

6 Интерполяция таблично заданных функций.

Интерполяционный многочлен Ньютона. Интерполяция кубическими сплайнами

1 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяция – это определение (вычислительным или графическим путем) промежуточных значений некоторой функции $y=f(x)$, заданной дискретным рядом ее значений y_1, y_2, \dots, y_n , полученных эмпирически.

Пусть в точках x_0, x_1, \dots, x_n таких, что $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ известны значения функции $y=f(x)$, то есть на отрезке $[a; b]$ задана табличная функция:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей (интерполяционной) для $f(x)$ на $[a; b]$, если ее значения $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ в заданных точках x_0, x_1, \dots, x_n , называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями $f(x)$, то есть с y_0, y_1, \dots, y_n соответственно.

Будем строить многочлен n -степени в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x)f(x_i) \quad (1)$$

Где базисные многочлены имеют вид

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (2)$$

обладающий свойством:

$$L_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n} \quad (3)$$

Теорема. Полином n -й степени, обладающий свойством (3), единственный.

2 Полином Ньютона

Пусть интерполируемая функция $y=f(x)$ задана таблично значениями y_0, y_1, \dots, y_n на системе равностоящих узлов x_0, x_1, \dots, x_n . Множество x_k можно представить в виде $x_k = x_0 + kh, k = \overline{0, n}, h > 0, f_k = f(x_k)$, h – шаг сетки.

Конечной разностью первого порядка называется

$$\begin{aligned} \Delta^1 f_k &= f_{k+1} - f_k \\ (\Delta^0 f_k &= f_k) \end{aligned} \quad (4)$$

Конечная разность n -порядка:

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k \quad (5)$$

Свойства:

1 $\Delta^n P_n(x) = \text{const}$ (конечная разность n -го порядка от полинома n -й степени равно константе).

2 $\Delta^{n+1} P_n(x) = 0$ (конечная разность $(n+1)$ -го порядка от полинома n -го порядка равна нулю).

3 Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда $\Delta^n f_k \approx f^{(n)}(x_k)h^n$.

Непосредственно через значения функции конечные разности можно представить рекуррентной формулой:

$$\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i (C_n^i) f_{n+k+i}$$

Разделенной разностью $f(x_0, \dots, x_n)$ n -го порядка называется:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0} \quad (6)$$

Разделенная разность первого порядка:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Разделенная разность второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Свойства разделенной разности:

1 Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда при равномерном разбиении:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = f^{(n)}(\xi), f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$$

2 Разделенная разность n -го порядка, примененная к полиному n -й степени равна константе. Разделенная разность $(n+1)$ -го порядка от полинома n -й степени равна нулю.

3 Разделенная разность n -го порядка $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – симметрическая функция своих аргументов.

Для функции $f(x)$, заданной таблично на узлах $x_i, i = \overline{0, n}$, можно записать интерполяционный полином Ньютона:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (7)$$

Замечание. Полином Ньютона есть одна из форм представления полинома Лагранжа.

Обычно интерполяция проводится не на всех точках разбиения, а только на 5–7 соседних. В этой ситуации при изменении точек интерполирования полином Лагранжа приходится строить заново каждый раз. А полином Ньютона изменяется лишь на несколько слагаемых. При увеличении числа точек интерполяции на одну точку все слагаемые полинома Ньютона сохраняются, добавляются только последующие

слагаемые. Для полинома Лагранжа все n слагаемых должны быть построены заново.

2.1 I интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y=f(x)$, заданной таблицей с постоянным шагом составлена таблица конечных разностей.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_{n-1}) \quad (8)$$

Пусть $k = \frac{x-x_0}{h}$, $x = x_0 + kh$, тогда

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + kh) = \\ &= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Формулы (8)-(9) применяются для интерполирования в начале отрезка для значения k из интервала $(0; 1)$.

Путем переобозначений за начальное значение x_0 можно принять любое табличное значение аргумента x , отбросив лишние узлы сетки.

2.2 II интерполяционная формула Ньютона

Когда значения аргумента находятся ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае строят полином в виде:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= P_n(x_n + kh) = \\
 &= y_n + k\Delta y_{n-1} + \dots + \frac{k(k-1) \dots (k+n-1)}{n!} \Delta^n y_0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

3 Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная аппроксимация

При кусочно-линейной интерполяции на каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительных условий не требуется, условия гладкости на $U(x)$ в данном случае не налагаются.

Требуется аппроксимировать функцию $f(x)$ кусочно-линейной функцией $\varphi(x)$, исходя из условий интерполяции, т.е.:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2x + b_2, x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots \\ a_nx + b_n, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}
 \tag{11}$$

Для нахождения неизвестных параметров a_k, b_k ($k = \overline{1, n}$), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1 = y_0 \\ a_1x_1 + b_1 = y_1 \\ \dots \\ a_nx_{n-1} + b_n = y_{n-1} \\ a_nx_n + b_n = y_n \end{cases}
 \tag{12}$$

Каждая из подсистем решается отдельно.

Кусочно-квадратичная аппроксимация осуществляется аналогично кусочно-линейной аппроксимации. Каждое звено кусочно-квадратичной функции при $n=2m$

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots \\ a_nx^2 + b_nx + c_n, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (13)$$

Тройка коэффициентов a_k, b_k, c_k ($k = \overline{1, m}$) может быть найдена последовательным решением трехмерных линейных систем, соответствующим выставленным интерполяционным узлам.

$$\begin{cases} a_kx_{2k-2}^2 + b_kx_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_kx_{2k-1}^2 + b_kx_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_kx_{2k}^2 + b_kx_{2k-1} + c_k = y_{2k} \end{cases} \quad (14)$$

4 Интерполяция кубическим сплайном

Кубическим сплайном, интерполирующим на отрезке $[a, b]$ данную функцию $y(x)$ называется функция (15)

$$g_k(s) = a_k + b_k(s - x_k) + c_k(s - x_k)^2 + d_k(s - x_k)^3, \quad (15)$$

$$s \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$$

Удовлетворяющая следующим условиям:

1 $g_k(x_k) = y_k; g_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$ (условие интерполяции в узлах сплайна).

2 Функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $[a, b]$.

3 На концах интервала функция g должна удовлетворять следующим соотношениям $g_1''(a) = g_n''(b) = 0$

Для построения интерполяционного сплайна необходимо найти $4n$ коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k ($k=1, 2, \dots, n$).

Из определения сплайна получаем $n+1$ соотношение (16)

$$g_1(x_0) = y_0; g_k(x_k) = y_k, k = \overline{1, n} \quad (16)$$

Из условий гладкой стыковки звеньев сплайна (во внутренних узловых точках совпадают значения двух соседний звеньев сплайна, их первый и вторые производные) получаем еще ряд соотношений (17)-(18)

$$\begin{aligned} g_{k-1}(x_{k-1}) &= g_k(x_k) \\ g'_{k-1}(x_{k-1}) &= g'_k(x_k), \quad k = \overline{1, n} \\ g''_{k-1}(x_{k-1}) &= g''_k(x_k) \end{aligned} \quad (17)$$

$$g''_1(x_0) = g''_n(x_n) \quad (18)$$

Соотношения (16)-(18) образуют $4n$ соотношений для нахождения коэффициентов сплайна. Подставляя выражения функций (15) и их производных (19)

$$\begin{aligned} g'_k(s) &= b_k + 2c_k(s - x_k) + 3d_k(s - x_k)^2 \\ g''_k(s) &= 2c_k + 6d_k(s - x_k) + \end{aligned} \quad (19)$$

в соотношения (16)-(18) и принимая во внимание соотношение

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = \overline{1, n} \quad (20)$$

Получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 - b_1 h_1 + c_1 h_1^2 - d_1 h_1^3 = y_0 \\ a_k = y_k, k = \overline{1, n} \\ a_{k-1} = a_k - b_k h_k + c_k h_k^2 - d_k h_k^3, k = \overline{2, n} \\ b_{k-1} = b_k - 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, k = \overline{2, n} \\ c_{k-1} = c_k - 3d_k h_k, k = \overline{2, n} \\ c_1 - 3d_1 h_1 = 0 \\ c_n = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Задача интерполяции свелась к решению системы (21). После преобразований данной системы и использования метода прогонки получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} h_k &= x_k - x_{k-1}, \quad k = \overline{1, n} \\ l_k &= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}, \quad k = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{3 l_2 - l_1}{2 h_1 + h_2}$$

$$\delta_{k-1} = -\frac{h_k}{2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}}, \quad k = \overline{3, n}$$

$$\lambda_{k-1} = \frac{2l_k - 3l_{k-1} - h_{k-1}\lambda_{k-2}}{2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}}, \quad k = \overline{3, n}$$

$$c_{k-1} = \delta_{k-1}c_k + \lambda_{k-1}, \quad k = \overline{n, 2}$$

$$b_k = l_k + \frac{2}{3}c_k h_k + \frac{1}{3}h_k c_{k-1}, \quad k = \overline{1, n}$$

$$d_k = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k}, \quad k = \overline{1, n}$$

Используя формулы (22) можно рассчитать все необходимые коэффициенты для составления функции кубического сплайна (15).

Задание

Для допуска к защите лабораторной работы студент должен иметь распечатанный отчет, содержащий титульный лист; задание (включая числовые значения варианта по списку); подробное описание выполнения всех пунктов задания (построение многочленов, таблицы разностей, графики и т.д.) и выводы.

1 Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить $L_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Лагранжа.

2 Построить таблицы конечных и разделенных разностей.

Таблица 1 – Таблица конечных разностей

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
-------	-------	--------------	----------------	----------------	----------------

Таблица 2 – Таблица разделенных разностей

x_k	y_k	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка
-------	-------	--------------	--------------	--------------	--------------

3 Построить полином Ньютона и вычислить значение $N_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Ньютона.

4 Построить интерполяционные сплайны кусочно-линейный и кусочно-квадратичный. Построить графики сплайнов.

5 Построить кубический интерполяционный сплайн. Построить график.

6 На одном чертеже с графиком полиномов построить графики сплайнов.

Варианты заданий

№	Таблица значений функции
1	x : 0,847 1,546 1,834 2,647 2,910 y : -1,104 1,042 0,029 -0,344 -0,449
2	x : 0,284 0,883 1,384 1,856 2,644 y : -3,856 -3,953 -5,112 -7,632 -8,011
3	x : 0,259 0,841 1,562 2,304 2,856

	y: 0,018 -1,259 -1,748 -0,532 0,911
4	x: 0,172 0,567 1,113 2,119 2,769 y: -7,057 -5,703 -0,132 1,423 2,832
5	x: 0,092 0,772 1,385 2,108 2,938 y: 3,161 1,357 -0,158 -0,129 -4,438
6	x: 0,357 0,871 1,567 2,032 2,628 y: 0,548 1,012 1,159 0,694 -0,503
7	x: 0,235 0,672 1,385 2,051 2,908 y: 1,082 1,805 4,280 5,011 7,082
8	x: 0,015 0,681 1,342 2,118 2,671 y: -2,417 -3,819 -0,642 0,848 2,815
9	x: 0,231 0,848 1,322 2,224 2,892 y: -2,748 -3,225 -3,898 -5,908 -6,506
10	x: 0,083 0,472 1,347 2,117 2,947 y: -2,132 -2,013 -1,613 -0,842 2,973
11	x: 0,119 0,718 1,342 2,859 3,948 y: -0,572 -2,015 -3,342 -6,752 -6,742
12	x: 0,184 0,865 1,213 2,019 2,862 y: -1,687 -2,542 -5,082 -7,042 -8,538
13	x: 0,351 0,867 1,315 2,013 2,859 y: 0,605 0,218 0,205 1,157 5,092
14	x: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,642 y: -2,132 -2,113 -1,613 -0,842 1,204
15	x: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,851 y: 2,382 -0,212 -1,305 -3,184 -4,365

16	x: 0,079 0,637 1,345 2,095 2,782 y: -4,308 -0,739 1,697 4,208 6,203
17	x: 2,119 3,618 5,342 7,859 8,934 y: 0,605 0,718 0,105 2,157 3,431
18	x: 0,345 0,761 1,257 2,109 2,943 y: -1,221 -0,525 2,314 5,106 9,818
19	x: 0,234 0,649 1,382 2,672 2,849 y: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,184
20	x: 0,238 0,647 1,316 2,108 4,892 y: 0,092 0,672 2,385 3,108 2,938
21	x: 0,248 0,663 1,238 2,092 2,939 y: -3,642 0,802 0,841 0,513 0,328
22	x: 0,282 0,872 1,513 2,022 2,672 y: 6,324 -0,405 -1,114 -1,315 -1,469
23	x: 0,324 0,718 1,315 2,035 2,893 y: -2,052 -1,597 -0,231 2,808 8,011
24	x: 0,218 0,562 1,492 2,119 2,948 y: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,561
25	x: 0,132 0,567 1,153 2,414 3,939 y: 69,531 1,112 -1,672 -1,922 -1,925
26	x: 0,234 0,649 1,382 3,672 5,911 y: 3,902 2,675 0,611 -3,256 -3,615
27	x: 0,134 0,561 1,341 2,291 6,913 y: 2,156 3,348 3,611 4,112 4,171
28	x: 0,452 0,967 2,255 4,013 5,432 y: 1,252 2,015 4,342 5,752 6,911

29	x: 0,151 0,862 1,282 2,139 2,739 y: -4,528 -0,345 0,638 1,342 3,645
30	x: 0,219 0,811 1,341 2,111 2,874 y: -2,151 -0,452 1,214 2,891 4,617