11. Seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$ eine Funktion. Weiters seien $M, N \subseteq X$.

- Zeige, dass $M \subseteq N \Rightarrow f(M) \subseteq f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Implikation? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.

- Zeige, dass $f(M \cup N) \subseteq f(M) \cup f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.

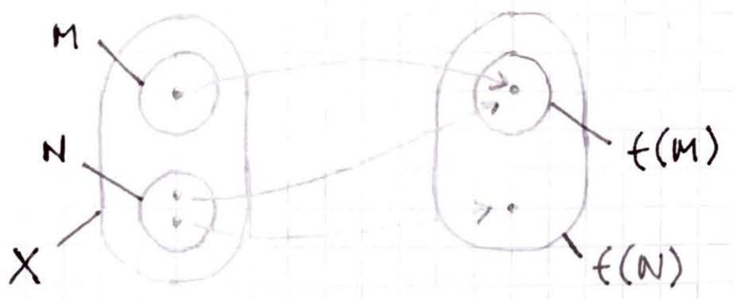
- Zeige, dass $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.

$M \subseteq N \Rightarrow f(M) \subseteq f(N)$

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $\forall x, y: (x \in M \Rightarrow x \in N)$
$\Rightarrow (y \in f(M) \Rightarrow y \in f(N))$.
Sei dazu $x \in M$ beliebig, aber fest.
Der Angabe ist zu entnehmen, dass $[\forall x: x \in M \Rightarrow x \in X]$. Nachdem f das Axiom $[\forall x \in M \exists y \in Y: (x, y) \in f]$ erfüllt, existiert ein von x zugeordnetes $y \in Y$, also $y = f(x)$. Aufgrund der Definition von $f(M)$, also $[f(M) = \{y \in Y: \exists x \in M: y = f(x)\}]$, ist $y \in f(M)$. Nun gilt aber nach $[\forall x: x \in M \Rightarrow x \in N]$, dass $x \in N$. Analog zu oben, kann festgestellt werden, dass $y \in f(N)$. $\square$

Die umgekehrte Implikation gilt nicht.

Beweis:



Die Funktion mag zwar surjektiv, jedoch nicht injektiv sein. Da die beiden zugehörigen Urbilder x_1 und x_2 von $y \in f(M)$ jeweils in den disjunkten Teilmengen M und N von X liegen, ist die Conclusio (ehemalige Prämisse) $M \subseteq N$ falsch. $\square$

$f(M \cup N) \subseteq f(M) \cup f(N)$

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $\forall y: y \in f(M \cup N) \Rightarrow y \in f(M) \vee y \in f(N)$.
Sei dazu $y \in f(M \cup N)$ beliebig, aber fest.
Wegen der Definition von $f(M \cup N)$, also $[f(M \cup N) = \{y \in Y: \exists x \in M \cup N: y = f(x)]$, gilt $x \in M \cup N$, also $x \in M \vee x \in N$.
Der Angabe zufolge gilt $x \in M \Rightarrow x \in X$. Nachdem f die Eigenschaft $[\forall x \in X \, \exists y \in Y: (x,y) \in f]$ erfüllt, ist $(x,y) \in f$. Nach der Definition von $f(M)$, ist $y \in f(M)$.
Weil der Angabe zufolge auch $x \in N \Rightarrow x \in X$ ist, kann man analog schließen, dass $y \in f(N)$. $\square$

Die umgekehrte Inklusion gilt.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $\forall y: y \in f(M) \vee y \in f(N) \Rightarrow y \in f(M \cup N)$.
Sei dazu $y \in f(M) \vee y \in f(N)$ beliebig, aber fest.
Nach der Definition von $f(M)$ und $f(N)$, gibt es zu jedem y ein

$x \in M \vee x \in N$. Nun wissen wir aber, dass $\{x : x \in M \vee x \in N\}$ $=: M \cup N$. Weil in der Angabe $x \in M \Rightarrow x \in X$ und $x \in N \Rightarrow x \in X$, ist $x \in M \cup N \Rightarrow x \in X$ wahr. Nachdem f eine Funktion ist, gilt $(x,y) \in f$. Nach der Definition von $f(M \cup N)$, ist $y \in f(M \cup N)$. $\square$

$f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $\forall y : y \in f(M \cap N) \Rightarrow$ $y \in f(M) \wedge y \in f(N)$.
Sei dazu $y \in f(M \cap N)$ beliebig, aber fest.
Wegen der Definition von $f(M \cap N)$, also $[f(M \cap N) = \{y \in Y : \exists x \in M \cap N : y = f(x)\}]$, gilt $x \in M \cap N$, also $x \in M \wedge x \in N$.
Der Angabe zufolge gilt $x \in M \Rightarrow x \in X$. Nachdem f die Eigenschaft $[\forall x \in X \, \exists y \in Y : (x,y) \in f]$ erfüllt, ist $(x,y) \in f$.
Nach der Definition von $f(M)$, ist $y \in f(M)$.
Weil der Angabe zufolge auch $x \in N \Rightarrow x \in X$ ist, kann man analog schließen, dass $y \in f(N)$. $\square$

Die umgekehrte Inklusion gilt nicht.

Beweis: Nach Betrachtung des Diagramms von vorher sehen wir, dass N und M disjunkt sind, also $M \cap N = \emptyset$. Daher kann $f(M) \cup f(N) \subseteq \emptyset = f(M \cap N)$ nicht stimmen, wobei $f(M \cap N) = \emptyset$ aus der Definition von $f(M \cap N)$ folgt. $\square$

13. Seien X, Y Mengen, $f: X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1}: P(Y) \to P(X)$ die Urbildfunktion. Weiters sei $Q \subseteq P(Y)$ eine Partition von Y. Zeige, dass $\{f^{-1}(M) : M \in Q\} \setminus \{\emptyset\}$ eine Partition von X ist.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $Q^{-1} := \{f^{-1}(M) : M \in Q\} \setminus \{\emptyset\}$ eine Partition von X ist.

(0) Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(M) \in Q^{-1} \Rightarrow f^{-1}(M) \in P(X)$.

Wir wissen, dass $M \in Q \subseteq P(Y)$, also $M \subseteq Y$.

Die Definition des vollständigen Urbilds von M unter f, wobei $M \subseteq Y$, lautet $[f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}]$, und

$$f^{-1}: \begin{cases} P(Y) \to P(X) \\ M \mapsto f^{-1}(M) \end{cases}$$

Es folgt also $f^{-1}(M) \in P(X) \Leftrightarrow f^{-1}(M) \subseteq X$.

Fall 1: $\forall f^{-1}(M) : f^{-1}(M) = \emptyset$:

Aufgrund der Definition von Q^{-1}, sei $Q^{-1} = \{\emptyset\} \setminus \{\emptyset\}$ $= \{f^{-1}(M) : f^{-1}(M) \in \emptyset \wedge f(M)^{-1} \notin \emptyset\} = \emptyset$ eine Partition von X, weil:

(1.1): $\forall x \in X \, \exists f^{-1}(M) : f^{-1}(M) \in Q^{-1} \Rightarrow x \in f^{-1}(M)$

$f^{-1}(M) \in Q^{-1}$ ist falsch, weil $Q^{-1} = \emptyset$.

(1.2): $\forall f^{-1}(M), f^{-1}(N) : f^{-1}(M), f^{-1}(N) \in Q^{-1} \Rightarrow f^{-1}(M) = f^{-1}(N) \vee f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = \emptyset$

$f^{-1}(M), f^{-1}(N) \in Q^{-1}$ ist falsch, weil $Q^{-1} = \emptyset$.

(1.3): $\forall f^{-1}(M) : f^{-1}(M) \in Q^{-1} \Rightarrow f^{-1}(M) \neq \emptyset$

$f^{-1}(M) \in Q^{-1}$ ist falsch, weil $Q^{-1} = \emptyset$.

Fall 2: $\neg(\forall f^{-1}(M) : f^{-1}(M) = \emptyset) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \exists f^{-1}(M) : f^{-1}(M) \neq \emptyset$:

$(*) \Leftrightarrow$ "Verneinungssätze"

Weil $f^{-1}(M) \neq \emptyset$, folgt $\exists x : x \in f^{-1}(M)$. Weil $f^{-1}(M) \subseteq X$, also $x \in f^{-1}(M) \Rightarrow x \in X$, folgt $X \neq \emptyset$.

(2.1): Wir wollen zeigen, dass $\forall x \in X \, \exists f^{-1}(M) \in Q^{-1} : x \in f^{-1}(M)$.

Sei $x \in X$ beliebig, aber fest.

Wir wissen, dass f die Eigenschaft $[\forall x \in X \, \exists y \in Y : (x,y) \in f]$. Außerdem ist $[f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}]$, wobei $M \subseteq Y$.

(2.2): Wir wollen zeigen, dass $\forall f^{-1}(M), f^{-1}(N) \in Q^{-1} : f^{-1}(M) = f^{-1}(N) \vee f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = \emptyset$.

Beweis durch Widerspruch: Hierbei wende die "Verneinungssätze" an, dann schreibe $\exists f^{-1}(M), f^{-1}(N) : \neg(f^{-1}(M) = f^{-1}(N) \vee f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = \emptyset$. Der "Satz vom Guten Morgen LOL" führt zu $\exists f^{-1}(M), f^{-1}(N) : f^{-1}(M) \neq f^{-1}(N) \wedge f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \neq \emptyset$.

Wir isolieren mit der "Konjunktionsbeseitigung" das letztere Argument und dürfen $x \in f^{-1}(M) \wedge x \in f^{-1}(N)$ schreiben.

Die Definitionen von $f^{-1}(M)$ und $f^{-1}(N)$ führen zu $y \in M \wedge y \in N$.

Wir isolieren mit der "Konjunktionsbeseitigung" das erste Argument und dürfen $f^{-1}(M) \neq f^{-1}(M)$ schreiben.

Weil nach $Q^{-1} = \{f^{-1}(M) : M \in Q\} \setminus \{\emptyset\}$ folgt, dass $M, N \in Q$

und diese entweder gleich oder disjunkt sein müssen, liegt ein Widerspruch vor.

(2.3): Wir wollen zeigen, dass $\emptyset \notin Q^{-1}$.
Aus der Definition von Q^{-1} folgt, durch die Konjunktionsbeseitigung, dass alle Elemente von Q^{-1} Kein Element von $\{\emptyset\}$ sein können. $\square$

15. Seien X, Y Mengen, und $f, g \subseteq X \times Y$ Funktionen von X nach Y. Zeige, dass aus $f \subseteq g$ bereits $f = g$ folgt.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass die Inklusion $g \subseteq f$ gilt, also
$\forall (x,y) : (x,y) \in g \Rightarrow (x,y) \in f$.
Damit $f \neq g$, müsste $(x,y) \in g \wedge (x,y) \notin f$ gelten.
Weil f "überall definiert" ist, muss es ein $(x,y') \in f$ geben.
Wegen $f \subseteq g$ folgt $(x,y') \in g$, aber noch immer $(x,y) \in g$.
Weil g "wohldefiniert" ist, muss $y' = y$. $\square$

16. Finde eine Menge M und zwei Funktionen $f, g: M \to M$, sodass $g \circ f = f$, wobei $g \neq id_M$. Kann man so ein Beispiel auch dann konstruieren, wenn man zusätzlich verlangt, dass f injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) ist?

Sei $x_0 \in M$, und $f, g: M \to M: x \mapsto x_0$

So ein Beispiel lässt sich nicht konstruieren, wenn f surjektiv (oder bijektiv) ist. Ist M endlich, so gilt dies auch für Injektivität.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass die Voraussetzungen es nicht erlauben, dass f injektiv oder surjektiv ist.

Surjektivität: Die "Einschränkung" $g|_M = g$. Da $g \neq id_M$, gilt $g|_M \neq id_M$.
Aus $g \circ f = f$ entnehmen wir, dass g die Funktionswerte (aus $f(M)$) nicht ändern soll. Also gilt $g|_{f(M)} = id_{f(M)}$.
Wir bekommen somit $id_{f(M)} = g|_{f(M)} \wedge id_M \neq g|_M \Rightarrow f(M) \neq M$.
Das widerspricht der Definition der Surjektivität $f(M) = M$.

Injektivität: $f: M \to M \wedge f$ ist injektiv $\Rightarrow f(M) = M$
Das würde aber heißen, dass f surjektiv wäre, was widersprüchlich zum oben Gezeigten stünde. Dies gilt jedoch nur für endliche M.
Ist M unendlich, also zB. $M = \mathbb{N}$, dann wäre $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: n \mapsto n+1$ injektiv und $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: m \mapsto m, \forall m > 0 \wedge 0 \mapsto n_0$, wobei $n_0 \neq 0$. $\square$

17. Eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ heißt Kommutativ, wenn für je zwei Elemente $x, y \in G$ gilt, dass $x \cdot y = y \cdot x$. Für welche Mengen M ist die Permutationsgruppe $Sym(M)$ Kommutativ?

$Sym(M)$ ist Kommutativ, solange $|M| \in \{0, 1, 2\}$.

Beweis: Schreibe M_n, wobei $n \in \mathbb{N}$ für die Mächtigkeit der Menge steht.

$M_0 = \emptyset$ ist Kommutativ, da $\forall g, f : g, f \in Sym(M) \Rightarrow g \circ f = f \circ g$ durch die falsche Prämisse $g, f \in Sym(M)$ stets wahr ist

$M_1 = \{a\}$ ist Kommutativ, da $Sym(M_1)$ nur die bijektive, und vor allem Kommutative Funktion id_{M_1} enthält.

$M_2 = \{a, b\}$ ist Kommutativ, da $Sym(M_2)$ folgende Bijektionen

$$\alpha_2 : \begin{cases} a \to a \\ b \to b \end{cases} ; \quad \beta_2 : \begin{cases} a \to b \\ b \to a \end{cases} ;$$

enthält, wobei $\alpha_2 \circ \beta_2 = \beta_2 \circ \alpha_2$.

$M_3 = \{a, b, c\}$ ist nicht Kommutativ, da $Sym(M_3)$ –"–

$$\alpha_3 : \begin{cases} a \to a \\ b \to b \\ c \to c \end{cases} ; \quad \beta_3 : \begin{cases} a \to b \\ b \to a \\ c \to c \end{cases} ; \quad \gamma_3 : \begin{cases} a \to c \\ b \to a \\ c \to b \end{cases} ;$$

$$\delta_3 : \begin{cases} a \to a \\ b \to c \\ c \to b \end{cases} ; \quad \varepsilon_3 : \begin{cases} a \to b \\ b \to c \\ c \to a \end{cases} ; \quad \zeta_3 : \begin{cases} a \to c \\ b \to b \\ c \to a \end{cases} ;$$

enthält, welche nicht immer Kommutativ sind.

M_n, wobei $n > 3$, zu betrachten, macht die Gruppe $\mathrm{Sym}(M_3)$ nicht "Kommutativer". Man würde den Bijektionen lediglich weitere Paare, der Mengen $\{(d,a),(d,b),\dots,(d,d)\}$, $\{(e,a),\dots,(e,e)\},\dots$, hinzufügen. $\square$

18. Ein Tupel $(K, +, *, 0, e)$ heißt ein Körper, wenn $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, *, e)$ Kommutative Gruppen sind und das Distributivgesetz $\forall x, y, z \in K: x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ gilt.

Betrachte die Menge $K = \{0, 1\}$, und definiere $+, * : K \times K \to K$ als

$$x + y := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \qquad x * y := \begin{cases} 0, & x = 0 \vee y = 0 \\ 1, & x = y = 1 \end{cases}$$

Zeige, dass $(K, +, *, 0, 1)$ ein Körper ist.

Beweis: Betrachte folgende Tabellen:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Daraus folgt unmittelbar, dass die Gruppen $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, *, e)$ Kommutativ sind (siehe Diagonale).

Dass diese überhaupt Gruppen sind, merkt man an:

- Assoziativität:

$(x + y) + z = x + (y + z)$

1	0	1	1	1	✓	1	0
1	0	1	0	0	✓	0	1
1	1	0	0	1	✓	0	1
1	1	0	1	0	✓	1	0
0	1	1	0	1	✓	0	0
0	1	1	1	0	✓	1	1
0	0	0	1	1	✓	1	1
0	0	0	0	0	✓	0	0

$(x * y) * z = x * (y * z)$

1	1	1	1	1	✓	1	1

- Existenz eines Neutralen Elements:

$$0 + e \overset{!}{=} e + 0 = 0 \quad \Rightarrow e = 0$$
$$1 + e = e + 1 = 1$$

$$1 * e = e * 1 = 1 \quad \Rightarrow e = 1$$

- Inverses Element für alle Elemente:

$0 + 0 = 0$, also $= e$

$1 + 1 = 0$, also $= e$

$1 * 1 = 1$, also $= e$

Weiters gilt Distributivität:

$x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

0	0	0	0	0	✓	0	0	0
0	0	0	1	1	✓	0	0	0
0	0	1	1	0	✓	0	0	0
0	0	1	0	1	✓	0	0	0
1	0	0	0	0	✓	0	0	0
1	1	0	1	1	✓	0	1	1
1	1	1	1	0	✓	1	1	0
1	0	1	0	1	✓	1	0	1

20. Wir haben gesehen, dass die folgende Schlussweise richtig ist: Ist eine Implikation $A \Rightarrow B$ wahr und ist ihre Prämisse A wahr, so folgt dass ihre Konklusion B wahr ist.
Man stelle sich nun vor man weiss, dass eine Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist und dass ihre Konklusion B wahr ist. Kann man daraus etwas für die Aussage A schließen?
Im folgenden nehmen wir wieder einmal eine Anleihe aus den aus der Anschauung bekannten Rechenoperationen und Rechenregeln für Zahlen.

- Sei A eine Aussage (die Ungleichung vom arithmetisch und geometrischen Mittel

  $$A: \quad \forall x,y > 0: \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

  Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort "wahr" lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort "falsch", finde ein Gegenbeispiel.
  Ist der folgende Beweis der Aussage A richtig?
  Wir multiplizieren die Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ mit 2, also folgt $x+y \geq 2\sqrt{xy}$. Jetzt bringen wir $\sqrt{xy}$ auf die linke Seite, also folgt $x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$. Nun formen wir die linke Seite um, und erhalten $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht negativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schließen dass die Aussage A wahr ist.
  Sollte Ihre Antwort "falsch" sein, was ist der Fehler? Kann man den Beweis modifizieren dass ein richtiger Beweis entsteht?

- Sei A die Aussage

$A: \forall x > 0: x+1 \leq 2x$

Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort "wahr" lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort "falsch", finde ein Gegenbeispiel.
Ist der folgende Beweis der Aussage richtig oder falsch?
Wir multiplizieren die Ungleichung $x+1 \leq 2x$ mit $x-1$, also folgt $x^2-1 \leq 2x^2-2x$. Jetzt bringen wir ale Terme auf die rechte Seite, damit erhalten wir $0 \leq x^2-2x+1$. Nun formen wir die rechte Seite um, und erhalten $0 \leq (x-1)^2$.
Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schließen dass Aussage A wahr ist.
Sollte Ihre Antwort "falsch" sein, was ist der Fehler? Kann man den Beweis so modifizieren dass ein richtiger Beweis entsteht?

Wenn man weiß, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ und B wahr ist, folgt dadurch jedoch keine Information über den Wahrheitswert von A.

Die Aussage A in Punkt 1 ist richtig.

Beweis: $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \Rightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow$
$x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ $\square$

Der Beweis der Angabe ist falsch:
$\sqrt{xy} \geq \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow$
$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

Die einzelnen Schritte sind zwar richtig, führen jedoch von $A \Rightarrow B$. Dabei ist $B \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, und eine Tautologie für positive $x, y \in \mathbb{R}$. Der Beweis hat folgende Struktur:

$(A \Rightarrow B) \land B \Rightarrow A$

Wie vorhin bereits besprochen, wird uns das nicht dabei helfen, Aussagen über A treffen zu können.

Setzen wir jedoch den Modus Ponens Ponendo ein, also $(B \Rightarrow A) \land B \Rightarrow A$, so ist der Beweis richtig. Dazu werden die Implikationen jeweils umgekehrt (siehe Beweis oben).

Die Aussage A in Punkt 2 ist falsch.

Gegenbeispiel: A gilt nicht, wenn $0 < x < 1$.

Der Beweis der Aussage A kann dadurch a priori schon einmal nicht richtig sein. Der Fehler liegt – wie zu erwarten – im Schritt $x + 1 \leq 2x \Rightarrow x^2 - 1 \leq 2x^2 - 2x$, wo das Relationszeichen für $0 < x < 1$ nicht reversiert wird. (Es wird mit einem negativen Wert $x - 1$ multipliziert.)

Der Beweis wird durch die Einschränkung $x \geq 1$ repariert, zeigt dadurch jedoch eine modifizierte Aussage A'.

$A': \forall x \geq 1 : x + 1 \leq 2x$