2.7.2 **Lemma.** Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich. ... weil $(x,y) \sim (x,y) \Leftrightarrow xy = xy$ und $(x,n) \sim (y,m) \Leftrightarrow xm = yn \Leftrightarrow yn = xm \Leftrightarrow (y,m) \sim (x,n)$. Sei nun $(x,n) \sim (y,m)$ und $(y,m) \sim (z,k)$. Ok. Es gilt also $xm = yn$ und $yk = zm$. ... per Definition. Wir erhalten

$$(xk)m = (xm)k = (yn)k = (yk)n = (zm)n = (zn)m,$$

und da in $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ die Kürzungsregel (siehe Bemerkung 2.4.5) gilt, folgt daraus $xk = zn$, also $(x,n) \sim (z,k)$. Die oberen Umformungen sind möglich, weil $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ Assoziativität und Kommutativität vorliegt. $\square$