A 1.1.8: Betrachte die folgenden Aussagen: A: „Es gibt eine größte Primzahl." B: „178481 ist die größte Primzahl." C: „1 ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$." D: „1 ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$, und es gibt keine andere Lösung."

(a) Formuliere die Aussagen $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ und $\neg D$. Verwandle dabei $\exists$ in $\forall$.

(b) Überprüfe, ob mit $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $C \Rightarrow D$ und $D \Rightarrow C$ wahre oder falsche Aussagen vorliegen.

(c) Formuliere die Kontrapositionen der Aussagen aus (b).

Hinweis: Aussage A ist falsch. Dieses Ergebnis geht auf Euklid zurück und kann ohne Beweis verwendet werden.

$\neg A: \forall p \in P: \nexists p_{max} \in P: p_{max} \geq p$

$\neg B: (\exists p \in P: p > 178481) \Leftrightarrow \neg(\forall p \in P: p \leq 178481)$

$\neg C: L := \{x : x^2 + x + 1 = 0\}$

$(\nexists x \in L: x = 1) \Leftrightarrow (\forall x \in L: x \neq 1)$

$\neg D: \neg((\exists x \in L: x = 1) \wedge (\nexists y \in L: y \neq x))$

$\Leftrightarrow (\forall x \in L: x \neq 1) \vee \neg(\forall y \in L: y = x)$

$A \Rightarrow B$ ist wahr, weil A falsch ist (siehe Hinweis).

$B \Rightarrow A$ ist wahr, weil B falsch ist (aus dem Hinweis entnehmen wir, dass es keine größte Primahl gibt, also ist 178481 keine).

$C \Rightarrow D$ ist wahr, weil C falsch ist.

$D \Rightarrow C$ ist wahr, weil D falsch ist.

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$

$(C \Rightarrow D) \Leftrightarrow (\neg D \Rightarrow \neg C)$

$(D \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \neg D)$

Dabei sind:

$A: \forall p \in P: \exists p_{max} \in P: p_{max} \geq p$

$B: \forall p \in P: p \leq 178481$

$C: \exists x \in L: x = 1$

$D: (\exists x \in L: x = 1) \wedge (\nexists y \in L: y \neq x)$

A 1.3.1: Ein zerstreuter Professor schreibt an die Tafel:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x}{x+1}$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}: x \to \sqrt{x}$;

$h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}: \frac{m}{n} \mapsto m+n$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$.

(Mit $\sqrt{x}$ ist die nicht negative Quadratwurzel aus x gemeint.)

(a) Begründe, warum dadurch keine Abbildungen festgelegt werden.

(b) Ersetze in jeder dieser drei fehlerhaften Angaben die Definitionsmenge, die Zielmenge oder beide Mengen so durch nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, dass tatsächlich Abbildungen festgelegt werden. Die gegebenen Vorschriften für $f, g,$ und h dürfen dabei nicht verändert werden.

Hinweis: Die Vorschrift h hängt nur für ein einziges $x \in \mathbb{Q}$ nicht davon ab, wie x als Bruch in der Form $\frac{m}{n}$ dargestellt wird. Für alle anderen rationalen Zahlen ist diese Vorschrift sinnlos.

Für f: Bei $x = -1$ entsteht $\frac{x}{-1+1} = \frac{x}{0}$.

Für g: Nicht alle Quadratwurzeln können als Brüche dargestellt werden. $\sqrt{2}$ ist irrational

Beweis: Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational, dann könnte sie vollständig gekürzt als a/b dargestellt werden. $(a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0)$.

$\sqrt{2} = a/b \Rightarrow 2 = a^2/b^2 \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2$ ist gerade

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ a ist gerade $\Rightarrow a = 2k \wedge k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2b^2 = 4k^2$

$\Rightarrow b^2 = 2k \Rightarrow b^2$ ist gerade $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ b ist gerade $\Rightarrow a/b$ ist nicht vollständig gekürzt $\lightning$ $\square$

(*) Kontraposition: $a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Für h: $(m \cdot x)/(n \cdot x) = m/n$, aber $(m \cdot x) + (n \cdot x) \neq m + n$

Für f: Neue Definitionsmenge $= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Für g: Neue Definitionsmenge $= \{x : \exists n \in \mathbb{N} : n^2 = x\}$

Für h: Neue Definitionsmenge $= \{-1\}$, weil $-1 = \frac{n}{-n}$

$\mapsto n - n = 0$, also $-1 \mapsto 0$.

A 1.3.2: Es seien A und B Mengen. Beweise: $A \times B = B \times A$ gilt genau dann, wenn $A = B$ oder mindestens eine der gegebenen Mengen A, B leer ist.

Beweis: $\underbrace{A \times B = B \times A}_{(i)} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(A = B)}_{(ii)} \vee \underbrace{(A = \emptyset \vee B = \emptyset)}_{(iii)}}_{(iv)}$

$(iv) \Rightarrow (i)$:

Fall 1: $(ii) \Rightarrow (i)$:

$A = B \Leftrightarrow A \times B = A \times A = B \times B = B \times A$

Fall 2: $(iii) \Rightarrow (i)$:

$A = \emptyset \vee B = \emptyset \Leftrightarrow A \times B = \emptyset = B \times A$

$(i) \Rightarrow (iv)$:

Fall 1: $A, B \neq \emptyset$

$\forall x,y: (x,y) \in A \times B \Leftrightarrow (x,y) \in B \times A$

$A \times B := \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$

$B \times A := \{(y,x) : y \in B \wedge x \in A\}$

Die Voraussetzung und Definition der Kartesischen Produkte führen zu $x \in A \wedge y \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge y \in A$. Konjunktionsbeseitigung führt zu $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Also:

$$\left.\begin{array}{l} (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \\ (x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subseteq A \end{array}\right\} A = B$$

Fall 2: Mindestens eine der Mengen A oder B ist leer. $\square$

A 1.4.1: Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

(γ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(δ) $f: M \to \{a\}: x \mapsto a$; dabei sei $M \neq \emptyset$ beliebig (Fallunterscheidung!)

(η) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto |x|$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist injektiv, surjektiv und bijektiv.

Beweis: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1^3 = (x+1)^3$

Injektivität: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest:

$(x_1 + 1)^3 = (x_2 + 1)^3 \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: $\forall y \in \mathbb{R} \, \exists x \in \mathbb{R}: y = f(x)$

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest:

$y = (x+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x + 1 \Rightarrow \sqrt[3]{y} - 1 = x \in \mathbb{R}$ $\square$

$f: M \to \{a\}: x \mapsto a$ ist nur injektiv bei $|M| = 1$, aber immer surjektiv, also nur bijektiv bei $|M| = 1$.

Beweis: Injektivität: Fall 1: $|M| = 1$.

Weil f eine Funktion ist, muss dem $x \in M$ genau ein Element aus $\{a\}$ zugeordnet werden. (Das wäre a.)

Fall 2: $|M| > 1$.

—"— allen $x \in M$ —"—. Da $|\{a\}| = 1$, müssen $a \in \{a\}$ mehrere (alle) $x \in M$ zugeordnet werden.

Surjektivität:

Weil $M \neq \emptyset$, gibt es für a mindestens ein $x \in M$, damit $f(x) = a$. $\square$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto |x|$ ist werder injektiv, surjektiv, noch bijektiv.

Beweis: Injektivität: $|x| = |-x|$

Surjektivität: $\forall y \in \mathbb{R}: y < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}: y = f(x)$ $\square$

A 1.5.1: Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$. Gib zwei verschiedene Abbildungen $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g': \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g \circ f = g' \circ f = id_{\mathbb{N}}$ an. Gibt es auch eine Abbildung $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \circ h = id_{\mathbb{N}}$?

$Q :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x^2 = y$

$$g: \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ y \mapsto \sqrt{y}, & Q \\ y \mapsto x_0, & \neg Q \end{cases} \qquad g': \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ y \mapsto \sqrt{y}, & Q \\ y \mapsto x_0', & \neg Q \end{cases}$$

$x_0 \neq x_0'$

Es gibt keine Abbildung $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \circ h = id_{\mathbb{N}}$.

Beweis: $f(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{N} \Rightarrow f(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$, also ist f nicht surjektiv und hat, nach EiMA Skriptum 2.5.9 Satz, keine Rechtsinverse. $\square$

A 1.7.1: Bestimme alle (und nicht nur einige) Partitionen der folgenden Teilmengen von $\mathbb{N}$: $\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}$. Gib auch alle Äquivalenzrelationen auf diesen Mengen an.

$A := \{1\}$, $B := \{1,2\}$, $C := \{1,2,3\}$

Seien folgende Q_M Partitionen auf die Menge M:

$Q_A = \{\{1\}\}$

$Q_B^1 = \{\{1\},\{2\}\}$, $Q_B^2 = \{\{1,2\}\}$

$Q_C^1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $Q_C^2 = \{\{1\},\{2,3\}\}$, $Q_C^3 = \{\{2\},\{1,3\}\}$, $Q_C^4 = \{\{3\},\{1,2\}$, $Q_C^5 = \{\{1,2,3\}\}$

Seien folgende R_M Äquivalenzrelationen in der Menge M:

$\overline{R}_M := \{(x,x) : x \in M\}$

$R_A = \overline{R}_A$

$R_B^1 = \overline{R}_B$

$R_B^2 = \overline{R}_B \cup X$

$R_C^1 = \overline{R}_C$

$R_C^2 = \overline{R}_C \cup X$

$R_C^3 = \overline{R}_C \cup Y$

$R_C^4 = \overline{R}_C \cup Z$

$R_C^5 = \overline{R}_C \cup X \cup Y \cup Z$

Dabei ist $X := \{(1,2),(2,1)\}$, $Y := \{(1,3),(3,1)\}$, und $Z := \{(2,3),(3,2)\}$.