CAP 3

CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS DE CONTROLE (ANALÓGICO)

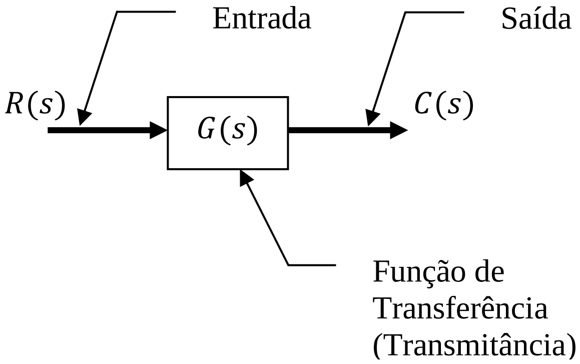
SUMÁRIO

3.1. INTRODUÇÃO

As características principais em sistemas de controle são abordadas neste capítulo, onde são tratados os assuntos relativos aos erros em sistemas de controle, sensibilidade e sistemas lineares.

3.2. ERRO NOS SISTEMAS DE CONTROLE

Um sistema de malha aberta (sistema direto) opera sem retroação e gera diretamente a saída em resposta a um sinal de entrada



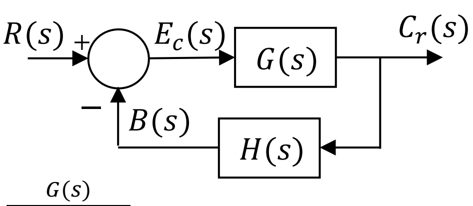
Um sistema de malha fechada usa uma medida do sinal de saída e a comparação com a saída desejada para gerar um sinal de erro que é aplicado ao atuador ou ao controlador, conforme o caso. Esse erro é chamado de **Erro do Comparador** ou **Erro Aplicado ao Controlador/Atuador** ou mesmo **Erro de Malha Fechada**.

Quando a saída de uma planta é comparada com o valor de referência (*set point*), o erro entre essas medidas é denominado de **Erro da Resposta da Planta** ou **Erro do Sistema**.

Quando a planta possui distúrbios, a contribuição do distúrbio na saída da planta é o **Erro da Resposta ao Distúrbio**.

3.2.1. ERRO DE MALHA FECHADA

Seja o Sistema de Malha Fechada abaixo:



A FT do sistema é $\frac{C_r(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

O erro aplicado ao atuador/controlador, no sistema de malha fechada é:

$$C_r(s) = E_c(s)G(s) \quad \Rightarrow \quad E_c(s) = \frac{C_r(s)}{G(s)}$$

Assim, da FTMF, tem-se para o **Erro de Malha Fechada**:

$$\boxed{E_c(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

Exemplo 1 – Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto seja

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Usando o Matlab, plote o gráfico do erro de malha fechada para uma entrada em degrau unitário.

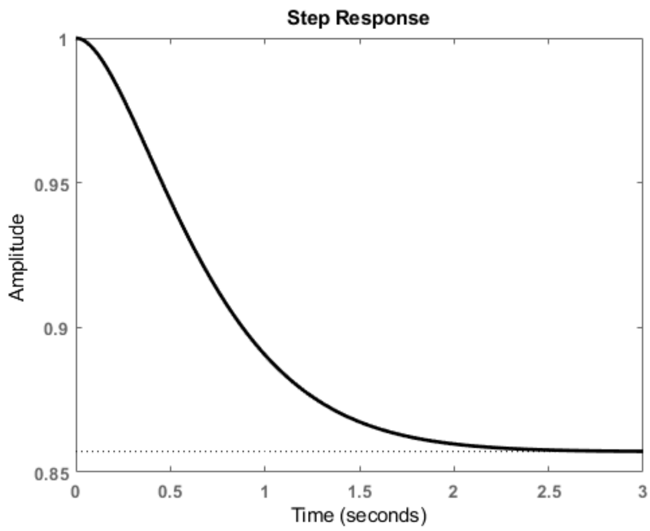
SOLUÇÃO

$$\frac{E_c(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{s^2 + 5s + 6}} = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 5s + 7}$$

$$E_c(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 5s + 7} R(s)$$

Command Window

```
>> Ec = tf([1 5 6],[1 5 7])

Ec =

  s^2 + 5 s + 6
  -------------
  s^2 + 5 s + 7

Continuous-time transfer function.

>> step(Ec)
fx >>
```



3.2.2. ERRO DA RESPOSTA DA PLANTA

O **Erro da Resposta da Planta** (ou **do Sistema**) é calculado conforme a equação abaixo:

$$\boxed{E_s(s) = R(s) - C_r(s)}$$

Considerando que a FT de uma planta é definida como:

$$T(s) = \frac{C_r(s)}{R(s)}$$

Então, o **Erro da Resposta da Planta** pode ser expresso pela equação:

$$\boxed{E_s(s) = R(s)(1 - T(s))}$$

Exemplo 2 – Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto seja

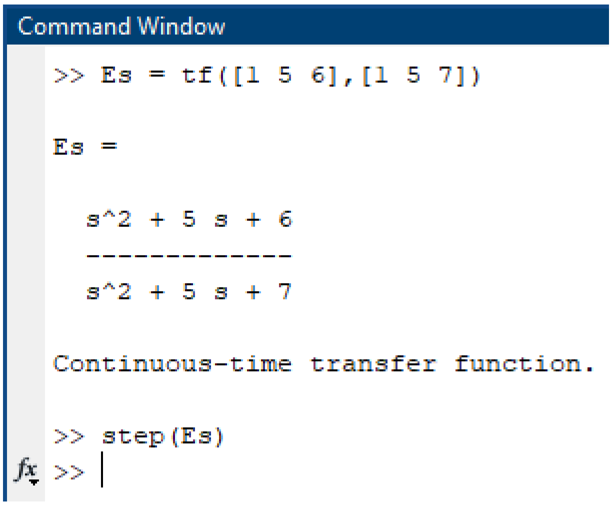
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Usando o Matlab, plote o gráfico do erro da resposta da planta para uma entrada em degrau unitário.

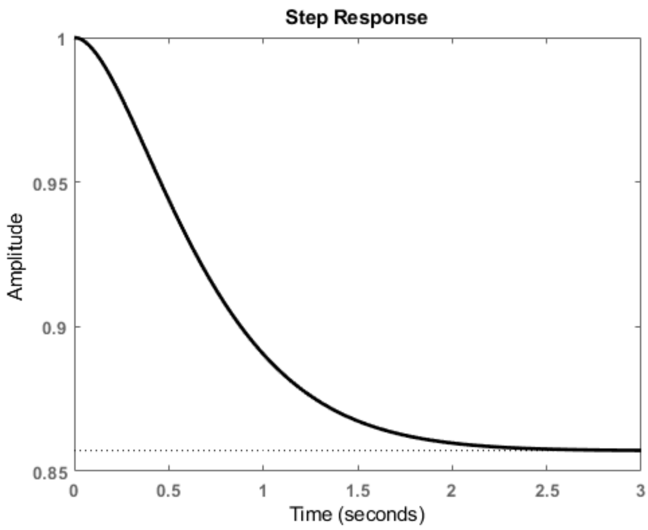
SOLUÇÃO

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{1}{s^2 + 5s + 6}}{1 + \dfrac{1}{s^2 + 5s + 6}} = \frac{1}{s^2 + 5s + 7}$$

$$E_s(s) = R(s)\big(1 - T(s)\big) = R(s)\left(1 - \frac{1}{s^2 + 5s + 7}\right) = R(s)\left(\frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 5s + 7}\right)$$

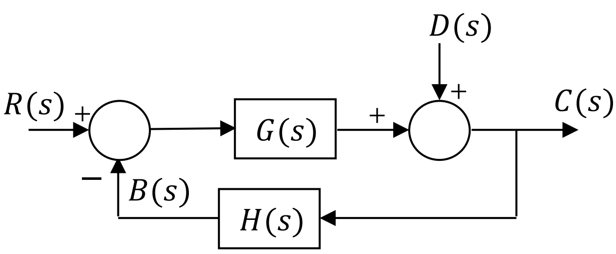



```
>> Es = tf([1 5 6],[1 5 7])

Es =

  s^2 + 5 s + 6
  -------------
  s^2 + 5 s + 7

Continuous-time transfer function.

>> step(Es)
>>
```



3.2.3. ERRO DA RESPOSTA AO DISTÚRBIO

Considere uma planta com distúrbio:



onde,

$$C(s) = C_r(s) + C_d(s)$$

Assim, o **Erro da Resposta ao Distúrbio** é exatamente o desvio $C_d(s)$ que ocorre na saída $C(s)$, ou seja, se não houvesse distúrbio, a saída seria apenas a resposta da contribuição da entrada $R(s)$.

Portanto, considerando que a FT do distúrbio de uma planta é definida como:

$$T_d(s) = \frac{C_d(s)}{D(s)}$$

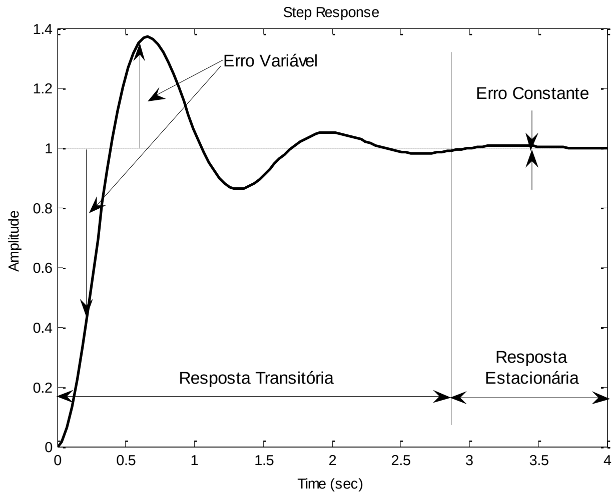
Então, o **Erro da Resposta ao Distúrbio** pode ser expresso pela equação:

$$\boxed{E_d(s) = T_d(s)D(s)}$$

3.2.4. ERRO DE ESTADO ESTACIONÁRIO

Conceitua-se o **Erro de Estado Estacionário** como aquele que ocorre na **Resposta Estacionária do Sistema** (ou **da Planta**). A resposta, $c(t)$, de um sistema de controle é dada pela equação:

$$c(t) = \underbrace{c_{tr}(t)}_{\text{Resposta Transitória}} + \underbrace{c_{ss}(t)}_{\text{Resposta Estacionária}}$$



Para cálculo do erro de estado estacionário, utiliza-se o Teorema do Valor Final, ou seja,

$$\boxed{e_{ss}(t) = \lim_{t\to\infty} e_s(t) = \lim_{s\to 0} sE_s(s) = E_{ss}(s)}$$

Para cálculo do erro de estado estacionário devido ao distúrbio:

$$\boxed{e_{ssd}(t) = \lim_{t\to\infty} e_d(t) = \lim_{s\to 0} sE_d(s) = E_{ssd}(s)}$$

Exemplo 3 – Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha fechada seja

$$T(s) = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Para uma entrada em degrau nesse sistema:

a) Calcule o erro da resposta da planta, e
b) Calcule o erro de malha fechada,
c) Compare e explique os porquês dos resultados das letras (a) e (b),
d) Calcule o erro de estado estacionário do sistema.

SOLUÇÃO

a)

$$E_s(s) = R(s)(1 - T(s))$$

$$E_s(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}\right)$$

$$E_s(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + as + b - Ks - b}{s^2 + as + b}\right)$$

$$E_s(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + (a - K)s}{s^2 + as + b}\right)$$

$$\boxed{E_s(s) = \frac{s + (a - K)}{s^2 + as + b}}$$

b)

É necessário obter a FTMA

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \Longrightarrow \quad G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{ks + b}{s^2 + s(a - k)}}$$

$$E_c(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1/s}{1 + G(s)}$$

$$E_c(s) = \frac{1/s}{1 + \dfrac{ks + b}{s^2 + s(a - k)}} = \frac{1/s}{\dfrac{s^2 + s(a - k) + ks + b}{s^2 + s(a - k)}} = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + s(a - k)}{s^2 + as + b}\right)$$

$$\boxed{E_c(s) = \frac{s + (a - k)}{s^2 + as + b}}$$

c) Os erros são iguais devido à realimentação ser unitária.

d)

$$E_{ss}(s) = \lim_{s \to 0} sE_s(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{s + (a - k)}{s^2 + as + b}\right)$$

$$\boxed{E_{ss}(s) = 0}$$

3.2.5. ERROS EM SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO UNITÁRIA

Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com a habilidade em seguir os sinais de entrada. Assim, um sistema de controle com realimentação unitária tem a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_c s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots \left(T_p s + 1\right)}$$

O polo de multiplicidade N no denominador é quem determina o tipo desse sistema, assim, um sistema é chamado do tipo 0 se $N = 0$, do tipo 1 se $N = 1$, e assim sucessivamente. Essa classificação é diferente da ordem do sistema.

Conforme o tipo aumenta, a precisão em regime permanente também aumenta, porém, agravando a estabilidade do sistema.

As constantes de erro estático são uma boa medida da precisão desses sistemas e descrevem a habilidade de um sistema com realimentação unitária para reduzir ou eliminar o erro estacionário. Eles representam os desvios em regime permanente das variáveis de saída. Assim, quanto mais altas as constantes, menor o erro estacionário.

3.2.5.1. CONSTANTE DE ERRO ESTÁTICO DE POSIÇÃO

O termo "posição" refere-se ao valor do parâmetro de saída. O erro é, então, definido para uma entrada em degrau como:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

3.2.5.2. CONSTANTE DE ERRO ESTÁTICO DE VELOCIDADE

O termo "velocidade" refere-se ao valor da taxa de variação do parâmetro de saída. O erro é, então, definido para uma entrada em rampa como:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

3.2.5.3. CONSTANTE DE ERRO ESTÁTICO DE ACELERAÇÃO

O termo "aceleração" refere-se ao valor da posição a uma entrada em aceleração. O erro é, então, definido para uma entrada em parábola unitária como:

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

O quadro abaixo apresenta o resumo dos valores de erro estacionário para sistemas com realimentação unitária.

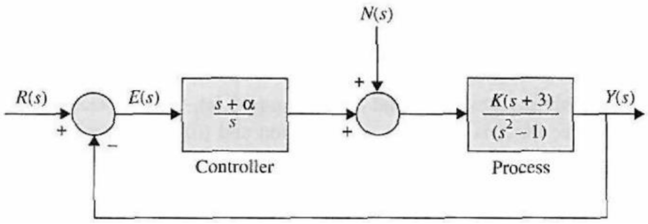
SISTEMAS	ENTRADAS		
	DEGRAU (K_p) $u(t) = 1$	RAMPA (K_v) $r(t) = t$	PARÁBOLA (K_a) $p(t) = \frac{1}{2}t^2$
Tipo 0	$e_{ss}(t) = \frac{1}{1 + K_p}$	$e_{ss}(t) = \infty, \quad K_v = 0$	$e_{ss}(t) = \infty, \quad K_a = 0$
Tipo 1	$e_{ss}(t) = 0, \quad K_p = \infty$	$e_{ss}(t) = \frac{1}{K_v}$	$e_{ss}(t) = \infty, \quad K_a = 0$
Tipo 2	$e_{ss}(t) = 0, \quad K_p = \infty$	$e_{ss}(t) = 0, \quad K_v = \infty$	$e_{ss}(t) = \frac{1}{K_a}$

Os sistemas com constantes infinitas são incapazes de seguir as respectivas entradas em regime permanente.

Os erros estáticos são indicativos do desempenho em regime permanente. Para melhorar o desempenho em regime permanente, é necessário aumentar o tipo do sistema, comprometendo a sua estabilidade.

Exemplo 4 – O Diagrama de Blocos de um sistema de controle LIT é mostrado abaixo, onde $r(t)$ é a entrada de referência e $n(t)$ é um distúrbio:

a. Encontre os valores de $e(t)$ no estado estacionário quando $n(t) = 0$ e quando $r(t) = tu(t)$.
b. Encontre o valor de $y(t)$ no estado estacionário quando $r(t) = 0$ e $n(t) = u(t)$.



SOLUÇÃO

a) Quando o problema não especifica o erro, deve-se considerar o Erro da Resposta da Planta, assim:

O sistema possui realimentação unitária e é do Tipo 1, portanto,

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s\left(\frac{K(s+\alpha)(s+3)}{s(s^2-1)}\right)} \qquad \boxed{e_{ss} = -\frac{1}{3K\alpha}}$$

b)

$$\left.\frac{Y(s)}{N(s)}\right|_{r=0} = \frac{\frac{K(s+3)}{s^2-1}}{1 + \frac{K(s+\alpha)(s+3)}{s(s^2-1)}} = \frac{Ks(s+3)}{s^3 + Ks^2 + [K(3+\alpha) - 1]s + 3\alpha K}$$

$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{Ks(s+3)}{s^3 + Ks^2 + [K(3+\alpha) - 1]s + 3\alpha K}\right)\frac{1}{s} = \frac{0}{3\alpha K}$$

$$\boxed{y_{ss} = 0}$$

3.3. SENSIBILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE

A sensibilidade de sistemas de controle é a relação entre a mudança na **FT do sistema** e a mudança na **FT do processo** para uma pequena mudança incremental. Assim, seja $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ a FT do sistema. A sensibilidade, $S_{processo}^{sistema}$ é:

$$S_G^T = \frac{\frac{\Delta T(s)}{T(s)}}{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}} = \frac{\frac{\partial T(s)}{T(s)}}{\frac{\partial G(s)}{G(s)}} \quad \rightarrow \quad \boxed{S_G^T = \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} \frac{G}{T}}$$

A equação acima pode ser aproximada por: $S_G^T = \frac{\partial \ln T(s)}{\partial \ln G(s)}$, assim, se definirmos $T(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)}$:

$$S_G^T = \frac{\partial \ln T\,(s)}{\partial \ln G\,(s)} = \frac{\partial \ln \frac{Num(s)}{Den(s)}}{\partial \ln G\,(s)} = \frac{\partial \ln Num\,(s)}{\partial \ln G\,(s)} - \frac{\partial \ln Den\,(s)}{\partial \ln G\,(s)} = S_G^{Num} - S_G^{Den}$$

$$\boxed{S_G^T = S_G^{Num} - S_G^{Den}}$$

OBS:

- **Sistemas de controle com retroação têm a capacidade de reduzir a sensibilidade do sistema.**
- **Quanto maior o valor de S_G^T maior é a influência de $G(s)$ no sistema $T(s)$.**

Exemplo 5 – Obtenha as equações de sensibilidade para um sistema genérico (a) de MF com realimentação negativa e (b) de MA.

SOLUÇÃO

a) Sistema de Malha Fechada com Realimentação Negativa

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$S_G^T = \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} \frac{G}{T}$$

$$S_G^T = \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right) \frac{G(s)}{\left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right)}$$

$$S_G^T = \left(\frac{1 + G(s)H(s) - G(s)H(s)}{(1 + G(s)H(s))^2}\right)(1 + G(s)H(s))$$

$$S_G^T = \left(\frac{1 + G(s)H(s) - G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}\right)$$

$$\boxed{S_G^T = \left(\frac{1}{1 + G(s)H(s)}\right)}$$

$$S_H^T = \frac{\partial T(s)}{\partial H(s)} \frac{H}{T}$$

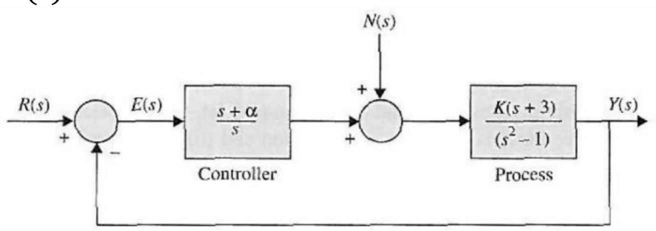
$$S_H^T = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right) \frac{H(s)}{\left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right)}$$

$$S_H^T = \left(\frac{-G(s)G(s)}{(1+G(s)H(s))^2}\right)\frac{H(s)(1+G(s)H(s))}{G(s)}$$
$$S_H^T = \left(\frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}\right)$$
$$\boxed{S_H^T = -\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

b) Sistema de Malha Aberta

$$T(s) = G(s)$$
$$S_G^T = \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)}\frac{G}{T}$$
$$S_G^T = \frac{\partial}{\partial G}(G(s))\frac{G(s)}{G(s)}$$
$$\boxed{S_G^T = 1}$$

Exemplo 6 – Para o Diagrama de Blocos do sistema de controle LIT mostrado abaixo, onde $r(t)$ é a entrada de referência e $n(t)$ é um distúrbio, calcule a Sensibilidade do sistema para os valores de α quando $r(t) = 0$ e $n(t) = u(t)$.

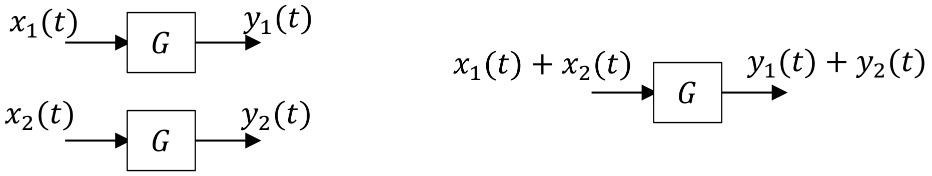


SOLUÇÃO

$$S_\alpha^T = S_H^T S_\alpha^H = \frac{\partial T}{\partial H}\frac{H}{T}\times\frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\alpha}{H} = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{\alpha}{T}$$
$$S_\alpha^T = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{\alpha}{T} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{Ks(s+3)}{s^3+Ks^2+[K(3+\alpha)-1]s+3\alpha K}\right)\frac{\alpha}{\left(\frac{Ks(s+3)}{s^3+Ks^2+[K(3+\alpha)-1]s+3\alpha K}\right)}$$
$$S_\alpha^T = \left(\frac{-Ks(s+3)(Ks+3K)}{(s^3+Ks^2+[K(3+\alpha)-1]s+3\alpha K)^2}\right)\frac{\alpha(s^3+Ks^2+[K(3+\alpha)-1]s+3\alpha K)}{Ks(s+3)}$$
$$\boxed{S_\alpha^T = \left(\frac{-\alpha K(s+3)}{s^3+Ks^2+[K(3+\alpha)-1]s+3\alpha K}\right)}$$

3.4. APROXIMAÇÃO LINEAR DE SISTEMAS FÍSICOS

Princípio da Superposição: Permite a soma das contribuições individuais das entradas e saídas de um sistema.

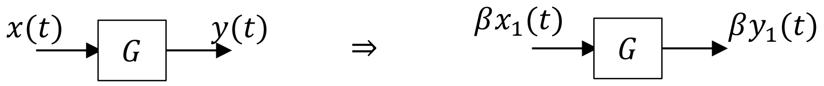


OBS: O princípio da superposição permite isolar outras entradas no sistema para considerar a influência de uma entrada específica. Essa característica é usada principalmente com sinais de distúrbios.

Passo-a-Passo:

1) Para um sistema $y(t) = Gx(t)$ substitua $x(t)$ por $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.
2) Desenvolva e arrume o sistema.
3) Substitua as entradas independentes por suas saídas correspondentes, ou seja, faça $Gx_1(t) = y_1(t)$ e $Gx_2(t) = y_2(t)$.
4) Verifique se a saída $y(t)$ é igual a $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
5) Se for igual, então é necessário verificar o critério de homogeneidade para saber se o sistema é linear.
6) Senão, o sistema é não-linear.

Princípio da Homogeneidade: Conservação da proporção da magnitude do sinal.



Passo-a-Passo:

1) Para um sistema $y(t) = Gx(t)$ substitua $x(t)$ por $x(t) = \beta x_1(t)$.
2) Desenvolva e arrume o sistema.
3) Substitua as entradas independentes por suas saídas correspondentes, ou seja, faça $G\beta x_1(t) = \beta y_1(t)$.
4) Verifique se a saída $y(t)$ é igual a $y(t) = \beta y_1(t)$
5) Se for igual, então é necessário verificar o critério da superposição para saber se o sistema é linear.
6) Senão, o sistema é não-linear.

"Um sistema é dito linear se satisfaz as propriedades de superposição e homogeneidade"

Exemplo 7 – Verifique se o sistema $y(t) = x^2(t)$ é linear.

SOLUÇÃO

Para aplicar o princípio da superposição, fazemos:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

assim,

$$y(t) = [x_1(t) + x_2(t)]^2$$
$$y(t) = x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t)$$

Substituindo as entradas $x_1^2(t) = y_1(t)$ e $x_2^2(t) = y_2(t)$

$$\boxed{y(t) = y_1(t) + 2x_1(t)x_2(t) + y_2(t)}$$

Observe que $y(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$

assim, o princípio da superposição não é satisfeito, logo, o **sistema é não linear**.

Exemplo 8 – Verifique se o sistema $y(t) = mx(t) + b$ é linear.

SOLUÇÃO

Para aplicar o princípio da homogeneidade, fazemos:

$$x(t) = \beta x_1(t)$$

assim,

$$y(t) = m\beta x_1(t) + b$$

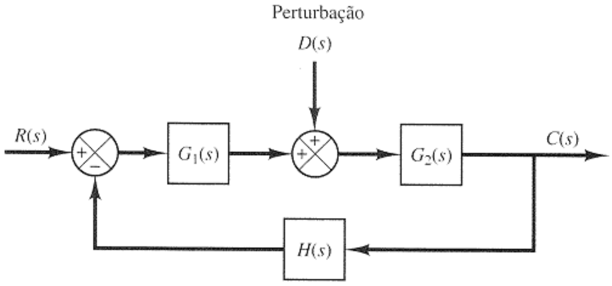
Substituindo a entrada $x_1(t) = \frac{y_1(t)-b}{m}$

$$y(t) = m\beta \frac{y_1(t) - b}{m} + b$$
$$y(t) = \beta(y_1(t) - b) + b$$
$$\boxed{y(t) = \beta y_1(t) + b(1 - \beta)}$$

Portanto, $y(t) \neq \beta y_1(t)$, não satisfazendo a condição de homogeneidade, logo, o **sistema é não linear**.

3.4.1. SISTEMAS LINEARES SUBMETIDOS A DISTÚRBIOS

A figura abaixo mostra um sistema linear de malha fechada submetido a um distúrbio.



Utilizando o princípio da superposição, o sinal de saída, $C(s)$, é obtido da seguinte forma:

a) Faz-se $D(s) = 0$ obtendo:

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

b) Faz-se $R(s) = 0$ obtendo:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

c) Soma-se os sinais de saída correspondentes a cada sinal de entrada.

$$C(s) = C_D(s) + C_R(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}(G_1(s)R(s) + D(s))$$

Observe que se $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ e $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ o efeito do distúrbio é suprimido e $C_R(s)/R(s)$ aproxima-se de $1/H(s)$, porém $C(s) = 0$. Isso mostra que qualquer sistema linear, nessa configuração, não permite a eliminação do ruído do sinal de saída.

3.4.2. "LINEARIZAÇÃO" DE SISTEMAS FÍSICOS

Sistemas não lineares podem ser modelados por funções de retas em torno de um ponto de operação, o que facilita o controle desses sistemas. Esse processo, erroneamente chamado de "Linearização de Sistemas" é na verdade uma "Afinização de Sistemas", ou seja, a substituição do modelo do sistema por uma função afim em um ponto de operação do sistema.

Para isso, usa-se a Série de Taylor em torno do ponto de operação para obter um modelo matemático de controle que é uma aproximação em linha (reta) da função real do sistema.

A relação de entrada e de saída de um sistema de controle pode ser escrita como:

$$y(t) = g(x(t))$$

Considerando o ponto de operação como x_0, podemos expandir a equação acima em Série de Taylor em torno de x_0.

$$y = g(x) = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

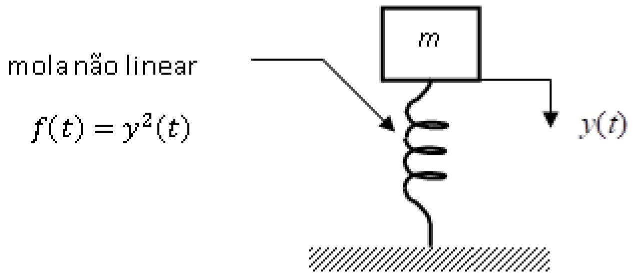
Uma aproximação razoável da equação acima compreende o uso da expansão até a primeira derivada, que consiste na equação da reta tangente ao ponto de aproximação, assim:

$$y = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!}$$

Arrumando,

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Exemplo 9 – Obtenha o modelo afim de controle do sistema abaixo em seu ponto de equilíbrio.



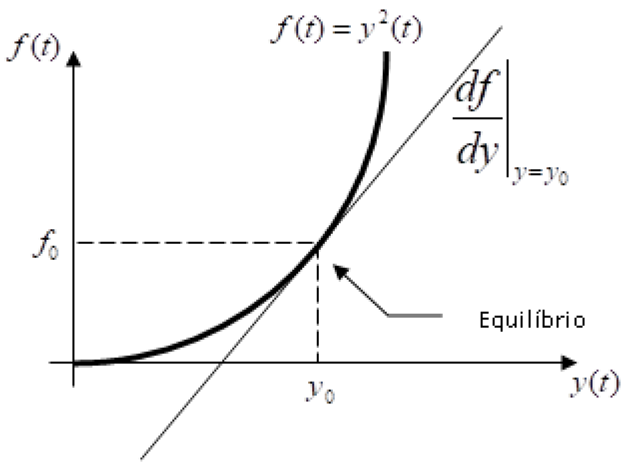
SOLUÇÃO

O ponto normal de operação é a posição de equilíbrio que ocorre quando a força da mola se iguala ao peso do bloco.

$$f_0 = mg$$

A posição de equilíbrio é: $f(t) = y^2(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sqrt{f(t)}$

$$y_0 = \sqrt{f_0} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \sqrt{mg}$$



Assim, o modelo afim para pequenos desvios em torno de y_0 é:

$$f(t) - f_0 = \left.\frac{df(t)}{dy(t)}\right|_{y(t)=y_0} (y(t) - y_0)$$

$$f(t) - mg = \left.\frac{d(y^2(t))}{dy(t)}\right|_{y(t)=y_0} \left(y(t) - \sqrt{mg}\right)$$

$$f(t) - mg = 2y(t)|_{y(t)=y_0}\left(y(t) - \sqrt{mg}\right)$$

$$f(t) - mg = 2y_0\left(y(t) - \sqrt{mg}\right)$$

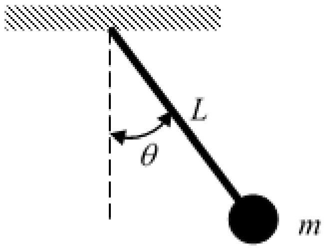
$$f(t) = mg + 2\sqrt{mg}\left(y(t) - \sqrt{mg}\right)$$

$$f(t) = mg + 2\sqrt{mg}y(t) - 2mg$$

$f(t) = 2\sqrt{mg}y(t) - mg$ que é o modelo de aproximação do sistema por uma reta em torno de y_0 para pequenas variações de $y(t)$.

OBS: O termo linear em inglês tem dois significados: o de linear obedecendo aos critérios da superposição e da homogeneidade; e o de linear no sentido de formar uma reta. Portanto, a linearização de sistemas deveria ser dita "afinização" de sistemas por proporcionar a elaboração de uma reta (função afim) em torno de um ponto de operação, mas alguns autores optam em manter o termo linear em português tendo os dois significados.

Exemplo 10 – Obtenha o modelo linear de controle do sistema abaixo.

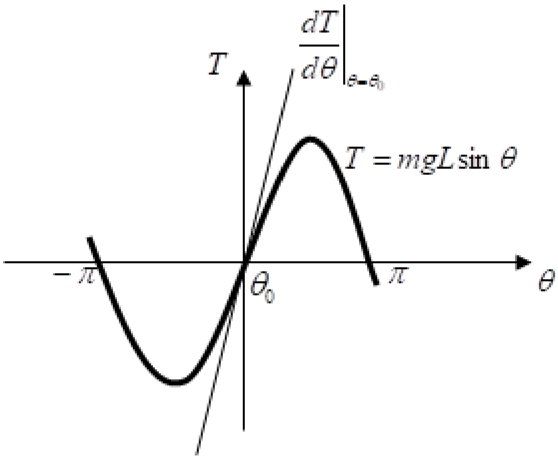


O torque aplicado à massa é: $T = mgL\,sin\,\theta$

SOLUÇÃO

A condição de equilíbrio do sistema ocorre para $\theta_0 = 0^o$.

O torque no equilíbrio é $T_0 = mgL\,sin\,\theta_0 = mgL\,sin\,0^{\,o}$ $\therefore$ $T_0 = 0[N.m]$



Assim, o modelo linear para pequenos desvios em torno de θ_0 é:

$$T - T_0 = \left.\frac{dT}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

$$T - 0 = \left.\frac{d(mgL\,sin\,\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} (\theta - 0)$$

$T = mgL\,cos\,\theta|_{\theta=0}(\theta)$

$T = mgL\theta\,cos\,0\,^{o}$

$\boxed{T = mgL\theta}$

3.5. MATLAB

Funções úteis: *diff*, *limite*, *syms*.

3.6. LISTA DE EXERCÍCIOS

Livro DORF 8ªed: E4.1 a E4.8, P4.1 a P4.17, PA4.1 a PA4.8 e PP4.2.

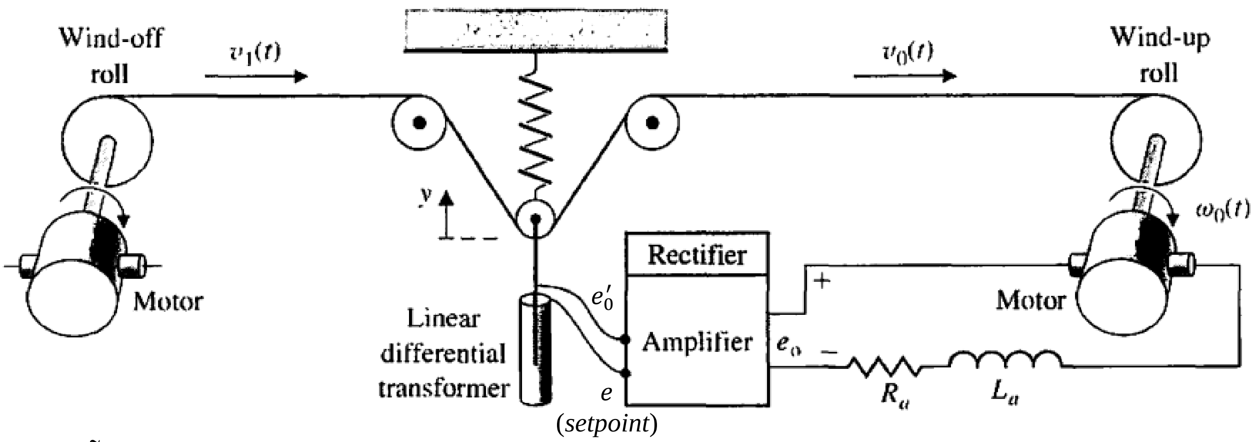
3.7. EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

(Dorf P4.10 12ed corrigido) Em uma planta de processamento de papel é importante manter a tensão mecânica constante sobre a folha contínua de papel entre os rolos de desenrolar e enrolar. A tensão mecânica varia à medida que o diâmetro das bobinas varia, sendo necessário ajustar a velocidade do motor do cilindro de enrolamento para manter a tesão aproximadamente constante. Se a velocidade do motor de enrolar não estiver controlada, a velocidade v_0 diminui e a tensão mecânica de tração sobre o papel cai proporcionalmente a diferença das velocidades. A combinação dos três roletes e da mola fornece uma medida da tensão mecânica aplicada no papel. A força da mola é $f_m = k_1 y$ e o conjunto transformador diferencial linear, retificador e amplificador pode ser representado por $e_0' = -k_2 y$. Por conseguinte, uma medida de tensão mecânica é descrita pela relação $2T = f_m$, onde y, é o deslocamento da mola a partir da condição de equilíbrio e T é a componente vertical do desvio de tensão a partir da condição de equilíbrio. A constante de tempo do motor é $\tau = L_a/R_a$ e a velocidade tangencial do cilindro de enrolar é $v_0 = 2\omega_0$. A equação do motor é, então:

$$E_0(s) = \frac{1}{K_m}[\tau s + 1]\omega_0(s) + k_3 \Delta T(s)$$

onde, $\Delta T(s)$ é a perturbação de tensão.

a) Esboçar o diagrama de blocos do sistema de malha fechada com perturbações.
b) Determinar a sensibilidade do sistema à constante do motor K_m.
c) Determinar o erro estacionário de tensão quando ocorrer uma perturbação em degrau na velocidade de entrada, $\Delta V_1(s) = A/s$.



SOLUÇÃO

a)

Uma variação nas velocidades de enrolar e desenrolar gera uma variação na tensão de tração do papel. Assim,

$$v(t) = v_0(t) - v_1(t) = kT(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = v_0(t) - \{v_1(t) + \Delta v_1(t)\} = k\frac{dT(t)}{dt}$$

$$\boxed{V_0(s) - \{V_1(s) + \Delta V_1(s)\} = ksT(s)}$$

Da equação do motor:

$$\boxed{\omega_0(s) = \frac{K_m}{\tau s + 1}[E_0(s) - k_3 \Delta T(s)]}$$

Da medida de tensão e transformador diferencial:
$2T(t) = f_m = k_1 y(t)$

$$\boxed{Y(s) = \frac{2}{k_1}T(s)}$$

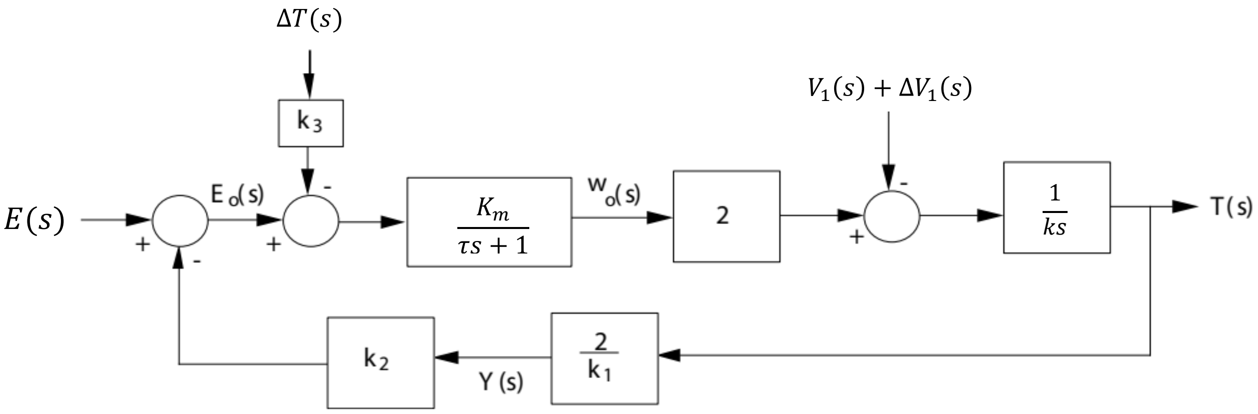
O ajuste da tensão mecânica a ser aplicado no papel é feita a partir de um valor de referência da tensão elétrica no transformador diferencial. Assim um desvio em torno do *set point* de tensão, $E(s)$, no transformador diferencial, permite a atuação do motor de enrolamento para manter uma certa tração na mola de forma a garantir a tensão mecânica desejada.

A tensão elétrica diferencial é dada por:
$E_0(s) = E(s) - E_0'(s)$

A relação de transformação do deslocamento em tensão elétrica é $e_0' = -k_2 y$, portanto,

$$\boxed{E_0(s) = E(s) - k_2 Y(s)}$$

O diagrama de blocos:



b) Sensibilidade
A FTMF do sistema é:

$$T_{MF}(s) = \frac{T(s)}{E(s)} = \frac{\frac{2K_m}{ks(\tau s + 1)}}{1 + \left(\frac{2K_m}{ks(\tau s + 1)}\right)\left(\frac{2k_2}{k_1}\right)} = \frac{2k_1 K_m}{kk_1 s(\tau s + 1) + 4k_2 K_m} = \frac{2\,K_m/k}{s(\tau s + 1) + \frac{4k_2 K_m}{kk_1}}$$

$$\boxed{T_{MF}(s) = \frac{2\,K_m/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2 K_m}{kk_1}}}$$

$$S_{K_m}^{T_{MF}} = \frac{\partial T_{MF}}{\partial K_m}\frac{K_m}{T_{MF}} = \frac{\partial}{\partial K_m}\left(\frac{2\,K_m/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2 K_m}{kk_1}}\right)\frac{K_m}{\left(\frac{2\,K_m/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2 K_m}{kk_1}}\right)}$$

$$S_{K_m}^{T_{MF}} = \frac{\frac{2}{k}\left(\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}\right) - \frac{2}{k}K_m\frac{4k_2}{kk_1}}{\left(\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}\right)^2} \frac{1}{\left(\frac{\frac{2}{k}}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}}\right)}$$

$$S_{K_m}^{T_{MF}} = \frac{\left(\tau s^2 + s + K_m\frac{4k_2}{kk_1}\right) - K_m\frac{4k_2}{kk_1}}{\tau s^2 + s + K_m\frac{4k_2}{kk_1}} = \frac{\tau s^2 + s + K_m\frac{4k_2}{kk_1} - K_m\frac{4k_2}{kk_1}}{\tau s^2 + s + K_m\frac{4k_2}{kk_1}}$$

$$\boxed{S_{K_m}^{T_{MF}} = \frac{\tau s^2 + s}{\tau s^2 + s + K_m\frac{4k_2}{kk_1}}}$$

c) Erro estacionário

$$\frac{T(s)}{V_1(s)} = \frac{-\frac{1}{ks}}{1 + \frac{1}{ks}\left(\frac{2k_2}{k_1}\right)\left(\frac{2K_m}{\tau s + 1}\right)} = \frac{-k_1(\tau s + 1)}{kk_1 s(\tau s + 1) + 4k_2K_m} = \frac{-k_1(\tau s + 1)}{kk_1\tau s^2 + kk_1 s + 4k_2K_m}$$

$$\boxed{\frac{T(s)}{V_1(s)} = \frac{-(\tau s + 1)/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}}}$$

$$T(s) = \frac{-(\tau s + 1)/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}} V_1(s)$$

$$\Delta T(s) = \frac{-(\tau s + 1)/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}} \Delta V_1(s)$$

$$\Delta T(s) = \frac{-(\tau s + 1)/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}} \left(\frac{A}{s}\right)$$

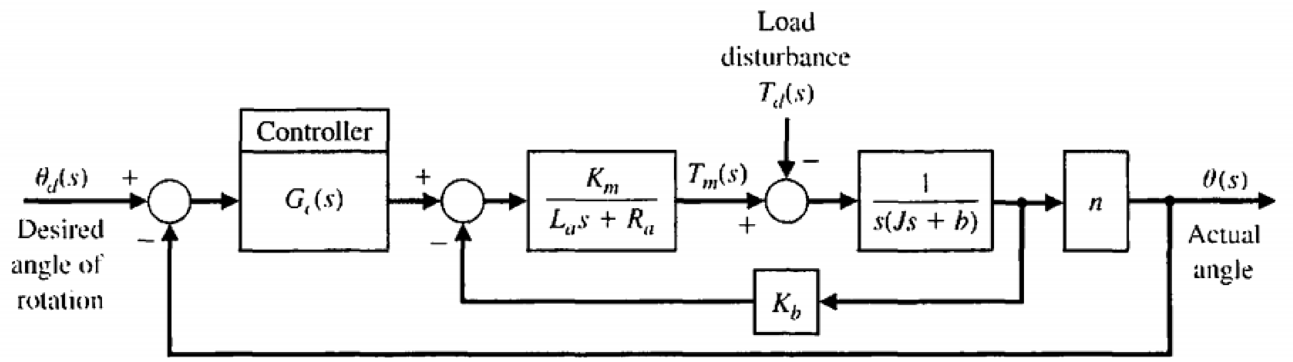
$$\Delta T(\infty) = \lim_{s\to 0} s\Delta T(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{-(\tau s + 1)/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}}\right)\left(\frac{A}{s}\right)$$

$$\Delta T(\infty) = \lim_{s\to 0} A\left(\frac{-(\tau s + 1)/k}{\tau s^2 + s + \frac{4k_2K_m}{kk_1}}\right)$$

$$\Delta T(\infty) = A\left(\frac{-\frac{1}{k}}{\frac{4k_2K_m}{kk_1}}\right) = A\left(\frac{-1}{\frac{4k_2K_m}{k_1}}\right)$$

$$\boxed{\Delta T(\infty) = \frac{-Ak_1}{4k_2K_m}}$$

(AP4.2 Dorf 12ed) O diagrama de blocos de um sistema é mostrado abaixo. O torque de distúrbio, $T_d(s)$, representa o efeito da carga. Determine o erro de estado estacionário quando o ângulo de entrada desejado é um degrau, $\theta_d(s) = A/s$, $G_c(s) = K$, e o distúrbio da carga é zero. Quando $\theta_d(s) = 0$ e o efeito da carga é $T_d(s) = M/s$, determine o erro de estado estacionário quando (a) $G_c(s) = K$ e (b) $G_c(s) = K/s$.



SOLUÇÃO

Erro de estado estacionário quando o ângulo de entrada desejado é um degrau, $\theta_d(s) = A/s$, $G_c(s) = K$, e o distúrbio da carga é zero.

$$G(s) = G_c(s)\frac{\left(\frac{K_m}{L_a s + R_a}\right)\left(\frac{1}{s(Js+b)}\right)}{1 + K_b\left(\frac{K_m}{L_a s + R_a}\right)\left(\frac{1}{s(Js+b)}\right)} = G_c(s)\frac{\frac{K_m}{s(L_a s + R_a)(Js+b)}}{\frac{s(L_a s + R_a)(Js+b) + K_b K_m}{s(L_a s + R_a)(Js+b)}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{K_m}{s(L_a s + R_a)(Js+b) + K_b K_m}G_c(s)}$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{nG(s)}{1 + nG(s)}$$

$$E(s) = \theta_d(s)\left(1 - \frac{\theta(s)}{\theta_d(s)}\right) = \frac{A}{s}\left(1 - \frac{nG(s)}{1 + nG(s)}\right) = \frac{A}{s}\left(\frac{1}{1 + nG(s)}\right)$$

$$E(s) = \frac{A}{s}\left(\frac{1}{1 + n\left(\frac{K_m}{s(L_a s + R_a)(Js+b) + K_b K_m}G_c(s)\right)}\right)$$

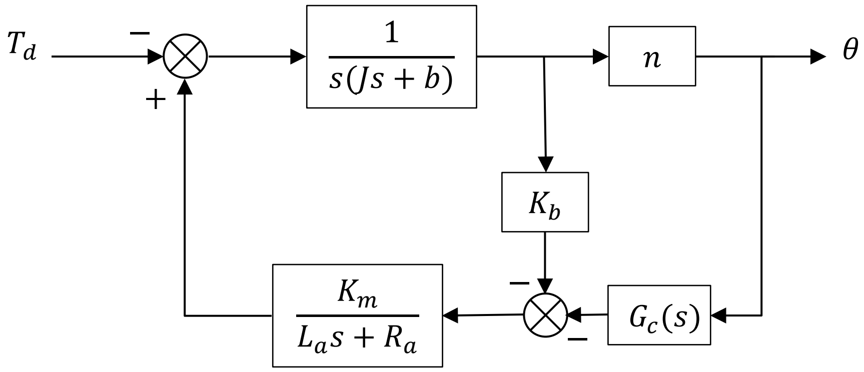
$$E(s) = \frac{A}{s}\left(\frac{1}{1 + n\left(\frac{K_m K}{s(L_a s + R_a)(Js+b) + K_b K_m}\right)}\right)$$

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{A}{s}\left(\frac{1}{1 + n\left(\frac{K_m K}{s(L_a s + R_a)(Js+b) + K_b K_m}\right)}\right) = \frac{A}{1 + n\left(\frac{K_m K}{K_b K_m}\right)}$$

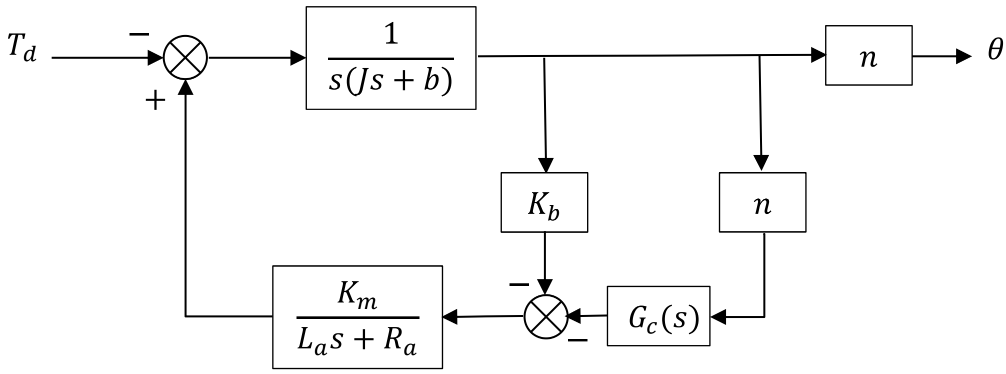
$$e_{ss}(\infty) = \frac{A}{1 + n\left(\frac{K}{K_b}\right)} \quad \rightarrow \quad \boxed{e_{ss}(\infty) = \frac{AK_b}{K_b + nK}}$$

Quando $\theta_d(s) = 0$ e o efeito da carga é $T_d(s) = M/s$, determine o erro de estado estacionário:

Arrumando o diagrama de blocos



Fazendo um ajuste



Assim,

$$H(s) = -\left(\frac{K_m}{L_a s + R_a}\right)(K_b + nG_c(s))$$

$$\frac{\theta(s)}{-T_d(s)} = n\frac{\frac{1}{s(Js+b)}}{1 - \frac{1}{s(Js+b)}H(s)}$$

$$\frac{\theta(s)}{T_d(s)} = \frac{\frac{-n}{s(Js+b)}}{1 + \frac{1}{s(Js+b)}\left(\frac{K_m}{L_a s + R_a}\right)(K_b + nG_c(s))}$$

$$\frac{\theta(s)}{T_d(s)} = \frac{\frac{-n}{s(Js+b)}}{\frac{s(Js+b)(L_a s + R_a) + K_m(K_b + nG_c(s))}{s(Js+b)(L_a s + R_a)}} = \frac{-n(L_a s + R_a)}{s(Js+b)(L_a s + R_a) + K_m(K_b + nG_c(s))}$$

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{T_d(s)} = \frac{-n(L_a s + R_a)}{s(Js+b)(L_a s + R_a) + K_m K_b + nK_m G_c(s)}}$$

a) $G_c(s) = K$

$T_d(s)$ é um distúrbio em degrau ($T_d(s) = M/s$), e em regime, gera o seguinte sinal de erro na saída:

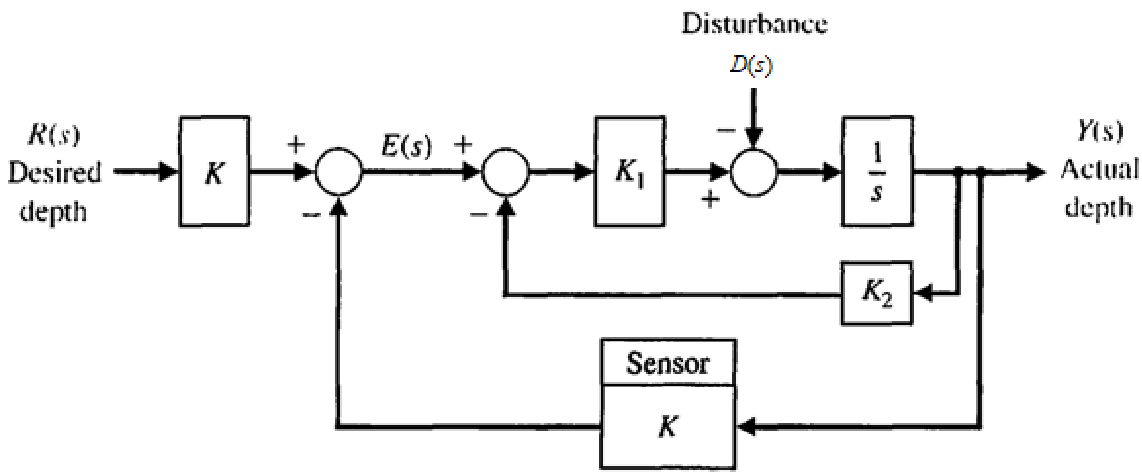
$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\theta(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{-n(L_a s + R_a)}{s(Js+b)(L_a s + R_a) + K_m K_b + nK_m G_c(s)}\right)\frac{M}{s}$$
$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} M\left(\frac{-n(L_a s + R_a)}{s(Js+b)(L_a s + R_a) + K_m K_b + nK_m K}\right)$$
$$e_{ss}(\infty) = M\left(\frac{-nR_a}{K_m K_b + nK_m K}\right)$$
$$\boxed{e_{ss}(\infty) = \frac{-MnR_a}{K_m(K_b + nK)}}$$

b) $G_c(s) = K/s$

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\theta(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{-n(L_a s + R_a)}{s(Js+b)(L_a s + R_a) + K_m K_b + nK_m G_c(s)}\right)\frac{M}{s}$$
$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} M\left(\frac{-n(L_a s + R_a)}{s(Js+b)(L_a s + R_a) + K_m K_b + nK_m \frac{K}{s}}\right)$$
$$e_{ss}(\infty) = M\left(\frac{-nR_a}{K_m K_b + \infty}\right)$$
$$\boxed{e_{ss}(\infty) = 0}$$

(E4.9 Dorf 12ed) Um veículo submersível pequeno possui um sistema de controle de profundidade como mostrado no diagrama abaixo.

a) Determine $T(s) = Y(s)/R(s)$
b) Determine $S_{K_1}^T$ e S_K^T
c) Determine $e_{ss}(t)$ devido a $D(s) = 1/s$
d) Calcule a resposta $y(t)$ para uma entrada em degrau $R(s) = 1/s$ quando $K = K_2 = 1$ e $1 < K_1 < 10$. Selecionar K_1 para a resposta mais rápida.



SOLUÇÃO

a) Fazendo $D(s) = 0$, e aplicando Mason, temos:

$P_1 = KK_1/s$
$\Delta_1 = 1$

$L_1 = -K_1K_2/s$
$L_2 = -KK_1/s$

$\Delta = 1 + L_1 + L_2$

$$T(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{KK_1/s}{1 + K_1K_2/s + KK_1/s}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KK_1}{s + K_1(K + K_2)}}$$

b)

$$S_{K_1}^T = \frac{\partial T(s)}{\partial K_1} \cdot \frac{K_1}{T(s)} = \frac{\partial}{\partial K_1}\left\{\frac{KK_1}{s + K_1(K + K_2)}\right\} \cdot \frac{K_1}{\frac{KK_1}{s + K_1(K + K_2)}}$$

$$S_{K_1}^T = \frac{K\{s + K_1(K + K_2)\} - KK_1\{K + K_2\}}{\{s + K_1(K + K_2)\}^2} \cdot \frac{s + K_1(K + K_2)}{K}$$

$$S_{K_1}^T = \frac{\{s + K_1(K + K_2)\} - K_1\{K + K_2\}}{s + K_1(K + K_2)}$$

$$\boxed{S_{K_1}^T = \frac{s}{s + K_1(K + K_2)}}$$

$$S_{K_1}^T = \frac{\partial T(s)}{\partial K} \cdot \frac{K}{T(s)} = \frac{\partial}{\partial K}\left\{\frac{KK_1}{s + K_1(K + K_2)}\right\} \cdot \frac{K}{\frac{KK_1}{s + K_1(K + K_2)}}$$

$$S_{K_1}^T = \frac{K_1\{s + K_1(K + K_2)\} - KK_1\{K_1\}}{\{s + K_1(K + K_2)\}^2} \cdot \frac{s + K_1(K + K_2)}{K_1}$$

$$S_{K_1}^T = \frac{\{s + K_1(K + K_2)\} - KK_1}{s + K_1(K + K_2)}$$

$$\boxed{S_{K_1}^T = \frac{s + K_1K_2}{s + K_1(K + K_2)}}$$

c) Fazendo $R(s) = 0$, e aplicando Mason, temos:

$P_1 = -1/s$
$\Delta_1 = 1$

$L_1 = -K_1K_2/s$
$L_2 = -KK_1/s$

$\Delta = 1 + L_1 + L_2$

$$T_d(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1/s}{1 + K_1K_2/s + KK_1/s}$$

$$\boxed{T_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{-1}{s + K_1(K + K_2)}}$$

O problema pede $e_{ss}(t)$ a partir de $E(s)$ na posição indicada no diagrama, logo:

$$E_s(s) = -KY(s) = -K\left(\frac{-1}{s + K_1(K + K_2)}\right)D(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{K}{s + K_1(K + K_2)}\right)$$

$$e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left(\frac{K}{s + K_1(K + K_2)}\right)$$

$$\boxed{e_{ss}(t) = \frac{K}{K_1(K + K_2)}}$$

d)

$$Y(s) = \frac{KK_1}{s + K_1(K + K_2)}R(s) = \frac{K_1}{s + 2K_1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s(s + 2K_1)}$$

Fazendo a Transformada Inversa de Laplace,

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{2K_1t})u(t)}$$

Para resposta mais rápida, deve-se escolher o maior valor de K_1 do intervalo, portanto, $K_1 = 10$.