CAP 3

CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS DE CONTROLE (DISCRETO)

SUMÁRIO

3.1. INTRODUÇÃO

As características principais em sistemas de controle são abordadas neste capítulo, onde são tratados os assuntos relativos aos erros em sistemas de controle, sensibilidade e sistemas lineares.

3.2. ERRO NOS SISTEMAS DE CONTROLE

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando a Transformada $\mathcal{Z}$.

3.2.1. ERRO DE MALHA FECHADA

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando a Transformada $\mathcal{Z}$.

Exemplo 1 – Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto seja

$$G(z) = \frac{1}{z^2 + z - 1/2}$$

Usando o Matlab, plote o gráfico do erro de malha fechada para uma entrada em degrau unitário.

SOLUÇÃO

$$\frac{E_c(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{z^2 + z - 0{,}5}} = \frac{z^2 + z - 0{,}5}{z^2 + z + 0{,}5}$$

$$E_c(z) = \frac{z^2 + z - 0{,}5}{z^2 + z + 0{,}5} R(z)$$

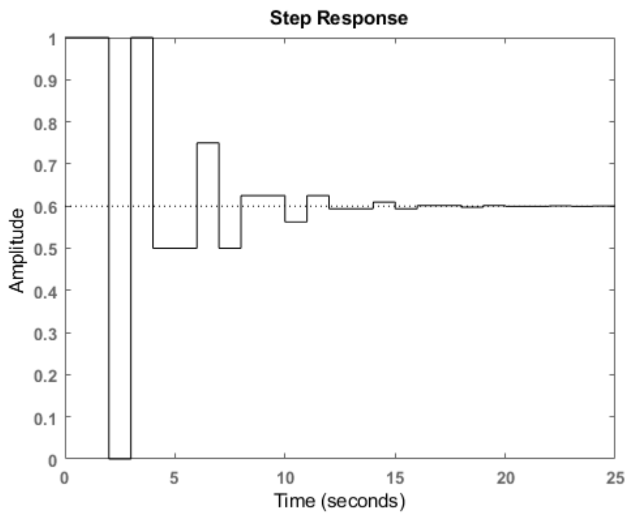
```
Command Window
>> Ec = tf([1 1 -0.5],[1 1 0.5],1)

Ec =

  z^2 + z - 0.5
  -------------
  z^2 + z + 0.5

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>> step(Ec)
>>
```



3.2.2. ERRO DA RESPOSTA DA PLANTA

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando a Transformada $\mathcal{Z}$.

Exemplo 2 – Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto seja

$$G(z) = \frac{1}{z^2 + z - 1/2}$$

Usando o Matlab, plote o gráfico do erro da resposta da planta para uma entrada em degrau unitário.

SOLUÇÃO

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{\dfrac{1}{z^2 + z - 1/2}}{1 + \dfrac{1}{z^2 + z - 1/2}} = \frac{1}{z^2 + z + 0{,}5}$$

$$E_s(z) = R(z)\big(1 - T(z)\big) = R(z)\left(1 - \frac{1}{z^2 + z + 0{,}5}\right) = R(z)\left(\frac{z^2 + z - 0{,}5}{z^2 + z + 0{,}5}\right)$$

Command Window

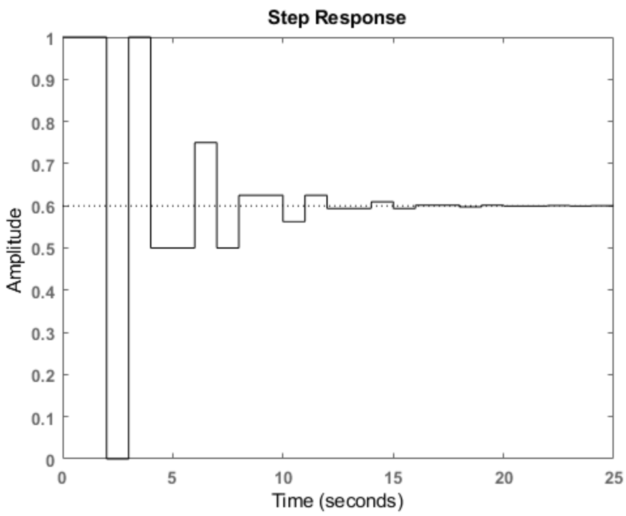
```
>> Es = tf([1 1 -0.5],[1 1 0.5],1)

Es =

  z^2 + z - 0.5
  -------------
  z^2 + z + 0.5

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>> step(Es)
>>
```



3.2.3. ERRO DA RESPOSTA AO DISTÚRBIO

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando a Transformada $\mathcal{Z}$.

3.2.4. ERRO DE ESTADO ESTACIONÁRIO

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando a Transformada $\mathcal{Z}$.

Para cálculo do erro de estado estacionário, utiliza-se o Teorema do Valor Final, ou seja,

$$\boxed{e_{ss}[n] = \lim_{n\to\infty} e_s[n] = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1})E_s(z)\right] = E_{ss}(z)}$$

Para cálculo do erro de estado estacionário devido ao distúrbio:

$$\boxed{e_{ssd}[n] = \lim_{n\to\infty} e_d[n] = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1})E_d(z)\right] = E_{ssd}(z)}$$

Exemplo 3 – Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha fechada seja

$$T(z) = \frac{Kz + b}{z^2 + az + b}$$

Para uma entrada em degrau nesse sistema:

a) Calcule o erro da resposta da planta, e
b) Calcule o erro de malha fechada,
c) Compare e explique os porquês dos resultados das letras (a) e (b),
d) Calcule o erro de estado estacionário do sistema.

SOLUÇÃO

a)

$$E_s(z) = R(z)(1 - T(z))$$

$$E_s(z) = \frac{z}{z-1}\left(1 - \frac{Kz + b}{z^2 + az + b}\right)$$

$$E_s(z) = \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^2 + az + b - Kz - b}{z^2 + az + b}\right)$$

$$E_s(z) = \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^2 + (a-K)z}{z^2 + az + b}\right)$$

$$\boxed{E_s(z) = \frac{z^2 + z + a - K}{z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b}}$$

b)

É necessário obter a FTMA

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad \Longrightarrow \quad G(z) = \frac{T(z)}{1 - T(z)}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{kz + b}{z^2 + z(a-k)}}$$

$$E_c(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{\frac{z}{z-1}}{1 + G(z)}$$

$$E_c(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{1 + \frac{kz + b}{z^2 + z(a-k)}} = \frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z^2 + z(a-k) + kz + b}{z^2 + z(a-k)}} = \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^2 + z(a-k)}{z^2 + az + b}\right)$$

$$\boxed{E_c(z) = \frac{z^2 + z + a - K}{z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b}}$$

c) Os erros são iguais devido à realimentação ser unitária.

d)

$$E_{ss}(z) = \lim_{z\to 1}\,[(1 - z^{-1})E_s(z)] = \lim_{z\to 1}\left[\left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{z^2 + z + a - K}{z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b}\right]$$

$$E_{ss}(z) = \lim_{z\to 1}\left[\frac{z^3 + (a-K-1)z - a + K}{z^4 + (a-1)z^3 + (b-a)z^2 - bz}\right] \qquad (l'Hospital)$$

$$E_{ss}(z) = \lim_{z\to 1} \left[\frac{2z^2 + a - K - 1}{4z^3 + 3(a-1)z^2 + (b-a)z - b}\right]$$
$$E_{ss}(z) = \frac{2 + a - K - 1}{4 + 3(a-1) + b - a - b}$$
$$\boxed{E_{ss}(z) = \frac{2 + a - K - 1}{1 + 2a}}$$

3.2.5. ERROS EM SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO UNITÁRIA

Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com a habilidade em seguir os sinais de entrada. Assim, um sistema de controle com realimentação unitária tem a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots(T_c s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots\left(T_p s + 1\right)}\right\}$$

O polo de multiplicidade N no denominador é quem determina o tipo desse sistema, assim, um sistema é chamado do tipo 0 se $N = 0$, do tipo 1 se $N = 1$, e assim sucessivamente. Essa classificação é diferente da ordem do sistema. Polos na origem no plano S correspondem a polos em 1 no plano $\mathcal{Z}$, assim, nos sistemas discretos, o tipo corresponde à multiplicidade do polo no ponto 1.

3.2.5.1. CONSTANTE DE ERRO ESTÁTICO DE POSIÇÃO

O termo “posição” refere-se ao valor do parâmetro de saída. O erro é, então, definido para uma entrada em degrau como:

$$K_p = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{G(z)}{z}$$

3.2.5.2. CONSTANTE DE ERRO ESTÁTICO DE VELOCIDADE

O termo “velocidade” refere-se ao valor da taxa de variação do parâmetro de saída. O erro é, então, definido para uma entrada em rampa como:

$$K_v = \frac{1}{T_s}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{G(z)}{z}\right]$$

3.2.5.3. CONSTANTE DE ERRO ESTÁTICO DE ACELERAÇÃO

O termo “aceleração” refere-se ao valor da posição a uma entrada em aceleração. O erro é, então, definido para uma entrada em parábola unitária como:

$$K_a = \frac{1}{T_s^2}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^3\frac{G(z)}{z}\right]$$

O quadro abaixo apresenta o resumo dos valores de erro estacionário para sistemas com realimentação unitária.

SISTEMAS	ENTRADAS		
	DEGRAU (K_p) $u[nT_s] = 1$	RAMPA (K_v) $r[nT_s] = n$	PARÁBOLA (K_a) $p[nT_s] = \frac{1}{2}n^2$
Tipo 0	$e_{ss}[n] = \frac{1}{1+K_p}$	$e_{ss}[n] = \infty, \quad K_v = 0$	$e_{ss}[n] = \infty, \quad K_a = 0$
Tipo 1	$e_{ss}[n] = 0, \quad K_p = \infty$	$e_{ss}[n] = \frac{1}{K_v}$	$e_{ss}[n] = \infty, \quad K_a = 0$
Tipo 2	$e_{ss}[n] = 0, \quad K_p = \infty$	$e_{ss}[n] = 0, \quad K_v = \infty$	$e_{ss}[n] = \frac{1}{K_a}$

Os sistemas com constantes infinitas são incapazes de seguir as respectivas entradas em regime permanente.

Os erros estáticos são indicativos do desempenho em regime permanente. Para melhorar o desempenho em regime permanente, é necessário aumentar o tipo do sistema, comprometendo a sua estabilidade.

3.3. SENSIBILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando a Transformada $\mathcal{Z}$.

3.4. APROXIMAÇÃO LINEAR DE SISTEMAS FÍSICOS

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando sinais discretos.

3.4.1. SISTEMAS LINEARES SUBMETIDOS A DISTÚRBIOS

Idem à sistemas analógicos, porém utilizando a Transformada $\mathcal{Z}$.

3.4.2. "LINEARIZAÇÃO" DE SISTEMAS FÍSICOS

Será aplicado apenas para sistemas analógicos.

3.5. MATLAB

Funções úteis: *diff*, *limite*, *syms*.

3.6. LISTA DE EXERCÍCIOS

Livro KUO 10ªed: