# 4 Проблема собственных значений. Метод вращений

## 1 Проблема собственных значений

Будем рассматривать системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

где $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$– вектор свободных членов, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор неизвестных с вещественными координатами, $A = (a_{ij}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$– вещественная матрица размера n×n, матрица коэффициентов системы.

Вычисление собственных значений и векторов матриц имеет исключительно важное значение для решения широкого круга задач. При этом часто требуется получение всех собственных значений и отвечающих им собственных векторов. Такую задачу принято называть полной проблемой собственных значений.

Собственные значения матрицы A являются корнями $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0$$

Собственные векторы $\bar{x}$, отвечающие собственному значению $\lambda$, представляют собой ненулевые решения системы

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

$$(A - \lambda E)\bar{x} = 0$$

Данная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю, т.е.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Развертывание этого определителя приводит к так называемому характеристическому уравнению матрицы A:

$$D(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_1\lambda - p_n) = 0$$

## 2 Метод вращений

Метод вращений позволяет для симметричных матриц решить задачу отыскания всех собственных значений и собственных векторов без использования характеристического уравнения.

Известно, что для симметричной матрицы A существует ортогональная матрица U, такая, что

$$U^T A U = \Lambda \qquad (11)$$

где $\Lambda$ – диагональная матрица.

Так как $U_T = U^{-1}$ (условие ортогональности), то матрица $\Lambda$ подобна матрице A и имеет те же собственные значения, что и матрица A. Так как собственными значениями диагональной матрицы являются ее диагональные элементы, то зная U, мы можем найти все собственные значения матрицы A.

В методе вращений матрица U строится как предел последовательности произведений матриц простых поворотов, при которых все оси координат кроме двух остаются неподвижными. При этом матрицы простых поворотов подбираются так, чтобы при преобразовании матрицы с помощью матрицы простого поворота на каждом шаге уничтожался максимальный по абсолютной величине недиагональный элемент.

Итерационный процесс осуществляется следующим образом.

На первом этапе в матрице A находится максимальный по абсолютной величине элемент $a_{i_0 j_0} (i_0 < j_0)$. Строится ортогональная матрица простого поворота вида

$$U_0 = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \cdots & & & & & & & & & \\ & & \cos\varphi_0 & . & . & . & . & -\sin\varphi_0 & & & \\ & & . & 1 & & & & . & & & \\ & & . & & \cdots & & & . & & & \\ & & . & & & \cdots & & . & & & \\ & & . & & & & 1 & . & & & \\ & & \sin\varphi_0 & . & . & . & . & \cos\varphi_0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ i_0 \\ \\ \\ \\ \\ j_0 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & i_0 & & & & & j_0 & & & \end{array} & \end{array}$$

где все невыписанные элементы нулевые. Угол $\varphi_1$ подбирается так, чтобы у матрицы

$$A^{(1)} = U_0^T A U_0 = \left(a_{ij}^{(1)}\right), \qquad i = \overline{1, n}, \qquad j = \overline{1, n}$$

Элемент $a_{i_0 j_0}^{(1)}$ обратился бы в нуль:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{i_0 j_0}}{a_{i_0 i_0} - a_{j_0 j_0}}\right)$$

Находим матрицу $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = U_0^T A U_0$$

На втором этапе находится максимальный по абсолютной величине элемент $a_{i_1 j_1} (i_1 < j_1)$, соответственно в матрице $A^{(1)}$. Строится ортогональная матрица простого поворота $U_1$.

Далее процесс повторяется до получения практически диагональной матрицы. В этом случае элементы на диагонали аппроксимируют собственные значения матрицы A.

Обобщим формулы для построения матрицы $A^{(k)}$.

$$\varphi_{k-1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{i_0 j_0}^{(k-1)}}{a_{i_{k-1} i_{k-1}}^{(k-1)} - a_{j_{k-1} j_{k-1}}^{(k-1)}}\right)$$

$$
U_{k-1} = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ldots & & & & & & & & & \\
 & & \cos\varphi_{k-1} & . & . & . & . & -\sin\varphi_{k-1} & & & \\
 & & . & 1 & & & & . & & & \\
 & & . & & \ldots & & & . & & & \\
 & & . & & & \ldots & & . & & & \\
 & & . & & & & 1 & . & & & \\
 & & -\sin\varphi_{k-1} & . & . & . & . & \cos\varphi_{k-1} & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ldots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ i_k \\ \\ \\ \\ \\ j_k \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & i_k & & & & & j_k & & & \end{matrix} &
\end{array}
$$

$$A^{(k)} = U_{k-1}^{T} A^{(k-1)} U_{k-1}$$

Последовательность матриц

$$U^{(k)} = U_0 U_1 \ldots U_{k-2} U_{k-1} \tag{12}$$

сходится при $k \to \infty$ к ортогональной матрице U из (11).

## 3 Нахождение собственных векторов

Если $\lambda_i$ – i-й диагональный элемент матрицы $\Lambda$, определяемый формулой (11), то соответствующим ему собственным вектором будет вектор

$$\overline{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{i-я строка}$$

т.е. $U^T A U \overline{e_i} = \lambda_i \overline{e_i}$ или в силу ортогональности матрицы U: $AU\overline{e_i} = \lambda_i U \overline{e_i}$.

Это равенство показывает, что вектор $x = U\overline{e_i}$ есть собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda_i$. Компонентами вектора $x_i$ являются элементы i-ого столбца матрицы U.

Следовательно, за приближенные значения собственных векторов матрицы A можно считать столбцы матрицы $U^{(k)}$, рассчитанной по формуле (12).

**Задание**

Лабораторная работа состоит из двух частей:

- решение системы уравнений указанным методом с числовыми значениями согласно варианту.

- написание программы, выполняющей решение любой системы указанным методом и проверка решения с заданными числовыми значениями.

1 Найти собственных значений матрицы методом вращений.

2 Найти собственные векторы матрицы методом вращений.

**Варианты заданий**

| № | Система уравнений |
|---|---|
| 1 | 4,003 × x1 + 0,207 × x2 + 0,519 × x3 + 0,281 × x4 = 0,425<br>0,416 × x1 + 3,273 × x2 + 0,326 × x3 + 0,375 × x4 = 0,021<br>0,297 × x1 + 0,351 × x2 + 2,997 × x3 + 0,429 × x4 = 0,213<br>0,412 × x1 + 0,194 × x2 + 0,215 × x3 + 3,628 × x4 = 0,946. |
| 2 | 2,591 × x1 + 0,512 × x2 + 0,128 × x3 + 0,195 × x4 = 0,159<br>0,203 × x1 + 3,469 × x2 + 0,572 × x3 + 0,162 × x4 = 0,280<br>0,256 × x1 + 0,273 × x2 + 2,994 × x3 + 0,501 × x4 = 0,134<br>0,381 × x1 + 0,219 × x2 + 0,176 × x3 + 5,903 × x4 = 0,864. |
| 3 | 2,979 × x1 + 0,427 × x2 + 0,406 × x3 + 0,348 × x4 = 0,341<br>0,273 × x1 + 3,951 × x2 + 0,217 × x3 + 0,327 × x4 = 0,844<br>0,318 × x1 + 0,197 × x2 + 2,875 × x3 + 0,166 × x4 = 0,131<br>0,219 × x1 + 0,231 × x2 + 0,187 × x3 + 3,276 × x4 = 0,381. |
| 4 | 3,738 × x1 + 0,195 × x2 + 0,275 × x3 + 0,136 × x4 = 0,815<br>0,519 × x1 + 5,002 × x2 + 0,405 × x3 + 0,283 × x4 = 0,191<br>0,306 × x1 + 0,381 × x2 + 4,812 × x3 + 0,418 × x4 = 0,423<br>0,272 × x1 + 0,142 × x2 + 0,314 × x3 + 3,935 × x4 = 0,352. |
| 5 | 4,855 × x1 + 1,239 × x2 + 0,272 × x3 + 0,258 × x4 =1,192<br>1,491 × x1 + 4,954 × x2 + 0,124 × x3 + 0,236 × x4 = 0,256<br>0,456 × x1 + 0,285 × x2 + 4,354 × x3 + 0,254 × x4 = 0,852<br>0,412 × x1 + 0,335 × x2 + 0,158 × x3 + 2,874 × x4 = 0,862. |
| 6 | 5,401 × x1 + 0,519 × x2 + 0,364 × x3 + 0,283 × x4 = 0,243<br>0,295 × x1 + 4,830 × x2 + 0,421 × x3 + 0,278 × x4 = 0,231<br>0,524 × x1 + 0,397 × x2 + 4,723 × x3 + 0,389 × x4 = 0,721<br>0,503 × x1 + 0,264 × x2 + 0,248 × x3 + 4,286 × x4 = 0,220. |
| 7 | 3,857 × x1 + 0,239 × x2 + 0,272 × x3 + 0,258 × x4 = 0,190<br>0,491 × x1 + 3,941 × x2 + 0,131 × x3 + 0,178 × x4 = 0,179<br>0,436 × x1 + 0,281 × x2 + 4,189 × x3 + 0,416 × x4 = 0,753<br>0,317 × x1 + 0,229 × x2 + 0,326 × x3 + 2,971 × x4 = 0,860. |
| 8 | 4,238 × x1 + 0,329 × x2 + 0,256 × x3 + 0,425 × x4 = 0,560<br>0,249 × x1 + 2,964 × x2 + 0,351 × x3 + 0,127 × x4 = 0,380<br>0,365 × x1 + 0,217 × x2 + 2,897 × x3 + 0,168 × x4 = 0,778<br>0,178 × x1 + 0,294 × x2 + 0,432 × x3 + 3,701 × x4 = 0,749. |
| 9 | 3,389 × x1 + 0,273 × x2 + 0,126 × x3 + 0,418 × x4 = 0,144 |

| | |
|---|---|
| | $0{,}329 \times x1 + 2{,}796 \times x2 + 0{,}179 \times x3 + 0{,}278 \times x4 = 0{,}297$<br>$0{,}186 \times x1 + 0{,}275 \times x2 + 2{,}987 \times x3 + 0{,}316 \times x4 = 0{,}529$<br>$0{,}197 \times x1 + 0{,}219 \times x2 + 0{,}274 \times x3 + 3{,}127 \times x4 = 0{,}869.$ |
| 10 | $2{,}958 \times x1 + 0{,}147 \times x2 + 0{,}354 \times x3 + 0{,}238 \times x4 = 0{,}651$<br>$0{,}127 \times x1 + 2{,}395 \times x2 + 0{,}256 \times x3 + 0{,}273 \times x4 = 0{,}898$<br>$0{,}403 \times x1 + 0{,}184 \times x2 + 3{,}815 \times x3 + 0{,}416 \times x4 = 0{,}595$<br>$0{,}259 \times x1 + 0{,}361 \times x2 + 0{,}281 \times x3 + 3{,}736 \times x4 = 0{,}389.$ |
| 11 | $4{,}503 \times x1 + 0{,}219 \times x2 + 0{,}527 \times x3 + 0{,}396 \times x4 = 0{,}553$<br>$0{,}259 \times x1 + 5{,}121 \times x2 + 0{,}423 \times x3 + 0{,}206 \times x4 = 0{,}358$<br>$0{,}413 \times x1 + 0{,}531 \times x2 + 4{,}317 \times x3 + 0{,}264 \times x4 = 0{,}565$<br>$0{,}327 \times x1 + 0{,}412 \times x2 + 0{,}203 \times x3 + 4{,}851 \times x4 = 0{,}436.$ |
| 12 | $5{,}103 \times x1 + 0{,}293 \times x2 + 0{,}336 \times x3 + 0{,}270 \times x4 = 0{,}745$<br>$0{,}179 \times x1 + 4{,}912 \times x2 + 0{,}394 \times x3 + 0{,}375 \times x4 = 0{,}381$<br>$0{,}189 \times x1 + 0{,}321 \times x2 + 2{,}875 \times x3 + 0{,}216 \times x4 = 0{,}480$<br>$0{,}317 \times x1 + 0{,}165 \times x2 + 0{,}386 \times x3 + 3{,}934 \times x4 = 0{,}552.$ |
| 13 | $5{,}554 \times x1 + 0{,}252 \times x2 + 0{,}496 \times x3 + 0{,}237 \times x4 = 0{,}442$<br>$0{,}580 \times x1 + 4{,}953 \times x2 + 0{,}467 \times x3 + 0{,}028 \times x4 = 0{,}464$<br>$0{,}319 \times x1 + 0{,}372 \times x2 + 8{,}935 \times x3 + 0{,}520 \times x4 = 0{,}979$<br>$0{,}043 \times x1 + 0{,}459 \times x2 + 0{,}319 \times x3 + 4{,}778 \times x4 = 0{,}126.$ |
| 14 | $2{,}998 \times x1 + 0{,}209 \times x2 + 0{,}315 \times x3 + 0{,}281 \times x4 = 0{,}108$<br>$0{,}163 \times x1 + 3{,}237 \times x2 + 0{,}226 \times x3 + 0{,}307 \times x4 = 0{,}426$<br>$0{,}416 \times x1 + 0{,}175 \times x2 + 3{,}239 \times x3 + 0{,}159 \times x4 = 0{,}310$<br>$0{,}287 \times x1 + 0{,}196 \times x2 + 0{,}325 \times x3 + 4{,}062 \times x4 = 0{,}084.$ |
| 15 | $5{,}452 \times x1 + 0{,}401 \times x2 + 0{,}758 \times x3 + 0{,}123 \times x4 = 0{,}886$<br>$0{,}785 \times x1 + 2{,}654 \times x2 + 0{,}687 \times x3 + 0{,}203 \times x4 = 0{,}356$<br>$0{,}402 \times x1 + 0{,}244 \times x2 + 4{,}456 \times x3 + 0{,}552 \times x4 = 0{,}342$<br>$0{,}210 \times x1 + 0{,}514 \times x2 + 0{,}206 \times x3 + 4{,}568 \times x4 = 0{,}452.$ |
| 16 | $2{,}923 \times x1 + 0{,}220 \times x2 + 0{,}159 \times x3 + 0{,}328 \times x4 = 0{,}605$<br>$0{,}363 \times x1 + 4{,}123 \times x2 + 0{,}268 \times x3 + 0{,}327 \times x4 = 0{,}496$<br>$0{,}169 \times x1 + 0{,}271 \times x2 + 3{,}906 \times x3 + 0{,}295 \times x4 = 0{,}590$<br>$0{,}241 \times x1 + 0{,}319 \times x2 + 0{,}257 \times x3 + 3{,}862 \times x4 = 0{,}896.$ |
| 17 | $5{,}482 \times x1 + 0{,}358 \times x2 + 0{,}237 \times x3 + 0{,}409 \times x4 = 0{,}416$<br>$0{,}580 \times x1 + 4{,}953 \times x2 + 0{,}467 \times x3 + 0{,}028 \times x4 = 0{,}464$<br>$0{,}319 \times x1 + 0{,}372 \times x2 + 8{,}935 \times x3 + 0{,}520 \times x4 = 0{,}979$<br>$0{,}043 \times x1 + 0{,}459 \times x2 + 0{,}319 \times x3 + 4{,}778 \times x4 = 0{,}126.$ |
| 18 | $3{,}738 \times x1 + 0{,}195 \times x2 + 0{,}275 \times x3 + 0{,}136 \times x4 = 0{,}815$ |

| | |
|---|---|
| | $0,519 \times x1 + 5,002 \times x2 + 0,405 \times x3 + 0,283 \times x4 = 0,191$<br>$0,306 \times x1 + 0,381 \times x2 + 4,812 \times x3 + 0,418 \times x4 = 0,423$<br>$0,272 \times x1 + 0,142 \times x2 + 0,314 \times x3 + 3,935 \times x4 = 0,352.$ |
| 19 | $3,910 \times x1 + 0,129 \times x2 + 0,283 \times x3 + 0,107 \times x4 = 0,395$<br>$0,217 \times x1 + 4,691 \times x2 + 0,279 \times x3 + 0,237 \times x4 = 0,432$<br>$0,201 \times x1 + 0,372 \times x2 + 2,987 \times x3 + 0,421 \times x4 = 0,127$<br>$0,531 \times x1 + 0,196 \times x2 + 0,236 \times x3 + 5,032 \times x4 = 0,458.$ |
| 20 | $5,482 \times x1 + 0,617 \times x2 + 0,520 \times x3 + 0,401 \times x4 = 0,823$<br>$0,607 \times x1 + 4,195 \times x2 + 0,232 \times x3 + 0,570 \times x4 = 0,152$<br>$0,367 \times x1 + 0,576 \times x2 + 8,193 \times x3 + 0,582 \times x4 = 0,625$<br>$0,389 \times x1 + 0,356 \times x2 + 0,207 \times x3 + 5,772 \times x4 = 0,315.$ |
| 21 | $3,345 \times x1 + 0,329 \times x2 + 0,365 \times x3 + 0,203 \times x4 = 0,305$<br>$0,125 \times x1 + 4,210 \times x2 + 0,402 \times x3 + 0,520 \times x4 = 0,283$<br>$0,314 \times x1 + 0,251 \times x2 + 4,531 \times x3 + 0,168 \times x4 = 0,680$<br>$0,197 \times x1 + 0,512 \times x2 + 0,302 \times x3 + 2,951 \times x4 = 0,293.$ |
| 22 | $4,247 \times x1 + 0,275 \times x2 + 0,397 \times x3 + 0,239 \times x4 = 0,721$<br>$0,466 \times x1 + 4,235 \times x2 + 0,264 \times x3 + 0,358 \times x4 = 0,339$<br>$0,204 \times x1 + 0,501 \times x2 + 3,721 \times x3 + 0,297 \times x4 = 0,050$<br>$0,326 \times x1 + 0,421 \times x2 + 0,254 \times x3 + 3,286 \times x4 = 0,486.$ |
| 23 | $3,476 \times x1 + 0,259 \times x2 + 0,376 \times x3 + 0,398 \times x4 = 0,871$<br>$0,425 \times x1 + 4,583 \times x2 + 0,417 \times x3 + 0,328 \times x4 = 0,739$<br>$0,252 \times x1 + 0,439 \times x2 + 3,972 \times x3 + 0,238 \times x4 = 0,644$<br>$0,265 \times x1 + 0,291 \times x2 + 0,424 \times x3 + 3,864 \times x4 = 0,581.$ |
| 24 | $3,241 \times x1 + 0,197 \times x2 + 0,643 \times x3 + 0,236 \times x4 = 0,454$<br>$0,257 \times x1 + 3,853 \times x2 + 0,342 \times x3 + 0,427 \times x4 = 0,371$<br>$0,324 \times x1 + 0,317 \times x2 + 2,793 \times x3 + 0,238 \times x4 = 0,465$<br>$0,438 \times x1 + 0,326 \times x2 + 0,483 \times x3 + 4,229 \times x4 = 0,822.$ |
| 25 | $4,405 \times x1 + 0,472 \times x2 + 0,395 \times x3 + 0,253 \times x4 = 0,623$<br>$0,227 \times x1 + 2,957 \times x2 + 0,342 \times x3 + 0,327 \times x4 = 0,072$<br>$0,419 \times x1 + 0,341 \times x2 + 3,238 \times x3 + 0,394 \times x4 = 0,143$<br>$0,325 \times x1 + 0,326 \times x2 + 0,401 \times x3 + 4,273 \times x4 = 0,065.$ |
| 26 | $2,974 \times x1 + 0,347 \times x2 + 0,439 \times x3 + 0,123 \times x4 = 0,381$<br>$0,242 \times x1 + 2,895 \times x2 + 0,412 \times x3 + 0,276 \times x4 = 0,721$<br>$0,249 \times x1 + 0,378 \times x2 + 3,791 \times x3 + 0,358 \times x4 = 0,514$<br>$0,387 \times x1 + 0,266 \times x2 + 0,431 \times x3 + 4,022 \times x4 = 0,795.$ |

| | |
|---|---|
| 27 | $3,452 \times x1 + 0,458 \times x2 + 0,125 \times x3 + 0,236 \times x4 = 0,745$<br>$0,254 \times x1 + 2,458 \times x2 + 0,325 \times x3 + 0,126 \times x4 = 0,789$<br>$0,305 \times x1 + 0,125 \times x2 + 3,869 \times x3 + 0,458 \times x4 = 0,654$<br>$0,423 \times x1 + 0,452 \times x2 + 0,248 \times x3 + 3,896 \times x4 = 0,405.$ |
| 28 | $2,979 \times x1 + 0,427 \times x2 + 0,406 \times x3 + 0,348 \times x4 = 0,341$<br>$0,273 \times x1 + 3,951 \times x2 + 0,217 \times x3 + 0,327 \times x4 = 0,844$<br>$0,318 \times x1 + 0,197 \times x2 + 2,875 \times x3 + 0,166 \times x4 = 0,131$<br>$0,219 \times x1 + 0,231 \times x2 + 0,187 \times x3 + 3,276 \times x4 = 0,381.$ |
| 29 | $2,048 \times x1 + 0,172 \times x2 + 0,702 \times x3 + 0,226 \times x4 = 0,514$<br>$0,495 \times x1 + 4,093 \times x2 + 0,083 \times x3 + 0,390 \times x4 = 0,176$<br>$0,277 \times x1 + 0,368 \times x2 + 4,164 \times x3 + 0,535 \times x4 = 0,309$<br>$0,766 \times x1 + 0,646 \times x2 + 0,767 \times x3 + 5,960 \times x4 = 0,535.$ |
| 30 | $2,389 \times x1 + 0,273 \times x2 + 0,126 \times x3 + 0,418 \times x4 = 0,144$<br>$0,329 \times x1 + 2,796 \times x2 + 0,179 \times x3 + 0,278 \times x4 = 0,297$<br>$0,186 \times x1 + 0,275 \times x2 + 2,987 \times x3 + 0,316 \times x4 = 0,529$<br>$0,197 \times x1 + 0,219 \times x2 + 0,274 \times x3 + 3,127 \times x4 = 0,869.$ |