T4 $\xi \sim p(x) = a\{(-1,0)\cup(0,1)\} + b\{0,2\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} a\,dx + 2b + 0 = 2a + 2b = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} - b$$

$$a = \theta \Rightarrow p(x) = \theta\{(-1,0)\cup(0,1)\} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\{0,2\},$$

$$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

1 ОММ

а) $\vec{X}_n$ – выборка

$$\alpha_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,\theta\,dx +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 0 = \frac{\theta}{2}\underbrace{(1-1)}_{=0} + 1 - 2\theta = 1 - 2\theta$$

$$\alpha_2 = M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \theta x^2\,dx + 4\left(\frac{1}{2}-\theta\right) + 0$$

$$= \frac{\theta}{3}(1+1) + 2 - 4\theta = \frac{2}{3}\theta + 2 - 4\theta = 2 - \frac{10}{3}\theta$$

$$D[\xi] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - \frac{10}{3}\theta - (1-2\theta)^2 =$$

$$= 2 - \frac{10}{3}\theta - 1 + 4\theta - 4\theta^2 = 1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2$$

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$1 - 2\theta = \bar{x} \longrightarrow \tilde{\theta} = \frac{1-\bar{x}}{2}$$

b) Несмещенность:

$$M[\tilde{\theta}] = M\left[\frac{1-\bar{x}}{2}\right] = M\left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\bar{x}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\xi] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \theta = \theta$$

$\Rightarrow \tilde{\theta}$ несмещенная

Состоятельность:

$$D[\tilde{\theta}] = D\left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}\right] = \frac{1}{4}D[\bar{x}] = \frac{1}{4}D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] =$$

$$= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{1}{4n^2}\, n\, D[\xi] =$$

$$= \frac{1}{4n}\left(1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \tilde{\theta} \text{ - состоятельная}$$

c) Эффективность:

Проверим регулярность модели:

1) Выполнена

2) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\, p(x,\theta)\,dx = 0$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\, p(x,\theta)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} 1\cdot dx + (-1)\cdot 2 + 0 =$

$= 2 - 2 = 0$

3) $I_1(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)\,dx =$

$= \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)\,dx + \left(\frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(\theta)$

$\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta}$

$\frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln(\frac{1}{2}-\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\frac{1}{2}-\theta}$

$I_1(\theta) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\theta^2}\,\theta\,dx + \frac{\frac{1}{2}-\theta}{(\frac{1}{2}-\theta)^2}\cdot 2 + 0 = \frac{1}{\theta}\cdot 2 + \frac{2}{\frac{1}{2}-\theta} =$

$= \overset{\frac{1}{2}-\theta/}{}\frac{2}{\theta} + \overset{\theta/}{}\frac{2}{\frac{1}{2}-\theta} = \frac{1-2\theta+2\theta}{\theta(\frac{1}{2}-\theta)} = \frac{1}{\theta(\frac{1}{2}-\theta)} > 0$ т.к. $\theta\in(0,\frac{1}{2})$ =>

=> модель регулярна

Проверим регулярность оценки:

$\hat{\theta}$ – несмещ. оценка, $D[\hat{\theta}]$ – огр. на $\forall$ компакте

$\exists = (0, \frac{1}{2})$ по θ => Оценка регулярна

Неравенство Крамера-Рао

$$D[\tilde{\theta}] \geq \frac{1}{n \frac{1}{\theta(\frac{1}{2}-\theta)}} = \frac{\theta(\frac{1}{2}-\theta)}{n}$$

$$\frac{1+\frac{2}{3}\theta-4\theta^2}{4n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$ – пока ничего не можем сказать

② ОММП

а) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$

Пусть в выборке $\vec{x}_n$ значения $\{0, 2\}$ встретились m раз:

$$L(\theta) = \theta^{n-m}\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^m$$

$$\ln L(\theta) = \ln \theta^{n-m} + \ln\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^m =$$

$$= (n-m)\ln\theta + m\ln\left(\frac{1}{2}-\theta\right)$$

Найдем максимум:

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n-m}{\theta} - \frac{m}{\frac{1}{2}-\theta} = \frac{(n-m)(\frac{1}{2}-\theta) - m\theta}{\theta(\frac{1}{2}-\theta)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}n - n\theta - \frac{1}{2}m + \cancel{m\theta} - \cancel{m\theta}}{\theta(\frac{1}{2}-\theta)} = \frac{n-m-2n\theta}{\theta(1-2\theta)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - m = 2n\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{m}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu$$

частота

Проверим, что это максимум:

$$\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{n-m}{\theta^2} - \frac{m}{(\frac{1}{2}-\theta)^2} = \frac{(m-n)(\frac{1}{2}-\theta)^2 - m\theta^2}{\theta^2(\frac{1}{2}-\theta)^2} =$$

$$= \frac{(m-n)(\frac{1}{4}-\theta+\theta^2) - m\theta^2}{\theta^2(\frac{1}{2}-\theta)^2} = \frac{m(\frac{1}{4}-\theta+\theta^2) - m\theta^2 - n(\frac{1}{2}-\theta)^2}{\theta^2(\frac{1}{2}-\theta)^2} =$$

$$= \frac{m(\frac{1}{4}-\theta) - n(\frac{1}{2}-\theta)^2}{\theta^2(\frac{1}{2}-\theta)^2}$$

Подставим $\hat{\theta}$: $\dfrac{m(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{m}{n}) - n(\frac{1}{4}\frac{m^2}{n^2})}{\frac{\nu^2}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)^2} =$

$$= \frac{-m + 2\frac{m^2}{n} - \frac{m^2}{n}}{\nu^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)^2} = \frac{-mn+m^2}{n\nu^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)^2} < 0 \Rightarrow \max.$$

b) Несмещенность:

$$M[\hat{\theta}] = M[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\overset{\to p}{\nu}] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\overset{= p}{\xi}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2\theta) = \theta \Rightarrow \text{несмещ.}$$

Состоятельность:

$$D[\hat{\theta}] =$$

$$= D[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu] = \frac{1}{4}D[\nu] = \frac{1}{4}\frac{p(1-p)}{n} =$$

$$= \frac{(1-2\theta)(1-1+2\theta)}{4n} = \frac{(1-2\theta)2\theta}{4n} = \frac{(1-2\theta)\theta}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{состоят.}$$

c) Эффективность:

$\tilde{\theta}$ - регулярная модель

$$D[\tilde{\theta}] \geq \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$$\frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$, а они равны =>

=> по ОММ оценка не эффективна, а по ОММП - эффективна.