Плоский поперечный изгиб.
Интеграл Мора

Для определения обобщенных перемещений при изгибе используется формула интеграла Мора.

$$\delta = \frac{1}{EJ_z}\int_{\ell} M_z \cdot M_{z1}\, dx$$, где

E – модуль Юнга
J_z – осев. момент ин.

δ – обобщенное перемещение
ℓ – длина балки
x – продольная ось балки
M_z – эпюра изгибающего момента от всех внешних нагрузок.
M_{z1} – эпюра изгибающего момента от единичной нагрузки.

Обобщенное перемещение δ равно Δ если необходимо определить линейное перемещение в точке балки. В этом случае в искомой точке прикладывается единичная сила P=1 в поперечном направлении (ось y), определяется M_{z1} от этой единичной силы и вычисляется интеграл Мора. Направление силы P=1 произвольное, если после вычисления Δ>0, то направление перемещения совпадает с направлением P=1.
Если Δ<0, то направление перемещения противоположно направлению P=1.

Обобщеное перемещение равно φ если необходимо определить <u>угол поворота сечения</u> в точке балки. В этом случае в искомой точке прикладывается единичный момент $M_z=1$ (изгибающий момент, ось z). Далее определяется M_{z1} от этого единичного момента и вычисляется интеграл Мора. Направление $M=1$ произвольное, если после вычисления $\varphi>0$, то направление поворота сечения совпадает с направлением $M=1$. Если $\varphi<0$, то направление поворота сечения противоположно направлению $M=1$.

Поясним:

$$\delta = \begin{cases} \Delta, \text{ то } P=1 \\ \varphi, \text{ то } M=1 \end{cases}$$

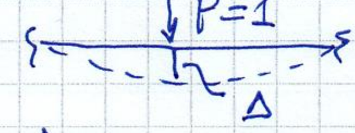
$\Delta > 0$, то перемещение по силе

$\Delta < 0$, то перемещение направлено противоположно силе $P=1$

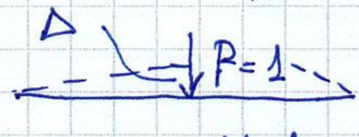
$\varphi > 0$, то поворот сечения, по направлению $M=1$

$\varphi < 0$, то поворот сечения против направления $M=1$

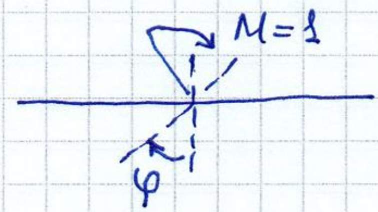
$\Delta > 0$



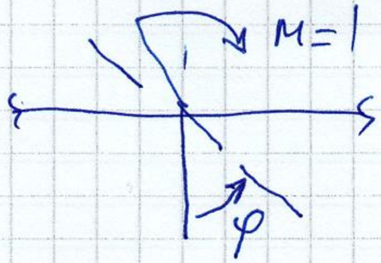
$\Delta < 0$



$\varphi > 0$



$\varphi < 0$

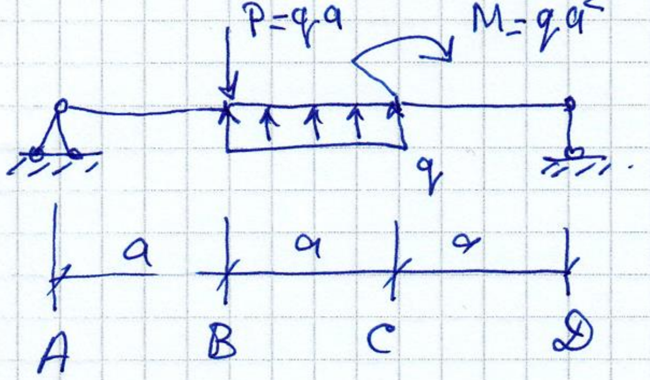


Интеграл по длине балки l как правило разбивается на сумму интегралов по силовым участкам:

$$\int_l M_z M_{z_1} dx = \int_{AB} M_z M_{z_1} dx + \int_{BC} M_z M_{z_1} dx + \dots$$

Рассмотрим практический пример по определению линейных перемещений и углов поворота сечений.

Возьмем задачу № 3 из 1-го семинара на изгиб.



Дано: q, a,

$P = qa$

$M = qa^2$

$\Delta_B - ?$ $\varphi_C - ?$

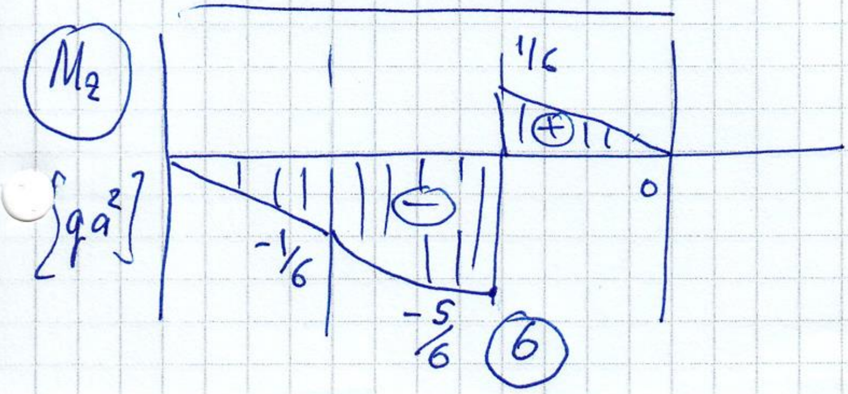
Нам необходимо определить линейное перемещение в сечении B и угол поворота сечения C.

Воспользуемся ранее полученными выражениями для M_z.

$$M_z^{AB} = -\frac{1}{6} qax \Big|_0^a$$

$$M_z^{BC} = -\frac{1}{6} qa^2 - \frac{7}{6} qax \Big|_0^a + \frac{qx^2}{2} \Big|_0^a$$

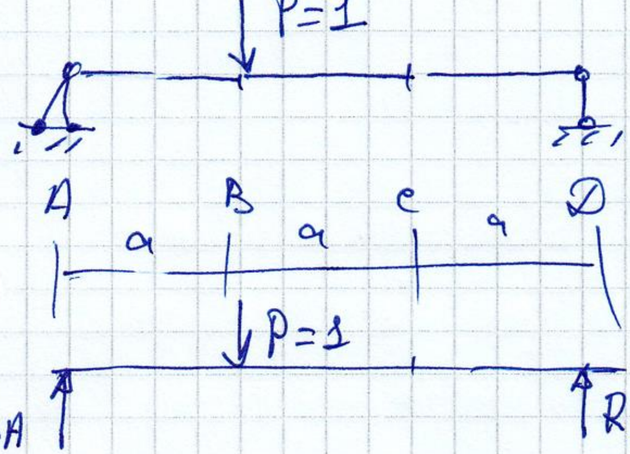
$$M_z^{CD} = \frac{1}{6} qa^2 - \frac{1}{6} qax \Big|_0^a$$



6

Определим линейное перемещение в сечении В.

Приложим $P=1$ в сечении В



Определим реакции R_a и R_D.

- $\Sigma MOM_A = 0 \Rightarrow 1 \cdot a = R_D \cdot 3a$ т.е.

  $R_D = 1/3$

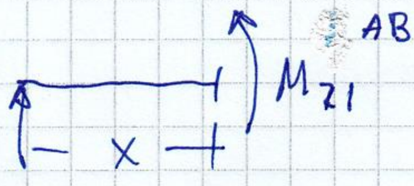
- $\Sigma MOM_D = 0 \Rightarrow R_a \cdot 3a = 1 \cdot 2a$ т.е.

  $R_a = 2/3$

- проверка $\Sigma Y = 0 \quad 2/3 + 1/3 = 1$

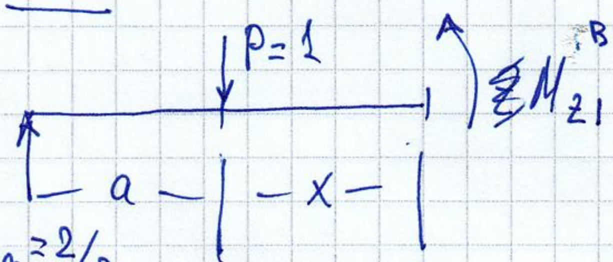
Определим M_{z_1} на участках AB, BC и CD.

AB:



$$M_{z1}^{AB} = \frac{2}{3} x \Big|_0^a$$

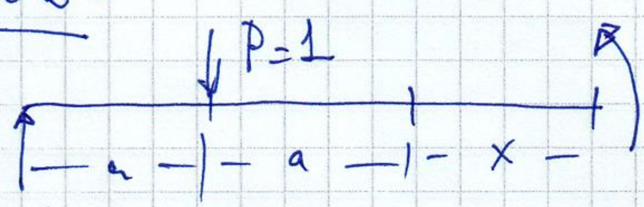
BC:



$$M_{z1}^{BC} = 2/3\left(a + x\Big|_0^a\right) - 1 \cdot x\Big|_0^a \Rightarrow$$

$$M_{z1}^{BC} = \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} x \Big|_0^a$$

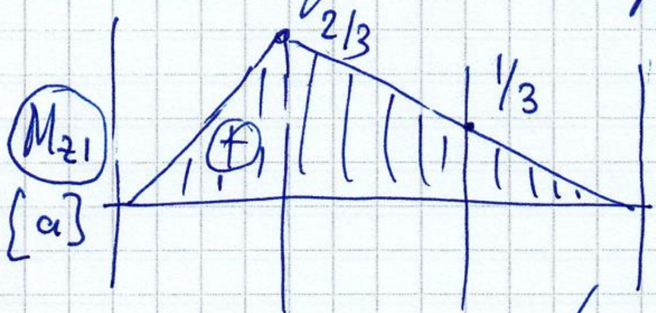
CD:



$$M_{z1}^{CD} = \frac{2}{3}\left(2a + x\Big|_0^a\right) - 1\left(a + x\Big|_0^a\right) \Rightarrow$$

$$M_{z1}^{CD} = \frac{1}{3} a - \frac{1}{3} x \Big|_0^a$$

Построим эпюру M_{z1} от $P=1$



Вычислим перемещение Δ_B

$$\Delta_B = \frac{1}{EJ_z}\left[\int_0^a \left(-\frac{1}{6}qax\right)\frac{2}{3}x\,dx + \right.$$

$$+\int_0^a \left(-\frac{1}{6}qa^2-\frac{7}{6}qax+\frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}x\right)dx +$$

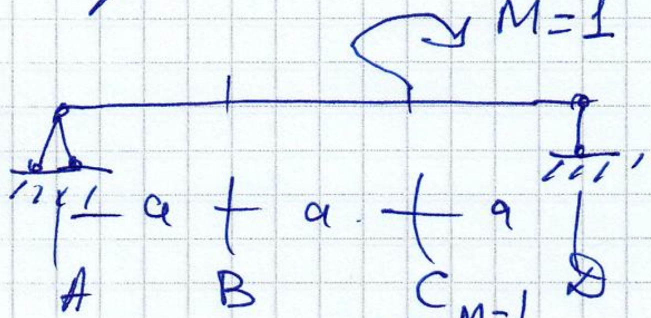
$$\left.+\int_0^a \left(\frac{1}{6}qa^2-\frac{1}{6}qax\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}x\right)dx\right] =$$

$$= -\frac{7}{24}\frac{qa^4}{EJ_z}$$

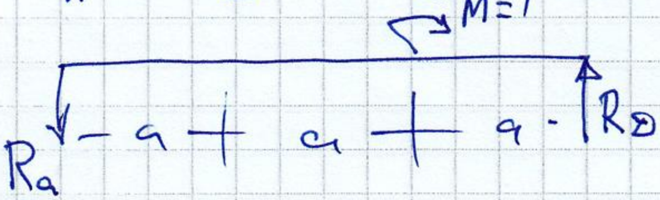
получили $\Delta_B < 0$, т.е. перемещение сечения B будет вверх.

Определит угол поворота сечения С — φ_C.

Приложим $M=1$ в сечении С.



Определим реакции R_a и R_D



$\sum мом_a = 0 \qquad R_D \cdot 3a = 1$ т.е.

$R_D = \dfrac{1}{3a}$

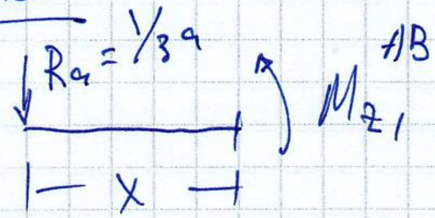
$\sum мом_D = 0 \qquad R_a \cdot 3a = 1$ т.е.

$R_a = \dfrac{1}{3a}$

$\sum y = 0$

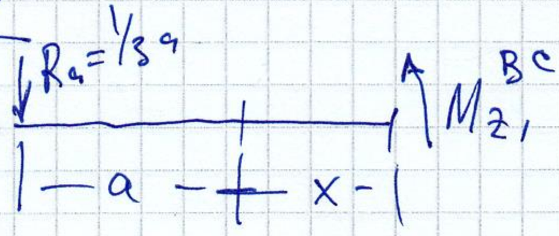
Определим M_{z1} на участках AB, BC и CD

AB:



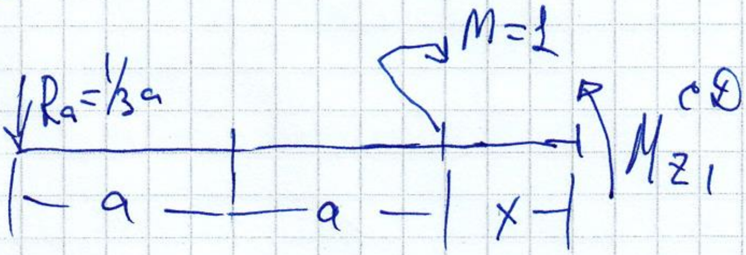
$$M_{z1}^{AB} = -\frac{x}{3a}\Big|_0^a$$

BC:



$$M_{z1}^{BC} = -\frac{1}{3a}\left(a + x\Big|_0^a\right)$$

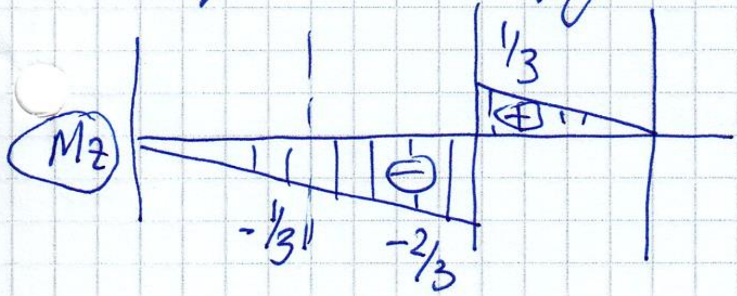
CD:



$$M_{z1}^{CD} = 1 - \frac{1}{3a}\left(2a + x\Big|_0^a\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3a}\cdot x\Big|_0^a$$

Построим эпюру M_{z1} от $M=1$



Вычислим угол поворота сечения φ_C

$$\varphi_C = \frac{1}{EJ_z}\left[\int_0^a \left(-\frac{1}{6}qax\right)\left(-\frac{x}{3a}\right)dx + \int_0^a \left(-\frac{1}{6}qa^2-\frac{7}{6}qax+\frac{qx^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}-\frac{x}{3a}\right)dx + \int_0^a \left(\frac{1}{6}qa^2-\frac{1}{6}qax\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3a}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{5}{72}\frac{qa^3}{EJ_z}$$

получили $\varphi_C > 0$ т.е. сечение C поворачивается по часовой стрелке, как $M=1$