Satz 2.8.4 Ein Unterraum $S := \sum_{i\in I} U_i$ ist genau dann direkte Summe der Unterräume U_i von V, falls jeder Vektor $x \in S$ genau eine Darstellung der Form $x = \sum_{i\in I} u_i$ besitzt, wobei $u_i \in U_i$ und $u_i = 0$ für fast alle $i \in I$.

Beweis. (a) Gegeben seien eine direkte Summe und für $x \in S$ die Darstellungen

$$x = \sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i'$$

der Form (2.25). Das ist „⇒". In (2.25) gilt $\forall i \in I$: $u_i, u_i' \in U_i$ und $u_i = 0$ für fast alle $i \in I$, also sind die oberen Summen beide „endlich". Durch Subtraktion erhalten wir

$$0 = \sum_{i\in I} (u_i - u_i').$$

Die endlichen Summen werden, weil sie die selbe Index-Menge I haben, zusammengezogen.
Wir wählen nun einen Index $j \in I$ fest aus. Wir wollen folgendes zeigen:

$$\forall j \in I: \sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i' \in S \Rightarrow u_j = u_j'.$$

Dann gilt

$$-(u_j - u_j') = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} (u_i - u_i').$$

Das folgt aus der oberen Formel

$$\mathcal{O} = \sum_{i \in I} (u_i - u_i') = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} (u_i - u_i') + (u_j - u_j').$$

Der Vektor $-(u_j - u_j') \in U_j$ liegt daher auch in $\sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i$.
Ersteres folgt daraus, dass $u_j, u_j' \in U_j$ und U_j ein Unterraum ist. Weil das $\forall i \in I$ gilt, folgt auch letzteres

$$-(u_j - u_j') = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} (u_i - u_i') \in \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i.$$

Mit (2.27) folgt daher $u_j = u_j'$. Laut (2.27) gilt

$$\forall j \in I : U_j \cap \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i \right) = \{\mathcal{O}\},$$

also $-(u_j - u_j') = \mathcal{O} \Rightarrow u_j = u_j'$. Da dies für alle $j \in I$ gilt, stimmen die beiden Darstellungen von x überein. $\forall j \in I : u_j = u_j'$.

(6) Vorausgesetzt sei nun die Eindeutigkeit der Darstellung.
„$\Leftarrow$": Wir zeigen (2.27). Wir wählen einen beliebigen Index $j \in I$ und dann einen beliebigen Vektor

$$x \in U_j \cap \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i \right).$$

Es muss $x = \mathcal{O}$ folgen. Wir setzen $u_j := x$ und $u_i := \mathcal{O}$ für alle $i \neq j$. Das geht, weil $x, u_j \in U_j$ und $\forall i \in I : \mathcal{O} \in U_i$, weil sie Unterräume sind.
Wegen $x \in U_j$ gilt daher

$$x = \sum_{i \in I} u_i \text{ mit } u_i \in U_i \text{ für alle } i \in I.$$

$$x = \sum_{i\in I} u_i = u_j + \underbrace{\sum_{i\in I\setminus\{j\}} u_i}_{=\mathcal{O}}.$$

Andererseits zeigt $x \in \sum_{i\in I\setminus\{j\}} U_i$ die Existenz einer Darstellung

$$x = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} u_i' \text{ mit } u_i' \in U_i \text{ für alle } i\in I \text{ und } u_j' = \mathcal{O}.$$

Also $x = \sum_{i\in I} u_i'$, mit $u_j' = \mathcal{O}$. Die Eindeutigkeit der Darstellung ergibt somit $x = u_j = u_j' = \mathcal{O}$. ... weil

$$\sum_{i\in I} u_i = \underbrace{\sum_{i\in I\setminus\{j\}} u_i}_{=\mathcal{O}} + u_j = x = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} u_i' = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} u_i' + \underbrace{u_j'}_{=\mathcal{O}} = \sum_{i\in I} u_i',$$

und die Eindeutigkeit auf den Anfang und das Ende der Gleichung angewendet wird, also $\forall i\in I: u_i = u_i'$. $\square$