é possível obter valores pequenos tanto para o erro estacionário e_{ss}, correspondente a uma entrada em rampa, como para o máximo sobressinal para uma entrada em degrau, fazendo que o valor de B seja pequeno, o de K_p, elevado, e o de K_d seja grande o bastante para que o valor de ζ fique entre 0,4 e 0,7.

5.8 | Erros estacionários em sistemas de controle com realimentação unitária

Os erros em um sistema de controle podem ser atribuídos a muitos fatores. Alterações na entrada de referência causarão erros inevitáveis durante o regime transitório, podendo causar também erros estacionários. Imperfeições nos componentes do sistema, como atrito estático, folga e deriva dos amplificadores, bem como desgaste ou deterioração, causarão erros em regime permanente. Nesta seção, entretanto, não discutiremos erros causados por imperfeições nos componentes do sistema. Em vez disso, vamos estudar um tipo de erro estacionário que é causado pela incapacidade de um sistema em seguir determinados tipos de sinais de entradas.

Qualquer sistema de controle físico apresenta, inerentemente, erros estacionários na resposta a certos tipos de entradas. Um sistema pode não apresentar um erro estacionário a uma entrada em degrau, mas o mesmo sistema pode apresentar um erro estacionário não nulo a uma entrada em rampa. (A única maneira possível de eliminar esse erro é modificando a estrutura do sistema.) O erro estacionário que um sistema apresenta em relação a determinado tipo de entrada depende do tipo de função de transferência de malha aberta desse sistema, o que será discutido a seguir.

Classificação dos sistemas de controle. Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com sua habilidade em seguir os sinais de entrada em degrau, em rampa, em parábola etc. Este é um critério razoável de classificação, pois as entradas reais com frequência podem ser consideradas combinações das entradas citadas. Os valores dos erros estacionários relativos a essas entradas individuais são indicadores de qualidade do sistema.

Considere o sistema de controle com realimentação unitária, com a seguinte função de transferência de malha aberta $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots(T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots(T_p s + 1)}$$

Essa função de transferência contém o termo s^N no denominador, representando um polo de multiplicidade N na origem. O presente método de classificação tem como base o número de integrações indicadas pela função de transferência de malha aberta. Um sistema é chamado tipo 0, tipo 1, tipo 2, … , se $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$, ... , respectivamente. Note que essa classificação é diferente da que se refere à ordem de um sistema. Conforme o tipo N aumenta, a precisão aumenta; por outro lado, agrava-se a estabilidade do sistema. É sempre necessária uma conciliação entre precisão em regime permanente e estabilidade relativa.

Veremos adiante que, se $G(s)$ for escrita de modo que cada termo no numerador e no denominador, exceto os termos s^N, se aproxime da unidade à medida que s se aproxima de zero, então o ganho K de malha aberta estará diretamente relacionado ao erro estacionário.

Erros estacionários. Considere o sistema mostrado na Figura 5.46. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

A função de transferência entre o sinal de erro $e(t)$ e o sinal de entrada $r(t)$ é:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

onde o erro $e(t)$ é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída.

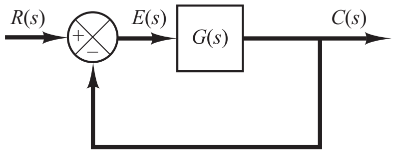

FIGURA 5.46 Sistema de controle.

O teorema do valor final oferece um modo conveniente de determinar o desempenho em regime permanente de um sistema estável. Como $E(s)$ é:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

o erro estacionário é:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

As constantes de erro estático definidas a seguir são figuras de mérito dos sistemas de controle. Quanto mais altas as constantes, menor o erro estacionário. Em dado sistema, a saída pode ser a posição, a velocidade, a pressão, a temperatura ou outros fatores. A natureza física da saída, entretanto, é irrelevante nesta análise. Assim, a seguir, chamaremos a saída de 'posição', a taxa de variação da saída de 'velocidade' etc. Isso significa que, no sistema de controle de temperatura, 'posição' representa a temperatura de saída, 'velocidade' representa a taxa de variação da temperatura de saída, e assim por diante.

Constante de erro estático de posição K_p. O erro estacionário do sistema para uma entrada em degrau é:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{1 + G(0)}$$

A constante de erro estático de posição K_p é definida por:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

Então, o erro estacionário em termos da constante de erro estático de posição K_p é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para um sistema do tipo 0,

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 1 ou maior,

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 1$$

Então, para um sistema do tipo 0, a constante de erro estático de posição K_p é finita, ao passo que, para um sistema do tipo 1 ou maior, K_p é infinita.

Para uma entrada em degrau unitário, o erro estacionário e_{ss} pode ser resumido como segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}, \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 1 ou maiores}$$

A partir da análise anterior, pode-se ver que a resposta de um sistema de controle com realimentação a uma entrada em degrau conterá um erro estacionário, se não houver integração no ramo direto. (Se erros pequenos para entradas em degrau puderem ser tolerados, então um sistema do tipo 0 poderá ser admissível, desde que o ganho K seja suficientemente grande. Se este for muito grande, entretanto, será difícil obter uma estabilidade relativa adequada.) Se for desejável um erro estacionário nulo para uma entrada em degrau, o tipo do sistema deverá ser 1 ou maior.

Constante de erro estático de velocidade K_v. O erro estacionário do sistema com uma entrada em rampa unitária é dado por:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)} \end{aligned}$$

A constante de erro estático de velocidade K_v é definida por:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

Assim, o erro estacionário em termos da constante de erro estático de velocidade K_v é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

O termo *erro de velocidade* é empregado aqui para expressar o erro estacionário para uma entrada em rampa. A dimensão do erro de velocidade é a mesma do erro do sistema. Ou seja, o erro de velocidade não é um erro na velocidade, e sim um erro de posição em decorrência de uma entrada em rampa. Para um sistema do tipo 0,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 2 ou maior,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 2$$

O erro estacionário e_{ss} para a entrada em rampa unitária pode ser resumido como segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty, \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}, \quad \text{para sistemas do tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 2 ou maiores}$$

A análise anterior indica que um sistema do tipo 0 é incapaz de seguir, em regime estacionário, uma entrada em rampa. O sistema do tipo 1 com realimentação unitária pode seguir a entrada em rampa com um erro finito. Em uma operação em regime estacionário, a velocidade de saída é exatamente a mesma velocidade de entrada, mas existe um erro de posição. Esse erro é proporcional à velocidade de entrada e é inversamente proporcional ao ganho K. A Figura 5.47 mostra um exemplo da resposta de um sistema do tipo 1 com realimentação unitária a uma entrada em rampa. O sistema de tipo 2 ou maior pode seguir uma entrada em rampa, em regime estacionário, com erro nulo.

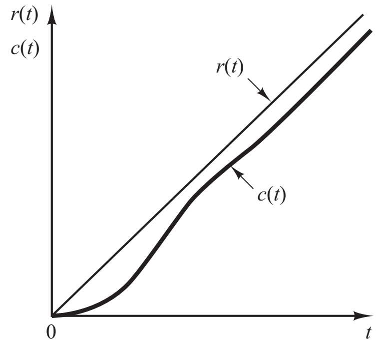

FIGURA 5.47 Resposta de um sistema do tipo 1 com realimentação unitária a uma entrada em rampa.

Constante de erro estático de aceleração K_a. O erro estacionário do sistema com uma entrada em parábola unitária (entrada em aceleração), definida como:

$$r(t) = \frac{t^2}{2}, \quad \text{para } t \geq 0$$

$$= 0, \text{ para } t < 0$$

é dado por:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3}$$

$$= \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)}$$

A constante de erro estático de aceleração K_a é definida pela equação

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

O erro estacionário é, então:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Note que o erro de aceleração, isto é, o erro estacionário em virtude da entrada em parábola, é um erro de posição.

Os valores de K_a são obtidos como segue:

Para um sistema do tipo 0,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 2,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 3 ou maior,

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 3$$