Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Michael Neunteufel

Numerik partieller Differentialgleichungen: stationäre Probleme - Übung 2

Übungstermin: 28.10.2020 20. Oktober 2020

Aufgabe 6:
Sei H ein Hilbertraum und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, elliptische und symmetrische Bilinearform, d.h. es existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ sodass

$$a(u;v) \leq \beta \|u\| \|v\|, \quad a(u;u) \geq \alpha \|u\|^2, \qquad u, v \in H.$$

Wir definieren auf dem Hilbertraum $H \times H$ mit Skalarprodukt

$$((u_1, u_2); (v_1; v_2))_{H\times H} := (u_1; v_1)_H + (u_2; v_2)_H$$

die Bilinearform

$$b\left((u_1, u_2); (v_1; v_2)\right) := a(u_1; v_1) + Ca(u_1; v_2) + a(u_2; v_2)$$

mit einem beliebigen $C \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für $|C| < 2$ die Bilinearform b elliptisch ist.

Aufgabe 7:
a) Sei $\Omega = (0,1)$ das offene Einheitsintervall. Beweisen Sie, dass der Raum $H^1(\Omega)$ kompakt in den Raum $L^2(\Omega)$ eingebettet ist.
b) Sei $\Omega = (0,1)^2$ das offene Einheitsquadrat. Beweisen Sie, dass der Raum $H^1_0(\Omega)$ kompakt in den Raum $L^2(\Omega)$ eingebettet ist.

Aufgabe 8:
Zeigen Sie, dass ein stetiger und wohldefinierter Spuroperator $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ in den folgenden Fällen existiert.
a) $\Omega = Q := (0,1)^2$.
b) Sei Ω ein beschränktes, stückweise C^1-glattes Gebiet. Genauer soll $\partial\Omega$ aus $M \in \mathbb{N}$ Stücken Γ_i mit $i = 1, \ldots, M$ bestehen, sodass invertierbare Abbildungen $s_i \in C^1(Q, \Omega)$ existieren für die gilt

(a) $s_i\left((0,1) \times \{0\}\right) = \Gamma_i$,

(b) $\det s_i'(\tilde{x}) > 0$ für alle $\tilde{x} \in Q$ und

(c) es existiert eine Konstante $C > 0$ mit $\sup_{\tilde{x}\in Q} \|s_i'(\tilde{x})\|_2 < C$ und $\sup_{\tilde{x}\in Q} \left\|\left(s_i'(\tilde{x})\right)^{-1}\right\|_2 < C$.

Aufgabe 9:
Beweisen Sie Proposition 2.17 aus dem Vorlesungsskript.

Aufgabe 10:
Benutzen Sie das Jupyter-File "FirstExample_error.ipynb" als Ausgangspunkt um mit NGSolve Fehler-Konvergenzplots zu erstellen. Verifizieren Sie dazu mit Referenzgeraden, dass Sie für eine fixe Polynomordnung p die Konvergenzrate h^p erhalten, wobei h die maximale Mesh-size bezeichnet. Was für eine Konvergenz erhält man, wenn für ein fixes Mesh die Polynomordnung erhöht wird?

Anmerkung: Die Rate h^p ist für ein uniformes Mesh in 2D äquivalent zu $\left(\sqrt{\mathrm{ndof}}\right)^{-p}$, wobei ndof die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet.