

Numerische Mathematik - Projektteil 2

Richard Weiss

Florian Schager

Christian Sallinger

Fabian Zehetgruber

Paul Winkler

Christian Göth

Random code snippet, damit alle checken, wie man code displayt:

```
1 print("Hello World!")
```

1 Titel

2 Eigenschwingungen

2.1 Aufgabestellung

Das Projekt beschäftigt sich mit den Eigenschwingungen einer fest eingespannten Saite. Sei dazu $u(t, x)$ die vertikale Auslenkung der Saite an der Position $x \in [0, 1]$ zur Zeit t . u wird näherungsweise durch die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \quad (1)$$

für alle $x \in (0, 1)$ und $t \in \mathbb{R}$ beschrieben, wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Wenn die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, so gelten die Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (2)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zur Berechnung der Eigenschwingungen suchen wir nach Lösungen u , die in der Zeit harmonisch schwingen. Solche erfüllen folgenden Ansatz

$$u(x, t) = \Re(v(x)e^{-i\omega t})$$

mit einer festen, aber unbekannten Kreisfrequenz $\omega > 0$ und einer Funktion v , welche nur noch vom Ort x abhängt. Durch Einsetzen erhalten wir für v die sogenannte Helmholtz-Gleichung

$$-v''(x) = \kappa^2 v(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

mit der unbekannten Wellenzahl $\kappa := \frac{\omega}{c}$ und den Randbedingungen

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (4)$$

2.2 Analytische Lösung

$$v_\kappa(x) = C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x), \quad x \in [0, 1],$$

mit beliebigen Konstanten C_1, C_2 löst die Helmholtz-Gleichung (3). Das erkennt man durch stumpfes Einsetzen.

$$\begin{aligned} -v_\kappa''(x) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)) = -\frac{\partial}{\partial x}(-C_1 \kappa \sin(\kappa x) + C_2 \kappa \cos(\kappa x)) \\ &= -(-C_1 \kappa^2 \cos(\kappa x) - C_2 \kappa^2 \sin(\kappa x)) = \kappa(C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)) = \kappa^2 v_\kappa(x) \end{aligned}$$

Wir fragen uns, für welche $\kappa > 0$, Konstanten C_1 und C_2 existieren, sodass v_κ auch die Randbedingungen (4) erfüllt.

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{cases} v_\kappa(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 \\ v_\kappa(1) = C_1 \cos \kappa + C_2 \sin \kappa = C_2 \sin \kappa \end{cases}$$

Nachdem $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$, erhält man, aus der oberen Gleichung, $C_1 = 0$. Mit der unteren Gleichung folgt aber auch $C_2 \sin \kappa = 0$. Wenn nun auch $C_2 = 0$, dann erhielte man die triviale Lösung $v_\kappa = 0$. Für eine realistischere Modellierung, d.h. $v_\kappa \neq 0$, müsste $\sin \kappa = 0$, also $\kappa \in \pi\mathbb{Z}$.

Das sind die gesuchten $\kappa > 0$. Sei nun eines dieser κ fest. Offensichtlich ist $C_1 = 0$ eindeutig, $C_2 \in \mathbb{R}$ jedoch beliebig.

2.3 Numerische Approximation

Häufig lassen sich solche Probleme nicht analytisch lösen, sodass auf numerische Verfahren zurückgegriffen wird, welche möglichst gute Näherungen an die exakten Lösungen berechnen sollen. Als einfachstes Mittel dienen sogenannte Differenzenverfahren. Sei dazu $x_j := jh$, $j = 0, \dots, n$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ mit äquidistanter Schrittweite $h = 1/n$. Die zweite Ableitung in (3) wird approximiert durch den Differenzenquotienten

$$v''(x_j) \approx D_h v(x_j) := \frac{1}{h^2}(v(x_{j-1}) - 2v(x_j) + v(x_{j+1})), \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Für hinreichend glatte Funktionen v mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ wird der Approximationsfehler quadratisch in h klein, d.h. dass

$$|v''(x_j) - D_h v(x_j)| \leq Ch^2. \quad (6)$$

Es sei zunächst bemerkt, dass (6) tatsächlich einen Differenzenquotienten beschreibt. Um das einzusehen, verwenden wir den links- und rechts-seitigen Differenzenquotient erster Ordnung, sowie $x_{j-1} = x_j - h$, $x_{j+1} = x_j + h$. Wir erhalten $\forall j = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} v''(x_j) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(v'(x_j + h) - v'(x_j)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h}(v(x_j + h) - v(x_j)) - \frac{1}{h}(v(x_j) - v(x_j - h)) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2}(v(x_j + h) - 2v(x_j) + v(x_j - h)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} D_h v(x_j) \end{aligned}$$

Nachdem v hinreichend glatt ist, gilt nach dem Satz von Taylor, dass $\forall j = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} v(x_j + h) &= \sum_{\ell=0}^{n+2} \frac{h^\ell}{\ell!} v^{(\ell)}(x_j) + \mathcal{O}(h^{n+3}), \\ v(x_j - h) &= \sum_{\ell=0}^{n+2} \frac{(-h)^\ell}{\ell!} v^{(\ell)}(x_j) + \mathcal{O}(h^{n+3}). \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich die Summanden der oberen Taylor-Polynome für ungerade $\ell \in 2\mathbb{N} - 1$ aufheben. Damit erhalten wir für den Differenzenquotient $D_h v(x_j)$, $j = 1, \dots, n-1$ eine asymptotische Entwicklung.

$$\begin{aligned} D_h v(x_j) &= \frac{1}{h^2} (v(x_j - h) + v(x_j + h) - 2v(x_j)) \\ &= \frac{1}{h^2} \left(2v(x_j) + h^2 v''(x_j) + \sum_{\ell=4}^{n+2} \frac{h^\ell}{\ell!} v^{(\ell)}(x_j) (1 + (-1)^\ell) \right) + \mathcal{O}(h^{n+3}) - 2v(x_j) \\ &= v''(x_j) + 2 \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{h^{2\ell}}{(2\ell+2)!} v^{(2\ell)}(x_j) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die quadratische Konvergenz (6), $\forall j = 1, \dots, n-1$:

$$D_h v(x_j) - v''(x_j) = \mathcal{O}(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

Wir wollen nun den Differenzenquotienten $D_h v(x_j)$ verwenden, um ein Eigenwertproblem der Form $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ zu dem Eigenvektor $\vec{v} := (v(x_1), \dots, v(x_{n-1}))^T$ und dem Eigenwert $\lambda := -\kappa^2$ herzuleiten.

Es wird eine Matrix A_n gesucht, die den Differenzenquotienten $D_h v(x_j)$ auf den Vektor \vec{v} komponentenweise anwendet. Wir rufen in Erinnerung, dass $h = 1/n$ und definieren die naheliegende Matrix

$$A_n := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}.$$

Weil nun die Randbedingungen (4) gelten, d.h. $v(x_0), v(x_n) = 0$, leistet diese Matrix A_n tatsächlich das Gewünschte.

$$A_n \vec{v} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} v(x_0) - 2v(x_1) + v(x_2) \\ v(x_1) - 2v(x_2) + v(x_3) \\ \vdots \\ v(x_{n-3}) - 2v(x_{n-2}) + v(x_{n-1}) \\ v(x_{n-2}) - 2v(x_{n-1}) + v(x_{n-0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_h v(x_1) \\ \vdots \\ D_h v(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Das Eigenwertproblem wurde mit `np.linalg.eig`, für beliebige $n \geq 2$, gelöst. Wir vergleichen die Eigenwerte und Eigenvektoren mit den analytischen Ergebnissen.

Betrachtet man die, unten aufgelisteten, Eigenwerte, der ersten paar Matrizen A_2, \dots, A_{10} , so legen diese ein gewisses (quadratisches) Konvergenzverhalten nahe. Die Matrix A_n besitzt also scheinbar $n-1$ paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_{1,n} < \dots < \lambda_{n-1,n}$, welche jeweils gegen $\lambda_j := -(\pi j)^2$, $j \in \mathbb{N}$ konvergieren.

$n = 2$ ----- -8.0 $n = 3$ ----- -9.0 -27.0 $n = 4$ ----- -9.372583002030478 -31.999999999999996 -54.62741699796946 $n = 5$ ----- -9.549150281252611 -34.54915028125264 -65.45084971874735 -90.45084971874735 $n = 6$ ----- -9.646170927520402 -35.999999999999999 -71.99999999999997 -108.00000000000001 -134.35382907247953	$n = 7$ ----- -9.705050945562961 -36.89799941784412 -76.19294847228122 -119.80705152771888 -159.10200058215582 -186.29494905443664 $n = 8$ ----- -9.743419838555344 -37.49033200812192 -79.01652065726852 -127.99999999999999 -176.98347934273144 -218.50966799187793 -246.25658016144442 $n = 9$ ----- -9.769795432682793 -37.90080021472559 -80.99999999999997 -133.8689952179573 -190.13100478204277 -243.00000000000014 -286.09919978527444 -314.2302045673173	$n = 10$ ----- -9.788696740969272 -38.19660112501045 -82.44294954150533 -138.1966011250105 -200.00000000000006 -261.80339887498934 -317.5570504584944 -361.8033988749895 -390.2113032590302 . . . $n \rightarrow \inf$ ----- $-(1 * \pi)^2 = -9.869604401089358$ $-(2 * \pi)^2 = -39.47841760435743$ $-(3 * \pi)^2 = -88.82643960980423$ $-(4 * \pi)^2 = -157.91367041742973$ $-(5 * \pi)^2 = -246.74011002723395$ $-(6 * \pi)^2 = -355.3057584392169$ $-(7 * \pi)^2 = -483.61061565337855$ $-(8 * \pi)^2 = -631.6546816697189$ $-(9 * \pi)^2 = -799.437956488238$...
---	--	---

Wir bezeichnen mit $\epsilon_j(n) := |\lambda_j - \lambda_{j,n}|$, $j = 1, \dots, n-1$ den absoluten Konvergenz-Fehler des j -ten Eigenwertes. In der folgenden Abbildung wurde dieser für $j = 1, 2, 3$ gegen id^2 , doppelt logarithmisch, geplottet. Allem Anschein nach, verschwindet ϵ_j quadratisch. Das korreliert mit dem Ergebnis (6).

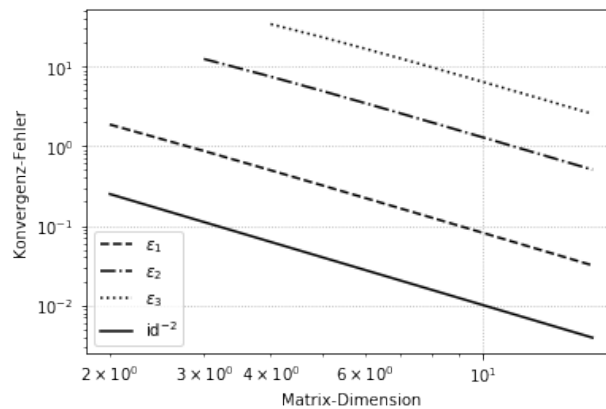


Abbildung 1: Konvergenz-Fehler der Eigenwerte von A_n

3 Titel