51. Untersuchen Sie die Folge

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{2n^3+5}}{\sqrt[2n+1]{n+2}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$x_n \to 1.$

Beweis: Sei $x_n = \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot b_n^{-1}$.

$$\sqrt[n]{n} \le a_n \le \sqrt[n]{5n^3 + 5n^3} = \sqrt[n]{10n^3} = \sqrt[n]{10} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^3$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \wedge \sqrt[n]{q} \to 1 \text{ für feste } q > 1 \Rightarrow a_n \to 1$$

Hier verwenden wir den Einschluss-Satz, sowie Satz 3.3.5, (iv) und (v). (Für die Prämisse, betrachte man Beispiel 3.3.7, (iii) und (iv).)

$$\sqrt[4]{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[4n]{n} = \sqrt[2n+2n]{n} \le b_n \le \sqrt[n]{2n+2n} = \sqrt[n]{4n} = \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{n}$$

$$\Rightarrow b_n \to 1$$

Hier —″—, sowie Satz 3.3.5, (vii) und (iv).

$$a_n \to 1 \wedge b_n \to 1 \Rightarrow x_n = a_n \cdot b_n^{-1} \to 1$$

Hier verwenden wir Satz 3.3.5, (iv) und (v). $\square$

52. Untersuchen Sie die Folge

$$x_n = \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)\sqrt{n^3+2}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$x_n \to \frac{1}{2}$$

Beweis: $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} = \dfrac{(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3})}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}} =$

$\dfrac{(n^3+1) - n^3}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}}$, also lässt sich x_n wie folgt schreiben:

$$x_n = \frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}}$$

Wenden wir Satz 3.3.2 an mit

$a_n := \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3+1}} = \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{2\sqrt{n^3+1}} \leq x_n \leq b_n := \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3}} =$
$\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{2\sqrt{n^3}}$.

Um $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ zu zeigen, quadrieren wir beide Folgen, um dann mittels Satz 3.3.5 (vii) auf deren Grenzwerte $a = b$ rückschließen zu können.

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2}{4(n^3+1)} \overset{3.3.5(ii)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{4(n^3+1)} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{4(n^3+1)} \overset{3.3.5(iv)}{=}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{n^3}{n^3+1} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^3+1}$.

Wir zeigen also, dass $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^3+1} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3+1} = 0$.

$0 \leq \dfrac{1}{n^3+1} \leq \dfrac{1}{n}$, und nach Satz 3.3.2, sowie $0 \to 0$ und $\frac{1}{n} \to 0$, folgt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0$.

Der erste Grenzwert lässt sich mit diesem Wissen leicht bestimmen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+1)-1}{n^3+1} \overset{3.3.5(ii)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3+1} + \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^3+1} = 1.$$

Somit folgt, dass $\lim_{n\to\infty} (a_n)^2 = \frac{1}{4}$ und daher $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} (b_n)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{4n^3} \overset{3.3.5(ii)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{4n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^3}$$

Wir zeigen also, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

$$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n},$$

—〃— folgt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

Somit folgt, dass $\lim_{n\to\infty} (b_n)^2 = \frac{1}{4}$ und daher $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

Man erinnere sich, dass $a \leq x \leq b$, also $x = \frac{1}{2}$. $\square$

53. Untersuchen Sie die Folge

$$x_n = \left(\frac{n^2+n+4}{n^2+3}\right)^n$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$x_n \to e.$

Beweis: Laut Satz 3.2.8 (iii) gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$.

$$x_n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2+3}\right)^n \geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2+n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{n+2}{n^2+2n+4}\right)^{n+} \leq \left(1+\frac{n+2}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{n+2}{n^2+2n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{(n+2)}{n\cdot(n+2)}\right) \to e \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Daher gilt laut (Einschluss-) Satz 3.3.2, dass $x_n \to e$,
weil $e \leq \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \leq e$. $\square$

54. Untersuchen Sie die Folge

$$x_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n-4}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = e^{-6}.$$

Beweis: $x_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n-4} = \left(\left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-4}.$

$\left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$, weil $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Laut Satz 3.3.5 (v) folgt, dass $\left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right)^3 \to (e^{-2})^3 = e^{-6}$ und laut Satz 3.3.5 (ii) folgt $1 - \frac{2}{n} \to 1$, weil ja $2 \cdot \frac{1}{n} \to 0$ wegen Satz 3.3.5 (iv) und $\frac{1}{n} \to 0$, also ist mit Satz 3.3.5 (v) auch $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-4} \to 1$ und zuletzt mit Satz 3.3.5 (v) auch $x_n \to e^{-6} \cdot 1 = e^{-6}$. $\square$

Anhang: Sei $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ laut Vorlesung gegeben. Und $m := \frac{n}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{x}{n}$, dann

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{m \to \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x}\right)^x = \lim_{m \to \infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}_{e}\right)^x.$$

Wegen Satz 3.3.5 (v) und der Voraussetzung, sowie der Umformung und substitution, gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Das funktioniert, weil $n \to \infty$ und $m \to \infty$ durch $m = \frac{n}{x}$, mit konstantem x, gleichwertig sind.

55. Untersuchen Sie die Folge

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$$

in Abhängigkeit ihres Startwertes $x_0 > 1$ auf Monotonie und Beschränktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

x_n ist mit $1 < x_0 < 2$ streng monoton steigend, mit $1 < x_0 = 2$ konstant und mit $2 < x_0$ streng monoton fallend.
$x_n \to 2$ und ist somit insbesondere, durch Proposition 3.2.13, begrenzt.

Beweis: Wir zeigen das Monotonieverhalten mittels Fallunterscheidung:

Fall 1: $1 < x_0 < 2$:

$$x_n < x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2} \Leftrightarrow x_n^2 - 3x_n + 2 < 0 \qquad (IV_1)$$

Kann durch VI gezeigt werden:

- IA: $x_0^2 - 3x_0 + 2 = (x_0 - 2)(x_0 - 1) < 0$,

wobei $(x_0 - 2) < 0$ und $(x_0 - 1) > 0$, wegen $1 < x_0 < 2$.

- IS: $x_{n+1}^2 - 3_{n+1} + 2 = (3x_n - 2) - 3\sqrt{3x_n - 2} - 2 =$

$3x_n - 3\sqrt{3x_n - 2} = 3\left(x_n - \sqrt{3x_n - 2}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$x_n < \sqrt{3x_n - 2} \Leftrightarrow x_n^2 < 3x_n - 2 \Leftrightarrow x_n^2 - 3x_n + 2 < 0$

$\Leftrightarrow (IV_1)$.

Fall 2: $x_0 = 2$: $x_1 = \sqrt{3x_0 - 2} = 2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2$.

Fall 3: $2 < x_0$:

$x_n > x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2} \Leftrightarrow x_n^2 - 3x_n + 2 > 0 \qquad (IV_2)$

Kann durch –"– :

- IA: $x_0^2 - 3x_0 + 2 = (x_0 - 2)(x_0 - 1) > 0$,

wobei $(x_0 - 2), (x_0 - 1) > 0$, wegen $2 < x_0$.

- IS: $x_{n+1}^2 - 3x_{n+1} + 2 = \dots = 3(x_n - \sqrt{3x_n - 2}) > 0$

$\Leftrightarrow x_n > \sqrt{3x_n - 2} \Leftrightarrow x_n^2 > 3x_n - 2 \Leftrightarrow x_n^2 - 3x_n + 2$

$> 0 \Leftrightarrow (IV_2)$.

Wir zeigen die Konvergenz mittels Substitution. Wegen Satz 3.2.8 (iii) gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} =: x$. Daher

$x = \sqrt{3x - 2} \Leftrightarrow x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{(-3)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - 2} \in \{1, 2\}$.

Wegen des Monotonieverhaltens muss $x \neq 1$, also $x = 2$. $\square$

56. Für $f_0 = f_1 = 1$ wird durch $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ die Fibonaccifolge definiert. Sei für $n \geq 1$ $a_n = f_n / f_{n-1}$. Zeigen Sie die Konvergenz von (a_n) und berechnen Sie den Grenzwert ohne Verwendung einer Expliziten Darstellung von f.

Hinweis: Berechnen Sie die erste Folgeglieder von (a_n) und leiten Sie daraus eine Vermutung f.d. Monotonieverhalten von (a_n) ab. Beweisen Sie dann dieses und damit die Konvergenz.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$

Beweis: Wir zeigen vorerst, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f_n, f_{n+1} > 0$ durch VI:

- IA: $f_0 = f_{0+1} = f_1 = 1 > 0$

- IS: Seien $f_n, f_{n+1} > 0$. Also

$f_n + f_{n+1} = f_{n+2} > 0$

Wir nützen die IV und Definition 2.2.1 (p2), also „$x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$;".

Um zu zeigen, dass (f_n) monoton steigt, also $\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} \leq f_{n+2}$, gehen wir vom Gegenteil, also $\neg(-\text{''}-) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f_{n+1} > f_{n+2}$, aus. Weil aber $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$, folgt

$f_{n+1} > f_n + f_{n+1} \Leftrightarrow 0 > f_n$

für mindestens ein $n \in \mathbb{N}_0$, was aber dem Vorherigen widerspricht.

Also

$$1 \leq \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Laut Satz 3.2.8 (iii) gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} =: a$. Also

$$a = 1 + \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = a + 1 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - (-1)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

aber weil $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 1 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ah ja ... Monotonie von (a_n). Ist nicht monoton, weil

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots) = \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots\right),$$

und $a_1 < a_2 > a_3$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass (a_n) überhaupt konvergiert, also grundsätzlich einen Grenzwert besitzt.
Laut Satz 3.5.8 (Cauchysches Konvergenzkriterium), reicht es in dem Fall, zu zeigen, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon, \; \forall n, m \geq N.$$

Es müsste also (, wenn $m := n + 1$,)

$$d(x_n, x_{n+1}) = |a_n - a_{n+1}| = \left| \frac{f_n}{f_{n-1}} - \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| =$$

$$\left| \frac{f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}}{f_{n-1} f_n} \right| < \varepsilon.$$

Dazu zeigen wir $f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1} = (-1)^n$ mittels VI:

- IA: $f_1^2 - f_0 f_2 = 1^2 - 1 \cdot 2 = -1 = (-1)^1$.
- IS: $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = f_{n+1}^2 - f_n(f_n + f_{n+1}) =$
$f_{n+1}^2 - (f_n^2 + f_n f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+1} - f_n^2 - f_n f_{n+1} =$
$f_{n+1}(f_n + f_{n-1}) - f_n^2 - f_n f_{n+1} = f_{n+1} f_n + f_{n+1} f_{n-1}$
$- f_n^2 - f_n f_{n-1} = f_n f_{n-1} - f_n^2 = -(f_n^2 - f_n f_{n-1}) \overset{(IV)}{=}$
$-(-1)^n = (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$.

Aus dieser Identität folgt

$|f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}| = |(-1)^n| = 1$,

und weil $\forall n \in \mathbb{N} : f_{n-1} > 0 \Rightarrow f_{n-1} f_n > 0$, also

$\Leftrightarrow \frac{|f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}|}{f_{n-1} f_n} = \left| \frac{f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}}{f_{n-1} f_n} \right| = \frac{1}{f_{n-1} f_n}$,

Daher gilt

$d(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{f_{n-1} f_n} < \epsilon$,

und man findet ein $N \in \mathbb{N}$, sodass die Cauchy-Folgen-Bedingung erfüllt ist, weil

$\frac{1}{f_{n-1} f_n}$

durch die Wahl von beliebig großen $n \in \mathbb{N}$, beliebig klein werden kann, da (f_n), also auch $(f_{n-1} f_n)$ monoton steigt. $\square$

57. Sei $0 < a_0 < b_0$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Zeigen Sie (a_n) und (b_n) konvergieren gegen den gleichen Grenzwert.

Beweis: Wir beweisen vorerst, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_n \leq b_n$.

$$0 \leq (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n \Leftrightarrow 2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1},$$

und weil $a_0 \leq b_0$ folgt die Konklusio induktiv.

Es folgt nun das Monotonieverhalten von (a_n), also steigend, und (b_n), also fallend.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n \quad \text{und}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

Nun gilt aber $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \geq 0$, also auch $\forall n \in \mathbb{N}_0: b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq 0$, weil ja $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_n \leq b_n$ $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0: 0 \leq a_n \leq b_n$. Also $\forall n \in \mathbb{N}_0: 0 \leq b_n \leq b_0$, weil (b_n) monoton fällt. Daher ist (b_n) beschränkt, also ist, wegen $\forall n \in \mathbb{N}_0: 0 \leq a_n \leq b_n$, insbesondere (a_n) beschränkt.

Laut Satz 3.4.2, sind (a_n) und (b_n) insbesondere konvergent. Und jetzt zum Abspann:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n b_n} =: a \overset{3.2.8(iii)}{\Longrightarrow} a = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 = ab \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{a} = b = a \Leftrightarrow 2b - b = a \Leftrightarrow 2b = a + b \Leftrightarrow b = \frac{a+b}{2}$$

$$\overset{3.2.8(iii)}{\Longleftarrow} \quad b := \lim_{n \to \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \lim_{n \to \infty} b_{n+1}. \qquad \square$$

58. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge (a_n):

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{2n}.$$

Hinweis: Zeigen Sie $a_n < 1 - \frac{1}{n+1}$.

Beweis: „$<$" ist bullschit. „$\le$" ist ok. Erst einmal etwas aufräumen ...

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{und} \quad b_n := 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} - \frac{1}{k+1} + \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Es genügt zu zeigen, dass $a_n \le b_n$, weil $b_n \to 1$ laut Beispiel 3.6 (Fundament Analysis). Natürlich mit vollständiger Induktion nach n:

IA: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} \le \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}$

IV: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

IS: Wir räumen die linke Seite auf ...

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1/2}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1/2}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

... und die rechte Seite ...

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

... und alles ist sauber. Wir wenden „$\overset{(IV)}{\Leftarrow}$" an und ...

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\square$

Nun ist bloß noch zu zeigen, dass a_n monoton steigt, also, dass $a_n \leq a_{n+1}$. Tatsächlich gilt

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < a_n + \frac{1}{n+(n+1)} = a_{n+1}.$$

Laut Satz 3.4.2, sind monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen konvergent. Also ist insbesondere (a_n) konvergent. $\square$

59. Für welche $a > 0$ konvergiert die Folge

$$x_n = \sqrt[3]{a^n + n} - \sqrt[3]{n} \ ?$$

Berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

Falls $0 < a \leq 1$, so gilt $x_n \to 0$. Wenn aber $a > 1$, so divergiert x_n.

Beweis: Wir benützen (2.9) mit $n = 3$, also $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ba + a^2)$, damit

$$x_n = \frac{(\sqrt[3]{a^n+n} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{a^n+n}^2 + \sqrt[3]{a^n+n} \cdot \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2)}{\text{ja, was kommt da wohl hin ?}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^n+n}^3 - \sqrt[3]{n}^3}{\text{immer noch}} = \frac{a^n + n - n}{\text{eh}} = \frac{a^n}{\text{trivial}}$$

Fall 1 : $a = 1$:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1^n + n}^2 + \sqrt[3]{1^n \cdot n + n^2} + \sqrt[3]{n}^2} \to 0$$

$$\overset{3.3.2}{\Leftarrow} \quad 0 \leq x_n \leq 1/(\sqrt[3]{n}^2) = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}^2 \xrightarrow{3.3.5(v) \,\&\, (vii)} 0.$$

Fall 2 : $a < 1$: Laut Beispiel 3.2.4 (iv) gilt $\forall q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < 1$: $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge $\Rightarrow q^n \to 0$.

$$x_n = \frac{a^n}{\sqrt[3]{a^n + n}^2 + \sqrt[3]{a^n + n} \cdot \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2} \xrightarrow{\text{trivial}} 0.$$

Fall 3 : $a > 1$: Ab einem hinreichend großem n gilt $a^n > n$, da $a^n \geq n \Leftrightarrow a \geq \sqrt[n]{n} \to 1$ und $a \geq 1$. Also

$$x_n > \frac{a^n}{3 \cdot \sqrt[3]{a^n + a^n}^2} = \frac{a^n}{3 \cdot \sqrt[3]{(2a^n)^2}} = (3 \cdot \sqrt[3]{4})^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{a^n}^3}{\sqrt[3]{a^n}^2} \right) =$$

$\left(3 \cdot \sqrt[3]{a}\right)^{-1} \cdot \left(\sqrt[3]{a}\right)^{n}$:

Weil $\sqrt[3]{a} > 1 \Leftrightarrow a > 1$, divergiert x_n. $\square$

60. Untersuchen Sie die Folge

$$x_n = \frac{2}{n+1} \prod_{l=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{l}\right) - \sqrt{n^2+2}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$x_n \to 2.$

Beweis: Wir induzieren (arbiträrerweise) die Formel

$$\prod_{l=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{l}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{(IV)}$$

- IA: $\prod_{l=1}^{1} \left(1 + \frac{2}{l}\right) = 3 = \frac{(1+1)(1+2)}{2}$
- IS: $\prod_{l=1}^{n+1} 1 + \frac{2}{l} = \prod_{l=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{l}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)$

$$\overset{(IV)}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{(n+1+2)}{(n+1)} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} = \frac{((n+1)+1)((n+1)+2)}{2}$$

Daher gilt

$$x_n = \frac{2}{(n+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{2} - \sqrt{n^2+2} = 2 + \left(n - \sqrt{n^2+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_n - 2 = \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+2} \overset{(2.9)}{=} \frac{n^2 - (n^2+2)}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2+2}} = \frac{-2}{n + \sqrt{n^2+2}}$$

$$= \frac{-2/n}{1 + \sqrt{1 + 2/n^2}} \xrightarrow{\text{Satz 3.3.5}} 0$$

$$\Rightarrow x_n \to 2 \qquad \square$$