3.10.5 Lemma. Seien $a_1, \dots, a_m$ und $b_1, \dots, b_m$ komplexe Zahlen, so gilt

$$\sum_{n=1}^{m} a_n b_n = a_m \cdot \beta_m - \sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) \cdot \beta_n ,$$

wobei die $\beta_n$ die Partialsumme $\sum_{j=1}^{n} b_j = \beta_n$ bezeichnen.

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) \cdot \beta_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_{n+1} \cdot \beta_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \cdot \beta_n =$$

$$\sum_{n=2}^{m} a_n \cdot \beta_{n-1} - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \cdot \beta_n = a_m \cdot \beta_{m-1} - \sum_{n=2}^{m-1} a_n \cdot (\beta_n - \beta_{n-1})$$

$$- a_1 \cdot \beta_1 = a_m \cdot \beta_m - a_m b_m - \sum_{n=2}^{m-1} a_n b_n - a_1 b_1 =$$

$$a_m \cdot \beta_m - \sum_{n=1}^{m} a_n b_n .$$

Für die erste Gleichheit, multipliziert man in der Summe aus und spaltet diese via Kommutativität und Assoziativität in zwei Summen auf.
Bei der zweiten Gleichheit, wird in der ersten Summe ein Index-Shift nach oben gemacht und die laufenden Indizes werden um $-1$ angepass, um diesem entgegenzuwirken.
Bei der dritten Gleichheit, werden der letzte Summand der ersten Summe und der erste Summand der zweiten Summe herausgezogen, die übrigen Summen (jetzt mit denselben Indizes) zusammengefasst und in ihnen herausgehoben.
In der vierten Gleichheit, wird $a_m \beta_{m-1}$ auf $a_m \beta_m$ ergänzt und das überschüssige $b_m$ subtrahiert und $a_m$

herausgehoben. In der Summe wird $\beta_n - \beta_{n-1}$ durch $b_n$ ersetzt, was laut Definition von $\beta_n$ klar ist.
In der letzten Gleichheit werden die ganzen negativen Summanden in einer Summe zusammengefasst. $\square$