Logik - UE3

66. $\mathfrak{M}$ sei $\mathcal{L}$-Struktur, b Belegung, s,t, Terme, x Variable:

Z.Z: $\overline{b}(s[x/t]) = \overline{b_{x\to\overline{b}(t)}}(s)$

Wir zeigen die Aussage mittels Induktion:

Die Menge aller Terme, die $\forall t \forall b: \overline{b}(s[x/t]) = \overline{b_{x\to\overline{b}(t)}}$ erfüllen, enthält alle Konstanten, Variablen und ist unter allen Funktionssymbolen abgeschlossen.

1) Sei $s = x$ ... Variable

$\overline{b}(x[x/t]) = \overline{b}(t) = \overline{b_{x\to\overline{b}(t)}}(x)$ ✓

2) Sei $s = y$, y, x verschiedene Variablen

$\overline{b}(y[x/t]) = \overline{b}(y) = b_{x\to\overline{b}(t)}(y)$ ✓

3) Sei $s = c$ ... ~~Variablen~~ Konstante

$\overline{b}(c[x/t]) = \overline{b}(c) = \overline{b}_{x\to\overline{b}(t)}(c)$ ✓

4) abgeschlossen unter Funktionssymbolen: $s = f(s_1, \dots, s_k)$

$\overline{b}(f(s_1,\dots,s_k)[x/t]) = \overline{b}(f(s_1[x/t],\dots,s_k[x/t]))$ (Def. Substitution)

$= f^{\mathfrak{M}}(\overline{b}(s_1[x/t]),\dots,\overline{b}(s_k[x/t]))$ (Def. $\overline{b}$)

$= f^{\mathfrak{M}}(\overline{b_{x\to\overline{b}(t)}}(s_1),\dots,\overline{b_{x\to\overline{b}(t)}}(s_k))$ (Induktion-VS)

$\cancel{= \overline{b_{x\to\overline{b}(t)}}(f(s_1),\dots,f(s_k))}$

$= \overline{b_{x\to\overline{b}(t)}}(f(s_1,\dots,s_k))$. ✓

68. $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \leq, =)$

$\cancel{\varphi = \forall x : \exists y : x \neq y}$ $\cancel{\varphi = \forall y : \exists x : x \neq y}$

$\cancel{\varphi[x/y] = \forall y((\exists x : x \neq y)[x/y]) = \forall y \exists x : x \neq y}$??

$\varphi = \exists y : (y \leq x)$

$\varphi[x/y-1] = \exists y : (y \leq y-1)$

Sei b partielle Belegung mit $b(x_a) = 0$, $b(y) = 1$

$\hat{b}(\varphi[x/y-1]) = \max\{\widehat{(b^y_{x\to m})}(\varphi[x/y-1]) : m \in \mathbb{N}\}$ $\overset{\wedge}{=}$ (y≤y-1)

$\cancel{=\max\{\widehat{b^y_{x\to m}}}$ $\leq \widehat{b_{y\to 1}}(y \leq y-1) = 0$, da $\overline{b_{y\to 1}}(y) \nleq \overline{b_{y\to 1}}(y-1) = 0$

$$\widehat{b_{x\to b(\cancel{\varphi})_{y-1}}}(\varphi) = \widehat{b_{x\to\overline{b(y-1)}}}(\exists y: y\le x) = \max\left\{\widehat{(b_{x\to\overline{b(y-1)}})_{y\to m}}(y\le x) : m\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\geq \widehat{(b_{x\to\overline{b(y-1)}})_{y\to 0}}(y\le x) = 1$$

da $\widehat{(b_{x\to\overline{b(y-1)}})_{y\to 0}}(y) = 0 \le 0 = (b_{x\to\overline{b(y-1)}})_{y\to 0}(x)$

68. neu. $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}, \neq)$, $\varphi = \exists y: y\neq x$, $t = y$, $b(y) = 1$

$\varphi[x/y] = \exists y: y\neq y$

$$\hat{b}(\varphi[x/y]) = \max\{\widehat{b_{y\to m}}(y\neq y): m\in\mathbb{N}\}$$

$$\widehat{b_{y\to m}}(y\neq y) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\widehat{b_{y\to m}}(y)}_{= m} \neq \underbrace{\widehat{b_{y\to m}}(y)}_{= m} \Leftrightarrow \bot$$

$$\Rightarrow \hat{b}(\varphi[x/y]) = 0.$$

$$\widehat{b_{x\to\overline{b(y)}}}(\varphi) = \max\left\{\widehat{(b_{x\to\overline{b(y)}})_{y\to m}}(y\neq x) : m\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\geq \widehat{(b_{x\to 1})_{y\to 2}}(y\neq x) = 1.$$

52. Axiom: $\dfrac{\emptyset}{1+1=11}$

Regeln: $\dfrac{A}{1A1}$, $\dfrac{A+=B}{A1=1B}$, A,B beliebige Zeichenfolgen.

a) $11+11=1111$:

1) $\dfrac{\emptyset}{1+1=11}$ (Axiom)

2) $\dfrac{1+1=11}{11+1=111}$ (Regel 1)

3) $\dfrac{11+1=111}{11+11=1111}$ (Regel 2)

b) $11111+11=1111111$

1) $\dfrac{\emptyset}{1+1=11}$ (Axiom)

2) $\dfrac{1+1=11}{11+1=111}$ (Regel 1)

3) $\dfrac{11+1=111}{111+1=1111}$ (Regel 1)

4) $\dfrac{111+1=1111}{}$ (Regel 1)

5) $\dfrac{1111+1=11111}{11111+1=111111}$ (Regel 1)

6) $\dfrac{11111+1=111111}{11111+11=1111111}$ (Regel 2)

54. Kriterium, ob vorgegebene Zeichenfolge ableitbar ist:

N = Menge aller Zeichenfolgen die a) und b) erfüllen.

a) Muss von der Form $x+y=z$ sein, wobei x,y,z endliche Zeichenfolgen, welche nur das Symbol 1 enthalten bezeichnen.

b) $\text{Länge}(x) + \text{Länge}(y) = \text{Länge}(z)$

Beweis: ① enthält Axiome: ✓

② unter Regeln abgeschlossen:

└ Regel 1: $\dfrac{x+y=z}{\underbrace{1x}_{x'}+\underbrace{y}_{y'}=\underbrace{z1}_{z'}}$ $\text{Länge}(x') + \text{Länge}(y') = \text{Länge}(x) + \text{Länge}(y) + 1$

$= \text{Länge}(z) + 1 = \text{Länge}(z')$.

└ Regel 2: $\dfrac{\overbrace{x+y}^{A}=\overbrace{z}^{B}}{\underbrace{x}_{x'}+\underbrace{y1}_{y'}=\underbrace{1z}_{z'}}$: $\text{Länge}(x') + \text{Länge}(y') = \text{Länge}(x) + \text{Länge}(y) + 1$

$= \text{Länge}(z) + 1 = \text{Länge}(z')$.

③ kleinste solche Menge:

Enthalte M das Axiom und sei unter Regeln abgeschlossen.

Betrachte $x+y=z \in N$ beliebig mit

$\text{Länge}(x) = n$, $\text{Länge}(y) = m$, $\text{Länge}(z) = n+m$

1. $\dfrac{\emptyset}{1+1=11}$ (Axiom)

(Regel 1)

$\vdots$

n. $\dfrac{(n-1)+1=n}{n+1=n+1}$ (Regel 1)

(Regel 2)

$\vdots$

n+m. $\dfrac{n+(m-1)=n+m-1}{n+m=n+m}$ (Regel 2)

$\Rightarrow N \subseteq M$ und N ist somit genau die Menge der ableitbaren Zahlenfolge.

56.) neues Ableitungssystem:

└ Axiom: $\frac{\emptyset}{1!}$

└ Regeln: $\frac{A!}{1A!}$ $\quad \frac{A!}{A+1=A}$ $\quad \frac{A+B=C}{A+B1=CA}$

Führe folgende Identifikation durch $n := \underbrace{1 \cdots 1}_{n-\text{Mal}}$, $n \in \mathbb{N}$.

ableitbar: a) $n!$, $n \in \mathbb{N}$

b) $n+1=n$, $n \in \mathbb{N}$

c) $n+2=2n$

d) $n+m=m \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

e) Das sind alle.

I) enthält Axiome: klar

II) unter Regeln abgeschlossen:

└ Regel 1: $\frac{n!}{(n+1)!}$ ✓ ~~(n+m=nm~~

└ Regel 2: $\frac{n!}{n+1=n}$ ✓

└ Regel 3: $\frac{n+n=mn}{n+(n+1)=mn+n=n(m+1)}$ ✓

III) kleinste Menge:

Sei M beliebig mit Axiomen und unter Regeln abgeschlossen.

→ 1, $\frac{\emptyset}{1!}$ (Axiom)

(Regel 1)

n, $\frac{(n-1)!}{n!}$ (Regel 1)

n+1, $\frac{n!}{n+1=n}$ (Regel 2)

n+2, $\frac{n+1=n}{n+2=n+n=2n}$ (Regel 3)

n+m, $\frac{n+(m-1)=n(m-1)}{n+\cancel{(m-1)+1}^{m}=nm}$ (Regel 3).

57/58. Axiome: $\cancel{\frac{\emptyset}{1|1}}$ $\cancel{\frac{\emptyset}{11+11}}$ $\frac{\emptyset}{1^n|1^{2n}}$, $n \geq 2$ $\boxed{n = \sum_{p \in P} p^{e_p}}$

Regeln: $\cancel{\frac{1^n|1^n}{1^n|1^n 1^n}}$ $\frac{1^n|1^k}{1^n|1^{k+n}}$, ~~$1^n|1^k, (n \neq 1, n \neq k)$~~

$$\frac{1^n|1^k}{1^k}$$

nochmal schön: Axiome: $\frac{\emptyset}{1^n|1^{2n}}$, $n \geq 2$

Regeln: $\frac{1^n|1^k}{1^n|1^{k+n}}$ $\frac{1^n|1^k}{1^k}$

Dann ist die Zeichenfolge 1^n genau dann ableitbar, wenn n keine Primzahl ist.

Beweis: Sei n keine Primzahl $\Rightarrow \exists\, 1 < p, q < n: n = pq$

1. $\frac{\emptyset}{1^p|1^{2p}}$ (Axiom)

(Regel 1)

q. $\frac{1^p|1^{(q-1)p}}{1^p|1^{(q-1)p+p} = 1^{qp}}$ (Regel 1)

q+1. $\frac{1^p|1^{qp} = 1^n}{1^n}$. Also ist 1^n herleitbar.

~~Sei 1^n herleitbar~~

Beh: A ableitbar

$\Leftrightarrow$ $A = 1^n$, n keine Primzahl

oder $A = 1^n|1^k$ mit n echter Teiler von k.

(I) enthält Axiome: ✓

(II) unter Regeln abgeschlossen:

- Regel 1: $\frac{1^n|1^k}{1^n|1^{k+n}}$ n echter Teiler von k $\Rightarrow$ n echter Teiler von k+n
- Regel 2: $\frac{1^n|1^k}{1^k}$ n echter Teiler von k $\Rightarrow$ k keine Primzahl

III) kleinste Menge:

·) Wir wissen: Alle 1^n mit $n \notin P$ sind herleitbar.

Sei nun $n \mid k$, $n \notin \{1,k\}$ beliebig, $k \in \mathbb{N}$. Also: $k = n \cdot m$

$$1) \quad \frac{\emptyset}{1^n \mid 1^{2n}} \quad (\text{Axiom})$$

(Regel 1)

$\vdots$

$$m-1) \quad \frac{1^n \mid 1^{(m-1)n}}{1^n \mid 1^{mn} = 1^k} \quad (\text{Regel } 1)$$

h: Aussagenlogik $\to$ Prädikatenlogik

83.) $h(\top) = \top$, $h(\bot) = \bot$, $h(\varphi \wedge \psi) = h(\varphi) \wedge h(\psi)$

$\mathfrak{U}$ sei eine $\mathcal{L}$-Struktur, b Belegung (prädikatenlogisch)

Dann gibt es b' aussagenlogisch: $\widehat{b'}(A) = \hat{b}(h(A))$, A aussagenlogische Formel.

Definiere $b'(p) := \hat{b}(h(p))$, ...p aussagenlogische Variable

~~Dann gilt $\hat{b}$~~

Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über die Menge aller aussagenlogischen Formeln.

1.) aussagenlogische Variablen: Def. ✓ $\widehat{b'}(p) = b'(p) = \hat{b}(h(p))$

2.) abgeschlossen unter ~~verträglich mit~~ $\neg, \to, \vee, \wedge, \leftrightarrow$:

$$\widehat{b'}(\neg A) \underset{\text{Wahrheitsfunktion}}{=} \neg_{Bool}\, \widehat{b'}(A) \underset{\text{Induktion-VS}}{=} \neg_{Bool}\, \hat{b}(h(A)) \underset{\text{Wahrheitsfunktion}}{=} \cancel{\hat{b}(h(\neg A}\ \hat{b}(\neg h(A)) \overset{\text{"}}{=} \hat{b}(h(\neg A))$$

analog: alle anderen Junktoren.

84.) A aussagenlogische Tautologie $\Leftrightarrow \forall b: \hat{b}(A) = 1$

$\cancel{\Rightarrow \forall} b:$

Sei b^0 beliebige prädikatenlogische Belegung: b' zugehörige aussagenlogische Belegung bezüglich h.

$\widehat{b^0}(h(A)) = \widehat{b'}(A) = 1 \Rightarrow h(A)$ allgemeingültig.