• axa centrală:

$$\overline{T}_O = \begin{cases} \overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k} \\ \overline{M}_O = -4dF\overline{j} \end{cases}$$

axa centrală:

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0 - (y(2F) - z(-2F))}{-4F} = \frac{-4dF - (z(-4F) - x(2F))}{-2F} = \frac{0 - (x(-2F) - y(-4F))}{2F}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16d - 20z - 8x - 4y = 0 \\ -4d + 4x + 4z - 4y = 0 \end{cases}$$

dacă $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{3} \\ z = \frac{2d}{3} \end{cases} \Rightarrow$ există $P_1\left(\frac{d}{3}, 0, \frac{2d}{3}\right)$

dacă $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5d}{3} \\ y = \frac{2d}{3} \end{cases} \Rightarrow$ există $P_2\left(\frac{5d}{3}, \frac{2d}{3}, 0\right)$

• elem. Torsorului în B:

același $\overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k}$

moment în rap. cu pct. B diferit:

$$\overline{M_B} = \overline{M_O} - \overline{OB} \times \overline{R} = -4dF\overline{j} - \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ d & d & 0 \\ -4F & -2F & 2F \end{vmatrix}$$

$$= -2dF\overline{i} - 2dF\overline{j} - 2dF\overline{k}$$

$$\Rightarrow \overline{T}_B = \begin{cases} \overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k} \\ \overline{M_B} = -2dF\overline{i} - 2dF\overline{j} - 2dF\overline{k} \end{cases}$$

• mom. minimal (în pct. O)

$$\overline{T}_O = \begin{cases} \overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k} \\ \overline{M_O} = -4dF\overline{j} \end{cases}$$

momentul minimal: $M_R = \dfrac{\overline{R} \cdot \overline{M_O}}{R}$

$$= \frac{(-4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k}) \cdot (-4dF\overline{j})}{\sqrt{(4F)^2 + (2F)^2 + (2F)^2}}$$

$$= \frac{8dF}{\sqrt{24}}$$

$$\overline{M_0}(\overline{F_1}) = \overline{OB} \times \overline{F_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & d & 0 \\ -2F & -2F & 2F \end{vmatrix} = 2dF\bar{i} - 2dF\bar{j}$$

$$\overline{M_0}(\overline{F_2}) = \overline{OD_1} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & d & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{i}$$

$$\overline{M_0}(\overline{F_3}) = \overline{OA} \times \overline{F_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & 0 & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{j}$$

$$\overline{M_0} = \sum_{i=1}^{3} \overline{r_i} \times \overline{F_i} = 2dF\bar{i} - 2dF\bar{j} - 2dF\bar{i} - 2dF\bar{j}$$

$$= -4dF\bar{j}$$

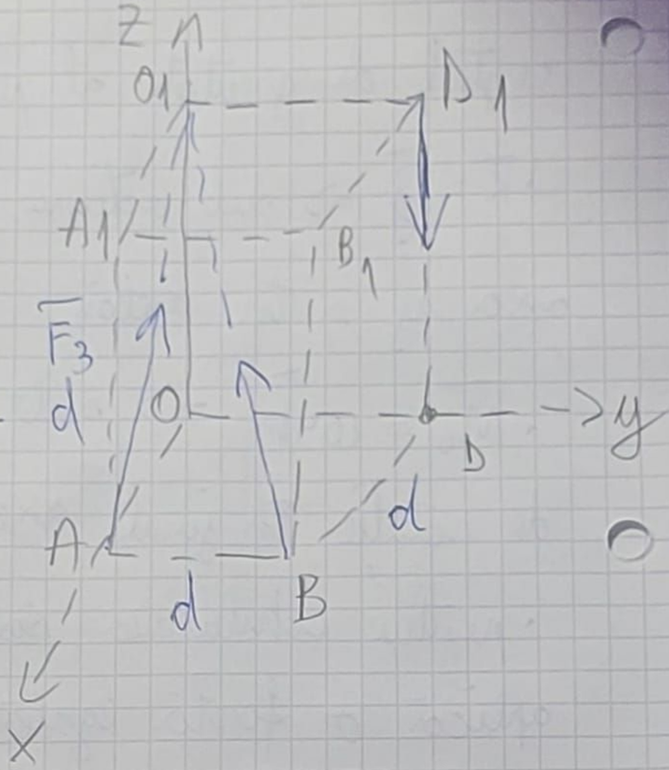
$$\Rightarrow \overline{\tau_0}(\overline{F_i}) = \begin{cases} \overline{R} = -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k} \\ \overline{M_0} = -4dF\bar{j} \end{cases}$$

3. Asupra unui cub acţionează sistemul:

$F_1 = 2\sqrt{3}\,F$ (dir. $BO_1$)

$F_2 = 2F$ (din $D_1D$)

$F_3 = 2\sqrt{2}\,F$ (dir $AO_1$)




$$\bar{F}_1 = F_1 \frac{\overline{BO_1}}{BO_1} = F_1 \frac{\overline{BA} + \overline{AO} + \overline{OO_1}}{BO_1}$$

$$= 2\cancel{\sqrt{3}}F \frac{-d\bar{i} - d\bar{j} + d\bar{k}}{d\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$= -2F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = \cancel{F_2 \frac{\overline{D_1D}}{D_1D} = F_2} - 2F\bar{k} = F_2 \frac{\overline{D_1D}}{D_1D} = 2F \frac{-\cancel{d}\bar{k}}{\cancel{d}} = -2F\bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = F_3 \frac{\overline{AO_1}}{AO_1} = F_3 \frac{\overline{AO} + \overline{OO_1}}{AO_1} = 2\cancel{\sqrt{2}}F \frac{-d\bar{i} + d\bar{k}}{d\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$= -2F\bar{i} + 2F\bar{k}$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{3} \bar{F}_i = -2F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k} - 2F\bar{k} - 2F\bar{i} + 2F\bar{k}$$

$$= -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$$

Se observă că axa centrală nu trece prin centrul de greutate al plăcii $C(10, 10)$, deci având:

- $\bar{R} = 8\bar{j} \Rightarrow$ sub acțiunea sist. apare o mișcare după axa y și în același sens
- $\bar{M}_0 = 104\bar{k} \Rightarrow$ sub acțiunea sist. apare o mișcare de rotație în jurul axei z
- pentru echilibrarea sist, pe axa centrală se aplică o forță egală cu $\bar{R}$, dar în sens opus

$$\overline{M_0}(\overline{F_2}) = \overline{OA_2} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 18 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54\bar{k}$$

$$\overline{M_0}(\overline{F_3}) = \overline{OA_3} \times \overline{F_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 12 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{-60\bar{k}}\ 85\bar{k}$$

$$\overline{M_0}(\overline{F_4}) = \overline{OA_4} \times \overline{F_4} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -45\bar{k}$$

$$\overline{M_0} = \sum_{i=1}^{4} \bar{r}_i \times \overline{F_i} = 10\bar{k} + 54\bar{k} + 85\bar{k} - 45\bar{k} = 104\bar{k}$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}(8\bar{j},\ 104\bar{k})$$

$$M_r = \frac{\bar{R} \cdot \overline{M_0}}{R} = \frac{(8\bar{j}) \cdot (104\bar{k})}{\sqrt{8^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ cazul 2

$$M_{oz} = xR_y - yR_x \Rightarrow 104 = x \cdot 8 - y \cdot 0$$

$$\Rightarrow x = 13$$

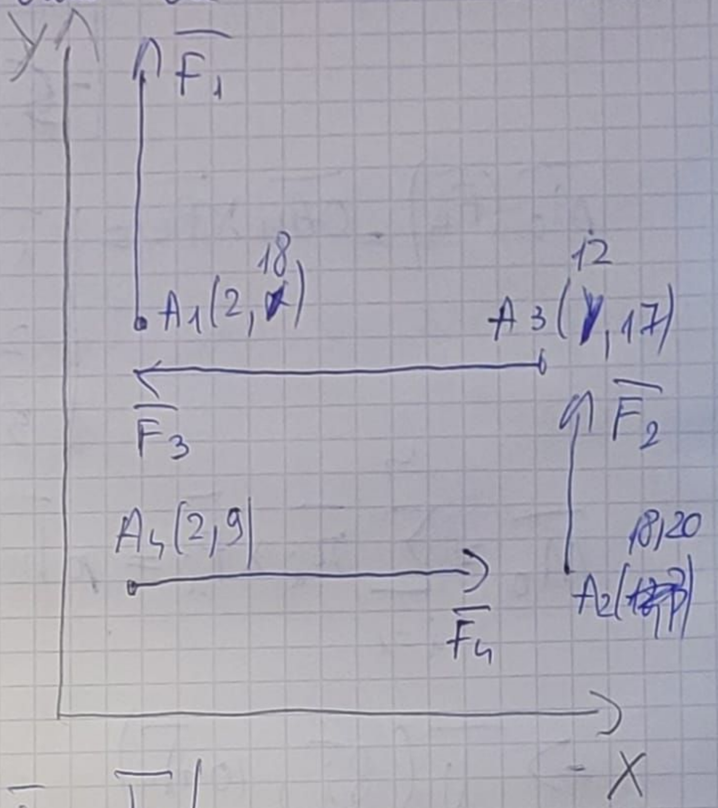
2. $F_1 = 5N$ cu $A_1(2, \alpha)$

$F_2 = 3N$ cu $A_2(18, \beta)$

$F_3 = 5N$ cu $A_3(\gamma, 17)$

$F_4 = 5N$ cu $A_4(\theta, 9)$

Să se găsească elem. torsorului de reducere.




$\overline{F_1} = 5\overline{j}$

$\overline{F_2} = 3\overline{j}$

$\overline{F_3} = -5\overline{i}$

$\overline{F_4} = 5\overline{i}$

$\Rightarrow \overline{R} = \sum_{i=1}^{4} \overline{F_i} = 8\overline{j}$

$$\overline{M_0}(\overline{F_1}) = \overline{OA_1} \times \overline{F_1} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\overline{k}$$

~~$\Rightarrow \overline{U} = ($~~

$$\overline{M}_O(\overline{F}_1) = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{OA} \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60\,\overline{k}$$

$$\overline{M}_O(\overline{F}_2) = \overline{OA} \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30\,\overline{k}$$

$$\overline{M}_O(\overline{F}_3) = \overline{OA} \times \overline{F}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -50\,\overline{k}$$

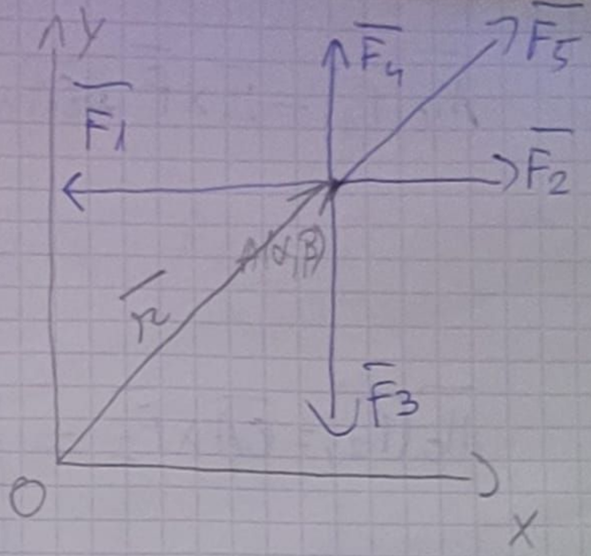
$$\overline{M}_O(\overline{F}_4) = \overline{OA} \times \overline{F}_4 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 20\,\overline{k}$$

$$\overline{M}_O(F_5) = \overline{OA} \times \overline{F}_5 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{5} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = 60\overline{k} - 30\overline{k} - 50\overline{k} + 20\overline{k} + 0$$

$$= 0 \qquad \Rightarrow \overline{U}\,(0,0)$$

1.




$F_1 = 6N$

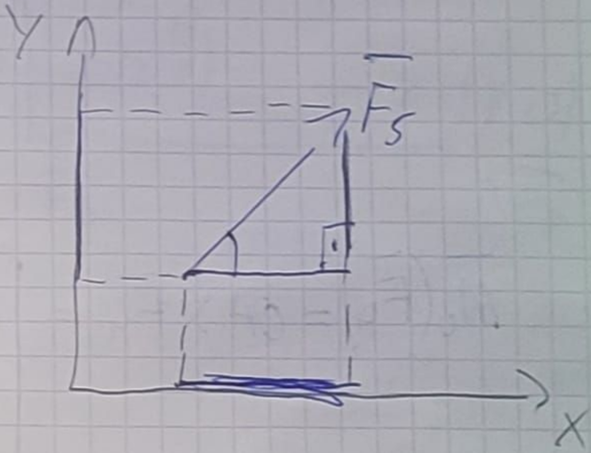
$F_2 = 3N$

$F_3 = 5N$

$F_4 = 2N$

$F_5 = 3\sqrt{2}\,N \ (4,25)$

Să se găsească elem. torsorului de reducere în rap. cu originea sist. de coordonate.




$\overline{F_1} = F_1(-\overline{i}) = -6\,\overline{i}$

$\overline{F_2} = 3\overline{i}$

$\overline{F_3} = -5\overline{j}$

$\overline{F_4} = 2\overline{j}$

$\overline{F_5} = F_5 \cos 45\,\overline{i} + F_5 \sin 45\,\overline{j} = 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\overline{i} + 3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\overline{j}$

$\Rightarrow \overline{F_5} = 3\overline{i} + 3\overline{j}$

$\Rightarrow \overline{R} = \sum_{i=1}^{5} \overline{F_i} = -6\overline{i} + 3\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + 3\overline{j} = 0$

## Cazurile de reducere:

· **Cazul 1:** $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0 \Rightarrow \bar{R} \neq 0, \bar{M}_0 \neq 0$, deci $M_r \neq 0$

$\Rightarrow$ sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal aflat pe axa centrală.

· **Cazul 2:** $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$, dar $\bar{R} \neq 0 \Rightarrow M_r = 0$

$\Rightarrow$ sistemul se reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală

- acest caz apare fie dacă:
  - $\bar{M}_0 = 0 \Rightarrow$ punctul de reducere O este pe axa centrală
  - $\bar{R} \perp \bar{M}_0$

· **Cazul 3:**

$\bar{R} = 0$ și $\bar{M}_0 \neq 0 \Rightarrow \bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$

$\Rightarrow$ sistemul se reduce la cuplul $\bar{M} = \bar{M}_0$

· **Cazul 4:**

$\bar{R} = 0$ și $\bar{M}_0 = 0$

$\Rightarrow$ sistemul este în echilibru

## Moment minimal:

$$M_R = \frac{\overline{R} \cdot \overline{M_0}}{R} = \frac{\overline{R}}{R} \cdot \overline{M_0}$$

→ versorul direcției

- reprezintă proiecția lui $\overline{M_0}$ pe rezultanta $\overline{R}$

- momentul minimal $M_R$ - coliniar cu rezultanta $\overline{R}$

$$\Rightarrow \overline{M_R} = \frac{\overline{R} \cdot \overline{M_0}}{R^2} \cdot \overline{R}$$

și se obține <u>torsorul minimal $\overline{\tau}_0(\overline{R}, \overline{M_R})$</u>

## • Axa centrală:

- ecuația:

$$\frac{M_{0x} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{0y} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{0z} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

• În cazul unui sistem <u>de forțe coplanare</u> are ec. axei centrale: $M_{0z} - (xR_y - yR_x) = 0$

• A reduce un sist. de forțe într-un punct presupune găsirea unui sistem echivalent care să producă același efect ca sistemul dat.

Forța rezultantă: $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$

și cuplul rezultant reprezentat prin momentul:

$$\overline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i$$

formează sist. echivalent numit <u>torsorul de reducere în O</u>, notat $\overline{\tau}_0(\overline{R}, \overline{M}_0)$.

. la schimbarea pct. de reducere, <u>forța rezultantă $\overline{R}$ nu se schimbă</u>, doar momentul se schimbă

$$\overline{M}_{01} = \overline{M}_0 - \overline{OO_1} \times \overline{R}$$

Dacă se consideră: $\overline{F} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k}$, cu pct. de aplicație în $A(x, y, z)$, atunci

$$\Rightarrow \overline{M_O} = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\overline{i} +$$

$$+ (zF_x - xF_z)\overline{j} + (xF_y - yF_x)\overline{k} = M_{Ox}\overline{i} + M_{Oy}\overline{j} + M_{Oz}\overline{k}$$

, iar modulul este:

$$\boxed{M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}}$$

· Momentul forței față de alt pct. $O_1$ este diferit:

$$\underline{\overline{M_{O_1}}} = \overline{O_1A} \times \overline{F} = (\overline{r} + \overline{O_1O}) \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} + \overline{O_1O} \times \overline{F} =$$

$$= \overline{M_O} + \overline{O_1O} \times \overline{F} = \underline{\overline{M_O} - \overline{OO_1} \times \overline{F}}$$

# Laborator 2:

## Teorie:

· **Forța** = mărime vectorială care reflectă interacțiunea dintre 2 corpuri.

Expresie analitică:

$$\overline{F} = \overline{F_x} + \overline{F_y} + \overline{F_z}$$

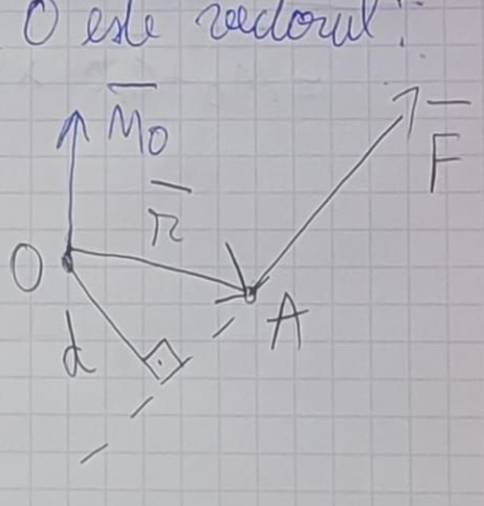
$$= F_x \cdot \overline{i} + F_y \cdot \overline{j} + F_z \cdot \overline{k}$$

Modulul forței: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

· forța este un vector alunecător, adică poate fi deplasată fără ca efectul ei asupra rigidului să se modifice

Pentru $\overline{F}$, momentul în rap. cu O este vectorul:

$$\boxed{\overline{M_O} = \overline{r} \times \overline{F}}$$




· pct. de aplicație: O

· direcția ⊥ pe planul format de forță și pct O

· sensul e dat de regula burghiului

· modulul: $M_O = r \cdot F \cdot \sin(\overline{r}, \overline{F}) = F \cdot d$