Letzte Woche haben wir gezeigt, dass die mit der Galileitransformation kompatible Lagrangefunktion $L(q, v, t) = mv^2/2$ ist. Unter Lorentztransformationen (in allen Bezugssystemen gibt es eine Maximalgeschwindigkeit) kommt man auf

$$L(q, v, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{4.1}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $-c \leqslant v \leqslant c$. Um nun bei der nächsten Party sagen zu können dass Sie Raketenwissenschaften studieren (und die Wartezeit bis dahin zu verkürzen):

a) Berechnen Sie den kanonischen Impuls p.

a) Für $q, t \in \mathbb{R}$ bel. sei $\tilde{p} :]-c, c[\to]-\infty, 0] : v \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(q, v, t)$

$$\tilde{p}(v) = \frac{\partial L}{\partial v}(q, v, t) = -mc^2 \, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) = mv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

b) Zeigen Sie

$$H(q, p, t) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \tag{4.2}$$

Entwickeln Sie H für großes c und finden Sie so die relativistische Energiekorrektur $\propto p^4$ zur kinetischen Energie.

Für $v \in]-c, c[$ gilt

$$\tilde{p}(v) = mv\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\tilde{p}(v)\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 v^2 \Leftrightarrow \left(\tilde{p}(v)\right)^2 = \left(m^2 + \frac{(\tilde{p}(v))^2}{c^2}\right) v^2 \Leftrightarrow v = \pm \, \tilde{p}(v) \left(m^2 + \frac{(\tilde{p}(v))^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$H(q, p, t) = p^2 \left(m^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + mc^2 \left(1 - c^{-2} p^2 \left(m^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[p^2 c + mc^2 (m^2c^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - p^2 (m^2c^2 + p^2)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] (m^2c^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[p^2 c + mc^2 \left(m^2c^2 - p^2m^2c^2 (m^2c^2 + p^2)^{-1} + p^2 - p^4 (m^2c^2 + p^2)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] (m^2c^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[p^2 c + mc^2 \left(m^2c^2 - p^2 (m^2c^2 + p^2)^{-1} (m^2c^2 + p^2) + p^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] (m^2c^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[p^2c + m^2c^3\right] (m^2c^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}} = c\,(m^2c^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

$$H(q, \tilde{p}, t) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = c^2 \sqrt{p^2 c^{-2} + m^2}$$

betrachte: $f :]0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{p^2x^2 + m^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (p^2x^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \, 2p^2x = p^2x \, (p^2x^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = p^2 (p^2x^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} + p^2x \left(-\frac{1}{2}\right) (p^2x^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}} \, 2p^2x = p^2 (p^2x^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} - 2p^4x^2 (p^2x^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}}$$

usw.: $f(k) = m + x^2 \frac{p^2}{2m} - x^4 \frac{p^4}{8m^3} + \Theta(x^5)$ für $x \to 0$

$$\Rightarrow H(q, p, t) \approx c^2 m + \frac{p^2}{2m} - c^{-2} \frac{p^4}{8m^3}$$

c) Berechnen Sie die Poisson Klammer $\{H, L_z\}$. *Hinweis: Die Wurzel sollte Ihnen nun Sorgen machen. Wie bekommen Sie die Wurzel weg? Schauen Sie noch einmal über das Beispiel.*

$$L_z = y p_x - x p_y \quad , \qquad H(q,p,t) = \sqrt{p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2 + p_z^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$\{H, L_z\} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \left(\frac{\partial H}{\partial i} \frac{\partial L_z}{p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial L_z}{\partial i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2 + p_z^2 c^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2 p_x c^2 p_y - \frac{1}{2} \left(p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2 + p_z^2 c^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2 p_y c^2 p_x = 0$$

4.2 3-ATOMIGES MOLEKÜL

Betrachten Sie Oszillationen eines 3 atomigen Moleküls in einer Dimension (fig. 4.1). Modellieren Sie das System mit durch Federn (Federkonstante k) verbundenen Massen (m_1, m_2) (siehe Skizze) und benutzen Sie die Auslenkungen aus der Ruhelage x_1, x_2 und x_3 als generalisierte Koordinaten.

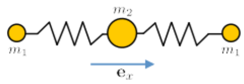


FIGURE 4.1: *Mechanisches Model eines 3 atomigen Molekäls in 1D*

a) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion $H(x_i, p_i)$ des Systems (hier einfach T+V) an und bestimmen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

$$L : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)^T \mapsto \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2$$

$$\tilde{p} : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) : v \mapsto dL(x, v) \quad , \text{wobei } x \in \mathbb{R}^3 \text{ bel.}$$

für bel. $v \in \mathbb{R}^3$: $\tilde{p}(v) = (m_1 v_1, m_2 v_2, m_3 v_3)$

$$\tilde{p}^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : p \mapsto \left(\frac{p_1}{m_1}, \frac{p_2}{m_2}, \frac{p_3}{m_3}\right)$$

$$H : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R} : (x, p)^T \mapsto \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2$$

Hamiltonsche Bewegungsglg., mit
$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = M p$$

$$\dot{p}_1 = k(x_2 - x_1), \quad \dot{p}_2 = -k(x_2 - x_1 - x_3 + x_2), \quad \dot{p}_3 = -k(x_3 - x_2)$$

b) Berechnen Sie die Fundamentalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems: Sie drücken zuerst die Impulse $p_i = m\dot{x}_i$ durch die Koordinaten aus und erhalten mit dem Ansatz $x_i = c_i e^{i\omega t}$ (Plenum/Folien) ein lineares Gleichungssystem mit einer 3×3 Koeffizienten Matrix. Welche der Eigenmoden stellt eine Translation dar, welche eine gegenphasige Schwingung der äußeren Atome und wo schwingt das mittleres Atom gegenphasig zu den äußeren Atomen?

$m_1 = m_3$

$$\ddot{x} = M\dot{p} = M k (x_2 - x_1, x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 - x_3)^T = k \begin{pmatrix} -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_1} & 0 \\ \frac{1}{m_2} & -\frac{2}{m_2} & \frac{1}{m_2} \\ 0 & \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \end{pmatrix} x$$

Ansatz $x(t) = c\, e^{i\omega t}$ mit $c \in \mathbb{R}^3$

also
$$-c\omega^2 = k\left(\frac{1}{m_1}(c_2 - c_1), \frac{1}{m_2}(c_1 - 2c_2 + c_3), \frac{1}{m_1}(c_2 - c_3)\right)^T$$

d.h.
$$-c_1\omega^2 = \frac{k}{m_1}(c_2 - c_1)$$
$$-c_2\omega^2 = \frac{k}{m_2}(c_1 - 2c_2 + c_3)$$
$$-c_3\omega^2 = \frac{k}{m_1}(c_2 - c_3)$$

Fall 1: $k - m_1\omega^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \rightsquigarrow$ 0-Lsg.

Fall 2. $k - m_1\omega^2 \neq 0$ dann ist $\frac{c_1}{m_1}(k - m_1\omega^2) = c_1\left(\frac{k}{m_1} - \omega^2\right) = \frac{k}{m_1}c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{k}{k - m_1\omega^2}c_2$

und $\frac{c_3}{m_1}(k - m_1\omega^2) = \frac{k}{m_1}c_2 \Rightarrow c_3 = \frac{k}{k - m_1\omega^2}c_2 = c_1$

es gilt

$$-c_2\omega^2 = \frac{2k}{m_2}\left(\frac{k}{k - m_1\omega^2}c_2 - c_2\right) \Leftrightarrow c_2\left[\frac{2k}{m_2}\left(1 - \frac{k}{k - m_1\omega^2} - \frac{m_2}{2k}\omega^2\right)\right] = 0$$

Fall 2.1: $c_2 = 0 \rightsquigarrow$ gegenphasige Schwingung der beiden Äußeren

Fall 2.2: $c_2 \neq 0$ dann gilt $1 = \frac{k}{k - m_1 w^2} + \frac{m_2 w^2}{2k}$

$\Leftrightarrow \quad (k - m_1 w^2) 2k = 2k^2 + m_2 w^2 (k - m_1 w^2)$

$\Leftrightarrow \quad 2k^2 - m_1 w^2 2k = 2k^2 + m_2 w^2 k - m_1 m_2 w^4$

$\Leftrightarrow \quad m_1 m_2 w^4 = w^2 k (m_2 + 2m_1)$

Fall 2.2.1: $w = 0$ dann ist $c_1 = c_2 = c_3 \rightsquigarrow$ Translation

Fall 2.2.2: $m_1 m_2 w^2 = k(m_2 + 2m_1) \Leftrightarrow w = \pm \sqrt{\frac{k(m_2+2m_1)}{m_1 m_2}}$

mittleres gegenphasig zu Äußeren.

4.3 PHASENRAUMPORTRAIT DES TEILCHENS AUF EINER HÜGELLANDSCHAFT

Wir erinnern uns an das Teilchen in einer Hügellandschaft *1.3)*, mit Masse m, $x \in \mathbb{R}$ und

$$y = \cos(ax), \qquad \mathbf{F}_G = -mg\hat{\mathbf{e}}_y. \tag{4.3}$$

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}) = T - V$ auf, berechnen den kanonischen Impuls p und führen eine Legendretransformation durch um den Hamiltonian $H(x, p)$ zu erhalten.

$$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, v) \mapsto \frac{m v^2 (1 + a^2 \sin^2(ax))}{2} - mg \cos(ax)$$

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\tilde{p}_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : v \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) = mv(1 + a^2 \sin^2(ax))$

$$\tilde{p}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto \left(m(1 + a^2 \sin^2(ax))\right)^{-1} p$$

$$H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, p) \mapsto p\,\tilde{p}^{-1}(p) - L(x, \tilde{p}^{-1}(p)) = \frac{p^2}{m}(1 + a^2 \sin^2(ax))^{-1} - \frac{p^2}{2m}(1 + a^2 \sin^2(ax))^{-1} + mg\cos(ax)$$

$$= \frac{p^2}{2m}(1 + a^2 \sin^2(ax))^{-1} + mg\cos(ax)$$

b) Linearisieren Sie die Hamiltonfunktion an $x = 0$, $x = \pi$, sowie $x = -\pi/2$ und $x = \pi/2$ und betrachten Sie auch den Grenzfall $p \to \infty$. Berechnen Sie für alle diese Fälle die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen; Sie können nun $m \equiv a \equiv g \equiv 1$ setzen.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) = -\frac{p^2}{2m}(1 + a^2 \sin^2(ax))^{-2} a^2\, 2 \sin(ax) \cos(ax)\, a - mg \sin(ax)\, a$$

$$= -mga\sin(ax) - \frac{p^2 a^3 \sin(ax)\cos(ax)}{m}(1 + a^2 \sin^2(ax))^{-2}$$

$$\boxed{m = a = g = 1}$$

1) Linearisierung um $x = 0$:

$\frac{\partial H}{\partial x}(0, p) = 0$ und daher $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + mg + \mathcal{O}(x^2)$

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) = \frac{p}{m} = p$ sowie $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) = 0$

2) Linearisierung um $x = \pi$

$\frac{\partial H}{\partial x}(\pi, p) = 0$ und daher $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - mg + \mathcal{O}(x^2)$

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) = \frac{p}{m} = p$ sowie $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) = 0$

3) Linearisierung um $x = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{\partial H}{\partial x}(-\frac{\pi}{2}, p) = mga = 1$ und daher $H(x, p) = \frac{p^2}{4m} + (x + \frac{\pi}{2}) + \mathcal{O}(x^2)$

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) = \frac{p}{2m} = \frac{p}{2}$ sowie $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) = -1$

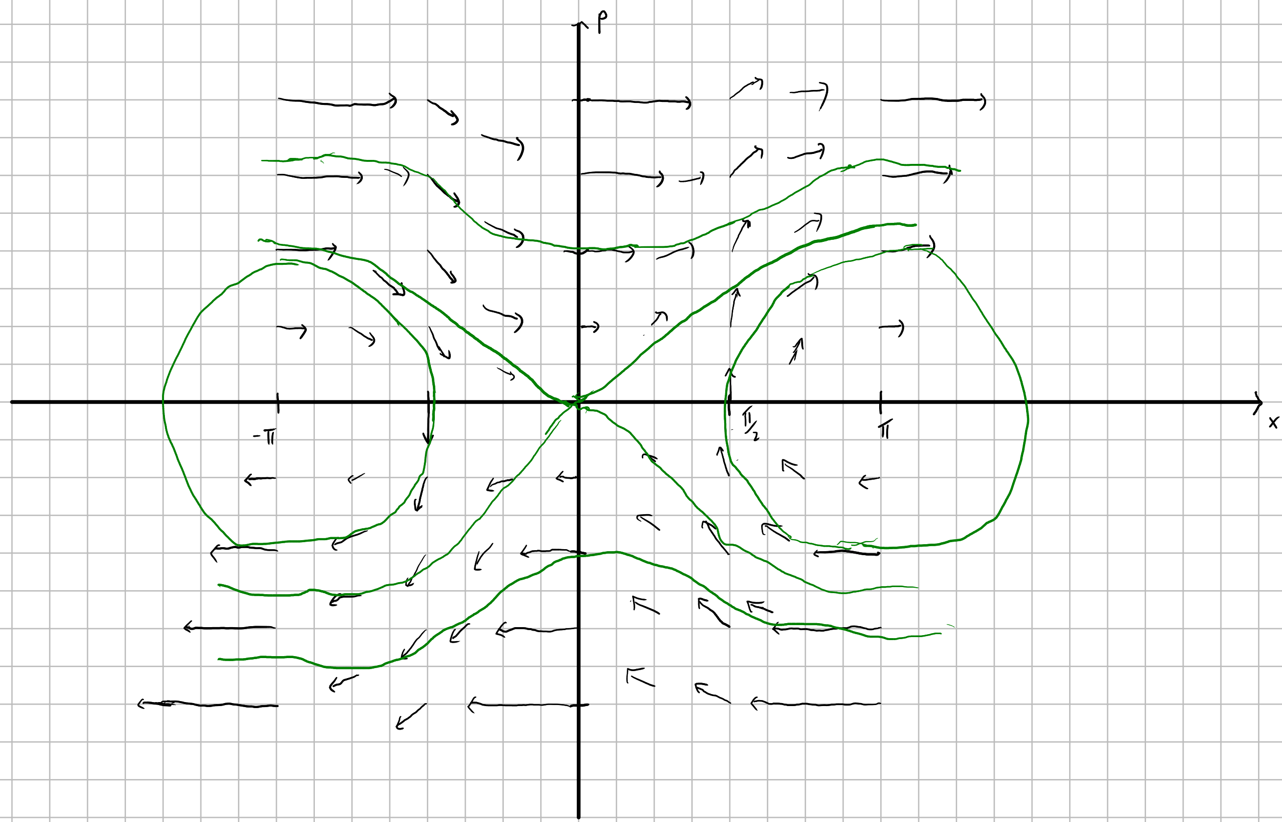
4) Linearisierung um $x = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\partial H}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, p) = -mga = -1$ und daher $H(x, p) = \frac{p^2}{4m} - (x - \frac{\pi}{2}) + \mathcal{O}(x^2)$

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) = \frac{p}{2m} = \frac{p}{2}$ sowie $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) = 1$

$p \to \infty$: konstant

c) Zeichnen Sie mit den erhaltenen Lösungen ein Phasenraumportrait. Nahe der Stellen $x = 0, x = \pi$, sowie $x = -\pi/2$ und $x = \pi/2$ sollten Sie den Zusammenhang zwischen der Trajektorie im Phasenraum, der Trajektorie im Ortsraum, und den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erklären können. *Hinweis: Sollten Sie hier Schwierigkeiten haben, finden Sie in vielen Lehrbüchern oder dem Internet diese Aufgabe für das Pendel gelöst.*



a) Zeigen Sie dass Poisson Klammern die Jacobi-Identität erfüllen.

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ offen. Betrachte $\{\cdot,\cdot\}: C^\infty(\Omega)\times C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega): (f,g) \mapsto \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$

wobei $\binom{q}{p} \in \mathbb{R}^{2d}$ mit $q, p \in \mathbb{R}^d$

Seien $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(\Omega)$ und $\pi: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ eine Permutation

$$\{f_{\pi(1)}, \{f_{\pi(2)}, f_{\pi(3)}\}\} = \{f_{\pi(1)}, \sum_{j=1}^{d}\left(\partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_j} f_{\pi(3)} - \partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_j} f_{\pi(3)}\right)\}$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\left[\{\partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_j} f_{\pi(3)}, f_{\pi(1)}\} - \{\partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_j} f_{\pi(3)}, f_{\pi(1)}\}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\left[\sum_{k=1}^{d}\left(\partial_{q_k}(\partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_j} f_{\pi(3)})\, \partial_{p_k} f_{\pi(1)} - \partial_{p_k}(\partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_j} f_{\pi(3)})\, \partial_{q_k} f_{\pi(1)} - \partial_{q_k}(\partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_j} f_{\pi(3)})\, \partial_{p_k} f_{\pi(1)} + \partial_{p_k}(\partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_j} f_{\pi(3)})\, \partial_{q_k} f_{\pi(1)}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big[\partial_{q_k}\partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{p_k} f_{\pi(1)} + \partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_k}\partial_{q_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{p_k} f_{\pi(1)} - \partial_{p_k}\partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{q_k} f_{\pi(1)} - \partial_{p_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_k}\partial_{q_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{q_k} f_{\pi(1)} -$$
$$\partial_{q_k}\partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{p_k} f_{\pi(1)} - \partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{q_k}\partial_{p_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{p_k} f_{\pi(1)} + \partial_{p_k}\partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{q_k} f_{\pi(1)} + \partial_{q_j} f_{\pi(2)}\, \partial_{p_k}\partial_{p_j} f_{\pi(3)}\, \partial_{q_k} f_{\pi(1)}\Big]$$

$\pi_1: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}: x \mapsto x$; $\pi_2(1) = 2$, $\pi_2(2) = 3$, $\pi_2(3) = 1$; $\pi_3(1) = 3$, $\pi_3(2) = 1$, $\pi_3(1) = 2$

$$\sum_{\pi \in \{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}} \{f_{\pi(1)}, \{f_{\pi(2)}, f_{\pi(3)}\}\}$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big[\cancel{\partial_{q_k}\partial_{p_j} f_2\, \partial_{q_j} f_3\, \partial_{p_k} f_1} + \cancel{\partial_{p_j} f_2\, \partial_{q_k}\partial_{q_j} f_3\, \partial_{p_k} f_1} - \cancel{\partial_{p_k}\partial_{p_j} f_2\, \partial_{q_j} f_3\, \partial_{q_k} f_1} - \cancel{\partial_{p_j} f_2\, \partial_{p_k}\partial_{q_j} f_3\, \partial_{q_k} f_1} - \cancel{\partial_{q_k}\partial_{q_j} f_2\, \partial_{p_j} f_3\, \partial_{p_k} f_1} - \cancel{\partial_{q_j} f_2\, \partial_{q_k}\partial_{p_j} f_3\, \partial_{p_k} f_1} +$$
$$\cancel{\partial_{p_k}\partial_{q_j} f_2\, \partial_{p_j} f_3\, \partial_{q_k} f_1} + \cancel{\partial_{q_j} f_2\, \partial_{p_k}\partial_{p_j} f_3\, \partial_{q_k} f_1}\Big] +$$
$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big[\cancel{\partial_{q_k}\partial_{p_j} f_3\, \partial_{q_j} f_1\, \partial_{p_k} f_2} + \cancel{\partial_{p_j} f_3\, \partial_{q_k}\partial_{q_j} f_1\, \partial_{p_k} f_2} - \cancel{\partial_{p_k}\partial_{p_j} f_3\, \partial_{q_j} f_1\, \partial_{q_k} f_2} - \cancel{\partial_{p_j} f_3\, \partial_{p_k}\partial_{q_j} f_1\, \partial_{q_k} f_2} - \cancel{\partial_{q_k}\partial_{q_j} f_3\, \partial_{p_j} f_1\, \partial_{p_k} f_2} - \cancel{\partial_{q_j} f_3\, \partial_{q_k}\partial_{p_j} f_1\, \partial_{p_k} f_2} +$$
$$\cancel{\partial_{p_k}\partial_{q_j} f_3\, \partial_{p_j} f_1\, \partial_{q_k} f_2} + \cancel{\partial_{q_j} f_3\, \partial_{p_k}\partial_{p_j} f_1\, \partial_{q_k} f_2}\Big] +$$
$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big[\cancel{\partial_{q_k}\partial_{p_j} f_1\, \partial_{q_j} f_2\, \partial_{p_k} f_3} + \cancel{\partial_{p_j} f_1\, \partial_{q_k}\partial_{q_j} f_2\, \partial_{p_k} f_3} - \cancel{\partial_{p_k}\partial_{p_j} f_1\, \partial_{q_j} f_2\, \partial_{q_k} f_3} - \cancel{\partial_{p_j} f_1\, \partial_{p_k}\partial_{q_j} f_2\, \partial_{q_k} f_3} - \cancel{\partial_{q_k}\partial_{q_j} f_1\, \partial_{p_j} f_2\, \partial_{p_k} f_3} - \cancel{\partial_{q_j} f_1\, \partial_{q_k}\partial_{p_j} f_2\, \partial_{p_k} f_3} +$$
$$\cancel{\partial_{p_k}\partial_{q_j} f_1\, \partial_{p_j} f_2\, \partial_{q_k} f_3} + \cancel{\partial_{q_j} f_1\, \partial_{p_k}\partial_{p_j} f_2\, \partial_{q_k} f_3}\Big] = 0$$

b) Berechnen Sie $\{L_x, y\}$ und $\{L_y, p_z\}$. *Hinweis: Nicht zwingend notwendig, aber für ihr weiteres Studium hilfreich ist es, sich hier mit dem Levi-Civita-Symbol oder Epsilon-Tensor vertraut zu machen.*

$$\{L_x, y\} = \sum_{j \in \{x,y,z\}}\left(\frac{\partial L_x}{\partial j}\frac{\partial y}{\partial p_j} - \frac{\partial L_x}{\partial p_j}\frac{\partial y}{\partial j}\right) = -\frac{\partial L_x}{\partial p_y} = z$$

$$\{L_y, p_z\} = \sum_{j \in \{x,y,z\}}\left(\frac{\partial L_y}{\partial j}\frac{\partial p_z}{\partial p_j} - \frac{\partial L_y}{\partial p_j}\frac{\partial p_z}{\partial j}\right) = \frac{\partial L_y}{\partial z} = p_x$$

$L_x = y p_z - z p_y$

$L_y = z p_x - x p_z$

$L_z = x p_y - y p_x$

c) Zeigen Sie $\{L_z, L_x\} = L_y$. Wenn zwei Komponenten des Drehimpulses $\mathbf{L}$ erhalten sind, ist es dann auch die dritte Komponente? *Hinweis: Vielleicht hilft Ihnen hier die Jacobi-Identität.*

$$\{L_z, L_x\} = \sum_{j \in \{x,y,z\}}\left(\frac{\partial L_z}{\partial j}\frac{\partial L_x}{\partial p_j} - \frac{\partial L_z}{\partial p_j}\frac{\partial L_x}{\partial j}\right) = -p_x(-z) - x p_z = z p_x - x p_z = L_y$$

Seien o.B.d.A. L_x, L_z erhalten also $\{L_x, H\} = \{L_z, H\} = 0$ (Drehimpuls nicht von Zeit abhängig)

$$0 = \{H, \{L_z, L_x\}\} + \{L_z, \{L_x, H\}\} + \{L_x, \{H, L_z\}\} = \{H, L_y\}$$

d) Erinnern Sie sich an das Teilchen im Yukawa-Potential vom 2.Tutorium (2.4). Die Hamiltonfunktion dieses Systems in Kugelkoordinaten lautet:

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2(\theta)}\right) - \alpha Q^2 \frac{e^{-\beta m r}}{r}$$

Zeigen Sie explizit dass sowohl die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = mr^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} = p_\phi$ als auch $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2(\theta)$ erhalten sind, sprich $\{ L_z, H\}=0$ und $\{ L^2, H\}=0$.

·) $$\{L_z, H\} = \left(\underbrace{\frac{\partial L_z}{\partial r}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \underbrace{\frac{\partial L_z}{\partial p_r}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial r}\right) + \left(\underbrace{\frac{\partial L_z}{\theta}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \underbrace{\frac{\partial L_z}{\partial p_\theta}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial \theta}\right) + \left(\underbrace{\frac{\partial L_z}{\partial \phi}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_\phi} - \underbrace{\frac{\partial L_z}{\partial p_\phi}}_{=1} \frac{\partial H}{\partial \phi}\right) = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

weil $L_z = p_\phi$

·) $$\{L^2, H\} = \left(\underbrace{\frac{\partial L^2}{\partial r}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \underbrace{\frac{\partial L^2}{\partial p_r}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial L^2}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial L^2}{\partial p_\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta}\right) + \left(\underbrace{\frac{\partial L^2}{\partial \phi}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_\phi} - \frac{\partial L^2}{\partial p_\phi} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \phi}}_{=0}\right)$$

$$= -p_\phi^2\, 2 (\sin(\theta))^{-3} \frac{2p_\theta}{2mr^2} - 2p_\theta\, p_\phi^2 \,(\sin(\theta))^{-3} \frac{1}{mr^2} = 0$$