Satz 3.2.9 Sei $f \in L(V, W)$ und gelte $\dim V = \dim W < \infty$. Dann folgt die Bijektivität von f bereits aus der Injektivität oder der Surjektivität von f.

Beweis. Wegen $\dim V = \dim W$ gilt jetzt $\operatorname{rg} f + \operatorname{def} f =$ $\dim W$. Laut Rangformel 3.2.8, ist $\operatorname{rg} f + \operatorname{def} f =$ $\dim V = \cdots$, und $\cdots = \dim W$. Es folgt daher die Bijektivität ($\operatorname{def} f = 0$ und $\operatorname{rg} f = \dim W$) bereits aus der Injektivität ($\operatorname{def} f = 0$) oder aus der Surjektivität ($\operatorname{rg} f = \dim W$). Laut Satz 1.11.6 (c), gilt ja f inj. $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$. Weiters ist $\dim \{0\} = 0$, weil $\emptyset$ die Basis von $[\emptyset] = \{0\}$ ist. Außerdem ist $\dim \{0\} = \dim \ker f =: \operatorname{rg} f$. Als nächstes ist $\operatorname{rg} f := \dim f(V) = \dim W$, weil f surj. $\Leftrightarrow f(V) = W$.
Nochmal: $\operatorname{rg} f + \operatorname{def} f = \dim W$ mit $\operatorname{def} f = 0 \Rightarrow$ $\operatorname{rg} f = \dim W \Rightarrow f$ surj. und $\operatorname{rg} f = \dim W \Rightarrow$ $\operatorname{def} f = \dim W - \operatorname{rg} f = 0 \Rightarrow f$ inj. $\square$