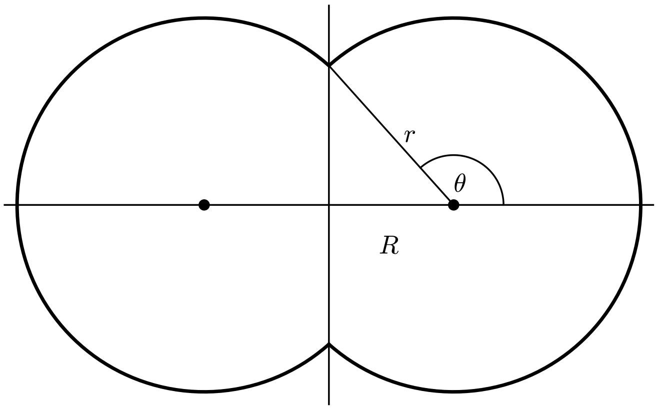
# Übungen zu Analysis 3, 8. Übung 2. 12. 2019

Ein *Spindeltorus* entsteht durch Rotation des Kreissegmentes

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

um die $z$-Achse für $0 < R < r$, $R + r\cos\theta \geq 0$.




63. Zeigen Sie mit obiger Parametrisierung, dass das Volumen der von einem Spindeltorus berandeten Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ gleich

$$2\pi\left(Rr^2\arccos(-R/r) + \frac{2}{3}r^2\sqrt{r^2 - R^2} + \frac{1}{3}R^2\sqrt{r^2 - R^2}\right)$$

ist.

64. Berechnen Sie aus obiger Volumsformel und der Koflächenformel das Flächenmaß des Spindeltorus.

Hinw.: Für festes $R$ sei $\mathbb{T}_r$ dar Spindeltorus wie zuvor für $R, r$ definiert und $V_t$ das Volumen der von $\mathbb{T}_r$ berandeten Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

Für $R = r$ gilt $V = 2\pi^2 R^3$. Für $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2$ gilt $|\nabla f| = 2\sqrt{f}$. Wenden Sie die Koflächenformel auf die Funkton $\mathbb{1}_{[R^2, r^2]}(f(\mathbf{x}))$ an.

65. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ der Graph der Funktion $f\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y$. Berechnen Sie

$$\int_G x \, d\mathcal{H}^2.$$

66. Berechnen Sie $\int_D \exp(x/(x+y))\,dx\,dy$, wobei $D$ durch

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0, x+y < 1\}$$

definiert ist durch Transformation auf die Varaiblen $u = x+y$, $v = x/(x+y)$.

67. Berechnen Sie das Volumen von $K \cap Z$, wobei $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 16\}$ die Kugel um 0 mit Radius 4 und $Z$ der Zylinder $x^2+y^2 < 4$ ist

68. Beweisen Sie die Leibnizsche Sektorformel:

Die Fläche des Sektors

$$\{(x,y) : x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,\ \alpha < \varphi < \beta,\ 0 < r < f(\varphi)\}$$

ist

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

69. Berechnen Sie das Flächenmaß eines Kegelmantels

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < \left(R - \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)h\right\}$$

mit der Flächenformel.

70. Berechnen Sie das Flächenmaß eines Kegelmantels

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 = \left(R - \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)h\right\}$$

mit der Koflächenformel aus der Formel für das Volumen

$$V_{R,h} = \pi R^2 h/3$$

des Kegels.

71. Berechnen Sie für $0 < a < b$ und $0 < c < d$ die durch $ax < y^2 < bx$ und $cy < x^2 < dy$ definierte Fläche in $\mathbb{R}^2$ durch eine Koordinatentransformation unter der die Fläche in ein Rechteck übergeht.