3.5.7 Lemma. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$, die eine konvergente Teilfolge hat. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Beweis. Sei $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ die konvergente Teilfolge mit $\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} = x$. Das ist ist die Konvergente Teilfolge unserer Cauchy-Folge von oben. Zu $\epsilon > 0$ wähle N_1 so groß, dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für $n, m \geq N_1$. Die Existenz eines solchen N_1 wird durch die Cauchy-Eigenschaft von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists N : d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$, gewährleistet. Wähle N_2 so groß, dass $d(x_{n(k)}, x) < \epsilon$ für $k \geq N_2$. Weil $n(k)$ als Index-Funktion einer Teilfolge, nach Definition 3.2.7, streng monoton wächst, gilt $n(k) \geq k \geq N_2$. Setze $N := \max\{N_1, N_2\}$. Alle zahlen, die größer als N sind, sind also automatisch größer als N_1 und N_2. Wählt man nun $k \geq N$, so folgt $n(k) \geq k \geq N$, und man erhält für $n \geq N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Die erste Ungleichheit folgt aus der Dreiecksungleichung. Es gilt $d(x_n, x_{n(k)}) < \epsilon$ aufgrund der Cauchy-Eigenschaft. Es wird hierbei von der Cauchy-Eigenschaft auf jene konkretere Aussage geschlossen, die Umkehrung ist allerdings nich möglich, da, laut (3.9), $m, n \geq N$ beliebig sein müssen. ($n, n(k) \geq N$ sind aber von einander abhängig!) $d(x_{n(k)}, x) < \epsilon$ gilt, weil $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}} \to x$ und letztere Ungleichheit ist trivialeweise mit Lemma 2.2.3 (v). zu begründen. □