101. Gg.: $f: X \to Y$, $\mathcal{U}$ Ultrafilter auf X;

Zz.: $f(\mathcal{U}) := \{f(F) : F \in \mathcal{U}\}$ Filterbasis eines Ultrafilters in Y

(i) $f(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{U}$

(ii) Seien $U, V \in f(\mathcal{U})$, dann

$\exists F_1, F_2 \in \mathcal{U} : f(F_1) = U, f(F_2) = V.$

Ww.: $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow f(F_1 \cap F_2) \in f(\mathcal{U})$

$\Rightarrow f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$

Seien

$\mathcal{U}_X := \mathcal{U}$, $\mathcal{B} := f(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}_Y := \bigcup_{F \in \mathcal{B}} \{O \supseteq F\}$,

und erweitere $\mathcal{U}_Y$ mit E, sodass

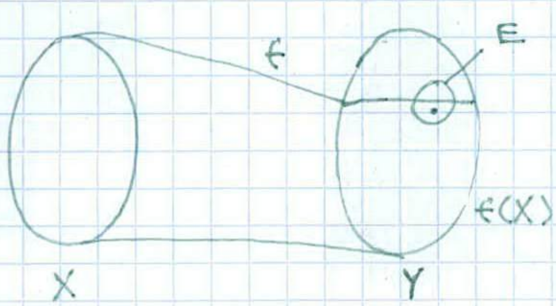
$\nexists F \in \mathcal{U}_Y : E \supseteq F$, dh. $E \notin \mathcal{U}_Y$.

oBdA. $\nexists F \in \mathcal{U}_Y : E \cap F = \emptyset \notin \mathcal{U}_Y$

$\Rightarrow \forall F \in \mathcal{U}_Y : E \cap F \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_X : f(U) \subseteq E$ und damit

$f(U) \cap F \in \mathcal{B}, \subseteq E \in \mathcal{U}_Y$ ↯



102. Gg.: Banachlimes $\Lambda \in L(\ell^\infty, \mathbb{R})$ ist translationsinvariant, dh.

$$\tau : \begin{cases} \ell^\infty \to \ell^\infty \\ f \mapsto (n \mapsto f(n+1)) \end{cases} \Rightarrow \Lambda(\tau f) = \Lambda(f),$$

und $\forall f \in \ell^\infty : \liminf f \leq \Lambda f \leq \limsup f$

(a) Gg.: $T : \begin{cases} \ell^\infty \to \ell^\infty \\ f \mapsto (n \mapsto 1/n \sum_{i=1}^{n} f(i)) \end{cases}$

Zz.: $\lim_{n\to\infty} (T(f)(n) - T(\tau f)(n)) = 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1/n \sum_{i=1}^{n} f(i) - 1/n \sum_{i=1}^{n} f(i+1) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1/n \cdot (f(1) - f(n+1)) = \|f\|_\infty \lim_{n\to\infty} 1/n \, .$$

(b) Zz.: $\forall \mathcal{U}$ Ultrafilter auf $\mathbb{N} : \forall N \in \mathbb{N} : \mathbb{N}_{\geq N} \in \mathcal{U}$:
$\{f(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ Ultrafilterbasis v. $\mathcal{F} \to x$ in $[\inf f, \sup f]$,
$\liminf f \leq x \leq \limsup f$

$\mathcal{B} := \{f(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ ist, laut 101, eine Ultrafilterbasis.

Ww.: $[\inf f, \sup f]$ kompakt $\overset{1.3.2}{\Rightarrow} \mathcal{F} \to x$ darin.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$, wenn $\mathcal{U}_x$ der Umgebungsfilter von x ist

Ww.: $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}_{\geq N}: f(m) \in [\inf_{n \geq N} f(n), \sup_{n \geq N} f(n)]$

$\Rightarrow \underbrace{f(\mathbb{N}_{\geq N})}_{\in \mathcal{F}} \subseteq [\inf_{n \geq N} f(n), \sup_{n \geq N} f(n)] \in \mathcal{F}$

Sei $\delta > 0$ beliebig klein, so $\exists N \in \mathbb{N}$:

$\underbrace{f(\mathbb{N}_{\geq N})}_{\in \mathcal{F}} \subseteq \underbrace{[\liminf f - \delta, \limsup f + \delta]}_{=: I_\delta} \in \mathcal{F}$

Ww.: $\underbrace{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I_\delta}_{\in \mathcal{F}} \neq \emptyset$

Weil ε beliebig war, muss $x \in I_\delta$ und weil δ beliebig war, muss $x \in [\liminf, \limsup f]$.

(c) Ang.: oberes x heißt $\mathcal{U}$-$\lim f$

Zz.: $\mathcal{U}$-$\lim Tf$ definiert einen Banachlimes

Sei $\Lambda_\mathcal{U}: \begin{cases} \ell^\infty \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \mathcal{U}\text{-}\lim f \end{cases}$, so gilt

$\forall \varepsilon > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall f, g \in \ell^\infty\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}$:
$|(x f(n) + y g(n)) - (x \cdot \mathcal{U}\lim f + y \cdot \mathcal{U} \lim g)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \Lambda_\mathcal{U}(xf + yg) = x \Lambda_\mathcal{U}(f) + y \Lambda_\mathcal{U}(g)$

Weil $\liminf (Tf - T(\tau f)) = \limsup (Tf - T(\tau f)) = 0$, ist $\Lambda_\mathcal{U}$ translations invariant und ein Banachlimes.

103. Gg.: $\beta \mathbb{N} = \{ \mathcal{U} \text{ Ultrafilter auf } \mathbb{N} \}$, $A \subseteq \mathbb{N}$,
$\mathcal{O}_A := \{ \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U} \}$;

Zz.: $\{ \mathcal{O}_A : A \subseteq \mathbb{N} \}$ Basis einer Hausdorfftopologie

(i) Seien $U, V \in \mathcal{B} :=$ „oben", $\mathcal{U} \in U \cap V$, dann

$\Rightarrow \exists A, B \subseteq \mathbb{N} : U = \mathcal{O}_A, V = \mathcal{O}_B$
$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ ist Ultrafilter mit $A, B \in \mathcal{U}$
$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$

Sei $W := \mathcal{O}_{A \cap B}$, weil $A \cap B \subseteq A, B$, muss
$\mathcal{U} \in W \subseteq U \cap V$.

(ii) $\bigcup_{A \subseteq \mathbb{N}} \mathcal{O}_A = \beta \mathbb{N}$ ✓

Also ist $\mathcal{B}$, laut Prop 1.1.1, eine top. Basis.

Zz.: $\forall x, y \in X, x \neq y \; \exists U, V \; \exists K_x, K_y \in \mathcal{T}$:
$x \in K_x \subseteq U, \; y \in K_y \subseteq V, \; U \cap V = \emptyset$.

Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \beta\mathbb{N}$, mit $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, dann
$\exists A_1 \in \mathcal{U}_1, A_2 \in \mathcal{U}_2 : A_1 \cap A_2 = \emptyset$, weil sonst
$\forall A_1 \in \mathcal{U}_1, A_2 \in \mathcal{U}_2 : A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) \supsetneq \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$

Durch Kontraposition folgt $\mathcal{O}_{A_1} \cap \mathcal{O}_{A_2} = \emptyset$:
$\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}_{A_1} \cap \mathcal{O}_{A_2} \Rightarrow A_1, A_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Zz.: $\forall A \subseteq \mathbb{N}$: $\mathcal{O}_A$ offen und abgeschlossen

- $\mathcal{O}_A$ offen ✓

- $\mathcal{O}_A$ abgeschlossen.

$$(\mathcal{O}_A)^c = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}^c$$
$$= \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \notin \mathcal{U}\}$$
$$\overset{(48)}{=} \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A^c \in \mathcal{U}\} = \mathcal{O}_{A^c} \in \mathcal{T}.$$

104. Gg.: (X, Υ) top. R., $\mathcal{B}$ Basis v. Υ

Zz.: Υ kompakt $\Leftrightarrow$

$\forall (B_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I, \bigcup_{i\in I} B_i \supseteq X$

$\exists J \subseteq I, \# J < \infty : \bigcup_{j\in J} B_j \supseteq X$

„$\Rightarrow$": K $(:= \Upsilon)$ heißt kompakt, wenn

$\forall (O_i)_{i\in I} \in \Upsilon^I, \bigcup_{i\in I} O_i \supseteq K$

$\exists J \subseteq I, \# J < \infty : \bigcup_{j\in J} O_j \supseteq K$.

Weil $\mathcal{B} \subseteq \Upsilon$, gilt dies auch für $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I \subseteq \Upsilon^I$.

„$\Leftarrow$": Sei $(O_i)_{i\in I} \in \Upsilon^I$, $\bigcup_{i\in I} O_i \supseteq X$ und $\mathcal{B}$ eine Basis.

Ww: $\forall i\in I \; \exists (B_{ij})_{j\in J_i} \in \mathcal{B}^{J_i} : O_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{ij}$

Ww: $\exists I' \in \mathcal{E}(I) : \forall i \in I' \; \exists J_i' \in \mathcal{E}(J_i)$:

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I'} \bigcup_{j\in J_i'} B_{ij} \subseteq \bigcup_{i\in I'} O_i$$

Zz.: $\beta\mathbb{N}$ kompakt

105. Gg.: $(X, \mathcal{T})$ top. R. $\mathcal{S}$ Subbasis,

$\forall (S_i)_{i\in I} \in \mathcal{S}^I,\ \bigcup_{i\in I} S_i \supseteq X$:

$\exists J \in \mathcal{E}(I): \bigcup_{j\in J} S_j \supseteq X$

Zz.: X Kompakt

Sei X nicht kompakt, dann muss für eine Basis $\mathcal{B}$

$\exists (O_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I,\ \bigcup_{i\in I} O_i \supseteq X$:

$\nexists J \in \mathcal{E}(I): \bigcup_{j\in J} O_j \supseteq X$.

Und weil $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist, muss für

$\forall i\in I\ \exists n_i \in \mathbb{N}\ \exists (S_{i,e_i})_{e_i=1}^{n_i} \in \mathcal{S}^{n_i}: O_i = \bigcap_{e_i=1}^{n_i} S_{i,e_i}$.

- Zz.: $\forall i\in I\ \exists e_i \in \{1,\dots,n_i\}$:
  $(O_j)_{j\in I\setminus\{i\}}, S_{i,e_i}$ keine endl. TÜ hat

Ang., es gilt das Gegenteil, dann muss in jeder besagten TÜ S_{i,e_i} enthalten sein.

$\forall e_i \in \{1,\dots,n_i\}\ \exists J_i \in \mathcal{E}(I\setminus\{i\}): \bigcup_{j\in J} O_j \cup S_{i,e_i} \supseteq X$

$\Rightarrow \bigcup_{j\in J} O_j \cup \underbrace{\bigcap_{e_i=1}^{n_i} S_{i,e_i}}_{O_i} \supseteq X$ ↯

Weiters, lassen sich von $(O_i)_{i\in I}$ beliebig viele O_i durch ein $S_{i,e_i} \in \mathcal{S}$ austauschen, ohne eine endl. TÜ zu ermöglichen.

- Betrachte die HO,

$(\{(O_j)_{j\in I\setminus J}, (S_i, e_i)_{i\in J} : J \subseteq I.\ \nexists \text{ endl. TÜ}\}, \preceq)$,

wobei

$(O_j)_{j\in I\setminus J_1}, (S_i, e_i)_{i\in J_1} \preceq (O_j)_{j\in I\setminus J_2}, (S_i, e_i)_{i\in J_2}$
$:\Leftrightarrow J_1 \subseteq J_2$.

Sei $T \neq \emptyset$ eine TK jener HO und
$X := (O_j)_{j\in I\setminus J}, (S_i, e_i)_{i\in J}$ mit $J := \bigcup_{Y\in T} J_Y$.
X ist eine obere Schranke für alle $Y \in T$ und
$J \subseteq I$, weil $\forall Y \in T : J_Y \subseteq I$, also
$\nexists$ endl. TÜ für X.

LvZ $\Rightarrow \exists$ maximales Element $(M_i)_{i\in I}$

- Sei $J := \{i \in I : M_i \in \mathfrak{S}\}$, dann $J \subseteq I$.

Zz.: $\bigcup_{i\in J} M_i \supseteq X$, d.h. $\bigcup_{j\in I\setminus J} O_j \subseteq \bigcup_{i\in J} M_i$.

Ansonsten $\exists j \in I\setminus J : O_j \nsubseteq \bigcup_{j\in J} M_i$ und $(M_i)_{i\in I}$ wäre

nicht maximal, weil O_j austauschbar wäre.

$\Rightarrow (M_j)_{j\in J} \in \mathfrak{S}^J$ hat keine endl. TÜ

106. Gg.: G topologische Gruppe,

$$f : \begin{cases} G \times G \to G \\ (x,y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1} \end{cases}$$

$G \times G$ mit Produkttopologie

Zz.: f stetig

Ww: $\varphi_1 : \begin{cases} G \times G \to G \\ (x,y) \mapsto xy \end{cases}$, $\varphi_2 : \begin{cases} G \to G \\ y \mapsto y^{-1} \end{cases}$ sind stetig

$\Leftrightarrow$ $\varphi_3 : \begin{cases} G \times G \to G \\ (x,y) \mapsto xy^{-1} \end{cases}$ ist stetig.

Die Spiegelung an der Diagonale

$s : \begin{cases} G \times G \to G \times G \\ (x,y) \mapsto (y,x) \end{cases}$ ist stetig, laut Definition.

$g : \begin{cases} G \times G \to G \times G \\ (x,y) \mapsto (\varphi_1(x,y), (\varphi_1 \circ s)(x,y)) \end{cases}$ ist stetig,

laut Prop. 1.4.1, weil $pr_1 \circ g$, $pr_2 \circ g$, es sind.

Letzendlich auch $f = \varphi_3 \circ g$.

107. Zz.: $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, versehen mit Relativtopologie ist topologische Gruppe

Ww.: $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot, E_n)$ ist eine Gruppe.

(i) $\cdot$ ist stetig.

Sei $pr_{ij} : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto a_{ij} \end{cases}$ für $i,j \in \{1, \dots, n\}$.

Weil $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}: pr_{ij} \circ \cdot$ stetig ist (Polynome), so auch $\cdot$.

(ii) $^{-1}$ ist stetig.

Ww.: $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}): A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (a^*_{\ell k})_{\ell,k \in \{1,\dots,n\}}$,

wobei $a^*_{\ell k} = \det A_{k\ell}$ und

$$A_{k\ell} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

108. Gg.: S kompakte Halbgruppe, dh.

- $S \neq \emptyset$ top. R.
- $\cdot : S \times S \to S$ assoziativ

$U \subseteq S$ Unterhalbgruppe $:\Leftrightarrow \forall x, y \in U: xy \in U$.

Zz.: $\exists$ minimale, abgeschlossene Unterhalbgruppe $U \neq \emptyset$

Sei $T \neq \emptyset$ eine Teilkette der Halbordnung
$(\{U \subseteq S : \emptyset \neq U \text{ abgeschlossen}\}, \subseteq)$.
$X := \bigcap_{Y \in T} Y$ ist eine untere Schranke für alle $Y \in T$.
X ist eine Unterhalbgruppe, weil

$$x, y \in X \Rightarrow \forall Y \in T: x, y \in Y$$
$$\Rightarrow \forall Y \in T: xy \in Y \Rightarrow xy \in X.$$

Weil $\forall Y \in T: Y \neq \emptyset$ und S kompakt, muss $X \neq \emptyset$.
X ist als „$\bigcap$" abgeschlossener $Y \in T$, $\subseteq S$,
abgeschlossen.

109. Vg.: K Kompakte linkstopologische Halbgruppe, d.h.
K kompakte Hausdorff-Halbgruppe und
$\forall a \in K: \ \gamma_a: s \mapsto as$ stetig

Zz: $\exists p \in K: \ pp = p$

Sei $a \in M$, dann ist $\gamma_a(M) = \{am : m \in M\} \subseteq M$
und wenn M kompakt ist, dann auch $\gamma_a(M)$
abgeschlossen, weil γ_a stetig ist.
Sei M minimal und abgeschlossen, dann muss $\gamma_a(M) = M$.
Also ist γ_a surjektiv und $\exists p \in M: \gamma_a(p) = a \in M$.
Daher ist $\gamma_a^{-1}(\{a\}) = \{p \in M : \gamma_a(p) = a\} \neq \emptyset$ und
weil es eine abgeschlossene Unterhalbgruppe ist
($\{a\} \subseteq K$ ist kompakt, also abgeschlossen),
$\gamma_a^{-1}(\{a\}) = M$.
Daher $a \in \gamma_a^{-1}(\{a\})$, also $aa = a$.

110. Gg.: Eine Totalordnung $(W, \leq)$ mit $W \neq \emptyset$, heißt Wohlordnung, wenn $\forall T \subseteq W, T \neq \emptyset$: T hat Minimum.

Zz.: $\forall M \neq \emptyset$, Menge : $\exists \leq \subseteq M \times M$: $(M, \leq)$ Wohlordnung

Betrachte die HO,

$(\{A \subseteq M : \exists \leq_A \subseteq A \times A : (A, \leq_A) \text{ Wohlordnung}\}, \preceq)$,

wobei

$A \preceq B \;:\Leftrightarrow\; \leq_A \subseteq \leq_B, \; \exists b \in B : A = \{a \in B : a \leq_B b\}$

Sei $T \neq \emptyset$ eine TK aus oberer HO.

$S := \bigcup_{A \in T} A$ ist eine obere Schranke für $Y \in T$

und $\leq_S = \bigcup_{A \in T} \leq_A$ impliziert eine Wohlordnung $(S, \leq_S)$,

weil alle $A \in T$ dasselbe Minimum haben.

LvZ $\Rightarrow$ $\exists$ maximales Element A_{max}

Nun gilt $A_{max} = M$, weil sonst $\exists m \in M \setminus A_{max}$:

$A_{max} + \{m\} =: B_{max} \succ A_{max}$ $\lightning$