A 1.13.4

Weil, laut Satz 1.13.3, jede Permutation $\sigma \in S_n$ als Produkt von maximal n Transpositionen dargestellt werden kann, genügt es, zu zeigen, dass jede Transposition als Produkt von

$$\pi_{12}, \pi_{13}, \ldots, \pi_{1n}$$

dargestellt werden kann.

Sei π_{ij} eine beliebige Transposition.

$$1 \ldots i \ldots j \ldots n \underset{\pi_{1i}}{\mapsto} i \ldots 1 \ldots j \ldots n \underset{\pi_{1j}}{\mapsto} j \ldots 1 \ldots i \ldots n \underset{\pi_{1i}}{\mapsto} 1 \ldots j \ldots i \ldots n.$$

Also gilt $\pi_{ij} = \pi_{1i} \circ \pi_{1j} \circ \pi_{1i}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = id_{S_3};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \pi_{12} \circ \pi_{13} \circ \pi_{12};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \pi_{13};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \pi_{12};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \pi_{13} \circ \pi_{12} \circ \pi_{13} \circ \pi_{12};$$

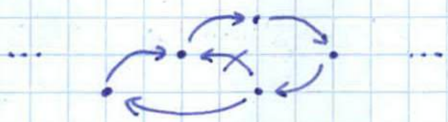
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \pi_{13} \circ \pi_{12};$$

Alle $3! = 6$ Elemente, fertig.

A 1.13.5

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in S_n$, so partitionieren wir $I = \{1, \dots, n\}$ nach

$$\sim_\sigma := \{(a,b) \in I^2 : \exists k \in \mathbb{N}^\times : \sigma^{(k)}(a) = b\}.$$



Der durchgestrichene Pfeil widerspräche der Bijektivität. Also ist „$\sim_\sigma$" eine Äquivalenzrelation, weil $\# I = n < \infty$ (σ müsste im schlimmsten Fall n-mal angewendet werden).

Jeder Äquivalenzklasse $[m]_\sim$, werde eindeutig σ_m zugeordnet:

$$\sigma_m : I \to I : r \mapsto \begin{cases} \sigma(r), & \text{falls } r \in [m]_\sim \\ r, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Definition von $\sim_\sigma$, gibt es keine weiteren Zyklen. Wählen wir aus ℓ Äquivalenzklassen die Repräsentanten $m_1, \dots, m_\ell$, so gilt

$$\sigma = \sigma_{m_1} \circ \dots \circ \sigma_{m_\ell}.$$

A 5.3.5

(a) Sei $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von U. Erweitere diese auf die Basis $(b_j)_{j\in J}$, mit $I \subseteq J$, von V.
$a^* \in V^*$ ist, als lineare Abbildung, laut Fortsetzungssatz, durch $\langle a^*, (b_j)_{j\in J} \rangle$ festgelegt; Konsequenterweise auch auf $(b_i)_{i\in I}$.
Jene $(b_i)_{i\in I}$ geben dann ein eindeutiges $a^*|_U \in U^*$ vor.
Daher ist f wohldefiniert.

$f(ca^* + b^*) = (ca^* + b^*)|_U = c\,a^*|_U + b^*|_U =$
$c f(a^*) + f(b^*)$.

Für die Surjektivität, muss

$\forall b^* \in U^* \, \exists a^* \in V^* : f(a^*) = b^*$.

Sei $b^* \in U^*$, also eindeutig durch $(b_i)_{i\in I}$ festgelegt.
a^* lässt sich konstruieren, dass sie auf $(b_i)_{i\in I}$ dasselbe wie b^* leistet, und irgendetwas auf $(b_j)_{j\in J\setminus I}$.

$\ker f = U^\circ := \{a^* \in V^* : \langle a^*, U\rangle = \{0\}\}$, weil

$a^* \in \ker f :\Leftrightarrow f(a^*) = \mathcal{O}|_U^* \Leftrightarrow a^* \in U^\circ$.

(b) $\forall a^* \in V^* : a^* + U^\circ = \{y^* \in V^* : y^*|_U = a^*|_U\}$, weil

„$\subseteq$" Sei $c^* \in a^* + U^\circ \Rightarrow \exists b^* \in U^\circ : c^* = a^* + b^*$.

$f(c^*) = f(a^* + b^*) = f(a^*) + f(b^*) = f(a^*)$.
$c^*|_U \quad = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = a^*|_U$

„$\supseteq$" analog.

(c) $g: V^*/U^\circ \to U^*: a^* + U^\circ \mapsto a^*|_U$ mit $a^* \in V^*$.

Dies folgt aus dem Homomorphiesatz:

- $\ker f = U^\circ$ ✓
- f ist linear $\Rightarrow$ f ist homomorph ✓
- $a^*|_U = f(a^*)$ ✓

A 7.2.1

$$A_t := \left[\begin{array}{ccc} 5-9t & -4 & -2 \\ -4 & 5-9t & -2 \\ -2 & -2 & 8-9t \end{array}\right] \begin{array}{cc} 5-9t & -4 \\ -4 & 5-9t \\ -2 & -2 \end{array}$$

Nach der Regel von Sarrus, gilt:

„Parallelen der Hauptdiagonale minus parallelen der Nebendiagonale."

$$\det A_t = (25 - 90t + 81t^2)(8-9t) + (-16) + (-16)$$
$$- (20-36t) - (20-36t) - 16(8-9t) =$$
$$200 - 720t + 648t^2 - 225t + 810t^2 - 729t^3 - 32$$
$$-40 + 72t - 128 + 144t =$$
$$-720t^3 + 1458t^2 - 729t = -t(27t-27)^2$$

A_T singulär $:\Leftrightarrow \not\exists A_t^{-1}$ und $A_t \in K^{n\times n} \Leftrightarrow$ Spalten von A_t l.a. $\Leftrightarrow \det A_t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$.

$$t = 1: \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A_1 = 1$$

$$t = 0: \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & -9 & 18 \\ -4 & 9 & -18 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & -9 & 0 \\ -4 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A_0 = 2$

$t \notin \{0, 1\}: \operatorname{rg} A_t = 3$

A 7.2.2

Liste aller $\sigma \in S_4$:

[1 2 3 4], [1 2 4 3], [1 3 2 4], [1 3 4 2], [1 4 2 3], [1 4 3 2]

[2 1 3 4], [2 1 4 3], [2 3 1 4], [2 3 4 1], [2 4 1 3], [2 4 3 1]

[3 1 2 4], [3 1 4 2], [3 2 1 4], [3 2 4 1], [3 4 1 2], [3 4 1 2]

[4 1 2 3], [4 1 3 2], [4 2 1 3], [4 2 3 1], [4 3 1 2], [4 3 2 1]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(4)4} =$$

$$1 + 6 + 3 - 2 - 1 - 6 - 3 = -2.$$

A 7.3.2

Satz 1.11.14 (Homomorphiesatz für Gruppen) Sei $\Psi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : G / \ker \Psi \to \Psi(G) : a \ker \Psi \mapsto \Psi(a) \text{ mit } a \in G$$

ein Isomorphismus der Faktorgruppe $G/\ker \Psi$ auf die Gruppe $\Psi(G)$.

$SL(V) = \{ f \in GL(V) \mid \det f = 1 \} = \ker \Psi$;

$G = GL(V)$;

$\Psi : GL(V) \to (K^\times, \cdot) : f \mapsto \det f$ ist homomorph, laut Satz 7.3.5;

A 7.3.4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A \cdot E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle E^*, f(E) \rangle.$$

Regel von Sarrus: $\det \langle E^*, f(E) \rangle = -1$.

Einfacher: Lege, laut Fortsetzungssatz, f durch $(e_i)_{i=1}^{3}$ zurecht:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$