Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 15 – Hilberträume"

---

15 / 1: Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei ($\mathbb{R}_n[z]$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$)

$$K := \{p \in \mathbb{R}_n[z] : p''(x) \geq 0, x \in [-1,1]\}.$$

Zeige, dass es für jedes $f \in L^2([-1,1])$ genau ein $p_0 \in K$ gibt, sodass

$$\int_{[-1,1]} |f(t) - p_0(t)|^2 \, dt \leq \int_{[-1,1]} |f(t) - p(t)|^2 \, dt$$

für alle $p \in K$.

Hinweis. Die Menge aller komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ ist ein endlich dimensionaler Unterraum und $p \mapsto p(t)$ sowie $p \mapsto p''(t)$ ist ein lineares Funktional auf diesem Unterraum für jedes $t \in [a,b]$. Schliesse, dass K abgeschlossen und konvex ist.

15 / 2:* Sei H ein Hilbertraum. Zeige: Ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von orthogonalen Projektionen ($P_n \neq 0$), für die gilt

$$\operatorname{ran} P_n \perp \operatorname{ran} P_m, \; n \neq m \;,$$

und ist $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, mit $\alpha_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, so ist für jedes $x \in H$ die Reihe

$$Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n x$$

konvergent. Es gilt $A \in \mathcal{B}(H)$, $\|A\| = \|\alpha\|_\infty$. Bestimme $\ker A$. Ist $\alpha_n \to 0$, so konvergiert die Reihe in der Operatornorm. Gilt auch die Umkehrung?

15 / 3: `[Dieses Beispiel benötigt Lecture 04]`

Man zeige: Sei H ein Hilbertraum, $A : H \to H$ linear und symmetrisch, d.h.

$$(Ax, y) = (x, Ay), \; x, y \in H \;.$$

Dann ist A stetig.

Die Vollständigkeit spielt hier eine entscheidende Rolle: Betrachte den Vektorraum X aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die beliebig oft differenzierbar sind und außerhalb des Intervalls $[0,1]$ verschwinden, und versehe ihn mit dem inneren Produkt

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \; f, g \in X \;.$$

D.h. wir betrachten jenen Teilraum von $L^2(0,1)$, der aus C^∞-Fuktionen besteht, die am Rand verschwinden. Da X in $L^2(0,1)$ dicht liegt, aber sicher $X \neq L^2(0,1)$ ist, kann X nicht vollständig sein.

Zeige, dass der Operator

$$A : \begin{cases} X & \to & X \\ f(t) & \mapsto & if'(t) \end{cases}$$

in diesem Sinne symmetrisch ist, aber nicht stetig.

Die Aussage dieses Beispiels ist einer der ersten Sätze der Funktionalanalysis (Hellinger, Töplitz 1910).

---

15 / 4: Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum, und $[\cdot,\cdot]$ ein weiteres Skalarpodukt auf H. Sei vorausgesetzt dass $[\cdot,\cdot]$ eine stetige koerzive Sesquilinearform ist, d.h., dass (hier bezeichnet $\|.\|_H$ die von $(\cdot,\cdot)_H$ induzierte Norm)

$$\exists C > 0 \, \forall x, y \in H : \; |[x,y]| \leq C\|x\|_H\|y\|_H, \qquad \exists m > 0 \, \forall x \in H : \; [x,x] \geq m\|x\|_H^2.$$

Weiters bezeichne G den Gram-Operator der Sesquilinearform $[\cdot,\cdot]$ bzgl. $(\cdot,\cdot)_H$.

Zeige, dass es einen eindeutigen Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ gibt, sodass $GT = TG = \mathrm{id}_H$ gilt.

Hinweis. Zeige, dass $(H, [\cdot,\cdot])$ ein Hilbertraum ist.