}$$

Para haver oscilação, $b = 0$: $\frac{k^2+k-10}{k+1} = 0$

$k^2 + k - 10 = 0 \qquad e \qquad k \neq -1$

$\boxed{k = 1{,}21}$

O LR corta o eixo imaginário quando $k = 1{,}21$. Neste ponto a frequência é:

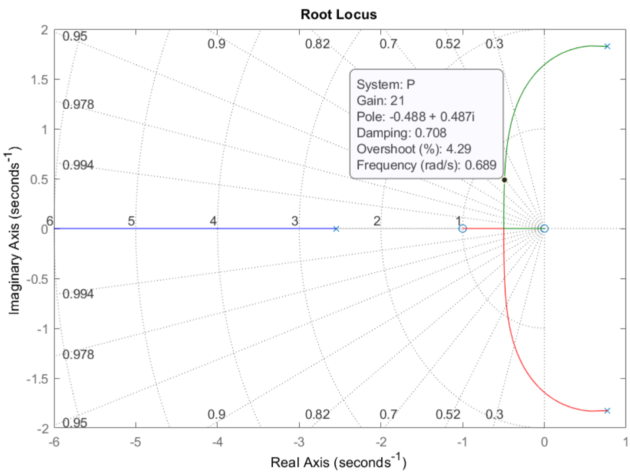
$s^2(k + 1) + 10 = 0$

$(j\omega)^2(1{,}21 + 1) + 10 = 0$

$-2{,}21\omega^2 + 10 = 0$

$\boxed{\omega = \pm 2{,}13 [rad/s]}$

9. Traçando o LR



O valor de k de forma que os polos complexos da equação característica tenha $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$, implica na isolinha de ângulo 45° e esse valor é obtido medindo-se no gráfico do LR, portanto, do gráfico, temos $\boxed{k = 21}$.

2. (Ogata A6.7 Adaptado) Um sistema de controle de posição utiliza realimentação unitária e possui a seguinte função de transferência de ramo direto,

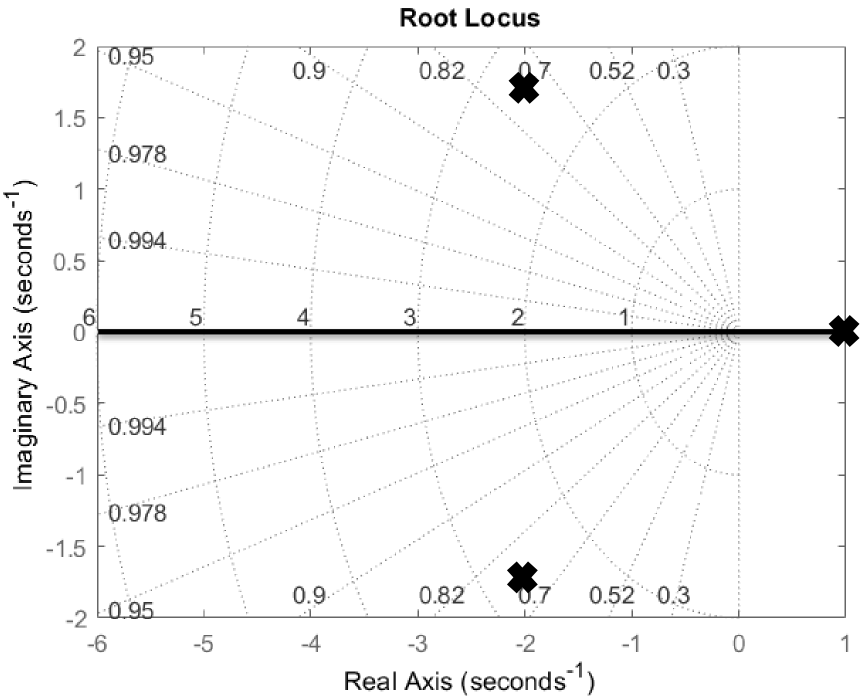
$$G(s) = \frac{k}{(s-1)(s^2+4s+7)}$$

Desenhe o LR.

SOLUÇÃO
O sistema é de fase não mínima. A condição angular é de 180°.

Fazendo o LR sobre o eixo real:
$$P(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+3s-7}$$

1. Localizar os polos e zeros de $P(s)$ no plano complexo.
$p_1 = -2 + j\sqrt{3}$ $\quad$ $p_2 = -2 - j\sqrt{3}$ $\quad$ $p_3 = 1$



2. Marcar o LR sobre o eixo real (ver gráfico acima).
3. LS = 3
4. O LR é simétrico em relação ao eixo real.
5. Assíntotas

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n_p}(-p_j) - \sum_{i=1}^{n_z}(-z_i)}{n_p - n_z} = \frac{-2+j\sqrt{3}-2-j\sqrt{3}+1}{3-0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_A = -1}$$

$$\phi_A = \frac{2q+1}{n_p-n_z}180°, \quad q = 0,1,2,\cdots,(n_p-n_z-1)$$

$$\boxed{\phi_A = 60°, 180^{\circ}, 300^{\circ}}$$

6. Determinação do ponto de cruzamento dos polos sobre o eixo real

$$k = -\frac{1}{P(s)} = -s^3 - 3s^2 - 3s + 7$$

$$\frac{dk}{ds} = -3s^2 - 6s - 3 = 0$$

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$\boxed{s = -1 \quad \in \ LR}$$

7. Determinar o ângulo de saída do polo e o ângulo de chegada no zero.
Escolhendo um ponto P próximo ao polo no segundo quadrante, o ângulo de saída é:

$$\sum_{i=1}^{n_z} \varphi_i - \sum_{j=1}^{n_p} \theta_j = \pm 180(2n+1)$$

$$\frac{180}{\pi}\left(-\left[\theta_1 + \pi - arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\right]\right) = \pm 180(2n+1)$$

$$-\theta_1 - 180 + 30 - 90 = 180 \qquad \theta_1 = -420^{\circ}$$

$$\boxed{\theta_1 = -60^{\circ}}$$

Observe que o ângulo das assíntotas é idêntico ao ângulo de saída dos polos, o que significa que cada polo seguirá sua assíntota.

Observe ainda que dois polos cruzam o eixo real, porém, não chegam sobre o eixo real, ou seja, os polos que cruzam o eixo real **não caminham sobre ele**, portanto, não chegam, mas apenas atravessam, logo não há ângulo de chegada sobre o eixo real.

8. Determinar os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário.
Equação Característica
$1 + G(s)H(s) = 0$

$$1 + \frac{k}{(s-1)(s^2+4s+7)} = 0$$

$$\boxed{s^3 + 3s^2 + 3s + k - 7 = 0}$$

Usando o arranjo de Routh

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 3 \\
s^2 & 3 & k-7 \\
\hline
s^1 & b & \\
s^0 & 10 &
\end{array}
$$

$$b = \frac{9-k+7}{3}$$

Para haver oscilação, $b = 0$: $\frac{16-k}{3} = 0$

$\boxed{k = 16}$

O LR corta o eixo imaginário quando $k = 16$. Neste ponto a frequência é:

$3s^2 + 9 = 0$

$3(j\omega)^2 + 9 = 0$

$\boxed{\omega = \pm\sqrt{3}[rad/s]}$

9. Traçando o LR