Differentialgleichungen 1

Prof. Melenk am 21.10.2016

Beispiel 1: Geben Sie eine nichttriviale Funktion F an, so dass die Lösung des AWP

$$(t^4 ln(t) - 2ty^3) + 3t^2y^2y' = 0 \qquad\qquad y(1) = 1$$

die Gleichung $F(t, y(t)) = 0$ erfüllt.
Hinweis: Verwenden Sie einen integrierenden Faktor $\mu(t, y) = \phi(t)$

Beispiel 2: Bestimmen Sie die Greensche Funktion für das RWP

$$-y'' - y < f \qquad\qquad x \in (0, 1) \qquad\qquad y(0) = y'(1) = 0$$

Beispiel 3: Betrachten Sie das ODE Sytem $y' = A(t)y$ mit:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

Eine Lösung ist $\hat{y}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$
Konstruieren Sie ein FS mittels d'Alembert.

Beispiel 4: Betrachten Sie die Gleichung:

$$y'' - 3y' + 2y = 4 + 2\exp(-t)cos(t)$$

Geben Sie die allgemeine Lösung der ODE an. Geben Sie eine Lösung $\hat{y}$ an, die die Bedingung $\lim_{t\to\infty} \hat{y}(t) = 2$ erfüllt.

Beispiel 5: Betrachten sie die 'skalare' Duffing Gleichung:

$$x'' + x + \epsilon x^3 = 0$$

welche mittels y=x' als System 1. Ordnung geschrieben werden kann.

a) Geben Sie die nichtriviale Erhaltungsgröße V(x,y) an,d.h. V ist kontant entlang der Lösungen

b) Skizzieren Sie für $\epsilon > 0$ die Höhenlinien/Konturlinien von V. Tragen Sie die Ruhelagen des Systems ein.

c) zz: Für $\epsilon > 0$ hat das System periodische Lösungen.

d) zz: Für kleine $|\epsilon|$ ist der Ursprung $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ stabile Ruhelage. Ist diese asymptotisch stabil?