3.1 ZYKLISCHE KOORDINATEN

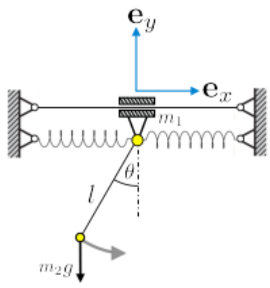

FIGURE 3.1: *Pendel auf Federschlitten*

Ein Schlitten mit Masse m_1 gleite reibungsfrei auf einem waagrechten Führungsholm und sei beidseitig mit Rückstellfedern (jeweils Federkonstante k) ausgestattet. An dem Schlitten hängt ein Pendel der Länge l mit Punktmasse m_2. Es wirke die Gravitationskraft $\mathbf{F}_G = -m_2 g \mathbf{e}_y$.

a) Wieviele Freiheitsgrade besitzt das System? Identifizieren Sie geeignete generalisierte Koordinaten und berechnen Sie die Lagrangefunktion.

a) Es gilt $|r-s|^2 = \ell^2$ und $r \cdot e_y = 0$, also

$$F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : (r,s)^T \mapsto \left(|r-s|^2 - \ell^2,\ r_2\right)^T = \left((r_1-s_1)^2 + (r_2-s_2)^2 - \ell^2,\ r_2\right)^T$$

$$dF(r,s) = \begin{pmatrix} 2(r_1-s_1) & 2(r_2-s_2) & -2(r_1-s_1) & -2(r_2-s_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ hat nicht vollen Rang für $r=s$, aber $F(r,s)=0 \Rightarrow r \neq s$

Daher ist $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid F(x) = 0\}$ eine 2-dim. differenzierbare Mannigfaltigkeit, das System hat also 2 Freiheitsgrade

es gilt $M = \{(r,s)^T \in \mathbb{R}^4 \mid r_2 = 0 \wedge s_1 = r_1 - \ell \sin(\theta) \wedge s_2 = -\ell \cos(\theta) \wedge \theta \in [0, 2\pi[\}$

also

$$q: \mathbb{R} \times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^4 : (x,\theta)^T \mapsto \left(x, 0, x - \ell\sin(\theta), -\ell\cos(\theta)\right)^T$$

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\theta: \mathbb{R} \to [0,2\pi[$ differenzierbar

$$\tilde{q}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto q(x(t), \theta(t)) \quad \text{und} \quad \dot{\tilde{q}}(t) = \left(\dot{x}(t), 0, \dot{x}(t) - \ell\cos(\theta(t))\,\dot{\theta}(t), \ell\sin(\theta(t))\,\dot{\theta}(t)\right)^T$$

$$L: \mathbb{R} \times [0,2\pi[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (a,b,\tilde{a},\tilde{b}) \mapsto \frac{m_1 \tilde{a}^2}{2} + \frac{m_2\left((\tilde{a} - \ell\cos(b)\tilde{b})^2 + (\ell\sin(b)\tilde{b})^2\right)}{2} + m_2 g \ell \cos(b) - k a^2$$

$$= \frac{m_1 \tilde{a}^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{a}^2}{2} - m_2 \tilde{a} \ell \cos(b) \tilde{b} + \frac{m_2}{2} \ell^2 \tilde{b}^2 + m_2 g \ell \cos(b) - k a^2$$

b) Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_θ und p_x.

b) $$p_\theta := \frac{\partial L}{\partial \tilde{b}}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = -m_2 \dot{x} \ell \cos(\theta) + m_2 \ell^2 \dot{\theta}$$

$$p_x := \frac{\partial L}{\partial \tilde{a}}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = (m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 \ell \cos(\theta)\dot{\theta}$$

c) Identifizieren Sie zunächst alle zyklischen Koordinaten des Systems und erklären Sie die dazugehörenden Erhaltungsgrößen. Wiederholen Sie ihre Analyse für den Grenzfall $k \to 0$ (beliebig schwache Rückstellfedern).

c) In obiger Form ist nur die Zeit zyklisch, daraus resultiert: Energieerhaltung

Für $k \to 0$ wird auch x zyklisch, also ist der Impuls $p_x = (m_1+m_2)\dot{x} - m_2 \ell \cos(\theta)\dot{\theta}$ erhalten.

d) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems und zeigen Sie dass diese für kleine Auslenkungen ($\theta \ll 1$) in folgende Form gebracht werden können:

$$a\ddot{x} + bx = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$$
$$a'\ddot{\theta} + b'\theta = f'(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

(a, b, a', b' seien konstante Koeffizienten)

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{b}}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = -m_2 \dot{x}\, l \cos(\theta) + m_2\, l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta})}{\partial \tilde{b}} = -m_2 \ddot{x} l \cos(\theta) + m_2 \dot{x}\, l \sin(\theta)\dot{\theta} + m_2 l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{a}}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = (m_1+m_2)\dot{x} - m_2\, l \cos(\theta)\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta})}{\partial \tilde{a}} = (m_1+m_2)\ddot{x} - m_2 l \cos(\theta)\,\ddot{\theta} + m_2\, l \sin(\theta)\,(\dot{\theta})^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial a}(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = -2kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = m_2\, \dot{x}\, \dot{\theta} l \sin(\theta) - m_2 g\, l \sin(\theta)$$

Also: Euler-Lagrange-Glg.

$$-2kx = (m_1+m_2)\ddot{x} - m_2 l \cos(\theta)\,\ddot{\theta} + m_2\, l \sin(\theta)\,(\dot{\theta})^2$$

$$m_2\, \cancel{\dot{x}\, \dot{\theta} l \sin(\theta)} - m_2 g\, l \sin(\theta) = -m_2 \ddot{x} l \cos(\theta) + \cancel{m_2 \dot{x}\, l \sin(\theta)\dot{\theta}} + m_2 l^2 \ddot{\theta}$$

für kleine θ:

$$-2kx = (m_1+m_2)\ddot{x} - m_2\, l\, \ddot{\theta} + m_2\, l\, \theta(\dot{\theta})^2$$

$$-m_2 g l \theta = -m_2 \ddot{x} l + m_2 l^2 \ddot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x} + (2k)x = m_2 l \ddot{\theta} - m_2\, l\, \theta\,(\dot{\theta})^2$$

$$(m_2 l^2)\ddot{\theta} + (m_2 g l)\,\theta = m_2\, l\, \ddot{x}$$

Galileio Galilei sitzt im Lagerraum eines Schiffes und führt Experimente durch. Er betrachtet ein freies Teilchen mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{3.1}$$

Das Galileische Relativitätsprinzip verlangt dass Sie von außen die selbe Physik beschreiben, obwohl sich das Schiff mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{V}$ an Ihnen vorbei bewegt. Das Teilchen hat von außen betrachtet die Geschwindigkeit $\vec{v} + \vec{V}$.

a) Schreiben Sie "Ihre" Lagrangefunktion L' an (ohne das Bezugssystem zu wechseln) und zeigen Sie, dass $L' = L + dF/dt$, und bestimmen Sie F.

a) $\tilde{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : u \mapsto \frac{m\,|u|^2}{2}$; $v, V \in \mathbb{R}^3$

$L' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \tilde{L}(v+V) = \frac{m\,|v+V|^2}{2} = \frac{m}{2}\left(|v|^2 + 2v\cdot V + |V|^2\right) = \frac{m\,|v|^2}{2} + m v\cdot V + \frac{m}{2}|V|^2$

Suche $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\frac{dF}{dt} = m\left(v\cdot V + \frac{|V|^2}{2}\right)$

also $F(t) = C + m\int_0^t v\cdot V\,ds + \frac{m}{2}\int_0^t |V|^2\,ds = m\left(v\cdot V + \frac{1}{2}|V|^2\right)t + c$

Bestimmen Sie durch eine Legendre Transformation $\dot{q}_i \to p_i$ der Lagrangefunktion die Hamiltonsche Funktion für folgende Systeme. *Tipp: Memorieren Sie das "Rezept" für die Zukunft.*

a) Die Lagrangefunktion für ein Fadenpendel der länge l, Masse m, im homogenen Gravitationsfeld g mit Auslenkung Θ ist gegeben durch

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\Theta}^2 + mgl\cos\Theta. \tag{3.2}$$

a) Wir betrachten für bel. $x \in [0, 2\pi[$ die Funktion

$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{m}{2} l^2 y^2 + mgl\cos(x)$ Bem.: f ist konvex, $\mathbb{R}$ ist konvex

die Legendre-Transformierte Funktion ist

$f_x^* : X^* \to \mathbb{R} : x^* \mapsto \sup\{x^* y - f_x(y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

wobei $X^* := \{x^* \in \mathbb{R} \mid \sup\{x^* y - f_x(y) \mid y \in \mathbb{R}\} < \infty\}$

$y = \frac{2x^*}{ml^2}$

$\Leftarrow$

$\overbrace{g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x^* - \frac{ml^2}{2} y = 0}$

betrachten wir für bel. $x^*, y \in \mathbb{R}$

$x^* y - f_x(y) = x^* y - \frac{m}{2} l^2 y^2 - mgl\cos(x) = \overbrace{y\left(x^* - \frac{ml^2}{2} y\right)}^{g(y) :=} - mgl\cos(x) \leq \frac{x^*}{ml^2}\left(x^* - \frac{ml^2}{2}\frac{x^*}{ml^2}\right) - mgl\cos(x)$

$= \frac{(x^*)^2}{2ml^2} - mgl\cos(x)$

also: $X^* = \mathbb{R}$, $f_x^*(x^*) = \frac{(x^*)^2}{2ml^2} - mgl\cos(x)$

$H : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f_x(y) = \frac{y^2}{2ml^2} - mgl\cos(x)$

b) Die Lagrangefunktion eines Teilchens mit Masse m im elektromagnetischen Feld $(\Phi, \vec{A})$ sei gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t). \tag{3.3}$$

Für bel. $r \in \mathbb{R}^3$ betrachte die Funktion

$f_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{m}{2}|x|^2 - q\,\phi(r,t) + q\,x \cdot A(r,t)$ — $\mathbb{R}^3$ konvex, f_r hoffentlich konvex

für bel. $x, y \in \mathbb{R}^3$ betrachte

$\frac{1}{m}(y - q\,A(r,t))$ ist wo $x \mapsto x \cdot \left((y - q\,A(r,t)) - \frac{m}{2}x\right)$ max. wird.

$y \cdot x - f_r(x) = y \cdot x - \frac{m}{2}|x|^2 + q\,\phi(r,t) - q\,x \cdot A(r,t)$

$= x \cdot \left((y - q\,A(r,t)) - \frac{m}{2}x\right) + q\,\phi(r,t) \leq \frac{1}{2m}|y - q\,A(r,t)|^2 + q\,\phi(r,t)$

also ist die Legendre-Transformierte $f_r^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : y \mapsto \sup\{y \cdot x - f_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\} = \frac{1}{2m}|y - q\,A(r,t)|^2 + q\,\phi(r,t)$

$H : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R} : (r, y) \mapsto f_r(y) = \frac{1}{2m}|y - q\,A(r,t)|^2 + q\,\phi(r,t)$

Ein Gummibärli der Masse m rutscht (reibungsfrei) entlang des Buchdeckels Ihres Analytische-Mechanik Skriptes hinab. Der Buchdeckel ist beschrieben durch $z(x) = x \tan \alpha_0$, mit Winkel $\alpha_0 = \text{const}$.

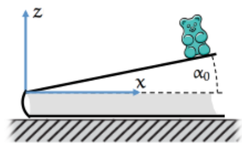

FIGURE 3.2: *Gummibär auf Ihrem Skript*

a) Schreiben Sie die kinetische und potentielle Energie des Gummibärli als Funktion der Position und der Geschwindigkeit an. Wählen Sie dabei eine geeignete generalisierte Koordinate.

$\tilde{E}_{pot}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: y \mapsto m g \sin(\alpha_0) y$

$\tilde{E}_{kin}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: v \mapsto \frac{m v^2}{2}$

$s: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2: y \mapsto (y \cos(\alpha_0), y \sin(\alpha_0))^T$

$\ell: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar

$E_{pot}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto \tilde{E}_{pot}(\ell(t)) = m g \sin(\alpha_0) \ell(t)$

$E_{kin}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto \tilde{E}_{kin}(\dot{\ell}(t)) = \frac{m}{2} (\dot{\ell}(t))^2$

b) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion explizit als Legendre-Transformierte der Lagrangefunktion, und zeigen Sie, dass Sie die Energie des Teilchens $E = T + V$ erhalten.

b) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (y, v) \mapsto \tilde{E}_{kin}(v) - \tilde{E}_{pot}(y) = \frac{m v^2}{2} - m g \sin(\alpha_0) y$

Betrachte für bel. $y \in \mathbb{R}$ die Funktion

$f_y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: v \mapsto L(y, v) = \frac{m v^2}{2} - m g \sin(\alpha_0) y$

$\frac{z}{m}$ ist jene Stelle, wo $v \mapsto v(z - \frac{m v}{2})$ maximal wird

Betrachte $z, v \in \mathbb{R}$ bel. und

$z v - f_y(v) = z v - \frac{m v^2}{2} + m g \sin(\alpha_0) y = v(z - \frac{m v}{2}) + m g \sin(\alpha_0) y \leq \frac{z^2}{2m} + m g \sin(\alpha_0) y$

also ist $f_y^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: z \mapsto \sup\{z v - f_y(v) \mid v \in \mathbb{R}\} = \frac{z^2}{2m} + m g \sin(\alpha_0) y$

$H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (y, z) \mapsto f_y(z) = \frac{z^2}{2m} + m g \sin(\alpha_0) y$

Lemma: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe, differenzierbare Funktion, dann ist f' strikt monoton wachsend, also injektiv und gilt für jedes $p \in \mathbb{R}$, wenn wir $h: f'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f' \circ h = h \circ f' = id$ nehmen

$$\sup\{p x - f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = p\, h(p) - f(h(p))$$

Bew.: Die Tatsache, dass f' strikt mon wachsend ist wissen wir ($f'' > 0$).

für bel. $p \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $g_p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto p x - f(x)$

es gilt $g_p'(\bar{x}) = 0 \iff p - f'(\bar{x}) = 0 \iff p = f'(\bar{x}) \iff h(p) = \bar{x}$

also ist $\bar{x} = h(p)$ die einzig mögliche Stelle, wo g_p ein Maximum annehmen kann,

daher gilt für bel. $x \in \mathbb{R}$: $p x - f(x) = g_p(x) \leq g_p(\bar{x}) = p\, h(p) - f(h(p))$

und wie man sieht wird das Supremum tatsächlich angenommen. $\square$

In unserem Fall ist

$$f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : v \mapsto L(y, v) = \frac{mv^2}{2} - mg \sin(\alpha_0)\, y$$

$$f_y'(v) = mv, \text{ also } h_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \mapsto \frac{u}{m}$$

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f_y'(\dot{\ell}(t)) = m\dot{\ell}(t)$$

$$H(\ell, p) = \frac{p^2}{2m} + mg\sin(\alpha_0)\,\ell = \frac{m}{2}(\dot{\ell})^2 + mg\sin(\alpha_0) = E_{kin} + E_{pot}$$

c) Während das Gummibärli hinunterrutscht klappt nun jemand den Buchdeckel auf, gegeben durch ein explizit zeitabhängiges $\alpha(t)$. (Vernachlässigen Sie hier, dass das Gummibärli bei schneller Bewegung "abheben" würde, es bleibt immer auf dem Buchdeckel). Bestimmen Sie wieder die kinetische und potentielle Energie sowie die Hamiltonfunktion, und zeigen Sie, dass in diesem Fall die Hamiltonfunktion nicht mehr der totalen Energie des Systems entspricht.

$\tilde{E}_{pot}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (y, \varphi) \mapsto m g \sin(\varphi) y$

$\tilde{E}_{kin}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: v \mapsto \frac{m|v|^2}{2}$

$s: \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2: (y, \varphi) \mapsto (y \cos(\varphi), y \sin(\varphi))^T$

$\ell: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar

$r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2: t \mapsto s(\ell(t), \alpha(t)) = (\ell(t) \cos(\alpha(t)), \ell(t) \sin(\alpha(t)))^T$

$\dot{r} = (\dot{\ell} \cos(\alpha) - \ell \sin(\alpha)\dot{\alpha}, \dot{\ell} \sin(\alpha) + \ell \cos(\alpha)\dot{\alpha})^T$

$|\dot{r}|^2 = (\dot{\ell})^2 + \ell^2 (\dot{\alpha})^2$

$E_{pot}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto \tilde{E}_{pot}(\ell(t), \alpha(t)) = m g \sin(\alpha(t)) \ell(t)$

$E_{kin}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto \tilde{E}_{kin}(\dot{r}(t)) = \frac{m}{2}\left((\dot{\ell}(t))^2 + (\ell(t))^2 (\dot{\alpha}(t))^2\right)$

Bem. : Sei $d \in \mathbb{N}$ und $L: \mathbb{R}^{2d+1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass für bel. $q \in \mathbb{R}^d$ und bel. $t \in \mathbb{R}$

$f_{q,t}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: k \mapsto L(q, k, t)$ eine strikt konvexe, stetig differenzierbare Funktion ist, dann

können wir wie im eindimensionalen Fall (hoffentlich!) zeigen, dass für die Legendre-Transformierte g gilt

$g_{q,t}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: p \mapsto p \cdot (Df_{q,t})^{-1}(p) - f_{q,t}((Df_{q,t})^{-1}(p))$

und für die Hamilton Funktion

$H: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}: (q, p, t)^T \mapsto g_{q,t}(p) = p \cdot (Df_{q,t})^{-1}(p) - f_{q,t}((Df_{q,t})^{-1}(p))$

In unserem Fall ist, wenn wir α als bekannt voraussetzen,

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: (x, t) \mapsto \frac{m}{2}\left(x_2^2 + x_1^2 (\dot{\alpha}(t))^2\right) - m g \sin(\alpha(t)) x_1$

also $d = 1$, für bel. $q, t \in \mathbb{R}$ ist $f_{q,t}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: k \mapsto L(q, k, t) = \frac{m}{2}\left(k^2 + q^2 (\dot{\alpha}(t))^2\right) - m g \sin(\alpha(t)) q$

$f_{q,t}'(k) = m k$, also $g_{q,t}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: p \mapsto p \cdot \frac{p}{m} - f_{q,t}\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p^2}{m^2} + q^2 (\dot{\alpha}(t))^2\right) + m g \sin(\alpha(t)) q$

$= \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - q^2 (\dot{\alpha}(t))^2 \frac{m}{2} + m g \sin(\alpha(t)) q$

$= \frac{p^2}{2m} - q^2 (\dot{\alpha}(t))^2 \frac{m}{2} + m g \sin(\alpha(t)) q$

$= H(q, p, t)$

und mit $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto f_{q,t}'(\dot{\ell}(t)) = m \dot{\ell}(t)$ gilt

$H(\ell(t), p(t), t) = \frac{m}{2}(\dot{\ell}(t))^2 - (\ell(t))^2 (\dot{\alpha}(t))^2 \frac{m}{2} + m g \sin(\alpha(t)) \ell(t)$

$\neq \frac{m}{2}\left((\dot{\ell}(t))^2 + (\ell(t))^2 (\dot{\alpha}(t))^2\right) + m g \sin(\alpha(t)) \ell(t) = E_{kin} + E_{pot}$

NICHT benötigte Legendre-Transformierte

für bel. $x \in \mathbb{R}^2$ betrachte

$f_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : y \mapsto L(x,y) = \frac{m}{2}(y_1^2 + x_1^2 y_2^2) - mg\sin(x_2)x_1$

betr. für $z \in \mathbb{R}^2$

$g_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : y \mapsto z \cdot y - \frac{m}{2}(y_1^2 + x_1^2 y_2^2)$

$dg_z(y) = (z_1 - my_1, z_2 - my_2 x_1^2)$

$dg_z(\tilde{y}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = (\frac{z_1}{m}, \frac{z_2}{mx_1^2})^T$

für bel. $z, y \in \mathbb{R}^2$ betrachte

$$z \cdot y - f_x(y) = z \cdot y - \frac{m}{2}(y_1^2 + x_1^2 y_2^2) + mg\sin(x_2)x_1 \leq z \cdot \tilde{y} - \frac{m}{2}(\tilde{y}_1^2 + x_1^2 \tilde{y}_2^2) + mg\sin(x_2)x_1$$

$$= \frac{z_1^2}{m} + \frac{z_2^2}{mx_1^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{z_1^2}{m^2} + \frac{z_2^2}{m^2x_1^2}\right) + mg\sin(x_2)x_1$$

$$= \frac{z_1^2}{2m} + \frac{z_2^2}{2mx_1^2} + mg\sin(x_2)x_1$$

Legendre Transformierte $f_x^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : z \mapsto \sup\{z \cdot y - f_x(y) \mid y \in \mathbb{R}^2\} = \frac{z_1^2}{2m} + \frac{z_2^2}{2mx_1^2} + mg\sin(x_2)x_1$

$H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x,z) \mapsto f_x^*(z) = \frac{z_1^2}{2m} + \frac{z_2^2}{2mx_1^2} + mg\sin(x_2)x_1$