Eigenwertberechnung mithilfe des Lanczos-Verfahren (Handout)

Göth Christian Moik Matthias Sallinger Christian

13. Januar 2021

1 Lemmata und Sätze

Satz 1.1 (Konvergenz der Eigenwerte hermitscher Matrizen)**.** Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ und der zugehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_n$. Für $1 \leq m < n$ werden die Eigenwerte der linearen Abbildung $\mathcal{A}_m : \mathcal{K}_m(A, v_0) \to \mathcal{K}_m(A, v_0)$, die durch $v \rightarrowtail \mathcal{P}_m A v$ gegeben ist, mit $\lambda_1^{(m)} \geq \lambda_2^{(m)} \geq \cdots \geq \lambda_m^{(m)}$ bezeichnet. Dabei ist v_0 ein beliebiger Startvektor, der nicht orthogonal zu den ersten $m-1$ Eigenvektoren von A ist. Dann gilt

$$0 \leq \lambda_i - \lambda_i^{(m)} \leq (\lambda_i - \lambda_n)(\tan\theta_i)^2 \kappa_i^{(m)} \left(\frac{1}{T_{m-i}(\gamma_i)}\right)^2, \quad i = 1, \ldots, m-1 \tag{1}$$

wobei θ_i der Winkel zwischen u_i und v_0, also

$$\tan\theta_i := \frac{\|(\mathrm{id} - \mathcal{P}_{u_i})v_0\|}{\|\mathcal{P}_{u_i} v_0\|},$$

wobei $\mathcal{P}_{u_i}$ die Projektion auf u_i ist,

$$\gamma_i := 1 + 2\frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_n}$$

und

$$\kappa_1^{(m)} := 1, \quad \kappa_i^{(m)} := \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(m)} - \lambda_n}{\lambda_j^{(m)} - \lambda_i}\right)^2, \quad i = 2, \ldots, m.$$