2.7.5 Lemma. Sind $(x,n) \sim (\hat{x},\hat{n})$ und $(y,m) \sim (\hat{y},\hat{m})$, so folgt $\operatorname{sgn}((x,n)) = \operatorname{sgn}((\hat{x},\hat{n}))$ und

$$(x,n) + (y,m) \sim (\hat{x},\hat{n}) + (\hat{y},\hat{m}),$$
$$(x,n) \cdot (y,m) \sim (\hat{x},\hat{n}) \cdot (\hat{y},\hat{m}).$$

Beweis. Seien $(x,n) \sim (\hat{x},\hat{n})$ und (y,m) gegeben. Ok. Zunächst folgt aus $x\hat{n} = \hat{x}n$ und $n,\hat{n} \in \mathbb{N}$, dass $\operatorname{sgn}((x,n)) = \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(\hat{x}) = \operatorname{sgn}((\hat{x},\hat{n}))$. „Um $\mathbb{Q}$ anordnen zu können, definieren wir noch $\operatorname{sgn}: (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{Z} : (x,n) \mapsto \operatorname{sgn}(x)$.“ $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(\hat{x})$, weil $\forall n,\hat{n} \in \mathbb{N}$: $\operatorname{sgn}(n) = \operatorname{sgn}(\hat{n})$ und $x\hat{n} = \hat{x}n$. Weiters gilt

$$(xm + yn)\hat{n}m = xm\hat{n}m + yn\hat{n}m = \underbrace{(x\hat{n} - \hat{x}n)}_{0}mm + \hat{x}nmm + yn\hat{n}m = (\hat{x}m + y\hat{n})nm,$$

also $(x,n) + (y,m) \sim (\hat{x},\hat{n}) + (y,m)$. $(x,n) + (y,m) = (xm + yn, nm)$ und $(\hat{x},\hat{n}) + (y,m) = (\hat{x}m + y\hat{n}, \hat{n}m)$, wobei das Relations-Kriterium $(xm + yn)\hat{n}m = (\hat{x}m + y\hat{n})nm$ ist. Zuerst wird Distributivität genützt, dann $x\hat{n} = \hat{x}n \Leftrightarrow x\hat{n} - \hat{x}n = 0$ und $0mm = 0$, dann wieder ausmultipliziert, wobei $\hat{x}nmm$ „wegfällt“ $(-\hat{x}nmm + \hat{x}nmm = 0)$ und zum Schluss wird noch nm herausgehoben. Wegen der Kommutativität folgt daraus mit vertauschter Notation, dass für $(\hat{x},\hat{n})$ und $(y,m) \sim (\tilde{y},m)$ stets auch $(\hat{x},\hat{n}) + (y,m) \sim (\hat{x},\hat{n}) + (\hat{y},\hat{m})$. Schreibe stattdessen $(y,m) + (\hat{x},\hat{n}) \sim (\hat{y},\hat{m}) + (\hat{x},\hat{n})$ und $y \to x$, $m \to n$, $\hat{x} \to y$, $\hat{n} \to m$, $\hat{y} \to \hat{x}$, $\hat{m} \to \hat{n}$. Das „stattdessen Geschriebene“ kann also analog zu oben (+ Kommutativität) bewiesen werden. Wegen der Transitivität folgt

$(x,n)+(y,m) \sim (\hat{x},\hat{n})+(\hat{y},\hat{m})$.

$(x,n)+(y,m) \sim (\hat{x},\hat{n})+(y,m) \sim (\hat{x},\hat{n})+(\hat{y},\hat{m})$. Bei der Multiplikation geht man analog vor. Seien $(x,n) \sim (\hat{x},\hat{n})$ und (y,m) gegeben. Ok. Dann gilt

$$xy\hat{n}m = (x\hat{n}-\hat{x}n)ym + \hat{x}nym = \hat{x}ynm,$$

also $(x,n)\cdot(y,m) \sim (\hat{x},\hat{n})\cdot(y,m)$. $(x,n)\cdot(y,m) = (xy, nm)$ und $(\hat{x},\hat{n})\cdot(y,m) = (\hat{x}y, \hat{n}m)$ und es muss $xy\cdot\hat{n}m = \hat{x}y\cdot nm$. $\hat{x}nym$ fällt wieder weg. Wegen der Kommutativität folgt daraus mit vertauschter Notation, dass für $(\hat{x},\hat{n})$ und $(y,m) \sim (\hat{y},\hat{m})$ stets auch $(\hat{x},\hat{n})\cdot(y,m) \sim (\hat{x},\hat{n})\cdot(\hat{y},\hat{m})$. Ok. Wegen der Transitivität folgt schließlich

$$(x,n)\cdot(y,m) \sim (\hat{x},\hat{n})\cdot(\hat{y},\hat{m}). \qquad \square$$