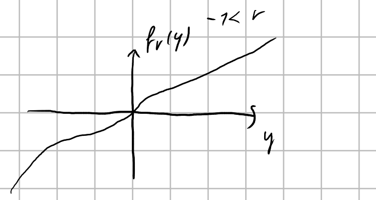
10.1. Betrachten Sie für $r \in \mathbb{R}$ die autonome ODE

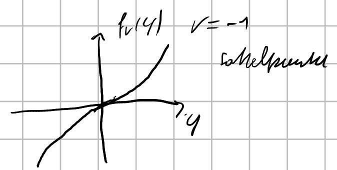
$$y' = y + \tanh(ry).$$

Wieviele Ruhelagen hat die Gleichung abhängig von r? Um welchen Typ von Bifurkation handelt es sich beim Bifurkationspunkt $r = -1$?

$f_r(y) = y + \tanh(ry)$; $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[: y \mapsto \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}$ bijektiv (vgl. Kaltenbäck S. 211)

$\tanh' = \sinh' \cosh^{-1} - \sinh \cosh^{-2} \cosh' = 1 - \tanh^2$





•) „Ruhelagen": Da $\tanh(0) = 0$ gilt $\forall r \in \mathbb{R}: f_r(0) = 0$

$f_r'(y) = 1 + r\left(1 - (\tanh(ry))^2\right)$

Fall 1: „$-1 \le r$" $f_r'(y) \ge 1 - (1 - (\tanh(ry))^2) \ge 1 - 1 = 0$

wobei $f_r'(y) = 0 \iff r = -1 \wedge y = 0$

Die Funktion f_r ist also in dem Fall str. mon. wachsend kann also nur die eine Nullstelle $y^* = 0$ haben

Fall 2: „$r < -1$" $f_r'(0) = 1 + r < 0$ und $\lim_{y \to \pm\infty} f_r(y) = \infty$

Nach dem ZWS dürfen wir $z := \min\{y \in \mathbb{R}^+ \mid f_r(y) = 0\}$ betrachten

$f_r(-y) = -y + \tanh(-ry) = -y - \tanh(ry) = -f_r(y)$ also reicht es die Nullstellen auf $\mathbb{R}^+$ zu finden

Sei $y > z$, dann gilt $f_r(y) = y + \tanh(ry) > z + \tanh(ry) = \tanh(ry) - \tanh(rz) =$

$= f_r'(\xi)\, r\,(y - z)$ nach dem MWS für $\xi \in (ry, rz)$ $\quad y > z \iff ry < rz$

$f_r'(\xi) = 1 + r(1 - (\tanh(r\xi))^2) > 1 + r(1 - (\tanh(rz))^2) = 1 + r(1 - z^2) < 0$, weil

$f_r(z) = 0 \iff z + \tanh(rz) = 0 \Rightarrow z \in]0,1[$, weil $\tanh(rz) \in]-1,0[$

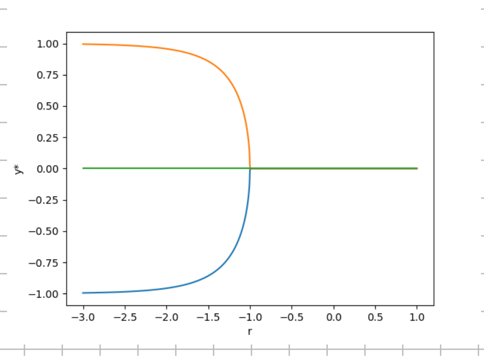
Also $f_r(y) > \underbrace{f_r'(\xi)}_{<0}\, \underbrace{r(y-z)}_{<0} > 0$

z ist also die einzige Nullstelle von f_r in $\mathbb{R}^+$ und entsprechend $-z$ die einzige in $\mathbb{R}^-$

•) „Stabilität" $f_r'(0) = 1 + r$ also ist die Ruhelage $y^* = 0$ für $r > -1$ instabil und für $r < -1$ asymptotisch stabil

$f_r'(\pm z) = 1 + r(1 - (\tanh(rz))^2) = (1 + r(1 - z^2)) < 0$ (vorher argumentiert) also asymptotisch stabil

•) Wir können also sagen es handelt sich um eine „supercritical pitchfork bifurcation"



10.2. **a)** Betrachten Sie das RWP (auf $(0,1)$)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_0} y(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_1} y(1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\ell}$$

Hat das RWP eine Lösung?

b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit des RWP (auf $(0,\pi)$)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_\alpha} y, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_0} y(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{R_\pi} y(\pi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\ell}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Fundamentalmatrix $Y(t) = \exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Da die ODE homogen ist gilt $y_p = 0$; $B := R_0 Y(0) + R_1 Y(1)$

Nach Satz 6.3 ist das RWP lösbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rang}(B) = \operatorname{Rang}(B, \ell - R_1 y_p(1))$

in unserem Fall ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ell - R_1 y_p(1) = \ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Rang}(B) = 1 < 2 = \operatorname{Rang}(B, \ell)$ also ist das RWP nicht lösbar

b) Fall 1: „$\alpha = 0$"

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y_0(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = R_0 Y_0(0) + R_\pi Y(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wie in (a) ist $y_p = 0$ und wegen $\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ klarerweise $\operatorname{Rg}(B) = \operatorname{Rg}(B, \ell - R_\pi y_p(\pi))$

Nach Satz 6.3 ist das RWP in dem Fall lösbar mit $y(x) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$ als Lösung

Fall 2. „$\alpha \neq 0$"

Das charakteristische Polynom zu A_α ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2$ mit $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\alpha$

$$\begin{pmatrix} -i\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & -i\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha^2 & i\alpha \\ -\alpha^2 & -i\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha^2 & i\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ also Lösungsraum span $\begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & i\alpha \end{pmatrix}$ Lösungsraum span $\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha \end{pmatrix}$; also $V := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\alpha & -i\alpha \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix}$ und

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-i\alpha}{-2i\alpha} & \frac{-1}{-2i\alpha} \\ \frac{-i\alpha}{-2i\alpha} & \frac{1}{-2i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix}; \quad VDV^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\alpha & -i\alpha \\ -\alpha^2 & -\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = A_\alpha$$

$$Y_\alpha(x) = Ve^{xA_\alpha}V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\alpha & \frac{\alpha}{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\alpha x} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\alpha x} & e^{-i\alpha x} \\ i\alpha e^{i\alpha x} & \frac{\alpha}{i} e^{-i\alpha x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha x) & \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \\ -\alpha\sin(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{pmatrix}$$

$$B_\alpha = R_0 Y_\alpha(0) + R_\pi Y_\alpha(\pi) \begin{pmatrix} 1 - \cos(\alpha\pi) & -\alpha^{-1}\sin(\alpha\pi) \\ \alpha\sin(\alpha\pi) & 1 - \cos(\alpha\pi) \end{pmatrix}$$

Nach Satz 6.3 (ii) ist die Dimension des Lösungsraumes dim ker B, wobei $y = 0$ eine Lösung ist, also die Existenz in jedem Fall gegeben ist

Fall 2.1: „ $\alpha \in 2\mathbb{Z}\setminus\{0\}$" $\cos(2\mathbb{Z}\setminus\{0\}\pi) = \{1\}$, $\sin(2\mathbb{Z}\setminus\{0\}\pi) = 0 \Rightarrow B_\alpha = 0$

Also löst $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $y(x) := Y(x)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ das RWP

Fall 2.2: „ $\alpha \notin 2\mathbb{Z}\setminus\{0\}$"

$\det(B_\alpha) = (1-\cos(\alpha\pi))^2 + \sin(\alpha\pi)^2 = 1 - 2\cos(\alpha\pi) + \cos(\alpha\pi)^2 + \sin(\alpha\pi)^2 = 2(1-\cos(\alpha\pi)) > 0$

also $\ker(B_\alpha) = \{0\}$, es gibt daher nur die triviale 0-Lösung

10.3. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme, falls diese existieren:

a) $(yy')' = 1 - 3t$ mit $y(0) = y(1) = 0$,

b) $y'' + 4y = 0$ sowie $y'' + 4y = 4t$ mit $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(\pi) = y'(-\pi)$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$ mit $y(0) = 2, y(\pi/4) = 1$

a) Ang. es gibt eine Lösung y, sei dann $x := yy'$

x erfüllt dann $x' = 1-3t$ und $x(0) = x(1) = 0$

x hat die Form $x(t) = t - \frac{3}{2}t^2 + c$; $x(0) = c = 0 \Rightarrow c = 0$

$x(t) = t - \frac{3}{2}t^2$ und $x(1) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$ ↯

b) •) $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$, $y(x) = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix}$

$y(\pi) = c_1 e^{2\pi i} + c_2 e^{-2i\pi} = c_1 + c_2 = c_1 e^{-2\pi i} + c_2 e^{2\pi i} = y(-\pi)$

$y'(x) = c_1 2i e^{2ix} - c_2 2i e^{-2ix}$

$y'(\pi) = 2i(c_1 - c_2) = y'(-\pi)$

also ist $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $y(x) = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix}$ Lsg. des RWP

•) $y_p(x) = x$ ist offensichtlich Partikulärlösung

$y(x) = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix} + x$

$y(-\pi) = c_1 + c_2 - \pi \stackrel{!}{=} c_1 + c_2 + \pi = y(\pi) \Rightarrow -\pi = \pi$ ↯, es gibt daher keine Lsg.

c) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm \frac{i4}{2} = -1 \pm 2i$

$y(x) = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x}$

$y(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 2$ und $y(\frac{\pi}{4}) = c_1 e^{-1} e^{i\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-1} e^{-i\frac{\pi}{2}} = c_1 e^{-1} i - i c_2 e^{-1} \stackrel{!}{=} 1$

also $i(c_1 - c_2) = e$ und $c_1 = 2 - c_2$

$i((2-c_2) - c_2) = e \Rightarrow 2 - 2c_2 = -ie \Leftrightarrow 2 + ie = 2c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1 + \frac{i}{2}e$

und $c_1 = 1 - \frac{i}{2}e$

also löst $y(x) = (1 - \frac{i}{2}e) e^{(-1+2i)x} + (1 + \frac{i}{2}e) e^{(-1-2i)x}$ das RWP

10.4. Betrachten Sie das RWP

$$Ly := -(py')' + qy = f \quad \text{auf } (a,b), \qquad R_1y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = \rho_1, \qquad R_1 y := \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = \rho_2,$$

wobei p, q hinreichend glatt sind, $p > 0$ auf $[a,b]$. Sei $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ und $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$. Nehmen Sie an, daß das RWP für $f = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ nur trivial lösbar sei. Seien weiters y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen von $Ly = 0$ mit $R_1 y_1 = 0$ und $R_2 y_2 = 0$. Dann gilt:

$$\kappa(x) := p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') = \text{const} \neq 0$$

$$G(x,t) = \frac{1}{\kappa} \begin{cases} y_1(t) y_2(x) & a \le t \le x \le b \\ y_1(x) y_2(t) & a \le x \le t \le b \end{cases}$$

•) Nach Lemma 6.8. gilt $y_1 L y_2 - y_2 L y_1 = (p(y_1' y_2 - y_2' y_1))'$
und $Ly_2 = Ly_1 = 0$ also $K' = (p(y_1' y_2 - y_2' y_1))' = 0 \Rightarrow K = \text{const}.$

$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$ ist Fundamentalsystem und $0 \neq \det Y = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

$\Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$ und wegen $p > 0$ ist $K = p(y_1' y_2 - y_1 y_2') \neq 0$

•) Für eine Greensche Funktion gilt nach Satz 6.7.

i) $LG(\cdot, t) = 0$ auf $]a,t[\cup]t,b[$

Da wir schon ein Fundamentalsystem Y kennen, wissen wir bereits die Form von G

$$G(x,t) = \begin{cases} \alpha_1(t) y_1(x) + \alpha_2(t) y_2(x) & \text{für } x \le t \\ \beta_1(t) y_1(x) + \beta_2(t) y_2(x) & \text{für } x < t \end{cases}$$

wobei wir den Punkt $x = t$ so wählen weil nach (ii) gilt, dass $G(\cdot, t)$ bei $x = t$ stetig

iii) $0 = R_1 G(\cdot, t) = R_1(\alpha_1(t) y_1 + \alpha_2(t) y_2) = \alpha_1(t) \underbrace{R_1 y_1}_{=0} + \alpha_2(t) R_2 y_2$ und da $R_2 y_2 = 0$ nicht auftreten kann weil das RWP für $f = 0$ und $\rho_1 = \rho_2 = 0$ nur die triviale Lsg. hat gilt $\alpha_2(t) = 0$

analog erhält man $\beta_1(t) = 0$

ii) $G(\cdot, t)$ bei $x = t$ stetig und $\partial_x G(t^+, t) - \partial_x G(t^-, t) = -\frac{1}{p(t)}$

Wir haben mittlerweile
$$G(x,t) = \begin{cases} \alpha_1(t) y_1(x) & , x \le t \\ \beta_2(t) y_2(x) & , x > t \end{cases}$$

$$\partial_x G(t^+, t) - \partial_x G(t^-, t) = \beta_2(t) y_2'(t) - \alpha_1(t) y_1'(t) = \frac{1}{-p(t)}$$

Wegen der Stetigkeit von $G(\cdot, t)$ bei $x = t$ gilt $\alpha_1(t) y_1(t) = \beta_2(t) y_2(t) \Rightarrow \alpha_1(t) = \frac{\beta_2(t) y_2(t)}{y_1(t)}$

und damit $\beta_2(t) \left(y_2'(t) - \frac{y_2(t) y_1'(t)}{y_1(t)} \right) = \frac{1}{-p(t)} \Leftrightarrow \beta_2(t) = \frac{-y_1(t)}{p(t)(y_2'(t) y_1(t) - y_2(t) y_1'(t))} = \frac{y_1(t)}{K(t)}$

und $\alpha_1(t) = \frac{-y_2(t)}{p(t)(y_2'(t) y_1(t) - y_2(t) y_1'(t))} = \frac{y_2(t)}{K(t)}$

also $G(x,t) = \frac{1}{K} \begin{cases} y_2(t) y_1(x) & , x \le t \\ y_1(t) y_2(x) & , x > t \end{cases}$

10.5. Betrachten Sie das RWP

$$Ly = -(py')' + qy = f, \quad \text{auf } (a,b), \qquad R_1 y = 0 = R_2 y$$

Es sei G die Greensche Funktion für dieses RWP (Sie fordern also insbesondere eindeutige Lösbarkeit). Es soll gezeigt werden, daß $LG(\cdot,t) = \delta_t$, wobei δ_t die "δ-Distribution" ist. Genauer: Zeigen Sie für $t \in (a,b)$:

$$\int_a^b G(x,t)(L\varphi)(x)\,dx = \varphi(t) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b) = \{\varphi \in C^\infty(a,b) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset (a,b)\}$$

•) Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ bel.

Es gilt $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$ und daher $R_1\varphi = R_2\varphi = 0$

Die Funktion φ erfüllt also das RWP mit rechter Seite $L\varphi$

•) Aus Satz 6.7. wissen wir, dass auch die Funktion $y(t) = \int_a^b G(t,x)\,(L\varphi)(x)\,dx$

das RWP mit $f = L\varphi$ erfüllt.

Außerdem gilt nach Satz 6.9 $G(x,t) = G(t,x)$ also $y(t) = \int_a^b G(x,t)\,(L\varphi)(x)\,dx$

•) Da wir Eindeutigkeit von Lsg. gefordert haben gilt

$y(t) = \int_a^b G(x,t)\,(L\varphi)(x)\,dx = \varphi(t)$

•) Wenn wir eine Greensche Funktion gegeben haben bedeutet das für das Randwertproblem

nur triviale Lösbarkeit für $f=0$. Für zwei Lsg. y_1, y_2 mit bel. rechter Seite f gilt

$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = 0$ und $R_1(y_1 - y_2) = R_1(y_1) - R_1(y_2) = 0$

sowie $R_2(y_1 - y_2) = R_2(y_1) - R_2(y_2) = 0$

Also erfüllt $y_1 - y_2$ das RWP für $f = 0$ daher $y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

Wir erhalten eindeutige Lösbarkeit

10.6. Betrachten Sie die Schwingung einer einseitig eingespannten Saite, welche die Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0$$

mit den Randbedingungen

$$y(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}y(1,t) = 0, \qquad t > 0,$$

erfüllt.[1] Die Anfangsbedingungen seien $y(\cdot,0) = y_0(\cdot)$ und $\frac{\partial}{\partial t}y(\cdot,0) = y_1(\cdot)$. Formulieren und lösen Sie das Sturm-Liouville Eigenwertproblem, welches durch den Ansatz der Separation der Variablen entsteht. Geben Sie eine (formale) Lösung als Reihe an.

•) Ansatz mit Separation der Variablen: $y(x,t) = v(x)\,w(t)$

dann gilt $\frac{1}{c^2} w''(t)\,v(x) = v''(x)\,w(t)$ also $\frac{1}{c^2}\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt soll es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ geben mit $\frac{1}{c^2}\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda$, wir lösen also

$-\lambda v - v'' = 0$ auf $]0,1[$ und $-\lambda c^2 w - w'' = 0$ auf $]0,\infty[$

Aus der VO wissen wir bereits

$v(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\,x)$ und $w(t) = c_3 \sin(c\sqrt{\lambda}\,t) + c_4 \cos(c\sqrt{\lambda}\,t)$

•) Nun zu den Randbed.: Wir sehen $c_2 = 0$ und erhalten

$y(0,t) = v(0)\,w(t) = 0$

Sei nun $c_1 \neq 0$, dann gilt $\frac{\partial}{\partial x} y(1,t) = v'(1)\,w(t) \overset{!}{=} 0$

also soll $v'(1) = 0 \Leftrightarrow c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda = \pi^2(\tfrac{1}{2}+n)^2$ für $n \in \mathbb{Z}$

Für eine nichttriviale Lsg.: $n \in \mathbb{N}_0$

Wir haben nun $v(x)\,w(t) = c_1 \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}x\right)\left(c_3 \sin\left(\frac{c\pi(1+2n)}{2}t\right) + c_4 \cos\left(\frac{c\pi(1+2n)}{2}t\right)\right)$

Wir machen den Ansatz

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}x\right)\left(c_{1,n} \sin\left(\frac{c\pi(1+2n)}{2}t\right) + c_{2,n} \cos\left(\frac{c\pi(1+2n)}{2}t\right)\right)$$

Mit den Anfangsbed. gilt

$y_0(x) \overset{!}{=} y(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2,n} \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}x\right)$, $x \in]0,1[$ und

$y_1(x) \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial t} y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n} \frac{c\pi(1+2n)}{2} \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}x\right)$

10.7. **a)** Zeigen Sie, daß für jedes $f \in C([0,1])$ die Randwertaufgabe

$$-y'' + ay = f, \quad y'(0) = y'(1) = 0, \quad a \in (0, \infty)$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion für das Randwertproblem.

c) Gegeben sei eine stetige Funktion $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die global Lipschitz stetig bezüglich u ist, d.h.

$$|F(t,u) - F(t,\tilde{u})| \le L|u - \tilde{u}| \qquad \forall t \in [0,1], u, \tilde{u} \in \mathbb{R}$$

mit Lipschitzkonstante $0 < L < a$. Zeigen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen das nichtlineare Randwertproblem

$$-y'' + ay = F(t,y), \qquad y'(0) = y'(1) = 0$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

d) Falls $L \ge a$, dann besitzt dieses Randwertproblem im Allgemeinen keine eindeutige Lösung.

Sei für jedes $u \in \mathbb{R}$ die Funktion y_u Lsg. von $-y'' + ay = F(t,y)$ und $y(0) = u$

sei weiters z_u Lsg. des RWP $-z'' + az = F(t,u)$ und $z'(0) = z'(1) = 0$

$|-y_u'' + a y_u + z_u'' - a z_u| = |F(t, y_u(t)) - F(t,u)| \le L\,|y_u(t) - u| < a\,|y_u(t) - u|$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ a y_1 - F(t, y_2) \end{pmatrix} \qquad y'' = ay - F(t,y)$$

$$y' = \int_0^t (a y(s) - F(s, y(s)))\,ds$$

$\exists! z_1: \quad z_1 = \int_0^t (a z_1(s) - F(s, z_1(s)))\,ds$

$\exists! z_2: \quad z_2 = \int_1^t (a z_2(s) - F(s, z_2(s)))\,ds = -\int_t^1$

$|f_1(t, y$