Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Numerische Mathematik - Kreuzlübung 8

Übungstermin: 26.11.2019 20. November 2019

Aufgabe 43:
Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $A^\dagger$ die Pseudo-Inverse aus Definition 5.20 der Vorlesung. Weiter heisst eine lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ orthogonale Projektion auf den Teilraum $U \subset \mathbb{R}^m$, wenn gilt $\mathcal{R}(P) \subset U$ und $\mathcal{R}(P - I) \subset U^\perp$, wobei $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die Identität ist. Beweisen Sie folgende Aussagen.
a) $A^\dagger = A^{-1}$, falls A eine reguläre Matrix ist.
b) $A^\dagger$ die sogenannte Moore-Penrose Inverse von A, d.h. $AA^\dagger A = A$, $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ und $AA^\dagger$, $A^\dagger A$ sind hermitesch.
c) $AA^\dagger$ ist eine orthogonale Projektion auf $\mathcal{R}(A)$.
d) $A^\dagger A$ ist eine orthogonale Projektion auf $\mathcal{N}(A)^\perp$.

Aufgabe 44:
Sei $c \in \mathbb{C}$ und $A_c := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-c & c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.
a) Berechnen Sie $A_c^\dagger$.
b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $c \mapsto A_c$ als Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig ist.
c) Untersuchen Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Abbildung $c \mapsto A_c^\dagger$ als Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig ist.
Hinweis zu a): Für den Fall, dass A_c singulär ist diagonalisieren Sie zunächst die Matrix A^*A. Die Singulärwerte von A sind die Wurzeln der Eigenwerte von A^*A.

Aufgabe 45:
Seien $x_1, \dots, x_m$ paarweise verschiedene Stützstellen mit Stützwerten $y_1, \dots, y_m$. Gesucht sei ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $n < m - 1$, sodass $\sum_{j=1}^m |p(x_j) - y_j|^2$ minimal wird.
a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes 5.17, dass die Lösung $p \in \Pi_n$ des Ausgleichsproblems eindeutig ist.
b) Stützstellen und Stützwerte seien gegeben durch

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3	-4	6	17	34	55

Berechnen Sie $p \in \Pi_2$, sodass $\sum_{j=1}^6 |p(x_j) - y_j|^2$ minimal wird. Skizzieren Sie p und die dazugehörigen Stützstellen und Stützwerte.

Aufgabe 46:
Sei $m \geq n$, $A = QR \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit Matrizen $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $R \in \mathbb{C}^{m\times n}$ der Form

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

und $Q_{11}, R_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $Q_{21} \in \mathbb{C}^{(m-n)\times n}$, $Q_{12} \in \mathbb{C}^{n\times(m-n)}$ und $Q_{22} \in \mathbb{C}^{(m-n)\times(m-n)}$. Weiters sei Q unitär und R_1 eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Hauptdiagonaleneinträgen.

Zeigen Sie, dass damit R_1, Q_{11} und Q_{21} eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 47:
Seien A, Q, R wie in Aufgabe 46 und $b \in \mathbb{C}^m$. Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{C}^n$ genau dann Lösung des Minimierungsproblems

$$\|Ax - b\|_2^2 = \min!$$

ist, wenn es $R_1 x = (Q_{11}^*, Q_{21}^*)\, b$ löst. Wieviele Rechenoperationen sind zur Berechnung von x notwendig, wenn R_1, Q_{11} und Q_{21} bereits vorhanden sind?

Aufgabe 48:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix aus Aufgabe 42. Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A nach Alg. 6.6 sowie die Konditionszahlen $\mathrm{cond}_\infty(L)$ und $\mathrm{cond}_\infty(U)$. Welche Probleme erkennen Sie, wenn diese LU-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit der Matrix A verwendet wird? Beachten Sie dabei den Unterschied zwischen den Begriffen Kondition und Stabilität aus dem Beginn der Vorlesung.