2. Test der Übungen zu Analysis 1
Gruppe A, 28.11.2014

1. Untersuchen die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}}$ aus $\mathbb{R}^2$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert!

$$x_n := \sqrt{3n+5} \cdot \Big(\big(\sqrt{2n^3+2n} \;-\; \sqrt{2n^3-4}\big), \frac{n}{n^2+2n+2} \Big),$$

   Sollten Sie Rechenregeln für Grenzwerte anwenden, so geben Sie an, welche!

2. Geben Sie an, was es bedeutet, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gegen $-\infty$ konvergiert.

   Weiters: Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, divergent, bestimmt divergent? Begründung!

   (i) $a_n = (-1)^n(n - \sqrt{n^2+1})$,

   (ii) $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n^7+7n^3+1}}{3n^2-1}$.

Musterlösung:

Rechenregeln:
Für konvergente Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein Skalar λ in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$), $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w$

(2) $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z \cdot w, \quad \lim_{n\to\infty}(\lambda z_n) = \lambda z$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$

(4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{z_n} = \sqrt[k]{z}$

(5) Falls $z_n \to 0$ und u_n eine beschränkte Folge, so gilt $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot u_n) = 0$

1. $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n})$

$$
\begin{aligned}
x_{1,n} &= \sqrt{3n+5} \cdot (\sqrt{2n^3+2n} - \sqrt{2n^3-4}) \\
&= \sqrt{3n+5} \cdot \frac{(\sqrt{2n^3+2n} - \sqrt{2n^3-4}) \cdot (\sqrt{2n^3+2n} + \sqrt{2n^3-4})}{(\sqrt{2n^3+2n} + \sqrt{2n^3-4})} \\
&= \sqrt{3n+5} \cdot \frac{2n-4}{(\sqrt{2n^3+2n} + \sqrt{2n^3-4})} \\
&= \frac{(3n+5)}{\sqrt{3n+5}} \cdot \frac{2n-4}{(\sqrt{2n^3+2n} + \sqrt{2n^3-4})} \\
&= \frac{6n^2+22n+20}{(\sqrt{6n^4+10n^3+6n^2+10n} + \sqrt{6n^4+10n^3-12n-20})} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{6+22/n+20/n^2}{(\sqrt{6+10/n+6/n^2+10/n^3} + \sqrt{6+10/n-12/n^3-20/n^4})}
\end{aligned}
$$

Also gilt für den Limes mithilfe der Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{1,n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{6+22/n+20/n^2}{(\sqrt{6+10/n+6/n^2+10/n^3} + \sqrt{6+10/n-12/n^3-20/n^4})} \\
&\overset{(2),(3)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(6+22/n+20/n^2)}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{6+10/n+6/n^2+10/n^3} + \sqrt{6+10/n-12/n^3-20/n^4})} \\
&\overset{(1),(4)}{=} \frac{6+\lim_{n\to\infty}(22/n+20/n^2)}{(\sqrt{6+\lim_{n\to\infty}(10/n+6/n^2+10/n^3)} + \sqrt{6+\lim_{n\to\infty}(10/n-12/n^3-20/n^4)})} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{6}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Ebenso für $x_{2,n}$:

$$
\begin{aligned}
x_{2,n} &= \sqrt{3n+5} \cdot \frac{n}{n^2+2n+2} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{\sqrt{3/n+5/n^2}}{1+2/n+2/n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{2,n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3/n+5/n^2}}{1+2/n+2/n^2} \\
&\overset{(2),(3)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt{3/n+5/n^2}}{\lim_{n\to\infty}(1+2/n+2/n^2)} \\
&\overset{(1),(4)}{=} \frac{\sqrt{\lim_{n\to\infty} 3/n + \lim_{n\to\infty} 5/n^2}}{(1+\lim_{n\to\infty} 2/n + \lim_{n\to\infty} 2/n^2)} \\
&= \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(x_{1,n}, x_{2,n}) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$$

2. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ gegen $-\infty$, falls

$$\forall M < 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n < M \quad \text{für} \quad n \geq N$$

(i)

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n(n - \sqrt{n^2+1}) \\ &= (-1)^n \cdot \frac{(n - \sqrt{n^2+1}) \cdot (n + \sqrt{n^2+1})}{(n + \sqrt{n^2+1})} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n^2 - n^2 - 1}{(n + \sqrt{n^2+1})} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n + \sqrt{n^2+1}} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} =: b_n \cdot c_n. \end{aligned}$$

Da nun $b_n = (-1)^{n+1}$ beschränkt ist und

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} &\overset{(2),(3)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}(1 + \sqrt{1 + 1/n^2})} \\ &\overset{(1),(4)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{(1 + \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} 1/n^2})} \\ &= \frac{0}{1+\sqrt{1}} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

folgt aus (5)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b_n \cdot c_n = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt[3]{2n^7 + 7n^3 + 1}}{3n^2 - 1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2n + 7/n^3 + 1/n^6}}{3 - 1/n^2} =: b_n \cdot c_n \end{aligned}$$

wobei

$$b_n := \sqrt[3]{2n + 7/n^3 + 1/n^6} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{b_n} \to 0$$

folgt

$$b_n \to +\infty$$

und da $c_n = \frac{1}{3-1/n^2} > \frac{1}{4}$ folgt

$$a_n = b_n \cdot c_n \to +\infty$$