

# Итерационные методы решения СЛАУ

## 1 Метод простой итерации

Будем рассматривать системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

где  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  – вектор свободных членов,  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – вектор неизвестных с вещественными координатами,  $A = (a_{ij}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$  – вещественная матрица размера  $n \times n$ , матрица коэффициентов системы.

Система вида  $A\bar{x} = \bar{b}$  может быть преобразована к эквивалентной ей системе

$$\bar{x} = (E - A)\bar{x} + \bar{b}$$

Обозначим через  $B = (E - A)$ , тогда  $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{b}$ .

Образуем итерационный процесс:

$$\bar{x}^{k+1} = B\bar{x}^k + \bar{b}$$

**Теорема о простых итерациях.** Необходимым и достаточным условием сходимости МПИ при любом начальном векторе  $\bar{x}_0$  к решению  $\bar{x}^*$  системы (2) является выполнение условия: или  $\|B\| < 1$  (хотя бы в одной норме), или все собственные числа  $\lambda_B^i < 1$ .

Для определения количества итераций, необходимых для достижения заданной точности  $\varepsilon$ , можно воспользоваться априорной оценкой погрешности решения системы и это значение найти из неравенства:

$$\frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \cdot \|\bar{x}^1 - \bar{x}^0\| < \varepsilon$$

Апостериорную (уточненную) оценку погрешности решения находят по формуле

$$\Delta_{\bar{x}_k} \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|\bar{x}^k - \bar{x}^{k-1}\|$$

## 2 Метод Зейделя

Матрица  $A$  с элементами  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  называется матрицей с диагональным преобладанием, если имеют место неравенства

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| > 0, i = \overline{1, n}$$

Метод Зейделя применяется в основном к системам, в которых преобладающими элементами являются диагональные. В противном случае

скорость его сходимости практически не отличается от скорости сходимости МПИ.

Рассмотрим систему (1), где  $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$ .

В (1) разделим  $i$ -е уравнение на  $a_{ii}$  и обозначим  $\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ .

Получим эквивалентную (1) систему, выразив в каждом  $i$ -м уравнении компонент решения  $x_i$

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12}x_2 - \dots - \tilde{a}_{1n}x_n \\ x_2 = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{21}x_1 - \dots - \tilde{a}_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n = \tilde{b}_n - \tilde{a}_{n1}x_1 - \dots - \tilde{a}_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases} \quad (5)$$

**Идея метода Зейделя:** при проведении итераций по формуле (5) используется результат предыдущих уравнений в процессе одной итерации.

Общая формула:

$$x_i^{k+1} = \tilde{b}_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} \tilde{a}_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \tilde{a}_{ij}x_j^k$$

Для того чтобы метод Зейделя сходил, достаточно выполнения одного из условий:  $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \forall i = \overline{1, n}, i \neq j$  или  $A$  – вещественная, симметричная, положительно определенная матрица.

### **Задание**

Лабораторная работа состоит из двух частей:

- решение системы уравнений указанным методом с числовыми значениями согласно варианту.

- написание программы, выполняющей решение любой системы указанным методом и проверка решения с заданными числовыми значениями.

1 Преобразовать систему к виду, необходимому для применения метода простых итераций. Проверить условия сходимости МПИ.

2 Найти необходимое число итеративных шагов ( $k_0$ ) для решения системы методом простой итерации с точностью 0,01.

3 Решить систему методом простых итераций.

4 Преобразовать систему к виду, необходимому для применения метода Зейделя. Проверить условия сходимости метода Зейделя.

5 Решение системы методом Зейделя.

### Варианты заданий

№	Система уравнений
1	$4,003 \times x_1 + 0,207 \times x_2 + 0,519 \times x_3 + 0,281 \times x_4 = 0,425$ $0,416 \times x_1 + 3,273 \times x_2 + 0,326 \times x_3 + 0,375 \times x_4 = 0,021$ $0,297 \times x_1 + 0,351 \times x_2 + 2,997 \times x_3 + 0,429 \times x_4 = 0,213$ $0,412 \times x_1 + 0,194 \times x_2 + 0,215 \times x_3 + 3,628 \times x_4 = 0,946.$
2	$2,591 \times x_1 + 0,512 \times x_2 + 0,128 \times x_3 + 0,195 \times x_4 = 0,159$ $0,203 \times x_1 + 3,469 \times x_2 + 0,572 \times x_3 + 0,162 \times x_4 = 0,280$ $0,256 \times x_1 + 0,273 \times x_2 + 2,994 \times x_3 + 0,501 \times x_4 = 0,134$ $0,381 \times x_1 + 0,219 \times x_2 + 0,176 \times x_3 + 5,903 \times x_4 = 0,864.$
3	$2,979 \times x_1 + 0,427 \times x_2 + 0,406 \times x_3 + 0,348 \times x_4 = 0,341$ $0,273 \times x_1 + 3,951 \times x_2 + 0,217 \times x_3 + 0,327 \times x_4 = 0,844$ $0,318 \times x_1 + 0,197 \times x_2 + 2,875 \times x_3 + 0,166 \times x_4 = 0,131$ $0,219 \times x_1 + 0,231 \times x_2 + 0,187 \times x_3 + 3,276 \times x_4 = 0,381.$
4	$3,738 \times x_1 + 0,195 \times x_2 + 0,275 \times x_3 + 0,136 \times x_4 = 0,815$ $0,519 \times x_1 + 5,002 \times x_2 + 0,405 \times x_3 + 0,283 \times x_4 = 0,191$ $0,306 \times x_1 + 0,381 \times x_2 + 4,812 \times x_3 + 0,418 \times x_4 = 0,423$

	$0,272 \times x_1 + 0,142 \times x_2 + 0,314 \times x_3 + 3,935 \times x_4 = 0,352.$
5	$4,855 \times x_1 + 1,239 \times x_2 + 0,272 \times x_3 + 0,258 \times x_4 = 1,192$ $1,491 \times x_1 + 4,954 \times x_2 + 0,124 \times x_3 + 0,236 \times x_4 = 0,256$ $0,456 \times x_1 + 0,285 \times x_2 + 4,354 \times x_3 + 0,254 \times x_4 = 0,852$ $0,412 \times x_1 + 0,335 \times x_2 + 0,158 \times x_3 + 2,874 \times x_4 = 0,862.$
6	$5,401 \times x_1 + 0,519 \times x_2 + 0,364 \times x_3 + 0,283 \times x_4 = 0,243$ $0,295 \times x_1 + 4,830 \times x_2 + 0,421 \times x_3 + 0,278 \times x_4 = 0,231$ $0,524 \times x_1 + 0,397 \times x_2 + 4,723 \times x_3 + 0,389 \times x_4 = 0,721$ $0,503 \times x_1 + 0,264 \times x_2 + 0,248 \times x_3 + 4,286 \times x_4 = 0,220.$
7	$3,857 \times x_1 + 0,239 \times x_2 + 0,272 \times x_3 + 0,258 \times x_4 = 0,190$ $0,491 \times x_1 + 3,941 \times x_2 + 0,131 \times x_3 + 0,178 \times x_4 = 0,179$ $0,436 \times x_1 + 0,281 \times x_2 + 4,189 \times x_3 + 0,416 \times x_4 = 0,753$ $0,317 \times x_1 + 0,229 \times x_2 + 0,326 \times x_3 + 2,971 \times x_4 = 0,860.$
8	$4,238 \times x_1 + 0,329 \times x_2 + 0,256 \times x_3 + 0,425 \times x_4 = 0,560$ $0,249 \times x_1 + 2,964 \times x_2 + 0,351 \times x_3 + 0,127 \times x_4 = 0,380$ $0,365 \times x_1 + 0,217 \times x_2 + 2,897 \times x_3 + 0,168 \times x_4 = 0,778$ $0,178 \times x_1 + 0,294 \times x_2 + 0,432 \times x_3 + 3,701 \times x_4 = 0,749.$
9	$3,389 \times x_1 + 0,273 \times x_2 + 0,126 \times x_3 + 0,418 \times x_4 = 0,144$ $0,329 \times x_1 + 2,796 \times x_2 + 0,179 \times x_3 + 0,278 \times x_4 = 0,297$ $0,186 \times x_1 + 0,275 \times x_2 + 2,987 \times x_3 + 0,316 \times x_4 = 0,529$ $0,197 \times x_1 + 0,219 \times x_2 + 0,274 \times x_3 + 3,127 \times x_4 = 0,869.$
10	$2,958 \times x_1 + 0,147 \times x_2 + 0,354 \times x_3 + 0,238 \times x_4 = 0,651$ $0,127 \times x_1 + 2,395 \times x_2 + 0,256 \times x_3 + 0,273 \times x_4 = 0,898$ $0,403 \times x_1 + 0,184 \times x_2 + 3,815 \times x_3 + 0,416 \times x_4 = 0,595$ $0,259 \times x_1 + 0,361 \times x_2 + 0,281 \times x_3 + 3,736 \times x_4 = 0,389.$
11	$4,503 \times x_1 + 0,219 \times x_2 + 0,527 \times x_3 + 0,396 \times x_4 = 0,553$ $0,259 \times x_1 + 5,121 \times x_2 + 0,423 \times x_3 + 0,206 \times x_4 = 0,358$ $0,413 \times x_1 + 0,531 \times x_2 + 4,317 \times x_3 + 0,264 \times x_4 = 0,565$ $0,327 \times x_1 + 0,412 \times x_2 + 0,203 \times x_3 + 4,851 \times x_4 = 0,436.$
12	$5,103 \times x_1 + 0,293 \times x_2 + 0,336 \times x_3 + 0,270 \times x_4 = 0,745$ $0,179 \times x_1 + 4,912 \times x_2 + 0,394 \times x_3 + 0,375 \times x_4 = 0,381$ $0,189 \times x_1 + 0,321 \times x_2 + 2,875 \times x_3 + 0,216 \times x_4 = 0,480$ $0,317 \times x_1 + 0,165 \times x_2 + 0,386 \times x_3 + 3,934 \times x_4 = 0,552.$
13	$5,554 \times x_1 + 0,252 \times x_2 + 0,496 \times x_3 + 0,237 \times x_4 = 0,442$ $0,580 \times x_1 + 4,953 \times x_2 + 0,467 \times x_3 + 0,028 \times x_4 = 0,464$ $0,319 \times x_1 + 0,372 \times x_2 + 8,935 \times x_3 + 0,520 \times x_4 = 0,979$ $0,043 \times x_1 + 0,459 \times x_2 + 0,319 \times x_3 + 4,778 \times x_4 = 0,126.$

14	$2,998 \times x_1 + 0,209 \times x_2 + 0,315 \times x_3 + 0,281 \times x_4 = 0,108$ $0,163 \times x_1 + 3,237 \times x_2 + 0,226 \times x_3 + 0,307 \times x_4 = 0,426$ $0,416 \times x_1 + 0,175 \times x_2 + 3,239 \times x_3 + 0,159 \times x_4 = 0,310$ $0,287 \times x_1 + 0,196 \times x_2 + 0,325 \times x_3 + 4,062 \times x_4 = 0,084.$
15	$5,452 \times x_1 + 0,401 \times x_2 + 0,758 \times x_3 + 0,123 \times x_4 = 0,886$ $0,785 \times x_1 + 2,654 \times x_2 + 0,687 \times x_3 + 0,203 \times x_4 = 0,356$ $0,402 \times x_1 + 0,244 \times x_2 + 4,456 \times x_3 + 0,552 \times x_4 = 0,342$ $0,210 \times x_1 + 0,514 \times x_2 + 0,206 \times x_3 + 4,568 \times x_4 = 0,452.$
16	$2,923 \times x_1 + 0,220 \times x_2 + 0,159 \times x_3 + 0,328 \times x_4 = 0,605$ $0,363 \times x_1 + 4,123 \times x_2 + 0,268 \times x_3 + 0,327 \times x_4 = 0,496$ $0,169 \times x_1 + 0,271 \times x_2 + 3,906 \times x_3 + 0,295 \times x_4 = 0,590$ $0,241 \times x_1 + 0,319 \times x_2 + 0,257 \times x_3 + 3,862 \times x_4 = 0,896.$
17	$5,482 \times x_1 + 0,358 \times x_2 + 0,237 \times x_3 + 0,409 \times x_4 = 0,416$ $0,580 \times x_1 + 4,953 \times x_2 + 0,467 \times x_3 + 0,028 \times x_4 = 0,464$ $0,319 \times x_1 + 0,372 \times x_2 + 8,935 \times x_3 + 0,520 \times x_4 = 0,979$ $0,043 \times x_1 + 0,459 \times x_2 + 0,319 \times x_3 + 4,778 \times x_4 = 0,126.$
18	$3,738 \times x_1 + 0,195 \times x_2 + 0,275 \times x_3 + 0,136 \times x_4 = 0,815$ $0,519 \times x_1 + 5,002 \times x_2 + 0,405 \times x_3 + 0,283 \times x_4 = 0,191$ $0,306 \times x_1 + 0,381 \times x_2 + 4,812 \times x_3 + 0,418 \times x_4 = 0,423$ $0,272 \times x_1 + 0,142 \times x_2 + 0,314 \times x_3 + 3,935 \times x_4 = 0,352.$
19	$3,910 \times x_1 + 0,129 \times x_2 + 0,283 \times x_3 + 0,107 \times x_4 = 0,395$ $0,217 \times x_1 + 4,691 \times x_2 + 0,279 \times x_3 + 0,237 \times x_4 = 0,432$ $0,201 \times x_1 + 0,372 \times x_2 + 2,987 \times x_3 + 0,421 \times x_4 = 0,127$ $0,531 \times x_1 + 0,196 \times x_2 + 0,236 \times x_3 + 5,032 \times x_4 = 0,458.$
20	$5,482 \times x_1 + 0,617 \times x_2 + 0,520 \times x_3 + 0,401 \times x_4 = 0,823$ $0,607 \times x_1 + 4,195 \times x_2 + 0,232 \times x_3 + 0,570 \times x_4 = 0,152$ $0,367 \times x_1 + 0,576 \times x_2 + 8,193 \times x_3 + 0,582 \times x_4 = 0,625$ $0,389 \times x_1 + 0,356 \times x_2 + 0,207 \times x_3 + 5,772 \times x_4 = 0,315.$
21	$3,345 \times x_1 + 0,329 \times x_2 + 0,365 \times x_3 + 0,203 \times x_4 = 0,305$ $0,125 \times x_1 + 4,210 \times x_2 + 0,402 \times x_3 + 0,520 \times x_4 = 0,283$ $0,314 \times x_1 + 0,251 \times x_2 + 4,531 \times x_3 + 0,168 \times x_4 = 0,680$ $0,197 \times x_1 + 0,512 \times x_2 + 0,302 \times x_3 + 2,951 \times x_4 = 0,293.$
22	$4,247 \times x_1 + 0,275 \times x_2 + 0,397 \times x_3 + 0,239 \times x_4 = 0,721$ $0,466 \times x_1 + 4,235 \times x_2 + 0,264 \times x_3 + 0,358 \times x_4 = 0,339$ $0,204 \times x_1 + 0,501 \times x_2 + 3,721 \times x_3 + 0,297 \times x_4 = 0,050$ $0,326 \times x_1 + 0,421 \times x_2 + 0,254 \times x_3 + 3,286 \times x_4 = 0,486.$

23	$3,476 \times x_1 + 0,259 \times x_2 + 0,376 \times x_3 + 0,398 \times x_4 = 0,871$ $0,425 \times x_1 + 4,583 \times x_2 + 0,417 \times x_3 + 0,328 \times x_4 = 0,739$ $0,252 \times x_1 + 0,439 \times x_2 + 3,972 \times x_3 + 0,238 \times x_4 = 0,644$ $0,265 \times x_1 + 0,291 \times x_2 + 0,424 \times x_3 + 3,864 \times x_4 = 0,581.$
24	$3,241 \times x_1 + 0,197 \times x_2 + 0,643 \times x_3 + 0,236 \times x_4 = 0,454$ $0,257 \times x_1 + 3,853 \times x_2 + 0,342 \times x_3 + 0,427 \times x_4 = 0,371$ $0,324 \times x_1 + 0,317 \times x_2 + 2,793 \times x_3 + 0,238 \times x_4 = 0,465$ $0,438 \times x_1 + 0,326 \times x_2 + 0,483 \times x_3 + 4,229 \times x_4 = 0,822.$
25	$4,405 \times x_1 + 0,472 \times x_2 + 0,395 \times x_3 + 0,253 \times x_4 = 0,623$ $0,227 \times x_1 + 2,957 \times x_2 + 0,342 \times x_3 + 0,327 \times x_4 = 0,072$ $0,419 \times x_1 + 0,341 \times x_2 + 3,238 \times x_3 + 0,394 \times x_4 = 0,143$ $0,325 \times x_1 + 0,326 \times x_2 + 0,401 \times x_3 + 4,273 \times x_4 = 0,065.$
26	$2,974 \times x_1 + 0,347 \times x_2 + 0,439 \times x_3 + 0,123 \times x_4 = 0,381$ $0,242 \times x_1 + 2,895 \times x_2 + 0,412 \times x_3 + 0,276 \times x_4 = 0,721$ $0,249 \times x_1 + 0,378 \times x_2 + 3,791 \times x_3 + 0,358 \times x_4 = 0,514$ $0,387 \times x_1 + 0,266 \times x_2 + 0,431 \times x_3 + 4,022 \times x_4 = 0,795.$
27	$3,452 \times x_1 + 0,458 \times x_2 + 0,125 \times x_3 + 0,236 \times x_4 = 0,745$ $0,254 \times x_1 + 2,458 \times x_2 + 0,325 \times x_3 + 0,126 \times x_4 = 0,789$ $0,305 \times x_1 + 0,125 \times x_2 + 3,869 \times x_3 + 0,458 \times x_4 = 0,654$ $0,423 \times x_1 + 0,452 \times x_2 + 0,248 \times x_3 + 3,896 \times x_4 = 0,405.$
28	$2,979 \times x_1 + 0,427 \times x_2 + 0,406 \times x_3 + 0,348 \times x_4 = 0,341$ $0,273 \times x_1 + 3,951 \times x_2 + 0,217 \times x_3 + 0,327 \times x_4 = 0,844$ $0,318 \times x_1 + 0,197 \times x_2 + 2,875 \times x_3 + 0,166 \times x_4 = 0,131$ $0,219 \times x_1 + 0,231 \times x_2 + 0,187 \times x_3 + 3,276 \times x_4 = 0,381.$
29	$2,048 \times x_1 + 0,172 \times x_2 + 0,702 \times x_3 + 0,226 \times x_4 = 0,514$ $0,495 \times x_1 + 4,093 \times x_2 + 0,083 \times x_3 + 0,390 \times x_4 = 0,176$ $0,277 \times x_1 + 0,368 \times x_2 + 4,164 \times x_3 + 0,535 \times x_4 = 0,309$ $0,766 \times x_1 + 0,646 \times x_2 + 0,767 \times x_3 + 5,960 \times x_4 = 0,535.$
30	$2,389 \times x_1 + 0,273 \times x_2 + 0,126 \times x_3 + 0,418 \times x_4 = 0,144$ $0,329 \times x_1 + 2,796 \times x_2 + 0,179 \times x_3 + 0,278 \times x_4 = 0,297$ $0,186 \times x_1 + 0,275 \times x_2 + 2,987 \times x_3 + 0,316 \times x_4 = 0,529$ $0,197 \times x_1 + 0,219 \times x_2 + 0,274 \times x_3 + 3,127 \times x_4 = 0,869.$