

## 5 Решение систем нелинейных уравнений

### 1 Методы решения нелинейных уравнений

Рассмотрим задачу нахождения корней нелинейного уравнения

$$f(x) = 0 \quad (5.1)$$

Корнями уравнения (5.1) называются такие значения  $x$ , которые при подстановке обращают его в тождество. Только для простейших уравнений удастся найти решение в виде формул, т.е. аналитическом виде. Чаще приходится решать уравнения приближенными методами, наибольшее распространение среди которых, в связи с появлением компьютеров, получили численные методы.

Алгоритм нахождения корней приближенными методами можно разбить на два этапа. На первом изучается расположение корней и проводится их разделение. Находится область  $[a, b]$ , в которой существует корень уравнения или начальное приближение к корню  $x_0$ .

Существование на найденном отрезке  $[a, b]$ , по крайней мере, одного корня уравнения (5.1) следует из условия Больцано:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad (5.2)$$

При этом подразумевается, что функция  $f(x)$  непрерывна на данном отрезке. Однако данное условие не отвечает на вопрос о количестве корней уравнения на заданном отрезке  $[a, b]$ . Определить корень уравнения – значит,

найти такой интервал, внутри которого имеется корень данного уравнения и притом единственный на данном интервале. Для отделения корней уравнения применяют следующий критерий: если на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  непрерывна и монотонна, а её значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на рассматриваемом отрезке существует и только один корень данного уравнения. Достаточный признак монотонности функции на отрезке – сохранение знака производной функции

Отделение корней уравнения можно выполнить графически. Для этого надо построить график функции  $y = f(x)$ , по которому можно судить, в каких интервалах находятся его точки пересечения с осью  $Ox$ .

**Теорема 1 (принцип сжимающих отображений).** Пусть  $R$  – полное метрическое пространство. Если отображение  $f: R \rightarrow R$  – сжатие, то оно имеет в  $R$  единственную неподвижную точку, которая является пределом последовательности, полученной по формуле

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (5.3)$$

где  $x_0$  – произвольный элемент из  $R$ .

На втором этапе решения уравнения (5.1), используя полученное начальное приближение, строится итерационный процесс, позволяющий уточнять значение корня с некоторой, наперед заданной точностью  $\varepsilon$ . Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения. Каждый такой шаг называется итерацией. В результате процесса итерации находится последовательность приближенных значений

корней уравнения  $\{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ . Если эта последовательность с ростом  $n$  приближается к истинному значению корня  $x$ , то итерационный процесс сходится. Говорят, что итерационный процесс сходится, по меньшей мере, с порядком  $m$ , если выполнено условие:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq C|x_k - x_{k-1}|^m \quad (5.4)$$

где  $C > 0$  некоторая константа. Если  $m=1$ , то говорят о сходимости первого порядка;  $m=2$  - о квадратичной,  $m=3$  - о кубической сходимости.

Итерационные циклы заканчиваются, если при заданной допустимой погрешности выполняются критерии по абсолютным или относительным отклонениям:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon; \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \right| < \varepsilon \quad (5.5, 5.6)$$

или малости невязки:

$$|f(x_k)| < \varepsilon \quad (5.7)$$

К итерационным методам относятся метод простых итераций, метод Ньютона, хорд, секущих решения уравнений, метод простой итерации и метод Ньютона решения систем уравнений.

## 1.1 Метод простой итерации

Применим принцип сжатых отображений для исследования сходимости итерационного метода решения нелинейного уравнения

$$f(x) = 0 \quad (5.8)$$

где  $F(x)$  – вещественная функция вещественного аргумента.

Сначала уравнение (6) приводят к виду, удобному для итераций

$$x = \varphi(x) \quad (5.9)$$

( $\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$ ,  $\psi(x)$  – знакопостоянная функция). Где искомый корень  $x^*$  уравнения (1) является и корнем уравнения (5.2). Допустим, что для  $x^*$  каким-то способом указано начальное приближение  $x_0$ , а затем дальнейшие приближения строятся по формуле

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Этот процесс называется простой одношаговой итерацией (методом простой итерации).

Найдем достаточные условия сходимости метода простой итерации.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия

1 Функция определена на отрезке

$$|x_1 - x_0| \leq \delta \quad (5.11)$$

непрерывна там и удовлетворяет условию Липшица с постоянным коэффициентом, меньшим единицы

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq q|x - x'|, (0 < q < 1) \quad (5.12)$$

2 Для исходного приближения  $x_0$  верно равенство

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leq m \quad (5.13)$$

3 Числа  $\delta, q, m$  удовлетворяют условию

$$\frac{m}{1 - q} \leq \delta \quad (5.14)$$

Тогда:

1 Уравнение (5.2) в области (5.8) имеет решение;

2 Последовательность  $x^k$  приближений, построенных по правилу (3q), принадлежит отрезку (5.11), является сходящейся ( $\lim x_k = x^*$ ), и предел последовательности  $x^*$  удовлетворяет уравнению (5.9);

3 Скорость сходимости  $x_k$  к  $x^*$  оценивается неравенством

$$|x^* - x_k| \leq \frac{m}{1 - q} q^k, n = 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

**Теорема 2 (О единственности решения).** На всяком множестве точек, где для функции  $\varphi(x)$  выполняется условие  $|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$ ,  $x \neq y$ , уравнение  $x = \varphi(x)$  может иметь не более одного решения.

**Замечание 1.** Условие Липшица с константой  $q < 1$  выполняется для функции  $\varphi(x)$  на (5.11), если эта функция имеет на (5.11) производную  $\varphi'(x)$ , удовлетворяющую неравенству  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ .

Скорость сходимости метода итерации – линейная. Метод простой итерации является самоисправляющимся: допущенная при вычислении ошибка (не выводящая за пределы отрезка (5.11)) будет исправлена.

## 1.2 Метод касательных (или метод Ньютона)

Построим эффективный алгоритм вычисления корней уравнения. Пусть задано начальное приближение  $x_0$ . Вычислим в этой точке значение функции  $f(x_0)$  и её производной  $f'(x_0)$ . Рассмотрим графическую иллюстрацию метода:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad (5.16)$$

Далее получим следующее приближение в точке  $x_1$ , проводя касательную из точки  $(x_0, f(x_0))$  до пересечения с осью абсцисс:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (5.17)$$

Продолжая этот процесс, получим известную формулу Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (5.18)$$

Эту же формулу можно получить с помощью модификации метода простой итерации, используя  $\psi(x) = \frac{1}{f'(x)}$ .

Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся и приводил к искомому результату, требуется выполнение условия:

$$x = \varphi(x), \quad |\varphi'(x)| < 1 \quad (5.19)$$

Переход от уравнения  $f(x) = 0$  к уравнению  $x = \varphi(x)$  можно осуществлять различными способами. При этом важно, чтобы выбранная функция  $\varphi(x)$  удовлетворяла условию (5.19). К примеру, если функцию  $f(x)$  умножить на произвольную константу  $q$  и добавить к обеим частям уравнения (1) переменную  $x$ , то  $\varphi(x) = q \cdot f(x) + x$ . Выберем константу  $q$  такой, чтобы скорость сходимости алгоритма была самой высокой. Если  $1 < \varphi'(x) < 0$ , то сходимость итерационного процесса будет двусторонней. Производная по  $x$  от этой функции:  $\varphi'(x) = 1 + q \cdot f'(x)$ . Наибольшую сходимость получим при  $\varphi'(x) = 0$ , тогда  $q = -\frac{1}{f'(x)}$ .

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости, однако он не всегда сходится. Условие сходимости  $|\varphi'(x)| < 1$ , где  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , сводится к требованию

$$|f(x_k)| \cdot |f^{(2)}(x_k)| < (f'(x_k))^2 \quad (5.20)$$

В практических расчетах важно выбрать начальное значение  $x_0$  как можно ближе к искомому значению, а в программе предусмотреть выход при заиклировании.

Скорость сходимости метода Ньютона – квадратичная.

Недостатком метода является и то, что на каждом шаге необходимо вычислять не только функцию, но и ее производную. Это не всегда удобно. Одна из модификаций метода Ньютона - вычисление производной только на первой итерации:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \quad (5.21)$$

Другой метод модификации – замена производной конечной разностью

$$f'(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (5.22)$$

Тогда



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (5.23)$$

Геометрический смысл такого изменения алгоритма Ньютона состоит в том, что от касательной мы приходим к секущей. Метод секущих уступает методу Ньютона в скорости сходимости, но не требует вычисления производной. Заметим, что начальные приближения в методе секущих могут располагаться как с разных сторон от корня, так и с одной стороны.

Запишем в общем виде алгоритм метода Ньютона.

1 Задать начальное приближение  $x_0$  так, чтобы выполнялось условие

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \quad (5.24)$$

Задать малое положительное число  $\varepsilon$ , как точность вычислений.  
Положить  $k=0$ .

2 Вычислить  $x_{k+1}$  по формуле (5.18):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

3 Если  $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ , то процесс вычисления прекратить и положить

$$x^* = x_{k+1}.$$

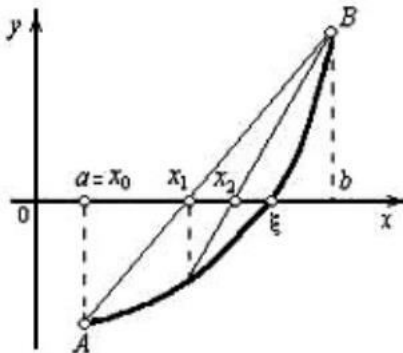
Иначе увеличить  $k$  на 1 ( $k = k + 1$ ) и перейти к пункту 2.

### 1.3 Метод хорд

Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция на  $[a; b]$  и выполняется условие (5.2). Запишем уравнение прямой через две точки – уравнение хорды, где  $x_0=a$ ,  $x_1=b$ .

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Рассмотрим пересечение хорды с осью  $Ox$ , получим точку  $x_2$ .



Выбираем две новые точки таким образом, чтобы на данном отрезке выполнялось условие (2).

Опять ищем пересечение с осью  $Ox$ , то есть  $x_2 = x|_{y=0}$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

Пусть на  $n$ -м шаге выполнено условие  $f(x_n)f(x_{n-1}) < 0$ .

Итерационный процесс метода хорд можно записать:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1}) \quad (5.25)$$

## 2 Методы решение систем нелинейных уравнений

### 2.1 Метод Ньютона

Пусть требуется решить систему вида:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

$$F(\bar{x}) = 0$$

где функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  – заданные нелинейные вещественнозначные функции  $n$  вещественных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Обозначим через

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$J$  – матрица Якоби, якобиан.

Для  $n$ -мерного случая итерационный процесс Ньютона:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - [J(\bar{x}^k)]^{-1}F(\bar{x}^k) \quad (5.28)$$

Метод Ньютона достаточно трудоемкий – на каждом шаге итерационного процесса необходимо найти матрицу, обратную якобиану.

Если матрицу Якоби вычислить и обратить лишь в начальной точке, то получим модифицированный метод Ньютона.

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - [J(\bar{x}^0)]^{-1}F(\bar{x}^k) \quad (5.29)$$

Использование такой модификации метода Ньютона требует меньших вычислительных затрат на 1 итерационных шаг, однако требуется значительно больше итераций для достижения заданной точности, чем при использовании основного метода Ньютона. Имеет геометрическую скорость сходимости.

## 2.2 Метод простой итерации

Пусть система (5.26) преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x})$$

Запишем итерацию

$$\bar{x}^{k+1} = \Phi(\bar{x}^k) \quad (5.31)$$

которая определяет метод простой итерации для задачи (5.26).

### **Задание**

Для допуска к защите лабораторной работы студент должен иметь распечатанный отчет, содержащий титульный лист; задание (включая числовые значения варианта по списку); подробное описание выполнения всех пунктов задания (отделение корней, решение уравнений и т.д.) и выводы.

- 1 Отделить корни заданного уравнения графически.
- 2 Решить уравнение методом хорд.
- 3 Решить уравнение методом касательных.
- 4 Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически.
- 5 Построить рабочие формулы метода простых итераций, метода Ньютона, реализующие процесс поиска корня системы нелинейных уравнений на найденном отрезке.
- 6 Решить систему методом простых итераций.
- 7 Решить систему методом Ньютона.

8 Решить систему модифицированным методом Ньютона. Сравнить скорости сходимости методов.

### Варианты заданий

#### Нелинейные уравнения

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$x - \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0$	16	$\sin(1 - 0.2x^2) - x = 0$
2	$x + \ln(4x) - 1 = 0$	17	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$
3	$e^x - 4e^{-x} - 1 = 0$	18	$x - \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
4	$xe^x - 2 = 0$	19	$e^x + \ln(x) - x = 0$
5	$4(x^2 + 1)\ln(x) - 1 = 0$	20	$1 - x + \sin(x) - \ln(1 + x) = 0$
6	$2 - x - \sin\left(\frac{x}{4}\right) = 0$	21	$(1 - x)^{1/2} - \cos(1 - x) = 0$
7	$x^2 + \ln(x) - 2 = 0$	22	$\sin(x^2) + \cos(x^2) - 10x = 0$
8	$\cos(x) - (x + 2)^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$	23	$x^2 - \ln(1 + x) - 3 = 0$
9	$4\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\ln(x) - 1 = 0$	24	$\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ln(x - 1) = 0$
10	$5\ln(x) - x^{\frac{1}{2}} = 0$	25	$\cos\left(\frac{x}{5}\right)(1 + x)^{1/2} - x = 0$
11	$e^x + x^3 - 2 = 0$	26	$3x - e^{-x} = 0$
12	$3\sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + x - 3 = 0$	27	$4\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\ln(x) - 10 = 0$
13	$0.1x^2 - x\ln(x) = 0$	28	$x - \frac{1}{3 + \sin(3.6x)} = 0$
14	$\cos(1 + 0.2x^2) - x = 0$	29	$0.25x^3 + \cos\left(\frac{x}{4}\right) = 0$

15	$3x - 4\ln(x) - 5 = 0$	30	$2 - x = \ln(x)$
----	------------------------	----	------------------

### Системы нелинейных уравнений

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} tg(xy + 0.4) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \sin(x + y) - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.6x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} tg(xy + 0.2) = x^2 \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} tg(xy + 0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.1x = 0 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.2x = 0.2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	19	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.2x = 0.1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} tg(xy + 0.3) = x^2 \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} tg(xy) = x^2 \\ 0.5x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.3x = 0 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	21	$\begin{cases} \sin(x + y) + 2x = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	22	$\begin{cases} tg(xy + 0.4) = 3x^2 \\ 6x^2 + 0.2y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} tg(xy) = x^2 \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	23	$\begin{cases} \sin(2x + y) - 1.6x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \sin(x + y) + 1.2x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} tg(xy + 1) = x^2 \\ 3x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
10	$\begin{cases} tg(xy + 0.2) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	25	$\begin{cases} tg(xy + 0.1) = 2x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(x + y) = 1.5x - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	26	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
12	$\begin{cases} tg(xy + 0.3) = x^2 \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$	27	$\begin{cases} tg(xy + 0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

13	$\begin{cases} tg(xy + 0.1) = 2x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} tg(xy + 0.5) = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
14	$\begin{cases} \sin(x + 2y) - 1.2x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} \sin(x + y) + 1.5x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} tg(xy + 0.5) = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.1x = 0 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$