Fondamenti di Automatica

Formulario

Sistemi dinamici

- Forma a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

- Forma a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(k) = f(x(k-1), u(k-1), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), t) \end{cases}$$

- Proprietà:
  1. f, g sono **lineari** in $x, u \iff$ sistema dinamico **lineare** (indicato con **L**)
  2. $f = f(x, u), g = g(x, u) \iff$ sistema dinamico **tempo-invariante** (indicato con **TI**, anche detto *stazionario*)
  3. $g = g(x, t) \iff$ sistema dinamico **strettamente proprio** (indicato con **SP**)

Linearizzazione

Un sistema non lineare si linearizza nell'intorno di un equilibrio secondo questo schema:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x,u) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(x,u) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f(x,u) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(x,u) \end{bmatrix}, \\ b &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(x,u) \\ \frac{\partial}{\partial u} f(x,u) \end{bmatrix}, \\ c &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x,u) & \frac{\partial}{\partial x_2} g(x,u) \end{bmatrix}, \\ d &= \frac{\partial}{\partial u} g(x,u) \end{aligned}$$

Movimenti

- Tempo continuo:

$$x(t) = \overbrace{e^{At}x(0)}^{\text{ML}} + \overbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}^{\text{MF}}$$

$$y(t) = \underbrace{ce^{At}x(0)}_{\text{ML}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)}_{\text{MF}}$$

- Tempo discreto:

$$x(k) = \overbrace{A^k x(0)}^{\text{ML}} + \overbrace{\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1}bu(l)}^{\text{MF}}$$

$$y(k) = \underbrace{cA^k x(0)}_{\text{ML}} + \underbrace{c\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1}bu(l) + du(k)}_{\text{MF}}$$

Stabilità

- Negli equilibri:
  1. **Equilibrio stabile**: l'equilibrio è stabile (*S*) se:

     $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x(0) - \overline{x}|| < \delta \implies ||x(t) - \overline{x}|| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

  2. **Equilibrio asintoticamente stabile**: l'equilibrio è asintoticamente stabile (*AS*) se è stabile e:

     $$||x(t) - \overline{x}|| \to 0 \text{ per } t \to +\infty$$

  3. **Equilibrio instabile**: l'equilibrio è instabile (*I*) se non viene rispettata nessuna delle condizioni precedenti.
- Nella matrice A:
  - Tutti gli autovalori di A hanno $\Re < 0 \iff$ il sistema è **AS**
  - Almeno un autovalore di A ha $\Re > 0 \implies$ il sistema è **I**
  - Tutti gli autovalori di A hanno $\Re \leq 0$ ed almeno uno ha $\Re = 0 \implies$ il sistema è o **I** o **S**, ma non può essere **AS**
- Criteri di stabilità:
  1. $\det A = \pi(s_i)$. $\det A = 0 \implies \exists s_i = 0 \implies$ sistema **non AS**
  2. $\text{Tr } A = \sum s_i = \sum \Re(s_i)$. $\text{Tr } A > 0 \implies \exists s_i : \Re(s_i) > 0 \implies$ sistema **I**
  3. $\Re(s_i) < 0, \forall i$ (sistema **AS**) $\implies$ i coefficienti di $\pi(s)$ sono tutti concordi e non nulli
  4. Criterio di Routh:

1. Tabella di Routh:

$$\begin{cases} a_0 & a_2 & \dots & a_{n-1} & \text{oppure} & a_n \\ a_1 & a_3 & \dots & a_n & & 0 \\ h_1 & h_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1 & w_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases} \quad n+1 \text{ righe}$$

2. Calcolo elementi della tabella di Routh:

$$w_i = -\frac{1}{q_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ q_1 & q_{i+1} \end{bmatrix}$$

3. Criterio di Routh: un SD con PC $\pi(s)$ è **AS** $\iff$ **tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono concordi**

Trasformate di Laplace

- Teorema del valore iniziale:

$$V(s) = \mathscr{L}[v(t)] \implies v(0) = \lim_{s \to \infty} sV(s)$$

- Teorema del valore finale:

$$V(s) = \mathscr{L}[v(t)] \implies \text{se } \exists \lim_{t \to \infty} v(t), \text{ allora } \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{s \to 0} sV(s)$$

- Trasformate di Laplace notevoli:

$v(t)$	$V(s)$
$\text{imp}(t)$	1
$\text{sca}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\text{ram}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{at}\text{sca}(t)$	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}\text{sca}(t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Funzione di trasferimento

$$G(s) = c(s\mathbb{I} - A)^{-1}b + d$$

Funzioni di trasferimento di interesse nel progetto di un regolatore in retroazione

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)P(s) & \text{Funzione di trasferimento d'anello aperto} \\ T(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} & \text{Funzione di sensitività complementare} \\ S(s) &= \frac{1}{1+L(s)} & \text{Funzione di sensitività} \\ Q(s) &= \frac{R(s)}{1+L(s)} & \text{Funzione di sensitività del controllo} \end{aligned}$$

Raggiungibilità ed osservabilità

- Un sistema è raggiungibile se e solo se:

$$det(\overbrace{[b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]}^{M_R}) \neq 0$$

- Un sistema è osservabile se e solo se:

$$det(\overbrace{[c^T \quad A^Tc^T \quad (A^2)^Tc^T \quad \dots \quad (A^{n-1})^Tc^T]}^{M_O}) \neq 0$$

Forma canonica di raggiungibilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [b_n \quad b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \cdots \quad b_1]$$

Forma canonica di osservabilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]$$

Compensazione

Il compensatore ideale ha funzione di trasferimento:

$$C_{\mathrm{id}} = -\frac{H}{MP}$$

ma spesso può non essere realizzabile, o perché ha più zeri che poli, o perché ha poli con parte reale positiva. In tal caso, si parte dal compensatore ideale e si aggiungono poli o si tolgono zeri per creare il compensatore reale C_{r}.

Gradi di libertà

- Un grado di libertà:

$$\frac{u}{w} = -\frac{u}{y} = R$$

- Due gradi di libertà:

$$\frac{u}{w} = R_{FF}R_{FB}$$
$$\frac{u}{y} = -R_{FB}$$

Regolatori PID

- Legge di controllo ideale:

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau)d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt}$$

- Forma ISA reale a un grado di libertà:

$$R(s) = k\left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + \frac{sT_D}{N}}\right)$$

- Forma ISA reale a due gradi di libertà:

$$U(s) = k\left[bw - Y + \frac{1}{sT_I}(w - Y) + \frac{sT_D}{1 + \frac{sT_D}{N}}(cw - Y)\right]$$

- Ruoli di ciascuna azione:
  - Azione proporzionale: risposta pronta alla variazione dell'errore
  - Azione integrale: errore nullo a regime
  - Azione derivativa: anticipazione della variazione dell'errore
- PI e PID in pratica:

- PI: uno zero e un polo nell'origine
- PID: due zeri e due poli, di cui uno nell'origine

Metodi di discretizzazione

- Eulero esplicito:

$$s = \frac{z-1}{T_S}$$

- Eulero implicito:

$$s = \frac{z-1}{zT_S}$$

- Tustin:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Criteri per la scelta del tempo di campionamento

1. Pongo:

$$\omega_S = k\omega_C,\ k \in [10, 50]$$

2. Più $|L(j\omega_N)|$ è piccolo, meno c'è aliasing. Si può trovare perciò ω_N e, di conseguenza, ω_S dal diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza della funzione di trasferimento d'anello.
3. Nella discretizzazione, il margine di fase φ_m si riduce di:
   - $\Delta\varphi_m = \frac{1}{2}\omega_C T_S$ se il ritardo di calcolo è trascurabile
   - $\Delta\varphi_m = \frac{3}{2}\omega_C T_S$ se il ritardo di calcolo non è trascurabile
4. Si pone:

$$T_S \ll \frac{1}{5}T$$

   dove T è la minima costante di tempo del regolatore.

Tempo di assestamento

Il tempo di assestamento di un sistema dinamico è calcolato come:

$$T_{\text{assestamento}} \approx 5T \approx 5\frac{1}{\omega_C}$$

dove T è la costante di tempo dominante del sistema.

Controllo di sistemi instabili

Se un processo $P(s)$ ha un polo con $\Re > 0$, posso chiuderlo in un anello per renderlo asintoticamente stabile con un regolatore $R_1(s)$ per poi chiudere un altro anello intorno a questo sistema con un regolatore $R_2(s)$ al fine di rispettare le specifiche di progetto.

$R_1(s)$ è spesso nella forma puramente proporzionale:

$$R_1(s) = k$$

ma se ciò non bastasse si può usare uno sfasatore puro:

$$R_1(s) = k\frac{1+\tau s}{1+Ts}$$

dove lo zero del regolatore va a cancellare uno dei poli con $\Re < 0$ dell'anello interno, mentre il polo del regolatore lo sostituisce con uno con costante di tempo minore di quella del polo con $\Re > 0$.

Criterio di Nyquist

> Sia $L(s)$ una funzione di trasferimento d'anello aperto relativa ad un sistema dinamico lineare tempo invariante. Sia p il numero di poli di $L(s)$ con parte reale maggiore di zero ed N il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist della funzione d'anello $L(s)$ attorno al punto -1, conteggiati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente in senso orario. Se il diagramma passa per il punto -1, il valore di N non è ben definito. Allora, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato con funzione di trasferimento $\frac{L(s)}{1+L(s)}$ sia asintoticamente stabile è che N sia ben definito e risulti $N = p$.

Criterio di Bode

> Sia $L(s)$ una funzione di trasferimento d'anello aperto relativa ad un sistema dinamico lineare tempo invariante. Sia p il numero di poli di $L(s)$ con parte reale maggiore di zero. Dato che $p = 0$ ed il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ tagli l'asse 0 dB una volta soltanto, dall'alto verso il basso, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato con funzione di trasferimento $\frac{L(s)}{1+L(s)}$ sia asintoticamente stabile è che, detto μ_L il guadagno di L e φ_L il margine di fase di L, essi siano strettamente maggiori di zero.

Risposta esponenziale

Dato un SD LTI SISO:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

posto in generale $u(t) = Ue^{\lambda t}, t \geq 0$, se λ non è un autovalore di A, allora:

$$\exists! x(0) = (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} b : x(t) = (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} b U e^{\lambda t}$$

e quindi:

$$y(t) = \left[c(\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} b + d\right] U e^{\lambda t} = G(\lambda) U e^{\lambda t}, t \geq 0$$

Se il sistema è anche asintoticamente stabile, allora:

$$\forall x(0), y(t) \to G(\lambda) U e^{\lambda t}, t \to \infty$$

Se invece $G(\lambda) = 0$ allora, con lo stesso $x(0)$, si ha $y(t) = 0, t \geq 0$. Questa proprietà è detta *proprietà bloccante degli zeri*.

Teorema fondamentale della risposta in frequenza

Dato il sistema dinamico lineare tempo-invariante single-input single-output:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + bu \end{cases}$$

detta $G(s)$ la sua funzione di trasferimento ed applicatogli l'ingresso:

$$u(t) = U \sin(\omega t)$$

per $t \geq 0$:

1. Se $\mp j\omega$ non sono autovalori di A, allora esiste un unico stato iniziale $x(0)$ tale che:

$$y(t) = |G(j\omega)| U \sin\left[\omega t + \angle G(j\omega)\right], t \geq 0$$

2. Se, inoltre, il sistema dinamico è asintoticamente stabile, allora:

$$\forall x(0), y(t) \rightarrow |G(j\omega) U \sin\left[\omega t + \angle G(j\omega)\right], t \rightarrow +\infty$$