

4

Análise de Resposta Transitória

4-1 INTRODUÇÃO

Afirmou-se no Cap. 3 que o primeiro passo na análise de um sistema de controle era a obtenção de um modelo matemático do sistema. Uma vez obtido o modelo, dispõe-se de vários métodos para analisar o desempenho do sistema.

Na prática, o sinal de entrada em um sistema de controle não é conhecido *a priori*; é de caráter aleatório e seus valores instantâneos não podem ser expressos analiticamente. Somente em alguns casos especiais se conhece, antecipadamente, o sinal de entrada sob forma analítica ou por meio de curvas, como no caso do controle automático de máquinas-ferramentas.

Na análise e projeto de sistemas de controle, é necessário ter uma base para comparar o desempenho de vários desses sistemas. Esta base pode ser obtida especificando-se sinais de teste particulares a serem aplicados como entradas e comparando-se as respostas dos vários sistemas a esses sinais de entrada.

Muitos dos critérios de projeto são baseados em tais sinais ou na resposta de sistemas a mudanças nas condições iniciais (sem qualquer sinal de teste). O uso de sinais de teste pode ser justificado pela correlação que existe entre as características da resposta do sistema a um sinal de entrada de teste típico e a capacidade deste sistema para responder aos sinais de entrada reais.

Sinais de teste típicos. Os sinais de entrada para teste comumente usados são as funções degrau, rampa, aceleração, impulso, senoidal etc. Com estes sinais de teste, tanto a análise matemática quanto a análise experimental de sistemas de controle podem ser feitas com facilidade, uma vez que estes sinais são funções temporais muito simples.

A determinação de qual ou quais destes sinais de entrada típicos devem ser usados para analisar características do sistema depende da forma de solicitação a que o sistema será sujeito, mais freqüentemente, sob condições normais de operação. Quando as excitações de um sistema de controle são representadas por funções que variam gradualmente com o tempo, então a solicitação em rampa pode ser um bom sinal de teste. Para sistemas sujeitos a perturbações de transição brusca, uma solicitação em degrau pode ser um bom sinal de teste; e, para sistemas submetidos a excitações do tipo surto, uma função impulso pode ser a melhor escolha. Uma vez projetado o sistema de controle com base nos sinais de teste, normalmente o desempenho do sistema para entradas reais é satisfatório. O uso de tais sinais de teste permite comparar o desempenho de todos os sistemas com relação a uma mesma base.

Resposta transitória e resposta estacionária. A resposta temporal de um sistema de controle consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. Entende-se por resposta transitória aquela que vai do estado inicial até o estado final. Por resposta estacionária entende-se a maneira como o sinal de saída do sistema se comporta quando t tende a infinito.

Estabilidade absoluta, estabilidade relativa e erro estacionário. Ao projetar um sistema de controle, deve ser possível prever o comportamento dinâmico do sistema a partir do conhecimento dos componentes. A característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle é a estabilidade absoluta, isto é, se o sistema é estável ou instável. Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer perturbação ou sinal de entrada, permanece no mesmo estado. Um sistema de controle linear e invariante no tempo é estável se a saída retorna ao seu estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial. Um sistema de controle linear e invariante no tempo é criticamente estável se o sinal de saída apresenta oscilações que se conservam indefinidamente. É instável se os valores do sinal de saída divergem sem limite do seu estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial. Em casos reais, o sinal de saída de um sistema físico só pode aumentar até um certo valor, sendo limitado por “batentes” mecânicos; ou então o sistema pode parar de funcionar ou se tornar não-linear após o valor do sinal de saída ultrapassar uma certa amplitude, de modo que as equações diferenciais lineares não são mais válidas.

Outros comportamentos (além da estabilidade absoluta) do sistema, que se devem considerar cuidadosamente, incluem a estabilidade relativa e o erro estacionário. Dado que um sistema de controle físico envolve armazenamento de energia, ao se aplicar a ele um sinal de entrada, o sinal de saída não pode seguir a excitação imediatamente, exibindo uma resposta transitória antes que um regime permanente possa ser estabelecido. A resposta transitória de um sistema de controle real muitas vezes apresenta oscilações amortecidas antes de alcançar um estado ou regime estacionário. Se os valores de saída de um sistema em regime estacionário não coincidem exatamente com os do sinal de entrada, diz-se que o sistema apresenta erro estacionário. Este erro indica a exatidão do sistema. Ao se analisar um sistema de controle, devem ser examinados o comportamento da resposta transitória e o comportamento em regime estacionário.

Escopo do capítulo. Este capítulo se ocupa da resposta de sistemas a sinais aperiódicos (funções temporais tais como degrau, rampa, aceleração e impulso).

O escopo do capítulo é o seguinte: a Seção 4-1 apresentou a matéria introdutória do capítulo. A Seção 4-2 trata da resposta de sistemas de primeira ordem a sinais de entrada aperiódicos. A Seção 4-3 trata da resposta transitória de sistemas de segunda ordem. São apresentadas análises detalhadas das respostas de sistemas de segunda ordem a excitações em degrau, em rampa e impulsional. (A análise da resposta transitória de sistemas de ordem mais alta é discutida no Cap. 5.) A Seção 4-4 fornece uma introdução à solução da resposta transitória através do enfoque do MATLAB. Na Seção 4-5 é apresentado um exemplo de solução da resposta transitória com o uso do MATLAB.

4-2 SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

Considere-se o sistema de primeira ordem mostrado na Fig. 4-1(a). Fisicamente, este sistema pode representar um circuito RC, um sistema térmico etc. Um diagrama de blocos simplificado é apresentado na Fig. 4-1(b). A relação entrada-saída é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (4-1)$$

A seguir, serão analisadas as respostas do sistema a excitações em degrau unitário, rampa unitária e impulso unitário. As condições iniciais são supostas nulas.

Note-se que todos os sistemas com uma mesma função de transferência irão apresentar a mesma saída em resposta a uma determinada entrada. Dado um sistema físico, é possível atribuir à resposta matemática uma interpretação física.

Resposta ao degrau unitário de sistemas de primeira ordem. Como a transformada de Laplace da função degrau unitário é $1/s$, substituindo-se $R(s) = 1/s$ na Eq. (4-1) obtém-se

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s}$$

Expandindo $C(s)$ em frações parciais, tem-se

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad (4-2)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace da Eq. (4-2), obtém-se

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-3)$$

A Eq. (4-3) estabelece que, inicialmente, a saída $c(t)$ é nula e finalmente se torna unitária. Uma das características importantes desta curva de resposta exponencial $c(t)$ é que no instante $t = T$ o valor de $c(t)$ é 0,632, ou seja, o valor da resposta $c(t)$ alcançou 63,2% de sua excursão total. Isto pode ser visto facilmente substituindo-se $t = T$ em $c(t)$. Ou seja,

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0,632$$

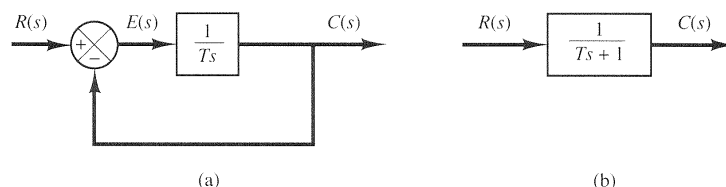


Fig. 4-1 (a) Diagrama de blocos de um sistema de primeira ordem; (b) diagrama de blocos simplificado.

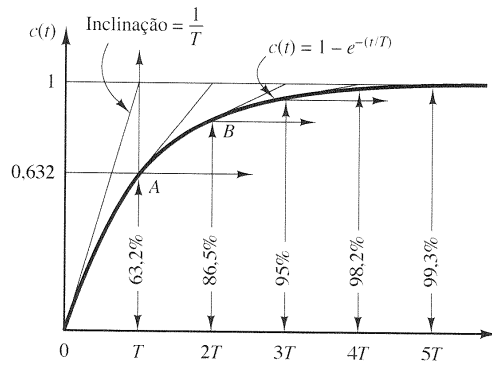


Fig. 4-2 Curva de resposta exponencial.

Note-se que, quanto menor for a constante de tempo T , mais rápida será a resposta do sistema. Outra característica importante da curva de resposta exponencial é que a inclinação da tangente em $t = 0$ é $1/T$, pois

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (4-4)$$

A saída alcançaria o valor final em $t = T$ caso se mantivesse a sua velocidade inicial de resposta. Constatase, a partir da Eq. (4-4), que a inclinação da curva de resposta $c(t)$ decresce monotonicamente de $1/T$ em $t = 0$ para zero em $t = \infty$.

A resposta exponencial $c(t)$ dada pela Eq. (4-3) é mostrada na Fig. 4-2. No intervalo de tempo correspondente a uma constante de tempo, a resposta exponencial foi de 0 a 63,2% do valor final. Em duas constantes de tempo, a resposta alcança 86,5% do valor final. Em $t = 3T, 4T$ e $5T$, a resposta alcança 95%, 98,2% e 99,3%, respectivamente, do valor final. Portanto, para $t \geq 4T$, a resposta permanece dentro de 2% do valor final. Como visto a partir da Eq. (4-3), o regime estacionário é alcançado matematicamente somente após um tempo infinito. Na prática, entretanto, uma estimativa razoável do tempo de resposta é o tempo que a curva de resposta necessita para alcançar a linha de 2% do valor final, ou seja, quatro constantes de tempo.

Considere-se o sistema indicado na Fig. 4-3. Para determinar experimentalmente se o sistema é ou não de primeira ordem, traça-se o gráfico da curva $\log |c(t) - c(\infty)|$, onde $c(t)$ é a saída do sistema, em função de t . Se ocorrer da curva ser uma reta, o sistema é de primeira ordem. A constante de tempo T pode ser lida do gráfico como sendo o tempo T que satisfaz a seguinte equação

$$c(T) - c(\infty) = 0,368 [c(0) - c(\infty)]$$

Note-se que em vez de traçar o gráfico de $\log |c(t) - c(\infty)|$ em função de t , é conveniente fazer o gráfico de $|c(t) - c(\infty)| = c(0) - c(\infty)$ em função de t em papel semilogarítmico, como visto na Fig. 4-4.

Resposta a rampa unitária de sistemas de primeira ordem. Como a transformada de Laplace da função rampa unitária é $1/s^2$, obtém-se a saída do sistema da Fig. 4-1(a) como sendo

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s^2}$$

Expandindo $C(s)$ em frações parciais, tem-se

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \quad (4-5)$$

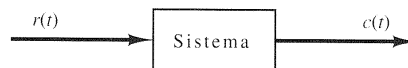


Fig. 4-3 Um sistema genérico.

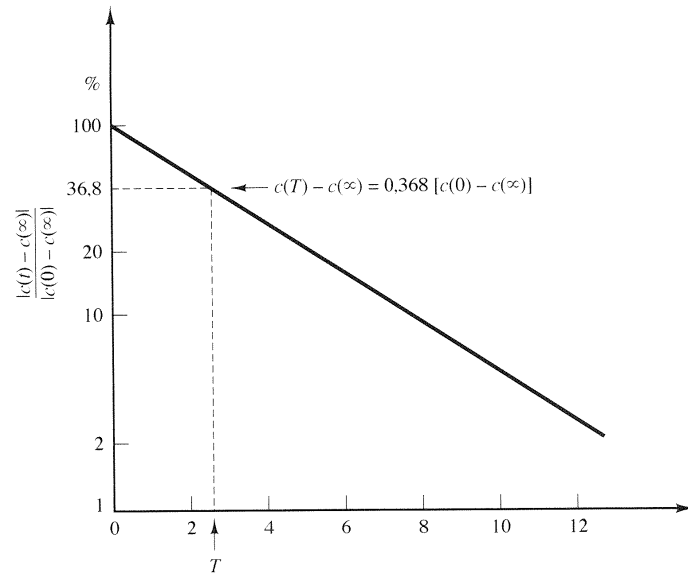


Fig. 4-4 Gráfico de $|c(t) - c(\infty)|/|c(0) - c(\infty)|$ versus t em papel semilog.

Tomando a transformada de Laplace inversa da Eq. (4-5), obtém-se

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0$$

O sinal de erro $e(t)$ é então

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

Quando t tende a infinito, $e^{-t/T}$ tende a zero, e, portanto, o sinal de erro $e(t)$ tende a T , ou seja,

$$e(\infty) = T$$

A excitação em rampa unitária e a saída do sistema são mostradas na Fig. 4-5. O erro do sistema para seguir um sinal de entrada em rampa unitária é igual a T para t suficientemente grande. Quanto menor a constante de tempo T , menor o erro estacionário ao seguir uma excitação em rampa.

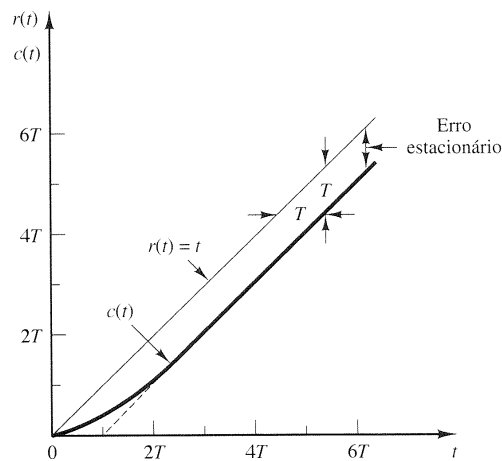


Fig. 4-5 Resposta do sistema mostrado na Fig. 4-1(a) a uma excitação em rampa unitária.

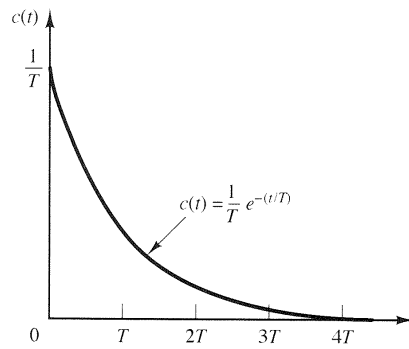


Fig. 4-6 Resposta do sistema mostrado na Fig. 4-1(a) a uma excitação em impulso unitário.

Resposta ao impulso unitário de sistemas de primeira ordem. Para uma excitação em impulso unitário, $R(s) = 1$ e a saída do sistema da Fig. 4-1(a) podem ser obtidas como sendo

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

ou seja,

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-6)$$

A curva de resposta dada pela Eq. (4-6) é mostrada na Fig. 4-6.

Uma propriedade importante de sistemas lineares invariantes no tempo. Na análise vista acima, mostrou-se que para uma excitação em rampa unitária a saída $c(t)$ é

$$c(t) = t - T + T e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Para uma excitação em degrau unitário, que é a derivada da rampa unitária, a saída $c(t)$ é

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Finalmente, para uma excitação em impulso unitário, que é a derivada do degrau unitário, a saída $c(t)$ é

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0$$

A comparação das respostas do sistema a estas três entradas mostra claramente que a resposta à derivada de um sinal de entrada pode ser obtida derivando-se a resposta do sistema para o sinal original. Também pode-se ver que a resposta à integral do sinal original pode ser obtida integrando-se a resposta do sistema ao sinal original e determinando-se as constantes de integração a partir da condição inicial de saída nula. Esta é uma propriedade de sistemas lineares e invariantes no tempo. Sistemas lineares variantes no tempo e sistemas não-lineares não possuem esta propriedade.

EXEMPLO 4-1

Seja o sistema de controle de nível apresentado na Fig. 4-7(a). (Supõe-se que o controlador é proporcional, isto é, o seu sinal de saída é proporcional ao seu sinal de entrada.) Admite-se que os valores de todas as variáveis, r , q , h e q_o são medidos em relação aos valores de regime permanente respectivos \bar{R} , \bar{Q} , \bar{H} e \bar{Q} . Admite-se também que a magnitude dos valores das variáveis r , q , h e q_o é suficientemente pequena de modo a aproximar o comportamento do sistema ao de um modelo matemático linear.

Com base na Seção 3-8, pode-se obter a função de transferência do sistema de nível de líquido como sendo

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Tendo em vista que o controlador é do tipo proporcional, a variação da vazão de entrada q_i é proporcional ao erro atuante e tal que $q_i = K_p K_v e$, onde K_p é o ganho do controlador e K_v o ganho da válvula de controle. Em termos de transformada de Laplace,

$$Q_i(s) = K_p K_v E(s)$$

Um diagrama de blocos deste sistema consta da Fig. 4-7(b). Um diagrama simplificado é dado na Fig. 4-7(c), onde $X(s) = (1/K_b)R(s)$, $K = K_p K_v R K_b$ e $T = RC$.

No que segue será investigada a resposta $h(t)$ a uma mudança de valor do sinal de referência. Será admitida uma mudança em degrau unitário no valor de $x(t)$, onde $x(t) = (1/K_b)r(t)$. A função de transferência a malha fechada entre $H(s)$ e $X(s)$ é dada por

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1 + K} \quad (4-7)$$

Como a transformada de Laplace da função degrau unitário é $1/s$, a substituição de $X(s) = 1/s$ na Eq. (4-7) fornece

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1 + K} \frac{1}{s}$$

A expansão de $H(s)$ em frações parciais conduz a

$$H(s) = \frac{K}{1 + K} \frac{1}{s} - \frac{K}{1 + K} \frac{1}{s + (1 + K)/T}$$

Tomando-se a transformada de Laplace inversa de ambos os membros desta última equação, obtém-se a solução no domínio do tempo $h(t)$:

$$h(t) = \frac{K}{1 + K} (1 - e^{-t/T_1}), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-8)$$

onde

$$T_1 = \frac{T}{1 + K}$$

A curva da resposta $h(t)$ está traçada na Fig. 4-7(d). Constata-se, com base na Eq. (4-8), que a constante de tempo T_1 do sistema a malha fechada é diferente da constante de tempo T do bloco do caminho direto.

A partir da Eq. (4-8) é possível ver que se t tender para infinito o valor de $h(t)$ tenderá para $K/(1 + K)$, ou seja,

$$h(\infty) = \frac{K}{1 + K}$$

Como $x(\infty) = 1$, há um erro estacionário de $1/(1 + K)$. Este erro é chamado erro residual (*offset*). Este valor se torna menor à medida que o valor de K aumenta.

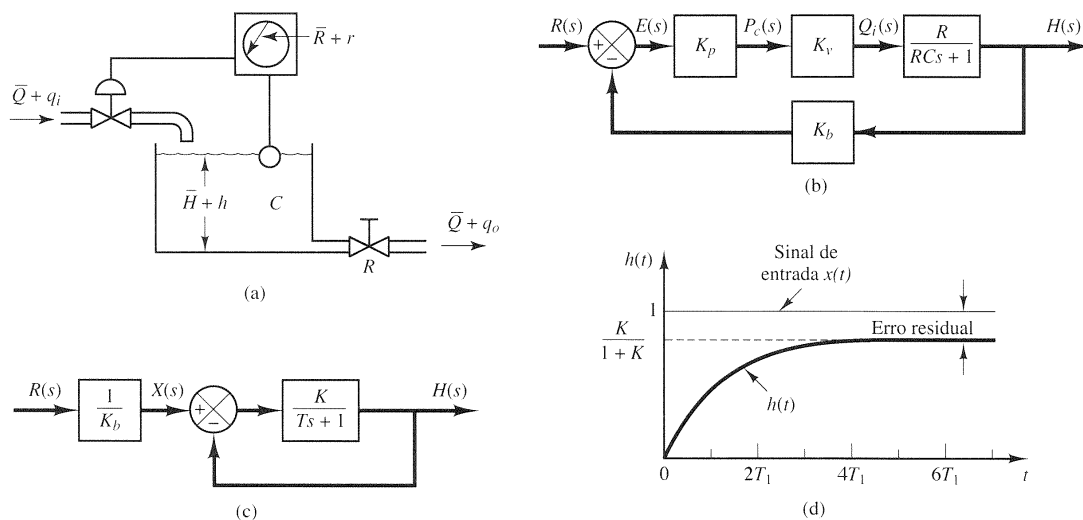


Fig. 4-7 (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) diagrama de blocos; (c) diagrama de blocos simplificado; (d) curva $h(t)$ versus t .

O erro residual é uma característica do controle proporcional de processos que não disponham de elemento integrador. (Neste caso há necessidade de erro não-nulo na entrada do controlador para se obter sinal de saída não-nulo.) Para eliminar o erro residual é necessário acrescentar ação de controle integral. (Ver Seção 5-3.)

4-3 SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

Nesta seção será obtida a resposta de um sistema de controle de segunda ordem típico a uma excitação em degrau, rampa e impulso. Será considerado aqui um motor de corrente contínua como exemplo de sistema de segunda ordem. Os motores de corrente contínua convencionais utilizam escovas mecânicas e coletores de comutação que requerem manutenção regularmente. Em virtude dos aperfeiçoamentos introduzidos nas escovas e nos coletores, contudo, muitos dos motores de corrente contínua usados em servossistemas podem ser operados praticamente sem manutenção. Alguns motores de corrente contínua utilizam comutação eletrônica. São os chamados motores de corrente contínua sem escovas (*brushless*).

Servomotores de corrente contínua (CC). Há muitos tipos de motores de corrente contínua em uso nas indústrias. Os motores de corrente contínua empregados nos servossistemas são chamados servomotores de corrente contínua. Nestes servomotores, a inércia do rotor tem sido reduzida a valores muito pequenos, resultando na disponibilidade de motores comerciais com elevada relação torque-momento de inércia. Alguns servomotores de corrente contínua possuem constantes de tempo extremamente pequenas. Servomotores de corrente contínua de potência relativamente pequena são usados em instrumentos e equipamentos periféricos de computadores, tais como acionadores de disco e de fita, impressoras e máquinas de processamento de texto. Servomotores CC de média e alta potências são usados em sistemas robóticos, máquinas fresadoras de comando numérico etc.

Nos servomotores CC, os enrolamentos de campo podem ser conectados em série com a armadura ou serem independentes do circuito de armadura. (Isto é, o campo magnético é produzido por um circuito separado.) Neste último caso, em que o campo é excitado separadamente, o fluxo magnético é independente da corrente de armadura. Em alguns servomotores CC, o campo magnético é produzido por meio de um ímã permanente e, portanto, o fluxo magnético é constante. Tais servomotores CC são chamados servomotores de ímã permanente. Os servomotores CC com enrolamento de campo separado, bem como os servomotores CC de ímã permanente, podem ser controlados pela corrente de armadura. Esta forma de controlar a saída do servomotor CC através da corrente de armadura é chamada controle de armadura.

No caso em que a corrente de armadura é mantida constante e a velocidade é controlada pela tensão de campo, o motor de corrente contínua é chamado de motor CC controlado pelo campo. (Alguns sistemas de controle de velocidade utilizam motores de corrente contínua controlados pelo campo.) O requisito de corrente de armadura constante, contudo, constitui uma séria desvantagem. (Prover uma fonte de corrente constante é muito mais difícil do que prover uma fonte de tensão constante.) As constantes de tempo de motores de corrente contínua controlados pelo campo em geral são grandes em comparação com as constantes de tempo de motores de tamanho equivalente, controlados pela armadura.

Os servomotores CC também podem ser acionados por um controlador eletrônico de movimento, freqüentemente chamado servo-acionador, numa combinação acionador-motor. O servo-acionador controla o movimento do servomotor CC e opera de vários modos. Alguns dos recursos são o posicionamento ponto a ponto, o perfil de velocidade e a aceleração programada. A utilização de controladores eletrônicos de movimento empregando acionadores com modulação por largura de pulsos (PWM — *pulse-width-modulated*) para controlar servomotores CC é freqüentemente vista em sistemas robóticos, sistemas de comando numérico e em outros sistemas de controle de posição e/ou velocidade.

No que se segue, será discutido o controle de armadura de servomotores de corrente contínua.

Um servossistema. Considere-se o servossistema mostrado na Fig. 4-8(a). O objetivo deste sistema é controlar a posição da carga mecânica de acordo com a posição de referência. A operação deste sistema é a seguinte: um par de potenciômetros age como dispositivo de medição de erro. Eles convertem as posições de entrada e saída em sinais elétricos proporcionais. O sinal de entrada de comando determina a posição angular r do cursor do potenciômetro de entrada. A posição angular r é a entrada de referência para o sistema, e a tensão elétrica do cursor é proporcional à posição angular do cursor. A posição angular do eixo de saída determina a posição angular c do cursor do potenciômetro de saída. A diferença entre a posição angular de entrada r e a posição angular de saída c constitui o sinal de erro e , ou seja,

$$e = r - c$$

A diferença de tensão $e_r - e_c = e_e$ é a tensão de erro, onde e_r é proporcional a r e e_c é proporcional a c ; ou seja, $e_r = K_0 r$ e $e_c = K_0 c$, sendo K_0 uma constante de proporcionalidade. O sinal de erro que aparece nos terminais dos potenciômetros é amplificado pelo amplificador cuja constante de ganho é K_1 . A tensão de saída deste amplificador é aplicada ao circuito de armadura do motor CC. (O amplificador deve ter uma impedância de entrada muito alta porque os potenciômetros são essencialmente circuitos de alta impedância e não toleram consumo de corrente. Ao mesmo tempo, o amplificador deve ter impedância de saída baixa, pois ele alimenta o circuito de armadura do motor.) Uma tensão fixa é aplicada ao enrolamento de campo. Quando existe um erro, o motor desenvolve um torque para girar a carga de saída de tal forma a reduzir o erro a zero. Para corrente de campo constante, o torque desenvolvido pelo motor é

$$T = K_2 i_a$$

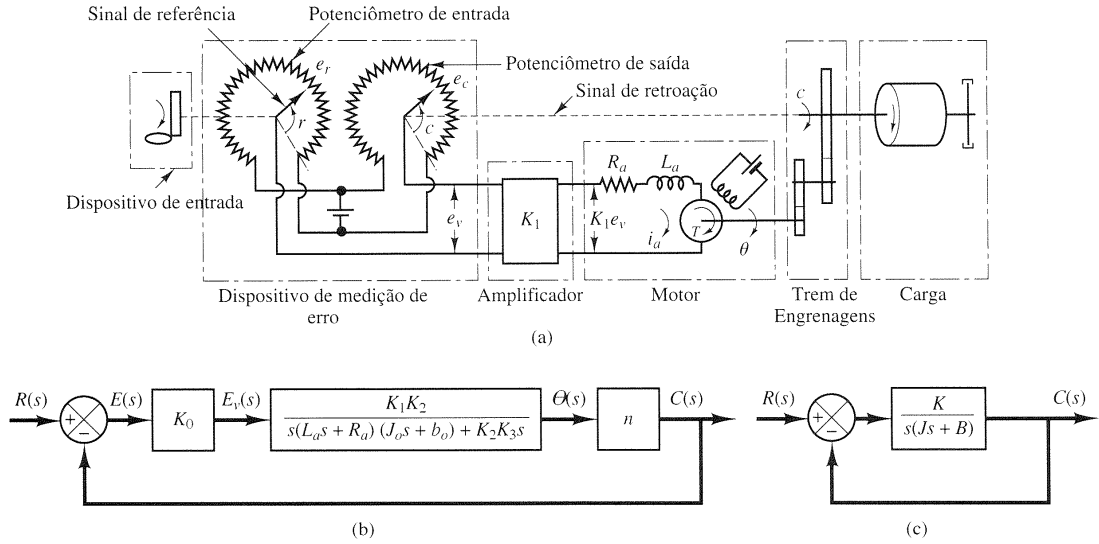


Fig. 4-8 (a) Diagrama esquemático de servossistema; (b) diagrama de blocos do sistema; (c) diagrama de blocos simplificado.

onde K_2 é a constante de torque do motor e i_a é a corrente de armadura.

Note-se que a inversão de polaridade da corrente i_a implica a inversão de sinal do torque T , o que acarretará uma inversão no sentido de rotação do eixo do motor.

Quando a armadura estiver girando, será induzida na armadura uma tensão elétrica proporcional ao fluxo e à velocidade angular. Com um fluxo constante, a tensão induzida e_b é diretamente proporcional à velocidade angular $d\theta/dt$, ou seja,

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt} \quad (4-9)$$

onde e_b é a força contra-eletromotriz, K_3 é a constante de força contra-eletromotriz do motor, e θ é o deslocamento angular do eixo do motor.

A velocidade de um servomotor CC controlado pela armadura é controlada por meio da tensão e_a aplicada à armadura. (A tensão $e_a = K_1 e_v$ é a saída do amplificador.) A equação diferencial para o circuito de armadura é

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

ou seja,

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v \quad (4-10)$$

A equação para equilíbrio de torque é

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (4-11)$$

onde J_0 é a inércia da combinação motor, carga e trem de engrenagens referidos ao eixo do motor e b_0 é o coeficiente de atrito viscoso da combinação motor, carga e trem de engrenagens referidos ao eixo do motor. A função de transferência entre o deslocamento angular do eixo do motor e o sinal de erro é obtida a partir das Eqs. (4-10) e (4-11) como se segue

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s} \quad (4-12)$$

onde $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ e $E_v(s) = \mathcal{L}[e_v(t)]$. Supõe-se que a relação das engrenagens do trem é tal que o eixo de saída gira n vezes para cada revolução do eixo do motor. Portanto,

$$C(s) = n\Theta(s) \quad (4-13)$$

onde $C(s) = \mathcal{L}[c(t)]$ e $c(t)$ é o deslocamento angular do eixo de saída. A relação entre $E_v(s)$, $R(s)$ e $C(s)$ é

$$E_v(s) = K_0[R(s) - C(s)] = K_0E(s) \quad (4-14)$$

onde $R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$. O diagrama de blocos deste sistema pode ser construído a partir das Eqs. (4-12), (4-13) e (4-14), como é visto na Fig. 4-8(b). A função de transferência do percurso direto deste sistema é

$$G(s) = \frac{C(s)}{\Theta(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_0K_1K_2n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2K_3]}$$

Como o valor de L_a é normalmente pequeno, ele pode ser desprezado, e a função de transferência do percurso direto se torna

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_0K_1K_2n}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2K_3]} \\ &= \frac{K_0K_1K_2n/R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2K_3}{R_a}\right)s} \end{aligned} \quad (4-15)$$

O termo $[b_0 + (K_2K_3/R_a)]s$ indica que a força contra-eletromotriz do motor tem o efeito de aumentar o atrito viscoso do sistema. A inércia J_0 e o coeficiente de atrito viscoso $[b_0 + (K_2K_3/R_a)]$ estão referidos ao eixo do motor. Se J_0 e $[b_0 + (K_2K_3/R_a)]$ forem multiplicados por $1/n^2$, a inércia e o coeficiente de atrito viscoso serão referidos ao eixo de saída. Introduzindo-se novos parâmetros definidos por

$$\begin{aligned} J &= J_0/n^2 = \text{momento de inércia referido ao eixo de saída} \\ B &= [b_0 + (K_2K_3/R_a)]/n^2 = \text{coeficiente de atrito viscoso referido ao eixo de saída} \\ K &= K_0K_1K_2/nR_a \end{aligned}$$

pode-se simplificar a função de transferência $G(s)$ dada pela Eq. (4-15) resultando

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

ou

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (4-16)$$

onde

$$K_m = \frac{K}{B}, \quad T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3}$$

O diagrama de blocos do sistema mostrado na Fig. 4-8(b) é então simplificado como visto na Fig. 4-8(c)

A seguir, serão investigadas as respostas dinâmicas deste sistema à excitação em degrau unitário, rampa unitária e impulso unitário.

Das Eqs. (4-15) e (4-16) pode-se ver que as funções de transferência envolvem o termo $1/s$. Assim, este sistema possui a propriedade de integração. Na Eq. (4-16) observa-se que a constante de tempo do motor é tão menor quanto menores forem os valores de R_a e J_0 . Com J_0 pequeno, à medida que a resistência R_a é reduzida, a constante de tempo do motor tende a zero e o motor se comporta como um integrador ideal.

Efeito de carga na dinâmica do servomotor. A mais importante dentre as características de um servomotor é o valor máximo de aceleração que se pode obter. Para um determinado valor de torque, o momento de inércia do rotor deve ser mínimo. Como o servomotor opera sob condições que variam continuamente, ocorrem a cada instante aceleração e desaceleração do rotor. O servomotor tanto deve ser capaz de absorver quanto de gerar energia mecânica. O desempenho do servomotor, quando usado como freio, deve ser satisfatório.

Sejam J_m e b_m , respectivamente, o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso do rotor, e sejam J_L e b_L , respectivamente, o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso da carga, referidos ao eixo de saída. Admita-se que o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso do trem de engrenagens sejam desprezíveis ou estejam incluídos,

respectivamente, em J_L e b_L . Assim, o momento de inércia equivalente J_{eq} e o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente b_{eq} , referidos ao eixo do motor, podem ser escritos como (para maiores detalhes, ver o Problema A-4-4)

$$\begin{aligned} J_{eq} &= J_m + n^2 J_L \\ b_{eq} &= b_m + n^2 b_L \end{aligned}$$

onde $n(n < 1)$ é a relação de engrenagem entre o eixo do motor e o eixo da carga. Se a relação de engrenagem n for pequena e $J_m \gg n^2 J_L$, então o momento de inércia da carga referida ao eixo motor é desprezível em relação ao momento de inércia do rotor. Um argumento similar se aplica ao atrito viscoso. Em geral, quando a relação de engrenagem n é pequena, a função de transferência do servomotor elétrico pode ser obtida sem levar em conta o momento de inércia e o atrito viscoso da carga. Contudo, se nem J_m nem $n^2 J_L$ forem pequenos um em relação ao outro, deve-se utilizar o valor do momento de inércia equivalente J_{eq} na determinação da função de transferência do conjunto motor-carga.

Resposta de sistemas de segunda ordem à excitação em degrau. A função de transferência de malha fechada do sistema mostrado na Fig. 4-8(c) é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \quad (4-17)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]} \quad (4-18)$$

Os pólos a malha fechada são complexos se $B^2 - 4JK < 0$, e são reais se $B^2 - 4JK \geq 0$. Para a análise da resposta transitória, é conveniente escrever

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

onde σ é chamado de *atenuação*, ω_n , é a *frequência natural não-amortecida* e ζ é o *coeficiente de amortecimento* do sistema. O coeficiente de amortecimento ζ é a relação entre o amortecimento real B e o amortecimento crítico $B_c = 2\sqrt{JK}$, ou seja,

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

Em termos de ζ e de ω_n , o sistema mostrado na Fig. 4-8(c) pode ser modificado de acordo com o mostrado na Fig. 4-9 e a função de transferência a malha fechada $C(s)/R(s)$ dada pela Eq. (4-18) pode ser escrita

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4-19)$$

O comportamento dinâmico dos sistemas de segunda ordem pode então ser descrito em função de dois parâmetros ζ e ω_n . Se $0 < \zeta < 1$, os pólos a malha fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano s . O

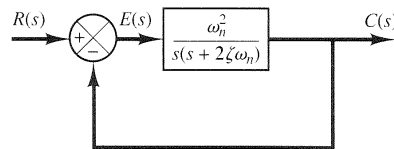


Fig. 4-9 Sistema de segunda ordem.

sistema então é dito subamortecido, e a resposta transitória é oscilatória. Se $\zeta = 1$, o sistema é dito criticamente amortecido. Sistemas superamortecidos correspondem a $\zeta > 1$. A resposta transitória de sistemas amortecidos criticamente e superamortecidos não oscila. Se $\zeta = 0$, a resposta transitória não decai.

Será determinada, agora, a resposta do sistema mostrado na Fig. 4-9 a uma excitação em degrau unitário. Consideram-se três casos diferentes: o subamortecido ($0 < \zeta < 1$), o criticamente amortecido ($\zeta = 1$) e o superamortecido ($\zeta > 1$).

(1) Caso subamortecido ($0 < \zeta < 1$): Neste caso, $C(s)/R(s)$ pode ser escrita

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. A frequência ω_d é chamada de *frequência natural amortecida*. Para uma excitação em degrau unitário, $C(s)$ pode ser escrita como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (4-20)$$

A transformada de Laplace inversa da Eq. (4-20) pode ser obtida facilmente se $C(s)$ for escrita sob a seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

No Cap. 2 foi mostrado que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Laplace inversa da Eq. (4-20) é obtida como se segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[C(s)] &= c(t) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (4-21)$$

Este resultado pode ser obtido diretamente usando-se uma tabela de transformadas de Laplace. Da Eq. (4-20) pode-se ver que a frequência da oscilação transitória é a frequência natural amortecida ω_d e, portanto, varia com o coeficiente de amortecimento ζ . O sinal de erro para este sistema é a diferença entre a entrada e a saída, e é

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Este sinal de erro apresenta uma oscilação senoidal amortecida. Em regime permanente, ou em $t = \infty$, não existe erro entre a entrada e a saída.

Se o coeficiente de amortecimento ζ for igual a zero, a resposta se torna não-amortecida e as oscilações continuam indefinidamente. A resposta $c(t)$ para o caso de amortecimento nulo pode ser obtida substituindo-se $\zeta = 0$ na Eq. (4-21), resultando

$$c(t) = 1 - \cos \omega_d t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-22)$$

Portanto, da Eq. (4.22) vê-se que ω_n representa a frequência natural não-amortecida do sistema. Isto é, ω_n é a frequência em que o sistema oscilaria se o amortecimento fosse reduzido a zero. Se o sistema linear tiver amortecimento, mesmo que só um pouco, a frequência natural não-amortecida não poderá ser observada experimentalmente. A frequência que pode ser observada é a frequência natural amortecida ω_d , que é igual a $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Esta frequência é sempre menor que a frequência natural não-amortecida. Um aumento em ζ irá reduzir a frequência natural amortecida ω_d . Se o valor de ζ for aumentado além da unidade, a resposta se tornará superamortecida e não irá oscilar.

(2) Caso criticamente amortecido ($\zeta = 1$): Se os dois pólos de $C(s)/R(s)$ forem aproximadamente iguais, o sistema pode ser aproximado por um com amortecimento crítico.

Para uma excitação em degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e $C(s)$ pode ser escrita

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad (4-23)$$

A transformada de Laplace inversa da Eq. (4-23) pode ser determinada como sendo

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-24)$$

Este resultado pode ser obtido fazendo-se ζ tender a 1 na Eq. (4-21) e usando-se o seguinte limite:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_d t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega_n t$$

(3) Caso superamortecido ($\zeta > 1$): Neste caso, os dois pólos de $C(s)/R(s)$ são reais, negativos e distintos. Para uma excitação em degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e $C(s)$ pode ser escrita

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad (4-25)$$

A transformada de Laplace inversa da Eq. (4-25) é

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (4-26)$$

onde $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ e $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Portanto, a resposta $c(t)$ inclui dois termos de exponencial decrescente.

Quando ζ for consideravelmente maior que a unidade, uma das duas exponenciais decrescentes decai mais rapidamente que a outra, de tal forma que o termo da exponencial mais rápida (que corresponde a uma constante de tempo menor) pode ser desprezado. Isto é, se $-s_2$ estiver localizado muito mais perto do eixo $j\omega$ do que $-s_1$ (o que significa $|s_2| \ll |s_1|$), então para se obter uma solução aproximada pode-se desprezar $-s_1$. Isto é permissível porque o efeito de $-s_1$ na resposta é muito menor que o de $-s_2$, pois o termo contendo s_1 na Eq. (4-26) decai muito mais rapidamente do que o termo contendo s_2 . Uma vez que o termo exponencial mais rápido desaparece, a resposta é similar à de um sistema de primeira ordem, e $C(s)/R(s)$ pode ser aproximada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

Esta forma aproximada é uma consequência direta do fato de que os valores inicial e final tanto da $C(s)/R(s)$ original como da aproximação coincidem.

Com a função de transferência $C(s)/R(s)$ aproximada, a resposta ao degrau unitário pode ser obtida como

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

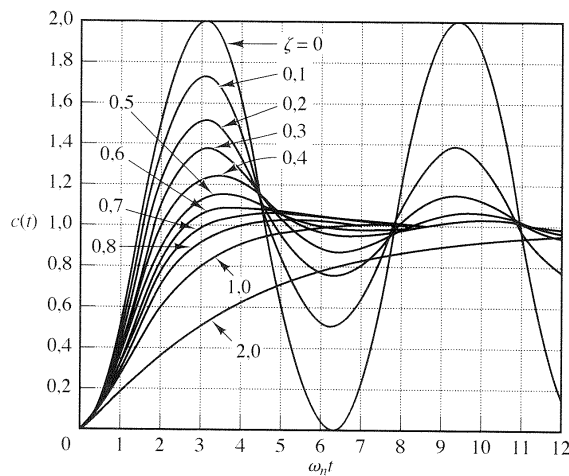


Fig. 4-10 Curvas de resposta do sistema mostrado na Fig. 4-9 a uma excitação em degrau unitário.

A resposta temporal $c(t)$ é então

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Isto fornece uma resposta aproximada ao degrau unitário quando um dos pólos de $C(s)/R(s)$ pode ser desprezado.

Na Fig. 4-10 mostra-se uma família de curvas de $c(t)$ para diversos valores de ζ , tendo como abscissa adimensional a variável $\omega_n t$. As curvas são funções unicamente de ζ . Estas curvas são obtidas a partir das Eqs. (4-21), (4-24) e (4-26). O sistema descrito por estas equações se encontrava inicialmente em repouso.

Note-se que dois sistemas de segunda ordem que têm o mesmo valor de ζ mas diferentes valores de ω_n terão o mesmo valor de ultrapassagem e o mesmo padrão oscilatório. Diz-se que tais sistemas possuem a mesma estabilidade relativa.

É importante notar que as curvas de resposta ao degrau de sistemas de segunda ordem cujas funções de transferência a malha fechada sejam diferentes da fornecida pela Eq. (4-19) podem ser bem diferentes das mostradas na Fig. 4-10.

Da Fig. 4-10 vê-se que um sistema subamortecido com valores de ζ entre 0,5 e 0,8 chega perto do valor final mais rapidamente que um sistema com amortecimento crítico ou um sistema superamortecido. Entre os sistemas que respondem sem oscilações, um sistema com amortecimento crítico apresenta a resposta mais rápida. Um sistema superamortecido sempre é lento ao responder a quaisquer excitações.

Definições de especificações de regime transitório. Em muitos casos práticos, as características de desempenho desejadas de sistemas de controle são especificadas em termos de grandezas no domínio do tempo. Sistemas com armazenamento de energia não podem responder instantaneamente e terão respostas transitórias sempre que submetidos a excitações ou a perturbações.

Freqüentemente, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos da resposta transitória a uma excitação em degrau unitário, pois este sinal é fácil de ser gerado e corresponde a uma solicitação suficientemente severa. (Conhecendo-se a resposta a uma excitação em degrau, é matematicamente possível computar a resposta para qualquer outro tipo de sinal.)

A resposta transitória de um sistema a uma excitação em degrau unitário depende das condições iniciais. Por uma questão de conveniência na comparação de respostas transitórias de vários sistemas, constitui uma praxe usar a condição inicial padrão de que o sistema está inicialmente em repouso com valor nulo da variável de saída e de todas as suas derivadas. Assim, as características do sinal de resposta podem ser facilmente comparadas.

Na prática, a resposta transitória de um sistema de controle freqüentemente apresenta oscilações amortecidas antes de alcançar o estado ou regime estacionário. Ao especificar as características de resposta transitória de um sistema de controle a uma excitação em degrau unitário, é comum especificar-se o seguinte:

1. Tempo de atraso, t_d
2. Tempo de subida, t_r
3. Instante de pico, t_p
4. Máximo valor de ultrapassagem, M_p
5. Tempo de acomodação, t_s

Estas especificações são definidas, a seguir, e mostradas graficamente na Fig. 4-11.

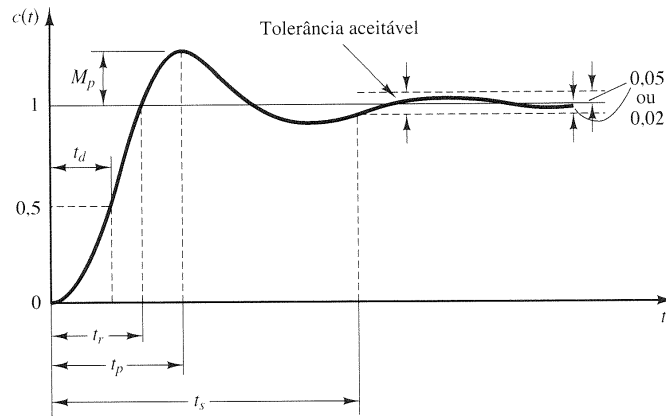


Fig. 4-11 Curva de resposta ao degrau unitário mostrando t_d , t_r , t_p , M_p e t_s .

1. Tempo de atraso, t_d : o tempo de atraso é o tempo necessário para que a resposta alcance, pela primeira vez, a metade do valor final.
2. Tempo de subida, t_r : o tempo de subida é o tempo necessário para que a resposta passe de 10% a 90%, de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do seu valor final. Para sistemas de segunda ordem subamortecidos, normalmente se usa o tempo de subida de 0% a 100%. Para sistemas de segunda ordem superamortecidos, o tempo de subida normalmente usado diz respeito ao intervalo de 10% a 90%.
3. Instante de pico, t_p : o instante de pico é o tempo necessário para que a resposta alcance o primeiro pico de ultrapassagem.
4. Máxima ultrapassagem (percentual), M_p : a máxima ultrapassagem é o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário. Quando o valor final de regime estacionário da resposta difere da unidade, é comum usar-se a máxima ultrapassagem percentual, definida por

$$\text{Máxima ultrapassagem percentual} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

O valor de máxima ultrapassagem (percentual) indica diretamente a estabilidade relativa do sistema.

5. Tempo de acomodação, t_s : o tempo de acomodação é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores dentro de uma faixa em torno do valor final e aí permaneça. O intervalo de valores no interior da faixa é especificado por uma porcentagem absoluta do valor final (normalmente 2% ou 5%). O tempo de acomodação está relacionado com a maior constante de tempo do sistema de controle. A escolha de que porcentagem usar no critério de erro pode ser determinada a partir dos objetivos do projeto do sistema em questão.

As especificações de domínio de tempo que se acabou de fornecer são bastante importantes, visto que a maioria dos sistemas de controle são sistemas no domínio do tempo, isto é, eles devem apresentar respostas temporais aceitáveis. (Isto significa que o sistema de controle deve ser modificado até que a resposta transitória seja satisfatória.) Observe-se que se forem especificados os valores de t_d , t_r , t_p , t_s e M_p , então a forma da curva de resposta estará virtualmente determinada. Isto pode ser visto claramente na Fig. 4-12.

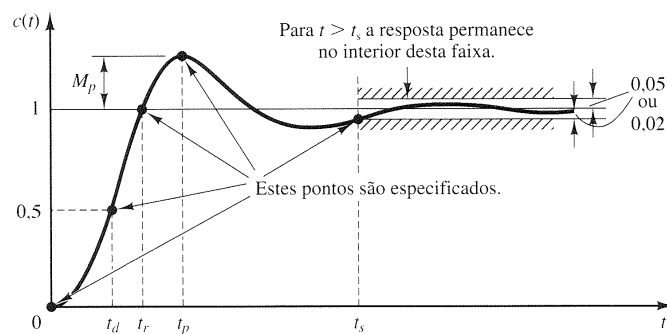


Fig. 4-12 Especificações de regime transitório.

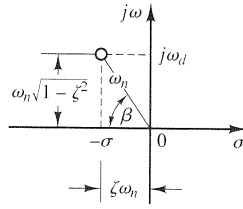


Fig. 4-13 Definição do ângulo β .

Note-se que nem todas estas especificações se aplicam necessariamente a qualquer caso dado. Por exemplo, para um sistema superamortecido, os termos instante do pico e máxima ultrapassagem não se aplicam. (Para sistemas que apresentem erros de regime estacionário a excitações em degrau, este erro deve ser mantido dentro de um nível percentual especificado. Discussões detalhadas de erros de regime estacionário são apresentadas mais adiante, na Seção 5-10.)

Alguns comentários sobre especificações de respostas transitórias. Exceto em certas aplicações, onde não se podem tolerar oscilações, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e suficientemente amortecida. Portanto, para uma resposta transitória aceitável de um sistema de segunda ordem, o coeficiente de amortecimento deve estar situado entre 0,4 e 0,8. Valores menores para ζ ($\zeta < 0,4$) acarretam valores de máxima ultrapassagem excessivos na resposta transitória, e um sistema com um valor grande de ζ ($\zeta > 0,8$) responderá de forma lenta.

Será visto, mais tarde, que a máxima ultrapassagem e o tempo de subida são especificações conflitantes. Em outras palavras, não se pode minimizar a máxima ultrapassagem e o tempo de subida simultaneamente. Se um deles for reduzido, o outro necessariamente aumentará.

Sistemas de segunda ordem e especificações de resposta transitória. A seguir serão obtidas expressões para determinar o tempo de subida, o instante de pico, a máxima ultrapassagem e o tempo de acomodação de sistemas de segunda ordem descritos pela Eq. (4-19). Estes valores serão obtidos em termos de ζ e ω_n . Supõe-se que o sistema seja subamortecido.

Tempo de subida t_r : Referindo-se à Eq. (4-21), obtém-se o tempo de subida t_r fazendo $c(t_r) = 1$ ou seja,

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad (4-27)$$

Como $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$, obtém-se o seguinte resultado com base na Eq. (4-27):

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

ou

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Em consequência, o tempo de subida t_r é

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (4-28)$$

onde β é definido na Fig. 4-13. É claro que um valor pequeno de t_r impõe que se tenha um valor grande para ω_d .

Instante do pico t_p : Com base na Eq. (4-21) pode-se obter o instante do pico derivando-se $c(t)$ com relação ao tempo e fazendo a derivada igual a zero. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &+ e^{-\zeta\omega_n t} \left(\omega_d \sin \omega_d t - \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right) \end{aligned}$$

Nesta última equação, os termos envolvendo cosseno se cancelam e $dc(t)/dt$, calculado em $t = t_p$, pode ser simplificado para

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = (\sin \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0$$

Isto fornece a seguinte equação

$$\sin \omega_d t_p = 0$$

ou

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Como o instante do pico corresponde ao primeiro pico da ultrapassagem, $\omega_d t_p = \pi$. Portanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (4-29)$$

O instante do pico t_p corresponde ao meio ciclo de frequência da oscilação amortecida.

Máximo valor de ultrapassagem M_p : O máximo valor de ultrapassagem ocorre no instante do pico, ou seja, em $t = t_p = \pi/\omega_d$. Portanto, da Eq. (4-21), M_p é obtido como sendo

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta \omega_n (\pi/\omega_d)} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \end{aligned} \quad (4-30)$$

O valor máximo de ultrapassagem percentual é $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} \times 100\%$.

Tempo de acomodação t_s : Para um sistema subamortecido de segunda ordem, a resposta transitória é obtida a partir da Eq. (4-21) como sendo

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \quad \text{para } t \geq 0$$

As curvas $1 \pm (e^{-\zeta \omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2})$ são as envoltórias da resposta transitória a uma excitação em degrau unitário. A curva de resposta $c(t)$ sempre permanece no interior do espaço delimitado pelo par de envoltórias, conforme mostrado na Fig. 4-14. A constante de tempo destas curvas envoltórias é $1/\zeta \omega_n$.

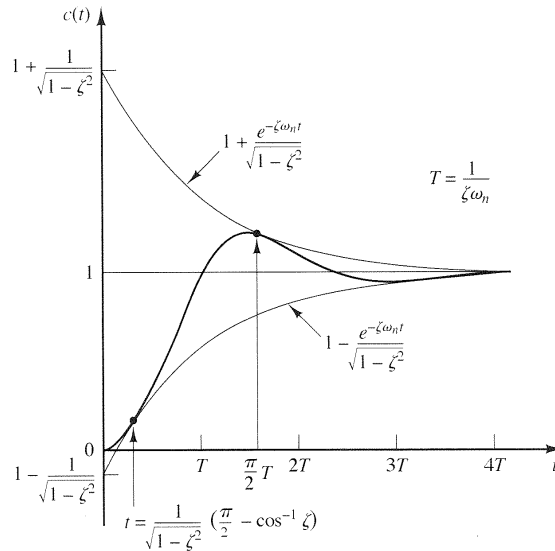


Fig. 4-14 Par de curvas envoltórias da resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Fig. 4-9.

A velocidade de decaimento da resposta transitória depende do valor da constante de tempo $1/\zeta\omega_n$. Para um dado valor de ω_n , o tempo de acomodação t_s é uma função do coeficiente de amortecimento ζ . Da Fig. 4-10 vê-se que para o mesmo valor de ω_n e para a gama de valores de ζ entre 0 e 1, o tempo de acomodação t_s , para um sistema ligeiramente amortecido, é maior do que para um sistema adequadamente amortecido. Para um sistema superamortecido, o tempo de acomodação t_s se torna grande por causa do início lento da resposta.

O tempo de acomodação correspondente a uma faixa de tolerância de $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$ pode ser medido em termos da constante de tempo $T = 1/\zeta\omega_n$, a partir das curvas da Fig. 4-10 para diferentes valores de ζ . Os resultados são mostrados na Fig. 4-15. Para $0 < \zeta < 0,9$, se for utilizado o critério de 2%, então t_s é aproximadamente quatro vezes a constante de tempo do sistema. Se for utilizado o critério de 5%, então t_s é aproximadamente três vezes a constante de tempo. Note-se que o tempo de acomodação alcança um valor mínimo em torno de $\zeta = 0,76$ (para o critério de 2%) ou $\zeta = 0,68$ (para o critério de 5%) e depois aumenta quase linearmente para grandes valores de ζ . As descontinuidades nas curvas da Fig. 4-15 surgem porque uma variação infinitesimal no valor de ζ pode causar uma variação finita no tempo de acomodação.

Por conveniência, na comparação das respostas dos sistemas comumente definem-se os valores de tempo de acomodação t_s como sendo

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de } 2\%) \quad (4-31)$$

ou

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de } 5\%) \quad (4-32)$$

Note-se que o tempo de acomodação é inversamente proporcional ao produto do coeficiente de amortecimento pela frequência natural não-amortecida do sistema. Como o valor de ζ é normalmente determinado a partir da especificação requerida de máximo valor de ultrapassagem, o tempo de acomodação é determinado principalmente pela frequência natural não-amortecida ω_n . Isto significa que a duração do período transitório pode ser variada, sem modificar o valor máximo de ultrapassagem, pelo ajuste da frequência natural não-amortecida ω_n .

Da análise anterior, fica evidente que para uma resposta rápida, ω_n deve ser grande. Para limitar o valor máximo de ultrapassagem M_p e fazer o tempo de acomodação pequeno, o coeficiente de amortecimento ζ não deve ser muito pequeno. A relação entre o valor máximo de ultrapassagem percentual M_p e o coeficiente de amortecimento ζ é apresentada na Fig. 4-16. Convém observar que se o coeficiente de amortecimento estiver situado entre 0,4 e 0,8, então o valor máximo de ultrapassagem percentual para resposta ao degrau estará entre 25% e 2,5%.

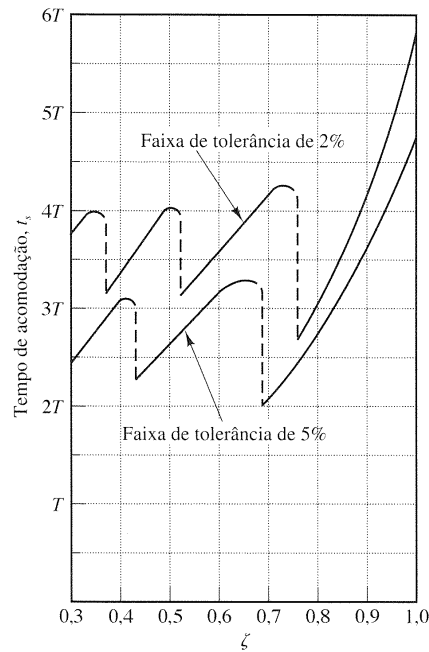


Fig. 4-15 Curvas de tempo de acomodação t_s versus ζ .

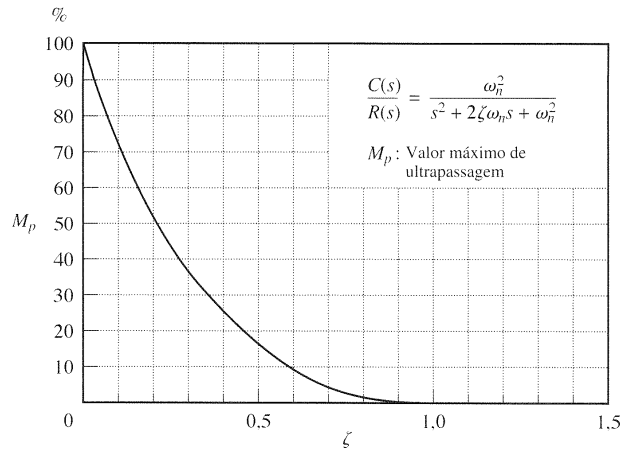


Fig. 4-16 Curva de M_p versus ζ .

EXEMPLO 4-2

Seja considerado o sistema mostrado na Fig. 4-9, onde $\zeta = 0,6$ e $\omega_n = 5$ rad/s. Serão obtidos o tempo de subida t_r , o instante do pico t_p , a máxima ultrapassagem M_p e o tempo de acomodação t_s quando o sistema for submetido a uma solicitação em degrau unitário.

Com base nos valores dados de ζ e ω_n , obtém-se $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$ e $\sigma = \zeta \omega_n = 3$.

Tempo de subida t_r : O tempo de subida é

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3,14 - \beta}{4}$$

onde β é dado por

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0,93 \text{ rad}$$

O tempo de subida t_r é então

$$t_r = \frac{3,14 - 0,93}{4} = 0,55 \text{ sec}$$

Instante de pico t_p : O instante de pico é

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{4} = 0,785 \text{ sec}$$

Valor máximo de ultrapassagem M_p : O valor máximo de ultrapassagem é

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(3/4) \times 3,14} = 0,095$$

O valor máximo de ultrapassagem percentual é então 9,5%.

Tempo de acomodação t_s : Para o critério de 2%, o tempo de acomodação é

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ sec}$$

Para o critério de 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ sec}$$

Servossistema com retroação de velocidade. A derivada do sinal de saída pode ser utilizada para melhorar o desempenho do sistema. Na obtenção da derivada do sinal de saída de posição, é desejável recorrer ao uso de um tacômetro

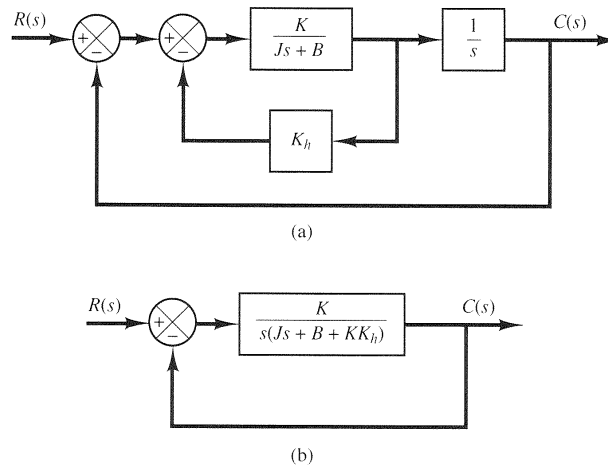


Fig. 4-17 (a) Diagrama de blocos de um servossistema; (b) diagrama de blocos simplificado.

em vez de derivar fisicamente o sinal de saída. (Note-se que a derivação amplifica os efeitos do ruído. Na realidade, na presença de ruídos com descontinuidade, a derivação amplifica mais o ruído do que o sinal útil. Por exemplo, a saída de um potenciômetro é um sinal de tensão com descontinuidades em decorrência do movimento do cursor sobre as espiras. São induzidas tensões na ação de comutação de uma espira para outra, gerando, assim, sinais transitórios. Por conseguinte, o sinal de saída de um potenciômetro não deve ser seguido de um elemento derivador.)

Seja o servossistema mostrado na Fig. 4-17(a). Neste dispositivo, o sinal de velocidade, juntamente com o sinal de posição, retroage para produzir o sinal de erro atuante. Em qualquer servossistema o sinal de velocidade pode ser gerado por meio de um tacômetro. O diagrama de blocos mostrado na Fig. 4-17(a) pode ser simplificado, conforme indicado na Fig. 4-17(b), produzindo

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \quad (4-33)$$

Comparando-se a Eq. (4-33) com a Eq. (4-17), observa-se que a retroação de velocidade tem por efeito o aumento do amortecimento. A relação ζ de amortecimento se torna

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \quad (4-34)$$

A frequência natural não-amortecida $\omega_n = \sqrt{K/J}$ não é afetada pela retroação de velocidade. Observando-se que o valor máximo de ultrapassagem na resposta a uma excitação em degrau unitário pode ser controlado através do valor do coeficiente de amortecimento ζ , é possível reduzir o valor máximo de ultrapassagem ajustando-se o valor da constante de retroação de velocidade K_h , de modo a situar ζ entre 0,4 e 0,7.

Convém lembrar que a retroação de velocidade tem o efeito de aumentar a relação de amortecimento sem afetar a frequência natural não-amortecida do sistema.

EXEMPLO 4-3

Para o sistema mostrado na Fig. 4-17(a), determinar os valores de ganho K e a constante de retroação de velocidade K_h de modo que o valor máximo de ultrapassagem na resposta a um degrau unitário seja 0,2, e que o instante de pico t_p seja 1 s. Com estes valores de K e K_h , obter o tempo de subida e o tempo de acomodação. Admitir que $J = 1 \text{ kg-m}^2$ e $B = 1 \text{ N-m/rad/s}$.

Determinação dos valores de K e K_h : O valor máximo de ultrapassagem M_p é dado pela Eq. (4-30) como sendo

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Este valor deve ser 0,2. Assim,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0,2$$

ou

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,61$$

o que conduz a

$$\zeta = 0,456$$

O instante de pico t_p foi especificado com o valor de 1s; por conseguinte, a partir da Eq. (4-29),

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

ou

$$\omega_d = 3,14$$

Como o valor de ζ é 0,456, ω_n é

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3,53$$

Como a frequência natural não-amortecida ω_n é igual a $\sqrt{K/J}$,

$$K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12,5 \text{ N-m}$$

Daí, com base na Eq. (4-34), o valor de K_h é

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - B}{K} = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0,178 \text{ s}$$

Tempo de subida t_r : Da Eq. (4-28), o tempo de subida t_r é

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

onde

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} 1,95 = 1,10$$

Assim, t_r vale

$$t_r = 0,65 \text{ s}$$

Tempo de acomodação t_s : Para o critério de 2%,

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2,48 \text{ s}$$

Para o critério de 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1,86 \text{ s}$$

Resposta impulsional de sistemas de segunda ordem. Para uma excitação $r(t)$ em impulso unitário, a correspondente transformada de Laplace é unitária, ou seja, $R(s) = 1$. A resposta ao impulso unitário $C(s)$ do sistema de segunda ordem mostrada na Fig. 4-9 é

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A transformada de Laplace inversa desta equação conduz à solução temporal para a resposta $c(t)$ a seguir:

Para $0 \leq \zeta < 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-35)$$

Para $\zeta = 1$,

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-36)$$

Para $\zeta > 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4-37)$$

Observe-se que é possível obter a resposta temporal $c(t)$, sem uso da transformada de Laplace inversa de $C(s)$, derivando-se a correspondente resposta a degrau unitário em relação ao tempo, uma vez que a função impulso unitário é a derivada temporal da função degrau unitário. Uma família de curvas de resposta a impulso unitário dadas pelas Eqs. (4-35) e (4-36) com vários valores de ζ é mostrada na Fig. 4-18. As curvas $c(t)/\omega_n$ são traçadas em função da variável adimensional $\omega_n t$, e portanto são funções apenas de ζ . Para os casos de amortecimento crítico e superamortecimento, a resposta ao impulso unitário é sempre positiva ou nula, isto é $c(t) \geq 0$. Isto pode ser visto nas Eqs. (4-36) e (4-37). Para o caso subamortecido, a resposta ao impulso unitário $c(t)$ oscila em torno de zero e assume valores positivos e negativos.

Da análise anterior pode-se concluir que, se a resposta ao impulso unitário $c(t)$ não muda de sinal, o sistema ou é criticamente amortecido, ou é superamortecido, e neste caso a correspondente resposta ao degrau não tem ultrapassagem, mas cresce ou decresce monotonicamente e tende a um valor constante.

O valor máximo de ultrapassagem para a resposta ao impulso unitário do sistema subamortecido ocorre em

$$t = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \text{onde } 0 < \zeta < 1$$

e o valor máximo de ultrapassagem é

$$c(t)_{\text{máx}} = \omega_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{onde } 0 < \zeta < 1$$

Como a função de resposta ao impulso unitário é a derivada temporal da função de resposta a degrau unitário, o valor máximo de ultrapassagem M_p para a resposta ao degrau unitário pode ser determinado a partir da correspondente resposta ao impulso unitário. Em outras palavras, a área sob a curva de resposta ao impulso unitário de $t = 0$ até o tempo do primeiro cruzamento do zero, como mostrado na Fig. 4-19, dá o valor $1 + M_p$, onde M_p é o valor máximo de ultrapassagem (para a resposta a degrau unitário) dado pela Eq. (4-30). O instante de passagem pelo valor de pico t_p (para a resposta ao degrau unitário) dado pela Eq. (4-29) corresponde ao tempo em que a resposta ao impulso unitário cruza a primeira vez o eixo dos tempos.

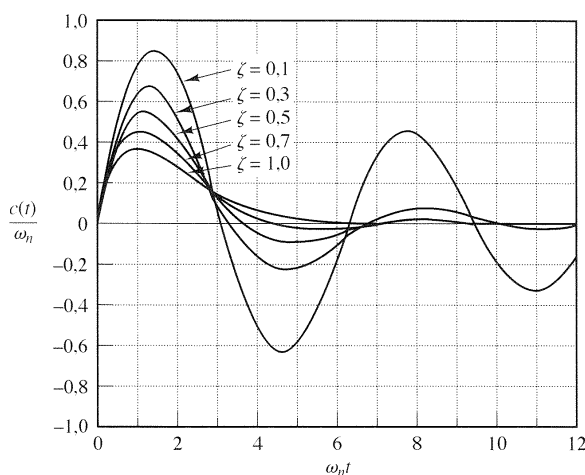


Fig. 4-18 Curvas de resposta do sistema mostrado na Fig. 4-9 a uma excitação em impulso unitário.

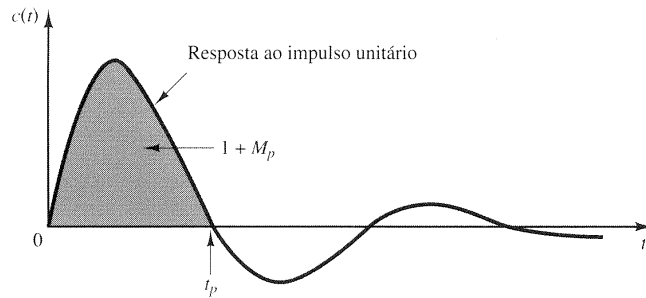


Fig. 4-19 Curva de resposta ao impulso unitário do sistema mostrado na Fig. 4-9.

4-4 ANÁLISE DE RESPOSTA TRANSITÓRIA COM MATLAB

Introdução. Nesta seção é apresentado o enfoque computacional para análise de resposta transitória com o uso do MATLAB. Recomenda-se aos leitores ainda não familiarizados com o MATLAB a leitura do Apêndice antes de iniciar o estudo desta seção.

Conforme assinalado anteriormente neste capítulo, as respostas transitórias (tais como resposta ao degrau, ao impulso e à rampa) são utilizadas freqüentemente para investigar as características no domínio do tempo de sistemas de controle.

Representação de sistemas lineares em MATLAB. A função de transferência de um sistema é representada por dois arranjos de números. Seja o sistema

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 4s + 25} \quad (4-38)$$

Este sistema é representado por dois arranjos contendo, cada um, os coeficientes dos polinômios em potências decrescentes de s , como a seguir

$$\begin{aligned} \text{num} &= [0 \ 0 \ 25] \\ \text{den} &= [1 \ 4 \ 25] \end{aligned}$$

Note-se a inclusão de zeros onde se fazem necessários.

Se num e den (o numerador e o denominador da função de transferência a malha fechada) forem conhecidos, comandos do tipo

$$\text{step(num,den)}, \quad \text{step(num,den,t)}$$

geram as curvas das resposta a um degrau unitário. (O parâmetro t no comando step é o tempo especificado pelo usuário.)

Para um sistema de controle definido no espaço de estados, onde a matriz de estado **A**, a matriz de controle **B**, a matriz de saída **C** e a matriz de transmissão direta **D** são conhecidas, o comando

$$\text{step(A,B,C,D)}$$

irá gerar as curvas de resposta ao degrau unitário. O vetor tempo é automaticamente determinado se t não for definido explicitamente nos comandos step.

Note-se que nenhum gráfico é mostrado na tela quando os comandos step possuem argumentos à sua esquerda tais como

$$\begin{aligned} [y,x,t] &= \text{step(num,den,t)} \\ [y,x,t] &= \text{step(A,B,C,D,iu)} \\ [y,x,t] &= \text{step(A,B,C,D,iu,t)} \end{aligned} \quad (4-39)$$

Em consequência, será necessário usar um comando *plot* para ver as curvas de resposta. As matrizes y e x contêm os valores de resposta e de estado, respectivamente, calculados em cada um dos pontos de computação t (y possui tantas colunas quantas são as variáveis de saída e uma linha para cada elemento em t . y possui tantas colunas quantas são as variáveis de estado e uma linha para cada elemento em t .)