Eigenwertberechnung mithilfe des Lanczos-Verfahrens (Handout)

Göth Christian Moik Matthias Sallinger Christian

15. Juli 2021

1 Definitionen, Lemmata und Sätze

Definition 1.1. Das Paar $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^2(\Omega)\backslash\{0\}$ heisst ein Eigenpaar, wenn es eine Lösung des Eigenwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

ist, wobei ν der äußere Normalenvektor an $\partial\Omega$ sei.

Eigenwerte für das Gebiet $\Omega = (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$:

$$\lambda_{n,m} = \pi^2(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Lemma 1.2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ die Eigenwerte von A (gemäß Vielfachheit gezählt) und $u_1, \ldots, u_n$ die zugehörigen normierten Eigenvektoren. Dann gilt

$$\lambda_1 = \max_{v\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}} \frac{(Av, v)}{(v, v)}, \quad \lambda_k = \max_{\substack{v\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\} \\ (u_j,v)=0, j=1,\ldots,k-1}} \frac{(Av, v)}{(v, v)}, \quad k = 2, \ldots, n \tag{2}$$

und

$$\lambda_k = \max_{\substack{S\subset\mathbb{C}^n \\ \dim S=k}} \min_{v\in S\backslash\{0\}} \frac{(Av, v)}{(v, v)}, \quad k = 1, \ldots n. \tag{3}$$

Für $v \neq 0$ nennt man $\frac{(Av,v)}{(v,v)}$ den Rayleigh-Quotienten von v.

Definition 1.3 (Krylov-Raum)**.** Sei $v_0 \in \mathbb{C}^n$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann bezeichnet

$$\mathcal{K}_m(A, v_0) := \textbf{span}\{v_0, Av_0, \ldots, A^{m-1}v_0\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

den Krylov-Raum von A und v_0. Es bezeichne $\mathcal{P}_m \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{K}_m$, also die eindeutige hermitesche Matrix mit $\mathcal{P}_m^2 = \mathcal{P}_m$ und $\mathcal{R}(\mathcal{P}_m) = \mathcal{K}_m$.

Lemma 1.4. Sei Π_m der Raum der Polynome in einer Veränderlichen mit maximalem Grad m. Dann ist $v \in \mathcal{K}_m(A, v_0) \subset \mathbb{C}^n$ genau dann, wenn ein Polynom $p \in \Pi_{m-1}$ existiert mit $v = p(A)v_0$.
Ist A diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_n$, dann existiert eine eindeutige Darstellung $v_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$ und es gilt

$$v \in \mathcal{K}_m \Leftrightarrow \exists\ p \in \Pi_{m-1} : v = \sum_{j=1}^n p(\lambda_j)\alpha_j u_j.$$

Definition 1.5. Für $m \in \mathbb{N}$ sind die Chebyshev-Polynome $T_m \in \Pi_m$ definiert druch

$$T_m(x) := \frac{1}{2}((x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Lemma 1.6. Sei $[a, b]$ ein nicht-leeres Intervall in $\mathbb{R}$ und sei $c \geqslant b$. Dann gilt mit $\gamma := 1 + 2\frac{c-b}{b-a} \geqslant 1$

$$\min_{\substack{p \in \Pi_m \\ p(c)=1}} \max_{x \in [a,b]} |p(x)| \leqslant \frac{1}{|T_m(\gamma)|} \leqslant 2(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})^{-m}. \tag{5}$$

Satz 1.7 (Konvergenz der Eigenwerte hermitscher Matrizen)**.** Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ und der zugehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_n$. Für $1 \leqslant m < n$ werden die Eigenwerte der linearen Abbildung $\mathcal{A}_m : \mathcal{K}_m(A, v_0) \to \mathcal{K}_m(A, v_0)$, die durch $v \mapsto \mathcal{P}_m A v$ gegeben ist, mit $\lambda_1^{(m)} \geqslant \lambda_2^{(m)} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m^{(m)}$ bezeichnet. Dabei ist v_0 ein beliebiger Startvektor, der nicht orthogonal zu den ersten $m - 1$ Eigenvektoren von A ist. Dann gilt

$$0 \leqslant \lambda_i - \lambda_i^{(m)} \leqslant (\lambda_i - \lambda_n)(\tan\theta_i)^2 \kappa_i^{(m)} \left(\frac{1}{T_{m-i}(\gamma_i)}\right)^2, \quad i = 1, \ldots, m-1 \tag{6}$$

wobei

$$\tan\theta_i := \frac{\|(\mathrm{id} - \mathcal{P}_{u_i})v_0\|}{\|\mathcal{P}_{u_i} v_0\|}, \quad \gamma_i := 1 + 2\frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_n}$$

und

$$\kappa_1^{(m)} := 1, \quad \kappa_i^{(m)} := \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(m)} - \lambda_n}{\lambda_j^{(m)} - \lambda_i}\right)^2, \quad i = 2, \ldots, m.$$