2.9.11 Lemma (Lemma vom iterierten Supremum). Seien M, N zwei nichtleere Mengen und $f: M \times N \to \mathbb{R}$, sodass $\{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\}$ nach oben beschränkt ist. Man nennt eine solche Funktion nach oben beschränkt. Dann gilt

$$\sup\{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\} =$$
$$\sup\{\sup\{f(m,n) : m \in M\} : n \in N\} =$$
$$\sup\{\sup\{f(m,n) : n \in N\} : m \in M\}.$$

Sind umgekehrt alle Mengen $\{f(m,n) : m \in M\}$, $n \in N$, nach oben beschränkt genauso wie $\{\sup\{f(m,n) : m \in M\} : n \in N\}$, bzw. gilt entsprechendes mit M und N vertauscht, so ist auch $\{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\}$ nach oben beschränkt, womit obige Gleichung wieder gilt.[14]
Eine entsprechende Aussage gilt fürs Infimum.

[14] Also gilt obige Gleichung auch für nicht notwendigerweise nach oben beschränkte Funktionen, wenn man auch den Wert $+\infty$ zulässt. Und $-\infty$ für das Infimum.

Beweis: Wir setzen $s = \sup\{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\}$ und für festes $q \in N$ auch $s_q = \sup\{f(m,q) : m \in M\}$. Die Menge $\{f(m,q) : m \in M\}$ und ihr Supremum s_q hängen also von q ab. Aus $\{f(m,q) : m \in M\} \subseteq \{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\}$ folgt dann $s_q \leq s$ für jedes $q \in N$; also auch $\sup\{s_q : q \in N\} \leq s$. Jedes Supremum einer Teilmeng ist natürlich kleiner oder gleich dem der Obermenge. Gäbe es eines, das größer wäre, dann gäbe es ein Element der Teilmenge, das nicht in der Obermenge enthalten wäre. $\sup\{s_q : q \in N\}$ ist das größte

s_q. Weil alle $s_q \leq s$, gilt das auch für dieses.
Umgekehrt folgt für festes $(m,n) \in M \times N$, dass $f(m,n) \in \{f(m,q) : m \in M\}$, wenn nur $q = n$. Das $n \in N$ ist beliebig. Weil $q = n$, ist jedes $q \in N$ und somit folgt der Rest. Für dieses q ist $f(m,n) \leq s_q$; also gilt auch $f(m,n) \leq \sup\{s_q : q \in N\}$. s_q (ein Supremum) ist ja eine obere Schranke der Menge aller $f(m,n)$, wobei n ein festes $q \in N$ ist. Das größte all dieser (möglicherweis verschiedenen) Suprema ist ist es auch (eine obere Schranke). Da $(m,n) \in M \times N$ beliebig war, folgt schließlich $s \leq \sup\{s_q : q \in N\}$.
Also war auch $f(m,n)$ beliebig und die Eigenschaft gilt für (die Menge) alle(r) $f(m,n)$, einschließlich der kleinsten Oberen Schranke s. Gäbe es eine kleinere obere Schranke s_q von $\{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\}$, so wäre s kein Supremum mehr (selbe Argumentation vorher (ups)).
Jetzt muss man nur noch in die Ergebnisse der beiden Absätze einsetzen (für s und s_q) und die Antisymmetrie erledigt den Rest. $\square$