Содержание

Цель работы: приобретение практических навыков построения эмпирических зависимостей эксперимента и уточнения их параметров.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Будем считать, что некоторое явление характеризуется двумя величинами $\{X\}$ и $\{Y\}$, связанными между собой некоторой неизвестной экспериментатору функциональной зависимостью. Любую из этих величин с одинаковой степенью можно считать независимой, тогда как другая будет считаться зависимой. Пусть, например, независимой положим переменную $\{X\}$. Тогда говорят, что переменная *Y связана с* $\{X\}$ некоторой зависимостью, которую без ограничения общности можно представить: $Y = F(X)$, где F - некоторый неизвестный оператор, связывающий множество X с множеством Y.

Теперь математически задача сводится к построению явного вида оператора F и затем его уточнению. Одним из самых простых операторов F является линейный, определяющий линейную зависимость вида $Y = AX + B$. Для начала, положим $B = 0$ и определим связи между переменными X и Y, вычислив параметр A.

1.1. Метод средних

Предположим, что зависимость построена, тогда $y_i = ax_i$ даст приближенные значения y_i. Определим параметр а из условия минимума средней ошибки

$$\sum_i \left(y_i - y_i^*\right) = \sum_i \left(y_i - ax_i\right) = 0 \cdot$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\sum_i y_i - a \cdot \sum_i x_i = 0,$$

откуда получаем выражение для

$$a = \frac{\sum_I y_i}{\sum_i x_i} \cdot \qquad (1)$$

Пусть теперь $B \neq 0$. Общий вид зависимости теперь $Y_i = AX_i + B$. Константы A и B ищутся такими, чтобы алгебраическая сумма всех уклонений от вычисленных значений была бы равна нулю $\sum_i \left(y_i - y_i^*\right) = \sum_i \left(y_i - ax_i - b\right) = 0 \cdot$

Для определения A и B разобьем все данные на две группы так, чтобы сумма алгебраических уклонений каждой группы от среднего была бы равна нулю. Иными словами, среднее для одной группы точек было бы равным (или не очень сильно отличалось) среднему другой группы точек. Тогда для каждой группы запишем

$$\begin{cases} \sum_i y_i^{(1)} - A \cdot \sum_{i=1}^{L} x_i^{(1)} - LB = 0 \\ \sum_i y_i^{(2)} - A \cdot \sum_{i=L+1}^{N} x_i^{(2)} - B(N-L) = 0, \end{cases}$$

где L - число элементов в I группе. Из последней системы найдем A и B:

$$A=\frac{B\left(N-L\right)-\sum\limits_{i=L+1}^{N}y_i^{(2)}}{\sum\limits_{i=L+1}^{N}x_i^{(2)}};\ B=\frac{\sum\limits_{i=1}^{L}y_i^{(1)}-A\sum\limits_{i=1}^{L}x_i^{(1)}}{L}.$$

Выполнив над последними выражениями элементарные алгебраические преобразования, получим окончательно выражения для коэффициентов A и B.

$$A=\frac{\sum\limits_{i=L+1}^{N}y_i^{(2)}-\left(N-L\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{L}y_i^{(1)}}{L\cdot\sum\limits_{i=L+1}^{N}x_i^{(2)}+\left(N-L\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{L}x_i^{(1)}};$$

$$B=\frac{\sum\limits_{i=L+1}^{N}y_i^{(2)}\cdot\sum\limits_{i=1}^{L}x_i^{(1)}-\sum\limits_{i=1}^{L}y_i^{(1)}}{N\cdot\sum\limits_{i=1}^{L}x_i^{(1)}-L\cdot\left(1+\sum\limits_{i=1}^{L}x_i^{(1)}\right)}. \qquad (2)$$

1.2. Метод наименьших квадратов

Этот метод дает более точные результаты по сравнению с методом средних. В этом методе параметр a определяется из условия минимальной суммы квадратов отклонений табличных значений y_i от полученных y_i* : $\sum\limits_i\left(y_i-ax_i\right)^2=\min(F)$. Условие минимума F дает равенство нулю ее первой производной, т.е. $\left.\frac{\partial F}{\partial a}\right|_{a_i}=0$. Продифференцировав F по a, получим $2\sum\limits_i\left(y_i-ax_i\right)\cdot x_i=0$, откуда находим

$$a=\frac{\sum\limits_i x_i\cdot y_i}{\sum\limits_i x_i}. \qquad (3)$$

Пусть теперь $B\neq 0$. Общий вид зависимости теперь $Y_i=AX_i+B$. Для уточнения параметров A и B ищем минимум функции $F=\sum\limits_{i=1}^{N}\left(y_i-Ax_i-B\right)^2$. Используя условие экстремума функции F, найдем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial A}=2\sum\limits_{i=1}^{N}\left(y_i-Ax_i-B\right)\cdot x_i=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial B}=2\sum\limits_{i=1}^{N}\left(y_i-Ax_i-B\right)=0.\end{cases}$$

От последней системы можно перейти к более простой, выполнив над ней элементарные алгебраические преобразования:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}y_i\cdot x_i-A\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}x_i\cdot x_i-B\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}x_i=0\\ \sum\limits_{i=1}^{N}y_i-A\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}x_i-B=0.\end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно A и B, получим

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\sum_{i=1}^{N}y_i-N\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2-N\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2};$$

$$B=\frac{1}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}y_i-A\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i\right).\qquad(4)$$

Обращает на себя внимание наличие в формулах для A и B метода наименьших квадратов конструкций типа $\sum_{i=1}^{N}x_i$ и $\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot y_i$. Поэтому для вычисления значений этих сумм следует заранее предусмотреть процедуры и функции, которые описаны в приложении.

1.3. Контрольный пример 1

Для проверки и тестирования предлагаемых процедур, необходимых для реализации методов на персональных компьютерах (см. приложение) далее по данным эксперимента (см. таблицу экспериментальных данных) строится линейная зависимость для случаев 1) B=0; A ≠ 0; 2) A ≠ 0; B≠0. Затем уточняются найденные A и B.

Таблица экспериментальных данных

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	2.59	3.40	3.07	2.81	2.51	2.16	1.80	1.60	1.18	0.13
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
y	0.69	0.47	0.01	0.13	0.46	0.79	1.16	1.45	1.95	1.75

Результаты вычислений по формулам (1), (2), для метода средних и по формулам (3), (4), для МНК с использованием приведенных в приложении процедур даются ниже:

МЕТОД СРЕДНИХ ПРИ B = 0: A= 0.78985.
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ B=0: a=-0.08371.

УТОЧНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ:

МЕТОД СРЕДНИХ: a= -1.41004; b= 3.08540.
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ: a= -2.98023; b= 3.95859.

Анализируя полученные значения коэффициентов для разных методов, видим, что A=-2.95; B = 3.92.

1.4. Выбор эмпирических формул для анализа нелинейных зависимостей

Выше была рассмотрена линейная зависимость вида $y=Ax+B$ для случаев, когда A≠0; B=0 и A≠0, B≠0. Но, к сожалению, построение этой зависимости не дает ответа на вопрос о том, какая аналитическая зависимость наилучшим образом подходит (описывает) имеющееся распределение. Наиболее популярные на практике эмпирические зависимости имеют вид:

1) линейная функция: $y = Ax + B$;

2) показательная функция: $y = AB^x$;

3) дробно-рациональная функция: $y = (Ax + B)^{-1}$;

4) логарифмическая функция: $y = A \cdot ln(x) + B$;

5) смешанная функция: $y = Ax^B$.

В зависимости от параметра B она определяет параболическую зависимость $(B>0)$, гиперболическую зависимость $(B < 0)$ и линейную зависимость $(B= 0)$;

6) гиперболическая функция: $y = A + B/x$;

7) дробно-рациональная функция: $y = x/(Ax + B)$.

Для того, чтобы выбрать теперь вид аналитической зависимости, которая наилучшим образом соответствует исходным экспериментальным данным, поступим следующим образом. Выполним промежуточные вычисления. На области определения независимой переменной x_i выберем две точки, достаточно надежные и по возможности как можно дальше отстоящие друг от друга. Обозначим их X_1 и X_2. Этим точкам соответствуют значения Y_1 и Y_2. Найдем теперь среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое для выбранных точек:

$$X_{AP} = \frac{X_1 + X_2}{2};\ X_{ГЕОМ} = \sqrt{X_1 \cdot X_2};\ X_{ГАРМ} = \frac{2 \cdot X_1 \cdot X_2}{X_1 + X_2}; \qquad (5)$$

$$Y_{AP} = \frac{Y_1 + Y_2}{2};\ Y_{ГЕОМ} = \sqrt{Y_1 \cdot Y_2};\ Y_{ГАРМ} = \frac{2 \cdot Y_1 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2}.$$

Построим график, который, по нашему мнению, наилучшим образом будет соответствовать имеющимся экспериментальным данным. И, зная X_{AP}, $X_{ГЕОМ}$, и $X_{ГАРМ}$, найдем из графика приближенные Y^*_{AP}, $Y^*_{ГЕОМ}$ и $Y^*_{ГАРМ}$.

Теперь найдем погрешности результатов сравнений:

$$| Y^*_{AP} - Y_{AP}| = \varepsilon_1;\ | Y^*_{AP} - Y_{ГЕОМ}| = \varepsilon_2;\ | Y^*_{AP} - Y_{ГАРМ}| = \varepsilon_3;$$
$$| Y^*_{ГЕОМ} - Y_{AP} | = \varepsilon_4;\ | Y^*_{ГЕОМ} - Y_{ГЕОМ} | = \varepsilon_5;$$
$$| Y^*_{ГАРМ} - Y_{AP} | = \varepsilon_6;\ | Y^*_{ГАРМ} - Y_{ГАРМ} | = \varepsilon_7$$

и выберем $\varepsilon = min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_7 \}$.

1. Если наименьшим среди всех абсолютных значений окажется ε_1, то в качестве аналитической зависимости для данных точек будет служить линейная функция вида $\boldsymbol{y = Ax + B}$.

2. Если наименьшей абсолютной ошибкой является ε_2, то в качестве эмпирической зависимости следует выбрать показательную функцию $\boldsymbol{y = AB^x}$.

3. В том случае, если наименьшая из абсолютных ошибок есть ε_3, то искомая эмпирическая зависимость определяется дробно - рациональной функцией вида $\boldsymbol{y = (Ax + B)^{-1}}$.

4. Если наименьшая из абсолютных ошибок есть ε_4, то хорошим приближением будет служить логарифмическая функция $\boldsymbol{y=A \cdot ln(x) + B}$.

5. Для случая, когда наименьшей абсолютной ошибкой окажется ε_5, то в качестве эмпирической зависимости рекомендуется выбрать смешанную функцию $\boldsymbol{y = Ax^B}$.

6. Если наименьшей из абсолютных ошибок окажется ε_6 , то за искомую зависимость следует выбрать гиперболическую функцию $\boldsymbol{y= A + B/x}$.

7. И, наконец, в том случае, если наименьшая из всех абсолютных ошибок есть ε_7, то в качестве зависимости следует выбрать дробно - рациональную функцию вида $\boldsymbol{y = x/(Ax + B)}$.

Для уточнения коэффициентов выбранной аналитической зависимости $y = f(x, A, B)$ воспользуемся, как и в п.п.1.1 и 1.2, двумя методами.

Метод средних

В эмпирическую формулу $y = f(x, A, B)$ подставляем последовательно x_i и получаем y_i , которые будут отклоняться от табличных на $e_i = y_i - f(x_i, A, B)$. Согласно методу средних, надо определить так A и B, чтобы $e = 0$. Для этого вся совокупность значений разбивается на две группы так, чтобы алгебраическая сумма уклонений в каждой группе равнялась нулю. Таким образом, для определения параметров A и B имеем

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{L}\left(y_i^* - f\left(x_i^*, A, B\right)\right) = 0 \\ \sum\limits_{i=L+1}^{N}\left(y_i^* - f\left(x_i^*, A, B\right)\right) = 0 \end{cases},$$

откуда получаем из совместного решения системы значение двух параметров A и B.

Метод наименьших квадратов

Согласно этому методу A и B должны быть определены так, чтобы выполнялось условие минимума функции

$$F = \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - Ax_i - B\right)^2 .$$

В силу необходимого условия экстремума функции находим частные производные функции F по неизвестным коэффициентам A и B и приравниваем их к нулю, откуда получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial A} = 2\sum\limits_{i=1}^{N}\left(y_i - Ax_i - B\right)\cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial B} = 2\sum\limits_{i=1}^{N}\left(y_i - Ax_i - B\right) = 0 \end{cases},$$

из решения которой находим A и B.

Ниже, в таблице 1, приводятся явный вид коэффициентов A и B для всех рассматриваемых здесь видов зависимостей.

Таблица 1

Вид зависимости	Системы уравнений для определения *A* и *B*
У = Ax + B	$A = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i - N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2};$ $B = \dfrac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i - A \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i\right);$
У = AB^x	$\ln(A) = \dfrac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) - \ln(B) \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i\right);$ $\ln(B) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) - N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \ln(y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2};$
y = (Ax + B) $^{-1}$	$A \cdot \sum_{i-1}^{N} y_i^2 + B \cdot \sum_{i-1}^{N} x_i \cdot y_i^2 = \sum_{i-1}^{N} y_i^2$ $A \cdot \sum_{i-1}^{N} x_i \cdot y_i^2 + B \cdot \sum_{i-1}^{N} x_i^2 \cdot y_i^2 = \sum_{i-1}^{N} x_i \cdot y_i$
y = A · ln(x)+ B	$A = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i - N \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i) \cdot y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right)^2 - N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2};$ $B = \dfrac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i - A \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right);$
y = Ax^B	$\ln(A) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) - N \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i) \cdot \ln(y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right)^2 - N \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i))^2};$ $B = \dfrac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \ln(y_i) - A \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)\right);$
У= x/(Ax+B)	$A \cdot \sum_{i-1}^{N} y_i^2 + B \cdot \sum_{i-1}^{N} x_i \cdot y_i^2 = \sum_{i-1}^{N} x_i \cdot y_i$ $A \cdot \sum_{i-1}^{N} x_i \cdot y_i^2 + B \cdot \sum_{i-1}^{N} x_i^2 \cdot y_i^2 = \sum_{i-1}^{N} x_i^2 \cdot y_i$

1.5. Контрольный пример 2

Для проверки вышеизложенного, построим эмпирическую зависимость для некоторой функции, заданной таблично. И, пользуясь рассмотренными выше методами, уточним коэффициенты найденной зависимости.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	521	308	240.5	204	183	171	159	152	147

1. Предположим, что в данном примере крайние табличные значения достаточно надежны. Проведем вспомогательные вычисления найдем для $x_0 = 1$ и $x_8 = 9$ средние арифметическое, геометрическое и гармоническое: $x_{ар} = 5$; $x_{геом} = 3$; $x_{гарм} = 1.8$.

2. Из графика (рис.1) найдем значения функции, соответствующие вычисленным значениям аргумента. Условные обозначения: ○- точки, нанесенные согласно эксперментальным данным; ● - выбранные для расчетов точки x_1 и x_8; ⊗-точки, полученные на графике для определения $Y^*_{ар}$, $Y^*_{геом}$ и $Y^*_{гарм}$.

Из графика видно, что для $x_{ар} = 5$ имеем $Y^*_{ар} \sim 330$; для $x_{геом} = 3$ имеем $Y^*_{геом} \sim 430$; для $x_{гарм} = 1.8$ имеем $Y^*_{гарм} \sim 480$.

3. Выполним дополнительные расчеты для соответствующих значений зависимой переменной $y_{ар} = (y_1 + y_9)/2 = (521+147)/2 = 334$; $y_{геом} = (521 \cdot 147)^{1/2} = 276,74$; $y_{гарм} = (2 \cdot 521 \cdot 147)/(521+147) = 229,3$.

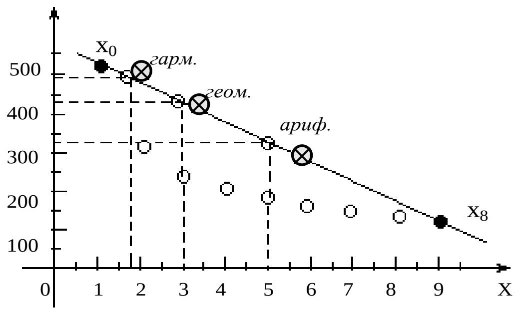

Рис. 1. Экспериментальные данные из таблицы с выделенными точками *x1* и *x8* для построения регрессии разными методами.

4. Сравним графические значения зависимой переменной с вычисленными и найдем $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_7$:

$\varepsilon_1 = |330-334| = 4$;
$\varepsilon_2 = |330-277| = 53$;
$\varepsilon_3 = |330-229| = 101$;
$\varepsilon_4 = |430-334| = 96$;
$\varepsilon_5 = |430-277| = 153$;
$\varepsilon_6 = |480-334| = 146$;
$\varepsilon_7 = |480-229| = 251$.

5. Поскольку наименьшие из абсолютных ошибок с учетом погрешности есть ε_2 или ε_4, то в качестве аналитической зависимости следует выбрать либо показательную функцию, либо логарифмическую. Возьмем для примера логарифмическую: $y = A \ln x + B$. ε_1 в расчетах не учитывается, так как при вычислениях использовались те же точки, что и для построения линейной зависимости.

6. Уточнение коэффициентов проведем по методу наименьших квадратов (4). Получим: $A \sim 102.59$; $B \sim 405.66$.

7. Проверим полученную зависимость и вычислим отклонение экспериментальных данных от функции:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
У	521	308	240.5	204	183	171	159	152	147
У*	508.3	305.4	237.8	204	183.7	170.2	160.5	153.3	147.7

D	12.75	2.58	2.69	0	-0.72	0.8	-1.5	1.3	-0.66

1.6. Преобразование нелинейной зависимости в линейную методом преобразования координат

Рассмотрим в системе координат XOY некоторую линейную зависимость $f(x_i,A,B)$, непрерывную и монотонную на отрезке $[x_1,x_N]$. Перейдем к новым переменным $q = v(x)$ и $z = u(y)$ так, чтобы в новой системе координат QOZ эмпирическая зависимость стала линейной: $z=a'q+b'$.

Заметим, что точки с координатами $[v(x_i),u(y_i)]$ в плоскости QOZ практически лежат на одной прямой. И верно обратное утверждение: если при построении на плоскости QOZ окажется, что точки лежат на одной прямой, то между переменными q и z имеет место линейная зависимость: $z = a'q + b'$.

Попытаемся теперь рассмотренные в пункте 1.4 нелинейные зависимости преобразовать в линейные.

1. Показательная функция $y = AB^x$. Прологарифмируем зависимость $lg(y)=xlg(B)+ lg(A)$, полагая $B' = lg(B)$; $A' = lg(A)$; $x=q$; $z= lg(y)$, получим: $z=B'q+ A'$.

2. Дробно-линейная зависимость $y=(Ax+B)^{-1}$. Введем новые переменные: $z=1/y$; $q= x$ и получим: $z=Aq+B$. Заметим, что B'≡ B и A' ≡ A.

3. Логарифмическая зависимость $y = A\ ln(x) + B$. Если ввести новые переменные $q = ln(x)$ и $z = y$, то опять получим линейную зависимость $z = Aq + B$. A и B остались без изменений.

4. Степенная зависимость $y = Ax^B$. Пусть $A > 0$ и $B > 0$, тогда логарифмируем $lg(y) = lg(A) + B\ lg(x)$ и , делая замену переменных $z = lg(y)$; $A' = lg(A)$; $B' = B$; $q = lg(x)$, получаем линейную зависимость $z = A' + Bq$.

Пусть $A > 0$ и $B < 0$, тогда имеем зависимость вида $y= A/x^B$. Логарифмируем последнее выражение $lg(y)=lg(A)-Blg(x)$ и, делая замену переменных $z=lg(y)$; $A'=lg(A)$; $B' =-B$; $q = lg(x)$, получаем линейную зависимость $z=A'+Bq$.

Пусть $A < 0$ и B - любое число. Тогда выполняем замену $A' = -A$, приходим, в зависимости от знака, либо к первому, либо ко второму варианту данной зависимости.

5. Гиперболическая зависимость $y = A + B/x$ приводится к линейной заменой $z = y$; $q = 1/x$; A и B остаются без изменений $z = A + B\ q$.

6. Дробно-рациональная функция $y = x/ (Ax + B)$ приводится к линейной заменой: $z = 1/y$; $A' = A$; $B' = B$; $q = 1/x$: $z = A + Bq$.

1.7. контрольный пример 3

Для наглядности и проверки предлагаемого способа анализа экспериментальных данных ниже проводится преобразование нелинейной зависимости в линейную и результаты сравниваются с полученными в п.1.5.

Рассмотрим новую переменную $q = ln(x)$, для которой, как мы предполагаем, наша зависимость должна стать линейной.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно построить график в указанных координатах (рис.3, стр.17), для чего составим новую таблицу значений

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ln(x)	0.0	0.69	1.1	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20
y	521	308	240.5	204	183	171	159	152	147

Можно видеть, что, действительно, экспериментальные точки ложатся на прямую в плоскости *YOQ,* т.е. наши предположения оказались верными.

Для того чтобы найти А и В, достаточно выбрать две точки в новых координатах M_1 (0,0; 521) и M_2 (2.20; 147), через которые будет проходить новая регрессионная прямая. Выполнив несложные подсчеты, получаем А = -170; В = 521. Составим новую таблицу и сравним полученные данные (y**) с данными (y*), рассчитанными в п. 1.5.

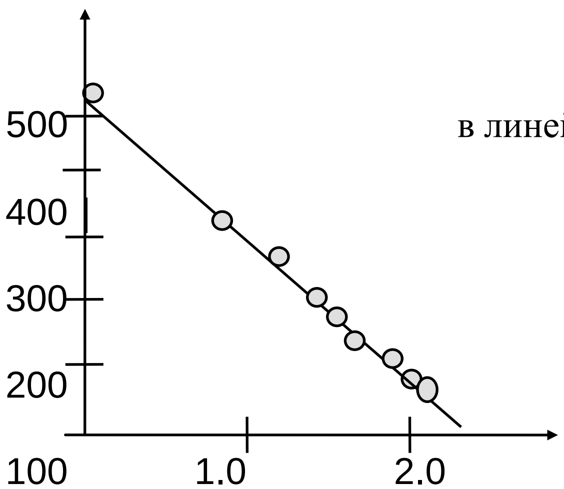

Рис.3. Преобразование нелинейной зависимости в линейную методом пересчета координат (выполнялось преобразование координат X: x* = ln (x)

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
У	521	308	240.5	204	183	171	159	152	147
У*	508.3	305.4	237.8	204	183.7	170.2	160.5	153.3	147.7
D*	12.75	2.58	2.69	0	-0.72	0.8	-1.5	1.3	-0.66
LN(X)	0.0	0.69	1.1	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20
У**	521	402.3	331.8	281.9	244.1	213.1	185.6	163.2	142.6
D**	0. 0	94.3	89.3	77.92	61.01	42.12	26.2	11.24	-4.4

Такие большие ошибки получились в результате ошибок округления. Для улучшения результатов можно порекомендовать пересчитать еще раз зависимость близкой по типу к рекомендуемой, например вида 6, и повторить переход к линейным функциям.

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

а) Получить у преподавателя таблично заданную функцию Y(x).

б) Построить линейную зависимость y=Ax+B для случаев: а) $A \neq 0$; б) $A \neq 0$ и $B\neq 0$.

в) Уточнить найденные A и B методом средних (1) и МНК (3).

г) Выбрать вид аналитической зависимости, которая наилучшим образом соответствует исходным экспериментальным данным:

- На области определения независимой переменной x_i выбрать 2 точки X_1, X_2, как можно дальше отстоящие друг от друга;
- Для выбранных точек найти среднее арифметическое $Y_{ар}$, среднее геометрическое $Y_{геом}$ и среднее гармоническое $Y_{гарм}$;
- Найти приближенные оценки $Y^*_{ар}$, $Y^*_{геом}$ *и* $Y^*_{гарм}$;.
- Построить график экспериментальных данных Y=f(X);
- Найти погрешности результатов сравнения $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_7$. Выбрать $\varepsilon = min \varepsilon_I$, $I=1..7$.
- Выбрать вид функции приближения для исходных экспериментальных данных;
- Уточнить коэффициенты выбранной аналитической зависимости Y=f(X,A, B), используя таблицу 1.

д) Нелинейную зависимость преобразовать в линейную методом преобразования координат:

- Для показательной функции $y = AB^x$, положить $B' = lg(B)$; $A'= lg(A)$; $x=q$; $z= lg(y)$;
- Для дробно-линейной зависимости $y=(Ax+B)^{-1}$, положить $z=1/y$; $q = x$;
- Для логарифмической зависимости $y = A\ ln(x) + B$, положить $q = ln(x)$ и $z = y$;
- Для степенной зависимости $y = Ax^B$, положить $z = lg(y)$; $A' = lg(A)$; $B' = B$; $q = lg(x)$;
- Для степенной зависимости $y= A/x^B$, положить $z=lg(y)$; $A'=lg(A)$; $B' =-B$; $q = lg(x)$;
- Для гиперболической зависимости $y = A + B/x$ положить $z = y$; $q = 1/x$; A и B остаются без изменений $z = A + B\ q$.

- Для дробно-рациональной функция $y = x/ (Ax + B)$ положить $z = 1/y$; $A' = A$; $B' = B$; $q = 1/x$.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- Тема и цель работы.
- Условие задачи.
- Краткое описание математических методов.
- Блок-схема алгоритма решения задачи и текст программы.
- Исходные числовые данные.
- Результаты решения задачи и их анализ.
- Выводы по работе.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

- Сущность метода средних и основные расчетные соотношения.
- Сущность метода наименьших квадратов и основные расчетные соотношения.
- Способ получения, форма представления и необходимое количество исходных данных.
- Критерии и методы оценки результатов решения задачи.
- Анализ результатов решения задачи предлагаемыми методами

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Высшая школа, 1962. Т. 2.- 325 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Пер. с нем. М.: Наука, 1981. – 462 с.
3. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М. : Высшая школа, 1990. – 193 с.
4. Дорот В.Л., Троицкий В.А., Шелест В.Д. Элементы вычислительной математики. Л.: Наука, 1977. – 267 с.
5. В.С. Королюк Н.И. Портенко А.В. Скороход А.Ф. Трубин Справочник по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Наука, 1985. – 591 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Минск: Вышэйшая школа, 1972. Т. 1. – 276 с.