Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 03 – Der Satz von Baire"

---

03 / 1: Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Zeige die folgende Version des Satzes von Baire: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, und seien V_n, $n \in \mathbb{N}$, offene dichte Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in X.

03 / 2: Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Zeige, dass die Mächtigkeit einer algebraischen Basis von X als $\mathbb{C}$-Vektorraum entweder endlich oder überabzählbar ist.

Hinweis. Zeige, dass ein linearer Teilraum $Y \subsetneq X$ keinen inneren Punkt hat.

03 / 3: Eine Menge heisst G_δ–Menge, wenn sie der abzählbare Durchschnitt offener Mengen ist. Zeige, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen dichten G_δ-Mengen eines vollständigen metrischen Raumes wieder eine dichte G_δ-Menge ist.

03 / 4:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$ an denen f stetig ist eine G_δ–Menge ist.

03 / 5:* Zeige, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt die an allen rationalen Punkten stetig aber an allen irrationalen Punkten unstetig ist. Finde eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die an allen irrationalen Punkten stetig aber an allen rationalen Punkten unstetig ist.

Hinweis. Ist die Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ (welche ja dicht liegt) eine G_δ-Menge?
