Beispiel 1.2. Seien $c, d, e > 0$, dann ist $cn^2+dn+e = \Theta(n^2)$. Einerseits ist nämlich $cn^2+dn+e \leq (c+d+e)n^2$ für $n \geq 1$. Andererseits ist auch $cn^2 \leq cn^2 + dn + e$ für $n \geq 0$.

In dieser Vorlesung wird diese Notation meist für positive Funktionen verwendet werden; dann sind die Betragsstriche überflüssig. In der Literatur wird diese Notation oft sinngemäß auch für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder Funktionen anderen Typs verwendet. Deshalb wird in der Literatur häufig der Typ von f gar nicht erst angegeben. Zu dieser Definition lassen sich unmittelbar die folgenden Beobachtungen machen.

Lemma 1.2. *Für alle Funktionen f, g gilt:*

1. $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$
2. $g \in O(f)$ *genau dann wenn* $f \in \Omega(g)$
3. $g \in O(f)$ *genau dann wenn* $\limsup_{n\to\infty} |\frac{g(n)}{f(n)}| < \infty$
4. $g \in \Omega(f)$ *genau dann wenn* $\liminf_{n\to\infty} |\frac{g(n)}{f(n)}| > 0$

wobei wir voraussetzen dass f und g nur endlich viele Nullstellen haben.

Beweis. 1. folgt direkt aus der Definition. Für 2. sei $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0$: $|g(n)| \leq c \cdot |f(n)|$. Sei $d = \frac{1}{c}$, dann gilt $\forall n \geq n_0$: $d \cdot |g(n)| \leq |f(n)|$, d.h. also $f \in \Omega(g)$. Für die Gegenrichtung setzen wir $c = \frac{1}{d}$.

Für 3. sei wieder $c > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0$: $|g(n)| \leq c \cdot |f(n)|$, d.h. $|\frac{g(n)}{f(n)}| \leq c$. Also ist $\{|\frac{g(n)}{f(n)}| \mid n \geq n_0\}$ im kompakten Intervall $[0, c]$ enthalten, besitzt also einen größten Häufungspunkt in $[0, c]$. Für die Gegenrichtung sei $n_0 - 1$ die größte Nullstelle von f. Dann ist $\left(|\frac{g(n)}{f(n)}|\right)_{n\geq n_0}$ beschränkt: falls $\left(|\frac{g(n)}{f(n)}|\right)_{n\geq n_0}$ nämlich unbeschränkt wäre, dann wäre $\limsup_{n\to\infty} |\frac{g(n)}{f(n)}| = \infty$. Also $\exists c > 0$ so dass $|\frac{g(n)}{f(n)}| \leq c$, d.h. $|g(n)| \leq c \cdot |f(n)|$ für $n \geq n_0$. 4. folgt aus 2. und 3. □

Oft schreiben wir $g(n) = O(f(n))$ statt $g \in O(f)$ um das Rechnen mit Termen wie z.B. $n^2+O(n)$ zu ermöglichen.

Satz 1.3. *Sei $f(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$, $a_k \neq 0$, dann $f(n) = \Theta(n^k)$.*

Beweis. Man beachte dass

$$\left|\frac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{n^k}\right| = \left|a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \frac{a_{k-2}}{n^2} + \cdots + \frac{a_0}{n^k}\right| \longrightarrow |a_k| \text{ für } n \to \infty.$$

Daraus folgt mit Lemma 1.2 das Resultat. □

Wir sagen dass eine Funktion f von polynomialem Wachstum ist falls ein $k \geq 1$ existiert so dass $f(n) = O(n^k)$.

Wir können nun die Laufzeit von Einfügesortieren im besten Fall angeben als $\Theta(n)$, jene im schlechtesten Fall als $\Theta(n^2)$ und jene im (uniform verteilten) Durchschnittsfall ebenfalls als $\Theta(n^2)$. Oft werden wir uns bei Angabe der Laufzeit im schlechtesten Fall auf die obere Schranke, d.h. $O(\cdot)$ beschränken und umgekehrt bei der Laufzeit im besten Fall auf die untere Schranke $\Omega(\cdot)$. Wenn wir also sagen dass der Algorithmus $\mathcal{A}$ Laufzeit $O(f)$ hat ist damit gemeint, dass er im schlechtesten Fall Laufzeit $O(f)$ hat und analog für Ω und den besten Fall.

Eng in Zusammenhang mit dieser asymptotischen Notation steht auch die Folgende:

Definition 1.5. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren

$$o(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon |g(n)| \leq c \cdot |f(n)|\}.$$

Falls $g \in o(f)$ sagen wir dass g *asymptotisch kleiner als* f ist.

$$\omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon c \cdot |f(n)| \leq |g(n)|\}.$$

Falls $g \in \omega(f)$ sagen wir dass g *asymptotisch größer als* f ist.

Lemma 1.3. *Für alle Funktionen f, g gilt:*

1. $o(f) \subseteq O(f)$
2. $\omega(f) \subseteq \Omega(f)$
3. $f \notin o(f)$
4. $f \notin \omega(f)$
5. $g \in o(f)$ *genau dann wenn* $f \in \omega(g)$
6. $o(f) \cap \omega(f) = \emptyset$
7. $g \in o(f)$ *genau dann wenn* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = 0$
8. $g \in \omega(f)$ *genau dann wenn* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = \infty$

wobei wir wieder annehmen, dass f und g nur endlich viele Nullstellen haben.

Beweis. 1. und 2. folgen unmittelbar aus der Definition. Für 3. setzen wir $c = \frac{1}{2}$ und für 4. setzen wir $c = 2$. 5. kann analog zu Lemma 1.2 gelöst werden indem c auf $\frac{1}{d}$ und d auf $\frac{1}{c}$ gesetzt wird. 6. folgt durch Wahl geeigneter Konstanten ebenfalls direkt aus der Definition. Für 7. beachte man, dass die Definition von $g \in o(f)$ geschrieben werden kann als $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| \leq \varepsilon$. Für 8. schreibt man die Definition von $g \in \omega(f)$ als $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leq \varepsilon$, d.h. $\left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$. □

Beispiel 1.3. Aus der Analysis wissen wir dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $c > 1$, d.h. also $n^k \in o(c^n)$.

Definition 1.6. Für $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \sim g$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Falls $f \sim g$ sagen wir dass f und g *asymptotisch äquivalent sind.*

Kapitel 2

Elementare Kombinatorik

In diesem Kapitel werden wir einige elementare Begriffe und Resultate der Kombinatorik und der Graphentheorie kennen lernen bzw. wiederholen, da diese für das Studium von Algorithmen eine wichtige Grundlage bilden.

2.1 Abzählprobleme

Abzählprobleme sind klassische kombinatorische Fragestellungen. Bei einem Abzählproblem fragt man sich wie viele Elemente eine bestimmte endliche Menge hat. Abzählprobleme spielen bei der Analyse von Algorithmen oft eine wichtige Rolle. Dabei finden, für endliche Mengen A und B, oft die folgenden Überlegungen Anwendung:

1. Summenregel: Falls $A \cap B = \emptyset$, dann $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. Produktregel: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
3. Gleichheitsregel: Falls eine Bijektion $f : A \to B$ existiert, dann ist $|A| = |B|$.

Für eine endliche Menge A wird eine bijektive Abbildung $\pi : A \to A$ auch als *Permutation* bezeichnet. Zur Erleichterung der Notation, geht man oft davon aus, dass $A = \{1, \dots, n\}$. Eine solche Permutation kann in einer *zweizeiligen Darstellung* als

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Eine alternative Darstellung ist die *Zyklendarstellung* als

$$\pi = (a_1\ \pi(a_1)\ \cdots\ \pi^{l_1-1}(a_1))(a_2\ \pi(a_2)\ \cdots\ \pi^{l_2-1}(a_2))\cdots(a_k\ \pi(a_k)\ \cdots\ \pi^{l_k-1}(a_k))$$

wobei l_i definiert ist als das kleinste l so dass $\pi^l(a_i) = a_i$ und a_i so aus $\{1, \dots, n\}$ gewählt wird, dass es in keinem der vorherigen Zyklen auftritt. Damit kommt also jedes $a \in \{1, \dots, n\}$ genau ein Mal in der Zyklendarstellung vor.

Beispiel 2.1. Die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

wird in Zyklendarstellung als (164)(2)(35) geschrieben.

Die Anzahl von Permutation von $\{1,\ldots,n\}$ ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$. Die Funktion $n \mapsto n!$ kann auch rekursiv definiert werden durch $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1)n!$. Die Menge aller Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$ wird auch als S_n bezeichnet. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass S_n mit der Komposition von Funktionen eine Gruppe bildet.

Eine *Variation ohne Wiederholung* besteht aus der k-fachen Auswahl eines von n Objekten wobei das Objekt nach seiner Auswahl nicht mehr für spätere Auswahlen zur Verfügung steht. Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung ist $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Beispiel 2.2. Für die ersten k Stellen einer Permutation $\pi \in S_n$ werden k aus n Objekten ohne Wiederholung ausgewählt, es gibt also $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Für $k = n$ ergibt sich dann wie gehabt $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

Eine *Variation mit Wiederholung* besteht aus der k-fachen Auswahl eines von n Objekten wobei das Objekt nach seiner Auswahl für spätere Auswahlen zur Verfügung steht. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung ist $n \cdot n \cdots n$, d.h. n^k.

Beispiel 2.3. Wenn ein Münzwurf entweder Kopf oder Zahl ergibt und eine Münze k mal hintereinander geworfen wird, gibt es insgesamt 2^k verschiedene Versuchsausgänge. Die Menge der Versuchsausgänge, d.h., der k-fachen Wiederholung von “Kopf” oder “Zahl” steht in Bijektion zu der Menge der Zeichenketten der Länge k die nur aus 0 und 1 bestehen, notiert als $\{0,1\}^k$. Diese wiederum steht in Bijektion zu den Teilmengen einer k-elementigen Menge. Somit gibt es auch davon jeweils genau 2^k.

Eine *Kombination ohne Wiederholung* besteht aus der k-fachen Auswahl eines von n Objekten wobei das Objekt nach seiner Auswahl nicht mehr für spätere Auswahlen zur Verfügung steht und die Reihenfolge der Wahl der Objekte irrelevant ist. Wir wählen also eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge. Die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung ist $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$, sie ergibt sich durch die Anzahl $\frac{n!}{(n-k)!}$ der Variationen ohne Wiederholung und der Überlegung, dass jeder Kombination $k!$ Variationen entsprechen.

Beispiel 2.4. Bei der Multiplikation von $(x+y)\cdots(x+y) = (x+y)^n$ müssen zur Bestimmung des Koeffizienten von $x^k y^{n-k}$ alle Möglichkeiten in Betracht gezogen werden in n Faktoren k mal x zu wählen und die anderen $n-k$ Mal y. Es gibt $\binom{n}{k}$ solche Möglichkeiten, also ergibt sich der binomische Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Das erklärt auch warum $\binom{n}{k}$ als *Binomialkoeffizient* bezeichnet wird.

Beispiel 2.5. Bei der Lottoziehung “6 aus 45” werden aus 45 Kugeln 6 Stück gezogen wobei die Reihenfolge für die Ermittlung des Gewinners egal ist. Es gibt also $\binom{45}{6} = 8145060$ Möglichkeiten für den Ausgang der Ziehung.

Eine *Kombination mit Wiederholung* besteht aus der k-fachen Auswahl eines von n Objekten wobei das Objekt nach seiner Auswahl für spätere Auswahlen zur Verfügung steht und die Reihenfolge der Wahl der Objekte irrelevant ist. Wir wählen also eine k-elementige Multimenge[1] mit Träger $\{1,\ldots,n\}$. Eine solche Multimenge kann geschrieben werden als Tupel $(a_1,\ldots,a_k)$ wobei $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq n$. Nun gibt es eine Bijektion von der Menge der k-elementigen Multimengen mit Träger $\{1,\ldots,n\}$ auf die k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n+k-1\}$, die durch

$$(a_1,\ldots,a_k) \mapsto (a_1, a_2+1,\ldots,a_k+k-1)$$

[1] Sei X eine Menge. Eine Multimenge M mit Träger X ist gegeben durch ihre charakteristische Funktion $\chi_M : X \to \mathbb{N}$. Eine Multimenge kann also, anders als eine Menge, ein Element mehrfach enthalten. Man definiert $|M| = \sum_{x\in X} \chi_M(x)$.

gegeben ist. Dann ist nämlich $1 \leq a_1 < a_2 + 1 < \cdots < a_k + k - 1 \leq n + k - 1$. Die Anzahl k-elementiger Teilmengen von $\{1, \ldots, n + k - 1\}$ kennen wir bereits: $\binom{n+k-1}{k}$.

Beispiel 2.6. Bei einem Brettspiel würfelt ein Spieler mit zwei Würfeln gleichzeitig. Bei den möglichen Würfen handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholung mit $n = 6$ und $k = 2$. Es gibt also $\binom{7}{2} = 21$ verschiedene Würfe.

Lemma 2.1. *Sei $1 \leq i \leq j \leq n$, sei $\pi \in S_n$ uniform gewählt, dann ist*

$$\mathrm{W}(\pi(j) \textit{ ist das } i\textit{-t-größte Element in } \{\pi(1), \ldots, \pi(j)\}) = \frac{1}{j}.$$

Beweis. 1. Die Anzahl der Tupel $(\pi(1), \ldots, \pi(j))$ ist $\frac{n!}{(n-j)!}$. 2. Die Anzahl der Tupel $(\pi(1), \ldots, \pi(j))$ in denen $\pi(j)$ am i-t-größten ist ergibt sich a) durch Auswahl der Menge $\{\pi(1), \ldots, \pi(j)\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, dafür gibt es $\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$ Möglichkeiten, b) durch Fixierung von $\pi(j)$ als das i-t-größte Element und c) durch Auswahl einer Reihenfolge für $\{\pi(1), \ldots, \pi(j-1)\}$, dafür gibt es $(j-1)!$ Möglichkeiten, d.h. also insgesamt $\frac{n!(j-1)!}{(n-j)!j!} = \frac{n!}{(n-j)!j}$. Wir erhalten also

$$\frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{n! \cdot (n-j)!}{(n-j)! \cdot j \cdot n!} = \frac{1}{j}.$$

□

Für zwei endliche Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ gilt wie erwähnt $|A \cup B| = |A| + |B|$. Falls $A \cap B \neq \emptyset$ werden durch $|A| + |B|$ die Element im Durchschnitt doppelt gezählt. Durch Korrektur dieser Doppelzählung erhalten wir $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Im Fall von drei endlichen Mengen A, B und C werden durch $|A| + |B| + |C|$ alle Elemente die in zwei Mengen liegen zu oft gezählt. Eine erste Korrektur ergibt $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$. Nun werden aber die Elemente im Schnitt von drei Mengen gar nicht gezählt. Durch einen weiteren Korrekturschritt erhalten wir also $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Im Allgemeinen gilt:

Satz 2.1 (Prinzip von Inklusion und Exklusion)**.** *Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen, dann ist*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Beweis. Sei $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, $S = \{i \in \{1 \ldots, n\} \mid x \in A_i\}$ und $s = |S|$. Auf der rechten Seite wird x jetzt genau dann in einem Durchschnitt gezählt wenn $I \subseteq S$ und zwar, je nach Kardinalität von I entweder positiv oder negativ. Das Element x wird also

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s+1}\binom{s}{s} = \sum_{i=1}^{s} \binom{s}{i}(-1)^{i+1}$$

mal gezählt. Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatz $\sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-1)^i = (1-1)^s = 0$, sowie, nach Multiplikation mit -1, auch $\sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-1)^{i+1} = 0$. Weiters ist $\sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-1)^{i+1} = -1 + \sum_{i=1}^{s} \binom{s}{i}(-1)^{i+1}$. Damit wird x also $\sum_{i=1}^{s} \binom{s}{i}(-1)^{i+1} = 1$ mal gezählt. □