

CAP 6

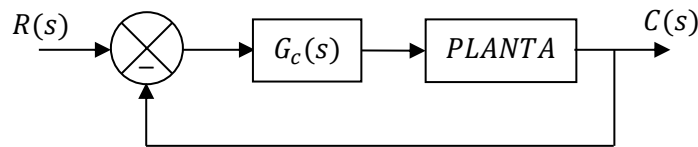
SINTONIA DE CONTROLADORES PID

SUMÁRIO

6.1.	INTRODUÇÃO.....	2
6.2.	SINTONIA DE CONTROLADORES PID	3
6.3.	CRITÉRIOS DE DESEMPENHO PARA SISTEMAS DE MALHA FECHADA.....	4
6.3.1.	ÍNDICES DE DESEMPENHO DE CONTROLADORES	4
6.3.1.1.	ISE (<i>INTEGRAL OF SQUARE ERROR</i>).....	4
6.3.1.2.	IAE (<i>INTEGRAL OF THE ABSOLUTE MAGNITUDE OF THE ERROR</i>).....	4
6.3.1.3.	ITAE (<i>INTEGRAL OF TIME MULTIPLIED BY ABSOLUTE ERROR</i>)	5
6.3.1.4.	ITSE (<i>INTEGRAL OF TIME MULTIPLIED BY THE SQUARED ERROR</i>).....	5
6.4.	MÉTODOS DE PROJETO PID BASEADOS NO MODELO DO PROCESSO	8
6.4.1.	MÉTODO DA SÍNTESE DIRETA	8
6.4.1.1.	CONTROLE PERFEITO	9
6.4.1.2.	RESPOSTAS DE 1ª ORDEM SEM ATRASO DE TEMPO	9
6.4.1.3.	RESPOSTAS DE 1ª ORDEM COM ATRASO DE TEMPO	10
6.4.1.4.	PROCESSOS DE 1ª ORDEM COM ATRASO DE TEMPO	12
6.4.1.5.	PROCESSOS DE 2ª ORDEM COM ATRASO DE TEMPO	14
6.4.2.	MÉTODO DE CONTROLE DO MODELO INTERNO (IMC).....	15
6.4.3.	MÉTODO DE PROJETO DE PID A PARTIR DE PARÂMETROS DESEJADOS	18
6.5.	MÉTODOS DE PROJETO PID NÃO BASEADOS NO MODELO DO PROCESSO	20
6.5.1.	MÉTODOS DE ZIEGLER-NICHOLS	21
6.5.2.	MÉTODO DE AUTO-SINTONIA ON-OFF (<i>RELAY AUTO-TUNING</i>).....	27
6.6.	MÉTODO DE PROJETO DO PID DIGITAL	29
6.7.	SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS.....	30

6.1. INTRODUÇÃO

Mais da metade dos controladores industriais em uso emprega sistemas PID (Proporcional – Derivativo – Integrador).



A equação geral do PID é:

$$PID = G_c(s) = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

onde:

$K_p \rightarrow$ Constante do Controle Proporcional.

$K_d \rightarrow$ Constante do Controle Derivativo.

$K_i \rightarrow$ Constante do Controle Integral.

Essas constantes também podem ser representadas em função das constantes de tempo de derivação (τ_D) e de integração (τ_I). Nesse caso o ganho proporcional é denominado de k_c .

$$K_p = k_c$$

$$K_D = k_c \tau_D$$

$$K_I = k_c / \tau_I$$

As ações PID afetam o desempenho de sistemas de controle da seguinte forma:

CONTROLE PROPORCIONAL

- Existe erro estacionário, ou residual, na resposta ao degrau.
- Pode ser usado para estabilizar um sistema.

**OBS: Veja ex.
A10.1 pág 593
OGATA 4ª Ed.**

CONTROLE DERIVATIVO

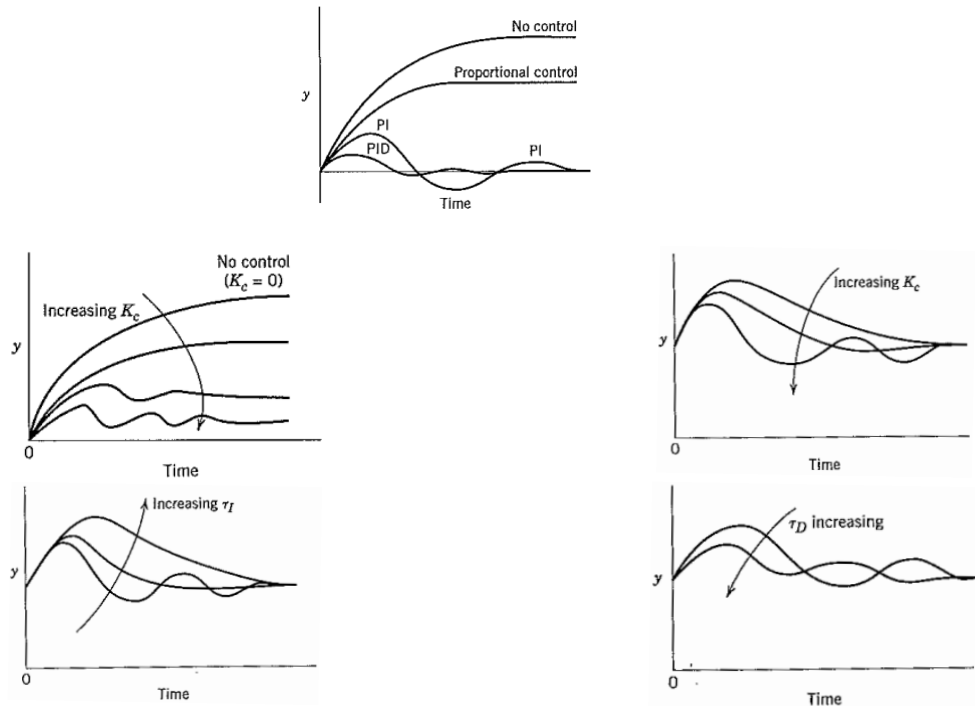
- Controlador de alta sensibilidade quando associado ao proporcional.
- Responde à taxa de variação do erro.
- Prevê o erro atuante e inicia uma ação corretiva antecipada, tendendo a aumentar a estabilidade do sistema.
- Não afeta diretamente o erro estacionário, mas aumenta o amortecimento permitindo maior ganho, o que resulta em maior precisão em regime permanente.
- Devido ao controle derivativo atuar sobre a variação do erro, ele nunca é usado sozinho, mas sempre combinado com o controle Proporcional ou o Integral.

CONTROLE INTEGRAL

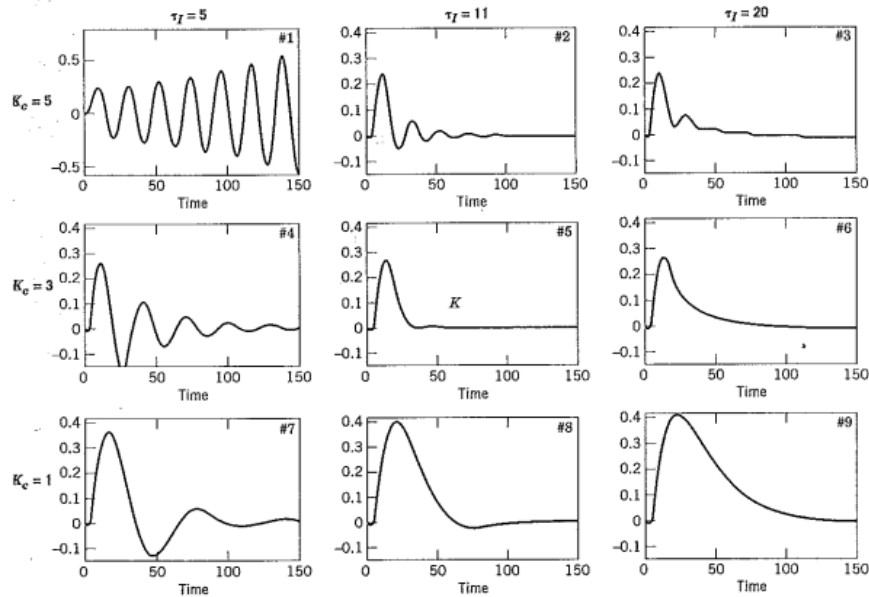
- O sinal de controle (saída do controlador) em qualquer instante é a área sob a curva do sinal de erro atuante.
- Remove o erro estacionário, mas pode conduzir a uma resposta oscilatória que cresce ou decresce.

6.2. SINTONIA DE CONTROLADORES PID

Dependendo da escolha dos parâmetros de sintonia do controlador, e do próprio tipo de controlador, um sistema de controle pode fornecer diferentes respostas:



Ex. Um sistema de 1ª ordem com atraso e um controlador PI resulta as seguintes respostas ao degrau baseadas nos valores de k_c e τ_I :



Observe que:

- com $k_c = 5$ e $\tau_I = 5[s]$ o sistema é instável.
- com $k_c = 3$ e $\tau_I = 11[s]$ o sistema apresenta a melhor resposta.
- a medida que k_c aumenta ou τ_I diminui, a resposta ao degrau se torna mais agressiva.

6.3. CRITÉRIOS DE DESEMPENHO PARA SISTEMAS DE MALHA FECHADA

A função de sistemas com realimentação é garantir que a malha fechada proporcione características desejadas tanto na dinâmica como no regime estacionário da resposta do sistema. Idealmente é desejado que a resposta do sistema de malha fechada satisfaça os seguintes critérios de desempenho:

- O sistema de malha fechada deve ser estável.
- Os efeitos do distúrbio devem ser minimizados (rejeição ao distúrbio).
- Respostas rápidas e suaves para as mudanças de *set-point* (*set-point tracking*).
- Eliminação do erro de estado estacionário (*offset*).
- Evitar excessivas ações de controle.
- O sistema de controle deve ser robusto¹.

Todavia, não é possível obter todas essas qualidades simultaneamente em um sistema. Por exemplo, tipicamente o controle conservador (pequenos valores de k_c e grandes valores de τ_I) leva a uma boa robustez, mas tende a causar um desempenho² pobre no sistema.

6.3.1. INDICES DE DESEMPENHO DE CONTROLADORES

Índices de desempenho são medidas quantitativas de desempenho de sistemas de controle necessários para comparação e otimização paramétrica dos sistemas modernos. O objetivo é melhorar o projeto de sistemas de controle.

Por exemplo, um **sistema de controle ótimo**, é aquele cujos parâmetros do sistema são ajustados de modo que o índice de desempenho alcance um valor extremo, comumente um valor mínimo.

6.3.1.1. ISE (*Integral of Square Error*)

O índice ISE – Integral do quadrado do erro – é definido como:

$$ISE = \int_0^{t_f} e^2(t) dt$$

onde t_f é um tempo finito escolhido arbitrariamente, mas normalmente é escolhido o tempo de assentamento, t_s . O critério ISE penaliza grandes erros e promove ajustes mais agressivos.

6.3.1.2. IAE (*Integral of the Absolute magnitude of the Error*)

O índice IAE – Integral do valor absoluto do erro – é definido como:

$$IAE = \int_0^{t_f} |e(t)| dt$$

Bastante útil para estudos de simulação em computador. O critério IAE produz ajustes de controle entre o ITAE e o ISE.

¹ Um sistema de controle é robusto quando é insensível às mudanças nas condições do processo e na imprecisão do modelo do processo.

² Um sistema de controle exibe alto grau de desempenho se ele provê respostas rápidas e suaves aos distúrbios e se as mudanças de *set-point* ocorrem com pouca ou nenhuma oscilação.

6.3.1.3. ITAE (*Integral of Time multiplied by Absolute Error*)

O índice ITAE – Integral do tempo multiplicado pelo valor absoluto do erro – é definido como:

$$ITAE = \int_0^{t_f} t|e(t)|dt$$

Bastante útil para reduzir grandes erros iniciais no valor da integral de desempenho, bem como enfatizar erros que acontecem mais tarde na resposta. O critério ITAE penaliza erros que persistem por longos períodos. Em geral, o ITAE é o critério preferido porque ele usualmente resulta em ajustes mais conservadores de controle, em contraste com o ISE.

6.3.1.4. ITSE (*Integral of Time multiplied by the Squared Error*)

O índice ITSE – Integral do tempo multiplicado pelo quadrado do erro – é definido como:

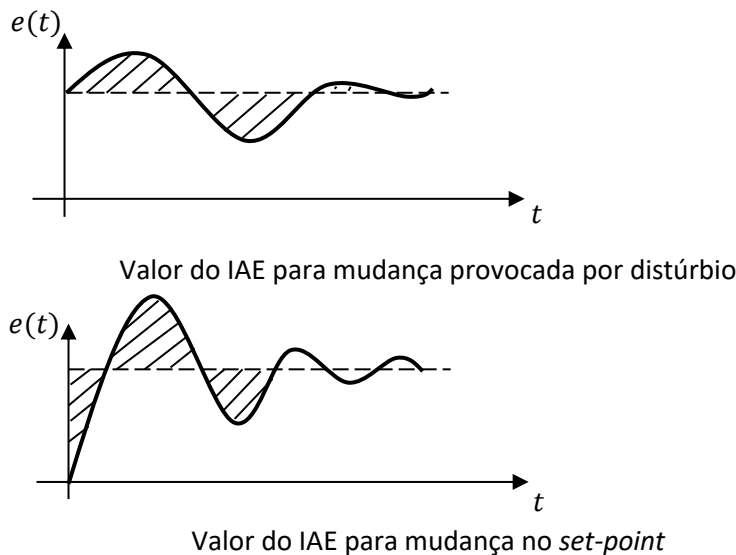
$$ITSE = \int_0^{t_f} te^2(t)dt$$

Semelhante ao ITAE.

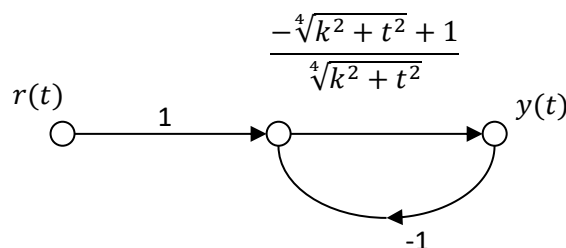
O ITAE oferece a melhor seletividade entre os índices de desempenho.

A minimização do IAE e do ISE é quase sempre de significado prático, ou seja, relacionada diretamente a uma medida física, como a minimização do consumo de combustível em um veículo.

Os critérios podem servir para avaliar os ajustes do controle quanto às mudanças provocadas por distúrbios ou mudanças de *set-point*.



Exemplo 1 – Um sistema de controle com retroação é mostrado do DFS abaixo, obtenha o valor de k que leve o sistema a um desempenho ótimo a uma resposta ao degrau.



SOLUÇÃO

Do diagrama acima, temos: $\frac{y(t)}{r(t)} = -(k^2 + t^2)^{1/4} + 1$.

Para uma entrada em degrau, a saída é: $y(t) = -(k^2 + t^2)^{1/4} + 1$.

O erro, nesse caso, é

$$e(t) = 1 - y(t)$$

$$e(t) = (k^2 + t^2)^{1/4}$$

Não foi especificado o índice de desempenho, logo, adotaremos o ITSE, assim:

$$ITSE = \int_0^{t_f} t e^2(t) dt$$

$$ITSE = \int_0^{t_f} t \left[(k^2 + t^2)^{1/4} \right]^2 dt$$

$$ITSE = \int_0^{t_f} t \sqrt{k^2 + t^2} dt$$

$$ITSE = \frac{(t^2 + k^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^{t_f}$$

$$ITSE = \frac{(t_f^2 + k^2)^{3/2}}{3} - \frac{k^3}{3}$$

Para obter o valor de k que minimiza o $ITSE$, basta derivar em relação a k e igualar a zero.

$$\frac{dITSE}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{(t_f^2 + k^2)^{3/2}}{3} - \frac{k^3}{3} \right) = 0$$

$$\frac{1}{3} \frac{3}{2} (t_f^2 + k^2)^{3/2-1} 2k - k^2 = 0$$

$$(t_f^2 + k^2)^{3/2-1} k - k^2 = 0$$

$$\sqrt{t_f^2 + k^2} k - k^2 = 0$$

$$k \left(\sqrt{t_f^2 + k^2} - k \right) = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ ou } \sqrt{t_f^2 + k^2} - k = 0$$

$$\sqrt{t_f^2 + k^2} = k$$

$$t_f^2 + k^2 = k^2 \Rightarrow \text{não existe solução.}$$

Assim, para $k = 0$ o $ITSE$ é mínimo, levando o sistema a um desempenho ótimo.

Exemplo 2 – Para um mesmo sistema de controle foram feitos dois projetos de sintonia A e B gerando como resultados:

$$e_A(t) = \sqrt{kt^2 + 2k^2t}$$

$$e_B(t) = \sqrt{k^2t^2 + 2kt}$$

com parâmetros k ajustáveis. Considerando o índice de desempenho ISE, qual das duas sintonias é melhor?

SOLUÇÃO

$$ISE_A = \int_0^{t_f} e_A^2(t) dt = k \frac{t_f^3}{3} + 2k^2 \frac{t_f^2}{2}$$

$$ISE_B = \int_0^{t_f} e_B^2(t) dt = k^2 \frac{t_f^3}{3} + 2k \frac{t_f^2}{2}$$

Derivando em relação a k e igualando a zero:

$$\frac{d}{dk} ISE_A = \frac{t_f^3}{3} + 2kt_f^2 = 0$$

$$k = -\frac{t_f}{6}$$

$$\frac{d}{dk} ISE_B = 2k \frac{t_f^3}{3} + t_f^2 = 0$$

$$k = -\frac{3}{2t_f}$$

Substituindo os resultados nos respectivos erros:

$$e_A(t) = \sqrt{-\frac{t_f}{6}t^2 + 2\frac{t_f^2}{36}t}$$

$$e_B(t) = \sqrt{\frac{9}{4t_f^2}t^2 - \frac{3}{t_f}t}$$

Observe que o termo em e_A dentro da raiz forma uma parábola com concavidade voltada para baixo enquanto que o termo em e_B dentro da raiz tem concavidade voltada para cima, portanto o ponto de mínimo de e_B ocorre em $t = 2t_f/3$ quando $e_B = 0$ e o valor de e_A será zero quando $t = t_f/3$, porém, e_A , que é uma variável real, assume valores complexos para $t > t_f/3$, o que implica na ineficiência da ação de controle que será aplicada sobre o erro. Assim, qualquer dos dois métodos de sintonia chegam ao erro zero, entretanto, o método A chega mais rápido, porém o controle não é possível.

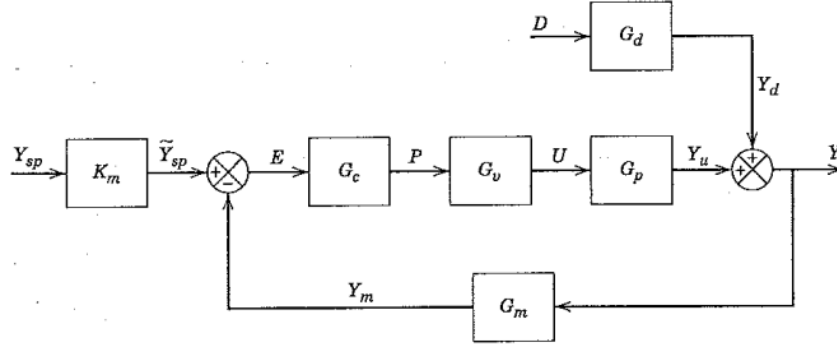
Assim, só o método de sintonia B é o melhor.

6.4. MÉTODOS DE PROJETO PID BASEADOS NO MODELO DO PROCESSO

Nesses métodos o modelo do processo é conhecido por modelagem ou por estimação.

6.4.1. MÉTODO DA SÍNTESE DIRETA

Considere o diagrama de blocos abaixo:



A FTMF desse sistema em Laplace é:

$$\frac{Y}{Y_{sp}} = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m}$$

Resolvendo para G_c , temos:

$$G_c = \frac{1}{G_v G_p} \left(\frac{Y/Y_{sp}}{K_m - (Y/Y_{sp}) G_m} \right)$$

Simplificando o projeto para realimentação unitária e $K_m = 1$, temos:

$$G_c = \frac{1}{G_v G_p} \left(\frac{Y/Y_{sp}}{1 - Y/Y_{sp}} \right)$$

Fazendo $G = G_v G_p$ na equação acima,

$$G_c = \frac{1}{G} \left(\frac{Y/Y_{sp}}{1 - Y/Y_{sp}} \right)$$

Conhecendo-se o modelo aproximado do sistema, \tilde{G} , e a saída desejada $(Y/Y_{sp})_d$ é possível obter o controlador G_c a partir da relação:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{(Y/Y_{sp})_d}{1 - (Y/Y_{sp})_d} \right)$$

Assim, a especificação da saída desejada a uma entrada conhecida é a chave para a especificação de projeto do controlador por síntese direta.

6.4.1.1. CONTROLE PERFEITO

A escolha de $(Y/Y_{sp})_d = 1$ levaria a um ajuste instantâneo e sem erro (controle perfeito), todavia, tal consideração torna irrealizável o controle resultando em $G_c \rightarrow \infty$.

6.4.1.2. RESPOSTAS DE 1ª ORDEM SEM ATRASO DE TEMPO

A escolha de

$$\left(\frac{Y}{Y_{sp}}\right)_d = \frac{1}{\tau_c s + 1}$$

onde τ_c é a constante de tempo da resposta de malha fechada desejada. Esse modelo tem um tempo de estabilização de $\sim 4\tau_c$. Devido ao ganho de estado estacionário ser 1, não há *offset* para mudanças do *set-point*.

Substituindo a equação acima na equação de G_c , tem-se:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{1}{\tau_c s} \right)$$

O termo $1/\tau_c s$ provê a ação de controle integral, eliminando, assim, o *offset*. Assim, com τ_c pequeno, tem-se um controle mais agressivo e com τ_c grande, um controle mais conservador.

Exemplo 3 – Use o método de síntese direta para calcular um controlador para o processo abaixo de forma que a constante de tempo de malha fechada seja $\tau_c = 1[s]$.

$$G(s) = \frac{2}{10s + 1}$$

SOLUÇÃO

Fazendo a ESCOLHA da resposta do sistema igual a resposta de um sistema de 1ª ordem sem atraso, ou seja:

$$\left(\frac{Y}{Y_{sp}}\right)_d = \frac{1}{\tau_c s + 1}$$

Temos que o modelo da equação do controlador ESCOLHIDO será:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{1}{\tau_c s} \right)$$

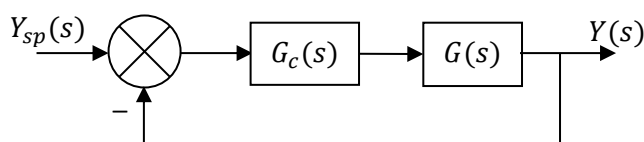
onde $\tilde{G} = G$, pois o modelo da planta não precisa ser estimado.

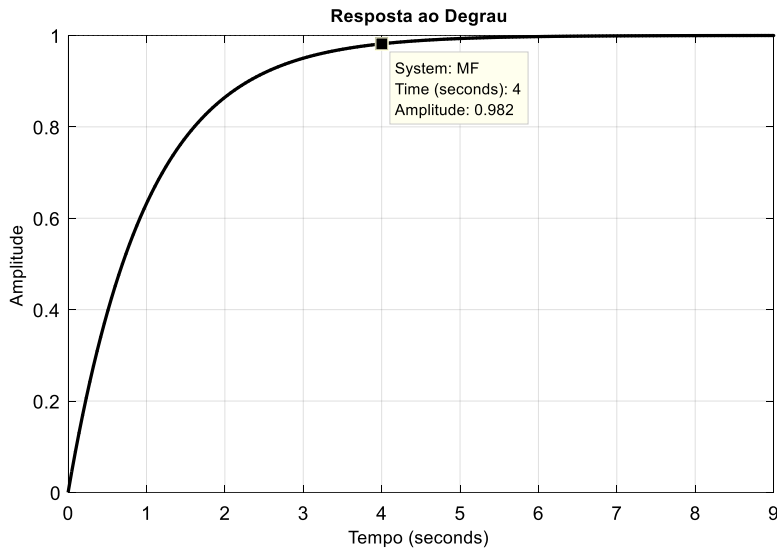
Assim,

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{1}{\tau_c s} \right) = \frac{1}{\frac{2}{(10s + 1)}} \left(\frac{1}{1 \cdot s} \right) = \frac{10s + 1}{2s}$$

$$G_c = 5 + \frac{0,5}{s}$$

Que é um controlador PI





6.4.1.3. RESPOSTAS DE 1ª ORDEM COM ATRASO DE TEMPO

A escolha de

$$\left(\frac{Y}{Y_{sp}}\right)_d = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1}$$

faz com que a variável controlada somente responderá às mudanças no *set-point* no tempo $t = \theta$. Se o tempo de atraso for desconhecido, será necessário estimá-lo.

Substituindo a equação acima na equação de G_c , tem-se:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1 - e^{-\theta s}} \right)$$

O controlador acima não é um PI na forma padrão, mas é realizável.

Às vezes o símbolo λ é usado no lugar de τ_c e o Método de Síntese Direta é denominado de **Método de Sintonia Lambda**.

A escolha da aproximação de Padé para a exponencial do denominador,

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s} \approx 1 - \theta s$$

resulta no controlador padrão PI.

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \frac{e^{-\theta s}}{(\tau_c + \theta)s}$$

Entretanto, a aproximação de Padé, $(1 - \theta s)$, será possível se θ for muito menor que a constante de tempo dominante do processo³, senão, deve-se utilizar a fração.

³ A regra geral da relação entre elas é de aproximadamente de 5 a 10 vezes, porém, dependendo da natureza do sistema, é possível relaxar ainda mais essa relação.

Exemplo 4 – Use o método de síntese direta para calcular um controlador para o processo abaixo de forma que a constante de tempo de malha fechada seja $\tau_c = 1[s]$.

$$G(s) = \frac{2e^{-s}}{10s + 1}$$

SOLUÇÃO

Fazendo a ESCOLHA da resposta do sistema igual a **resposta de um sistema de 1ª ordem com atraso**, ou seja:

$$\left(\frac{Y}{Y_{sp}}\right)_d = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1}$$

Temos que o modelo da equação do controlador ESCOLHIDO será:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \frac{e^{-\theta s}}{(\tau_c + \theta)s}$$

onde $\tilde{G} = G$, pois o modelo da planta não precisa ser estimado para cálculo de G_c . Assim,

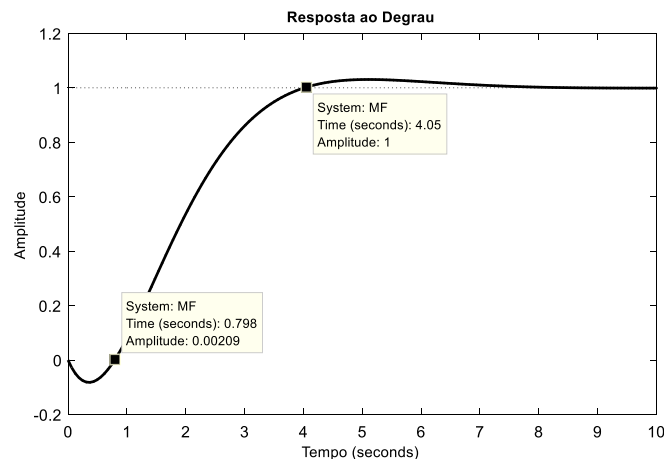
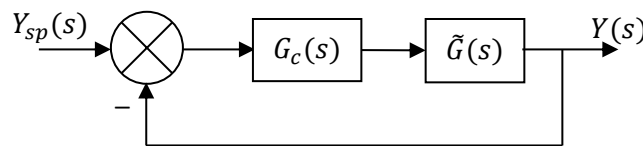
$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{e^{-\theta s}}{(\tau_c + \theta)s} \right) = \frac{1}{\frac{2e^{-s}}{(10s + 1)}} \left(\frac{e^{-s}}{(1 + 1)s} \right) = \frac{10s + 1}{4s}$$

$$G_c = 2,5 + \frac{0,25}{s}$$

Que é um controlador PI

Para a simulação da resposta ao degrau, será necessário utilizar a aproximação de Padé para o atraso, uma vez que a malha deverá ser fechada jogando a exponencial para o denominador da FTMF.

$$\tilde{G} = \frac{2}{(10s + 1)} \times \frac{1 - \frac{1}{2}s}{1 + \frac{1}{2}s} = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{2}s\right)}{(10s + 1) \left(1 + \frac{1}{2}s\right)}$$



Observe que devido à aproximação de Padé, o resultado também é aproximado das condições requeridas no problema.

6.4.1.4. PROCESSOS DE 1ª ORDEM COM ATRASO DE TEMPO

Se o processo é um modelo de 1ª ordem com atraso de tempo

$$\tilde{G} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

Então, substituindo o processo no modelo do controlador com resposta de 1ª ordem com atraso de tempo:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \frac{e^{-\theta s}}{(\tau_c + \theta)s}$$

Temos como resultado um controlador PI:

$$G_c = \frac{1}{K} \left(\frac{\tau}{\theta + \tau_c} \right) \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right)$$

ou,

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right)$$

onde, K_c é a constante:

$$K_c = \frac{1}{K} \left(\frac{\tau}{\theta + \tau_c} \right)$$

Exemplo 5 – Use o método de síntese direta para calcular um controlador para o processo abaixo de forma que a constante de tempo de malha fechada seja $\tau_c = 1[s]$.

$$G(s) = \frac{2e^{-s}}{10s + 1}$$

SOLUÇÃO

Fazendo a ESCOLHA da resposta do sistema igual a resposta de um sistema de 1ª ordem sem atraso, ou seja:

$$\left(\frac{Y}{Y_{sp}} \right)_d = \frac{1}{\tau_c s + 1}$$

Temos que o modelo da equação do controlador ESCOLHIDO será:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{1}{\tau_c s} \right)$$

onde \tilde{G} , será G com a aproximação de Padé.

$$e^{-s} = \frac{1 - \frac{1}{2}s}{1 + \frac{1}{2}s} = \frac{2-s}{2+s}$$

Assim,

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{1}{\tau_c s} \right) = \frac{1}{\left(\frac{2}{10s+1} \right) \left(\frac{2-s}{2+s} \right)} \left(\frac{1}{1.s} \right) = \frac{1}{2s} \left(\frac{(10s+1)(2+s)}{2-s} \right)$$

$$G_c = \frac{(10s+1)}{2s} \left(\frac{2+s}{2-s} \right)$$

$$G_c = \left(5 + \frac{0,5}{s} \right) e^s$$

Que é um controlador PI IRREALIZÁVEL devido à e^s ser não causal.

Exemplo 6 – Use o método de síntese direta para calcular um controlador para o processo abaixo de forma que a constante de tempo de malha fechada seja $\tau_c = 1[s]$.

$$G(s) = \frac{2}{(10s + 1)(5s + 1)}$$

SOLUÇÃO

Fazendo a escolha da resposta do sistema igual a resposta de um sistema de 1ª ordem sem atraso, ou seja:

$$\left(\frac{Y}{Y_{sp}}\right)_d = \frac{1}{\tau_c s + 1}$$

Temos que o modelo da equação do controlador será:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{1}{\tau_c s} \right)$$

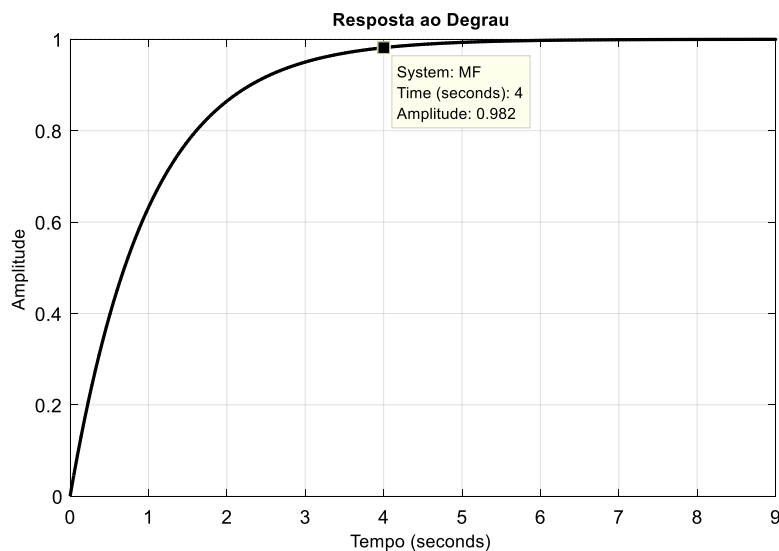
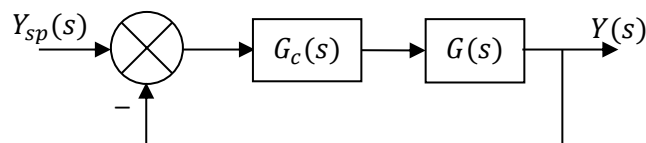
onde $\tilde{G} = G$, pois o modelo da planta não precisa ser estimado.

Assim,

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{1}{\tau_c s} \right) = \frac{1}{\frac{2}{(10s + 1)(5s + 1)}} \left(\frac{1}{1 \cdot s} \right) = \frac{50s^2 + 15s + 1}{2s}$$

$$G_c = 7,5 + 25s + \frac{0,5}{s}$$

Que é um controlador PID



6.4.1.5. PROCESSOS DE 2ª ORDEM COM ATRASO DE TEMPO

Se o processo é um modelo de 2ª ordem com atraso de tempo

$$\tilde{G} = \frac{K e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Então, substituindo no modelo do controlador com atraso de tempo:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \frac{e^{-\theta s}}{(\tau_c + \theta)s}$$

Resulta no controlador PID:

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

onde,

$$K_c = \frac{1}{K} \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_c + \theta} \right)$$

$$\tau_I = \tau_1 + \tau_2$$

$$\tau_D = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

Exemplo 7 – Use o método de síntese direta para calcular o PID para o processo abaixo. Deseja-se que a constante de tempo de malha fechada seja $\tau_c = 1[s]$.

$$G(s) = \frac{2e^{-s}}{(10s + 1)(5s + 1)}$$

SOLUÇÃO

$$K_c = \frac{1}{K} \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_c + \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{10 + 5}{1 + 1} \right) = \frac{15}{4}$$

$$\tau_I = \tau_1 + \tau_2 = 10 + 5 = 15[s]$$

$$\tau_D = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{10 \times 5}{10 + 5} = \frac{10}{3}$$

Portanto,

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

$$G_c = \frac{15}{4} \left(1 + \frac{1}{15s} + \frac{10}{3}s \right)$$

Exemplo 8 – Um sistema de controle de nível padrão é regulado por uma válvula de vazão cuja função de transferência foi empiricamente determinada como sendo:

$$\frac{H(s)}{V(s)} = \frac{-2 \left(1 - \frac{3}{4}s \right)}{s \left(\frac{1}{2}s + 1 \right)}$$

onde, $H(s)$ é o nível do líquido e $V(s)$ é a vazão de entrada no tanque.

- Projete com controlador PD usando o método da síntese direta com realimentação unitária.
- Escolha τ_c de maneira que o sistema responda em até 4 [s] com tolerância de 2%.

SOLUÇÃO

$$G(s) = \frac{-2\left(1 - \frac{3}{4}s\right)}{s\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}$$

O processo possui um zero em $s = \frac{4}{3}$. Como o modelo de síntese direta busca inverter polos e zeros no modelo do controlador, este será instável. Assim, é preciso fazer a escolha de uma resposta que elimine este polo do semiplano direito do plano S.

Fazendo,

$$\left(\frac{Y}{Y_{sp}}\right)_d = \frac{1 - \frac{3}{4}s}{\tau_c s + 1}$$

Substituindo no modelo do controlador:

$$G_c = \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{(Y/Y_{sp})_d}{1 - (Y/Y_{sp})_d} \right)$$

$$G_c = \frac{1}{\frac{-2\left(1 - \frac{3}{4}s\right)}{s\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}} \left(\frac{\frac{1 - \frac{3}{4}s}{\tau_c s + 1}}{1 - \frac{1 - \frac{3}{4}s}{\tau_c s + 1}} \right) = \frac{s\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}{-2\left(1 - \frac{3}{4}s\right)} \left(\frac{\frac{1 - \frac{3}{4}s}{\tau_c s + 1}}{\frac{\tau_c s + 1 - \left(1 - \frac{3}{4}s\right)}{\tau_c s + 1}} \right)$$

$$G_c = \frac{s\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}{-2\left(1 - \frac{3}{4}s\right)} \left(\frac{1 - \frac{3}{4}s}{\tau_c s + 1 - 1 + \frac{3}{4}s} \right)$$

$$G_c = -\frac{1}{2\tau_c + \frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}s \right)$$

Para que o sistema responda em até 4[s], $\tau_c = 1[s]$, uma vez que o sistema leva $4\tau_c$ para responder.

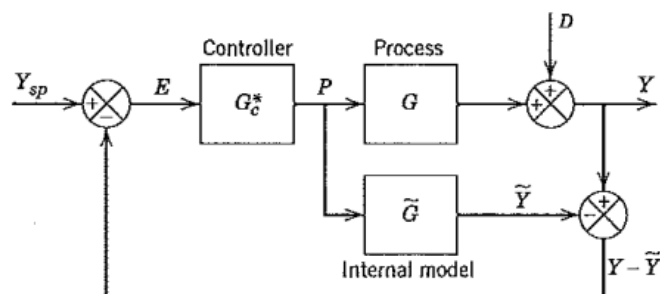
Logo,

$$G_c = -\frac{2}{7} \left(1 + \frac{1}{2}s \right)$$

6.4.2. MÉTODO DE CONTROLE DO MODELO INTERNO (IMC)

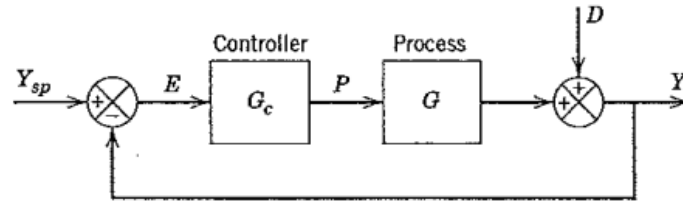
O método IMC (*Internal Model Control*) produz controladores muito parecidos com os obtidos pelo Método da Síntese Direta, entretanto, o método IMC permite certo compromisso entre o desempenho e a robustez no projeto do controlador.

O método se baseia na seguinte estrutura:



O modelo do processo, \tilde{G} , e a saída do controlador, P , são usados para calcular a resposta do modelo, \tilde{Y} . A resposta do modelo é subtraída da resposta atual da planta, $Y - \tilde{Y}$, e essa diferença é usada como sinal de entrada do controlador G_c^* .

O controle por realimentação clássico é mostrado no diagrama abaixo:



Este diagrama é equivalente ao de cima se:

$$G_c = \frac{G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}}$$

Esse resultado mostra que qualquer controlador IMC, G_c^* , é equivalente ao controlador por realimentação padrão, G_c , e vice-versa.

Assim, o projeto do controlador IMC segue os seguintes passos:

1. Separe o modelo estimado do processo da seguinte forma:

$$\tilde{G} = \tilde{G}_+ \tilde{G}_-$$

onde, \tilde{G}_+ contém ganho estacionário unitário, os atrasos de tempo e polos e zeros no semiplano direito de \tilde{G} .

2. O controlador IMC é especificado como:

$$G_c^* = \frac{1}{\tilde{G}_-} f$$

onde, f é um filtro passa-baixa com ganho estacionário unitário e tem a forma típica:

$$f = \frac{1}{(\tau_c s + 1)^r}$$

onde, τ_c é a constante de tempo da resposta de malha fechada desejada e r é uma constante positiva, normalmente igual a 1.

Observe que o controlador IMC é calculado apenas com a parte invertível do modelo do processo, \tilde{G}_- , e não com todo o processo, \tilde{G} , garantindo que sempre G_c^* será realizável e estável.

OBS: Se a planta em malha aberta for instável, o método IMC descrito acima deve sofrer ajustes de sintonia.

Exemplo 9 – Use o método IMC para calcular o PID para o processo usando a estimaco dada abaixo. Deseja-se que a constante de tempo de malha fechada seja $\tau_c = 1[s]$. Considere usar um filtro de 1ª ordem e a aproximação de Padé.

$$\tilde{G} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

SOLUO

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s}$$

$$\tilde{G} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} = \frac{K \left(1 - \frac{\theta}{2}s\right)}{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)(\tau s + 1)}$$

Fatorando o modelo em $\tilde{G} = \tilde{G}_+ \tilde{G}_-$

$$\tilde{G}_+ = 1 - \frac{\theta}{2}s$$

$$\tilde{G}_- = \frac{K}{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)(\tau s + 1)}$$

O erro de estado estacionário de \tilde{G}_+   unitário, como exigido pelo método:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{G}_+(s) = 1$$

O cálculo de G_c^* :

$$G_c^* = \frac{1}{\tilde{G}_-} f = \frac{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)(\tau s + 1)}{K} \left(\frac{1}{(\tau_c s + 1)^r}\right)$$

$$G_c^* = \frac{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)(\tau s + 1)}{K(\tau_c s + 1)}$$

Substituindo G_c^* na equação abaixo:

$$G_c = \frac{G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}}$$

Resulta em:

$$G_c = \frac{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)(\tau s + 1)}{K \left(\tau_c + \frac{\theta}{2}\right)s}$$

Arrumando, tem-se:

$$G_c = \frac{1 + \frac{\theta}{2} \left(1 + 2 \frac{\tau}{\theta}\right)s + \frac{\theta}{2} \tau s^2}{K \frac{\theta}{2} \left(2 \frac{\tau_c}{\theta} + 1\right)s} = \frac{\frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{\theta} + \left(1 + 2 \frac{\tau}{\theta}\right)s + \tau s^2\right]}{K \frac{\theta}{2} \left(2 \frac{\tau_c}{\theta} + 1\right)s}$$

$$G_c = \frac{\frac{2}{\theta} + \left(2\frac{\tau}{\theta} + 1\right)s + \tau s^2}{K\left(2\frac{\tau_c}{\theta} + 1\right)s} = \frac{1}{K} \left(\frac{2\frac{\tau}{\theta} + 1}{2\frac{\tau_c}{\theta} + 1} \right) \left(1 + \frac{\tau}{2\frac{\tau}{\theta} + 1}s + \frac{\frac{2}{\theta}}{\left(2\frac{\tau}{\theta} + 1\right)s} \right)$$

Todavia, o PID padrão tem a forma:

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

Assim, igualando os dois lados da equação:

$$\frac{1}{K} \left(\frac{2\frac{\tau}{\theta} + 1}{2\frac{\tau_c}{\theta} + 1} \right) \left(1 + \frac{\tau}{2\frac{\tau}{\theta} + 1}s + \frac{\frac{2}{\theta}}{\left(2\frac{\tau}{\theta} + 1\right)s} \right) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

Logo,

$$K_c = \frac{1}{K} \left(\frac{2\frac{\tau}{\theta} + 1}{2\frac{\tau_c}{\theta} + 1} \right)$$

$$\tau_I = \frac{\left(2\frac{\tau}{\theta} + 1\right)}{\frac{2}{\theta}} = \frac{\frac{2}{\theta} \left(\tau + \frac{\theta}{2} \right)}{\frac{2}{\theta}}$$

$$\tau_I = \tau + \frac{\theta}{2}$$

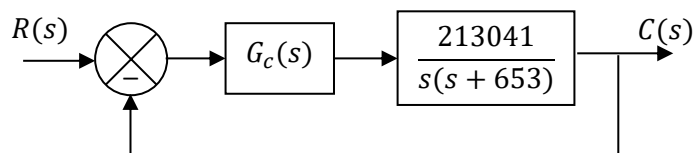
$$\tau_D = \frac{\tau}{2\frac{\tau}{\theta} + 1}$$

6.4.3. MÉTODO DE PROJETO DE PID A PARTIR DE PARÂMETROS DESEJADOS

Uma vez conhecido o modelo do processo, o projeto do controlador PID é feito de maneira a atender aos requisitos de operação da planta de forma análoga aos projetos de compensadores.

Exemplo 10 – Considere o sistema de controle mostrado abaixo. Projete um controlador PD de forma que as seguintes especificações sejam atendidas.

- para a resposta ao degrau: $t_s \leq 0,005[s]$; $MP < 5\%$;
- para a resposta à rampa: erro estacionário $\leq 0,00061$.



SOLUÇÃO

A equação do controlador é:

$$G_c(s) = K_p + K_D s$$

Assim, no ramo direto, temos:

$$G(s) = \frac{213041(K_p + K_D s)}{s(s + 653)}$$

Que é do Tipo 1.

A FTMF do sistema todo, então é:

$$T(s) = \frac{213041(K_p + K_D s)}{s^2 + (653 + 213041K_D)s + 213041K_p}$$

I. O erro estacionário à uma entrada em rampa é dado pela equação:

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Portanto,

$$e_{ssr} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{213041(K_p + K_D s)}{s(s + 653)} \right)}$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{\frac{213041K_p}{653}} \leq 0,00061$$

Arrumando, resulta em $K_p \geq 5$.

II. Além das análises feitas até agora, ainda é necessário avaliar a estabilidade do sistema com o controlador. Assim, usando o Critério de Routh-Hurwitz na equação característica do sistema:

$$s^2 + (653 + 213041K_D)s + 213041K_p = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 213041K_p \\ s^1 & 653 + 213041K_D & 0 \\ s^0 & 213041K_p & \end{array}$$

ou seja,

$$653 + 213041K_D > 0 \Rightarrow K_D > -0,0031$$

$$213041K_p > 0 \Rightarrow K_p > 0$$

III. Da equação característica do sistema:

$$s^2 + (653 + 213041K_D)s + 213041K_p = 0$$

Comparando com a equação geral de um sistema de 2ª ordem,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Temos, $\omega_n = \sqrt{213041K_p} [\text{rad/s}]$ e $2\zeta\omega_n = 653 + 213041K_D$.

$$K_D = \frac{2\zeta\sqrt{213041K_p} - 653}{213041}$$

Como $MP \leq 5\%$,

$$MP = e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \leq 0,05$$

Que resulta em $\zeta \geq 0,673$.

$$K_D \geq \frac{1,346\sqrt{213041K_p} - 653}{213041}$$

Escolhendo, $K_P = 5$, temos: $K_D \geq 0,0035$

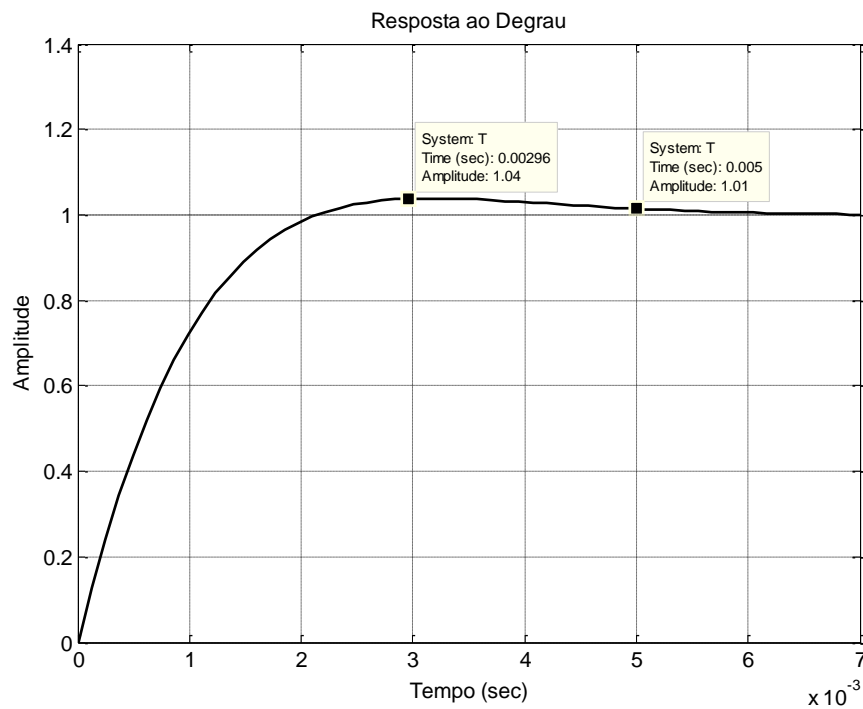
IV. O problema pede que $t_s \leq 0,005$. A região que delimita os polos no semiplano esquerdo do plano de Laplace em um sistema de 2ª ordem é: $Re(pólos) \leq \zeta \omega_n$; $\zeta \geq 0,4$; e $t_s \leq 4/\zeta \omega_n$. Assim, fazendo:

$$t_s = \frac{8}{2\zeta \omega_n} = \frac{8}{653 + 213041K_D} \leq 0,005$$

Resolvendo, resulta em $K_D \geq 0,0044$.

Assim, observados todos os intervalos de validade para K_P e K_D , temos que ter $K_P \geq 5$ e $K_D \geq 0,0044$ para que sejam atendidas as especificações do problema.

Escolhendo $K_P = 5$ e $K_D = 0.005$ e fazendo a resposta ao degrau, temos:



Que atende às especificações iniciais do problema.

6.5. MÉTODOS DE PROJETO PID NÃO BASEADOS NO MODELO DO PROCESSO

Nesses métodos o modelo do processo não é necessariamente conhecido. Após um controlador ser instalado um ponto inicial de partida deve ser configurado. As técnicas de configuração nesta fase são denominadas de sintonia *on-line* (*on-line tuning*) ou sintonia em campo (*field tuning*) ou apenas de sintonia do controlador (*controller tuning*).

Observações:

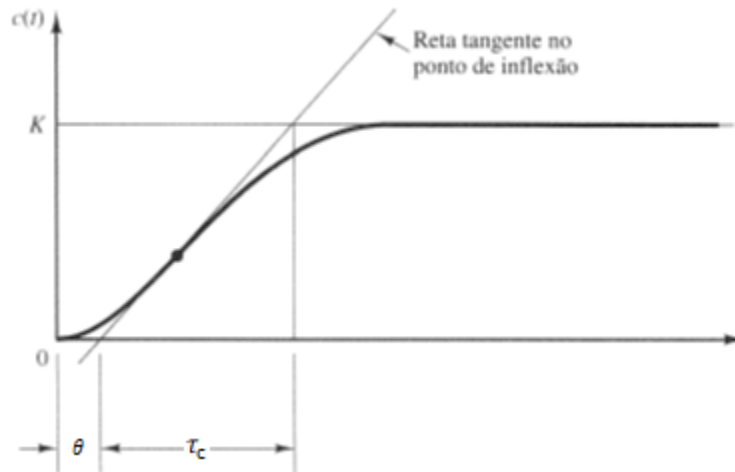
- A sintonia do controlador inevitavelmente envolve um compromisso entre desempenho e robustez.
- Os parâmetros do controlador não precisam ser precisamente determinados. Em geral uma pequena mudança nos parâmetros do controlador ($\pm 10\%$) tem efeito muito pequeno na resposta em malha fechada.
- Para muitas plantas não é possível sintonizar manualmente cada controlador.
- Existem técnicas para monitorar e diagnosticar o desempenho de sistemas de controle.

6.5.1. MÉTODOS DE ZIEGLER-NICHOLS

Desenvolvidos por Ziegler-Nichols em 1942 os métodos Ciclo Contínuo (*Continuous Cycling Method*) e do Teste ao Degrau (*Step Test Method*) sugerem parâmetros que são o ponto de partida para o ajuste fino do PID e não os valores definitivos.

O Método Ciclo Contínuo consiste em aplicar na planta um controle proporcional e determinar o ganho e o período de uma possível oscilação sustentada. A partir desses parâmetros são definidas as constantes do controlador PID.

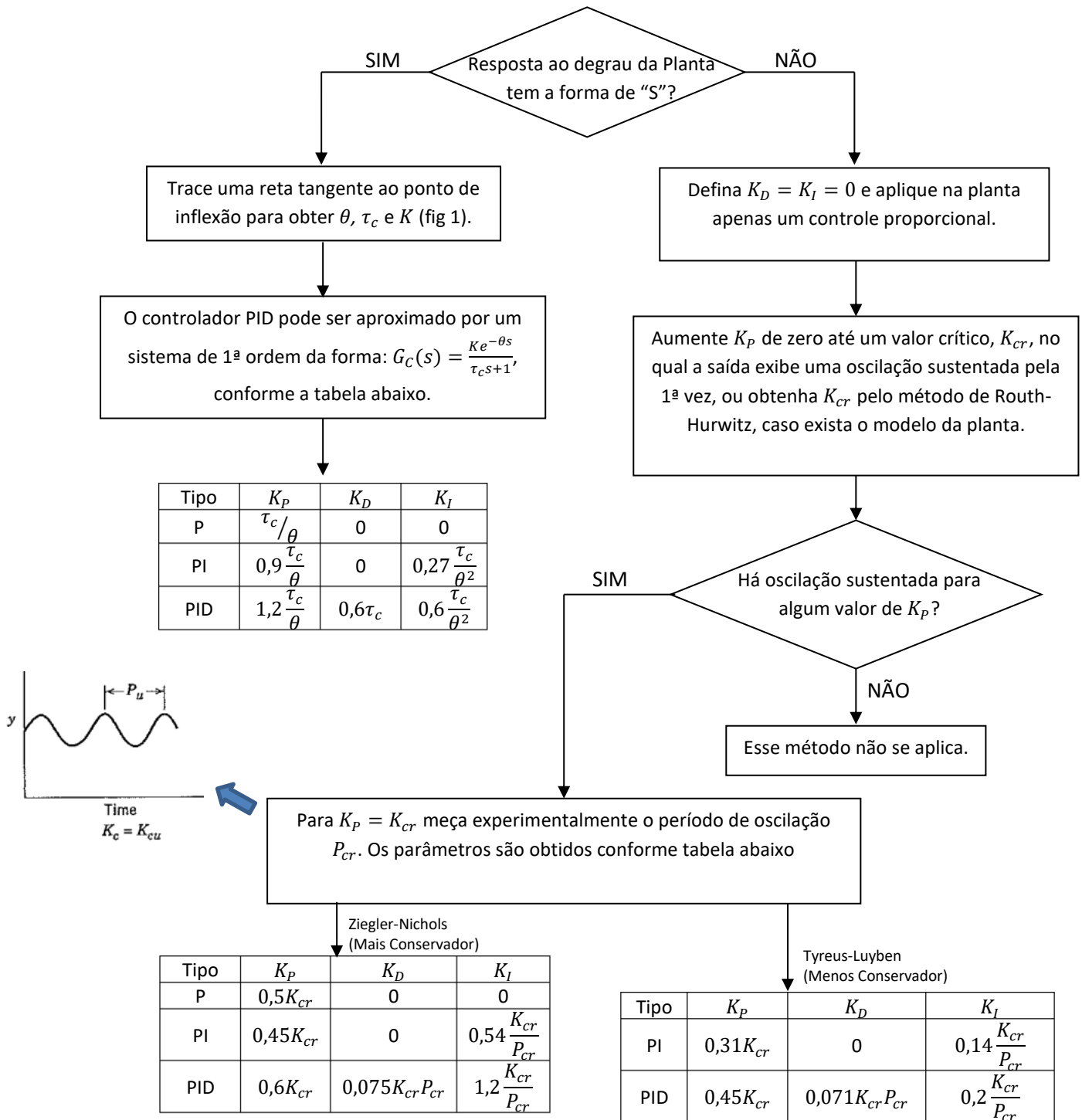
O Método do Teste ao Degrau é feito submetendo um degrau ao sistema enquanto ele se encontra no estado inicial ou quando se encontra no estado em regime permanente. Se a resposta do sistema de controle tem a forma se “S”, como no gráfico abaixo, o controlador PID pode ser aproximado por um modelo de 1ª ordem.



Assim, as desvantagens do método são:

- Pode consumir um tempo excessivo se algumas tentativas forem necessárias e a dinâmica do processo for lenta.
- Em alguns processos o uso do método é condenável, por levar o processo ao limite da instabilidade fazendo com que qualquer distúrbio na planta o torne operacionalmente instável.
- Os parâmetros proporcionam uma operação estável do sistema, mas com um máximo sobre-sinal excessivo, o que é INACEITÁVEL.

PROCEDIMENTO DO MÉTODO



A equação geral do PID é:

$$PID = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

onde:

$$K_P = K_c$$

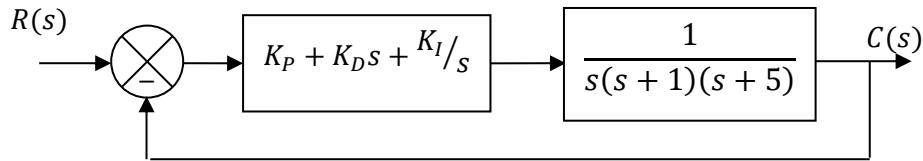
$$K_D = K_P \tau_D$$

$$K_I = K_P / \tau_I$$

Exemplo 11 – Projete um controlador PID para o sistema abaixo. Obtenha a curva de resposta ao degrau unitário e verifique se o sistema exibe MP próximo e inferior a 30%. Caso contrário efetue uma sintonia fina para reduzir o MP a um patamar desejado.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

SOLUÇÃO



Como o sistema possui um integrador na origem, a resposta ao degrau não terá a forma de “S”, logo, fazendo $K_D = K_I = 0$, a função de transferência do sistema será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p}$$

Como o modelo matemático da planta é conhecido, usamos o critério de Routh-Hurwitz para obter K_{cr} :

$$q(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K_p$$

s^3	1	5
s^2	6	K_p
s^1	$\frac{30-K_p}{6}$	0
s^0	K_p	

Para haver oscilação, temos que $K_p = [K_{cr} = 30]$.

Para obter a frequência de oscilação sustentada, temos:

$$\begin{aligned} q(s) &= s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0 \\ (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 &= 0 \\ 6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) &= 0 \\ \omega &= \sqrt{5} \left[\frac{\text{rad}}{s} \right] \end{aligned}$$

ou, usando o polinômio auxiliar com $K_p = 30$:

$$P(s) = 6s^2 + 30 = 0$$

$$6(j\omega)^2 + 30 = 0$$

$$\omega = \sqrt{5} \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$$

$$\therefore P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow [P_{cr} = 2,8[\text{seg}]]$$

De acordo com a tabela, $[K_p = 18; K_D = 6,3; K_I = 12,86]$.

Substituindo em $G_C(s)$

$$G_C(s) = 18 + 6,3s + \frac{12,86}{s} = \frac{6,3s^2 + 18s + 12,86}{s}$$

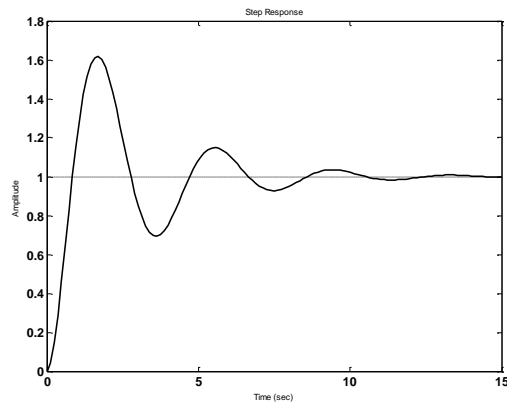
Arrumando:

$$G_C(s) = \frac{6,3(s + 1,42)^2}{s}$$

Obtendo a FT do sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6,3s^2 + 18s + 12,86}{s^4 + 6s^3 + 11,3s^2 + 18s + 12,86}$$

A resposta ao degrau da FT é:



O MP = 62%

Deslocando os polos complexos do PID para esquerda, ou seja, mantendo K_P , aumentando um pouco K_D e diminuindo K_I , assim: $K_P = 18$; $K_D = 14$; $K_I = 6$

Substituindo em $G_C(s)$

$$G_C(s) = 18 + 14s + \frac{6}{s} = \frac{14s^2 + 18s + 6}{s}$$

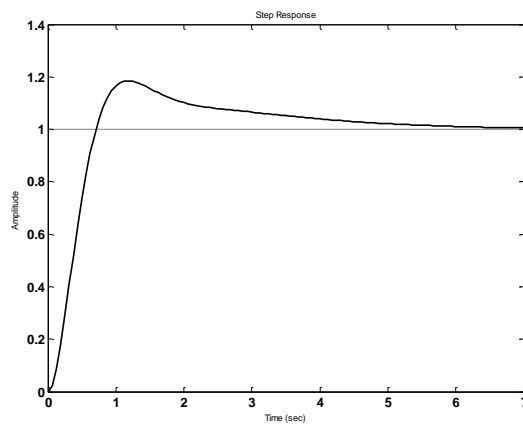
Arrumando:

$$G_C(s) = \frac{14(s + 0,64)^2}{s}$$

E a FT:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{14s^2 + 18s + 6}{s^4 + 6s^3 + 19s^2 + 18s + 6}$$

A resposta ao degrau:



O MP \cong 18%

Aumentando o termo constante em $G_C(s)$, sem alterar a localização dos polos complexos, temos:

$$G_C(s) = \frac{30(s + 0,64)^2}{s}$$

Arrumando:

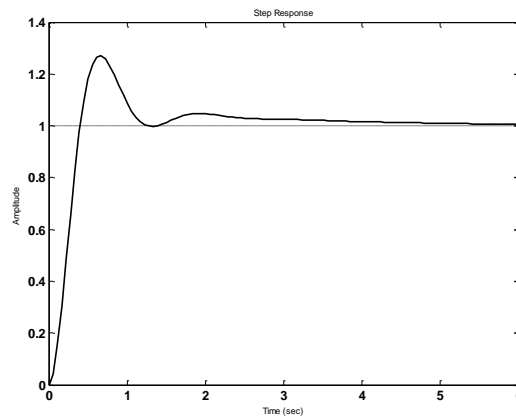
$$G_C(s) = \frac{30s^2 + 38,4s + 12,3}{s}$$

Temos aproximadamente que: $K_P = 38$; $K_D = 30$; $K_I = 12$

Assim, a FT fica:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{30s^2 + 38s + 12}{s^4 + 6s^3 + 35s^2 + 38s + 12}$$

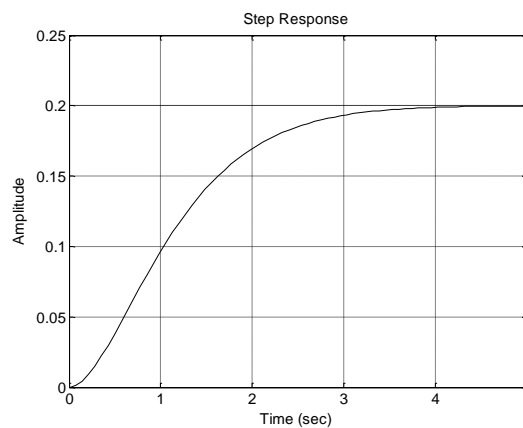
A resposta ao degrau:



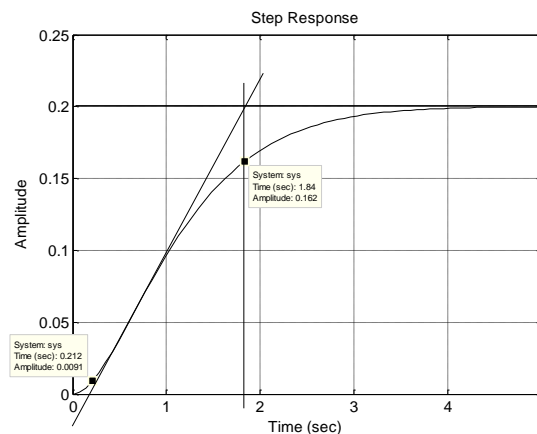
MP = 27%.

Que atende às especificações do problema, logo $K_P = 38$; $K_D = 30$; $K_I = 12$ são os parâmetros finais do PID.

Exemplo 12 – Um sistema de controle possui a resposta ao degrau unitário dada pelo gráfico abaixo. Obtenha K e os parâmetros do controlador PI para esse sistema.



SOLUÇÃO



$$K = 0,2$$

$$\theta = 0,2$$

$$\tau_c = 1,8 - 0,2 = 1,6$$

Pela Tabela,

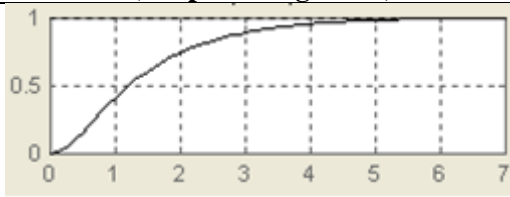
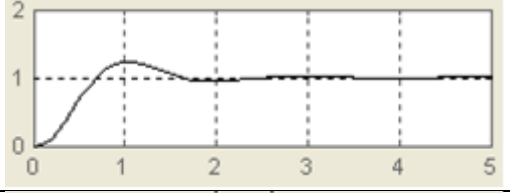
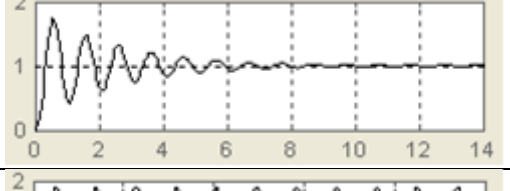
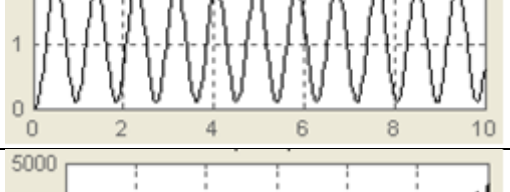
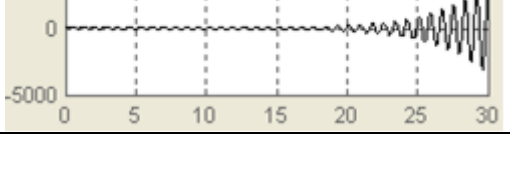
$$K_p = 0,9 \tau_c / \theta = 7,2$$

$$K_d = 0$$

$$K_i = 0,27 \tau_c / \theta^2 = 10,8$$

K_p	K_D	K_I
7,2	0	10,8

Exemplo 13 – Um sistema de controle foi submetido à variação do ganho do sinal de entrada que gerou a seguinte tabela de leituras do sinal de saída em um osciloscópio. Obtenha um controlador PID para esse sistema.

Ganho Proporcional	Resposta ao Degrau (tempo em segundos)
32	
160	
543	
600	
900	

SOLUÇÃO

$$K_{cr} = 600$$

Pelo gráfico, temos 9 períodos em 8 segundos, logo um período da onda dura 0,889 segundos, assim, $P_{cr} = 0,889 [s]$

Pela Tabela,

$$K_p = 0,6 K_{cr} = 360$$

$$K_d = 0,075 K_{cr} P_{cr} = 40$$

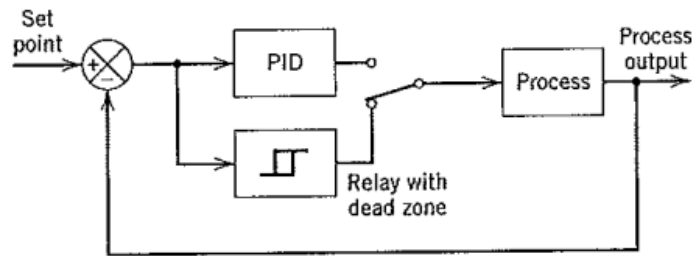
$$K_i = 1,2 \frac{K_{cr}}{P_{cr}} = 810$$

K_p	K_D	K_I
360	40	810

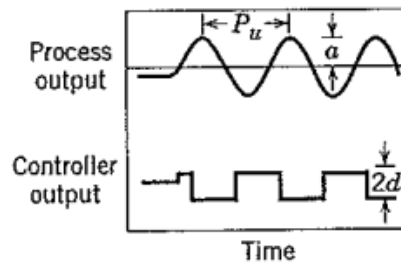
6.5.2. MÉTODO DE AUTO-SINTONIA ON-OFF (*Relay Auto-Tuning*)

Desenvolvido por Åstrom e Hägglund em 1984 é uma melhoria no método Ciclo Contínuo de Ziegler-Nichols. O procedimento consiste em:

1. Substituir o controlador *feedback* por um controlador *on-off* (ou *relay*) com zona morta.



2. Fechar a malha. A variável controlada exibe uma oscilação sustentada característica do controlador *on-off*.



3. Os parâmetros do controlador são:

$$P_{cr} = P_u$$

$$K_{cr} = \frac{4d}{\pi a}$$

As vantagens do Método de Sintonia *On-Off* em relação ao Método Ciclo Contínuo são:

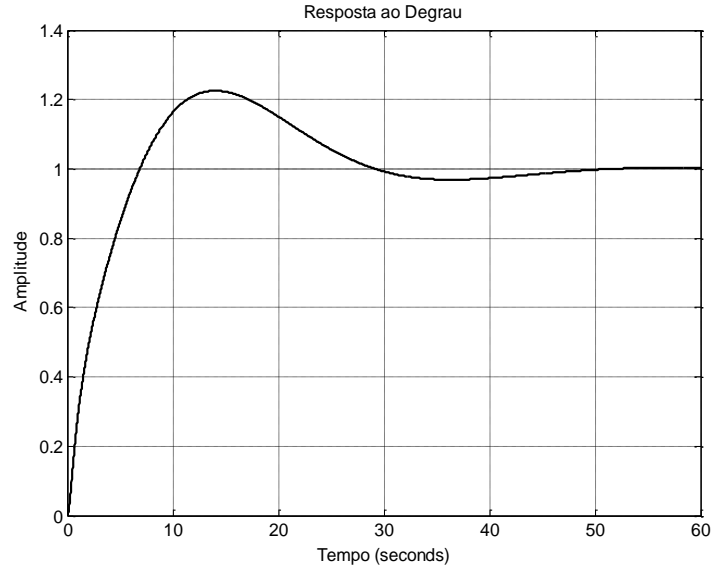
- Apenas um teste experimental simples é necessário.
- A amplitude da saída do processo, a , pode ser restringida ajustando a amplitude da saída do controlador, d .
- O sistema não é forçado ao limite da estabilidade.
- O teste experimental é facilmente automatizado usando produtos comerciais.

Como desvantagem, para processos lentos, pode não ser possível sujeitá-lo a 2 ou 4 ciclos de operação necessários para terminar o teste.

SOLUÇÃO

Da tabela de Ziegler-Nichols, tem-se: $K_P = 1,27$; $K_D = 2,34$; e $K_I = 0,17$

A resposta ao degrau do sistema com o controlador PID é dada abaixo.



O *overshoot* é inferior a 30%, não sendo necessário efetuar o ajuste fino.

6.6. MÉTODO DE PROJETO DO PID DIGITAL

A maneira mais comum de projeto de PID digital é feita a partir do PID analógico. Dada a equação do PID Analógico no domínio de Laplace,

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

A Transformada inversa de Laplace, com condições iniciais nulas, resulta em:

$$g_c(t) = K_P x(t) + K_D \frac{dx(t)}{dt} + K_I \int x(t) dt$$

no domínio do tempo.

Pode-se determinar a implementação digital através do uso de uma aproximação amostrada para a derivada e a integral na forma:

$$g_{c1}(kT_s) = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT_s} = \frac{1}{T_s} \{x(kT_s) - x(kT_s - T_s)\}$$

$$g_{c2}(kT_s) = \left. \int x(t) dt \right|_{t=kT_s} = g_{c2}(kT_s - T_s) + T_s x(kT_s)$$

Discretizando a equação do PID no tempo contínuo e substituindo as aproximações acima, tem-se:

$$g_c[k] = K_P x[k] + K_D g_{c1}[k] + K_I g_{c2}[k]$$

$$g_c[k] = K_P x[k] + \frac{K_D}{T_s} \{x[k] - x[k-1]\} + K_I (g_c[k-1] + T_s x[k])$$

Arrumando a equação acima:

$$g_c[k] = \left(K_P + \frac{K_D}{T_s} + K_I T_s \right) x[k] - \frac{K_D}{T_s} x[k-1] + K_I g_c[k-1]$$

Que é a equação do PID digital usando K_P , K_D e K_I do PID analógico.

Se $T_s = 1$, tem-se:

$$g_c[k] = (K_P + K_D + K_I)x[k] - K_Dx[k - 1] + K_Ig_c[k - 1]$$

6.7. SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS

Kuo 9ª ed: 9-9 a 9-11, 9-13, 9-14, 9-34, 9-37, 9-38, 9-40, 9-41, 9-44, 9-47, 9-51, 9-53 “a” e “b”.

Seborg 2ª ed: 12.1 a 12.3, 12.5a, 12.7 a 12.11, 12.13, 12.14