Serii numerice

1. Folosind criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi, să se studieze natura următoarelor serii:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} 7^{-\sqrt{n^2-7}}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, $a>0$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^n}{n!}$, $a>0$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ v) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a>0$

Soluție i) $a_n = 7^{-\sqrt{n^2-7}}$. Aplicăm crit. raportului

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{-\sqrt{(n+1)^2-7}}}{7^{-\sqrt{n^2-7}}} = \lim_{n\to\infty} 7^{\sqrt{n^2-7}-\sqrt{n^2+2n-6}}$$

$$= 7^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-7}-\sqrt{n^2+2n-6}\right)} = 7^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}-7-\cancel{n^2}-2n+6}{\sqrt{n^2-7}+\sqrt{n^2+2n-6}}}$$

$$= 7^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n-1}{n\left(\sqrt{1-\frac{7}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}\right)}} = 7^{-1} = \frac{1}{7} < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 7^{-\sqrt{n^2-7}}$ convergentă.

ii) $a_n = \left(a\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, $a>0$. Aplic. crit. rădăcinii

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} a\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2} = a$$

I. Dacă $a<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

II Dacă $a>1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ divergentă

III Dacă $a=1$ crit. rădăcinii nu decide natura seriei.
În acest caz, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n \text{ divergentă.}$$

19. - vineri

iii) Aplicăm crit. raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\cancel{n+1}}(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n} \cdot n^n} = a \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a \cdot e$$

I. Dacă $ae < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$ at. $\sum_{n\geq 1} a_n$ conv.

II. Dacă $ae > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{e}$ at. $\sum_{n\geq 1} a_n$ div.

III. Dacă $a = \frac{1}{e}$ crit. raportului nu decide natura seriei.
În acest caz seria devine $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{e^n \cdot n!}$ (divergentă vezi seminarul 3).

iv) Aplicăm crit. raportului

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cancel{!!}}{(2n+2)\cancel{!!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n-1)!!}} = 1$$

Aplicăm crit. lui Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \text{ divergentă.}$$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ Aplicăm crit. lui Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{\ln n}}{a^{\ln(n+1)}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \underbrace{\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1}{\ln\frac{n}{n+1}}}_{\to \ln a} \cdot \ln\frac{n}{n+1} =$$

$$= \ln a \cdot \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = -\ln a$$

I Dacă $-\ln a > 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$ at. $\sum\limits_{n\geq 1} a^{\ln n}$ conv.

II Dacă $a > \frac{1}{e}$ at. $\sum a^{\ln n}$ divergentă

III. Dacă $a = \frac{1}{e}$ at crit. lui R.D. nu decide natura seriei. În acest caz, seria devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergentă.}$$

Obs: Aceeași prob. poate fi rezolvată utilizând criteriul logaritmic:

Fie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ o serie cu termeni pozitivi a.î.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = l.$$

Dacă $l > 1$ at $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ conv.

Dacă $l < 1$ at. $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ div.

Dacă $l = 1$ nu putem decide natura seriei cu crit. logaritmic.

Ex: $\sum\limits_{n\geq 1} 4^{-\ln n^3}$. Aplicăm crit. logaritmic

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{4^{-\ln n^3}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^{\ln n^3}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cancel{\ln n} \ln 4}{\cancel{\ln n}}$$

$$= 3\ln 4 > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} 4^{-\ln n^3} \text{ convergentă}$$

2. Să se studieze convergența seriilor:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+2}$ ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$

Soluție i) $a_n = \frac{1}{n+2}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+3} \cdot (n+2) < 1 \Rightarrow$

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_n \downarrow$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Din crit. lui Leibniz $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n+2}$ convergentă.

ii) $a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{(2n+1)\cancel{!!}}{(2n+2)\cancel{!!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n-1)}!!}\right]^2 = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} < 1.$$

$\Rightarrow a_n \downarrow$.

Fie $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$$0 < b_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq$$

$$\leq \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1} \quad \Big| \cdot b_n.$$

$\Rightarrow 0 < a_n < \frac{1}{2n+1}$

$\searrow \downarrow \swarrow$ 0 $\xRightarrow[\text{cleștelui}]{\text{crit.}} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\xRightarrow[\text{Leibniz}]{\text{crit.}} \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$ conv.

3. Să se studieze convergența absolută și convergența seriilor:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Soluție i) • pt. convergența absolută: $\sum_{n\geq 1} |a_n|$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$b_n = \frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Fie $c_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \cancel{n} = 2.$$

crit. comp. la limită $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \sum_{n\geq 1} b_n \sim \sum_{n\geq 1} c_n. \\ \sum_{n\geq 1} c_n \text{ diverg.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ div.

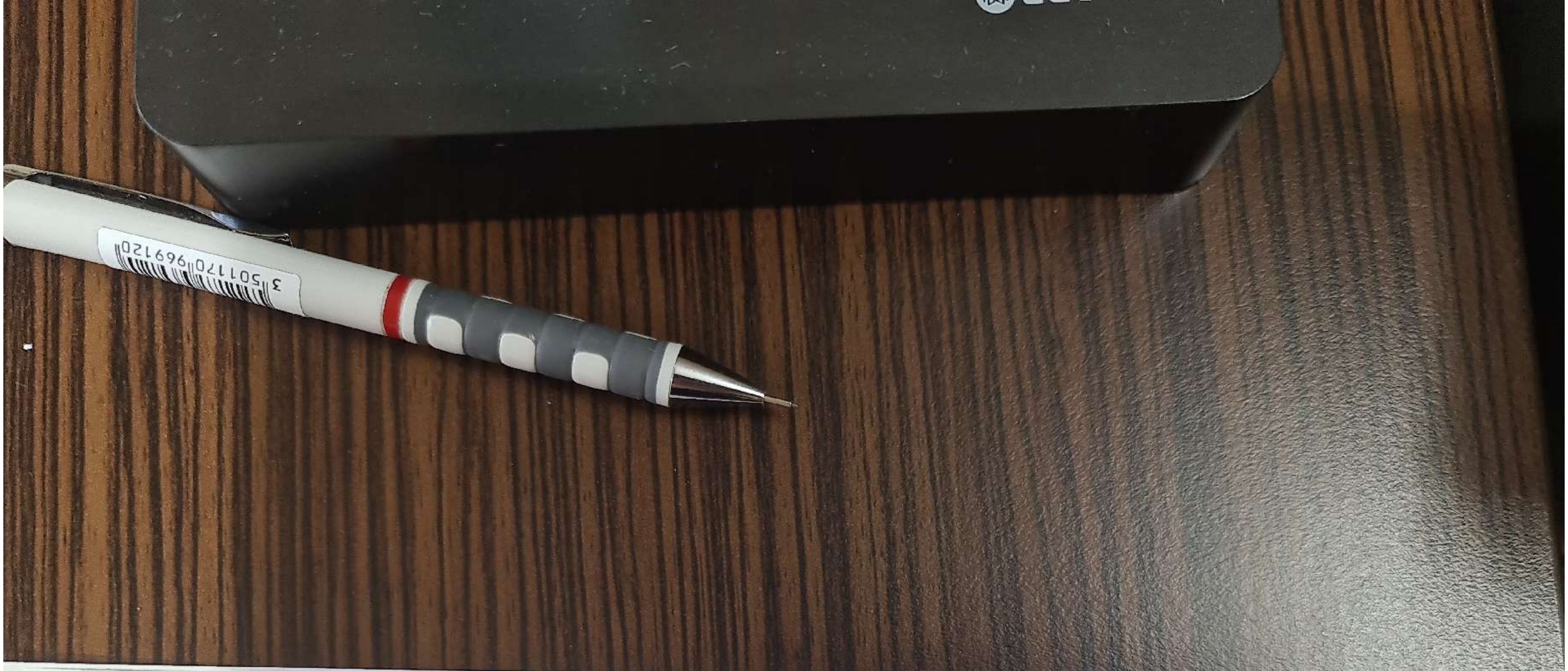
$\Rightarrow$. $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$ nu este absolut convergentă ①.

•• stud. conv. seriei.

$b_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} \searrow 0$ (de arătat).

crit. Leibniz $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$ este convergentă ②

Din ① și ② $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$ este semiconvergentă.



ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergentă (seria armonică cu $p=\frac{3}{2}>1$).

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$ este absolut conv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$ conv.

4. Să se studieze convergența seriei: