6.1 HALLO HAMILTON-JACOBI. DAS FREIE TEILCHEN

Die Hamilton-Jacobi Gleichung hat generell mehrere Lösungen. Zeigen Sie für ein freies Teilchen, $H(q,p) = p^2/2m$, dass sowohl

a)

$$S_1(q, \alpha_1, t) = \frac{m(q-\alpha_1)^2}{2t} \tag{6.1}$$

b) als auch

$$S_2(q, \alpha_2, t) = q\sqrt{2m\alpha_2} - \alpha_2 t \tag{6.2}$$

Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung sind. Finden Sie die Lösungen $q(t)$. Was sind α_1 und α_2? (Diese Größen haben eine anschauliche Interpretation.)

Hamilton-Jacobi equation
$$\frac{\partial}{\partial t}S(\mathbf{q},t) = -H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right)$$

a) $\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, \alpha_1, t) = \frac{m(q-\alpha_1)}{t}$

$$\partial_t S_1(q,\alpha_1,t) = -\frac{m(q-\alpha_1)^2}{2t^2} = -\left(\frac{m(q-\alpha_1)}{t}\right)^2 \frac{1}{2m} = -\left(\frac{\partial S}{\partial q}(q,\alpha_1,t)\right)^2 \frac{1}{2m} = -H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,\alpha_1,t)\right)$$

$$\beta_1 = \partial_{\alpha_1} S_1(q,\alpha_1,t) = -\frac{m(q-\alpha_1)}{t} \Rightarrow -\beta_1 t = mq - m\alpha_1 \Rightarrow q(t) = \frac{m\alpha_1 - \beta_1 t}{m} = \alpha_1 - \frac{\beta_1}{m}t$$

α_1 ... Startposition des Teilchens

β_1 ... klassischer Impuls des Teilchens.

b) $\frac{\partial S_2}{\partial q}(q,\alpha_2,t) = \sqrt{2m\alpha_2}$

$S_2(q, \alpha_2, t) = q\sqrt{2m\alpha_2} - \alpha_2 t$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t}(q,\alpha_2,t) = -\alpha_2 = -\left(\sqrt{2m\alpha_2}\right)^2 \frac{1}{2m} = -\left(\frac{\partial S_2}{\partial q}(q,\alpha_2,t)\right)^2 \frac{1}{2m} = -H\left(q, \frac{\partial S_2}{\partial q}(q,\alpha_2,t)\right)$$

$$\beta_2 = \partial_{\alpha_2} S_2(q,\alpha_2,t) = \frac{q}{2}\frac{1}{\sqrt{2m\alpha_2}}2m - t = \frac{q\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} - t \Rightarrow q\sqrt{m} = (\beta_2 + t)\sqrt{2\alpha_2} \Rightarrow q(t) = (\beta_2+t)\sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}$$

α_2 ... könnte das die Energie sein ?

β_2 ... ?

6.2 HÜPFENDES TEILCHEN AUF VERTIKALEM ZYLINDER I

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im homogenen Schwerefeld (g) auf einem unendlich hohen Zylinder. Weiters nehmen wir an dass das Teilchen bei $z = 0$ elastisch wieder nach oben reflektiert wird. Sie können daher das System (zwischen zwei Reflektionen) mit folgender Hamiltonfunktion beschreiben:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz \qquad (6.3)$$

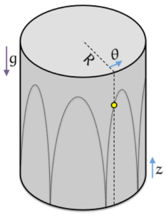


FIGURE 6.1: *Teilchen auf dem Zylinder*

a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Jacobi Gleichung für die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2, t)$?

a) $\partial_t S(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2, t) = -H\left(z, \frac{\partial S}{\partial \theta}, \frac{\partial S}{\partial z}\right) = -\frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - mgz$

Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial}{\partial t}S(\mathbf{q}, t) = -H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right)$$

b) Wählen Sie den unten stehenden Separationsansatz und lösen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung.

$$S(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2, t) = W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2) + W_z(z, \alpha_1, \alpha_2) - Et$$

Identifizieren Sie dabei die folgenden Separationskonstanten:

$$\alpha_1 = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 + mgz$$

b) $-E = \partial_t S = -\frac{1}{2mR^2}(\partial_\theta S)^2 - \frac{1}{2m}(\partial_z S)^2 - mgz = -\frac{1}{2mR^2}(\partial_\theta W_\theta)^2 - \frac{1}{2m}(\partial_z W_z)^2 - mgz$

$\Rightarrow \frac{1}{2mR^2}(\partial_\theta W_\theta)^2 + \frac{1}{2m}(\partial_z W_z)^2 + mgz = E$

Betrachte: $\frac{1}{2mR^2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2m}(\partial_z W_z)^2 + mgz = E \Leftarrow \partial_z W_z = \sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{1}{2mR^2}\alpha_1^2 - mgz}$

$\alpha_1 \ldots$ Winkelgeschwindigkeit

$\Rightarrow W_z = \sqrt{2m}\int\sqrt{E - \frac{\alpha_1^2}{2mR^2} - mgz}\, dz = -\frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(E - \frac{\alpha_1^2}{2mR^2} - mgz\right)^{3/2} + C_1$

Betrachte: $\frac{1}{2mR^2}(\partial_\theta W_\theta)^2 + \alpha_2 = E \Leftarrow \partial_\theta W_\theta = \sqrt{2mR^2(E-\alpha_2)} \Rightarrow W_\theta = \int\sqrt{2mR^2(E-\alpha_2)}\, d\theta = \theta\sqrt{2mR^2(E-\alpha_2)} + C_2$

$\alpha_2 \ldots$ potentielle Energie

c) Zeigen Sie ausgehend von Ihrer Lösung der H-J Gleichung dass die Koordinaten $\theta(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ und $z(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ folgende Form annehmen:

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{mR^2}t$$
$$z(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \frac{\alpha_2}{mg} - \frac{g}{2}(\beta_2 + t)^2$$

$$\frac{1}{2mR^2}\alpha_1^2 + \alpha_2 = E$$

$S = W_\theta + W_z - Et = \theta\sqrt{2mR^2(E-\alpha_2)} - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(E - \frac{\alpha_1^2}{2mR^2} - mgz\right)^{3/2} - Et = \theta\sqrt{2mR^2\left(\frac{1}{2mR^2}\alpha_1^2\right)} - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}(\alpha_2 - mgz)^{3/2} - \frac{1}{2mR^2}\alpha_1^2 t - \alpha_2 t$

$= \theta\alpha_1 - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}(\alpha_2 - mgz)^{3/2} - \frac{1}{2mR^2}\alpha_1^2 t - \alpha_2 t$

$\beta_1 = \partial_{\alpha_1} S = \theta - \frac{1}{mR^2}\alpha_1 t \Rightarrow \theta = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{mR^2}t$

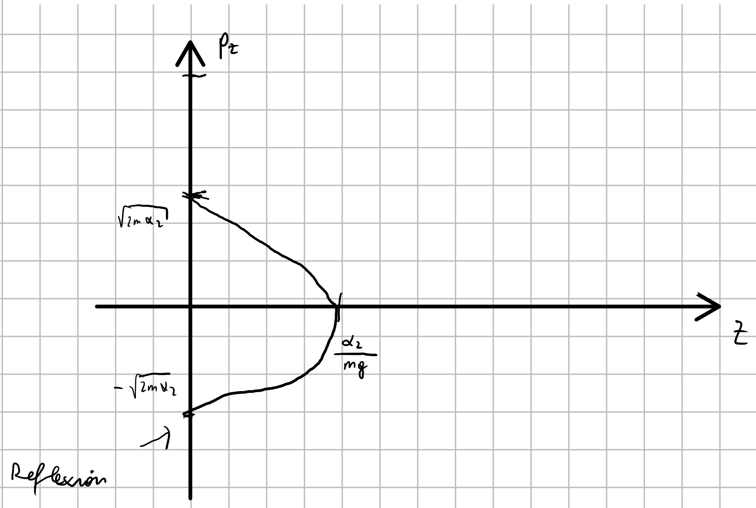
$\beta_2 = \partial_{\alpha_2} S = -\frac{\sqrt{2m}}{mg}\sqrt{\alpha_2 - mgz} - t \Rightarrow \alpha_2 - mgz = \frac{m^2g^2}{2m}(\beta_2 + t)^2 \Rightarrow z = \frac{\alpha_2}{mg} - \frac{g}{2}(\beta_2 + t)^2$

6.3 HÜPFENDES TEILCHEN AUF VERTIKALEM ZYLINDER II

Mit den unten stehenden Lösungen aus 6.2 können Sie dieses Beispiel unabhängig von 6.2 rechnen und auf Wirkungs-Winkel Variablen $(\phi_z, \phi_\theta, I_z, I_\theta)$ transformieren.

$$p_z = \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2 g z} \qquad p_\theta = \alpha_1$$

a) Fertigen Sie ein Phasenraumportrait für den z Freiheitsgrad an (z-p_z Diagram mit repräsentativen Trajektorien). An welchen Stellen machen sich hier die Reflexionen des Teilchens bemerkbar?



b) Berechnen Sie die Wirkungsintegrale

$$I_z = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}_z} p_z\,dz \qquad I_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}_\theta} p_\theta\,d\theta$$

wobei $\mathcal{C}_z$ und $\mathcal{C}_\theta$ geschlossene Trajektorien im Phasenraum sind.
Hinweis: Die $\mathcal{C}_z$ sind hier durch die Reflexionen des Teilchens an $z = 0$ geschlossen.

$$I_z = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\alpha_2}{mg}} \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2 g z}\,dz = \left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_2 - 2m^2 g z\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{z=\frac{\alpha_2}{mg}}^{0} = \frac{1}{\pi\, 3m^2 g}\left(2m\alpha_2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_1\,d\theta = \alpha_1$$

c) Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(I_z, I_\theta)$ als Funktion der Wirkungsvariablen?

$$I_z = \frac{1}{3\pi m^2 g}\left(2m\alpha_2\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow I_z^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\pi 3 m^2 g}\right)^{\frac{2}{3}} 2m\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{I_z^{\frac{2}{3}}}{2m}\left(\frac{1}{\pi 3 m^2 g}\right)^{-\frac{2}{3}} = I_z^{\frac{2}{3}}\frac{1}{2m}\left(3\pi m^2 g\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} I_z^{\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{3}}\left(3\pi \cancel{g}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$I_\theta = \alpha_1$$

$$p_z = \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2 g z} \qquad p_\theta = \alpha_1$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz$$

also $p_z = \sqrt{I_z^{\frac{2}{3}} m^{\frac{4}{3}}\left(3\pi \cancel{g}\right)^{\frac{2}{3}} - 2m^2 g z}$ und $p_\theta = I_\theta$ und daher

$$H = \frac{I_\theta^2}{2mR^2} + \frac{1}{2m}\left(I_z^{\frac{2}{3}} m^{4/3}\left(3\pi g\right)^{2/3} - 2m^2 g z\right) + mgz = \frac{I_\theta^2}{2mR^2} + \frac{1}{2} I_z^{\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{3}}\left(3\pi g\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$W = W_\theta + W_z = \theta\, \alpha_1 - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(\alpha_2 - mgz\right)^{3/2} = \theta\, I_\theta - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}\,g}\left(\frac{1}{2} I_z^{\frac{2}{3}}\, m^{\frac{1}{3}} (3\pi g)^{\frac{2}{3}} - mgz\right)^{3/2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_\theta} = \theta \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial W}{I_\theta} = \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial H}{\partial I_z} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial I_z} = \frac{\partial}{\partial I_z}\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{3}\sqrt{I_z}\, m^{\frac{1}{3}} \left(3\pi g\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial I_\theta} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial I_\theta} = \frac{\partial}{\partial I_\theta}\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{mR^2} I_\theta \qquad z = \frac{\alpha_2}{mg} - \frac{g}{2}\left(\beta_2 + t\right)^2 = \frac{1}{2mg} I_z^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow H(I_z, I_\theta) = -\frac{1}{2mR^2} I_\theta^2 - \frac{1}{2} I_z^{\frac{2}{3}}\, m^{\frac{1}{3}} \left(3\pi g\right)^{\frac{2}{3}}$$

Betrachten Sie das reduzierte Einteilchenproblem mit reduzierter Masse μ im Potential $V = -K/r$. Die Bewegungsebene sei als x-y-Ebene gewählt, so dass die Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$H = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{p_y^2}{2\mu} - \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Der Drehimpuls zeigt in z-Richtung $L_z = xp_y - p_x y$ und der Laplace-Runge-Lenz-Vektor liegt in der x-y-Ebene mit Komponenten

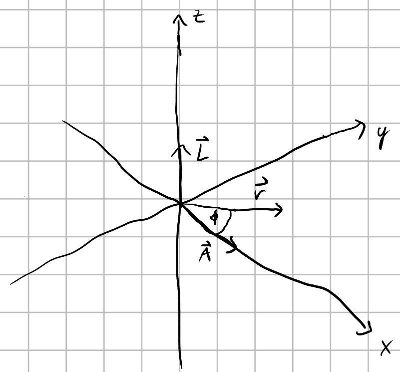
$$\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mu K}{r}\mathbf{r}.$$

$|\vec r| = r$

$|\vec L| = L$

$|\vec A| = A$

Wir drehen das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_x$.



a) Zeigen Sie dass sich $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ in Polarkoordinaten schreiben lässt als

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = Ar\cos(\phi) = L^2 - \mu K r \qquad (6.4)$$

wobei $\phi = 0$ in x-Richtung fällt.

a) $\vec A\cdot\vec r = (\vec p\times\vec L)\cdot\vec r - \frac{\mu K}{r}\underbrace{|\vec r|^2}_{=r^2} = \vec L\cdot\underbrace{(\vec r\times\vec p)}_{=\vec L} - \mu K r = |\vec L|^2 - \mu K r = L^2 - \mu K r$ und

$\vec A\cdot\vec r = A(\vec e_x\cdot\vec r) = Ar\cos(\phi)$

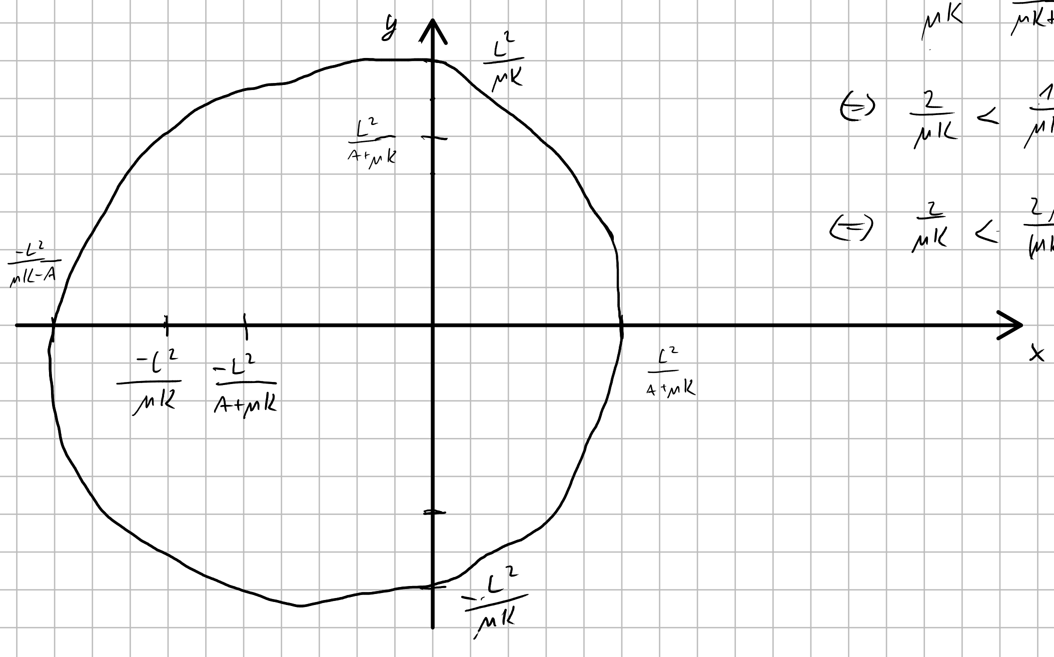
b) Verwenden Sie obiges Resultat um die Bahngleichung $r(\varphi)$ zu bestimmen. Charakterisieren Sie die Kurve mittels der Parameter $d = r(\phi = \pi/2)$ und der (numerischen) Exzentrizität $e = d/r(\phi = 0) - 1$.

b) $Ar\cos(\phi) = L^2 - \mu K r \Leftrightarrow r(A\cos(\phi) + \mu K) = L^2 \Leftrightarrow r(\phi) = L^2(A\cos(\phi) + \mu K)^{-1}$

$d := r(\phi = \frac{\pi}{2}) = L^2(\mu K)^{-1}$ und $e := d\,[r(\phi=0)]^{-1} - 1 = L^2(\mu K)^{-1}[L^2(A+\mu K)^{-1}]^{-1} - 1 = \frac{A+\mu K}{\mu K} - 1 = \frac{A}{\mu K}$

c) Skizzieren Sie die Bahn in den Fällen $0 < e < 1$ und $e > 1$.

c) $\cdot)\ 0 < e < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{A}{\mu K} < 1$



$\frac{L^2}{\mu K} - \frac{L^2}{\mu K + A} < \frac{L^2}{\mu K - A} - \frac{L^2}{\mu K}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\mu K} < \frac{1}{\mu K + A} + \frac{1}{\mu K - A}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\mu K} < \frac{2\mu K}{(\mu K)^2 - A^2} \Leftrightarrow -2A^2 < 0$

e) 1 ako $\frac{A}{\mu K} > 1$