111. Gg.: $(X, \mathcal{T})$ kompakter Hausdorffraum

Zz.: $\nexists \mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$: $(X, \mathcal{T}')$ kompakt

Angenommen, $\mathcal{T}'$ ist kompakt.

Ww.: $\forall f : \underbrace{(X, \mathcal{T}')}_{\text{kompakt}} \to \underbrace{(X, \mathcal{T})}_{\text{Hausdorff}}$ stetig, bij. : f Homöomorphismus
d.h. f^{-1} ist stetig

Sei $f := id_X$, dann ist $id_X : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ stetig, weil
$\forall A \in \mathcal{T} : f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

$\Rightarrow id_X : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ stetig
$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}' : A = id_X^{-1}(A) \in \mathcal{T}$
$\Rightarrow \mathcal{T}' = \mathcal{T}$

Zz.: $\nexists \mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$: $(X, \mathcal{T}')$ Hausdorffraum

Analog zu oben

112. Gg.: $f_n(t) := 1/2\, f_{n-1}(1-t) + 1/4 \cos t^2$, $f_0(t) := 0$;

Zz.: $\exists$ Teilfolge: $f_{n(k)} \xrightarrow{k\to\infty} f$ gleichmäßig

Wir induzieren für $n \in 2\mathbb{N}$, dass

IV: $f_n(t) = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2^{2i}} \cdot \cos t^2 + \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2^{2i+1}} \cdot \cos(1-t)^2$

IA: $n = 0$ ✓

IS: $f_{n+2}(t) = 1/2\, f_{n+1}(1-t) + 1/4 \cos t^2 = \dots$

$f_{n+1}(1-t) = 1/2\, f_n(t) + 1/4 \cos(1-t)^2$

$$= 1/2 \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2^{2i}} \cos t^2 + 1/2 \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2^{2i+1}} \cos(1-t)^2 + 1/4 \cos(1-t)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2^{2i+1}} \cos t^2 + \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2^{2(i+1)}}}_{\sum_{i=2}^{n/2+1} \frac{1}{2^{2i}}} \cos(1-t)^2 + \frac{1}{2^{2\cdot 1}} \cos(1-t)^2}_{\sum_{i=1}^{n/2+1} \frac{1}{2^{2i}} \cos(1-t)^2}$$

$$\Rightarrow \dots = 1/2 \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2^{2i+1}} \cos t^2 + 1/2 \sum_{i=1}^{n/2+1} \frac{1}{2^{2i}} \cos(1-t)^2 + 1/4 \cos t^2$$

$$= \dots = \sum_{i=1}^{\frac{n+2}{2}} \frac{1}{2^{2i}} \cos t^2 + \sum_{i=1}^{\frac{n+2}{2}} \frac{1}{2^{2i+1}} \cos(1-t)^2 .$$

Nun gilt aber $\forall t \in \mathbb{R}: |\cos t^2| \leq 1$ und die „Σ" werden zu geometrischen Reihen für $n \to \infty$ mit $n \in 2\mathbb{N}$.

Nach Weierstrass, konvergiert die TF der $n \in 2\mathbb{N}$ gleichmäßig.

113. Gg.: $\langle X, d\rangle$ metr. Raum.

Zz.: $A \subseteq X$ präkompakt / totalbeschränkt $\Leftrightarrow$
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ $\exists$ Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge

„$\Rightarrow$": Ww.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (a_i)_{i=1}^n \in X^n : \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(a_i) \supseteq A$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ und oBdA. $\# \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \infty$.
Angenommen, $\nexists$ Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, dh.

$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \ \exists k, l \geq N : d(x_{n(k)}, x_{n(l)}) \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall a \in A : |U_\varepsilon(a) \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}| < \infty$,

weil sonst, betrachte die Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, mit
$\{x_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq U_\varepsilon(a)$. Hier gilt nämlich
$\forall k, l \in \mathbb{N} : d(x_{n(k)}, x_{n(l)}) < \varepsilon$.

Nun gilt aber $\# \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \infty$, also werden ∞ viele
$a_i \in X$ gebraucht, um $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ zu überdecken.

„$\Leftarrow$": Angenommen, $\exists \varepsilon > 0 : \nexists (a_i)_{i=1}^n \in X^n : \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(a_i) \supseteq A$.

$\Rightarrow A = \bigcup_{a\in A} U_\varepsilon(a)$ keine endl. Überdeckung hat

Sei $a_0 \in A$ beliebig und $a_{n+1} \in A$, sodass
$\{a_i\}_{i=0}^n \cap U_\varepsilon(a_{n+1}) = \emptyset$.

$\Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} : d(a_m, a_n) \geq \varepsilon$
$\Rightarrow \nexists$ Cauchy-Teilfolge für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

114. Geg.: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{cases} [0,a] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$$

Ges.: $\{ a \in \mathbb{R} : \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ relativ kompakt in $\langle C[0,a], d_\infty \rangle \}$

Abschluss ist Kompakt

Wir zeigen, dass Φ totalbeschränkt ist (Arzelà - Ascoli):

(i) punktweise beschränkt, d.h.

$\forall x \in [0, a] : \{ |f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Dies gilt $\forall a \in [0, 1]$.

(ii) gleichgradig stetig, d.h.

$\forall x \in [0,a]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \langle C[0,a], d_\infty \rangle$ Umg. v. x:

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall y \in U : |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$

Seien $x \in [0, a]$, $\varepsilon > 0$, $U = U_\delta(x) \subseteq [0, 1)$, und $y \in U_\varepsilon(x)$.

Es muss also $a < 1$, weil sonst $\exists y \in U_\delta(x) : 1 < y$.

$$|x^n - y^n| = |x-y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}|$$

$$\leq \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i \leq \dots$$

Sei nun $b \in [0,1)$, mit $b \geq x, y$, dann

$$\dots \leq \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b^{n-1} = \delta n b^{n-1}.$$

Nun gilt aber

$$\delta \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1/6^{n-1}} = \delta \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 6 \cdot 6^{n-1}}}{6^{2(n-1)}} = \delta \lim_{n\to\infty} \frac{6^{n-1}}{\ln 6} = 0 .$$

$\Rightarrow$ Ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$, ist die obere Schranke für alle $n \geq N$ hinreichend klein.

Für alle $n < N$, kann δ klein genug gewählt werden.

$\Rightarrow$ $\overline{\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ abgeschlossen, totalbeschränkt

$\Leftrightarrow$ Kompakt für $a \in [0,1)$

Ansonsten nicht, da Arzelá-Ascoli ein „$\Leftrightarrow$" liefert.

115. Gg.: $f_1(x) := \sin(x - x^2)$,

$f_n(0) = 0$, $f_n'(x) = \sin(f_{n-1}(x)) + 1 - x$,

Zz.: $\exists$ Teilfolge $(f_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in $C[0,1]$: $f_{n(k)} \to f$ gleichm.

Arzelá - Ascoli. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ totalbeschränkt in $\langle C(X), d_\infty \rangle$ $\Leftrightarrow$

(i) punktweise beschränkt

dh. $\forall x \in [0,1]$: $\{|f_n(x)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt

Ww.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n \in C[0,1]$,

$f_n(0) = 0$, $\|f_n'\|_\infty \leq 3$

$\Rightarrow$ f_n beschränkt

(ii) gleichgradig stetig

d.h. $\forall x \in [0,1]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ Umgebung v. x:

$\forall y \in U$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$

Ww. $\forall x, y \in [0,1]$ $\exists \xi \in (\min(x,y), \max(x,y))$:

$$\frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} = f_n'(\xi) \leq \|f_n'\|_\infty$$

$\Leftrightarrow$ $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \|f_n'\|_\infty \cdot |x - y|$

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Hölder-stetige Funktionen

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ totalbeschränkt / präkompakt, relativ kompakt

$\Rightarrow$ $\overline{\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ kompakt

116. Zz.: $K_1(0) \subseteq \ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ mit $p \in [1, \infty)$

nicht kompakt

Ww.: $\forall i \in \mathbb{N}: e_i \in K_1(0)$, weil

$$\|e_i\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |e_{i,n}|^p\Big)^{1/p} = 1.$$

Betrachte die Überdeckung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_{\sqrt[p]{2}}(\pm e_i) \cup U_1(0)$.

Sei $x \in K_1(0)$, d.h.

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\Big)^{1/p} \leq 1$$

oBdA. $\|x\|_p = 1$, $\nexists i \in \mathbb{N}: x = e_i$

$\Rightarrow \exists j \in \mathbb{N}: 0 < |x_j| < 1$

oBdA. $x_k > 0$

$\Rightarrow \|x - e_j\|_p < \sqrt[p]{2} \Leftrightarrow$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} |x_n|^p + |1 - x_j|^p < \|x_p\|^p + 1^p = 2.$$

Nun ist der Abstand zwischen den e_i aber

$\forall i,j \in \mathbb{N}, i \neq j: \|e_i - e_j\|_p = \sqrt[p]{2}$,

also kann man keine endl. TÜ finden.

Zz.: ... $p = \infty$

Betrachte $\bigcup_{e\in\{0,\pm1\}^{\mathbb{N}}} U_1(e)$.

117. Gg.: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt

Zz.: $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, d.h. alle Polynome mit n Veränderlichen, liegt dicht in $\mathbb{R}^n$

Ww. (Stone-Weierstraß reell):
$\mathcal{A}$ Algebra von $C(K)$, punktetrennend,
1 konstante Funktion $\in \mathcal{A}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ dicht in $C(K, \mathbb{R})$

$$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] = \{ \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} a_k \prod_{i=1}^{n} X_i^{k_i} : \forall k \in \mathbb{N}_0^n : a_k \in \mathbb{R} \}$$

$\Rightarrow$ Algebra („+“, „·“ punktweise) mit 1

Seien $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X \neq Y$, dann
$\exists 1 \leq i \leq n : X_i \neq Y_i$.
Wähle also das 1-summandige, normierte Polynom mit
$k = e_i$, dann $a(X) \neq a(Y)$.

118. Gg.: K kompakt, $\mathcal{A}$ Unteralgebra von $\langle C(K), d_\infty \rangle$

Zz.: $\overline{\mathcal{A}}$ Unteralgebra

Seien $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, dann gilt

$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(f), U_\varepsilon(g) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{A} : d_\infty(f, \tilde{f}), d_\infty(g, \tilde{g}) \leq \varepsilon$

(i) $d_\infty(f+g, \tilde{f}+\tilde{g}) = \|(f+g) - (\tilde{f}+\tilde{g})\|_\infty$

$= \|(f-\tilde{f}) + (g-\tilde{g})\|_\infty \leq \|f-\tilde{f}\|_\infty + \|g-\tilde{g}\|_\infty$

$= d_\infty(f, \tilde{f}) + d_\infty(g, \tilde{g}) \leq 2\varepsilon$

(ii) $d_\infty(fg, \tilde{f}\tilde{g}) \leq \|\tilde{g}\|_\infty \cdot d_\infty(f, \tilde{f}) + \|f\|_\infty \cdot d_\infty(g, \tilde{g})$
$\leq (\|\tilde{g}\|_\infty + \|f\|_\infty) \cdot \varepsilon$

(iii) Skalarmultiplikation

119. Gg.: G kommutative, topologische Gruppe,
$f \in C(G, \mathbb{T})$ Homomorphismus, $\mathbb{T}$ Relativtopologie v. $\mathbb{C}$
$\Rightarrow$ f „Charakter" auf G,

Zz.: $\hat{G} := \{ f \in C(G, \mathbb{T}) : f \text{ Charakter} \}$
(duale) Gruppe

Seien $f, g \in C(G, \mathbb{T})$, so auch fg.
Seien $x, y \in G$, dann gilt

$$(fg)(xy) = f(xy)\, g(xy)$$
$$= f(x) f(y) g(x) g(y) = (fg)(x)\,(fg)(y).$$

... Assoziativ, Neutrales Element, Inverses, kommutativ.

Gg.: $\chi_0 \in \hat{G}$, $K \subseteq G$ kompakt, $\varepsilon > 0$,
$B(\chi_0, K, \varepsilon) := \{ \chi \in \hat{G} : \forall x \in K : |\chi_0(x) - \chi(x)| < \varepsilon \}$

Zz.: $B(\chi_0, K, \varepsilon)$ bilden topologische Basis $\mathcal{B}$