Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 22 – Die Resolvente"

---

22 / 1: Sei X ein Banachraum, $A, T \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in \rho(A)$, und setze $B := A + T$. Wir wissen (Neumannsche Reihe): Ist $\|T\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Unter der Voraussetzung dass $AT = TA$, zeige die stärkere Aussage: Ist $r(T) < r(A^{-1})^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Warum ist diese Aussage eigentlich stärker als die obige?

22 / 2:* Sei $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ die Menge aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$, und

$$d_H(M, N) := \max\big\{ \sup_{x\in M} \inf_{y\in N} |x - y|, \sup_{y\in N} \inf_{x\in M} |x - y|\big\}, \quad M, N \in \mathcal{K}(\mathbb{C}).$$

Es gilt dass d_H eine Metrik ist, die *Hausdorff-Metrik*.

Sei nun X ein Banachraum. Zeige:

(a) Sind $A, B \in \mathcal{B}(X)$ mit $AB = BA$, dann ist $d_H\big(\sigma(A), \sigma(B)\big) \leq r(A - B)$.

(b) Ist $\mathcal{C}$ eine kommutative Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$, so ist die Funktion

$$\Sigma : \begin{cases} (\mathcal{C}, \|.\|_{\mathcal{B}(X)}) & \to & (\mathcal{K}(\mathbb{C}), d_H) \\ A & \mapsto & \sigma(A) \end{cases}$$

stetig.