Satz 2.5.3 Ist $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, so besitzt jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung als Linearkombination der Form

$$x = \sum_{i\in I} x_i b_i \quad \text{mit } x_i \in K. \tag{2.22}$$

Beweis. Da $(b_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V ist, hat jeder Vektor $x \in V$ mindestens eine Darstellung (2.22). $(b_i)_{i\in I}$ ist definitionsgemäß, laut 2.5.1, genau dann eine Basis von V, falls $[(b_i)_{i\in I}] = V$, also $(b_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem ist, und falls $(b_i)_{i\in I}$ l.u. ist. Das war der „Existenz-Teil". Der „Eindeutigkeits-Teil" folgt. Aus

$$x = \sum_{i\in I} x_i b_i = \sum_{i\in I} x'_i b_i \quad \text{mit } x_i, x'_i \in K$$

folgt

$$\mathcal{O} = \sum_{i\in I} x_i b_i - \sum_{i\in I} x_i' b_i = \sum_{i\in I} (x_i - x'_i) b_i.$$

Das zusammenziehen der Summen (und b_i herausheben) geht, weil I „endlich" ist (fast alle x_i sind 0) und die selbe Menge I steht unter beiden Summen.
Da $(b_i)_{i\in I}$ l.u. ist, gilt $(x_i - x'_i) = 0$ für alle $i \in I$, nach Satz 2.4.5. d.h. der $\mathcal{O}$ lässt sich bloß trivial darstellen $(\forall i\in I: x_i = 0)$. Dass $(b_i)_{i\in I}$ l.u. ist, ist oben bereits begründet worden. Das zeigt die Eindeutigkeit.
... weil $\forall i \in I: x_i - x_i' = 0 \Rightarrow x_i = x_i'$. $\square$