1 Решение СЛАУ методом Гаусса

1 Краткие теоретические сведения

Будем рассматривать системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

где $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$– вектор свободных членов, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор неизвестных с вещественными координатами, $A = (a_{ij}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$– вещественная матрица размера n×n, матрица коэффициентов системы.

Эффективность способов решения данной системы во многом зависит от структуры и свойств матрицы A: размера, обусловленности, симметричности, заполненности (т. е. соотношения между числом нулевых и ненулевых элементов), специфики расположения ненулевых элементов матрицы.

Теорема Кронекера–Капелли: Необходимым условием существования единственного решения системы (1) является: $\det A \neq 0$.

Определение. Числом обусловленности системы называют число $\nu(A) = \|A\|\|A^{-1}\|, \nu(A) \geq 1$. Число обусловленности системы зависит от выбора матричной нормы.

В случае $\nu(A) \gg 1$ систему или матрицу А называют плохо обусловленной. В этом случае, погрешность решения системы (1) может оказаться неприемлемо большой. Понятие приемлемости или неприемлемости погрешности определяется постановкой задачи.

Определение. Нормой называется такая величина, обладающая свойствами:

1)$\|x\| > 0, \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0,$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Таблица 1 – Виды норм векторов и матриц

В пространстве векторов	В пространстве матриц
Кубическая норма	
$\|x\|_1 = \max\limits_{1\leq j<n} \left\|x_j\right\|$	$\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq i<n} \left\|\sum\limits_{j=1}^{n} \left\|a_{ij}\right\|\right\|$
Октаэдрическая норма	
$\|x\|_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$	$\|A\|_2 = \max\limits_{1\leq j<n} \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \left\|a_{ij}\right\|\right\|$
Сферическая норма	
$\|x\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \left\|x_j\right\|^2} = \sqrt{(x, x)}$	$\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

2 Метод Гаусса

Один из методов решения системы (1) – метод Гаусса. Суть метода Гаусса заключается в приведении исходной матрицы А к треугольному виду. Будем постоянно приводить систему (1) к треугольному виду, исключая последовательно сначала x_1 из второго, третьего, …, n-го уравнений, затем x_2 из третьего, четвертого, …, n-го уравнений преобразованной системы и т. д.

На первом этапе заменим второе, третье, …, n-е уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым, умноженным соответственно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$.

Результатом этого этапа преобразований будет эквивалентная (1) система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_2 = b_2^{(1)} \\ \qquad \qquad \cdots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{2}$$

коэффициенты которой (с верхним индексом 1) подсчитываются по формулам

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, \qquad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1, \qquad i, j = 2,3, \dots n.$$

На втором этапе проделываем такие же операции, как и на первом, с подсистемой (2).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2^{(1)} \\ \qquad \qquad a_{33}^{(2)}x_x + \cdots + a_{3n}^{(2)}\, x_3 = b_3^{(2)} \\ \qquad \qquad \qquad \cdots \\ \qquad \qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \tag{3}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)}, \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_1^{(1)}, \qquad i, j = 3, \dots n.$$

Продолжая этот процесс, на (n–1)-м шаге так называемого прямого хода метода Гаусса систему (1) приведем к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_x + \cdots + a_{3n}^{(2)}\,x_3 = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{4}$$

Общая формула для расчета коэффициентов:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{i2}^{(k-1)}}{a_{22}^{(k-1)}} \cdot a_{2j}^{(k-1)}, \qquad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{i2}^{(k-1)}}{a_{22}^{(k-1)}} \cdot b_1^{(k-1)},$$

где верхний индекс k – номер этапа, $k = \overline{1, n-1}$, нижние индексы i и j изменяются от k+1 до n. Полагаем, что $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$.

Структура полученной матрицы позволяет последовательно вычислять значения неизвестных, начиная с последнего (обратный ход метода Гаусса).

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$\dots,$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} - \cdots - a_{2n}^{(1)} x_n}{a_{22}^{(1)}},$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - \cdots - a_{1n} x_n}{a_{11}},$$

Этот процесс можно определить одной формулой

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right)$$

где k полагают равным n, n – 1, …, 2, 1 и сумма по определению считается равной нулю, если нижний предел суммирования имеет значение больше верхнего.

3 Оценки погрешностей решения системы

Приведем оценки погрешностей системы (1).

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов системы,

$\|A\| = \max_{1 \le i < n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$- ее норма,

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – соответственно столбцы свободных членов и неизвестных,

$\|\bar{b}\| = \max_{1 \le i < n} |b_i|$, $\|\bar{x}\| = \max_{1 \le i < n} |x_i|$ – нормы,

$\Delta_{\bar{b}}, \Delta_{\bar{x}}$ и $\delta_{\bar{b}} = \frac{\Delta_{\bar{b}}}{\|\bar{b}\|}, \delta_{\bar{x}} = \frac{\Delta_{\bar{x}}}{\|x\|}$ – соответственно их абсолютные и относительные погрешности.

Тогда абсолютная погрешность решения системы (1) имеет оценку:

$$\Delta_{\bar{x}} = \|A^{-1}\| \cdot \Delta_{\bar{b}},$$

а относительная погрешность – оценку:

$$\delta_{\bar{x}} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \delta_{\bar{b}}.$$

Задание

Лабораторная работа состоит из двух частей:

- решение системы уравнений указанным методом с числовыми значениями согласно варианту.

- написание программы, выполняющей решение любой системы указанным методом и проверка решения с заданными числовыми значениями.

1 Решить заданную системы уравнений методом Гаусса.

2 Найти обратную матрицу для матрицы системы.

3 Найти оценку абсолютной и относительной погрешности решения, зная, что свободные члены исходной системы имеют абсолютную погрешность 0,001.

Варианты заданий

№	Система уравнений
1	4,003 × x1 + 0,207 × x2 + 0,519 × x3 + 0,281 × x4 = 0,425 0,416 × x1 + 3,273 × x2 + 0,326 × x3 + 0,375 × x4 = 0,021 0,297 × x1 + 0,351 × x2 + 2,997 × x3 + 0,429 × x4 = 0,213 0,412 × x1 + 0,194 × x2 + 0,215 × x3 + 3,628 × x4 = 0,946.
2	2,591 × x1 + 0,512 × x2 + 0,128 × x3 + 0,195 × x4 = 0,159

	$0{,}203 \times x1 + 3{,}469 \times x2 + 0{,}572 \times x3 + 0{,}162 \times x4 = 0{,}280$ $0{,}256 \times x1 + 0{,}273 \times x2 + 2{,}994 \times x3 + 0{,}501 \times x4 = 0{,}134$ $0{,}381 \times x1 + 0{,}219 \times x2 + 0{,}176 \times x3 + 5{,}903 \times x4 = 0{,}864.$
3	$2{,}979 \times x1 + 0{,}427 \times x2 + 0{,}406 \times x3 + 0{,}348 \times x4 = 0{,}341$ $0{,}273 \times x1 + 3{,}951 \times x2 + 0{,}217 \times x3 + 0{,}327 \times x4 = 0{,}844$ $0{,}318 \times x1 + 0{,}197 \times x2 + 2{,}875 \times x3 + 0{,}166 \times x4 = 0{,}131$ $0{,}219 \times x1 + 0{,}231 \times x2 + 0{,}187 \times x3 + 3{,}276 \times x4 = 0{,}381.$
4	$3{,}738 \times x1 + 0{,}195 \times x2 + 0{,}275 \times x3 + 0{,}136 \times x4 = 0{,}815$ $0{,}519 \times x1 + 5{,}002 \times x2 + 0{,}405 \times x3 + 0{,}283 \times x4 = 0{,}191$ $0{,}306 \times x1 + 0{,}381 \times x2 + 4{,}812 \times x3 + 0{,}418 \times x4 = 0{,}423$ $0{,}272 \times x1 + 0{,}142 \times x2 + 0{,}314 \times x3 + 3{,}935 \times x4 = 0{,}352.$
5	$4{,}855 \times x1 + 1{,}239 \times x2 + 0{,}272 \times x3 + 0{,}258 \times x4 = 1{,}192$ $1{,}491 \times x1 + 4{,}954 \times x2 + 0{,}124 \times x3 + 0{,}236 \times x4 = 0{,}256$ $0{,}456 \times x1 + 0{,}285 \times x2 + 4{,}354 \times x3 + 0{,}254 \times x4 = 0{,}852$ $0{,}412 \times x1 + 0{,}335 \times x2 + 0{,}158 \times x3 + 2{,}874 \times x4 = 0{,}862.$
6	$5{,}401 \times x1 + 0{,}519 \times x2 + 0{,}364 \times x3 + 0{,}283 \times x4 = 0{,}243$ $0{,}295 \times x1 + 4{,}830 \times x2 + 0{,}421 \times x3 + 0{,}278 \times x4 = 0{,}231$ $0{,}524 \times x1 + 0{,}397 \times x2 + 4{,}723 \times x3 + 0{,}389 \times x4 = 0{,}721$ $0{,}503 \times x1 + 0{,}264 \times x2 + 0{,}248 \times x3 + 4{,}286 \times x4 = 0{,}220.$
7	$3{,}857 \times x1 + 0{,}239 \times x2 + 0{,}272 \times x3 + 0{,}258 \times x4 = 0{,}190$ $0{,}491 \times x1 + 3{,}941 \times x2 + 0{,}131 \times x3 + 0{,}178 \times x4 = 0{,}179$ $0{,}436 \times x1 + 0{,}281 \times x2 + 4{,}189 \times x3 + 0{,}416 \times x4 = 0{,}753$ $0{,}317 \times x1 + 0{,}229 \times x2 + 0{,}326 \times x3 + 2{,}971 \times x4 = 0{,}860.$
8	$4{,}238 \times x1 + 0{,}329 \times x2 + 0{,}256 \times x3 + 0{,}425 \times x4 = 0{,}560$ $0{,}249 \times x1 + 2{,}964 \times x2 + 0{,}351 \times x3 + 0{,}127 \times x4 = 0{,}380$ $0{,}365 \times x1 + 0{,}217 \times x2 + 2{,}897 \times x3 + 0{,}168 \times x4 = 0{,}778$ $0{,}178 \times x1 + 0{,}294 \times x2 + 0{,}432 \times x3 + 3{,}701 \times x4 = 0{,}749.$
9	$3{,}389 \times x1 + 0{,}273 \times x2 + 0{,}126 \times x3 + 0{,}418 \times x4 = 0{,}144$ $0{,}329 \times x1 + 2{,}796 \times x2 + 0{,}179 \times x3 + 0{,}278 \times x4 = 0{,}297$ $0{,}186 \times x1 + 0{,}275 \times x2 + 2{,}987 \times x3 + 0{,}316 \times x4 = 0{,}529$ $0{,}197 \times x1 + 0{,}219 \times x2 + 0{,}274 \times x3 + 3{,}127 \times x4 = 0{,}869.$
10	$2{,}958 \times x1 + 0{,}147 \times x2 + 0{,}354 \times x3 + 0{,}238 \times x4 = 0{,}651$ $0{,}127 \times x1 + 2{,}395 \times x2 + 0{,}256 \times x3 + 0{,}273 \times x4 = 0{,}898$ $0{,}403 \times x1 + 0{,}184 \times x2 + 3{,}815 \times x3 + 0{,}416 \times x4 = 0{,}595$ $0{,}259 \times x1 + 0{,}361 \times x2 + 0{,}281 \times x3 + 3{,}736 \times x4 = 0{,}389.$
11	$4{,}503 \times x1 + 0{,}219 \times x2 + 0{,}527 \times x3 + 0{,}396 \times x4 = 0{,}553$ $0{,}259 \times x1 + 5{,}121 \times x2 + 0{,}423 \times x3 + 0{,}206 \times x4 = 0{,}358$

	$0,413 \times x1 + 0,531 \times x2 + 4,317 \times x3 + 0,264 \times x4 = 0,565$ $0,327 \times x1 + 0,412 \times x2 + 0,203 \times x3 + 4,851 \times x4 = 0,436.$
12	$5,103 \times x1 + 0,293 \times x2 + 0,336 \times x3 + 0,270 \times x4 = 0,745$ $0,179 \times x1 + 4,912 \times x2 + 0,394 \times x3 + 0,375 \times x4 = 0,381$ $0,189 \times x1 + 0,321 \times x2 + 2,875 \times x3 + 0,216 \times x4 = 0,480$ $0,317 \times x1 + 0,165 \times x2 + 0,386 \times x3 + 3,934 \times x4 = 0,552.$
13	$5,554 \times x1 + 0,252 \times x2 + 0,496 \times x3 + 0,237 \times x4 = 0,442$ $0,580 \times x1 + 4,953 \times x2 + 0,467 \times x3 + 0,028 \times x4 = 0,464$ $0,319 \times x1 + 0,372 \times x2 + 8,935 \times x3 + 0,520 \times x4 = 0,979$ $0,043 \times x1 + 0,459 \times x2 + 0,319 \times x3 + 4,778 \times x4 = 0,126.$
14	$2,998 \times x1 + 0,209 \times x2 + 0,315 \times x3 + 0,281 \times x4 = 0,108$ $0,163 \times x1 + 3,237 \times x2 + 0,226 \times x3 + 0,307 \times x4 = 0,426$ $0,416 \times x1 + 0,175 \times x2 + 3,239 \times x3 + 0,159 \times x4 = 0,310$ $0,287 \times x1 + 0,196 \times x2 + 0,325 \times x3 + 4,062 \times x4 = 0,084.$
15	$5,452 \times x1 + 0,401 \times x2 + 0,758 \times x3 + 0,123 \times x4 = 0,886$ $0,785 \times x1 + 2,654 \times x2 + 0,687 \times x3 + 0,203 \times x4 = 0,356$ $0,402 \times x1 + 0,244 \times x2 + 4,456 \times x3 + 0,552 \times x4 = 0,342$ $0,210 \times x1 + 0,514 \times x2 + 0,206 \times x3 + 4,568 \times x4 = 0,452.$
16	$2,923 \times x1 + 0,220 \times x2 + 0,159 \times x3 + 0,328 \times x4 = 0,605$ $0,363 \times x1 + 4,123 \times x2 + 0,268 \times x3 + 0,327 \times x4 = 0,496$ $0,169 \times x1 + 0,271 \times x2 + 3,906 \times x3 + 0,295 \times x4 = 0,590$ $0,241 \times x1 + 0,319 \times x2 + 0,257 \times x3 + 3,862 \times x4 = 0,896.$
17	$5,482 \times x1 + 0,358 \times x2 + 0,237 \times x3 + 0,409 \times x4 = 0,416$ $0,580 \times x1 + 4,953 \times x2 + 0,467 \times x3 + 0,028 \times x4 = 0,464$ $0,319 \times x1 + 0,372 \times x2 + 8,935 \times x3 + 0,520 \times x4 = 0,979$ $0,043 \times x1 + 0,459 \times x2 + 0,319 \times x3 + 4,778 \times x4 = 0,126.$
18	$3,738 \times x1 + 0,195 \times x2 + 0,275 \times x3 + 0,136 \times x4 = 0,815$ $0,519 \times x1 + 5,002 \times x2 + 0,405 \times x3 + 0,283 \times x4 = 0,191$ $0,306 \times x1 + 0,381 \times x2 + 4,812 \times x3 + 0,418 \times x4 = 0,423$ $0,272 \times x1 + 0,142 \times x2 + 0,314 \times x3 + 3,935 \times x4 = 0,352.$
19	$3,910 \times x1 + 0,129 \times x2 + 0,283 \times x3 + 0,107 \times x4 = 0,395$ $0,217 \times x1 + 4,691 \times x2 + 0,279 \times x3 + 0,237 \times x4 = 0,432$ $0,201 \times x1 + 0,372 \times x2 + 2,987 \times x3 + 0,421 \times x4 = 0,127$ $0,531 \times x1 + 0,196 \times x2 + 0,236 \times x3 + 5,032 \times x4 = 0,458.$
20	$5,482 \times x1 + 0,617 \times x2 + 0,520 \times x3 + 0,401 \times x4 = 0,823$ $0,607 \times x1 + 4,195 \times x2 + 0,232 \times x3 + 0,570 \times x4 = 0,152$

	$0,367 \times x1 + 0,576 \times x2 + 8,193 \times x3 + 0,582 \times x4 = 0,625$ $0,389 \times x1 + 0,356 \times x2 + 0,207 \times x3 + 5,772 \times x4 = 0,315.$
21	$3,345 \times x1 + 0,329 \times x2 + 0,365 \times x3 + 0,203 \times x4 = 0,305$ $0,125 \times x1 + 4,210 \times x2 + 0,402 \times x3 + 0,520 \times x4 = 0,283$ $0,314 \times x1 + 0,251 \times x2 + 4,531 \times x3 + 0,168 \times x4 = 0,680$ $0,197 \times x1 + 0,512 \times x2 + 0,302 \times x3 + 2,951 \times x4 = 0,293.$
22	$4,247 \times x1 + 0,275 \times x2 + 0,397 \times x3 + 0,239 \times x4 = 0,721$ $0,466 \times x1 + 4,235 \times x2 + 0,264 \times x3 + 0,358 \times x4 = 0,339$ $0,204 \times x1 + 0,501 \times x2 + 3,721 \times x3 + 0,297 \times x4 = 0,050$ $0,326 \times x1 + 0,421 \times x2 + 0,254 \times x3 + 3,286 \times x4 = 0,486.$
23	$3,476 \times x1 + 0,259 \times x2 + 0,376 \times x3 + 0,398 \times x4 = 0,871$ $0,425 \times x1 + 4,583 \times x2 + 0,417 \times x3 + 0,328 \times x4 = 0,739$ $0,252 \times x1 + 0,439 \times x2 + 3,972 \times x3 + 0,238 \times x4 = 0,644$ $0,265 \times x1 + 0,291 \times x2 + 0,424 \times x3 + 3,864 \times x4 = 0,581.$
24	$3,241 \times x1 + 0,197 \times x2 + 0,643 \times x3 + 0,236 \times x4 = 0,454$ $0,257 \times x1 + 3,853 \times x2 + 0,342 \times x3 + 0,427 \times x4 = 0,371$ $0,324 \times x1 + 0,317 \times x2 + 2,793 \times x3 + 0,238 \times x4 = 0,465$ $0,438 \times x1 + 0,326 \times x2 + 0,483 \times x3 + 4,229 \times x4 = 0,822.$
25	$4,405 \times x1 + 0,472 \times x2 + 0,395 \times x3 + 0,253 \times x4 = 0,623$ $0,227 \times x1 + 2,957 \times x2 + 0,342 \times x3 + 0,327 \times x4 = 0,072$ $0,419 \times x1 + 0,341 \times x2 + 3,238 \times x3 + 0,394 \times x4 = 0,143$ $0,325 \times x1 + 0,326 \times x2 + 0,401 \times x3 + 4,273 \times x4 = 0,065.$
26	$2,974 \times x1 + 0,347 \times x2 + 0,439 \times x3 + 0,123 \times x4 = 0,381$ $0,242 \times x1 + 2,895 \times x2 + 0,412 \times x3 + 0,276 \times x4 = 0,721$ $0,249 \times x1 + 0,378 \times x2 + 3,791 \times x3 + 0,358 \times x4 = 0,514$ $0,387 \times x1 + 0,266 \times x2 + 0,431 \times x3 + 4,022 \times x4 = 0,795.$
27	$3,452 \times x1 + 0,458 \times x2 + 0,125 \times x3 + 0,236 \times x4 = 0,745$ $0,254 \times x1 + 2,458 \times x2 + 0,325 \times x3 + 0,126 \times x4 = 0,789$ $0,305 \times x1 + 0,125 \times x2 + 3,869 \times x3 + 0,458 \times x4 = 0,654$ $0,423 \times x1 + 0,452 \times x2 + 0,248 \times x3 + 3,896 \times x4 = 0,405.$
28	$2,979 \times x1 + 0,427 \times x2 + 0,406 \times x3 + 0,348 \times x4 = 0,341$ $0,273 \times x1 + 3,951 \times x2 + 0,217 \times x3 + 0,327 \times x4 = 0,844$ $0,318 \times x1 + 0,197 \times x2 + 2,875 \times x3 + 0,166 \times x4 = 0,131$ $0,219 \times x1 + 0,231 \times x2 + 0,187 \times x3 + 3,276 \times x4 = 0,381.$
29	$2,048 \times x1 + 0,172 \times x2 + 0,702 \times x3 + 0,226 \times x4 = 0,514$

	$0{,}495 \times x1 + 4{,}093 \times x2 + 0{,}083 \times x3 + 0{,}390 \times x4 = 0{,}176$ $0{,}277 \times x1 + 0{,}368 \times x2 + 4{,}164 \times x3 + 0{,}535 \times x4 = 0{,}309$ $0{,}766 \times x1 + 0{,}646 \times x2 + 0{,}767 \times x3 + 5{,}960 \times x4 = 0{,}535.$
30	$2{,}389 \times x1 + 0{,}273 \times x2 + 0{,}126 \times x3 + 0{,}418 \times x4 = 0{,}144$ $0{,}329 \times x1 + 2{,}796 \times x2 + 0{,}179 \times x3 + 0{,}278 \times x4 = 0{,}297$ $0{,}186 \times x1 + 0{,}275 \times x2 + 2{,}987 \times x3 + 0{,}316 \times x4 = 0{,}529$ $0{,}197 \times x1 + 0{,}219 \times x2 + 0{,}274 \times x3 + 3{,}127 \times x4 = 0{,}869.$