Sie sitzen mit einem Pendel in der U-Bahn. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ erfahren Sie die konstante Beschleunigung $a\mathbf{e}_x$ in x-Richtung. Das Pendel hat die Länge l und Masse m und befindet sich ursprünglich in Ruhe. Neben der Beschleunigung soll auch die Gravitationskraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$ einbezogen werden.

a) Transformieren Sie in ein geeignetes Bezugssystem und in geeignete generalisierte Koordinaten und schreiben Sie die Bewegungsgleichung an.

b) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen und lösen Sie sie. Wie groß ist die Schwingungsperiode T? Sollten Sie mit (a) Probleme haben, starten Sie nun mit einem eindimensionalen Pendel im homogenen Gravitationsfeld mit initialer Auslenkung Θ_0.

c) Aus welchen Termen setzt sich die Gesamtenergie des Pendels zusammen? Damit berechnen Sie nun die Maximalgeschwindigkeit (relativ zur U-Bahn) als Funktion der Anfangsauslenkung Θ_0.

BONUS) (bei *a)-c)* gekreuzt) Bestimmen Sie die Schwingungsperiode T eines Pendels abhängig von (m, l, Θ_0) experimentell (ohne konstante Beschleunigung, nicht in der U-Bahn). Fassen Sie ihre Ergebnisse in einer kurzen Tabelle zusammen und nehmen Sie ein Foto oder (kurzes) Video von ihrem Pendel auf. *App-Tipp: Phyphox.*

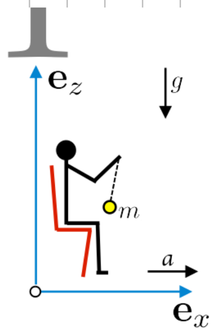
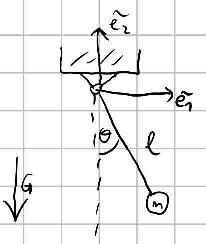
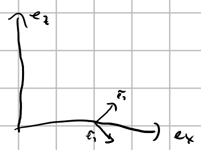


FIGURE 1.1: *Sie sitzen mit Ihrem Pendel in der Wiener U-Bahn.*

a)



wobei $G = -m\begin{pmatrix}0\\\sqrt{a^2+g^2}\end{pmatrix}$



$\tilde e_2(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+g^2}}\begin{pmatrix}a\\g\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}t^2$

$\tilde e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+g^2}}\begin{pmatrix}g\\-a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}t^2$

$f(r) = |r|^2 - \ell^2$, $M = \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid f(z) = 0 \} = \{ (\ell \sin\theta, -\ell\cos(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$

$\forall\, \theta \in \mathbb{R}: \quad f(\ell \sin(\theta), \ell\cos(\theta)) = 0$ ✓

M ist also als Nullstellenmenge von f eine 1-dim differenzierbare Mannigfaltigkeit,

ein Normalvektor ist gegeben durch $\nabla f(x_1, x_2) = 2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, also ist ein Tangentialvektor gegeben durch

$t = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$, d.h. $t(\theta) = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\\sin(\theta)\end{pmatrix}$

Wir wissen $m \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r \circ \theta) = G + F^a$

und daher $\underbrace{m \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\circ\theta)\cdot t}_{= \ell\ddot\theta} = \underbrace{G\cdot t}_{= -m\sqrt{a^2+g^2}\sin(\theta)} + \underbrace{F^a\cdot t}_{=0}$

Vorlesung ↗

also $m\,\ell\ddot\theta = -m\sqrt{a^2+g^2}\sin(\theta)$

b) linearisierte Schwingungsgl.: $\ell\ddot\theta = -\underbrace{\sqrt{a^2+g^2}}_{b:=}\theta$

also $\theta(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\tfrac{b}{\ell}}\,t\right) + c_2\cos\left(\sqrt{\tfrac{b}{\ell}}\,t\right)$

Periode T erfüllt $\sqrt{\frac{b}{\ell}}\,T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi\sqrt{\ell}}{\sqrt{b}}$

$\cos(\theta) = \frac{\ell - h}{\ell} = 1 - \frac{h}{\ell}$

c) $E = E_{pot} + E_{kin} = m\sqrt{a^2+g^2}\,h(\theta) + \frac{m v^2}{2}$, wobei $h(\theta) = \ell(1-\cos(\theta))$

$\parallel$

$m\sqrt{a^2+g^2}\,h(\theta_0) \Rightarrow 2b\,(h(\theta_0) - h(\theta)) = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2}\sqrt{b}\sqrt{h(\theta_0) - h(\theta)}$, für $h(\theta) = 0$, also $\theta = 0$

gilt $v_{max} = \sqrt{2}\sqrt{b}\sqrt{h(\theta_0)}$

Ein Teilchen mit Masse m und Positionskoordinate $x \in (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a})$ bewege sich in folgendem Potential

$$V(x) = \frac{k}{2a^2}\frac{1}{\cos^2(ax)} - \frac{k}{2a^2}$$

a) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen bei $x(0) = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit v_0. Verwenden Sie die Energieerhaltung um die Geschwindigkeit $v(v_0, x)$ als Funktion von Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Position x zu bestimmen. Wo liegen die Umkehrpunkte $\pm x_U(v_0)$?

b) Zeigen Sie, dass für die „inverse" Beziehung $t(x)$ die folgende Relation gilt

$$t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(v_0, x')} dx'$$

und berechnen Sie damit die Trajektorie $x(t)$ für $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

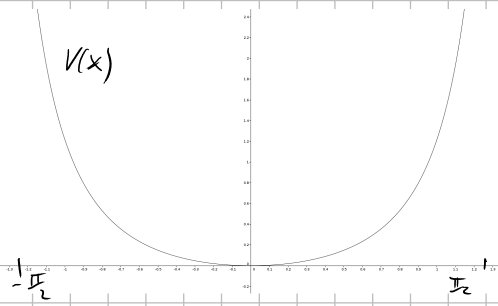
HINWEIS: Formen Sie auf folgendes Integral um:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + b - \frac{b}{\cos^2(ax')}}} dx' = \frac{1}{a\sqrt{1+b}} \arcsin\left(\sqrt{1+b}\sin(ax)\right) \quad \text{für} \quad b \geqslant 0$$

c) Wie groß ist die Schwingungsperiode? Machen Sie eine Reihenentwicklung in den Grenzfällen sehr großer und sehr kleiner Anfangsgeschwindigkeit v_0. Skizzieren oder plotten Sie $V(x)$. Erklären Sie damit das Verhalten der Schwingungsperiode.

$$E = mV + \frac{mv^2}{2} = m\underbrace{V(0)}_{=0} + \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - V \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2V}$$



$k = a = 1$

$$v(x_u) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{v_0^2 - 2V(x_u)} = 0 \Leftrightarrow v_0^2 - 2V(x_u) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2V(x_u) = v_0^2 \Leftrightarrow \frac{k}{a^2\cos^2(ax_u)} - \frac{k}{a^2} = v_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{a^2\cos^2(ax_u)} = v_0^2 + \frac{k}{a^2} \Leftrightarrow \cos^2(ax_u) = \frac{k}{a^2(v_0^2 + \frac{k}{a^2})} = \frac{k}{v_0^2 a^2 + k}$$

$$\Leftrightarrow x_u = \pm\frac{1}{a} \arccos\left(\sqrt{\frac{k}{k + v_0^2 a^2}}\right)$$

b) $\dot{x} = v(x) \Rightarrow \frac{\dot{x}}{v(x)} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{v(x(\tau))} d\tau = t \Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{v(\xi)} d\xi = t$ mit $\gamma : [0, t] \mapsto (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}) : s \mapsto x(s)$

UNERLAUBT: $\frac{dx}{dt} = v(x) \Rightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \Rightarrow t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(x)} dx$

$$t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(\xi)} d\xi = \int_0^x (v_0^2 - 2V(\xi))^{-\frac{1}{2}} d\xi = \int_0^x \left(v_0^2 - \frac{k}{a^2\cos^2(a\xi)} + \frac{k}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

$$= \frac{1}{v_0}\int_0^x \Big(1 + \underbrace{\frac{k}{a^2v_0^2}}_{b:=} - \frac{k}{a^2v_0^2}\frac{1}{\cos^2(a\xi)}\Big)^{-\frac{1}{2}} d\xi = \frac{1}{v_0 a}(1+b)^{-\frac{1}{2}} \arcsin\left(\sqrt{1+b}\sin(ax)\right)$$

also $t v_0 a\sqrt{1+b} = \arcsin\left(\sqrt{1+b}\sin(ax)\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+b}}\sin\left(v_0 a\sqrt{1+b}\,t\right) = \sin(ax)$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+b}}\sin\left(v_0 a\sqrt{1+b}\,t\right)\right)$$

c) $T v_0 a \sqrt{1+b} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{v_0 a \sqrt{1+b}} = \frac{2\pi}{v_0 a} \left(1 + \frac{k}{a^2 v_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{v_0^2 a^2 + k}}$

Taylor-Reihe bei $v_0 = 0$

$$T(v_0) = \frac{2\pi}{k^{1/2}} - \frac{\pi a^2}{k^{3/2}} v_0^2 + \frac{3\pi a^4}{4 k^{5/2}} v_0^4 + \mathcal{O}(v_0^5)$$

für sehr kleine v_0: $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ ... entspricht harmonischen Oszillator

für sehr große v_0 ist $\left(1 + \frac{k}{a^2 v_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1$ also

$T(v_0) \approx \frac{2\pi}{v_0 a}$ ... entspricht der Reflexion an der Wand.

1.3 TEILCHEN IN EINER HÜGELLANDSCHAFT

Ein Teilchen in zwei Dimensionen mit Masse m gleite reibungsfrei auf einer Hügellandschaft

$$y = \cos(x).$$

Durch eine Zwangsbedingung kann das Teilchen diese Welle nicht verlassen. Zusätzlich wirke auf das Teilchen die Gravitationskraft $\mathbf{F}_G = -mg\mathbf{e}_y$.

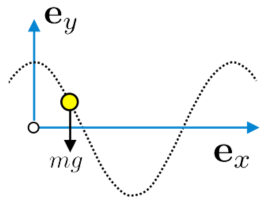


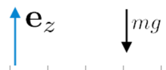
FIGURE 1.2: *Teilchen im homogenen Gravitationsfeld und mit Zwangsbedingung* $y = \cos(x)$.

a) Wie laut die Zwangsbedingung $f(x, y) = 0$ an die kartesischen Koordianten (x, y) des Teilchens? Handelt es sich dabei um eine holonome Zwangsbedingung? Ist die Zwangsbedingung skleronom oder rheonom?

b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Zeigen Sie, dass eine geeignete generalisierte Koordinate gegeben ist durch $q_1 = \eta \in \mathbb{R}$ mit

$$x(\eta) = \eta$$
$$y(\eta) = \cos(\eta)$$

c) Schreiben Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\mathbf{F}^R$ an und projizieren Sie diese auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\eta$. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung der generalisierten Koordinate $\ddot{\eta} = f(\eta, \dot{\eta})$. (Sie sollen diese nicht lösen.)



a) $f(x,y) := y - \cos(x)$; $df(x,y) = (\sin(x), 1) \neq (0,0)$

$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ ist 1-dim. Mannigfaltigkeit

also holonom, skleronom

Satz 5.1.1. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine C^k-Funktion, $k \geq 1$, für die 0 ein regulärer Wert der Funktion F ist, d.h. für die dF auf der Nullstellenmenge M von F immer vollen Rang $n-m$ hat. Dann ist M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Satz 5.1.9. *Ist eine Mannigfaltigkeit implizit als Nullstellenmenge der Funktion F gegeben, so ist der Gradient $\nabla F(\mathbf{x}^0)$ für $F(\mathbf{x}^0) = 0$ ein Normalvektor auf den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit in $\mathbf{x}^0$.*

b) das System hat 1 Freiheitsgrad

$f(\eta, y) = 0 \Leftrightarrow y = \cos(\eta)$

c) Der Normalvektor ist gegeben durch $\nabla f(\eta, \cos(\eta)) = \begin{pmatrix} \sin(\eta) \\ 1 \end{pmatrix}$

also ist ein normierter Tangentialvektor gegeben durch $t(\eta) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\eta)}}}_{c:=} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(\eta) \end{pmatrix}$

es gilt $m\ddot{r} = -mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + F^R$

$r(s) = \begin{pmatrix} s \\ \cos(s) \end{pmatrix}$

und $m\frac{\partial^2 r\circ\eta}{\partial t^2} \cdot t\circ\eta = -mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t\circ\eta + \underbrace{F^R \cdot t\circ\eta}_{=0}$, wobei $r' = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(s) \end{pmatrix}$, $r'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(s) \end{pmatrix}$

sowie $\frac{\partial^2 r\circ\eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(r'(\eta)\dot{\eta}) = r''(\eta)(\dot{\eta})^2 + r'(\eta)\ddot{\eta} = (\dot{\eta})^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\eta) \end{pmatrix} + \ddot{\eta}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(\eta) \end{pmatrix}$

also $m\frac{\partial^2 r\circ\eta}{\partial t^2} \cdot t\circ\eta = -(\dot{\eta})^2 c\cos(\eta)\sin(\eta) + \ddot{\eta}c + \ddot{\eta}c\sin^2(\eta)$

$\parallel$

$-mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t\circ\eta = c\,mg\sin(\eta)$

1.4 STARRER ROTOR (HANTEL)

Gegeben sind 2 Teilchen mit Masse m_1, m_2 im homogenen Gravitationsfeld welche durch eine starre Verbindung der Länge l verbunden sind (eine Hantel).

a) Wie lauten die Zwangsbedingungen an die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2), der 2 Teilchen Teilchen? Handelt es sich dabei um holonome Zwangsbedingungen? Sind die Zwangsbedingungen skleronom oder rheonom? Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

b) Die Hantel wird nun durch ein $1/r$ Potential ersetzt, d.h. die kleine Masse m_1 umkreist die große Masse m_2 wie in einem Gravitationsfeld. Wie lauten nun die Antworten auf *a)*?

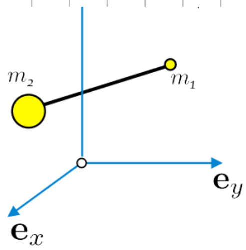


FIGURE 1.3: *Starrer Rotor (Hantel) im homogenen Schwerefeld.*

a) $f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R} : (r,s) \mapsto |r-s|^2 - \ell^2 = \sum_{i=1}^{3} (r_i - s_i)^2 - \ell^2$

$df(r,s) = 2\left((r_1-s_1), (r_2-s_2), (r_3-s_3), -(r_1-s_1), -(r_2-s_2), -(r_3-s_3)\right) = 0 \Leftrightarrow r = s$

aber $r=s$ nicht in Nullstellenmenge von f

also: $M := \{z \in \mathbb{R}^6 \mid f(z) = 0\}$ ist 5-dim. diffbare Mannigfaltigkeit

f ist holonom und skleronom

b) Wir haben nun ein Potential $V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: r \mapsto \frac{c}{r}$ mit $c \in \mathbb{R}$

$d: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: (r_1, r_2) \mapsto |r_1 - r_2|$

$F(r_1, r_2) = -\nabla V \circ d\,(r_1, r_2) = \frac{c\,(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3}$

$f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}: (r_1, r_2) \mapsto F(r_1, r_2) + F(r_2, r_1)$

es gilt $\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$: $f(r_1, r_2) = 0$

also ist die Zwangsbedingung keine Einschränkung, d.h. sie kann nicht holonom und daher nicht skleronom sein

daher: 6 Freiheitsgrade

Oder: Nimmt man das Umkreisen wörtlich und nimmt an auf m_2 wirkt keine Kraft so ergeben sich 2 Freiheitsgrade ...