81. Gg.: $f(x,y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1$

Zz.: y lässt sich lokal, auf $N_f := \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$, als Funktion $g(x)$ darstellen.

Ww.: $\forall (x_0, y_0) \in N_f : f(x_0, y_0) = 0$,

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \det\left(e^{y_0} + 3y_0^2\right) > 0.$$

Ges.: $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$

$$= -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

$$= -\left(e^{g(x)} + 3\,g(x)^2\right)^{-1} \left(3x^2 + 2x\right).$$

82. Gg.: $xu + yvu^2 = 2$

$xu^3 + y^2v^4 = 2$

Zz.: ... lässt sich lokal um $(1,1,1,1)$ nach u,v lösen.

$$F(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} xu + yvu^2 - 2 \\ xu^3 + y^2v^4 - 2 \end{pmatrix}$$

- $F(1,1,1,1) = 0$
- $$\det\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1,1,1)\right) = \det\begin{pmatrix} x + yv2u & yu^2 \\ x\cdot 3u^2 & y^2 4v^3 \end{pmatrix}\Big|_{(1,1,1,1)} = 9$$

Ges.: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial G}{\partial(x,y)}(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(x,y,G(x,y))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,G(x))$$

83.

Gg.: $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^4+y^4}{x} \\ \sin x + \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + y^4/x \\ \sin x + \cos y \end{pmatrix}$

Zz.: f Diffeomorphismus lokal um $(\pi/2, \pi/2)$.

d.h. $\exists\, U \ni (\pi/2, \pi/2)$ offene Umgebung: $f|_U$ bijektiv

Ww.: Umkehrsatz. $F: \mathbb{R}^r \supseteq D \to Y$, D offen, $dF(x_0)$ regulär

$\Rightarrow \exists\, V \ni x_0,\ W \ni F(x_0)$ offene Umgebungen:

$F|_V : V \to W$ diffeomorph

$$df(\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^4/x^2 & 4y^3/x \\ \cos x & -\sin y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=\pi/2}$$

$$= \begin{pmatrix} \pi^2/2 & \pi^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto E_2$$

84. Geg.: $f(x,y) = x^2 y$, NB.: $x^2 + 2y^2 = 6$

Ges.: Extremalstellen, Extremwerte mit Lagrange'scher Multiplikation

Ww.: $\vec{x}_0$ Extremum von $f(\vec{x})$,

$G(\vec{x}_0) = 0$, $dG(\vec{x}_0)$ voller Rang

$\Rightarrow F(\vec{x}, \lambda) := f(\vec{x}) - \lambda G(\vec{x})$, $dF(\vec{x}_0, \lambda) = 0$.

$F(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(x^2 + 2y^2 - 6)$,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x(y - \lambda) \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = x^2 - \lambda 4y \qquad (2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = -x^2 - 2y^2 + 6 \qquad (3)$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ Fall 1: $x = 0$

Fall 2: $y = \lambda$

F1: $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ F 1.1: $\lambda = 0$

F 1.2: $y = 0$

F1.1: $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $y = \pm\sqrt{3}$

F 1.2: $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\lightning$

F2: $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ F2.1: $2y = x$

F 2.2: $2y = -x$

F 2.1, F 2.2: $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $y = \pm 1$

$\Rightarrow$ Kandidaten $= \{(0, \pm\sqrt{3}), (\pm 2, \pm 1)\}$

Wenn $G(x,y) := x^2 + 2y^2 - 6$,

$dG(x,y) = (2x, 4y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = 0$,

aber $G(0,0) \neq 0$.

Ww.: Durch einsetzen, sieht man, dass

$(\pm 2, 1)$ Maxima, $(2, \pm 1)$ Minima, weil

$\{(x,y) : G(x,y) = 0\}$ kompakt ist.

85. Geg.: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, NB.: $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

Ges.: siehe 84

$$F(x,y,z,\lambda) := x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(x^4 + y^4 + z^4 - 1\right)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x\left(1 - 2\lambda x^2\right) \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = 2y\left(1 - 2\lambda y^2\right) \qquad (2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = 2z\left(1 - 2\lambda z^2\right) \qquad (3)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = x^4 + y^4 + z^4 - 1 \qquad (4)$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ F1: $x = 0$

F2: $x = \sqrt{1/2\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1/2x^2$

F1: $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ F1.1: $y = 0$

F1.2: $y = \sqrt{1/2\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1/2y^2$

F1.1 $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ F1.1.1: $z = 0$

F1.1.2: $z = \sqrt{1/2\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1/2z^2$

F1.1.1 $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ ↯

F1.1.2 $\overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/2 \Rightarrow z = \pm 1$

F1.2 $\overset{(3)}{\Rightarrow} 2z(y^2 - z^2) \Rightarrow$ F1.2.1: $z = 0$

F1.2.2: $y = -z$

F1.2.3: $y = z$

F1.2.1 $\overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/2 \Rightarrow y = \pm 1$

F1.2.2 $\overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm 1/\sqrt[4]{2}$, $z = \mp 1/\sqrt[4]{2}$

F1.2.3 $\overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/\sqrt{2} \Rightarrow y = z = \pm 1/\sqrt[4]{2}$

$$F2 \overset{(2)}{\Rightarrow} F2.1: \; y = 0$$

$$F2.2: \; x = -y$$

$$F2.3: \; x = y$$

$$F2.1 \overset{(3)}{\Rightarrow} F2.1.1: \; z = 0$$

$$F2.1.2: \; x = -z$$

$$F2.1.3: \; x = z$$

$$F2.1.1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$F2.1.2 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt[4]{2}, \; z = \mp 1/\sqrt[4]{2}$$

$$F2.1.3 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/\sqrt{2} \Rightarrow x = z = \pm 1/\sqrt[4]{2}$$

$$F2.2 \overset{(3)}{\Rightarrow} F2.2.1: \; z = 0$$

$$F2.2.2: \; x = -z, \; y = z$$

$$F2.2.3: \; x = z, \; y = -z$$

$$F2.2.1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt[4]{2}, \; y = \mp 1/\sqrt[4]{2}$$

$$F2.2.2 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = \sqrt{3/4} \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt[4]{3}, \; y = z = \mp 1/\sqrt[4]{3}$$

$$F2.2.3 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = \sqrt{3/4} \Rightarrow x = z = \pm 1/\sqrt[4]{3}, \; y = \mp 1/\sqrt[4]{3}$$

$$F2.3 \overset{(4)}{\Rightarrow} F2.3.1: \; z = 0$$

$$F2.3.2: \; x = y = -z$$

$$F2.3.3: \; x = y = z$$

$$F2.3.1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = 1/\sqrt{2} \Rightarrow x = y = \pm 1/\sqrt[4]{2}$$

$$F2.3.2 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = \sqrt{3/4} \Rightarrow x = y = \pm 1/\sqrt[4]{3}, \; z = \mp 1/\sqrt[4]{3}$$

$$F2.3.3 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda = \sqrt{3/4} \Rightarrow x = y = z = \pm 1/\sqrt[4]{3}$$

$\Rightarrow$ Kandidaten $= \{(\pm 1, 0, 0), \ldots, \{(\pm 1/\sqrt[4]{2}; \pm 1/\sqrt[4]{2}, 0); \ldots$
$; (\pm 1/\sqrt[4]{2}, \pm 1/\sqrt[4]{2}, 0), \ldots, (\pm 1/\sqrt[4]{3}, \pm 1/\sqrt[4]{3}, \pm 1/\sqrt[4]{3})\}$

Wenn $G(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - 1$,

$dG(x,y,z) = 4(x^3, y^3, z^3) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = 0$,

aber $G(0,0,0) \neq 0$.

Ww.: Durch Einsetzen, sieht man, dass
$(\pm 1/\sqrt[4]{3}, \pm 1/\sqrt[4]{3}, \pm 1/\sqrt[4]{3})$ Maxima und
$(\pm 1, 0, 0), \ldots$ Minima sind, weil
$\{(x,y,z) : G(x,y,z) = 0\}$ kompakt ist.

86. Geg.: $f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$, NB.: $x + y - 2 = 0$

Ges.: siehe 85

$$F(x,y,\lambda) := \sqrt{6 - x^2 - y^2} - \lambda(x + y - 2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{6 - x^2 - y^2}} + \lambda \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{1}{y \cdot \sqrt{6 - x^2 - y^2}} + \lambda \qquad (2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x + y - 2 \qquad (3)$$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} x = y \overset{(3)}{\Longrightarrow} (x,y) = (1,1)$$

87. Geg.: $f(x,y) = x^2 - y^2$, NB.: $y - x^2 = 0$, $x,y > 0$

Ges.: siehe 86

$$F(x,y,\lambda) := x^2 - y^2 - \lambda(y - x^2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x(1+\lambda) \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda \qquad (2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = y - x^2 \Leftrightarrow x^2 = y \qquad (3)$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ F1: $x = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} y = 0$ ↯

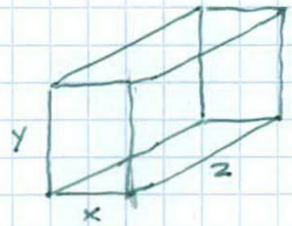
F2: $\lambda = -1 \overset{(2)}{\Rightarrow} y = 1/2 \overset{(3), NB}{\Rightarrow} x = 1/\sqrt{2}$

88. Geg.: Container Volumen ... $36\,m^3$

Fläche oben, seite ... $3\,€/m^2$

Fläche unten ... $5\,€/m^2$

Ges.: x, y, z, sodass Container billig



$V = xyz = 36\,m^3$

Gesamtkosten $(x,y,z) = 3xz + 2(3xy + 3yz) + 5xz$

$= 6xy + 6yz + 8zx.$

$F(x,y,z,\lambda) := 6xy + 6yz + 8zx - \lambda(xyz - 36)$

$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 6y + 8z - \lambda yz \quad (1)$

$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = 6(x + z) - \lambda xz \quad (2)$

$0 = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = 6y + 8x - \lambda xy \quad (3)$

$0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) \overset{!}{=} xyz - 36 \quad (4)$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} x,y,z \neq 0 \quad \left.\begin{array}{l} \overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda = 6/z + 8/y \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda = 6/z + 6/x \\ \overset{(3)}{\Rightarrow} \lambda = 6/x + 8/y \end{array}\right\} \Rightarrow x = z = 3/4 \cdot y$$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} (x,y,z) = (3,4,3)$

89. Geg.: $f(x,y,z) = xy + yz$, NB.: $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

Ges.: siehe 87

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + yz - \underbrace{(\lambda_1, \lambda_2)}_{\lambda} \begin{pmatrix} xy - 1 \\ y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = y(1-\lambda_1) \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = x(1-\lambda_1) + z - 2\lambda_2 y \qquad (2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = y - 2\lambda_2 z \qquad (3)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x,y,z,\lambda) = xy - 1 \qquad (4)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}(x,y,z,\lambda) = y^2 + z^2 - 1 \qquad (5)$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ F1: $y = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lightning$

F2: $\lambda_1 = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_2 = z/2y \overset{(3)}{\Rightarrow} y = \pm z$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} (y,z) = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) \overset{(4)}{\Rightarrow} x = \pm\sqrt{2}$

90. Gg.: $R = \langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot \rangle$ Ring,

$I \in Sub(R)$ ideal $:\Leftrightarrow \forall i \in I, x \in R: ix \in I$,

I_{max} ideal, maximal $:\Leftrightarrow \nexists J \neq R$ ideal: $I_{max} \subsetneq J$

Zz.: $\forall k \in \mathbb{N}: I_k := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_k = 0\}$

1, $I_k \in Sub(R)$: ✓

2, I_k ideal: ✓

3, I_k maximal: d.h. $I(I_k \dot\cup \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}) = R$, wobei $x_k \neq 0$

d.h. wir konstruieren e_k durch dividieren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch x_k und subtrahieren mit einem geeigneten $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I_k$.

Zz.: $(1)_{n\in\mathbb{N}} \notin K$ nichttriviales Ideal, $K \subseteq I_{max}$ maximal;

- Gelte $(1)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ Ideal, so wäre $K = R$, da $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Einselement ist.

- Sei $D = (\{I : I$ nichttriviales Ideal von $R\}, \subseteq)$ unsere Halbordnung und $T \subseteq D$ eine nichtleere Teilkette.

Für $S := \bigcup_{Y\in T} Y$, gilt offensichtlich $\forall Y \in T: Y \subseteq S$, also ist S eine obere Schranke.

$\forall x, y \in S: \exists Y_1, Y_2 \in T: x \in Y_1, y \in Y_2$. Weil T totalgeordnet ist, gelte oBdA. $x \in Y_1 \subseteq Y_2 \ni y, x$.

Also $x+y, xy \in Y_2 \subseteq S$.

$\forall s \in S, x \in R \; \exists Y \in T: sx \in Y \subseteq S$.

Trivialerweise, gilt $S \neq \emptyset$, und $S \neq R$. Sonst $\exists Y \in T: (1)_{n\in\mathbb{N}} \in Y \subseteq S$, aber dann wäre Y nichttrivial.

Also folgt aus dem LvZ, dass K in einem maximalen Ideal enthalten ist.

Zz.: $I_e := \mathbb{R}^{\langle \mathbb{N} \rangle}$ nicht maximales Ideal, in maximalem Ideal ungleich I_k, $k \in \mathbb{N}$, enthalten;

- I_e nichttriviales Ideal: ✓

I_e nicht maximal: Betrachte $I(I_e \dot\cup [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}])$, wobei

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \in 2\mathbb{N} \\ 0, & n \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}.$$

- Laut vorher, ist $I_e \subseteq I_{max}$.

$\forall k \in \mathbb{N}: I_e \nsubseteq I_k$: ✓