3. B6. Alle Semiringe i.w. S., die 2^Ω mit $\Omega = \{1, 2, 3\}$ erzeugen.

Definition 2.9: Υ heißt Semiring i.w. S. $:\Leftrightarrow$

(i) $A, B \in \Upsilon \Rightarrow A \cap B \in \Upsilon$.

(ii) $A \subseteq B \in \Upsilon \Rightarrow \exists C_1, \dots, C_n \in \Upsilon : B \setminus A = \sum_{i=1}^{n} C_i$.

(iii) i.e. S. $:\Leftrightarrow \forall k \leq n : A \cup \sum_{i=1}^{k} C_i \in \Upsilon$.

Ww: Die minimale Teilmenge $\Upsilon_0 \subseteq 2^\Omega$, die 2^Ω durch „$\cup$" erzeugt, ist $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (vgl. Satz 2.7).
Dadurch lassen sich die Semiringe systematisch bestimmen und (ii) wird egal.
Wir wenden im ersten Schritt (i) an und

$\Upsilon_1 := \Upsilon_0 \cup \{\emptyset\}$;

$\Upsilon_{2,1} := \Upsilon_1 \cup \{\{1, 2\}\}$,
$\Upsilon_{2,2} := \Upsilon_1 \cup \{\{2, 3\}\}$,
$\Upsilon_{2,3} := \Upsilon_1 \cup \{\{3, 1\}\}$;

$\Upsilon_{3,1} := \Upsilon_{2,1} \cup \{\{2, 3\}\}$,
$\Upsilon_{3,2} := \Upsilon_{2,2} \cup \{\{3, 1\}\}$,
$\Upsilon_{3,3} := \Upsilon_{2,3} \cup \{\{1, 2\}\}$;

$\Upsilon_4 := 2^\Omega \setminus \Omega$;

Diese Semiringe können nun noch Ω enthalten: Υ^Ω.
(iii) gilt für jene (außer 2^Ω) nicht, da zB.

$\Omega \setminus \{1\} = \{2, 3\} = \{2\} + \{3\} \Rightarrow ↯$

4. Bб.: Alle Urbilder bzgl. f

Ww: $\forall A \in 2^{\mathbb{Z}} : f^{-1}(A) := \{x \in \Omega : f(x) \in A\}$.

x	$f(x)$
-1	4
0	0
1	-2
2	-2
3	0

$f^{-1}\{0\} = \{0, 3\}$,

$f^{-1}\{-2\} = \{1, 2\}$,

$f^{-1}\{4\} = \{-1\}$,

$f^{-1}\{0, -2\} = \{0, 1, 2, 3\}$,

$f^{-1}\{-2, 4\} = \{\pm 1, 2\}$,

$f^{-1}\{4, 0\} = \{-1, 0, 3\}$,

$f^{-1}\{0, -2, 4\} = \Omega$,

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;

Das war $f^{-1}(2^{\mathbb{Z}})$ und laut Satz 2.3, eine σ-Algebra.

5. Zz: $\forall A \in \mathfrak{A} : \mu(A) \geq 0$.

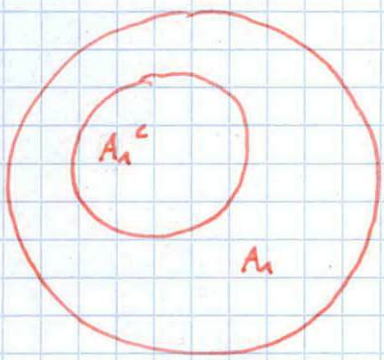
Zz: $\forall n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n : \sum_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mu(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
Sei $n = 2$, so unterscheide (oBdA. $|\Omega| = \infty$)

Fall 1: $|A_1|, |A_2| < \infty$. trivial.

Fall 2: $|A_1|, |A_2^c| < \infty. \Rightarrow |B| = \infty$.

Fall 3: $|A_1^c|, |A_2| < \infty$. analog zu Fall 2.

Fall 4: $|A_1^c|, |A_2^c| < \infty. \Rightarrow |A_1|, |A_2| = \infty$.
Zz: $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$



Wären A_1, A_2 disjunkt, so müsste $A_2 \subseteq A_1^c$ sein $\lightning$

Die Aussage folgt für $n > 2$ induktiv.

μ ist aber nicht σ-additiv, weil

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{n\}) \neq \mu(\sum_{n \in \mathbb{N}} \{n\}) = \mu(\mathbb{N}) = 1, \text{ aber}$$

Zz: μ ist ein Maß $\Leftrightarrow |\Omega| < \infty$.

„$\Rightarrow$" Angenommen, es gäbe „∞" viele „$\neg\infty$" große Mengen in Ω, so wäre deren „$\cup_\infty$" aber „∞" groß $\lightning$

„$\Leftarrow$" $\forall A \in \Omega : |A| < \infty \Leftrightarrow \mu(A) = 0$.

6. B6: alle fehlenden Werte von μ.

Ww:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ ist Inhalt $\Rightarrow$ μ ist additiv

Sei $\mu_i := \mu(\{i\})$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, dann

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 = 3 \\ \mu_1 + \mu_3 = 2 \\ \mu_1 + \mu_4 = 1 \\ \mu_2 + \mu_4 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 3 \\ \mu_3 = 2 \\ \mu_4 = 1 \end{array}\right.$$

Weil $\{1\}, \ldots, \{4\} \in \Upsilon$, muss $R(\Upsilon) = 2^{\{1,2,3,4\}}$, also lassen sich die übrigen Funktionswerte leicht durch die Additivität bestimmen.

7. Zz: $\forall i \in \mathbb{N}: A_i \in \mathcal{R}$.

Vorerst, ist jene Darstellung zu rechtfertigen: $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{p=0}^{2^{i-1}-1} \left(\frac{2p}{2^i}, \frac{2p+1}{2^i}\right] =: B_i \overset{Zz}{=} A_i = \{\omega \in \Omega : a_i(\omega) = 0\}.$$

Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig (oBdA. $i = 1$).

„$\supseteq$" Sei $\omega \in A_i$ beliegig.

Zz: $\omega \in B_i$.

Ww: $a_i(\omega) = 0$ und laut Angabe:

$$\omega = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n(\omega)}{2^n} = \sum_{n<i} \frac{a_n(\omega)}{2^n} + \cancel{\frac{a_i(\omega)}{2^i}} + \sum_{i<n} \frac{a_n(\omega)}{2^n}$$

$$Zz_1: \exists p \in [0, 2^{i-1}-1]_{\mathbb{N}}: \sum_{n<i} \frac{a_n(\omega)}{2^n} = \frac{2p}{2^i}.$$

Wir erweitern mit 2^i

$$\sum_{n<i} \frac{a_n(\omega)}{2^n} = \frac{1}{2^i} \cdot \sum_{n<i} a_n(\omega) 2^{i-n},$$

und schätzen ab

$$0 \leq \underbrace{\sum_{n<i} a_n(\omega) 2^{i-n}}_{\in 2\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{i-1} 2^{i-n} = \sum_{m=0}^{i-1} 2^m = 2\underbrace{(2^{i-1}-1)}_{p_{max}}.$$

$\Rightarrow Zz_1 \Rightarrow \sum \frac{a_n(\omega)}{2^n}$ ist eine untere Schranke eines „Vereinigungs-Intervalls".

$$Zz_2: \sum_{i<n} \frac{a_n(\omega)}{2^n} \leq \sum_{i<n} \frac{1}{2^n} \longrightarrow \frac{1}{2^i} = \frac{2p+1}{2^i} - \frac{2p}{2^i}.$$

Das ist das, was man maximal zur unteren Intervall-Grenze addieren kann und noch immer im Intervall bleiben.

Zz$_3$: $\sum_{i<n} \frac{a_n(\omega)}{2^n} \neq 0$.

„=" träte genau dann zu, wenn $\forall n > i : a_n(\omega) = 0$.
Das geht aber nicht, weil ω sonst so aussähe:

$0. \cdots$ irgendwas $\cdots 1\dot{0} = 0. \cdots 10\dot{1}$

Hier ist irgendwo die i-te Stelle.

„$\subseteq$" Sei $\omega \in A_i^c$ beliebig.
Zz: $\omega \in B_i^c \Leftrightarrow \omega \notin B_i$.
Ww: $a_i(\omega) \neq 0 \Rightarrow a_i(\omega) = 1$ und laut Angabe

$$\omega = \cdots = \sum_{n<i} \frac{a_n(\omega)}{2^n} + \underbrace{\frac{a_i(\omega)}{2^i}}_{1/2^i} + \sum_{i<n} \frac{a_n(\omega)}{2^n}$$

Zz$_1$: $\omega \notin$ „nächst-kleineres Vereinigungsintervall".
Nun gilt, $\exists p \in [0, 2^{i-1} - 1]_{\mathbb{N}}$:

$$\omega \geq \sum_{n<i} \frac{a_n(\omega)}{2^i} + \frac{1}{2^i} = \frac{2p}{2^i} + \frac{1}{2^i} = \frac{2p+1}{2} =$$

„obere Intervallgrenze".

Zz$_2$: $\omega \notin$ „nächst-größeres Vereinigungs-Intervall".
Nun gilt, für dasselbe p von vorher

$$\omega \leq \frac{2p}{2^i} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} = \frac{2(p+1)}{2^i} =$$

„nächste untere Intervallgrenze" ist eine offene!

Zz: $\forall i \in \mathbb{N}: A_i (= B_i) \in \mathcal{R}(\mathcal{T})$,
weil $A_i = B_i$ ist eine endliche „$\cup$" von disjunkten Intervallen aus $\mathcal{T}$.

Zz: $\forall i \in \mathbb{N}: \lambda(A_i) = 1/2$.

$$\lambda(A_i) = \lambda\Big(\bigcup_{p=0}^{2^{i-1}-1} \big(\tfrac{2p}{2^i}, \tfrac{2p+1}{2^i}\big]\Big) = \bigcup_{p=0}^{2^{i-1}-1} \lambda\big(\tfrac{2p}{2^i}, \tfrac{2p+1}{2^i}\big]$$

$$= \sum_{p=0}^{2^{i-1}-1} \frac{2p+1}{2^i} - \frac{2p}{2^i} = \underbrace{\sum_{p=0}^{2^{i-1}-1}}_{(2^{i-1}-1)+1 \text{ viele Summanden}} \frac{1}{2^i} = 2^{i-1} \cdot \frac{1}{2^i} = 1/2$$

Zz: $\forall i,j \in \mathbb{N},\ i \neq j: \lambda(A_i \cap A_j) = 1/4$.

oBdA. $i < j$.

$$\lambda\Big(\bigcup_{p=0}^{2^{i-1}-1} \big(\tfrac{2p}{2^i}, \tfrac{2p+1}{2^i}\big] \cap \bigcup_{q=0}^{2^{j-1}-j} \big(\tfrac{2q}{2^j}, \tfrac{2q+1}{2^j}\big]\Big) =$$

$$\lambda\Big(\bigcup_{p=0}^{2^{i-1}-1} \bigcup_{q=0}^{2^{j-1}-1} \big(\tfrac{2p}{2^i}, \tfrac{2p+1}{2^i}\big] \cap \big(\tfrac{2q}{2^j}, \tfrac{2q+1}{2^j}\big]\Big) =$$

$$\sum_{p=0}^{2^{i-1}-1} \sum_{q=0}^{2^{j-1}-1} \lambda\Big(\underbrace{\big(\tfrac{2p}{2^i}, \tfrac{2p+1}{2^i}\big]}_{I_p} \cap \underbrace{\big(\tfrac{2q}{2^j}, \tfrac{2q+1}{2^j}\big]}_{I_q}\Big) = \dots$$

Man überlegt sich leicht, dass $I_p \cap I_q = \emptyset$ xor $I_p \supseteq I_q$.

Für wieviele I_q, trifft „$\subseteq$" zu? Also:

Für wieviele $q \in [0, 2^{j-1}-1]_{\mathbb{N}}$, gilt für festes p:

$$\frac{2p}{2^i} \leq \frac{2q}{2^j} \leq \frac{2p+1}{2^i} \Leftrightarrow 2^{j-i} \cdot p \leq q \leq 2^{j-i} \cdot p + 2^{j-i-1}$$

$\Rightarrow$ für 2^{j-i-1} viele q.

$$\dots = \sum_{p=0}^{2^{i-1}-1} 2^{j-i-1} \cdot 2^{-j} = \sum_{p=0}^{2^{i-1}} \frac{1}{2^{i+1}} = 1/4.$$