11. Laut Übungsaufgabe 6.41, ist eine Funktion f genau dann konvex im Intervall I, wenn

$\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \lambda \in [0,1]$:

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,

$\Leftrightarrow$

$\forall x, x_1, x_2 \in I, \ x_1 < x_2$:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

exp erfüllt diese Eigenschaft (siehe Sekanten).

Weil $A, B > 0$ und $p, q > 1$ und $1/p + 1/q = 1$, gilt

$$\exp(1/p \cdot \ln(A) + (1 - 1/p) \cdot \ln(B) \leq 1/p \cdot \exp(\ln(A)) + (1 - 1/p) \exp(\ln(B))$$

$$\Leftrightarrow \exp(\ln(A^{1/p}) \exp(\ln(B^{1/q})) \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q}. \qquad \square$$

12. Wir definieren

$$A_k := \frac{|x_k|^p}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \; , \quad B_k := \frac{|y_k|^q}{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q} \geq 0 \, .$$

Mit der Young'schen Ungleichung folgt

$$A_k^{1/p} B_k^{1/q} \leq \frac{A_k}{p} + \frac{B_k}{q} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}} \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq$$

$$1/p \cdot \sum_{k=1}^{n} A_k + 1/q \cdot \sum_{k=1}^{n} B_k = 1/p + 1/q = 1 .$$

13. Sei für $1 \leq p < \infty$, $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

(i) $\|x\|_p \geq 0$ und $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}$ sind trivial,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \; \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$ ebenso,

(iii) Zz: $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}$.

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1} =$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1}} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1}.$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i (x_i + y_i)^{p-1}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \left(|x_i + y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}}_{\dots}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1 - 1/p}$$

$1/p + 1/q = 1 \Rightarrow 1/q = 1 - 1/p$

$\Rightarrow q = \frac{1}{1 - 1/p} = \frac{p}{p-1}$.

Nun hebt man heraus und dividiert letztere Summe.

14. Zz: $\exists \alpha, \beta > 0 : \forall x \in X : \alpha \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \beta \|x\|_p$, wenn X ein linearer Raum ist und $1 \leq p, q \leq \infty$, mit $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ als Normen auf $X := \mathbb{R}^n$.

Zuerst zeigen wir, dass $1 \leq p < q < \infty$
$\Rightarrow \|\cdot\|_p \geq \|\cdot\|_q \geq \|\cdot\|_\infty$

$$\max_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q} \Leftrightarrow$$

$$x_{max}^q \leq |x_{max}|^q \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^q = |x_{max}|^q + \overbrace{C}^{\geq 0}.$$

Ww: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] : \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n} : |x_i| = |\lambda_i x_{max}|$, also

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i \cancel{x_{max}}|^q\right)^{1/q} = \|x\|_q \leq \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i \cancel{x_{max}}|^p\right)^{1/p} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^q \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p}_{\geq 1, \text{ wegen } \exists i \in \mathbb{N}_{\leq n} : \lambda_i x_{max} = x_{max}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p\right)^r.$$

Außerdem $r := q/p > 1 \Leftarrow q > p$ und, laut Hinweis, $0 < p < q \wedge \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda^q \leq \lambda^p$.

Nun verwenden wir die Ungleichungskette aus Beispiel 9.2.3 (i):

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n \cdot \|x\|_\infty. \qquad \square$$

Explizit:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{p/q} \left(\sum_{i=1}^n |1|^{\frac{1}{1-p/q}}\right)^{1/p}\right]^{1/p} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q} \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} = \|x\|_q \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

15. (i) Sei $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ die Identität für $1 \leq p < q \leq \infty$. $(X := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\|A\| = \sup_{x \in X} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p} = \sup_{x \in X} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} = 1, \text{ weil}$$

$$\text{Ww}: \|\cdot\|_p \geq \|\cdot\|_q \Rightarrow 1 \geq \frac{\|\cdot\|_q}{\|\cdot\|_p} \geq 0.$$

Um einzusehen, dass 1 nicht bloß eine obere Schranke ist, betrachte $c \cdot e_i$ $(c \in \mathbb{R})$.

(ii) Sei nun $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.

$$\|A\| = \cdots = \sqrt{n}, \text{ weil}$$

$$\forall x \in X: \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot 1|}_{\|x\|_1} \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}}_{\|x\|_2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |1|^2\right)^{1/2}}_{\sqrt{n}}.$$

Um einzusehen ... betrachte $c \sum_{i=1}^{n} e_i$ $(c \in \mathbb{R})$.

(iii) Sei nun nun $A_x : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R}$ mit $A_x y$ als Skalarprodukt von $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\|A_x\| = \sup_{x \in X} \frac{|A_x y|}{\|y\|_2} = \|x\|_2, \text{ weil}$$

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|}{\|y\|_2} \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\ \cancel{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}}}{\cancel{\|y\|_2}}.$$

Um einzusehen ... betrachte $x = y$.

16. Z_z: $SO_n(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen.

$$SO_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : \left\| \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \right\|_2 = 1\} \cap SL_n(\mathbb{R}).$$

Wir definieren eine Abbildung $f^{(n)} : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, mit

$$f^{(n)}(A) := \left(\left\| \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \right\|_2, \ldots, \left\| \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \right\|_2 \right)^T.$$

Die Stetigkeit folgt aus der Δ-Ungleichung nach unten für $\|\cdot\|_2$, der Characterisierung von Stetigkeit als $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$ und der Äquivalenz zwischen komponenten- und tupelweiser Konvergenz.

Um die Stetigkeit von det zu zeigen, wählen wir die $\|\cdot\|_\infty$ Norm (äquivalent zu allen anderen Normen).

Ww: Wird $\max\limits_{(i,j) \in \mathbb{N}_{\leq n} \times \mathbb{N}_{\leq n}} |a_{ij} - b_{ij}|$ beliebig klein, so auch insbesondere der Abstand zwischen allen anderen jeweiligen Komponenten von $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\left| \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} \right| \leq \sum_{\sigma \in S_n} \left| \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} - \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} \right|.$$

oBdA. Betrachte nun bloß einen, der $n!$, Summanden.

Für $n = 1$, sind wir fertig, da dieser beliebig klein werden kann.

Sei der Abstand zwischen den Produkten mit n Faktoren bereits kleiner als ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Wir berechnen

$$\left| a_{\sigma(n+1)(n+1)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} - b_{\sigma(n+1)(n+1)} \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} \right| = \ldots$$

$$\left|\prod_{i=1}^{n+1} a_{\sigma(i)i} - \prod_{i=1}^{n+1} b_{\sigma(i)i}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\left|\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} - \underbrace{\frac{b_{\sigma(n+1)(n+1)}}{a_{\sigma(n+1)(n+1)}}}_{\to 1} \prod_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)i}\right|}_{\to 0} < \frac{\varepsilon}{a_{\sigma(n+1)(n+1)}} .$$

Wenn wir A festhalten, so ist die Stetigkeit von det gezeigt.

Weil $\{\sum_{i=1}^{n} e_i\}$ und $\{1\}$ abgeschlossen und $f^{(n)}$, det stetig, sind auch die oberen Mengen (Urbilder), und insbesondere ihr Schnitt, $SO_n(\mathbb{R})$, abgeschlossen.

17. Betrachte die Differenzialgleichung

$$f'(t) = A f(t), \quad f(0) = E_n,$$

mit der Lösung $f(t) = e^{tA}$ (Verifizieren durch Einsetzen).
Die Abbildung e^{tA} ist für festes t beschränkt, da

$$\|e^{tA}\| \leq e^{\|tA\|} = e^{|t| \cdot \|A\|} \leq \left(e^{\ln(2)}\right)^{|t|} = 2^{|t|}.$$

Wir leiten also mit der Produktregel ab.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA} f(t)\right) = -e^{-tA} A f(t) + e^{-tA} A f'(t) =$$

$$e^{-tA} A e^{tA} - e^{-tA} A e^{tA} = 0,$$

also ist $e^{-tA} f(t)$ konstant. Insbesondere gilt $\forall t$:

$$e^{-tA} e^{tA} = \text{„Konstante"} = e^{-0A} e^{0A} = E_n.$$

Weil es sich also bei e^{A} um eine endlich dimensionale, injektive (Linksinverse!) lineare Abbildung handelt, ist diese auch sorjektiv, bzw. bijektiv. $\square$

18. Seien $r, s \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Zz: $e^{rA} e^{sA} = e^{(r+s)A}$.

$$\frac{d}{dr}\left(e^{rA} e^{(u-r)A}\right) = A e^{rA} e^{(u-r)A} + e^{rA}(-A) e^{(u-r)A} = 0.$$

Also ist $e^{rA} e^{(u-r)A}$ bzgl. r konstant.

$$e^{rA} e^{(u-r)A} = e^{0 \cdot A} e^{(u-0)A} = e^{uA} \Leftrightarrow$$

$$e^{(u-r)A} = e^{-rA} e^{uA}.$$

$\square$

19. Laut Bemerkung 9.3.19, differenzieren / integrieren / summieren wir komponentenweise:

$$F'(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) + t\sinh(t) \\ \exp(t^2)(2t^2+1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\int t\cosh(t)\,dt = \sinh(t)t - \int \sinh(t)\,dt$,
- $\int t\exp(t^2)\,dt \,\Big|\, \begin{matrix} u = t^2 \\ dt = 1/2t\,du \end{matrix} = \int t e^u \frac{1}{2t}\,du$,
- trivial, also

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \begin{pmatrix} \sinh(1) - \cosh(1) \\ \exp(1)/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/e \\ (e-1)/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. (i)

$$\|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| + \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_x^1 f(t)\,dt\right|}{\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|} \leq$$

$$\frac{\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|}{\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|} = 2,$$

wird für jede Konstante Funktion erreicht.

(ii)

$$\|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\max(\sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|, \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_x^1 f(t)\,dt\right|}{\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|} \leq$$

$$\frac{\sup_{t\in[0,1]} |f(t)|}{\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|} = 1, \ldots$$