

# **Analysis 3**

**für Technische Mathematik**

**WS 2018/2019**

**MICHAEL KALTENBÄCK**



# Inhaltsverzeichnis

<b>13 Implizite Funktionen und Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
13.1 Hauptsatz über implizite Funktionen . . . . .	1
13.2 Der Umkehrsatz . . . . .	8
13.3 Höhere Ableitbarkeit im Hauptsatz* . . . . .	11
13.4 Mannigfaltigkeiten . . . . .	13
13.5 Tangentialräume . . . . .	21
13.6 Gebiete mit orientierbarem Rand . . . . .	27
<b>14 Lebesgue Integral</b>	<b>33</b>
14.1 Topologie und Messbarkeit . . . . .	33
14.2 Lebesgue Integral . . . . .	34
14.3 Jensensche Ungleichung* . . . . .	42
14.4 Satz von Fubini und das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^d$ . . . . .	43
14.5 Faltung . . . . .	47
14.6 Anhang . . . . .	53
<b>15 Transformationsformel, Integralsätze</b>	<b>55</b>
15.1 Transformationsformel . . . . .	55
15.2 $C^1$ -Bilder von Nullmengen* . . . . .	65
15.3 Satz von Sard* . . . . .	66
15.4 Fixpunktsatz von Brouwer* . . . . .	68
15.5 Die Invarianzsätze von Brouwer* . . . . .	72
15.6 Integration über Mannigfaltigkeiten . . . . .	74
15.7 Integralsätze . . . . .	86
15.8 Poissonsche Darstellung harmonischer Funktionen* . . . . .	96
15.9 Stokesscher Integralsatz* . . . . .	101
<b>16 Funktionenräume</b>	<b>105</b>
16.1 $L^p$ -Räume . . . . .	105
16.2 Faltung auf Funktionenräumen . . . . .	112
16.3 Fourierreihen . . . . .	117
16.4 Fourierreihen auf $L^2[-\pi, \pi]$ . . . . .	122
16.5 Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen* . . . . .	128
16.6 Fejér Kern* . . . . .	130
<b>17 Integraltransformationen</b>	<b>133</b>
17.1 Fouriertransformation . . . . .	133
17.2 Laplacetransformation . . . . .	145

<b>18 Sobolevräume</b>	<b>149</b>
18.1 Schwache Ableitung . . . . .	149
18.2 Sobolevräume . . . . .	157
18.3 Einbettungen . . . . .	161
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>169</b>
<b>Index</b>	<b>170</b>

Die mit \* gekennzeichneten Abschnitte, Resultate bzw. Bemerkungen ist über die Vorlesung hinausführendes Material, welches aber den Umfang der Vorlesung sprengen würde. Dabei möchte ich den Studenten danken, die mir die Latex Dateien ihrer Seminar-, Bachelor-, Diplomarbeiten für die weiterführenden Abschnitte zur Verfügung gestellt haben.



## Kapitel 13

# Implizite Funktionen und Mannigfaltigkeiten

### 13.1 Hauptsatz über implizite Funktionen

Für das Hauptresultat dieses Kapitels benötigen wir den Banachschen Fixpunktsatz, der auch Anwendung in der Theorie der Differentialgleichungen findet.

**13.1.1 Satz (Banachscher Fixpunktsatz).** Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Weiters sei  $T : M \rightarrow M$  eine strikte Kontraktion, also

$$d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M,$$

mit einem festen  $0 \leq q < 1$ .

Dann hat die Fixpunktgleichung  $x = Tx$  genau eine Lösung  $z$  in  $M$ . Ist  $y_0 \in M$ , und definiert man  $y_n := T^n y_0$ , so konvergiert  $y_n$  gegen  $z$  mit

$$d(y_n, z) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(y_1, y_0).$$

*Beweis.* Zunächst kann es höchstens einen Fixpunkt geben. Sind nämlich  $z_1, z_2$  Fixpunkte von  $T$ , also  $Tz_1 = z_1$ ,  $Tz_2 = z_2$ , so folgt  $d(z_1, z_2) = d(Tz_1, Tz_2) \leq qd(z_1, z_2)$ . Wegen  $0 \leq q < 1$  ist das nur für  $d(z_1, z_2) = 0$  möglich. Weiters ist  $T : M \rightarrow M$  gleichmäßig stetig, da aus  $d(x, y) < \epsilon$  die Ungleichung  $d(Tx, Ty) \leq qd(x, y) < q\epsilon < \epsilon$  folgt.

Mittels Induktion zeigt man die Ungleichung

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq q^n d(y_0, y_1). \quad (13.1)$$

Für  $n = 0$  ist diese klar und der Induktionsschritt folgt aus  $d(y_{n+1}, y_{n+2}) = d(Ty_n, Ty_{n+1}) \leq q d(y_n, y_{n+1}) \leq q^{n+1} d(y_0, y_1)$ . Für  $n \leq m$  gilt sodann

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + \dots + d(y_{m-1}, y_m) \\ &\leq (q^n + \dots + q^{m-1}) d(y_0, y_1) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(y_0, y_1), \end{aligned}$$

da wegen  $0 \leq q < 1$  die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert. Also ist die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge, und infolge existiert der Grenzwert  $z := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Dass  $z$  ein Fixpunkt ist, folgt wegen der Stetigkeit von  $T$  aus

$$Tz = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = z.$$



13.1.2 *Bemerkung.* Erfüllt eine stetig differenzierbare Funktion  $\eta(\xi)$  die Beziehung

$$F(\xi, \eta(\xi)) = 0, \quad (13.2)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , so kann man  $\eta'(\xi)$  durch sogenanntes *implizites Differenzieren* berechnen. Dazu setzen wir  $f_1(\xi) := \xi$ ,  $f_2(\xi) := \eta(\xi)$  und  $f(\xi) := (f_1(\xi), f_2(\xi))^T \in \mathbb{R}^2$ . Gemäß (13.2) gilt  $h(\xi) := F \circ f(\xi) = 0$ , womit auch  $h'(\xi) = 0$ . Aus der Kettenregel schließen wir auf

$$0 = h'(\xi) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi, \eta(\xi)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi, \eta(\xi)) \cdot \eta'(\xi).$$

Im Fall  $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi, \eta(\xi)) \neq 0$  folgt  $\eta'(\xi) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi, \eta(\xi))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi, \eta(\xi))}$ .

13.1.3 *Beispiel.* Betrachte die Gleichung  $F(\xi_1, \xi_2) = 0$  wobei

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x = (\xi_1, \xi_2) & \mapsto \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1. \end{cases}$$

Ist durch die implizite Gleichung  $F(\xi, \eta(\xi)) = 0$  eine Funktion  $\eta(\xi)$  wohldefiniert? Nein, denn stets erfüllt ja mit einer Zahl  $\eta(\xi)$  auch  $-\eta(\xi)$  diese Beziehung. Man sieht jedoch,

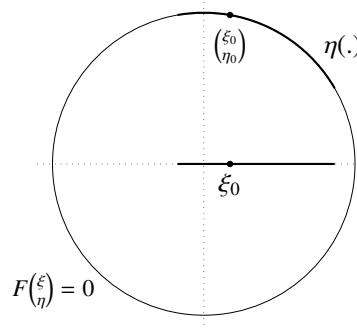


Abbildung 13.1: Lokale Darstellbarkeit von  $F(\xi, \eta) = 0$  als Funktion  $\eta(\xi)$

dass, solange  $\xi_0 \neq \pm 1$  ist, zumindest lokal um  $\xi_0$  eine stetige und stetig differenzierbare Funktion  $\eta(\cdot)$  mit  $F(\xi, \eta(\xi)) = 0$  definiert werden kann, wenn man sich nur im Punkt  $\xi_0$  selbst auf einen der beiden möglichen Werte  $\eta(\xi_0) = \eta_0$  bzw.  $\eta(\xi_0) = -\eta_0$  festlegt.

Beachte, dass wegen  $\xi_0 \neq \pm 1$  für jedes  $\eta_0$  mit  $F(\xi_0, \eta_0) = 0$  auch  $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi_0, \eta_0) \neq 0$ . Lokal um  $\xi_0$  erhält man die Ableitung der Lösungsfunktion  $\eta$  durch implizites Differenzieren:

$$0 = \frac{d}{d\xi} F(\xi, \eta(\xi)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi, \eta(\xi)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi, \eta(\xi)) \cdot \eta'(\xi) = 2\xi + 2\eta(\xi) \cdot \eta'(\xi),$$

also gilt  $\eta'(\xi) = -\frac{\xi}{\eta(\xi)}$ .

Wie wir eben gesehen haben, ist es nicht klar, ob durch eine implizite Gleichung  $F(\xi, \eta(\xi)) = 0$  nun tatsächlich eine Funktion definiert ist. Wie man mit Hilfe von Beispiel



13.1.3 vielleicht erraten kann, spielt dabei die Bedingung  $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi_0, \eta_0) \neq 0$  eine Rolle. Der in diesem Abschnitt bewiesene Hauptsatz über implizite Funktionen, Satz 13.1.4, gibt die exakte und allgemein formulierte Bestätigung dieser Vorahnung.

Die Ausgangssituation beim Hauptsatz über implizite Funktionen ist die, dass man eine stetig differenzierbare Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit einer offenen Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  hat. Wir schreiben die Elemente von  $\mathbb{R}^{n+m}$  als  $(x, y)$ , wobei  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ .

Für  $(x, y) \in D$  betrachten wir  $dF(x, y) \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^m)$  als  $m \times (n + m)$  Matrix. Nun nehmen wir die ersten  $n$  Spalten und fassen sie zur Matrix  $dF_1(x, y)$  zusammen. Entsprechend seien  $dF_2(x, y)$  die letzten  $m$  Spalten. Man hat also

$$dF(x, y) = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x, y) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x, y) \end{pmatrix}}_{=dF_1(x, y)} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}}(x, y) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}(x, y) \end{pmatrix}}_{=dF_2(x, y)} \right)$$

Mit  $dF(x, y)$  sind klarerweise auch  $dF_1(x, y)$  und  $dF_2(x, y)$  stetig in  $(x, y)$ . Für festes  $y$  ist  $x \mapsto dF_1(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  nichts anderes als die Ableitung der Funktion  $x \mapsto F(x, y)$ . Entsprechend ist  $y \mapsto dF_2(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  die Ableitung der Funktion  $y \mapsto F(x, y)$  bei festem  $x$ .

**13.1.4 Satz (Hauptsatz über implizite Funktionen<sup>1</sup>).** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  offen und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar. Weiters sei  $(a, b) \in D$  mit  $F(a, b) = 0$  derart, dass  $dF_2(a, b)$  invertierbar ist, also

$$\det \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}(a, b) \right)_{i,j=1}^m \neq 0.$$

- (i) Dann existieren offene Kugeln  $U = U_\delta(a) \subseteq \mathbb{R}^n$  um  $a$  und  $V = U_\rho(b) \subseteq \mathbb{R}^m$  um  $b$  mit  $U \times V \subseteq D$ , sowie eine stetige Funktion  $g : U \rightarrow V$  mit

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in U. \quad (13.3)$$

- (ii) Die Funktion  $g$  löst die Gleichung  $F(x, y) = 0$  auf  $U \times V$  vollständig in dem Sinne, dass, für  $(x, y) \in U \times V$  die Gleichheit  $F(x, y) = 0$  genau dann gilt, wenn  $y = g(x)$ . Insbesondere haben wir  $b = g(a)$ .

- (iii) Die Matrix  $dF_2(u, v) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ist für alle  $(u, v) \in U \times V$  invertierbar, und die Funktion  $g$  ist stetig differenzierbar, wobei für alle  $x \in U$

$$dg(x) = -dF_2(x, g(x))^{-1} dF_1(x, g(x)).$$

*Beweis.*

$\rightsquigarrow$  Wir setzen  $B = dF_2(a, b)$ . Wegen der Stetigkeit von  $(x, y) \mapsto dF_2(x, y)$  bei  $(a, b)$  gibt es ein  $\rho > 0$  so, dass  $U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a, b) \subseteq D$  und

$$\|B - dF_2(x, y)\| \leq \frac{1}{2\|B^{-1}\|} \quad \text{für alle } (x, y) \in U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a, b). \quad (13.4)$$

Wir wissen aus Korollar 9.3.7, dass dann für  $(x, y) \in U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a, b)$  auch die Matrix  $dF_2(x, y)$  invertierbar ist.

<sup>1</sup> Oft auch als “Implicit function theorem“ zitiert.

Wegen der Stetigkeit von  $F$  bei  $(a, b)$  existiert ein  $\delta \in (0, \rho]$  mit

$$\|F(x, b)\|_\infty = \|F(x, b) - F(a, b)\|_\infty \leq \frac{\rho}{4\|B^{-1}\|} \quad \text{für alle } x \in U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(a), \quad (13.5)$$

Wir setzen  $U := U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(a)$  und  $V := U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(b)$ . Man beachte, dass

$$U \times V \subseteq U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a) \times U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(b) = U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a, b) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}. \quad (13.6)$$

Für eine Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  so, dass  $h(x) \in V$  für alle  $x \in U$ , können wir wegen (13.6) auch die Funktion  $T(h) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch

$$T(h)(x) := h(x) - B^{-1}F(x, h(x)) \quad \text{für } x \in U, \quad (13.7)$$

definieren. Eine Funktion  $g : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$  erfüllt dabei offenbar  $F(x, g(x)) = 0$ ,  $x \in U$ , genau dann, wenn  $T(g) = g$ . Diese Fixpunktgleichung wollen wir mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, Satz 13.1.1, behandeln.

↪ Dazu betrachten wir zunächst den Banachraum  $C_b(U, \mathbb{R}^m)$  versehen mit der Supremumsnorm<sup>2</sup>  $\|f\| := \sup_{x \in U} \|f(x)\|_\infty$  und darin die abgeschlossene Kugel  $K_{\frac{\rho}{2}}(h_0) =: \mathcal{M}$  um das Element  $h_0 \in C_b(U, \mathbb{R}^m)$ , wobei  $h_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  die konstante Funktion  $x \mapsto b$  ist. Als abgeschlossene Teilmenge eines vollständig metrischen Raumes ist  $\mathcal{M}$  versehen mit  $d(h_1, h_2) := \|h_1 - h_2\|$  ein vollständig metrischer Raum.

Für  $h \in \mathcal{M}$  gilt wegen  $\|h(x) - b\| \leq \|h - h_0\| \leq \frac{\rho}{2} < \rho$  immer  $h(x) \in V$ , womit  $T(h) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch (13.7) wohldefiniert und offenbar auch stetig ist. Können wir zeigen, dass für  $h_1, h_2 \in \mathcal{M}$

$$\|T(h_1)(x) - T(h_2)(x)\|_\infty \leq \frac{\|h_1(x) - h_2(x)\|_\infty}{2} \quad \text{für alle } x \in U, \quad (13.8)$$

so folgt auch

$$\begin{aligned} \|T(h)(x) - h_0(x)\|_\infty &\leq \|T(h)(x) - T(h_0)(x)\|_\infty + \|T(h_0)(x) - h_0(x)\|_\infty \\ &\leq \frac{\rho}{4} + \|B^{-1}F(x, b)\|_\infty \leq \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Also ist  $T(h)$  beschränkt und es gilt  $\|T(h) - h_0\| \leq \frac{\rho}{2}$ , womit  $T(h) \in K_{\frac{\rho}{2}}(h_0) = \mathcal{M}$ . Zudem bedingt (13.8)  $\|T(h_1) - T(h_2)\| \leq \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\|$ , wodurch sich  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  als strikte Kontraktion herausstellt.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es dann eine eindeutige Funktion  $g \in \mathcal{M}$ , also ein stetiges  $g : U \rightarrow K_{\frac{\rho}{2}}(b) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^m$ , mit  $T(g) = g$  und infolge  $F(x, g(x)) = 0$  für alle  $x \in U$ . Damit ist (i) gezeigt.

↪ Wir wollen nun die Verifikation von (13.8) nachholen. Dazu betrachte für ein festes  $x \in U$  die Funktion

$$\Phi_x : V \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad y \mapsto y - B^{-1}F(x, y).$$

Wir erhalten  $d\Phi_x(y) = I - B^{-1}dF_2(x, y)$ , und wegen (13.4) auch

$$\|d\Phi_x(y)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|B - dF_2(x, y)\| \leq \frac{1}{2}. \quad (13.9)$$

<sup>2</sup>Normalerweise wird die Supremumsnorm mit  $\|\cdot\|_\infty$  bezeichnet, was wir hier bewusst unterlassen, weil  $\|\cdot\|_\infty$  schon für die Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^m$  steht.

Nach Korollar 10.1.24, angewandt auf die konvexe Menge  $V = U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(b)$ , gilt

$$\|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_\infty \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in V. \quad (13.10)$$

Für  $x \in U$  und  $h_1, h_2 \in \mathcal{M}$  folgt somit

$$\|T(h_1)(x) - T(h_2)(x)\|_\infty = \|\Phi_x(h_1(x)) - \Phi_x(h_2(x))\|_\infty \leq \frac{\|h_1(x) - h_2(x)\|_\infty}{2}.$$

$\rightsquigarrow$  Ist  $(x, y) \in U \times V$ , und gilt  $F(x, y) = 0$ , so erhalten wir  $\Phi_x(y) = y - B^{-1}F(x, y) = y$  und klarerweise auch  $\Phi_x(g(x)) = g(x)$ . Wegen (13.10) sieht man

$$\|g(x) - y\|_\infty = \|\Phi_x(y) - \Phi_x(g(x))\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g(x) - y\|_\infty,$$

also  $y = g(x)$ . Insbesondere gilt  $g(a) = b$ . Damit haben (ii) nachgewiesen.

$\rightsquigarrow$  Wir weisen zunächst nach, dass  $g$  bei  $a$  differenzierbar ist, wobei

$$dg(a) = -dF_2(a, b)^{-1} dF_1(a, b). \quad (13.11)$$

Dazu wollen wir nochmals die Funktion  $\Phi_x : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit festem  $x \in U$  definiert durch  $\Phi_x(y) = y - B^{-1}F(x, y)$  bemühen. Ihre Ableitung

$$d\Phi_x(y) = I - B^{-1}dF_2(x, y) = B^{-1}(B - dF_2(x, y))$$

ist stetig in der Variablen  $(x, y) \in U \times V$ , wobei  $d\Phi_a(b) = 0$ . Somit ist die Funktion  $\psi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\psi(\eta) = \sup_{x \in K_{\delta\eta}(a), y \in K_{\rho\eta}(b)} \|d\Phi_x(y)\|.$$

stetig bei 0 und erfüllt  $\psi(0) = 0$ . Wegen (13.9) gilt  $\psi([0, 1)) \subseteq [0, \frac{1}{2}]$ . Da  $K_{\rho\eta}(b)$  eine konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$  ist, folgt aus Korollar 10.1.24, dass für  $y_1, y_2 \in K_{\rho\eta}(b)$ ,  $x \in K_{\delta\eta}(a)$

$$\|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)\|_\infty \leq \psi(\eta) \|y_1 - y_2\|_\infty. \quad (13.12)$$

Für  $\|z\|_\infty < \delta$  gilt wegen  $F(a, g(a)) = F(a + z, g(a + z)) = 0$

$$g(a + z) - g(a) = \quad (13.13)$$

$$(g(a + z) - B^{-1}F(a + z, g(a + z))) - (g(a) - B^{-1}F(a + z, g(a))) - B^{-1}(F(a + z, g(a)) - F(a, g(a))) =$$

$$\Phi_{a+z}(g(a + z)) - \Phi_{a+z}(g(a)) - B^{-1}(dF_1(a, g(a))z + \|z\|_\infty \epsilon_1(z))$$

mit einer Funktion  $\epsilon_1 : (U \setminus \{a\}) - a \rightarrow \mathbb{R}^m$  derart, dass  $\lim_{z \rightarrow 0} \epsilon_1(z) = 0$ , wobei hier verwendet wurde, dass  $F$  in der ersten Variablen bei  $(a, b)$  differenzierbar ist, vgl. (10.5).

Für  $\eta = \max(\frac{1}{\delta} \|z\|_\infty, \frac{1}{\rho} \|g(a + z) - g(a)\|_\infty) (< 1)$ , gilt  $g(a + z), g(a) = b \in K_{\rho\eta}(b)$  und  $a + z \in K_{\delta\eta}(a)$ . Also folgt aus (13.12)

$$\|g(a + z) - g(a)\|_\infty \leq$$

$$\underbrace{\psi\left(\max\left(\frac{1}{\delta}\|z\|_\infty, \frac{1}{\rho}\|g(a+z)-g(a)\|_\infty\right)\right)}_{=: \beta(z)} \|g(a+z)-g(a)\|_\infty + \|B^{-1}(\|dF_1(a, g(a))\| + \|\epsilon_1(z)\|_\infty)\|z\|_\infty$$

bzw.

$$\|g(a+z)-g(a)\|_\infty \leq \frac{\|B^{-1}(\|dF_1(a, g(a))\| + \|\epsilon_1(z)\|_\infty)\|z\|_\infty}{1 - \beta(z)},$$

wobei  $\beta : U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(0) \rightarrow [0, \frac{1}{2})$  stetig bei  $0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\beta(0) = 0$  ist. Addieren wir zu (13.13) den Ausdruck  $B^{-1}dF_1(a, g(a))z$ , so folgt wieder aus (13.12)

$$\|g(a+z)-g(a)+B^{-1}dF_1(a, g(a))z\|_\infty \leq \beta(z)\|g(a+z)-g(a)\|_\infty + \|B^{-1}\|\|\epsilon_1(z)\|_\infty\|z\|_\infty \leq \left(\frac{\beta(z)\|B^{-1}(\|dF_1(a, g(a))\| + \|\epsilon_1(z)\|_\infty)\|z\|_\infty}{1 - \beta(z)} + \|B^{-1}\|\|\epsilon_1(z)\|_\infty\right)\|z\|_\infty.$$

Da für  $z \rightarrow 0$  der Klammerausdruck gegen Null strebt, erhalten wir die Differenzierbarkeit von  $g$  bei  $a$  mit der Ableitung  $dg(a) = -B^{-1}dF_1(a, b) = dF_2(a, b)^{-1}dF_1(a, b)$ .

↔ Für  $a' \in U$  sei  $b' = g(a')$ . Wir haben schon in einer Fußnote gesehen, dass  $dF_2(a', b')$  invertierbar ist. Also können wir das schon Bewiesene auf  $(a', b') \in U \times V$  anwenden, und erhalten eine Kugel  $U' \subseteq U$  um  $a'$  und eine Kugel  $V' \subseteq V$  um  $b'$ , sowie eine Funktion  $g' : U' \rightarrow V'$  mit  $g'(a') = b'$  und  $F(x, g'(x)) = 0$ ,  $x \in U'$ .

Nach (ii) muss  $g'(x) = g(x)$ ,  $x \in U'$  gelten, und gemäß (13.11) ist

$$dg(a') = dg'(a') = -dF_2(a', g(a'))^{-1}dF_1(a', g(a')).$$

Die rechte Seite ist nach Korollar 9.3.7 aber stetig in  $a'$ . Also ist  $g$  stetig differenzierbar und die Ableitung lässt sich wie behauptet berechnen. □

**13.1.5 Beispiel.** Wir betrachten die Funktion  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert als

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T := c_1\zeta_1^2 + c_2\zeta_2^2 + c_3\zeta_3^2 - 1,$$

wobei  $c_1, c_2, c_3 > 0$  vorgegeben sind, und untersuchen die Lösungen der Gleichung  $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T = 0$ . Die Nullstellenmenge  $M := \{z \in \mathbb{R}^3 : F(z) = 0\}$  von  $F$  bildet in diesem Beispiel ein Ellipsoid.

Sei  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$  eine Lösung von  $F(z) = 0$ . Wir wollen die Gleichung  $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T = 0$  lokal bei  $\alpha$  nach  $\zeta_3$  auflösen. Anders ausgedrückt, wir fragen ob, man die durch die implizite Gleichung  $F(z) = 0$  gegebene Fläche  $M$  lokal um den Punkt  $\alpha$ , welcher auf ihr liegt, in der expliziten Form  $\zeta_3 = g(\zeta_1, \zeta_2)^T$  darstellen kann. Dazu wenden wir den Hauptsatz über implizite Funktionen an, und zwar mit der folgenden Rollenverteilung:  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $y = \zeta_3$ ,  $x = (\zeta_1, \zeta_2)^T$ ,  $b = \alpha_3$ ,  $a = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ . Die Voraussetzung  $F \in C^1$  ist in unserem Fall klarerweise erfüllt,  $F$  ist ja ein Polynom. Die entscheidende Funktionaldeterminante ist die Determinante der  $1 \times 1$ -Matrix  $\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_3}(\alpha)\right)$ , also

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_3}(\alpha) = 2c_3\alpha_3.$$

Liegt der Punkt  $\alpha$  nicht am Äquator des Ellipsoids, d.h. ist  $\alpha_3 \neq 0$ , so existiert eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  von  $(\alpha_1, \alpha_2)^T$  und eine  $C^1$ -Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(\alpha_1, \alpha_2)^T = \alpha_3$  und  $F(\zeta_1, \zeta_2, g(\zeta_1, \zeta_2)^T) = 0$  für alle  $(\zeta_1, \zeta_2)^T \in U$ . Liegt  $\alpha$  dagegen am Äquator, so können wir den Hauptsatz nicht anwenden. Tatsächlich ist in solchen Punkten ein Auflösen nach  $\zeta_3$  auch nicht möglich. Wir bemerken einen Unterschied zwischen der

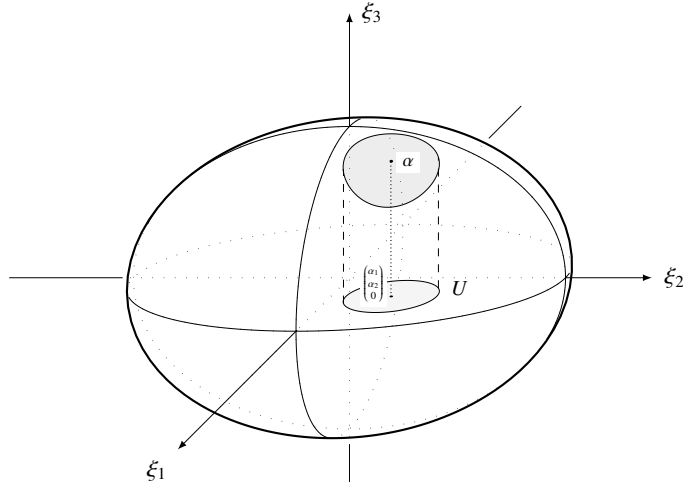


Abbildung 13.2: Darstellung eines Teils von  $M$  als Graph einer Funktion  $g(\zeta_1, \zeta_2)^T$

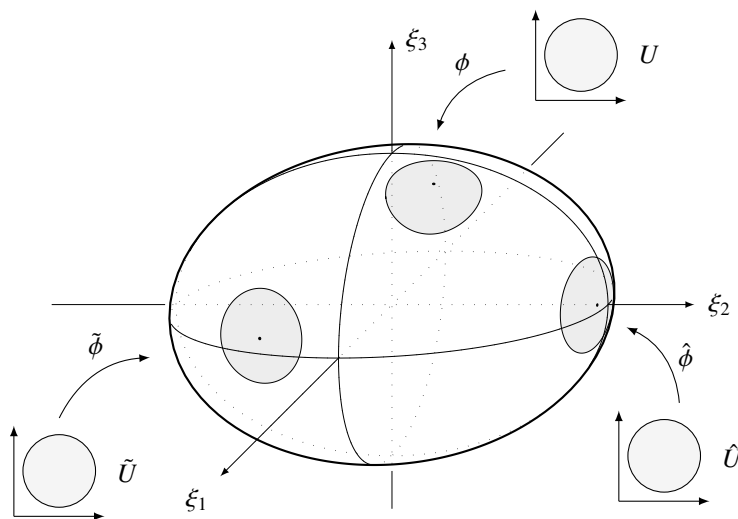
impliziten und expliziten Darstellung der Fläche  $M$ . Die implizite Gleichung  $F(z) = 0$  definiert die Fläche global, d.h. in ihrer Gesamtheit. Eine explizite Darstellung, z.B. in der Form  $\zeta_3 = g(\zeta_1, \zeta_2)^T$  ist nur lokal, d.h. für gewisse Teilstücke der Fläche und nicht einmal um beliebige Punkte der Fläche möglich, wie man bei Punkten am Äquator erkennt. Eine explizite Darstellung hat also den Nachteil immer nur auf kleinen Teilen zu funktionieren und Punkten des Äquators, die geometrisch gar nicht ausgezeichnet sind, einen anderen Stellenwert zu verleihen als allen anderen. Natürlich hat sie dem gegenüber den Vorteil, dass man mit einer expliziten Darstellung besser rechnen kann.

In unserem Beispiel kann man für jeden Punkt  $\alpha \in M$  lokal nach zu mindest einer Variablen  $\zeta_1, \zeta_2$  oder  $\zeta_3$  auflösen. In der Tat ist einer der Werte  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sicher nicht Null. Löst man z.B. nach  $\zeta_2$  auf, so erhält man eine Funktion  $\hat{g}$  mit  $F(\zeta_1, \hat{g}(\zeta_1, \zeta_3)^T, \zeta_3)^T = 0$  für  $(\zeta_1, \zeta_3)$  lokal um  $(\alpha_1, \alpha_3)$ .

Man hat also sicher lokal um jeden Punkt  $\alpha \in M$  eine Einbettung der Form entweder  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \phi(t, u)^T = (t, u, g(t, u)^T)^T$  oder  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \hat{\phi}(t, u)^T = (t, \hat{g}(t, u)^T, u)^T$  oder auch  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \tilde{\phi}(t, u)^T = (\tilde{g}(t, u)^T, t, u)^T$ . Will man  $M$  global erfassen, so hat man die Gesamtheit aller dieser Einbettungen zu betrachten ganz ähnlich, wie man in einem Weltatlas, um die gesamte Erde zu sehen, die Karten von allen Ländern und Meeren anschauen muss.

$$\phi : \begin{cases} U \subseteq \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (t, u)^T & \mapsto (t, u, g(t, u)^T)^T, \end{cases} \quad \hat{\phi} : \begin{cases} \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (t, u)^T & \mapsto (t, \hat{g}(t, u)^T, u)^T, \end{cases}$$

$$\tilde{\phi} : \begin{cases} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (t, u)^T & \mapsto (\tilde{g}(t, u)^T, t, u)^T. \end{cases}$$

Abbildung 13.3: Darstellung von  $M$  durch Graphen verschiedener Abbildungen

In unserem Beispiel kann man das gesamte Ellipsoid  $M$  beschreiben durch die sechs Teilstücke “obere Hälfte“, “untere Hälfte“, “rechte/linke/vordere/hintere Hälfte“. Auf diesen hat man

$$g(\zeta_1, \zeta_2)^T = \pm \sqrt{1 - a\zeta_1^2 - b\zeta_2^2}, \quad \hat{g}(\zeta_1, \zeta_3)^T = \pm \sqrt{1 - a\zeta_1^2 - c\zeta_3^2},$$

$$\tilde{g}(\zeta_2, \zeta_3)^T = \pm \sqrt{1 - b\zeta_2^2 - c\zeta_3^2}.$$

Wir werden später mit Hilfe von Satz 13.4.4 erkennen, dass  $M$  eine sogenannte Mannigfaltigkeit der Dimension 2 im Dreiraum ist. Dieser Begriff der Mannigfaltigkeit ist der eleganteste und zielführendeste, um mit Objekten wie mit unserem Ellipsoid zu arbeiten.

## 13.2 Der Umkehrsatz

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine affine Abbildung der Form

$$f(u) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Die affine Abbildung  $f$  ist genau dann injektiv (und damit aus Dimensionsgründen bijektiv), wenn  $\det(c_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0$ . In diesem Fall existiert die Inverse  $f^{-1}$  von  $f$  oder, anders ausgedrückt, die Gleichung  $f(u) = v$  lässt sich in eindeutiger Weise nach  $u$  auflösen.

Die affine Abbildung  $f$  ist stetig differenzierbar mit  $df(u) = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ . Ausschlaggebend für die Invertierbarkeit in unserer speziellen Situation ist also die Invertierbarkeit von  $df(u)$ .

Es ist eine wesentliche Feststellung, dass im Allgemeinen zu mindest lokal das gleiche Verhalten vorliegt.

**13.2.1 Satz (Umkehrsatz).** Sei  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar auf der offenen Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Weiters sei  $c \in C$  mit

$$\det df(c) \neq 0$$

und sei  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit  $f(c) \in E$ . Dann existieren offene Mengen  $O \subseteq C$  und  $U \subseteq E$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $c \in O$  und  $f(c) \in U$ .
- (ii)  $f|_O$  ist eine Bijektion von  $O$  auf  $U$ .
- (iii) Die inverse Abbildung  $g : U \rightarrow O$  von  $f|_O : O \rightarrow U$  ist stetig differenzierbar mit  $dg(f(t)) = df(t)^{-1}$  für alle  $t \in O$ .

**13.2.2 Bemerkung.** Dieser Satz gibt ein lokales Analogon zu obiger Bemerkung über affine Funktionen. Denn ist  $f$  affin, so kann man  $O = \mathbb{R}^n$  und  $U = \mathbb{R}^n$  wählen. Im allgemeinen muss man sich jedoch wirklich auf gewisse offene Umgebungen  $O$  und  $U$  von  $c$  bzw.  $f(c)$  einschränken, um Existenz einer Inversen zu erhalten.

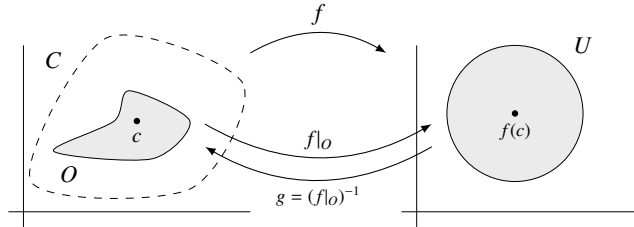


Abbildung 13.4: Umkehrfunktion  $g$  von  $f|_O$

**Beweis von Satz 13.2.1:** Wir wenden Satz 13.1.4 mit  $a = f(c)$ ,  $b = c$  auf die stetig differenzierbare Funktion

$$F : \underbrace{E \times C}_{=: D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+n}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x, y) = f(y) - x,$$

für die man  $dF(x, y) = (-I \mid df(y))$  berechnet, an. Mit der Notation von Satz 13.1.4 gilt

$$dF_2(x, y) = df(y), \quad dF_1(x, y) = -I.$$

Bei  $(a, b) = (f(c), c)$  ist  $dF_2(a, b) = df(c)$  voraussetzungsgemäß invertierbar. Nach Satz 13.1.4 gibt es offene Mengen  $U \ni a$  und  $V \ni b$  mit  $U \times V \subseteq E \times C$ , dh.  $U \subseteq E$ ,  $V \subseteq C$ , sowie eine  $C^1$ -Funktion  $g : U \rightarrow V$  mit

$$F(x, g(x)) = 0, \quad dg(x) = -dF_2(x, g(x))^{-1} dF_1(x, g(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Aus der speziellen Form von  $F$  folgt

$$x = f(g(x)), \quad dg(x) = df(g(x))^{-1} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Insbesondere erhalten wir die Injektivität von  $g : U \rightarrow V$ . Nun ist

$$O := V \cap f^{-1}(U) = \{t \in V : f(t) \in U\}$$

als Schnitt zweier offener Mengen wieder offen;  $f^{-1}(U)$  ist ja als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion offen. Für  $x \in U$  ist  $g(x) \in V$  und  $f(g(x)) = x \in U$ , also  $g(x) \in O$ , und daher  $g : U \rightarrow O$ . Außerdem gilt klarerweise  $f|_O : O \rightarrow U$ .

Wir wissen schon  $f|_O \circ g = \text{id}_U$ . Für  $t \in O (\subseteq V)$  ist  $f(t) \in U$  und  $F(f(t), t) = 0$ . Aus Satz 13.1.4, (ii), folgt  $t = g(f(t))$  und somit gilt auch  $g \circ f|_O = \text{id}_O$ .  $\square$

**13.2.3 Korollar.** Sei  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar auf der offenen Menge  $C$ , und sei  $D \subseteq C$  ebenfalls offen. Gilt  $\det df(c) \neq 0$  für alle  $c \in D$ , so ist  $f(D)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

Ist zusätzlich  $f$  injektiv auf  $D$ , so ist auch  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, wobei  $d(f^{-1})(f(t)) = (df(t))^{-1}$  für  $t \in D$ .

*Beweis.* Nach Satz 13.2.1, angewandt auf  $f|_D$ , gibt es um jedes  $c \in D$  offene Mengen  $O_c \subseteq D$  und  $U_c \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $c \in O_c$  derart, dass  $f|_{O_c} : O_c \rightarrow U_c$  bijektiv ist. Somit ist

$$f(D) = f\left(\bigcup_{c \in D} O_c\right) = \bigcup_{c \in D} f(O_c) = \bigcup_{c \in D} U_c$$

als Vereinigung offener Mengen wieder offen; vgl. Proposition 5.1.6. Der zweite Teil des Korollars folgt unmittelbar aus Satz 13.2.1, (iii).  $\square$

Gilt  $\det df(c) \neq 0$  für alle  $c \in C$ , so besagt Korollar 13.2.3, dass  $f$  eine offene Abbildung ist, also offene Mengen auf offenen Mengen abbildet.

**13.2.4 Definition.** Sind  $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und ist  $f : C \rightarrow D$  bijektiv und derart, dass  $f$  und  $f^{-1}$  stetig differenzierbar sind, so nennt man  $f$  einen *Diffeomorphismus*, oder genauer, einen  $C^1$ -Diffeomorphismus. Sind dabei  $f$  und  $f^{-1}$  sogar  $k$ -mal stetig differenzierbar, dann sprechen wir von einem  $C^k$ -Diffeomorphismus.

**13.2.5 Bemerkung.** Ist  $f : C \rightarrow D$  so ein Diffeomorphismus, so folgt aus der Kettenregel, Proposition 10.1.18, dass

$$I = dI(x) = d(f^{-1} \circ f)(x) = df^{-1}(f(x)) df(x) \quad \text{für alle } x \in C.$$

Insbesondere ist  $df(x)$  für alle  $x \in C$  invertierbar.

Ist umgekehrt  $f : C \rightarrow D$  bijektiv und stetig differenzierbar mit offenem  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  und mit ad hoc beliebigem  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  derart, dass  $df(x)$  für alle  $x \in C$  invertierbar ist, so folgt aus Korollar 13.2.3, dass  $D$  offen und  $f^{-1} : D \rightarrow C$  ebenfalls stetig differenzierbar ist. Somit identifizieren wir  $f : C \rightarrow D$  als  $C^1$ -Diffeomorphismus.

**13.2.6 Beispiel.** Wir betrachten abermals die Polarkoordinatenfunktion  $T : C \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$T \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}.$$

mit  $C = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ . In (10.4) aus Beispiel 10.1.10 haben wir  $dT((r, t)^T)$  berechnet. Die Determinante davon ist  $r(\cos t)^2 + r(\sin t)^2 = r > 0$  und somit für alle  $(r, t)^T \in C$  regulär.

Nach Korollar 13.2.3 ist  $T(C)$  offen in  $\mathbb{R}^2$ . Aus dem ersten Semester (vgl. Definition 6.9.11 und Bemerkung 6.9.12) wissen wir, dass in der Tat

$$T(C) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}.$$

Sei nun  $(\rho, \tau)^T \in C$  fest, so gibt es nach Satz 13.2.1 offene Teilmengen  $O$  und  $U$  von  $\mathbb{R}^2$  derart, dass  $(\rho, \tau)^T \in O$ ,  $T((\rho, \tau)^T) \in U$  und dass  $T|_O : O \rightarrow U$  bijektiv



und in beide Richtungen stetig differenzierbar ist. Die Ableitung von  $T^{-1}$  im Punkt  $(\xi, \eta) = T((r, t)^T) \in U$ , dh.  $r^2 = \xi^2 + \eta^2$  und  $r \cos t = \xi$ ,  $r \sin t = \eta$ , ist dabei

$$\begin{aligned} dT^{-1}((\xi, \eta)^T) &= (dT((r, t)^T))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos t & r \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} & \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} & \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit  $O$  ist auch  $O \cap (\mathbb{R}^+ \times (\tau - \pi, \tau + \pi))$  offen in  $\mathbb{R}^2$ . Schränkt man  $T$  auf diese Menge ein, so folgt aus Korollar 13.2.3, dass  $T(O') =: U' \subseteq U$  offen in  $\mathbb{R}^2$  ist. Klarerweise ist auch  $T|_{O'} : O' \rightarrow U'$  bijektiv und in beide Richtungen stetig differenzierbar. Somit können wir das ursprüngliche  $O$  und  $U$  bereits so wählen, dass  $O \subseteq \mathbb{R}^+ \times (\tau - \pi, \tau + \pi)$ .

In diesem Fall wissen wir schon aus Bemerkung 6.9.12, dass  $T|_O$  injektiv ist. In der Tat bildet  $T$  die ganze Menge  $\mathbb{R}^+ \times (\tau - \pi, \tau + \pi)$  bijektiv auf

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ s \begin{pmatrix} \cos(\tau + \pi) \\ \sin(\tau + \pi) \end{pmatrix} : s \in [0, +\infty) \right\}$$

ab; siehe Proposition 6.9.13.  $T$  als Abbildung von  $C$  nach  $\mathbb{R}^2$  ist dagegen nicht injektiv.

**13.2.7 Bemerkung.** Satz 13.1.4 gilt auch in der allgemeineren Situation, dass  $D$  offene Teilmenge von  $X \times Y$  mit Banachräumen  $X$  und  $Y$  ist. Die vorausgesetzte stetige Differenzierbarkeit von  $F : D \rightarrow Z$  mit einem weiteren Banachraum  $Z$  ist dann im Sinne der Fréchet-Differenzierbarkeit aus Bemerkung 10.1.25 zu verstehen. Die Voraussetzung  $\det dF_2(a, b) \neq 0$  muss durch die Forderung ersetzt werden, dass  $dF_2(a, b)$  als beschränkte lineare Abbildung von  $Y$  nach  $Z$  bijektiv ist. Der hier angegebene Beweis funktioniert im wesentlichen auch in diesem allgemeineren Fall.

Auch Satz 13.2.1 lässt sich verallgemeinern auf Funktionen  $f : C \rightarrow Y$  mit offenem  $C \subseteq X$  und Banachräumen  $X$  und  $Y$ . Die Voraussetzung  $\det df(c) \neq 0$  muss durch die Forderung ersetzt werden, dass  $df(c)$  als beschränkte lineare Abbildung von  $X$  nach  $Y$  bijektiv ist.

## 13.3 Höhere Ableitbarkeit im Hauptsatz\*

Wir wollen uns den Hauptsatz über implizite Funktionen und den Umkehrsatz für Ausgangsfunktionen anschauen, welche mehrfach ableitbar sind.

**13.3.1 Lemma.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $h : I \rightarrow L_b(X, Y)$  derart, dass  $h(t)$  für alle  $t \in I$  invertierbar ist, wobei  $(h(t))^{-1} \in L_b(Y, X)$ . Ist dann  $h$  in einem Punkt  $x \in I$  differenzierbar, so auch  $t \mapsto (h(t))^{-1}$ , wobei

$$((h(x))^{-1})' = -h(x)^{-1} h'(x) h(x)^{-1}.$$

*Beweis.* Für  $t \in I \setminus \{x\}$  gilt

$$\frac{1}{t-x} ((h(t))^{-1} - (h(x))^{-1}) = -(h(t))^{-1} \frac{1}{t-x} (h(t) - h(x)) (h(x))^{-1}.$$

Da  $h$  bei  $x$  differenzierbar ist, ist sie dort auch stetig. Wegen Korollar 9.3.7 ist auch die Zusammensetzung  $t \mapsto (h(t))^{-1}$  bei  $x$  stetig. Aus Lemma 9.2.8 folgt, dass für  $t \rightarrow x$  obiger Ausdruck gegen  $-h(x)^{-1} h'(x) h(x)^{-1}$  konvergiert.  $\square$

**13.3.2 Lemma.** Sei  $X$  ein Banachraum und seien  $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen. Weiters seien  $H : I \times D \rightarrow X$  – wir schreiben  $H(x, y_1, \dots, y_m)$  – sowie  $h : I \rightarrow D (\subseteq \mathbb{R}^m)$  stetig differenzierbar, so ist auch  $t \mapsto H(t, h(t))$  stetig differenzierbar auf  $I$  mit Ableitung

$$\frac{d}{dt}H(t, h(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, h(t)) + \sum_{l=1}^m h_l(t)' \frac{\partial H}{\partial y_l}(t, h(t))$$

wobei  $h = (h_1, \dots, h_m)^T$ .

*Beweis.*  $\phi : t \mapsto H(t, h(t))$  ist die Hintereinanderausführung von  $t \mapsto (t, h(t))$  und  $H$ . Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dt}H(t, h(t)) = d\phi(t)1 = dH(t, h(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ h'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial x}(t, h(t)) + \sum_{l=1}^m h_l(t)' \frac{\partial H}{\partial y_l}(t, h(t)).$$

□

**13.3.3 Proposition.** Mit den selben Voraussetzungen und der selben Notation wie im Hauptsatz über implizite Funktionen, Satz 13.1.4, sei  $F \in C^k(D)$  mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Dann ist auch die Funktion  $g : U \rightarrow V$  immer  $k$ -mal stetig differenzierbar.

*Beweis.* Wir wissen aus Satz 13.1.4, dass  $g$  zumindest einmal stetig differenzierbar ist, wobei

$$dg(u) = -dF_2(u, g(u))^{-1}dF_1(u, g(u)) \quad \text{für } u \in U.$$

Nach Voraussetzung sind  $(x, y) \mapsto dF_1(x, y)$  und  $(x, y) \mapsto dF_2(x, y)$  stetig partiell differenzierbar. Wegen (9.11), Lemma 13.3.1 und Lemma 13.3.2 ist  $u \mapsto dg(u)$  partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_j} dg(u) = & dF_2(u, g(u))^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} dF_2(u, g(u)) + \right. \\ & \left. \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} g_l(u) \frac{\partial}{\partial y_l} dF_2(u, g(u)) \right) dF_2(u, g(u))^{-1} dF_1(u, g(u)) - \\ & dF_2(u, g(u))^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} dF_1(u, g(u)) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} g_l(u) \frac{\partial}{\partial y_l} dF_1(u, g(u)) \right), \end{aligned}$$

wobei  $g = (g_1, \dots, g_m)^T$ . Nach Korollar 9.1.3 und Korollar 9.2.9 ist diese Funktion stetig in  $u$ , womit  $g \in C^2(U)$ . Außerdem ist  $\frac{\partial}{\partial u_j} dg(u)$  endliche Summe von endlichen Produkten von  $dF_2(u, g(u))^{-1}$ ,  $dF_1(u, g(u))$  und von gewissen ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} dF_1(u, g(u)), \frac{\partial}{\partial y_l} dF_1(u, g(u)), \frac{\partial}{\partial x_j} dF_2(u, g(u)), \frac{\partial}{\partial y_l} dF_2(u, g(u)), \frac{\partial}{\partial u_j} g_l(u).$$

Ist nun  $k \geq 3$ , so sind letztere Funktionen nochmals stetig partiell differenzierbar, und man zeigt wie oben, dass  $\frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} dg(u)$  existiert und stetig ist. Außerdem ist diese

Funktion wieder eine endliche Summe von endlichen Produkten von obigen Funktionen (mit  $i$  statt  $j$ ) und dazu von zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dF_1(u, g(u)), \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_l} dF_1(u, g(u)), \frac{\partial^2}{\partial y_r \partial y_l} dF_1(u, g(u)), \\ & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dF_2(u, g(u)), \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_l} dF_2(u, g(u)), \frac{\partial^2}{\partial y_r \partial y_l} dF_2(u, g(u)), \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} g_l(u). \end{aligned}$$

Damit ist  $g \in C^3(U)$ . Man fährt induktiv fort und erhält schließlich  $g \in C^k(U)$ .  $\square$

**13.3.4 Korollar.** *Mit den selben Voraussetzungen und der selben Notation wie im Umkehrsatz, Satz 13.2.1, sei  $f \in C^k(D)$  mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Dann ist auch die Funktion  $g : U \rightarrow O$  immer  $k$ -mal stetig differenzierbar.*

*Beweis.* Im Beweis von Satz 13.2.1 haben wir Satz 13.1.4 auf  $F(x, y) = f(y) - x$  angewandt, um die Funktion  $g$  als Lösung von  $F(x, f(x)) = 0$  zu erhalten. Aus Proposition 13.3.3 folgt  $g \in C^k(D)$ .  $\square$

## 13.4 Mannigfaltigkeiten

Wir wollen in diesem Kapitel Teilmengen von  $\mathbb{R}^p$  studieren, die von ihrer Natur her dem anschaulichen Begriff der Flächen im Dreiraum entsprechen, wie etwa die Oberfläche der Einheitskugel. Formal lässt sich das folgendermaßen greifen.

**13.4.1 Definition.** Eine nichtleere Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , heißt *Untermannigfaltigkeit* von  $\mathbb{R}^p$ , oder kurz *Mannigfaltigkeit* im  $\mathbb{R}^p$ , der Dimension  $d \in \{1, \dots, p\}$ , falls es zu jedem  $x \in M$  offene  $U_\varphi, D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$  und einen  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  gibt mit

$$x \in U_\varphi \quad \text{und} \quad \varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}),$$

wobei hier  $\mathbb{R}^d \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^p : x_j = 0, d < j \leq p\}$ . Derartige Diffeomorphismen nennt man *Karten* der Mannigfaltigkeit  $M$ .

Man kann sich  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten als glatte Verzerrungen linearer Unterräume vorstellen. Wenn man verlangt, dass diese Verzerrungen öfter stetig differenzierbar sind, also die Karten etwa  $C^k$ -Diffeomorphismen mit einem  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  sind, so spricht man von  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten.

Die einfachsten Beispiele von Mannigfaltigkeiten sind diejenigen, die durch eine einzige Karte beschrieben werden: Seien  $U_\varphi, D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$  offen mit  $D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \neq \emptyset$  und  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  ein Diffeomorphismus.  $M := \varphi^{-1}(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}))$  ist dann eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Für  $d = 1$  spricht man von einer *Kurve* und für  $d = 2$  von einer *Fläche*.

**13.4.2 Beispiel.** Für  $p = 3$  und  $d = 2$  sei  $D_\varphi = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \mathbb{R}$  und  $T : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $dT(x)$  für alle  $x \in D_\varphi$  regulär und  $T$  injektiv ist. Gemäß Korollar 13.2.3 ist dann  $U_\varphi := T(D_\varphi)$  offen und  $\varphi := T^{-1} : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  ein Diffeomorphismus. Also ist  $M := T((-1, 1) \times (-1, 1) \times \{0\})$  eine Fläche und damit eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ .

**13.4.3 Beispiel.** Sei  $M$  ein linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^p$  mit  $\dim M = d > 0$ , und sei  $x_1, \dots, x_d$  eine Basis von  $M$ . Wählen wir  $x_{d+1}, \dots, x_p \in \mathbb{R}^p$  derart, dass  $x_1, \dots, x_p$  eine Basis von  $\mathbb{R}^p$  ist, dann definiert  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\varphi(\sum_{j=1}^p \xi_j x_j) = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$  eine lineare Bijektion, die  $M = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$  erfüllt. Da lineare Bijektionen auf  $\mathbb{R}^p$  sicherlich Diffeomorphismen sind, ist  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ .

Die meisten Standardbeispiele von Mannigfaltigkeiten sind *implizit definierte Mannigfaltigkeiten*, welche Nullstellenmengen stetig differenzierbarer Funktionen sind.

**13.4.4 Satz.** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$  stetig differenzierbar, wobei  $0 < d < p$ . Hat  $dF(x) \in \mathbb{R}^{(p-d) \times p}$  für alle  $x \in O$  mit  $F(x) = 0$  vollen Rang, also Rang  $p - d$ , so ist

$$M := \{x \in O : F(x) = 0\}$$

eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, falls  $M \neq \emptyset$ .

*Beweis.* Unsere Voraussetzung an den Rang von  $dF(y)$  für festes  $y \in M$  besagt, dass es  $p - d$  Koordinaten  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-d}}$  derart gibt, dass

$$\left( \frac{\partial F_l(y)}{\partial x_{i_k}} \right)_{k,l=1}^{p-d} \quad (13.14)$$

regulär ist. Sei  $p : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  die Projektion auf die restlichen Koordinaten, dh.  $p(x) = (x_i)_{i \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i_1, \dots, i_{p-d}\}}$ . Wir definieren  $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{p-d} \cong \mathbb{R}^p$  durch

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} p(x) \\ F(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar, wobei

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial F(y)}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{i_1, \dots, i_{p-d}\},$$

und

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} e_i \\ \frac{\partial F(y)}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i_1, \dots, i_{p-d}\}.$$

Somit ergibt eine geeignete Spaltenpermutation von  $d\varphi(y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  eine  $2 \times 2$ -Blockdreiecksmatrix mit der Einheitsmatrix und (13.14) in der Diagonale. Also ist  $d\varphi(y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  invertierbar. Nach dem Umkehrsatz, Satz 13.2.1, ist die Einschränkung  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  für gewisse offene  $U_\varphi \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$  mit  $y \in U_\varphi$  ein Diffeomorphismus. Offenbar gilt für  $x \in U_\varphi$ , dass  $x \in M$  genau dann, wenn  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$ , dh.  $\varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ .  $\square$

**13.4.5 Bemerkung.** Es gilt auch eine Art Umkehrung von Satz 13.4.4, denn man kann jede  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  lokal bei jedem Punkt aus  $M$  als implizit definierte Mannigfaltigkeit darstellen. Also gibt es zu jedem  $x \in M$  ein in  $\mathbb{R}^p$  offenes  $O \ni x$  und eine  $C^1$ -Funktion  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$  so, dass  $dF(y)$  für alle  $y \in O$  vollen Rang hat und dass  $M \cap O = \{x \in O : F(x) = 0\}$ .

Wählen wir nämlich eine Karte  $\varphi$  von  $M$  mit  $x \in U_\varphi$ , so gehört wegen  $\varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$  ein  $y \in O := U_\varphi$  genau dann zu  $M$ , wenn  $F(y) = 0$ , wobei  $F(y)$  die Projektion auf die hinteren  $p - d$  Einträge von  $\varphi(y)$  ist. Das so definierte  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$  ist stetig differenzierbar, und  $dF(y) \in \mathbb{R}^{(p-d) \times p}$  hat Rang  $p - d$ , da seine Zeilen mit den unteren  $p - d$  Zeilen von dem invertierbaren  $d\varphi(y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  übereinstimmen.

**13.4.6 Beispiel.** Ein Paradebeispiel einer implizit definierten Mannigfaltigkeit ist die Kugeloberfläche  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$ . Sie ist eine 2-dimensionale, implizit durch

$$0 = F(x) := \|x\|_2^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

definierte Mannigfaltigkeit. Um Karten von  $S^2$  zu finden, deren Definitionsbereiche die ganze Kugeloberfläche überdecken, betrachte sechs Abbildungen  $T_{+,x}, T_{-,x}, T_{+,y}, T_{-,y}, T_{+,z}, T_{-,z}$ , welche alle auf  $D := U_1(0) = \{(\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < 1\}$  definiert sind und nach  $\mathbb{R}^3$  hinein abbilden:

$$T_{\pm,z} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \pm \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} + \zeta \end{pmatrix}, \quad T_{\pm,y} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \pm \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} + \zeta \\ \eta \end{pmatrix},$$

$$T_{\pm,x} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \pm \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} + \zeta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Man überprüft leicht, dass  $T_{\cdot,\cdot}$  injektiv und stetig differenzierbar ist. Zudem ist  $dT_{\cdot,\cdot}(x)$  für alle  $x \in D$  regulär. Gemäß Korollar 13.2.3 ist dann  $U_{\varphi_{\cdot,\cdot}} := T_{\cdot,\cdot}(D)$  offen und  $\varphi_{\cdot,\cdot} := T_{\cdot,\cdot}^{-1} : U_{\varphi_{\cdot,\cdot}} \rightarrow D$  ein Diffeomorphismus. Schließlich gilt  $T_{\cdot,\cdot}(D \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})) = S^2 \cap U_{\varphi_{\cdot,\cdot}}$ , also  $\varphi_{\cdot,\cdot}(S^2 \cap U_{\varphi_{\cdot,\cdot}}) = D \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ .

Offensichtlich ist  $S^2$  in der Vereinigung aller  $U_{\varphi_{\cdot,\cdot}}$  enthalten, womit  $S^2$  durch diese sechs Karten vollständig beschrieben wird. Es sei erwähnt, dass etwa die beiden Karten  $\varphi_{+,z}$  und  $\varphi_{-,z}$  die ganze Kugeloberfläche bis auf die in der  $xy$ -Ebene liegende Einheitskreislinie beschreiben.

Für eine andere Art von Karten von  $S^2$  betrachte man die stetig differenzierbare Abbildung  $T_3 : \mathbb{R}^2 \times (0 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \\ r \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \theta \\ r \sin \alpha \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Man zeigt unschwer, dass  $T_3(\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = S^2$  sowie dass  $dT_3(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^2 \times (0 + \infty)$  regulär ist. Schränkt man  $T_3$  auf  $D_\varphi := (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0 + \infty)$  ein, so ist

$$T_3|_{D_\varphi} : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$$

bijektiv. Wir nennen  $U_\varphi$  die offene Menge auf der rechten Seite und bezeichnen mit  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  die Inverse obiger Funktion. Wegen  $\varphi(S^2 \cap U_\varphi) = \varphi(S^2 \setminus \{x \in S^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\})$  und weil  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  in Definition 13.4.1 offenbar durch  $\mathbb{R}^d \times \{a\}$  für ein beliebiges  $a \in \mathbb{R}^{p-d}$  ersetzt werden kann, ist  $\varphi$  eine Karte, die  $S^2$  bis auf die verhältnismäßig kleine Menge  $\{x \in S^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  beschreibt. Für  $x \in U_\varphi$  nennt man  $(\alpha, \theta, r)^T = \varphi(x)$  die *Kugelkoordinaten* von  $x$ .

**13.4.7 Beispiel.** Wie in Beispiel 13.4.3 sei  $M$  ein  $d$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{R}^p$  mit  $0 < d$ . Wie aus der Linearen Algebra bekannt, gilt  $M = (M^\perp)^\perp$ , wobei<sup>3</sup>

$$M^\perp = \{y \in \mathbb{R}^p : (x, y) = 0 \text{ für alle } x \in M\}$$

<sup>3</sup> $(x, y) = \sum_{j=1}^p x_j y_j$ , wobei  $x = (x_1, \dots, x_p)^T, y = (y_1, \dots, y_p)^T$ .

Dimension  $p - d$  hat. Ist  $y_1, \dots, y_{p-d}$  eine Basis von  $M^\perp$ , so bedeutet die Beziehung  $M = (M^\perp)^\perp$  gerade, dass  $M = \{x \in \mathbb{R}^p : F(x) = 0\}$ , wobei  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$  definiert ist durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} (x, y_1) \\ \vdots \\ (x, y_{p-d}) \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$dF(x) = \begin{pmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_{p-d}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p-d) \times p}.$$

Da die  $y_1, \dots, y_{p-d}$  linear unabhängig sind, hat  $dF(x)$  immer vollen Rang  $p - d$ . Somit sehen wir abermals, und dieses mal mit Hilfe von Satz 13.4.4, dass  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

**13.4.8 Beispiel.** Man betrachte den Vektorraum  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  aller reellen  $2 \times 2$ -Matrizen, welchen man offensichtlich mit dem  $\mathbb{R}^4$  identifizieren kann, indem man eine Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit dem Vier-Vektor  $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4$  identifiziert. Die Teilmenge

$$\mathrm{SL}(2) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 1\}.$$

von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist gerade  $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : F(A) = 0\}$ , wobei  $F : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(A) = \det A - 1 = a_1 a_4 - a_2 a_3 - 1.$$

Dieses  $F$  ist stetig differenzierbar mit<sup>4</sup>

$$dF(A) = (a_4, -a_3, -a_2, a_1).$$

Ist  $A \in \mathrm{SL}(2)$ , so kann  $A$  nicht die Nullmatrix sein. Also hat  $dF(A)$  auf  $\mathrm{SL}(2)$  immer vollen Rang 1. Aus Satz 13.4.4 folgt somit, dass  $\mathrm{SL}(2)$  eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$  ist.

Ähnlich kann man zeigen, dass die Menge aller orthogonalen  $2 \times 2$ -Matrizen eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$  ist. Derartige Mannigfaltigkeiten, die gleichzeitig eine Gruppenstruktur tragen, nennt man auch *Lie-Gruppen*.

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$ , und  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  eine Karte von  $M$ . Die Menge  $C_\varphi \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $C_\varphi \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$  ist dann offen. Die Abbildung

$$\phi_\varphi : C_\varphi \rightarrow M \quad \text{definiert durch} \quad \phi_\varphi(t) = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.15)$$

hat  $\varphi^{-1}(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = M \cap U_\varphi$  als Bild. Da die Einschränkung  $\varphi^{-1}|_{C_\varphi \times \{0\}} : C_\varphi \times \{0\} \rightarrow M \cap U_\varphi$  ein Homöomorphismus ist, hat auch  $\phi : C \rightarrow \phi(C)$  diese Eigenschaft. Wir nennen  $\phi_\varphi$  die zur Karte  $\varphi$  gehörige *Einbettung*.

**13.4.9 Satz.** Eine nichtleere Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}^p$  ist genau dann eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem  $x \in M$  eine  $d$ -dimensionale Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  mit  $x \in \phi(C)$  gibt, wobei  $\phi : C \rightarrow M$  Einbettung heißt, wenn

<sup>4</sup>In dieser Beziehung betrachten wir  $F$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^4$  nach  $\mathbb{R}$ .

- $C \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $\phi(C) \subseteq M$  offen sind, wobei  $M$  mit der Spurtopologie versehen ist,
- $\phi : C \rightarrow \phi(C)$  ein Homöomorphismus<sup>5</sup> ist,
- $\phi$  als Abbildung von  $C$  nach  $\mathbb{R}^p$  hinein stetig differenzierbar ist, wobei  $d\phi(t)$  für alle  $t \in C$  injektiv ist.

*Beweis.* Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$ ,  $x \in M$ , und  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  eine Karte von  $M$  mit  $x \in U_\varphi$ . Für die Abbildung  $\phi_\varphi$  aus (13.15) ist  $C_\varphi$  in  $\mathbb{R}^d$  und  $\phi_\varphi(C_\varphi)$  in  $M$  offen, und  $\phi : C \rightarrow \phi(C)$  ist ein Homöomorphismus. Schließlich ist  $\phi_\varphi$  als Zusammensetzung von  $C \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $\varphi^{-1}$  eine  $C^1$ -Funktion, wobei

$$d\phi_\varphi(t) = d\varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} (e_1 | \dots | e_d) \quad (13.16)$$

als Produkt zweier injektiver linearer Abbildungen selber injektiv ist.

Sei nun umgekehrt  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^p$  so, dass es zu jedem  $x \in M$  eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  gibt mit  $x = \phi(s) \in \phi(C)$ . Da  $d\phi(s)\mathbb{R}^d$  ein  $d$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^p$  ist, gibt es  $w_1, \dots, w_{p-d} \in \mathbb{R}^p$  derart, dass diese Vektoren zusammen mit  $d\phi(s)\mathbb{R}^d$  den ganzen  $\mathbb{R}^p$  aufspannen. Wir setzen

$$\Phi : \begin{cases} C \times \mathbb{R}^{p-d} & \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ \begin{pmatrix} t \\ (\xi_j)_{j=1}^{p-d} \end{pmatrix} & \mapsto \sum_{j=1}^{p-d} \xi_j w_j + \phi(t). \end{cases}$$

Offenbar gilt  $\Phi \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(t)$  für alle  $t \in C$ . Außerdem ist  $\Phi$  stetig differenzierbar, wobei

$$d\Phi \begin{pmatrix} t \\ (\xi_j)_{j=1}^{p-d} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(t) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_d} \phi(t) \\ w_1 & \dots & w_{p-d} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (13.17)$$

Wegen unserer Wahl der  $w_j$  ist  $d\Phi \begin{pmatrix} s \\ (\xi_j)_{j=1}^{p-d} \end{pmatrix}$  regulär. Nach dem Umkehrsatz Satz 13.2.1 gibt es offene Umgebungen  $O \subseteq C \times \mathbb{R}^{p-d}$  von  $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $P$  von  $x$  derart, dass  $\Phi|_O : O \rightarrow P$  ein Diffeomorphismus und somit auch ein Homöomorphismus ist.

Die Menge  $O \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subseteq C \times \{0\}$  ist von der Form  $C_1 \times \{0\}$  mit einer offenen Teilmenge  $C_1 \subseteq C$ ,  $s \in C_1$ . Also ist  $\phi(C_1)$  offen in  $M$  bezüglich der Spurtopologie. Infolge gilt  $x = \phi(s) \in \phi(C_1) = M \cap W$  für ein in  $\mathbb{R}^p$  offenes  $W$ .

Die Mengen  $U_\varphi := W \cap P$  und  $D_\varphi := \Phi|_O^{-1}(W \cap P) (\subseteq O)$  sind dann beide offen in  $\mathbb{R}^p$ , und enthalten  $x$  bzw.  $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ . Als Einschränkung eines Diffeomorphismus ist  $\Phi|_{U_\varphi} : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  auch ein solcher, wobei

$$\begin{aligned} U_\varphi \cap M &= U_\varphi \cap W \cap M = U_\varphi \cap \phi(C_1) = \Phi|_O(D_\varphi) \cap \Phi|_O(O \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) \\ &= \Phi|_O(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})), \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist eine Folge der Injektivität von  $\Phi|_O$ . Bezeichnen wir schließlich die Inverse von  $\Phi|_{U_\varphi} : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  als  $\varphi$ , so haben wir eine Karte von  $M$  mit  $x$  in ihrem Definitionsbereich gefunden.  $\square$

<sup>5</sup>Also eine in beide Richtungen stetige Abbildung, wobei  $\phi(C)$  mit der Spurtopologie versehen ist; vgl. (12.14). Es sei daran erinnert, dass die Spurtopologie auf  $\phi(C)$ , welche die Euklidischen Topologie von  $\mathbb{R}^p$  auf  $\phi(C)$  induziert, mit der Spurtopologie auf  $\phi(C)$  übereinstimmt, welche die Spurtopologie von  $M$  auf  $\phi(C)$  induziert; vgl. Korollar 12.5.4.

**13.4.10 Bemerkung.** Im Beweis von Satz 13.4.9 haben wir in der Tat gezeigt, dass es für eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$ , ein  $x \in \phi(C)$  und  $w_1, \dots, w_{p-d} \in \mathbb{R}^p$ , welche zusammen mit dem Bildraum von  $d\phi(\phi^{-1}(x))$  ganz  $\mathbb{R}^p$  aufspannen, eine Karte  $\varphi$  gibt mit  $C_\varphi \subseteq C$ ,  $x \in \phi_\varphi(C_\varphi)$  und  $\phi_\varphi = \phi|_{C_\varphi}$ . Wegen (13.17) gilt zudem  $d\varphi^{-1}\left(\binom{t}{(\xi_j)_{j=1}^{p-d}}\right)(e_1 | \dots | e_d) = d\phi(t)$  und  $d\varphi^{-1}\left(\binom{t}{(\xi_j)_{j=1}^{p-d}}\right)(e_{d+1} | \dots | e_p) = (w_1 | \dots | w_{p-d})$  für alle  $\binom{t}{(\xi_j)_{j=1}^{p-d}} \in D_\varphi$ .

**13.4.11 Beispiel.** Betrachte die offene Teilmenge  $O := \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R})$  des Dreiraumes, und die darauf definierte Funktion  $F : O \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 1.$$

Wir haben den Definitionsbereich  $O$  so gewählt, dass immer  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Somit ist  $F$  darauf stetig differenzierbar, wobei

$$dF\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \end{pmatrix}.$$

Setzt man  $M = \{(x, y, z)^T \in O : F((x, y, z)^T) = 0\}$ , und nimmt man ein  $(x, y, z)^T \in M$  her, so ist im Falle  $z \neq 0$  der letzte Eintrag von  $dF((x, y, z)^T)$  ungleich Null. Ist  $z = 0$ , so gilt  $0 = F((x, y, z)^T) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1$  und infolge  $\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = \pm 1$ . Wegen  $(x, y, z)^T \in O$  gilt  $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ , und die zweite oder dritte Spalte von  $dF((x, y, z)^T)$  verschwindet nicht.

In jedem Fall gilt  $dF((x, y, z)^T) \neq (0, 0, 0)$ . Also ist  $M$  gemäß Satz 13.4.4 eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ , die man auch als 2-dimensionalen *Torus* bezeichnet. Die Funktion  $\phi : [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi) \rightarrow O \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

$$\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \cos \theta) \cos \alpha \\ (2 + \cos \theta) \sin \alpha \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich stetig, und man rechnet leicht nach, dass  $F \circ \phi = 0$ , also dass  $\phi$  nach  $M$  hinein abbildet. Außerdem gilt im Falle  $\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = (x, y, z)^T$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (13.18)$$

Daraus erkennt man, dass  $\phi$  injektiv ist. Ist umgekehrt  $(x, y, z)^T \in O$  mit  $F((x, y, z)^T) = 0$ , so liegen die beiden rechten Seiten in (13.18) jeweils auf der Einheitskreislinie  $S^1 = \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ . Es gibt daher eindeutige  $\alpha, \theta \in [-\pi, \pi)$  so, dass (13.18) gilt, vgl. Definition 6.9.11 und Bemerkung 6.9.12. Also gilt  $\phi((\alpha, \theta)^T) = (x, y, z)^T$ .

Also ist  $\phi : [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi) \rightarrow M$  eine Bijektion, wobei

$$\begin{aligned} \phi(\{-\pi\} \times [-\pi, \pi)) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M : y = 0, x < 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (x+2)^2 + z^2 = 1, y = 0 \right\} =: K_1 \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned} \phi([- \pi, \pi) \times \{- \pi\}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M : z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} - 2 = -1 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0 \right\} =: K_2. \end{aligned}$$

Die Einschränkung  $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}$  ist somit eine Bijektion von  $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$  auf  $M \setminus (K_1 \cup K_2)$ . Man beachte, dass die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  eindimensionale Mannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^3$  sind, die beide in  $M$  enthalten sind. Da  $K_1$  und  $K_2$  sogar abgeschlossene Teilmengen von  $M$  sind, ist  $M \setminus (K_1 \cup K_2)$  offen in  $M$ .

Nun ist  $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}$  offensichtlich  $C^1$ . Da die Bijektion  $\beta \mapsto (\cos \beta, \sin \beta)^T$  als Abbildung von  $(-\pi, \pi)$  auf  $S^1 \setminus \{(-1, 0)^T\}$  in beide Richtungen stetig ist, vgl. Proposition 6.9.13, folgt aus (13.18), dass auch  $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}^{-1}$  stetig auf  $M \setminus (K_1 \cup K_2)$  ist. Schließlich gilt für  $(\alpha, \theta)^T \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$

$$d\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2 + \cos \theta) \sin \alpha & -\sin \theta \cos \alpha \\ (2 + \cos \theta) \cos \alpha & -\sin \theta \sin \alpha \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix immer vollen Rang hat, ist  $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}$  eine Einbettung

#### 13.4.12 Fakta.

1.  $p$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^p$  sind genau die offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^p$ . In der Tat folgt wegen  $\mathbb{R}^p \times \{0\} = \mathbb{R}^p$ , dass für  $x \in M$  und für den  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  aus Definition 13.4.1  $\varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi = \varphi(U_\varphi)$  und daher  $x \in U_\varphi \subseteq M$ . Also ist eine  $p$ -dimensionale Mannigfaltigkeit Vereinigung von offenen Mengen und somit  $M$  selber offen. Umgekehrt ist für ein offenes  $M \subseteq \mathbb{R}^p$  die Abbildung  $\text{id}_M : M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus wie in Definition 13.4.1 gefordert.
2. Mit der Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten in Satz 13.4.9 erkennt man leicht, dass für eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  mit  $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$  auch  $\pi(M)$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  ist, wobei  $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  für die Projektion auf die ersten  $n$  Koordinaten steht.
3. Da es zu jedem affinen Unterraum  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  der Dimension  $d$  eine affine Bijektion  $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  gibt, welche  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  auf  $X$  abbildet, kann man bei der Definition von Karten in Definition 13.4.1  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  durch irgendeinen affinen Unterraum der Dimension  $d$  ersetzen und erhält dasselbe Konzept von Mannigfaltigkeiten.
4. Jede Einschränkung  $\varphi|_{U'_\varphi} : U'_\varphi \rightarrow D'_\varphi$  einer Karte  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  mit  $D'_\varphi = \varphi(U'_\varphi)$  ist wieder eine Karte von  $M$ .
5. Infolge ist jede bezüglich der Spurtopologie offene Teilmenge  $P \neq \emptyset$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$ , dh.  $P = M \cap O$  für eine in  $\mathbb{R}^p$  offene Teilmenge  $O \neq \emptyset$ , eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.
6. Aus dem vorletzten Punkt und aus Definition 13.4.1 erkennen wir, dass eine Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}^p$  genau dann eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem  $x \in M$  eine bezüglich der Spurtopologie offene,  $x$  enthaltende Teilmenge  $P$  von  $M$  gibt, welche eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^p$  ist.

7. Sind  $M_1, M_2$  zwei  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^p$ , welche getrennt sind, dh.  $M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset = \overline{M_1} \cap M_2$ , so ist auch  $M_1 \cup M_2$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^p$ .

Allgemeiner gilt, dass für eine Familie  $M_i, i \in I$ , von  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^p$  mit  $M_j \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} M_i} = \emptyset$  für alle  $j \in I$  folgt, dass auch  $\bigcup_{i \in I} M_i$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^p$  ist.

8. Seien  $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$  offen, und sei  $T : O \rightarrow P$  ein Diffeomorphismus. Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^p$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit  $M \subseteq O$ , so ist auch  $T(M)$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ .

#### 13.4.13 Beispiel.

- (i) Die obere Halbkugel  $M = \{x \in S^2 : x_3 > 0\}$  ist als bezüglich der Spurtopologie offene Teilmenge von  $S^2$  selber eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii) Betrachtet man den Diffeomorphismus  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T((x, y, z)^T) = 2(x, y, z)^T$ , so folgt, dass mit der Oberfläche  $S^2$  der Einheitskugel auch die Oberfläche  $2 \cdot S^2$  der Kugel mit Radius 2 eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$  ist.
- (iii) Betrachtet man den Diffeomorphismus  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T((x, y)^T) = (2x, y)^T$ , so folgt sofort, dass mit der Einheitskreislinie  $S^1$  auch die Ellipse

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^2$  ist.

- (iv) Die Vereinigung von  $S^2$  und  $2 \cdot S^2$ , d.h. der Kugeloberfläche der Kugel mit Radius 2, ist auch eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ .

- (v) Die Teilmenge

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \times \{n\}$$

ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^2$ .

Nicht alle implizit definierten Objekte sind Mannigfaltigkeiten, wie am folgenden Beispiel zu erkennen ist.

13.4.14 Beispiel. Die Teilmenge  $M$  (Lemniskate) des  $\mathbb{R}^2$ , die durch ( $a > 0$  fest)

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

beschrieben wird, stellt einen liegenden Achter dar. Auf diese implizit beschriebene Teilmenge der Ebene lässt sich Satz 13.4.4 nicht anwenden, da  $dF((0, 0)^T) = (0, 0)$  nicht vollen Rang hat.

In der Tat ist  $M$  keine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Um das einzusehen, betrachte man den Schnittpunkt  $(0, 0)^T$  der zwei Schleifen. Wenn  $M$  eine Mannigfaltigkeit wäre, so gibt es eine Karte  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  mit  $(0, 0)^T \in U_\varphi$ . Mit dem offenen  $C \subseteq \mathbb{R}$  so, dass  $C \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ , wäre auch  $\phi : C \rightarrow M \cap U_\varphi$  definiert durch

$$\phi(s) = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus. Setzen wir  $a := \phi^{-1}((0, 0)^T)$ , so wäre  $\phi((a - \epsilon, a + \epsilon))$  eine Umgebung  $V$  von  $(0, 0)^T$  in  $M$  derart, dass  $V \setminus \{(0, 0)^T\}$  Vereinigung der beiden zusammenhängenden Mengen  $\phi((a - \epsilon, a))$  und  $\phi((a, a + \epsilon))$  ist, denn stetige Bilder von zusammenhängenden Mengen sind zusammenhängend; siehe Proposition 6.2.4. Im Widerspruch dazu zerfällt  $V \setminus \{(0, 0)^T\}$  in mindestens vier disjunkte zusammenhängende und untereinander getrennte Mengen.

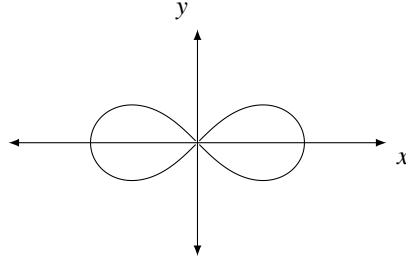


Abbildung 13.5: Lemniskate:  $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$

## 13.5 Tangentialräume

**13.5.1 Definition.** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$  und  $x \in M$ . Weiters sei  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  eine Karte von  $M$  wie in Definition 13.4.1 mit  $x \in U_\varphi$ . Der  $d$ -dimensionalen Unterraum<sup>6</sup>

$$(d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$$

von  $\mathbb{R}^p$  bezeichnen wir als *Tangentialraum*  $T_x$  von  $M$  im Punkt  $x$ .

Diese Definition von  $T_x$  hat den Schönheitsfehler, dass sie ad hoc von der gewählten Karte abhängt. Um zu zeigen, dass jede Karte denselben Tangentialraum gibt, betrachte zunächst ein reguläres  $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Für  $0 < d < p$  gilt

$$(A^T(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}))^\perp = A^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}). \quad (13.19)$$

In der Tat bedeutet  $x \perp A^T(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d})$  nichts anderes als  $(x, A^T y) = 0$  für alle  $y \in \{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}$ . Das ist äquivalent zu  $(Ax, y) = 0$  für alle  $y \in \{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}$ , und damit zu  $Ax \in (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d})^\perp = \mathbb{R}^d \times \{0\}$  bzw. zu  $x \in A^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ .

**13.5.2 Lemma.** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ ,  $O \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $x \in M \cap O$ . Weiters sei  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  eine Karte von  $M$  mit  $x \in U_\varphi$  wie in Definition 13.4.1, und seien  $s \in \mathbb{R}^d$  und  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  offen derart, dass  $C \times \{0\} = \varphi(O \cap U_\varphi) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$  und  $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(x) \in C \times \{0\}$ .

(i) Ist  $\phi_\varphi$  die zu  $\varphi$  gehörige Einbettung wie in (13.15), so gilt

$$\begin{aligned} (d\varphi(x)^T(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}))^\perp &= (d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \\ &= d\varphi^{-1}(\varphi(x))(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = d\phi_\varphi(\phi_\varphi^{-1}(x))\mathbb{R}^d. \end{aligned} \quad (13.20)$$

<sup>6</sup>Als Bild eines  $d$ -dimensionalen Unterraumes unter einer bijektiven linearen Abbildung ist  $T_x$  sicherlich  $d$ -dimensional.

- (ii) Ist für ein stetig differenzierbares  $f : O \rightarrow \mathbb{R}^k$  die  $C^1$ -Funktion  $g : C \rightarrow \mathbb{R}^k$  definiert durch

$$g(t) = f \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$dg(s) = 0 \quad \text{äquivalent zu} \quad df(x)^T \mathbb{R}^k \perp (d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}). \quad (13.21)$$

- (iii) Falls  $M$  lokal bei  $x$  implizit durch  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$  wie in Satz 13.4.4 definiert ist, so gilt

$$d\varphi(x)^T (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}) = dF(x)^T \mathbb{R}^{p-d}. \quad (13.22)$$

- (iv) Die Definition des Tangentialraumes  $T_x$  ist unabhängig von der gewählten Karte  $\varphi$  solange nur  $x \in U_\varphi$ .

*Beweis.*

- (i) Die Relation (13.20) folgt unmittelbar aus (13.19), dem Umkehrsatz, sowie (13.16).

- (ii) Für die  $C^1$ -Funktion  $g : C \rightarrow \mathbb{R}^k$  gilt nach der Kettenregel

$$dg(s) = df(x) d\varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} (e_1 | \dots | e_d),$$

woraus (13.21) folgt.

- (iii) Für  $F$  wie in unserer Aussage ist die Abbildung

$$C \ni s \mapsto F \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-d}$$

und infolge auch ihre Ableitung identisch gleich Null. Gemäß (13.21) stehen alle Zeilen von  $dF(x)$  normal auf die ersten  $d$  Spalten von  $(d\varphi(x))^{-1}$ . Da die  $p-d$  Zeilen von  $dF(x)$  gemäß Satz 13.4.4 linear unabhängig sind, stimmt  $dF(x)^T \mathbb{R}^{p-d}$  mit dem  $(p-d)$ -dimensionalen orthogonalen Komplement von  $(d\varphi(x)^{-1})(\mathbb{R}^d \times \{0\})$  übereinstimmt. (13.22) folgt somit aus (13.20).

- (iv) Ist  $\chi : U_\chi \rightarrow D_\chi$  eine weitere Karte von  $M$  mit  $x \in U_\chi$ , dann gilt nach Bemerkung 13.4.5, dass für die Projektion  $F(y)$  von  $\varphi(y)$  auf die hinteren  $p-d$  Koordinaten  $M \cap U_\varphi$  implizit durch  $F(y) = 0$  definiert ist. Nach (13.22), angewandt auf die Karte  $\chi$ , gilt

$$d\chi(x)^T (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}) = dF(x)^T \mathbb{R}^{p-d} = d\varphi(x)^T (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}),$$

woraus wir durch Komplementbildung zusammen mit (13.20) erhalten, dass  $d\chi(x)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ .  $\square$

Im Falle  $d = p-1$  ist das orthogonale Komplement

$$T_x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^p : (y, z) = 0 \text{ für alle } z \in T_x\}$$

eindimensional. Also gibt es genau zwei normal auf  $T_x$  stehende Vektoren der Länge eins  $v_1, v_2$ , wobei  $v_1 = -v_2$ . Diese nennt man *Normalvektoren* auf  $T_x$ . Ist  $\varphi$  eine Karte von  $M$ , so erkennen wir aus (13.20), dass für  $x \in M \cap U_\varphi$

$$v_\varphi(x) := \frac{1}{\|d\varphi(x)^T e_p\|_2} d\varphi(x)^T e_p \quad (13.23)$$

und  $-v_\varphi(x)$  die Normalvektoren auf  $T_x$  sind. Da  $v_\varphi(x)$  in (13.23) stetig von  $x \in M \cap U_\varphi$  abhängt, erhalten wir folgende Aussage.

**13.5.3 Korollar.** *Um jeden Punkt  $y$  einer  $(p-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung  $U(y)$  und eine stetige Funktion  $v : U(y) \cap M \rightarrow \mathbb{R}^p$  so, dass  $v(x)$  ein Normalvektor auf  $T_x$  ist für alle  $x \in U(y) \cap M$ . Also können wir zumindest lokal um  $y$  eine stetige Normale finden.*

**13.5.4 Bemerkung.** Wie man etwa an Beispiel 13.5.5, (ii), erkennt, kann es sogar eine stetige Abbildung  $v(x)$  geben, die auf ganz  $M$  definiert ist, wobei  $v(x)$  für alle  $x \in M$  ein Normalvektor ist.

Wir werden später sehen, dass eine Mannigfaltigkeit, die wie die Kugeloberfläche im Rand einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^p$  enthalten ist, immer eine überall auf  $M$  stetige Normale hat.

Es gibt aber auch 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^3$  derart, dass man keine global definierte, stetige Normale findet. Ein Beispiel dafür ist das *Möbiusband*.

Ist  $M$  wieder  $(p-1)$ -dimensional und lokal bei  $x$  implizit durch  $F : O \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, so folgt aus Lemma 13.5.2 auch, dass

$$\pm \frac{1}{\|dF(x)^T\|_2} dF(x)^T$$

die Normalvektoren auf  $T_x$  sind.

**13.5.5 Beispiel.**

(i) Als ganz einfaches Beispiel sei  $M$  die Gerade  $\{(a, b)^T : b = ka + d\}$  in  $\mathbb{R}^2$ . Diese ist durch  $b - ka - d = 0$  implizit definiert, und hat daher im Punkt  $(a, b)^T$  eine Normale  $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die zweite Normale ist  $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(ii) Ist  $x \in S^2$ , wobei  $S^2$  die Einheitskugeloberfläche ist, welche ja durch  $F((\xi, \eta, \zeta)^T) := \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0$  definiert ist, so ist  $(x = (a, b, c)^T)$

$$\frac{1}{\|dF(x)^T\|} dF(x)^T = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x$$

Normalvektor auf  $T_x$ .

(iii) Die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$ , die durch  $F((\xi, \eta, \zeta)^T) = \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$ , im  $\mathbb{R}^3$  implizit definiert ist, stellt einen Zylinder dar. Für  $x \in M$  gilt  $(x = (a, b, c)^T)$

$$\frac{1}{\|dF(x)^T\|} dF(x)^T = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ , die durch

$$F((x, y, z)^T) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 1 = 0$$

definiert ist, haben wir in Beispiel 13.4.11 als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit identifiziert, wobei für  $x^2 + y^2 \neq 0$  gilt

$$dF \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2x \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2y \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Für  $(x, y, z)^T \in M$  ist die Länge dieses Vektors zum Quadrat

$$4x^2 \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}{x^2+y^2} + 4y^2 \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}{x^2+y^2} + 4z^2 = 4 \left( (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 \right) = 4.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} x \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}$$

ein Normalvektor auf  $T_{(x,y,z)^T}$ .

Satz 13.4.4 gestattet eine Verfeinerung.

**13.5.6 Satz (Rangsatz\*).** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, und sei  $dF(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  für alle  $x \in O$  vom Rang kleiner oder gleich  $m$ . Falls dann  $\text{rang } dF(x) = m$  für alle  $x \in M$ , wobei

$$M = \{x \in O : F(x) = 0\},$$

so ist  $M$  eine  $(p-m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, falls  $M \neq \emptyset$ .

*Beweis.* Für  $x \in M \neq \emptyset$  gilt  $m = \text{rang } dF(x) \leq \min(n, p)$ , wodurch  $dF(x)$  genau  $m$  linear unabhängige Zeilen hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die ersten  $m$  Zeilen linear unabhängig sind. Die Stetigkeit der Determinantenfunktion, angewandt auf geeignete  $m$  Spalten der ersten  $m$  Zeilen von  $dF(y)$ , gibt uns die Existenz einer in  $\mathbb{R}^p$  offenen Umgebung  $V \subseteq O$  von  $x$  derart, dass die ersten  $m$  Zeilen von  $dF(y)$  für alle  $y \in V$  linear unabhängig sind. Laut Voraussetzung gilt dann  $\text{rang } dF(y) = m$  für alle  $y \in V$ .

Bezeichnet  $F_1(y)$  für  $y \in V$  die ersten  $m$  Einträge von  $F(y)$ , so erhalten wir eine  $C^1$ -Funktion  $F_1 : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ , welche die Voraussetzungen von Satz 13.4.4 erfüllt, womit

$$L := \{z \in V : F_1(z) = 0\}$$

eine  $x$  enthaltende,  $(p-m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit abgibt. Sei nun  $\varphi$  eine Karte von  $L$  mit  $x \in L \cap U_\varphi$ . Wir können dabei  $U_\varphi \subseteq V$  und  $D_\varphi$  als konvex annehmen; vgl. Fakta 13.4.12, 4. Bezeichnet  $C \subseteq \mathbb{R}^{p-m}$  die offene Menge mit  $C \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-m} \times \{0\})$ , so ist diese auch konvex und es gilt  $\varphi(x) \in C \times \{0\}$ .

Der  $j$ -te Eintrag  $f_j(y) := e_j^T F(y)$ ,  $y \in V$ , von  $F(y)$  für ein  $j \in \{m+1, \dots, n\}$  gibt eine  $C^1$ -Funktion  $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei ist  $df_j(y)$  genau die  $j$ -te Zeile von  $dF(y)$ , und wegen  $\text{rang } dF(y) = \text{rang } dF_1(y)$  in der linearen Hülle von  $dF_1(y)$  enthalten. Aus (13.20) und (13.22) folgt daher

$$df_j(y)^T \perp d\varphi(y)^{-1}(\mathbb{R}^{p-m} \times \{0\}) \text{ für alle } y \in L \cap U_\varphi. \quad (13.24)$$

Wegen (13.21) ist dann die Ableitung der Funktion

$$C \ni s \mapsto f_j \circ \varphi^{-1} \left( \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}$$

auf  $C$  Null. Infolge ist diese Funktion konstant gleich einem  $c \in \mathbb{R}$ ; vgl. Korollar 10.1.24. Wegen  $\varphi(x) \in C \times \{0\}$  folgt  $c = f_j(x) = 0$  und somit  $f_j \equiv 0$  auf  $L \cap U_\varphi$ . Also sind die Einträge  $m+1$  bis  $n$  von  $F(y)$  identisch Null für  $y \in L \cap U_\varphi$ , wodurch

$$L \cap U_\varphi = \{z \in U_\varphi : F(z) = 0\}.$$

Mit Fakta 13.4.12, 5 und 6, identifizieren wir infolge  $M$  als  $(p-m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.  $\square$

In diesem Abschnitt wollen wir uns noch der Suche von lokalen Minima und lokalen Maxima von reellwertigen Funktionen  $f : O \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  mit offenem  $O$  widmen. Wir interessieren uns aber nicht für lokale Extrema von  $f$ , sondern suchen die lokalen Extrema der Funktion  $f|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $M \subseteq O$  eine durch  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$  gemäß Satz 13.4.4 implizit definierte Mannigfaltigkeit ist.

Wir suchen quasi lokale Maxima (Minima) von  $f$  unter der Nebenbedingung  $F = 0$ , also  $y \in O$  mit  $F(y) = 0$  derart, dass für eine gewisse Kugel  $U_\delta(y) \subseteq O$

$$x \in U_\delta(y), F(x) = 0 \Rightarrow f(x) \leq (\geq) f(y) \quad (13.25)$$

gilt. Um diese lokalen Extrema mit Nebenbedingung zu finden, ist uns folgender Satz behilflich.

**13.5.7 Satz (Lagrangesche Multiplikatorenregel).** *Hat die Funktion  $f : O \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $y$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $F = 0$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$  und hat die Ableitung  $dF(y)$  vollen Rang, so gibt es ein<sup>7</sup>  $\mu \in \mathbb{R}^{p-d}$  derart, dass für die Funktion  $H : O \times \mathbb{R}^{p-d} \subseteq \mathbb{R}^{p+(p-d)} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$H(x, \lambda) := f(x) + (\lambda, F(x)) = f(x) + \sum_{j=1}^{p-d} \lambda_j F_j(x)$$

*$(y, \mu)$  ein stationärer Punkt ist, d.h.  $dH(y, \mu) = 0$ . Es gelten also an dieser Stelle die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) + \sum_{j=1}^{p-d} \mu_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(y) &= 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ F_j(y) &= 0, \quad j = 1, \dots, p-d. \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Man spricht von den *Lagrangeschen Multiplikatoren*.

*Beweis.* Da wir ohnehin nur  $y \in O$  behandeln, für die  $dF(y)$  vollen Rang hat, können wir  $O$  nötigenfalls durch das kleinere  $\{x \in O : \text{rang } dF(x) = p - d\}$ <sup>8</sup> ersetzen. Also können wir annehmen, dass  $dF(x)$  für alle  $x \in O$  vollen Rang hat. Gemäß Satz 13.4.4 ist  $M = \{x \in O : F(x) = 0\}$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Sei nun  $y \in M$  ein lokales Extremum, und  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  eine Karte mit  $y \in U_\varphi \cap M$  wie in Definition 13.4.1 mit  $U_\varphi \subseteq O$ . Für das offene  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $C \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$  hat die  $C^1$ -Funktion  $g : C \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(t) = f \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$  bei jenem  $s \in C$ , für das  $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(y)$  gilt, ein lokales Extremum. Wegen Satz 10.3.1 und (13.21) folgt  $df(y)^T \perp T_y$ . Mit Lemma 13.5.2 erhalten wir daraus  $df(y)^T \in dF(y)^T \mathbb{R}^{p-d}$ . Also gibt es ein  $\mu \in \mathbb{R}^{p-d}$  mit

$$df(y)^T = dF(y)^T (-\mu). \quad \square$$

**13.5.8 Beispiel.** Als einfaches Beispiel betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi^2 \eta^2.$$

Wir wollen alle Extrema dieser Funktion auf  $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$  finden. Offensichtlich entspricht das dem Aufsuchen aller Extrema der Funktion  $f$  unter der Nebenbedingung  $F(x) = 0$ , wobei

$$F \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi^2 + \eta^2 - 1.$$

Wegen  $dF((\xi, \eta)^T) = (2\xi \ 2\eta) \neq (0 \ 0)$  für  $(\xi, \eta)^T \in \mathbb{T}$ , ist die Regularitätsbedingung von Satz 13.5.7 erfüllt. Setzen wir  $(x = (\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R})$

$$H(\xi, \eta, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot F(x) = \xi^2 \eta^2 + \lambda \xi^2 + \lambda \eta^2 - \lambda,$$

so wissen wir aus Satz 13.5.7, dass alle Lösungen von  $dH(\xi, \eta, \lambda) = 0$  Kandidaten für lokale Extrema sind. Wir lösen also

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi}(\xi, \eta, \lambda) &= 2\xi \eta^2 + 2\lambda \xi = 2\xi(\eta^2 + \lambda) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \eta}(\xi, \eta, \lambda) &= 2\xi^2 \eta + 2\lambda \eta = 2\eta(\xi^2 + \lambda) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\xi, \eta, \lambda) &= F \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

(i) Ist  $\xi = 0$ , so muss  $\eta = \pm 1$  und daher  $\lambda = 0$ .

(ii) Ist  $\eta = 0$ , so muss  $\xi = \pm 1$  und daher  $\lambda = 0$ .

(iii) Sind beide  $\xi, \eta \neq 0$ , so folgt aus den ersten beiden Gleichungen  $\xi^2 + \eta^2 = -2\lambda$  und aus der letzten  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ . Also  $\lambda = -\frac{1}{2}$  sowie  $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Aus  $f((\xi, \eta)^T) = \xi^2 \eta^2$  folgt sofort, dass überall  $f((\xi, \eta)^T) > 0$ , wenn beide  $\xi, \eta \neq 0$ . Somit sind die vier Punkte  $(\pm 1, 0)^T, (0, \pm 1)^T$  Minima auf  $\mathbb{T}$ .

An jedem der vier Punkte  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})^T$  nimmt  $f$  den Wert  $\frac{1}{4}$  an. Da  $\mathbb{T}$  kompakt ist, muss  $f$  darauf ein oder mehrere Maxima haben, welche in unserer Kandidatenmenge enthalten sein müssen. Also sind die vier Punkte  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})^T$  alle Maxima von  $f$  auf  $\mathbb{T}$ .

<sup>8</sup>Man beachte, dass diese Menge wegen der Stetigkeit der Determinantenfunktion tatsächlich offen ist.



**13.5.9 Beispiel.** Sei  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, d.h.  $A^T = A$ . Wir suchen das Maximum und das Minimum von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^T A x$  auf der Kugeloberfläche  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ . Also suchen wir Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $F(x) = 1 - x^T x = 1 - \sum_{j=1}^n \xi_j^2$ , wobei  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ .

Zunächst ist  $dF(x) = -2x^T$  vom Rang eins für alle  $x$  auf der Kugeloberfläche. Also liefert uns Satz 13.5.7 ein notwendiges Kriterium für die gesuchten Extrema. Man hat

$$H(x, \lambda) = x^T A x + \lambda(1 - x^T x) = x^T (A - \lambda I)x + \lambda = ((A - \lambda I)x, x) + \lambda.$$

Mit der Produktregel für Skalarprodukte und wegen der Symmetrie von  $A$  folgt

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x, \lambda) = ((A - \lambda I)e_i, x) + ((A - \lambda I)x, e_i) = 2(Ax - \lambda x)^T e_i,$$

$$dH(x, \lambda) = (2(Ax - \lambda x))^T | 1 - x^T x).$$

Die stationären Punkte müssen also  $(Ax - \lambda x) = (A - \lambda I)x = 0$  und  $1 - x^T x = 0$  erfüllen. Somit kommen nur Eigenvektoren für die Extrema in Frage. Ist  $x$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , so folgt  $f(x) = x^T A x = x^T \lambda x = \lambda$ .

Da die Kugeloberfläche kompakt ist, existieren Minimum und Maximum. Wir erhalten also für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|_2 = 1$

$$\lambda_{\min} \leq x^T A x \leq \lambda_{\max},$$

wobei  $\lambda_{\min}$  der kleinste und  $\lambda_{\max}$  der größte Eigenwert von  $A$  ist.

Mit den üblichen Überlegungen, wobei man komplexe  $n$ -Vektoren und  $n \times n$ -Matrizen mit reellen  $(2n)$ -Vektoren bzw.  $(2n) \times (2n)$ -Matrizen identifiziert, ergibt sich für komplexe, symmetrische  $n \times n$ -Matrizen  $A$ , dass  $\lambda_{\min} \leq z^* A z \leq \lambda_{\max}$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|z\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |\zeta_j|^2 = 1$ .

## 13.6 Gebiete mit orientierbarem Rand

**13.6.1 Definition.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  eine offene Menge und  $\partial G := \overline{G} \setminus G^\circ$  ihr *topologischer Rand*.

Ist  $x \in \partial G$ , so sagen wir, dass bei  $x$  der Rand durch eine  $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit dargestellt wird, wenn es eine offene Umgebung  $W$  von  $x$  in  $\mathbb{R}^p$  derart gibt, dass  $\partial G \cap W$  eine  $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Die Menge aller solchen  $x$  wollen wir mit<sup>9</sup>  $\partial^s G$  bezeichnen.

**13.6.2 Bemerkung.** Mit  $x$  gehört offenbar ganz  $\partial G \cap W$  zu  $\partial^s G$ . Wir schließen, dass  $\partial^s G$  als Teilmenge von  $\partial G$  in der Spurtopologie offen ist, und aus Fakta 13.4.12, 6, dass  $\partial^s G$  als Ganzes eine  $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Ziel ist es nun, durch einen Punkt  $x \in \partial^s G$  eine Normale auf die Tangentialebene zu legen, die anschaulich ins Äußere, also nach  $\overline{G}^c$  zeigt. Das geht sicher nicht immer, wie man anhand des folgenden Beispiels erkennt.

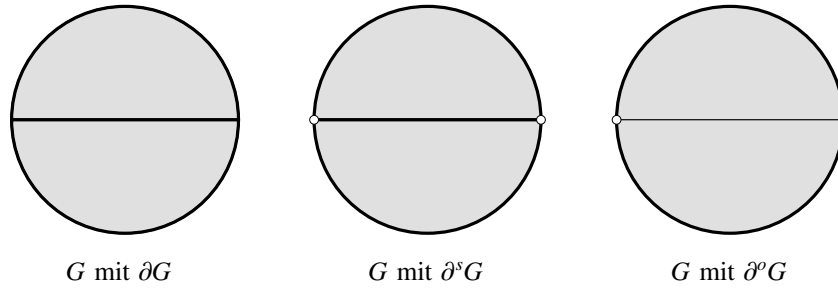
**13.6.3 Beispiel.** Man betrachte etwa den offenen Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$  ohne die  $x$ -Achse, d.h.

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1, x_2 \neq 0\}.$$

Man sieht unschwer, dass  $\partial G = \{x : \|x\|_2 = 1\} \cup \{x : x_2 = 0, -1 \leq x_1 \leq 1\}$ .

Außerdem ist  $\partial^s G = \{x : \|x\|_2 = 1, x_2 \neq 0\} \cup \{x : x_2 = 0, -1 < x_1 < 1\}$ , wobei sich nur durch die Punkte von  $\{x : \|x\|_2 = 1, x_2 \neq 0\}$  eine Normale, die ins Äußere zeigt, legen lässt. Letztere Menge werden wir in Definition 13.6.6 als  $\partial^o G$  bezeichnen.

<sup>9</sup>Der Buchstabe  $s$  in  $\partial^s$  steht für das englische Wort 'smooth'.

Abbildung 13.6: Die Menge  $G$  mit den unterschiedlichen Rändern

Um zu erkennen, wann man durch  $x \in \partial^s G$  eine Normale auf die Tangentialebene legen kann, die ins Äußere zeigt, sei wieder  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  eine Karte von  $\partial^s G$  mit  $x \in U_\varphi \cap \partial^s G$ , wobei wir nach einer etwaigen Verkleinerung von  $U_\varphi$  annehmen können, dass  $U_\varphi \cap \partial^s G = U_\varphi \cap \partial G$ ; vgl. Bemerkung 13.6.2. Dann gilt

$$\varphi(x) \in \varphi(U_\varphi \cap \partial^s G) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}).$$

Indem wir etwa von  $D_\varphi$  zu  $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))$  für ein hinreichend kleines  $\delta > 0$  übergehen, und  $\varphi^{-1}(U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)))$  anstatt  $U_\varphi$  betrachten, können wir annehmen, dass

$$D_\varphi^+ := D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times (0, +\infty)) \quad \text{sowie} \quad D_\varphi^- := D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times (-\infty, 0)) \quad (13.26)$$

zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind. Als stetiges Bild zusammenhängender Mengen sind auch

$$U_\varphi^+ := \varphi^{-1}(D_\varphi^+) \quad \text{und} \quad U_\varphi^- := \varphi^{-1}(D_\varphi^-) \quad (13.27)$$

zusammenhängend.

**13.6.4 Lemma.** Für ein offenes  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  sei  $x \in \partial^s G$ , und sei  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  eine Karte von  $\partial^s G$  mit  $x \in U_\varphi \cap \partial^s G$  derart, dass  $U_\varphi \cap \partial^s G = U_\varphi \cap \partial G$  und dass  $D_\varphi^\pm$  zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}^p$  sind. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen

$$(i) \quad U_\varphi \cap G = U_\varphi^+ \cup U_\varphi^- \quad \text{und} \quad U_\varphi \cap \overline{G}^c = \emptyset,$$

$$(ii) \quad U_\varphi \cap G = U_\varphi^+ \quad \text{und} \quad U_\varphi \cap \overline{G}^c = U_\varphi^-,$$

$$(iii) \quad U_\varphi \cap G = U_\varphi^- \quad \text{und} \quad U_\varphi \cap \overline{G}^c = U_\varphi^+.$$

Ersetzt man  $\varphi$  durch die Karte  $S \circ \varphi : U_\varphi \rightarrow S(D_\varphi)$ , wobei  $S \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  mit  $S(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p)^T = (x_1, \dots, x_{p-1}, -x_p)^T$ , dann tritt für  $S \circ \varphi$  Fall (iii) ((ii), (i)) ein, wenn für  $\varphi$  der Fall (ii) ((iii), (i)) zutrifft.

*Beweis.* Als disjunkte und offene Mengen sind  $G$  und  $\overline{G}^c$  getrennt; siehe Definition 6.2.2. Außerdem gilt

$$\partial G \cap U_\varphi^+ = \partial^s G \cap U_\varphi \cap U_\varphi^+ = \varphi(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}) \cap D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times (0, +\infty))) = \emptyset.$$

Entsprechend sehen wir  $\partial G \cap U_\varphi^- = \emptyset$ . Wegen  $\mathbb{R}^p = G \dot{\cup} \partial G \dot{\cup} \overline{G}^c$  folgt

$$U_\varphi^\pm = (U_\varphi^\pm \cap G) \dot{\cup} (U_\varphi^\pm \cap \overline{G}^c).$$

Also ist die zusammenhängende Menge  $U_\varphi^\pm$  Vereinigung getrennter Mengen. Wir schließen auf  $U_\varphi^\pm \subseteq G$  oder  $U_\varphi^\pm \subseteq \overline{G}^c$ . Wären dabei  $U_\varphi^+$  und  $U_\varphi^-$  in  $\overline{G}^c$  enthalten, so folgte

$$U_\varphi = U_\varphi^+ \cup (U_\varphi \cap \partial^s G) \cup U_\varphi^- \subseteq \partial G \cup \overline{G}^c = G^c.$$

Infolge wäre  $x$  nicht in  $\overline{G}$  und damit nicht in  $\partial G$  enthalten.

Wegen  $U_{S \circ \varphi} = U_\varphi$  und  $U_{S \circ \varphi}^\pm = U_\varphi^\mp$  ist die letzte Aussage klar.  $\square$

**13.6.5 Korollar.** *Treten in Lemma 13.6.4 die Fälle (ii) oder (iii) ein, so gilt für alle  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G$*

$$V \setminus \partial G \neq V \cap G \text{ für alle in } \mathbb{R}^p \text{ offenen Umgebungen } V \text{ von } y. \quad (13.28)$$

*Gilt umgekehrt (13.28) für nur ein  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G$ , so muss Fall (ii) oder (iii) eintreten.*

*Beweis.* Angenommen es gilt (ii) von Lemma 13.6.4, und  $V$  ist eine beliebige offene Umgebung von irgendeinem  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G = U_\varphi \cap \partial G$ . Dann ist  $\varphi(V \cap U_\varphi)$  eine offene Umgebung von  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} := \varphi(y)$  und enthält damit Punkte  $\begin{pmatrix} t \\ \xi \end{pmatrix} \in D_\varphi^-$ , woraus

$$\varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ \xi \end{pmatrix} \in V \cap U_\varphi^- \subseteq V \setminus \partial G$$

folgt. Der Punkt  $\varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ \xi \end{pmatrix}$  liegt aber sicher nicht in  $G$ , da er sonst voraussetzungsgemäß auch in  $U_\varphi^+ = G \cap U_\varphi$  wäre. Also gilt  $V \setminus \partial G \neq V \cap G$ . Im Fall (iii) von Lemma 13.6.4 zeigt man entsprechend  $V \setminus \partial G \neq V \cap G$ .

Gilt umgekehrt  $V \setminus \partial G \neq V \cap G$  für alle offenen Umgebungen von einem einzigen  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G$ , so kann nicht Fall (i) von Lemma 13.6.4 eintreten, da dann ja  $V = U_\varphi$  der Bedingung  $V \setminus \partial G \neq V \cap G$  nicht genügen würde.  $\square$

**13.6.6 Definition.** Wir sagen, dass  $G$  bei einem Punkt  $y \in \partial^s G$  auf einer Seite von  $G$  liegt, falls (13.28) gilt. Die Menge aller solchen  $y \in \partial^s G$  bezeichnen wir mit<sup>10</sup>  $\partial^o G$ .

**13.6.7 Bemerkung.** Aus Korollar 13.6.5 erkennen wir, dass  $x$  genau dann auf einer Seite von  $G$  liegt, wenn Punkt (ii) oder (iii) in Lemma 13.6.4 zutrifft. Daraus und aus Korollar 13.6.5 wiederum folgt, dass mit  $x$  auch die ganze Menge  $U_\varphi \cap \partial^s G$  in  $\partial^o G$  enthalten ist. Also ist die Menge  $\partial^o G$  eine in  $\partial^s G$  bezüglich der Spurtopologie offene Teilmenge, und infolge ist  $\partial^o G$  eine  $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; vgl. Fakta 13.4.12, 5.,

Genauso sieht man, dass  $\partial^s G \setminus \partial^o G$ , also die Menge aller  $x \in \partial^s G$ , die nicht auf einer Seite von  $G$  liegen, offen in  $\partial^s G$  bezüglich der Spurtopologie ist.

Mit den Voraussetzungen von Lemma 13.6.4 betrachten wir  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G$  und für  $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  und für ein  $\rho > 0$  mit  $y + (-\rho, +\rho)u \subseteq U_\varphi$  die Abbildung

$$g : (-\rho, +\rho) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\xi) := e_p^T \varphi(y + \xi u).$$

Nach (13.26) und (13.27) gilt  $y + \xi u \in U_\varphi^\pm$  genau dann, wenn  $\pm g(\xi) > 0$ . Weiters ist  $g$  stetig differenzierbar, wobei  $g'(\xi) = e_p^T d\varphi(y + \xi u)u$ . Mit (13.23) erkennen wir

$$g'(0) = e_p^T d\varphi(y)u = \|(e_p^T d\varphi(y))\|^T v_\varphi(y)^T u.$$

Aus  $\pm g'(0) > 0$  wegen  $g(0) = 0$  auch  $\pm g(\xi) > 0$ , also  $y + \xi u \in U_\varphi^\pm$  für hinreichend kleine  $0 < \xi < \rho$ . Somit haben wir folgendes Korollar von Lemma 13.6.4 bewiesen.

<sup>10</sup>Der Buchstabe  $o$  in  $\partial^o$  steht für 'orientierbar'.

**13.6.8 Korollar.** Mit den Voraussetzungen von Lemma 13.6.4 sei  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G$  und  $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ . Je nach dem in Lemma 13.6.4 eintretenden Fall gilt für  $\xi \in \mathbb{R}$  mit hinreichend kleinem  $\xi > 0$

(i)  $y + \xi u \in G$ , falls  $v_\varphi(y)^T u \neq 0$ .

(ii)  $y + \xi u \in G$ , falls  $v_\varphi(y)^T u > 0$  und  $y + \xi u \in \overline{G}^c$ , falls  $v_\varphi(y)^T u < 0$ .

(iii)  $y + \xi u \in G$ , falls  $v_\varphi(y)^T u < 0$  und  $y + \xi u \in \overline{G}^c$ , falls  $v_\varphi(y)^T u > 0$ .

Liegt insbesondere ein  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G$ , und infolge alle  $y \in U_\varphi \cap \partial^s G$  auf einer Seite von  $G$ , also  $U_\varphi \cap \partial^s G \subseteq \partial^o G$ , und setzen wir  $v(y) := -v_\varphi(y)$  im Fall (ii) und  $v(y) := v_\varphi(y)$  im Fall (iii), so gilt

$$y - \xi v(y) \in G \quad \text{und} \quad y + \xi v(y) \in \overline{G}^c$$

für alle hinreichend kleinen  $\xi > 0$ . Wir nennen  $v(y)$  die äußere Normale auf  $T_y$ .

**13.6.9 Bemerkung.** Die Abbildung  $y \mapsto v(y)$  von  $\partial^o G$  nach  $\mathbb{R}^p$  ist auf jeder Menge der Form  $U_\varphi \cap \partial^o G$  stetig. Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, ist  $y \mapsto v(y)$  auf ganz  $\partial^o G$  stetig. Insbesondere hat die Mannigfaltigkeit  $\partial^o G$  eine stetige Normalenfunktion.

**13.6.10 Beispiel.** Man betrachte wieder die Kugeloberfläche  $S^2$  im  $\mathbb{R}^3$ , und zwar dieses mal als Rand  $\partial G$  der offenen Kugel  $G = U_1(0)$  um den Ursprung mit dem Radius eins.

Klarerweise ist der ganze Rand von  $G$  eine Mannigfaltigkeit, also  $\partial^s G = S^2$ ; siehe Beispiel 13.4.6. Man sieht auch, dass  $G$  bei allen  $x \in \partial^s G$  auf einer Seite von  $\partial G$  liegt, also  $\partial^o G = S^2$ .

Die Tangentialebene  $T_x$  an einen Punkt  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \partial G$  wird etwa durch die Gleichung  $T_x = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0\}$  beschrieben und die äußere Normale auf  $T_x$  ist  $v(x) = x$ .

**13.6.11 Beispiel.** Man betrachte den Würfel

$$G = (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Man sieht unmittelbar  $\overline{G} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ , und somit ist  $\partial G$  die Vereinigung der sechs Seitenflächen

$$S_{x,\pm} = \{\pm 1\} \times (-1, 1) \times (-1, 1),$$

$$S_{y,\pm} = (-1, 1) \times \{\pm 1\} \times (-1, 1), \quad S_{z,\pm} = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \{\pm 1\},$$

und der zwölf Kanten  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, 12$ ,

$$\{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times [-1, 1], \quad \{\pm 1\} \times [-1, 1] \times \{\pm 1\}, \quad [-1, 1] \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}.$$

Dabei ist

$$\partial^s G = S_{x,+} \cup S_{x,-} \cup S_{y,+} \cup S_{y,-} \cup S_{z,+} \cup S_{z,-}. \quad (13.29)$$

Wir wollen das exakt nachprüfen. Die Seitenflächen sind als bezüglich der Spurtopologie offene Teilmengen von affinen Ebenen selbst 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Ist etwa  $(1, b, c)^T \in S_{x,+}$ , so gilt für  $0 < \epsilon < \min(1 - |b|, 1 - |c|)$  sicherlich

$$\partial G \cap U_\epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix} \subseteq S_{x,+} \subseteq \partial G.$$

Also liegt jeder Punkt von  $S_{x,+}$  in  $\partial^s G$ . Genauso folgt  $S_{x,-}, S_{y,\pm}, S_{z,\pm} \subseteq \partial^s G$ .

Da  $S_{x,+}$  in der affinen Ebene  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 1 = 0\}$  enthalten ist, sind  $\pm(1, 0, 0)$  die Normalen auf den Tangentialraum von  $S_{x,+}$  in jedem Punkt  $(1, b, c)^T \in S_{x,+}$ . Die Normalen durch jeden Punkt von  $S_{x,-}$  auf die Tangentialebenen sind auch  $\pm(1, 0, 0)$ .

Entsprechend sind  $\pm(0, 1, 0)$  ( $\pm(0, 0, 1)$ ) die Normalen auf den Tangentialraum von  $S_{y,\pm}$  ( $S_{z,\pm}$ ) in jedem Punkt  $(a, \pm 1, c)^T \in S_{y,\pm}$  ( $(a, b, \pm 1)^T \in S_{z,\pm}$ ).

Wäre ein Punkt aus  $\partial G$ , der nicht in einer dieser sechs Seitenflächen enthalten ist, also etwa  $(1, 1, c)^T \in \{1\} \times \{1\} \times [-1, 1]$ , auch in  $\partial^s G$ , so gibt es nach Korollar 13.5.3 eine Umgebung  $U(1, 1, c)^T$  und eine stetige Normalen-Funktion

$$x \mapsto v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix}$$

auf  $U(1, 1, c)^T \cap \partial^o G$ .

Nun gibt es aber beliebig nahe bei  $(1, 1, c)^T$  Punkte  $x$  aus  $S_{x,+}$ . Nimmt man eine Folge  $(x_n)$  aus  $S_{x,+} \cap U(1, 1, c)^T$ , welche gegen  $(1, 1, c)^T$  konvergiert, so folgt

$$v(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}.$$

Von unserer Diskussion weiter oben wissen wir aber  $0 = v_2(x_n) = v_3(x_n)$ . Somit folgt  $0 = v_2(1, 1, c)^T = v_3(1, 1, c)^T$ .

Andererseits gibt es aber beliebig nahe bei  $(1, 1, c)^T$  Punkte  $x$  aus  $S_{y,+}$ , und wir schließen analog auf  $0 = v_1(1, 1, c)^T = v_3(1, 1, c)^T$ . Das ist nicht möglich, da ein Normalvektor immer Länge eins hat. Also kann  $(1, 1, c)^T$  nicht in  $\partial^s G$  liegen, und wir haben (13.29) nachgewiesen.

Ist nun wieder  $(1, b, c)^T \in S_{x,+}$ , so folgt für alle  $\eta \in (0, 1]$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \eta \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \overline{G}^c, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \eta \\ b \\ c \end{pmatrix} \in G,$$

und somit muss die Bedingung aus Definition 13.6.6 erfüllt sein, d.h.  $(1, b, c)^T$  liegt auf einer Seite von  $\partial G$ . Es folgt  $S_{x,+} \subseteq \partial^o G$ . Für die anderen Seitenflächen entsprechend argumentierend folgt  $\partial^o G = \partial^s G$ .



# Kapitel 14

## Lebesgue Integral

### 14.1 Topologie und Messbarkeit

Wir wollen hier kurz einige Tatsachen aus der Maßtheorie wiederholen und auch einen Begriff einführen, die Messbarkeit und Topologie in Verbindung bringen.

**14.1.1 Definition.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Die  $\sigma$ -Algebra  $A_\sigma(\mathcal{T})$ , die von  $\mathcal{T}$  erzeugt wird, wollen wir mit  $\mathfrak{B}(\mathcal{T})$  bzw.  $\mathfrak{B}$  bezeichnen und die Mengen in  $\mathfrak{B}$  als *Borelmengen* auf  $X$  benennen.

#### 14.1.2 Fakta.

1. Ist  $\mathbb{R}^d$  mit der euklidischen Topologie versehen, dh. mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie  $\mathcal{T}_p$ , so ist aus der Maßtheorie (Lemma 2.59 in [K]) bekannt, dass  $\mathfrak{B}(\mathcal{T}_p)$  mit  $\mathfrak{B}_d$ , dh. mit der durch die  $d$ -dimensionalen halboffenen Rechtecke

$$R = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d], \quad a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}, \quad (14.1)$$

erzeugten  $\sigma$ -Algebra, übereinstimmt.

2. Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ , so versehen wir  $Y$  mit der Spurtopologie  $\mathcal{T}|_Y = \mathcal{T} \cap Y = \iota_Y^{-1}(\mathcal{T})$ , wobei  $\iota_Y : Y \rightarrow X$  die Einbettungsabbildung ist.

Wegen Satz 7.40 in [K] gilt nun  $A_\sigma(\iota_Y^{-1}(\mathcal{T})) = \iota_Y^{-1}(A_\sigma(\mathcal{T}))$  und damit  $\mathfrak{B}(\mathcal{T}|_Y) = \mathfrak{B}(\mathcal{T}) \cap Y$ .

3. Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ , so gilt im Fall  $Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{T})$  – also insbesondere im Fall eines offenen oder abgeschlossenen  $Y$  – immer  $\mathfrak{B}(\mathcal{T}|_Y) = \mathfrak{B}(\mathcal{T}) \cap Y \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{T})$  und daher

$$\mathfrak{B}(\mathcal{T}|_Y) = \{B \in \mathfrak{B}(\mathcal{T}) : B \subseteq Y\}.$$

4. Sind  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Z, \mathcal{O})$  topologische Räume, und  $f : X \rightarrow Z$  stetig, so ist  $f$  immer  $\mathfrak{B}(\mathcal{T})$ - $\mathfrak{B}(\mathcal{O})$ -messbar, denn die Urbilder von offenen Mengen sind offen und somit in  $\mathfrak{B}(\mathcal{T})$ . Da  $\mathfrak{B}(\mathcal{O})$  von den offenen Mengen erzeugt wird, folgt die Messbarkeit von  $f$  aus Satz 7.7 in [K].

Später werden wir auch folgende Tatsache benötigen.

**14.1.3 Lemma.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  eine nichtleere und offene Menge. Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}_d \cap G$  wird vom Semiring  $\mathfrak{I}_G$  aller  $d$ -dimensionalen  $R$  der Form (14.1), die zusätzlich  $\bar{R} \subseteq G$  erfüllen, erzeugt.

*Beweis.* Offenbar gilt  $\mathfrak{I}_G \subseteq \mathfrak{B}_d \cap G$  und daher  $A_\sigma(\mathfrak{I}_G) \subseteq \mathfrak{B}_d \cap G$ .

Gemäß Fakta 14.1.2 wird  $\mathfrak{B}_d \cap G$  von allen offenen Teilmengen  $\mathcal{T}_p|_G$  von  $G$  erzeugt. Nun kann man jede offenen Teilmengen von  $G$  als Vereinigung von Rechtecken der Form (14.1) mit Eckpunkten aus  $\mathbb{Q}^d$  und mit  $\bar{R} \subseteq G$  schreiben. Da es nur abzählbar viele solcher Rechtecke gibt, lässt sich jede offene Teilmenge von  $G$  als abzählbare Vereinigung von Rechtecken aus  $\mathfrak{I}_G$  schreiben. Also gilt  $\mathcal{T}_p|_G \subseteq A_\sigma(\mathfrak{I}_G)$  und damit  $A_\sigma(\mathcal{T}_p|_G) = \mathfrak{B}_d \cap G \subseteq A_\sigma(\mathfrak{I}_G)$ .  $\square$

## 14.2 Lebesgue Integral

Wir wollen am Anfang den im ersten Studienjahr kennengelernten Riemannschen Integralbegriff dem kürzlich in der Maßtheorie erlernten Lebesgueschen Integral nochmals gegenüberstellen.

Dazu sei kurz an die Definition des letzteren erinnert. Wir werden uns dabei soweit wie möglich an die Notation von [K] halten. Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum, also  $\Omega$  eine nichtleere Menge,  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  und  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  ein Maß.

Bezeichnet  $\mathcal{T}^+$  die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen, also  $f \in \mathcal{T}^+ \Leftrightarrow$

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, A_i \in \mathfrak{A}, i = 1, \dots, n, \quad (14.2)$$

so ist  $\int f d\mu$  als  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0, +\infty\}$  eindeutig, also unabhängig von der Darstellung (14.2) von  $f$ , definiert.

Für jede  $\mathfrak{A}|\overline{\mathfrak{B}}$  messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  – also gilt  $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$  für alle Borelmengen  $B \in \overline{\mathfrak{B}}$  – mit Werten in  $[0, +\infty]$  ist das Integral von  $f$  nach  $\mu$  definiert durch

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int t d\mu : t \in \mathcal{T}^+, t \leq f \right\}. \quad (14.3)$$

Für nichtnegative Treppenfunktionen  $f$  stimmt das mit der ursprünglichen Definition überein.

Eine  $\mathfrak{A}|\overline{\mathfrak{B}}$  messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt nun integrierbar, wenn  $\int |f| d\mu$  im obigen Sinne endlich ist. Da die Definition (14.3) offensichtlich monoton von  $f$  abhängt, dh.  $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu$ , ist eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sicherlich dann integrierbar, wenn  $f$  eine integrierbare Majorante  $g$  hat, d.h. es eine messbare Funktion  $g \geq 0$  gibt mit  $\int g d\mu < +\infty$  und  $g \geq |f|$ .

Setzt man  $f_+ = \max(f, 0)$  und  $f_- = \max(-f, 0)$ , so sind mit  $\int |f| d\mu$  auch  $\int f_+ d\mu$  und  $\int f_- d\mu$  endlich. Das Integral über  $f$  ist dann definiert als  $\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$ . Es ist nun naheliegend, wie man das Integral von komplexwertigen Funktionen definiert.

**14.2.1 Definition.** Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann heißt  $f$  messbar, wenn  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  messbar sind.

Eine messbare Funktion  $f$  heißt integrierbar, wenn  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  es sind, und man definiert

$$\int f d\mu := \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu.$$



**14.2.2 Fakta.**

1. Bezeichnet  $\mathfrak{B}_2$  die Menge aller Borelmengen auf  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , so folgt aus Satz 7.11 in [K], dass  $f$  genau dann im Sinne von Definition 14.2.1 messbar ist, wenn es  $\mathfrak{A}|\mathfrak{B}_2$  messbar ist.
2. Man überprüft durch Anwendung der bekannten Eigenschaften  $\mathbb{R}$ -wertiger, messbarer Funktionen leicht, dass mit  $f$  und  $g$  auch  $|f|, \alpha f, fg, f + g$  messbar sind, wobei  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Ist  $f(x)$  immer ungleich Null, so ist wegen der Stetigkeit und der damit verbundenen  $\mathfrak{B}_2|\mathfrak{B}_2$  Messbarkeit von  $z \mapsto \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (vgl. Folgerung 7.9 in [K]) auch die Funktion  $\frac{1}{f}$  messbar.

3. Wegen  $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$  ist ein messbares  $f$  genau dann integrierbar, wenn  $\int |f| d\mu < \infty$ . Dabei gilt

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Diese Ungleichung zeigt man zunächst leicht für komplexwertige Treppenfunktionen, und allgemein durch Approximation von  $(\operatorname{Re} f)_\pm$  und  $(\operatorname{Im} f)_\pm$  durch Treppenfunktionen; vgl. (14.3).

4. Das Integral ist linear ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ):

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

5. Es gilt für das komplexe Konjugieren

$$\overline{\int f d\mu} = \int \bar{f} d\mu.$$

6. Aus Definition 14.2.1 schließt man sofort, dass die bekannten Sätze wie etwa der Satz von der beschränkten Konvergenz (vgl. Satz 9.33 in [K]) auch für komplexwertige Funktionen gelten.
7. Ein nützlicher Sachverhalt bei der Integration von komplexwertigen Funktionen ist der, dass die Funktion  $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$z = re^{i\phi} \mapsto \ln r + i\phi,$$

messbar ist, wenn man z.B. festlegt, dass der Winkel  $\phi$  aus  $[0, 2\pi)$  ist.

Diese Feststellung ermöglicht uns nämlich eine messbare Funktion  $f$  als  $r(x)\exp(i\phi(x))$  mit messbaren Funktionen  $r : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  und  $\phi : \Omega \rightarrow [0, 2\pi)$  zu schreiben. Dabei ist  $f$  genau dann integrierbar, wenn  $|f| = r$  integrierbar ist.

8. Aus Satz 9.54 in [K] folgt durch Aufspalten einer beschränkten Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  in Real- und Imaginärteil, dass  $f$  genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn die Menge  $D$  der Unstetigkeitsstellen von  $f$  eine Lebesgue-Nullmenge ist, d.h.  $D \in \mathfrak{L}$ ,  $\lambda(D) = 0$ , wobei  $\mathfrak{L}$  die Lebesgue-messbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$  bezeichnet; vgl. Definition 6.12 in [K].  $f$  ist in diesem Falle  $\mathfrak{L} \cap [a, b]|\mathfrak{B}_2$ -messbar und integrierbar, wobei der Wert der beiden Typen von Integralen (Riemann- und Lebesgue-Integral) übereinstimmt.

**14.2.3 Bemerkung.** Genauso wie Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  kann man Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  für irgendein  $n \geq 2$  betrachten. Die Messbarkeit bzw. Integrierbarkeit wird entsprechend den komplexwertigen Funktionen komponentenweise definiert. Es gelten dabei ganz ähnliche Fakten wie in Fakta 14.2.2.

Auch uneigentliche Riemann-Integrale kann man als Lebesguesche Integrale interpretieren; vgl. Bemerkung 9.55 und Satz 9.57 in [K].

**14.2.4 Satz.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall<sup>1</sup> und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  Riemann-integrierbar über jedes kompakte Teilintervall von  $I$ . Dann ist  $f$  genau dann über  $I$  integrierbar, wenn  $f$  absolut uneigentlich Riemann-integrierbar ist, d.h.  $|f|$  ist uneigentlich Riemann-integrierbar über  $I$ . In dem Fall stimmen uneigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral überein.

*Beweis.* Wegen Fakta 14.2.2, 8, ist  $f$  auf jedem kompakten Teilintervall  $[a, b]$  von  $I$   $\mathfrak{L} \cap [a, b] \|\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{L} \cap [a, b] \|\mathfrak{B}_2$ -messbar, woraus unmittelbar die  $\mathfrak{L} \cap [a, b] \|\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{L} \cap I \|\mathfrak{B}_2$ -Messbarkeit von  $f$  folgt.

Seien  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  die Intervallränder von  $I$ , und seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $I$  mit  $a_n < b_n$ , die monoton fallend bzw. wachsend gegen  $a$  bzw.  $b$  konvergieren, wobei im Falle  $a \in I$  immer  $a_n = a$  und im Falle  $b \in I$  immer  $b_n = b$ . Dann gilt  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f$ . Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi) erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} |f(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a_n, b_n]} |f| d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} \cdot |f| d\lambda = \int_I |f| d\lambda \quad (\in \overline{\mathbb{R}}).$$

Also ist  $f$  integrierbar, d.h.  $\int |f| d\lambda < +\infty$ , genau dann, wenn obiger Limes existiert, d.h. wenn  $f$  absolut uneigentlich integrierbar ist. In diesem Fall ist wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz

$$\int_I f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} \cdot f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a_n, b_n]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

**14.2.5 Beispiel.** Ein klassisches Beispiel eines Integrales, das zwar als uneigentliches Riemann-Integral, aber nicht als Lebesgue-Integral existiert ist

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{t} dt.$$

Wir haben nämlich in Beispiel 8.6.2 die Konvergenz von  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{\sin \pi t}{t} dt$  nachgerechnet, aber wir haben auch gesehen, dass das uneigentliche Riemann-Integral  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin \pi t|}{t} dt$  nicht konvergiert. Nach Satz 14.2.4 existiert das Integral nicht im Sinne von Lebesgue.

<sup>1</sup>Insbesondere kann  $I$  unbeschränkt sein.

Eine sehr nützliche Tatsache, die einem die Verwendung von Lebesgue-Integralen gegenüber der von Riemann-Integralen schmackhaft macht, ist die viel einfacher zu handhabende Vertauschung von Grenzwerten und Integralen (vgl. z.B. Korollar 8.7.9 sowie Satz 9.34 aus [K]).

**14.2.6 Lemma.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $(T, d)$  ein metrischer Raum,  $t_0 \in T$  und  $f : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  eine Funktion derart, dass

- $x \mapsto f(t, x)$  ist für alle  $t \in T$  integrierbar,
- $t \mapsto f(t, x)$  ist stetig in  $t_0$  für fast alle  $x \in \Omega$ ,
- es gibt eine offene Kugel  $U_\delta(t_0)$  um  $t_0$  und eine auf  $\Omega$  integrierbare Funktion  $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  derart, dass für alle  $t \in U_\delta(t_0)$  die Ungleichung

$$|f(t, \cdot)| \leq g$$

$\mu$ -fast überall<sup>2</sup> gilt.

Dann ist die Funktion  $F(t) := \int_\Omega f(t, \cdot) d\mu$  bei  $t_0$  stetig.

*Beweis.* Sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige, in  $T$  gegen  $t_0$  konvergente Folge. Ab einem Index  $n_0$  ist  $t_n \in U_\delta(t_0)$ . Ist  $N$  die Vereinigung der Ausnahmenullmengen aus der zweiten Voraussetzung und der dritten Voraussetzung zu den Funktionen  $f(t_0, \cdot)$  sowie  $f(t_{n_0}, \cdot), f(t_{n_0+1}, \cdot), \dots$ , so folgt  $\mu(N) = 0$ . Für  $n \geq n_0$  und  $x \in \Omega \setminus N$  gilt  $|f(t_n, x) - f(t_0, x)| \leq 2g(x)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(t_n, x) - f(t_0, x)| = 0$ . Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz folgt

$$|F(t_0) - F(t_n)| = \left| \int (f(t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)) d\mu \right| \leq \int |f(t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (14.4)$$

□

**14.2.7 Bemerkung.** Aus dem rechten Teil von (14.4) folgt, dass sogar  $t \mapsto f(t, \cdot)$  als Abbildung von  $T$  in den Banachraum  $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  stetig bei  $t_0$  ist.

Folgendes Lemma ist eine leichte Verallgemeinerung von Satz 9.36 und Korollar 9.37 in [K].

**14.2.8 Lemma.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $t_0 \in I$  und  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  eine Funktion derart, dass

- $x \mapsto f(t, x)$  für alle  $t \in I$  integrierbar ist,
- $t \mapsto f(t, x)$  differenzierbar in  $t_0$  für fast alle  $x \in \Omega$  ist,
- es ein  $\delta > 0$  und eine auf  $\Omega$  integrierbare Funktion  $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  derart gibt, dass für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I \setminus \{t_0\}$  die Ungleichung

$$\left| \frac{f(t, \cdot) - f(t_0, \cdot)}{t - t_0} \right| \leq g$$

$\mu$ -fast überall<sup>2</sup> gilt.

---

<sup>2</sup>Man beachte, dass die Ausnahmenullmenge i.A. von  $t$  abhängt.

Die beiden letzten Punkte sind insbesondere erfüllt, wenn es ein  $\delta > 0$ , eine integrierbare Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und eine feste Nullmenge  $N \in \mathfrak{A}$  derart gibt, dass für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I$  und alle  $x \in \Omega \setminus N$  der Ausdruck  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  existiert und

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x). \quad (14.5)$$

Dann ist die Funktion  $F(t) := \int_{\Omega} f(t, \cdot) d\mu$  bei  $t_0$  differenzierbar und es gilt<sup>3</sup>

$$F'(t_0) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, \cdot) d\mu.$$

*Beweis.* Indem wir  $f$  in Real- und Imaginärteil zerlegen, können wir uns auf reellwertige Funktionen beschränken.

Sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige, in  $I$  gegen  $t_0$  konvergente Folge. Ab einem Index  $n_0$  gilt  $t_n \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . Sei  $N$  die Vereinigung der abzählbar vielen Ausnahmenullmengen aus der zweiten Voraussetzung und der dritten Voraussetzung zu den Funktionen  $\frac{f(t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)}{t_n - t_0}$ ,  $n \geq n_0$ . Es folgt  $\mu(N) = 0$ .

Somit gilt für  $n \geq n_0$  und alle  $x \in \Omega \setminus N$  die Ungleichung  $\left| \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0} \right| \leq g(x)$  und die Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ . Insbesondere ist letztere Funktion messbar.

Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz gilt

$$\frac{F(t_0) - F(t_n)}{t_0 - t_n} = \int \frac{f(t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)}{t_n - t_0} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) d\mu.$$

Ist (14.5) erfüllt, so folgt aus dem Mittelwertsatz  $\left| \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s_n, x) \right| \leq g(x)$ ,  $x \in \Omega \setminus N$  mit einem  $s_n$ , das zwischen  $t_n$  und  $t_0$  liegt<sup>4</sup>.  $\square$

**14.2.9 Lemma.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : G \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion derart, dass

- $x \mapsto f(z, x)$  für alle  $z \in G$  integrierbar ist,
- $z \mapsto f(z, x)$  holomorph für alle  $x \in \Omega \setminus N$  mit einer festen Nullmenge  $N \in \mathfrak{A}$  ist,
- es zu jeder kompakten Menge  $K \subseteq G$  eine auf  $\Omega$  integrierbare Funktion  $g_K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  derart gibt, dass für alle  $z \in K$  und  $x \in \Omega \setminus N$  die Abschätzung  $|f(z, x)| \leq g_K(x)$  gilt, wobei  $N$  die feste Nullmenge aus dem vorherigen Punkt ist.

Dann ist die Funktion  $F(z) := \int_{\Omega} f(z, \cdot) d\mu$  holomorph auf  $G$  und  $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, \cdot)$  ( $n$ -te komplexe Ableitung) ist integrierbar für alle  $z \in G$  und  $n \in \mathbb{N}$ , wobei

$$F^{(n)}(z) = \int_{\Omega} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, \cdot) d\mu. \quad (14.6)$$

*Beweis.* Ist  $K_{2r}(w) \subseteq G$ , so gibt es nach Voraussetzung ein integrierbares  $g_{w,r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|f(z, x)| \leq g_{w,r}(x)$  für alle  $z \in K_{2r}(w)$  und  $x \in \Omega \setminus N$ . Für  $z_1, z_2 \in K_r(w)$ ,  $z_1 \neq z_2$  gilt

<sup>3</sup>Man beachte, dass hier der Integrand insbesondere messbar ist, und dass er genau genommen mit  $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, \cdot)$  überall ausgenommen einer Nullmenge übereinstimmt.

<sup>4</sup> $s_n$  hängt i.A. von  $x$  ab. Das ist der Grund dafür, dass man in (14.5) eine feste Ausnahmemenge benötigt.

nach der Cauchyschen Integralformel Satz 11.6.12 mit dem Weg  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow D$ ,  $t \mapsto w + 2r \cdot \exp(it)$

$$\left| \frac{f(z_1, x) - f(z_2, x)}{z_1 - z_2} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta, x)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right| \leq \frac{2}{r} g_{w,r}(x).$$

Ist nun  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige gegen ein  $w \in G$  konvergente Folge mit  $z_n \neq w$  und oBdA.  $z_n \in K_r(w) \subseteq K_{2r}(w) \subseteq G$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt aus  $\left| \frac{f(z_n, x) - f(w, x)}{z_n - w} \right| \leq \frac{2}{r} g_{w,r}(x)$  und  $\frac{f(z_n, x) - f(w, x)}{z_n - w} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(w, x)$  für  $x \in \Omega \setminus N$  gemäß dem Satz von der beschränkten Konvergenz die Integrierbarkeit von  $\frac{\partial f}{\partial z}(w, x)$  und

$$\frac{F(z_n) - F(w)}{z_n - w} = \int \frac{f(z_n, x) - f(w, x)}{z_n - w} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \frac{\partial f}{\partial z}(w, \cdot) d\mu.$$

Also existiert  $F'(w)$  und stimmt mit  $\int \frac{\partial f}{\partial z}(w, \cdot) d\mu$  überein.

Insbesondere erfüllt auch  $(z, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$  die erste Voraussetzung des aktuellen Lemmas. Auch die zweite Voraussetzung ist erfüllt, da die komplexe Ableitung holomorpher Funktionen wieder holomorph ist. Wir wollen auch die dritte Voraussetzung nachweisen.

Dazu sei wieder  $K_{2r}(w) \subseteq G$  und  $g_{w,r} : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar mit  $|f(z, x)| \leq g_{w,r}(x)$ ,  $z \in K_{2r}(w)$ ,  $x \in \Omega \setminus N$ . Für  $z \in K_r(w)$  folgt dann aus (11.33) die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta, x)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{2}{r} g_{w,r}(x).$$

Ist  $K \subseteq G$  kompakt, so wird  $K$  von endlich vielen Kreisen der Form  $U_r(w)$  mit  $w \in K$  und  $K_{2r}(w) \subseteq G$  überdeckt. Nimmt man das Maximum  $h_K(x)$  der entsprechenden Funktionen  $\frac{2}{r} g_{w,r}(x)$ , so folgt  $\left| \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) \right| \leq h_K(x)$ ,  $z \in K$ ,  $x \in \Omega \setminus N$ . Also ist auch die dritte Voraussetzung des aktuellen Lemma für  $(z, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$  nachgewiesen.

Mit allen Voraussetzungen des aktuellen Lemma erfüllt  $w \mapsto F'(w) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(w, \cdot) d\mu$  auch die von Lemma 14.2.6, womit  $w \mapsto F'(w)$  stetig auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subseteq G$  und in Folge auf ganz  $G$  ist. Gemäß Definition 11.6.5 ist  $F$  holomorph.

Wendet man das Gezeigte auf  $\frac{\partial f}{\partial z}$  an und beachtet Korollar 11.6.13, so zeigt man schließlich induktiv (14.6) für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**14.2.10 Beispiel.** Als Beispiel dafür, wie einfach im Vergleich zum Riemann-Integral die Voraussetzungen für die Vertauschung von z.B. Integral und Differentiation zu überprüfen sind, betrachte man die *Gammafunktion* ( $t > 0$ )

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad (14.7)$$

als uneigentliches Riemann-Integral. Sei  $t \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, +\infty)$ . Man überzeugt sich leicht, dass  $|e^{-x} x^{t-1}| \leq g(x)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , wobei mit einem geeigneten  $M > 0$

$$g(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}, & \text{falls } x \in (0, 1], \\ M e^{-\frac{x}{2}}, & \text{falls } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Da das uneigentliche Riemann-Integral  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  existiert, ist  $g$  auch im Lebesgueschen Sinne integrierbar (Satz 14.2.4). Somit existiert auch das Integral in (14.7). Aus Lemma 14.2.6 ersieht man unmittelbar, dass  $\Gamma(t)$  auf  $[\alpha, \beta]$ , und wegen der Beliebigkeit von  $\alpha, \beta$ , auch auf  $(0, +\infty)$  stetig ist.

Nun gilt  $\frac{\partial}{\partial t} e^{-x} x^{t-1} = (\log x) e^{-x} x^{t-1}$ ,  $t \in (0, +\infty)$ . Der Betrag dieser Funktion lässt sich für  $t \in [\alpha, \beta]$  durch die ebenfalls integrierbare Funktion  $|\log x| \cdot g(x)$  abschätzen. Deshalb können wir Lemma 14.2.8 anwenden, und erhalten auf  $[\alpha, \beta]$  und infolge auf ganz  $(0, +\infty)$

$$\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} (\log x) e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Wiederholen wir obige Schlussweise, so sieht man

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} (\log x)^k e^{-x} x^{t-1} dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (14.8)$$

Aus  $\log(1+x) \leq x$  für  $x > -1$  folgt  $(1 - \frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{(0,n)} \leq e^{-x}$ , und damit ist  $g(x)$  eine integrierbare Majorante der Folge  $x^{t-1} (1 - \frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{(0,n)}(x)$ , die punktweise gegen  $e^{-x} x^{t-1}$  konvergiert. Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz folgt die Grenzwertdarstellung der  $\Gamma$ -Funktion:

$$\Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^t}{t(t+1) \dots (t+n)}. \quad (14.9)$$

Dabei erhält man die letzte Gleichheit durch wiederholte partielle Integration.

Mit Hilfe von Lemma 14.2.9 können wir in ganz analoger Schlussweise zeigen, dass für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 0$  die Funktion  $\Gamma(z)$  holomorph ist, dass die Ableitung nach  $z$  sich wie in (14.8) berechnet, und dass auch (14.9) gilt. Wegen  $|x^z| = x^{\operatorname{Re} z}$  kann man nämlich dieselbe Majorante  $g(x)$  verwenden.

**14.2.11 Bemerkung.** Betrachtet man eine Menge  $M$  und den Maßraum  $(M, \mathcal{P}(M), \xi)$ , wobei  $\xi$  das Zählmaß ist, so gilt für  $a(m) \in \mathbb{C}$ ,  $m \in M$ , und für ein endliches  $A \subseteq M$

$$\sum_{m \in A} |a(m)| = \int_A |a(m)| d\xi(m) \leq \int_M |a(m)| d\xi(m).$$

Bezeichnet  $\mathcal{E}(M)$  die durch  $\subseteq$  gerichtete Menge aller endlichen Teilmengen von  $M$ , so folgt (vgl. Definition 5.4.2 sowie Fakta 5.4.3)

$$\sum_{m \in M} |a(m)| = \lim_{A \in \mathcal{E}(M)} \sum_{m \in A} |a(m)| = \sup_{A \in \mathcal{E}(M)} \sum_{m \in A} |a(m)| \leq \int_M |a(m)| d\xi(m).$$

Umgekehrt erhält man für jede Treppenfunktion  $t = \sum_{j=1}^n s_j \mathbb{1}_{B_j} \in \mathcal{T}^+$  mit  $t(m) \leq |a(m)|$ , wobei wir die  $B_j \subseteq M$  disjunkt wählen,

$$\begin{aligned} \int_M t(m) d\xi(m) &= \sum_{j=1}^n s_j \xi(B_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{m \in B_j} s_j \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{m \in B_j} |a(m)| = \sum_{m \in \bigcup_{j=1}^n B_j} |a(m)| \leq \sum_{m \in M} |a(m)|. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen Lemma 5.4.9 im endlichen Fall und wegen Proposition 5.4.8 im unendlichen Fall.

Also konvergiert  $\sum_{m \in M} |a(m)|$  unbedingt genau dann, wenn  $m \mapsto a(m)$  über  $M$  nach  $\xi$  integrierbar ist. Wegen Satz 5.4.4 ist das im übrigen auch zur unbedingten Konvergenz von  $\sum_{m \in M} a(m)$  äquivalent.

In diesem Fall muss  $\{m \in M : |a(m)| > \frac{1}{k}\}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  endliches Maß haben – also endlich sein. Somit ist  $M' := \{m \in M : |a(m)| > 0\}$  abzählbar und aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz erhält man mit einer aufsteigenden Mengenfolge  $M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bestehend aus endlichen Mengen mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M'$

$$\begin{aligned} \int_M a(m) d\xi(m) &= \int_M a(m) d\xi(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_n} a(m) d\xi(m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in M_n} a(m) = \sum_{m \in M'} a(m) = \sum_{m \in M} a(m), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit daraus folgt, dass  $(\sum_{m \in M_n} a(m))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge des Netzes  $(\sum_{m \in A} a(m))_{A \in \mathcal{E}(M')}$  ist.

*14.2.12 Beispiel.* Wir betrachten für  $t \in [-1, 1)$  die Funktion

$$F(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{t}{n^2} \right).$$

Für  $t \leq 0$  gilt wegen  $\ln(x) \leq x - 1$ ,  $x > 0$ ,

$$0 \leq \ln \left( 1 - \frac{t}{n^2} \right) \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{1}{n^2},$$

und für  $t \in (0, 1)$  gilt wenn  $n > 1$

$$\left| \ln \left( 1 - \frac{t}{n^2} \right) \right| = -\ln \left( 1 - \frac{t}{n^2} \right) = \ln \frac{1}{1 - \frac{t}{n^2}} = \ln \left( 1 + \frac{\frac{t}{n^2}}{1 - \frac{t}{n^2}} \right) \leq \frac{\frac{t}{n^2}}{1 - \frac{t}{n^2}} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Also ist  $F(t)$  für alle  $t \in [-1, 1)$  absolut konvergent. Da eine komplexwertige Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$  genau dann absolut konvergiert, wenn die Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  nach dem Zählmaß  $\xi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$  integrierbar ist, gilt

$$F(t) = \ln(1-t) + \int_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \ln \left( 1 - \frac{t}{n^2} \right) d\xi(n),$$

wobei wir gerade gezeigt haben, dass der Betrag des Integranden sich durch  $g(n) := \frac{2}{n^2}$  unabhängig von  $t$  nach oben abschätzen lässt. Da  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  konvergiert und damit  $\int_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \frac{2}{n^2} d\xi(n) < +\infty$ , kann man Lemma 14.2.6 anwenden, und erhält die Stetigkeit in jedem Punkt  $t_0 \in [-1, 1)$ .

Man beachte, dass man wegen  $\left| \ln \left( 1 - \frac{t}{n^2} \right) \right| \leq g(n)$ ,  $n > 1, t \in [-1, 1)$ , die Stetigkeit von  $F(t)$  auch aus dem Weierstraß Kriterium Korollar 6.8.4 zusammen mit Korollar 6.6.14 erhält. In der Tat bedeutet das Weierstraß Kriterium nichts anderes, als die Existenz einer integrierbaren Majorante für den Maßraum  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \xi)$ .

### 14.3 Jensensche Ungleichung\*

Die unten folgende Ungleichung von Jensen findet in der Analysis an verschiedenen Stellen Anwendung. In ihr treten konvexe Funktionen auf, dh. Funktionen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit

$$\varphi((1-\lambda)\xi + \lambda\eta) \leq (1-\lambda)\varphi(\xi) + \lambda\varphi(\eta)$$

für alle  $\xi, \eta \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$ . Man sieht elementar, dass diese Bedingung zu

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(\xi_1)}{t - \xi_1} \leq \frac{\varphi(\xi_2) - \varphi(t)}{\xi_2 - t} \quad (14.10)$$

für alle  $\xi_1, \xi_2, t \in I$  mit  $\xi_1 < t < \xi_2$ , äquivalent ist. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar die Stetigkeit von  $\varphi$  am Inneren von  $I$ .

**14.3.1 Lemma.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum mit  $\mu(\Omega) = 1$ , dh.  $\mu$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Weiters seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit Werten in  $I$ , und sei  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann gilt die Jensensche Ungleichung

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu \quad (\in (-\infty, +\infty]). \quad (14.11)$$

*Beweis.* Aus  $f(x) \in I$  zusammen mit der Tatsache, dass Integrale von Funktionen  $> 0$  über Mengen mit Maß  $> 0$  immer  $> 0$  sind, folgt  $t := \int_{\Omega} f d\mu \in I$ . Sei

$$\beta := \sup_{\xi_1 \in I \cap (-\infty, t)} \frac{\varphi(t) - \varphi(\xi_1)}{t - \xi_1}.$$

Aus (14.10) folgt  $\beta \leq \frac{\varphi(\xi_2) - \varphi(t)}{\xi_2 - t}$  für alle  $\xi_2 \in I \cap (t, +\infty)$  und aus der Definition von  $\beta$  folgt  $\beta \geq \frac{\varphi(t) - \varphi(\xi_1)}{t - \xi_1}$  für alle  $\xi_1 \in I \cap (-\infty, t)$ . Umformen ergibt in jedem Fall ( $\xi \in I \setminus \{t\}$ )

$$0 \leq \varphi(\xi) - \varphi(t) + (t - \xi)\beta,$$

wobei diese Gleichung sogar für  $t = \xi$  gilt. Insbesondere gilt

$$0 \leq \varphi(f(x)) - \varphi(t) + (t - f(x))\beta \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  ist  $\varphi \circ f$  sicher  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar und daher können wir die Funktion von  $x$  auf der rechten Seite integrieren und erhalten

$$0 \leq \int_{\Omega} (\varphi(f(x)) - \varphi(t) + (t - f(x))\beta) d\mu \quad (\in [0, +\infty]).$$

Ist das Integral auf der rechten Seite in  $\mathbb{R}$ , so folgt aus der Integrierbarkeit von  $-\varphi(t) + (t - f(x))\beta$  - es gilt ja

$$\int_{\Omega} ((t - f(x))\beta - \varphi(t)) d\mu = -\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \in \mathbb{R},$$

dass auch  $\varphi \circ f$  integrierbar ist, und aus der Linearität von Integralen folgt (14.11).

Ist das Integral auf der rechten Seite oben aber  $+\infty$ , so kann wegen der Linearität von Integralen  $\varphi \circ f$  auch nicht integrierbar sein, wobei aber  $\int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu = +\infty$ . In diesem Fall gilt auch (14.11).  $\square$



## 14.4 Satz von Fubini und das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^d$

Zunächst wollen wir den *Satz von Fubini* wie aus der Maßtheorie bekannt wiedergeben, siehe Satz 10.24 und Satz 10.25 in [K]. Die komplexwertige Version folgt sofort aus der reellen, wenn man Definition 14.2.1 und Fakta 14.2.2 beachtet.

**14.4.1 Satz.** *Seien  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathfrak{E}, \nu)$  zwei Maßräume mit  $\sigma$ -endlichen Maßen  $\mu$  und  $\nu$ .  $\Omega \times Y$  sei mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{E}$  versehen, und  $\mu \otimes \nu : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{E}$  das Produktmaß von  $\mu$  und  $\nu$ . Ist  $h : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$  messbar, so gilt*

(i) *Hat  $h$  Werte in  $[0, +\infty]$ , so sind*

$$s \mapsto \int_Y h(s, t) \, d\nu(t), \quad t \mapsto \int_\Omega h(s, t) \, d\mu(s)$$

*messbar auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  bzw.  $(Y, \mathfrak{E})$  mit Werten in  $[0, +\infty]$  so, dass*

$$\int_\Omega \left( \int_Y h(s, t) \, d\nu(t) \right) d\mu(s) = \int_Y \left( \int_\Omega h(s, t) \, d\mu(s) \right) d\nu(t) = \int_{\Omega \times Y} h \, d(\mu \otimes \nu) \quad (\in [0, +\infty]).$$

(ii)  *$h : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$  ist integrierbar, dh.  $\int |h| \, d(\mu \otimes \nu) < +\infty$ , genau dann, wenn*

$$\int_\Omega \left( \int_Y |h(s, t)| \, d\nu(t) \right) d\mu(s) < +\infty,$$

*bzw. genau dann, wenn*

$$\int_Y \left( \int_\Omega |h(s, t)| \, d\mu(s) \right) d\nu(t) < +\infty.$$

(iii) *Ist  $h$  integrierbar, so existiert auch  $\int h(s, t) \, d\nu(t)$  für alle  $s$  außerhalb einer Nullmenge  $S \in \mathfrak{A}$ , sowie  $\int h(s, t) \, d\mu(s)$  für alle  $t$  außerhalb einer Nullmenge  $T \in \mathfrak{E}$ , und es gilt*

$$\int_{\Omega \times Y} h \, d(\mu \otimes \nu) = \int_{S^c} \int_Y h(s, t) \, d\nu(t) \, d\mu(s) = \int_{T^c} \int_\Omega h(s, t) \, d\mu(s) \, d\nu(t).$$

Wir betrachten die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}_d$  aller Borelmengen auf  $\mathbb{R}^d$ , welche von der Menge aller  $d$ -dimensionaler halboffenen Rechtecke bzw. Intervalle erzeugt wird, dh. die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^d$ , die alle diese Rechtecke enthält. Wegen Satz 7.40 und Definition 10.1 in [K] stimmt  $\mathfrak{B}_d$  mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra der Borelmengen auf den  $d$  Komponenten von  $\mathbb{R}^d$  überein.

Das  $d$ -dimensionale Lebesguemaß  $\lambda_d$  ist das Produktmaß der eindimensionalen Lebesguemaße auf den Komponenten (vgl. Satz 10.24 in [K]). Das Maß einer Borelmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  kann man wegen des Satzes von Fubini durch

$$\lambda_d(M) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \lambda_{d_2}(M_x) \, d\lambda_{d_1}(x) \quad (14.12)$$

berechnen, wobei  $M_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x, y) \in M\}$ .

Ist insbesondere  $M$  von der Bauart

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

mit einer messbaren Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ , so ist  $M \in \mathfrak{B}_{d+1}$ , da ja  $M = \bigcup_{0 \leq q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(q, +\infty) \times (0, q)$ . Aus  $\lambda(M_x) = f(x)$  folgt dann

$$\lambda_{d+1}(M) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x).$$

Im Falle von  $d = 1$  und einer Riemann-integrierbaren Funktion  $f$  (mit 0 außerhalb seines kompakten Definitionsintervalls fortgesetzt) sehen wir damit, dass die aus der Analysis II bekannte Interpretation des Riemann-Integrals als Fläche unter dem Funktionsgraphen im Sinne der Maßtheorie eine korrekte ist.

**14.4.2 Beispiel.** Sei  $n, m, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D \in \mathfrak{B}_n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  messbar. Man betrachte den Graph

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D\}.$$

Als Nullstellenmenge der auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  messbaren Funktion  $(x, y) \mapsto y - f(x)$  liegt dieser in  $\mathfrak{B}_{m+n}$ , wobei  $\lambda_{m+n}(\Gamma(f)) = 0$ , wie man leicht aus (14.12) folgert.

**14.4.3 Beispiel.** Wir definieren die *Betafunktion*  $B : (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

als absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral. Diese Funktion steht in einem engen Zusammenhang zur Gammafunktion:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} t^{x-1} u^{y-1} e^{-t-u} du \right) dt = \int_0^{+\infty} \left( \int_t^{+\infty} t^{x-1} (v-t)^{y-1} e^{-v} dv \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(0, +\infty)}(t) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t, +\infty)}(v) t^{x-1} (v-t)^{y-1} e^{-v} d\lambda(v) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_M(t, v) t^{x-1} (v-t)^{y-1} e^{-v} d\lambda_2(t, v) \end{aligned}$$

mit  $M = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : v > t > 0\}$ . Die zweite Gleichheit folgt durch die einfache Substitution  $u = v - t$ , die dritte ist die Interpretation des uneigentlichen Riemann-Integrals als Lebesgue-Integral (vgl. Satz 14.2.4) und die vierte folgt wegen  $\mathbb{1}_{(0, +\infty)}(t) \cdot \mathbb{1}_{(t, +\infty)}(v) = \mathbb{1}_M(t, v)$  aus dem Satz von Fubini, Satz 14.4.1, wenn wir beachten, dass der Integrand aufgrund der Stetigkeit  $\mathfrak{B}_2$ -messbar und nichtnegativ ist. Wendet man den Satz von Fubini nochmals mit umgekehrter Integrationsreihenfolge an, so erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^v t^{x-1} (v-t)^{y-1} dt \right) e^{-v} dv \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw \right) v^{x+y-1} e^{-v} dv = B(x, y) \Gamma(x+y). \end{aligned}$$

Also

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (14.13)$$

Wegen  $|t^x| = t^{\operatorname{Re} x}$  lässt sich  $B(x, y)$  auch für  $x, y \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y > 0$  definieren. Die Gleichung (14.13) gilt auch in diesem Fall.

**14.4.4 Bemerkung.** In Bemerkung 14.2.11 haben wir gesehen, dass für eine Menge  $M$  und den Maßraum  $(M, \mathcal{P}(M), \xi)$ , wobei  $\xi$  das Zählmaß ist, die unbedingte Konvergenz von  $\sum_{m \in M} a(m)$  äquivalent zur Integrierbarkeit von  $m \mapsto a(m)$  nach dem Zählmaß ist.

Nun folgt der Satz von Fubini, Satz 14.4.1, hier auch aus der Aussage Proposition 5.4.8 bzw. Lemma 5.4.9.

Ehe wir als Beispiel den Inhalt der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel berechnen, wollen wir an die Sätze 6.67 und 6.68 in [K] erinnern, wo gezeigt wurde, dass das Lebesgue-Maß *translationsinvariant* ist, dh. dass für  $a \in \mathbb{R}^d$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^d$

1.  $B \in \mathfrak{B}_d \Leftrightarrow B + a \in \mathfrak{B}_d$ ,
2.  $B \in \mathfrak{Q}_d \Leftrightarrow B + a \in \mathfrak{Q}_d$ ,
3.  $\lambda_d(B + a) = \lambda_d(B)$  für alle  $B \in \mathfrak{Q}_d$ ,

und dass allgemeiner für eine bijektive affine Abbildungen  $T : x \mapsto Ax + b$  auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $A \in GL(d, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^d$  für  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  gilt

1.  $B \in \mathfrak{B}_d \Leftrightarrow T(B) \in \mathfrak{B}_d$ ,
2.  $B \in \mathfrak{Q}_d \Leftrightarrow T(B) \in \mathfrak{Q}_d$ ,
3. für alle  $B \in \mathfrak{Q}_d$  gilt

$$\lambda_d(T(B)) = |\det A| \lambda_d(B). \quad (14.14)$$

**14.4.5 Bemerkung.** Sei nun  $T : x \mapsto Ax + b$  affin so, dass die Matrix  $A$  singular ist, dh.  $\det A = 0$ . Also ist  $A(\mathbb{R}^d)$  ein echter linearer Teilraum von  $\mathbb{R}^d$ , womit  $VA(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}$  für ein  $d_1 < d$  und eine geeignete lineare Bijektion  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  gilt.

Wegen Beispiel 14.4.2 folgt  $0 = \lambda_d(\mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}) = |\det(V)| \lambda_d(A(\mathbb{R}^d))$ . Somit gilt

$$\lambda_d(T(B)) = 0 = |\det A| \cdot \lambda_d(B),$$

für alle  $B \in \mathfrak{B}_d$ , wobei  $T(B)$  i.A. nur in  $\mathfrak{Q}_d$  liegt.

Insbesondere haben alle echten affinen Unterräume von  $\mathbb{R}^d$  Lebesguemaß Null.

**14.4.6 Beispiel.** Wir wollen für  $d \in \mathbb{N}$  das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß der Kugel  $K_R^d(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq R\}$  mit Radius  $R > 0$  bestimmen. Zunächst sei bemerkt, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{d+1}(t) dt = \begin{cases} \frac{d(d-2)\cdots 1}{(d+1)(d-1)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{falls } d \text{ ungerade,} \\ \frac{d(d-2)\cdots 2}{(d+1)(d-1)\cdots 1}, & \text{falls } d \text{ gerade,} \end{cases} \quad (14.15)$$

wie man unschwer durch Induktion nach  $d$  mit Hilfe zweimaliger partieller Integration nachweist.

Nun wollen wir

$$\lambda_d(K_R^d(0)) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{d(d-2)\cdots 2} R^d, & \text{falls } d \text{ gerade} \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{d(d-2)\cdots 1} R^d, & \text{falls } d \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (14.16)$$

ebenfalls durch Induktion nach  $d$  zeigen. Für  $d = 1$  ist  $\lambda_d(K_R^1(0)) = \lambda([-R, R]) = 2R$ . Angenommen wir haben obige Formel für  $d \geq 1$  verifiziert. Für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| \leq R$  gilt

$$\begin{aligned} (K_R^{d+1}(0))_x &= \{y \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in K_R^{d+1}(0)\} = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|_2^2 \leq R^2 - x^2\} \\ &= K_{\sqrt{R^2 - x^2}}^d(0) = \sqrt{R^2 - x^2} K_1^d(0). \end{aligned}$$

(14.14) angewandt auf  $T = \text{diag}(\sqrt{R^2 - x^2}, \dots, \sqrt{R^2 - x^2}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ergibt  $\lambda_d((K_R^{d+1}(0))_x) = (\sqrt{R^2 - x^2})^d \lambda_d(K_1^d(0))$ . Für  $|x| > R$  gilt  $(K_R^{d+1}(0))_x = \emptyset$ . Gemäß (14.12) folgt

$$\lambda_{d+1}(K_R^{d+1}(0)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_d((K_R^{d+1}(0))_x) d\lambda(x) = \int_{[-R, R]} (\sqrt{R^2 - x^2})^d \lambda_d(K_1^d(0)) d\lambda(x).$$

Betrachten wir das als Riemann-Integral und substituieren  $x = R \cos t$ , so ist das weiter gleich

$$\lambda_d(K_1^d(0)) 2R^{d+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{d+1}(t) dt.$$

Aus (14.15) zusammen mit der vorausgesetzten Formel (14.16) für  $d$  folgt nun (14.16) für  $d + 1$ .

Wir erinnern auch noch an folgende beiden Resultate. Für das erste siehe Satz 8.2 und Satz 9.62 und für das zweite siehe Satz 9.75 in [K].

**14.4.7 Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $(Y, \mathfrak{E})$  eine Menge versehen mit einer  $\sigma$ -Algebra, und sei  $T : \Omega \rightarrow Y$  messbar. Weiters sei  $\mu^T : \mathfrak{E} \rightarrow [0, +\infty]$  definiert durch  $\mu^T(B) := \mu(T^{-1}(B))$ .

Dann ist  $\mu^T$  ein Maß. Weiters ist eine messbare Funktion  $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  genau dann bezüglich  $\mu^T$  integrierbar, wenn  $f \circ T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es bezüglich  $\mu$  ist. In diesem Falle gilt

$$\int_{\Omega} f \circ T d\mu = \int_Y f d\mu^T.$$

Die entsprechende Aussage gilt für komplexwertige Funktionen  $f$ .

**14.4.8 Korollar.** Sei  $T : x \mapsto Ax + b$  eine bijektive affine Abbildung auf  $\mathbb{R}^d$  und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ( $\mathbb{C}$ ) messbar. Dann ist  $f$  genau dann bezüglich  $\lambda_d$  integrierbar, wenn  $f \circ T$  bezüglich  $\lambda_d$  integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int f d\lambda_d = |\det A| \cdot \int f \circ T d\lambda_d. \quad (14.17)$$

Wir werden dieses Resultat später auf beliebige Diffeomorphismen  $T$  ausdehnen, siehe Satz 15.1.3.

## 14.5 Faltung

Eine sehr fruchtbare Begriffsbildung in der Analysis ist die der *Faltung* zweier Borel-messbarer Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese ist definiert durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) d\lambda_d(y)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , für die dieses Integral existiert. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall. Sind  $f$  und  $g$  aus speziellen Funktionenklassen, so existiert die Faltung sehr wohl. Wegen Korollar 14.4.8 angewandt auf  $T(y) = x - y$  existiert  $f * g(x)$  genau dann, wenn  $g * f(x)$  existiert, wobei in dem Fall dann

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) d\lambda_d(y) = g * f(x).$$

Wir wollen hier nur den Spezialfall eines integrierbaren  $g$ , dh.  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , und eines im wesentlichen beschränkten  $f$ , dh.  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  behandeln. Später werden wir zur Faltung von allgemeineren Funktionen zurückkommen.

Ist  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , so folgt wegen  $|f(x-y)g(y)| \leq \|f\|_\infty |g(y)|$  die Integrierbarkeit von  $f(x-y)g(y)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Also existiert  $f * g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ .  $f * g$  ist somit eine Funktion von  $\mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{C}$ , die wegen

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| d\lambda_d(y) \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \quad (14.18)$$

beschränkt ist mit  $\|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f * g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$ . Später werden wir sehen, dass  $f * g$  sogar gleichmäßig stetig ist; vgl. Fakta 16.2.3. Wir sammeln weitere Eigenschaften dieser Funktion.

### 14.5.1 Fakta.

1. Ist  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^d$  derart, dass alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , auch in  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  liegen<sup>5</sup>, so gilt

$$\left| \frac{\partial f(x-y)g(y)}{\partial x_j} \right| \leq |g(y)| \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_\infty.$$

Also folgt aus Lemma 14.2.8 für  $j = 1, \dots, d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g(x). \quad (14.19)$$

2. Wendet man die letzte Tatsache wiederholt an, so erhält man, dass wenn  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  zumindest  $m$ -mal partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^d$  derart ist, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} \quad \text{für alle } l_1, \dots, l_k \in \{1, \dots, d\},$$

<sup>5</sup>Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  für ein offenes  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  messbar und partiell differenzierbar, und setzt man  $f$  zB. mit 0 außerhalb von  $D$  fort, so ist  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  für  $x \in D$  der punktweise Grenzwert der Folge  $\frac{f(x + \frac{1}{n}e_j) - f(x)}{\frac{1}{n}}$  und damit auch messbar.

mit  $k \leq m$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  liegen, auch  $f * g$  zumindest  $m$ -mal differenzierbar ist, wobei

$$\frac{\partial^k (f * g)}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} * g(x) \quad (14.20)$$

für  $l_1, \dots, l_k \in \{1, \dots, d\}$  und  $k \leq m$ .

3. Ist  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $f$  zumindest  $m$ -mal stetig partiell differenzierbar und hat  $f$  einen kompakten Träger, so haben mit  $f$  und auch alle partiellen Ableitungen von  $f$  kompakte Träger und sind infolge beschränkt. Also gilt in diesem Fall immer (14.20), wobei  $f * g$  und seine partiellen Ableitungen in  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  liegen.

*14.5.2 Beispiel.* Sei  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := \exp(-|x_1| - |x_2|), \quad g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := \sin(x_1 + x_2).$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  und  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  aber  $g \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ . Nun gilt (siehe Fakta 14.5.1)

$$f * g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = g * f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \sin(x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \exp(-|y_1| - |y_2|) d\lambda_2\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$$

Wegen  $\sin(x_1 - y_1 + x_2 - y_2) = \sin(x_1 - y_1) \cos(x_2 - y_2) + \cos(x_1 - y_1) \sin(x_2 - y_2)$  folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} f * g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_1|) \sin(x_1 - y_1) d\lambda(y_1) \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_2|) \cos(x_2 - y_2) d\lambda(y_2) + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_1|) \cos(x_1 - y_1) d\lambda(y_1) \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_2|) \sin(x_2 - y_2) d\lambda(y_2) \end{aligned}$$

Nun gilt wegen  $\cos(x - t) + \cos(x + t) = 2 \cos x \cos t$  und, weil  $\exp(-t)(\sin t - \cos t)$  Stammfunktion von  $2 \exp(-t) \cos t$  ist,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|) \cos(x - t) d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) (\cos(x - t) + \cos(x + t)) dt = \cos x,$$

und wegen  $\sin(x - t) + \sin(x + t) = 2 \sin x \cos t$

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|) \sin(x - t) d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) (\sin(x - t) + \sin(x + t)) dt = \sin x.$$

Also folgt

$$f * g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = (\sin x_1) \cdot (\cos x_2) + (\cos x_1) \cdot (\sin x_2) = \sin(x_1 + x_2) = g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right).$$

**14.5.3 Lemma.** Seien  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  messbare Funktionen, und  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^d$  so, dass  $f(x) = 0$  für  $x \notin M_1$  und  $g(x) = 0$  für  $x \notin M_2$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^d \setminus (M_1 + M_2)$  existiert dann  $f * g(x)$ , wobei  $f * g(x) = 0$ . Insbesondere gilt<sup>6</sup>

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp } f + \text{supp } g},$$

*Beweis.* Man beachte zunächst, dass für  $x \in \mathbb{R}^d$  die Tatsache, dass  $(x - M_1) \cap M_2 \neq \emptyset$  äquivalent zu  $x \in M_1 + M_2$  ist. In der Tat bedeutet  $(x - M_1) \cap M_2 \neq \emptyset$  genau, dass es ein  $m_2 \in M_2$  und ein  $m_1 \in M_1$  mit  $m_2 = x - m_1$  gibt, was wiederum zu  $x = m_1 + m_2$  für gewisse  $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ , daher zu  $x \in M_1 + M_2$  äquivalent ist.

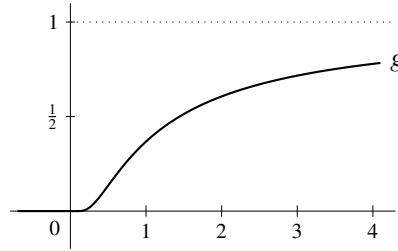
Für  $x \notin M_1 + M_2$  gilt daher wegen

$$f(x - y)g(y) = \mathbb{1}_{M_1}(x - y)\mathbb{1}_{M_2}(y) \cdot f(x - y)g(y) = \mathbb{1}_{(x - M_1) \cap M_2}(y) \cdot f(x - y)g(y),$$

dass  $f(x - y)g(y) = 0$  für  $y \in \mathbb{R}^d$ . Insbesondere existiert die Faltung von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x$ , wobei  $f * g(x) = 0$ .  $\square$

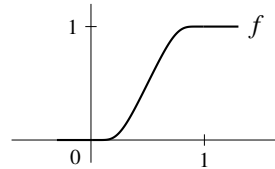
#### 14.5.4 Beispiel.

Man betrachte  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  mit  $g(\xi) = 0, \xi \leq 0, g(\xi) = e^{-\frac{1}{\xi}}$ . Bekannterweise ist  $g$  eine  $C^\infty$  Funktion;

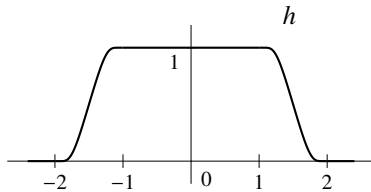


genauso wie die Funktion

$$f(\xi) = \frac{g(\xi)}{g(\xi) + g(1 - \xi)}$$



die nur Werte in  $[0, 1]$  annimmt, wobei  $f(\xi) = 1, \xi \geq 1$  und  $f(\xi) = 0, \xi \leq 0$ . Die Funktion



$$h(\xi) = f(\xi + 2)f(2 - \xi) \quad (14.21)$$

ist nun  $C^\infty$ , erfüllt  $0 \leq h(\xi) \leq 1, \xi \in \mathbb{R}$ , sowie  $h([-1, 1]) = \{1\}$  und  $h(\mathbb{R} \setminus (-2, 2)) = \{0\}$ .

<sup>6</sup>Der Träger,  $\text{supp } h$ , einer Funktion  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert als der Abschluss der Menge aller Punkte  $x$  mit  $h(x) \neq 0$ .

**14.5.5 Definition.** Sei  $c := \int_{K_2(0)} h(\|y\|_2^2) d\lambda_d(y)$ . Weiters sei für  $\delta > 0$  die Funktion  $k_\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$k_\delta(x) := \frac{1}{c \delta^d} h\left(\frac{\|x\|_2^2}{\delta^2}\right).$$

Diese Funktionen nennt man auch *Mollifier*.

Als Zusammensetzung von  $C^\infty$ -Funktionen ist  $k_\delta$  selber  $C^\infty$ , wobei für  $j = 1, \dots, d$

$$\frac{\partial k_\delta}{\partial x_j}(x) = \frac{2x_j}{c \delta^{d+2}} h'\left(\frac{\|x\|_2^2}{\delta^2}\right).$$

Offenbar nimmt  $k_\delta$  auf  $K_\delta(0)$  den Wert  $\frac{1}{c \delta^d}$  an, und hat einen Träger, der in  $K_{2\delta}(0)$  enthalten ist.

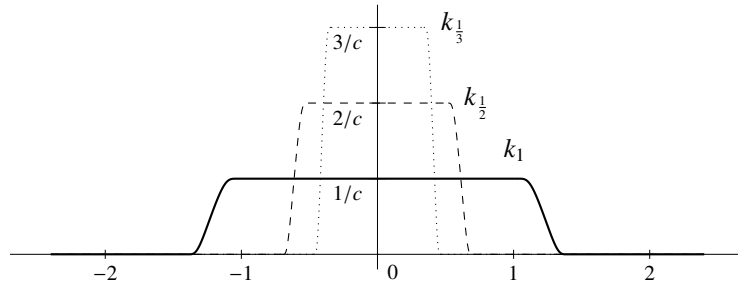


Abbildung 14.1: Veranschaulichung von  $k_\delta$  im Falle  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$ .

Aus Korollar 14.4.8 folgt

$$\|k_\delta\|_1 = \frac{1}{c \delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_{2\delta}(0)}(y) h\left(\frac{1}{\delta} \|y\|_2^2\right) d\lambda_d(y) = \frac{1}{c \delta^d} \delta^d \int_{K_2(0)} h(\|y\|_2^2) d\lambda_d(y) = 1,$$

sowie

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial k_\delta}{\partial x_j} \right\|_1 &= \frac{2}{c \delta^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_{2\delta}(0)}(y) \left| \frac{y_j}{\delta} h'\left(\frac{1}{\delta} \|y\|_2^2\right) \right| d\lambda_d(y) \\ &= \frac{2}{c \delta^{d+1}} \delta^d \int_{K_2(0)} |y_j| |h'(\|y\|_2^2)| d\lambda_d(y) = \frac{C}{\delta} \end{aligned}$$

für eine geeignete, von  $\delta > 0$  unabhängige Konstante  $C \geq 0$ .

Im Folgenden wollen wir uns für eine beschränkte Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $B \in \mathfrak{B}_d$  die wegen  $k_\delta, \mathbb{1}_B \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$  sicher auf ganz  $\mathbb{R}^d$  existierende Funktion  $k_\delta * \mathbb{1}_B$  näher anschauen.

#### 14.5.6 Fakta.

1. Aus der Definition der Faltung und aus (14.18) erkennen wir

$$0 \leq k_\delta * \mathbb{1}_B(x) \leq 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (14.22)$$



2. Gemäß (14.20) gilt  $k_\delta * \mathbb{1}_B \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , wobei (siehe (14.19) und (14.18))

$$\left| \frac{\partial(k_\delta * \mathbb{1}_B)}{\partial x_j}(x) \right| = \left| \frac{\partial k_\delta}{\partial x_j} * \mathbb{1}_B(x) \right| \leq \left\| \frac{\partial k_\delta}{\partial x_j} \right\|_1 = \frac{C}{\delta}. \quad (14.23)$$

3. Für ein  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt wegen  $k_\delta(x - y) = 0$  für  $y \notin x - K_{2\delta}(0) = x + K_{2\delta}(0) = K_{2\delta}(x)$

$$k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = \int_B k_\delta(x - y) d\lambda_d(y) = \int_{B \cap K_{2\delta}(x)} k_\delta(x - y) d\lambda_d(y). \quad (14.24)$$

4. Ist  $K_{2\delta}(x) \subseteq B$ , so folgt mit Korollar 14.4.8

$$k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = \int_{K_{2\delta}(x)} k_\delta(x - y) d\lambda_d(y) = \int_{K_{2\delta}(0)} k_\delta(y) d\lambda_d(y) = \|k_\delta\|_1 = 1. \quad (14.25)$$

Liegt allgemeiner  $x$  im Inneren  $B^\circ$  von  $B$ , dh. in der größten in  $B$  enthaltenen offenen Menge (siehe Definition 12.2.11), so gilt  $U_{2\rho}(x) \subseteq B$  für ein  $\rho > 0$ . Es folgt für alle  $0 < \delta < \rho$  sicherlich  $K_{2\delta}(x) \subseteq B$ , und daher  $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 1$ . Insbesondere gilt

$$\lim_{\delta \searrow 0} k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 1.$$

5. Gilt  $B \cap K_{2\delta}(x) = \emptyset$  bzw. äquivalent dazu  $x \notin B - K_{2\delta}(0) = B + K_{2\delta}(0)$ , so folgt aus Lemma 14.5.3 oder direkt aus (14.24), dass  $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0$ . Insbesondere gilt

$$\text{supp } k_\delta * \mathbb{1}_B \subseteq \overline{B + K_{2\delta}(0)}, \quad (14.26)$$

wobei die rechte und daher auch die linke Seite beschränkt und daher kompakt ist. Damit ist  $k_\delta * \mathbb{1}_B$  auch in  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Liegt  $x$  allgemeiner im Inneren  $(B^c)^\circ (= \overline{B}^c)$  von  $B^c$ , dh. in der größten in  $B^c$  enthaltenen offenen Menge, so gilt  $U_{2\rho}(x) \subseteq B^c$  für ein  $\rho > 0$ . Für alle  $0 < \delta < \rho$  folgt  $K_{2\delta}(x) \subseteq B^c$  bzw.  $B \cap K_{2\delta}(x) = \emptyset$ , und daher  $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0$ . Insbesondere gilt

$$\lim_{\delta \searrow 0} k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0.$$

Die abgeschlossene und offene Kugel,  $K_\delta(L)$  und  $U_\delta(L)$ , um eine Menge  $L$  im folgenden Resultat werden in Lemma 14.6.1 im Anhang des aktuellen Kapitels ausführlicher diskutiert.

**14.5.7 Lemma.** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und  $L \subseteq K$  nichtleer. Für  $\delta > 0$  betrachte

$$(1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}).$$

Dann gilt

$$\text{supp } (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus U_\delta(L) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \overline{L} \quad (14.27)$$

und

$$|1 - (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})| = k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)} \leq \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}, \quad (14.28)$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{L}$  gilt punktweise

$$\lim_{\delta \searrow 0} |1 - (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})(x)| = \lim_{\delta \searrow 0} \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) = 0. \quad (14.29)$$

*Beweis.* Für  $x \in K_\delta(L)$  gilt  $K_{2\delta}(x) \subseteq K_{3\delta}(L)$  und daher  $k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}(x) = 1$ ; siehe (14.25). Somit verschwindet  $(1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})$  auf  $U_\delta(L) \subseteq K_\delta(L)$ , also  $\text{supp}(1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus U_\delta(L)$ . Wegen  $\bar{L} \subseteq K_{\frac{\delta}{2}}(L) \subseteq U_\delta(L)$  haben wir damit (14.27) gezeigt.

Aus  $0 \leq k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)} \leq 1$  – siehe (14.22) – folgt sofort  $|1 - (k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})| = k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}$ . Vor (14.26) haben wir gesehen, dass  $k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}(x) = 0$ , wenn  $x \notin K_{3\delta}(L) + K_{2\delta}(0)$ . Wegen  $K_{3\delta}(L) + K_{2\delta}(0) \subseteq K_{5\delta}(L)$  folgt somit (14.28).

Für  $x \in K \setminus \bar{L}$  gilt  $d(x, L) > 0$ . Wählt man  $\delta > 0$  so klein, dass  $d(x, L) > 5\delta$ , dh. dass  $x \notin K_{5\delta}(L)$ , so folgt aus (14.28), dass  $\mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) = 0$  und  $(1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})(x) = 1$ . Somit gilt (14.29).  $\square$

Folgendes Resultat wirkt zunächst etwas glanzlos, stellt sich aber oft als sehr nützlich heraus.

**14.5.8 Lemma.** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und  $V_j, j \in J$ , eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es endlich viele Funktionen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit Werten in  $[0, 1]$  derart, dass für  $k = 1, \dots, n$  immer  $\text{supp } \gamma_k \subseteq V_{j(k)}$  für ein  $j(k) \in J$  und dass

$$\mathbb{1}_K(x) \leq \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) \leq 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (14.30)$$

Die Funktionen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  nennt man eine glatte Zerlegung der Eins.

*Beweis.* Zu jedem  $x \in K$  gibt es ein  $j(x) \in J$  mit  $x \in V_{j(x)}$ . Nun sei  $\delta_x > 0$  so klein, dass die abgeschlossene Kugel  $K_{3\delta_x}(x)$  mit Radius  $3\delta_x$  bezüglich der  $\|\cdot\|_2$ -Norm um  $x$  ganz in  $V_{j(x)}$  enthalten ist.

Wegen der Kompaktheit von  $K$  gilt  $K \subseteq U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\delta_{x_n}}(x_n)$  für gewisse  $x_1, \dots, x_n \in K$ . Wir setzen  $A_1 := U_{2\delta_{x_1}}(x_1)$  und für  $k = 2, \dots, n$ ,

$$A_k := U_{2\delta_{x_k}}(x_k) \setminus \left( U_{2\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{2\delta_{x_{k-1}}}(x_{k-1}) \right).$$

Ist  $\delta := \frac{1}{2} \cdot \min\{\delta_{x_k} : k = 1, \dots, n\}$ , so gilt offensichtlich

$$A_k + K_{2\delta}(0) \subseteq U_{2\delta_{x_k}}(x_k) + K_{2\delta}(0) \subseteq K_{3\delta_{x_k}}(x_k) \subseteq V_{j(x_k)} =: V_{j(k)}.$$

Ist  $k_\delta$  die  $C^\infty$ -Funktion auf  $\mathbb{R}^d$  aus Definition 14.5.5, so haben wir in (14.26) nachgerechnet, dass daher der Träger der  $C^\infty$ -Funktion  $\gamma_k := k_\delta * \mathbb{1}_{A_k}$  in  $V_{j(k)}$  enthalten ist. Nun gilt wegen (14.22)

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k(x) = \sum_{k=1}^n k_\delta * \mathbb{1}_{A_k}(x) = k_\delta * \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right)(x) = k_\delta * \mathbb{1}_A(x) \in [0, 1],$$

wobei  $A := A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n = U_{2\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{2\delta_{x_n}}(x_n)$ . Außerdem folgt aus

$$\begin{aligned} K + K_{2\delta}(0) &\subseteq (U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\delta_{x_n}}(x_n)) + K_{2\delta}(0) \\ &\subseteq U_{2\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{2\delta_{x_n}}(x_n) = A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n =: A \end{aligned}$$

zusammen mit (14.25), dass  $k_\delta * \mathbb{1}_A(x) = 1$ , wenn nur  $x \in K$ .  $\square$

**14.5.9 Bemerkung.** Nimmt man für ein kompaktes  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine offene Obermenge  $G$  von  $K$  einfach  $G$  als offene Überdeckung her, wendet Lemma 14.5.8 an, und setzt

$$\psi = \sum_{k=1}^n \gamma_k,$$

so erhält man eine  $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$ -Funktion, mit  $\text{supp } \psi \subseteq G$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$  und  $\psi|_K = 1$ .

## 14.6 Anhang

Im Folgenden bringen wir ein Resultat über Abstände von Mengen in metrischen Räumen.

**14.6.1 Lemma.** Sei  $\langle Y, d \rangle$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq Y$  eine feste nichtleere Teilmenge. Wir definieren für  $x \in Y$ <sup>7</sup>

$$d(x, M) = \inf \{d(x, y) : y \in M\}, \quad (14.31)$$

und für Teilmengen  $A, B$  von  $Y$

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}. \quad (14.32)$$

Schließlich setzen wir für  $\delta > 0$

$$K_\delta(M) := \{x \in Y : d(x, M) \leq \delta\}, \quad U_\delta(M) := \{x \in Y : d(x, M) < \delta\}. \quad (14.33)$$

Dann gilt

- Die Funktion  $x \mapsto d(x, M)$  ist eine stetige Funktion von  $Y$  nach  $[0, +\infty)$ .
- $K_\delta(M)$  ist abgeschlossen und  $U_\delta(M)$  ist offen in  $Y$ .
- Mit  $M$  sind auch  $K_\delta(M)$  und  $U_\delta(M)$  beschränkt.
- Es gilt  $y \in \overline{M} \Leftrightarrow d(y, M) = 0$ .
- Ist  $\emptyset \neq A, B \subseteq Y$  mit einem kompakten  $A$ , so gilt  $d(x, B) = d(A, B)$  für ein  $x \in A$ .
- Sind  $A$  und  $B$  disjunkt und  $A$  kompakt und  $B$  abgeschlossen, so ist  $d(A, B) > 0$ .

**Beweis.** Sind  $x_1, x_2 \in Y$ , so folgt leicht aus (14.31), dass  $d(x_1, M) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, M)$  und aus Symmetriegründen  $d(x_2, M) \leq d(x_1, x_2) + d(x_1, M)$ . Also gilt

$$|d(x_1, M) - d(x_2, M)| \leq d(x_1, x_2),$$

woraus wir die Stetigkeit erhalten. Als Urbild der in  $[0, +\infty)$  offenen Menge  $[0, \delta)$  (abgeschlossenen Menge  $[0, \delta]$ ) unter der stetigen Abbildung  $x \mapsto d(x, M)$  ist  $U_\delta(M)$  offen ( $K_\delta(M)$  abgeschlossen). Die Beschränktheit von  $U_\delta(M)$  und  $K_\delta(M)$  ist für beschränktes  $M$  klar.

$y \in \overline{M}$  ist äquivalent zur Existenz einer Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  mit  $d(y, y_n) \rightarrow 0$ . Das ist aber andererseits äquivalent zu  $d(y, M) = 0$ .

Ist  $A$  kompakt, so hat gemäß Proposition 6.1.13 die stetige Funktion  $x \mapsto d(x, B)$  auf der kompakten Menge  $A$  ein Minimum bei einem Punkt  $x \in A$ . Also gilt  $d(x, B) \leq d(z, B)$ ,  $z \in A$ . Wegen Lemma 2.9.11 gilt somit  $d(A, B) = \inf \{d(z, B) : z \in A\} = d(x, B)$ . Ist noch dazu  $B$  abgeschlossen, so muss auch  $d(A, B) = d(x, B) > 0$ .  $\square$

<sup>7</sup>Für  $M = \emptyset$  setzen wir  $d(x, \emptyset) = +\infty$ .

Es sei noch angemerkt, dass für ein beschränktes  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  die Menge  $K_\delta(M)$  abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist, wobei etwa  $d(x, y) = \|x - y\|_2$ .

## Kapitel 15

# Transformationsformel, Integralsätze

### 15.1 Transformationsformel

Eine ausgesprochen nützliche Sache zur Berechnung von mehrdimensionalen Integralen ist die sogenannte *Transformationsformel*. Sie kann als Verallgemeinerung der Substitutionsregel für Riemann-Integrale gesehen werden. Der Spezialfall von affinen Abbildungen wurde schon in Korollar 14.4.8 abgehandelt.

In der Tat wollen wir zeigen, dass wenn  $T : X \rightarrow Y$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist, also wenn  $X, Y$  offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  sind und  $T$  eine bijektive Abbildung derart ist, dass  $T$  und  $T^{-1}$  stetig differenzierbar sind,

$$\int_Y f d\lambda_d = \int_X f \circ T \cdot |\det dT| d\lambda_d$$

für alle integrierbaren Funktionen  $f : Y \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$  gilt. Dass  $T$  messbar ist, folgt unmittelbar aus seiner Stetigkeit; vgl. Fakta 14.1.2.

Im Beweis für den allgemeinen Fall werden wir Diffeomorphismen mehr oder weniger durch affine Abbildungen approximieren; vgl. Korollar 14.4.8. Zunächst wollen wir dazu ein Lemma bringen.

**15.1.1 Lemma.** Sei  $Z$  ein Banachraum,  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow Z$  stetig differenzierbar. Dann ist die Funktion  $F : D \times D \rightarrow Z$ ,

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\|x-y\|} \cdot (f(x) - f(y) - df(y)(x-y)), & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

stetig<sup>1</sup>.

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $F$  bei einem beliebigen  $(x_0, y_0) \in D \times D$  stetig ist. Im Falle  $x_0 \neq y_0$  gilt  $x \neq y$  für alle  $(x, y) \in U_\eta((x_0, y_0))$  für ein hinreichend kleines  $\eta > 0$ . Auf  $U_\eta((x_0, y_0))$  ist aber  $F(x, y)$  als Linearkombination stetiger Funktionen selber stetig; siehe Korollar 9.1.3, Korollar 9.2.9, Beispiel 9.2.10.

<sup>1</sup>Hier und im Beweis steht  $\|\cdot\|$  für  $\|\cdot\|_\infty$  bzw. die dazugehörige Abbildungsnorm; siehe Definition 9.2.4.

Im Falle  $x_0 = y_0$  wählen wir  $\rho > 0$  mit  $K_\rho(x_0) \subseteq D$ . Setzt man  $C(\rho) := \max_{x,y \in K_\rho(x_0)} \|df(x) - df(y)\|$ , so gilt  $C(\rho) \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 0$ , da  $df$  stetig ist. Für  $x, y \in K_\rho(x_0)$  haben wir

$$\|F(x_0, x_0) - F(x, y)\| = \frac{1}{\|x - y\|} \cdot \|f(x) - df(y)x - (f(y) - df(y)y)\|.$$

Halten wir  $y$  fest und setzen  $h(t) = f(t) - df(y)t$ , so schreibt sich dieser Ausdruck als  $\frac{1}{\|x - y\|} \|h(x) - h(y)\|$ . Nun gilt wegen  $dh(t) = df(t) - df(y)$  und Korollar 10.1.24 für  $x, t \in K_\rho(x_0)$

$$\|h(x) - h(t)\| \leq \sup_{s \in K_\rho(x_0)} \|dh(s)\| \cdot \|x - t\| \leq C(\rho) \|x - t\|.$$

Also folgt  $\|F(x_0, x_0) - F(x, y)\| \leq C(\rho) \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 0$ .  $\square$

**15.1.2 Korollar.** Sei  $Z$  ein Banachraum,  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $K \subseteq D$  kompakt und  $f : D \rightarrow Z$  stetig differenzierbar. Dann gibt es eine monoton wachsende Funktion  $\rho_{f|_K} : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  mit  $\lim_{\gamma \rightarrow 0+} \rho_{f|_K}(\gamma) = 0$  mit

$$f(B) \subseteq f(y) + df(y)(B - y) + K_{d(B) \cdot \rho_{f|_K}(d(B))}(0)$$

für alle  $B \subseteq K$  und  $y \in B$ , wobei  $d(B) := \sup_{x,y \in B} \|x - y\|_\infty$  für den Durchmesser von  $B$  steht.

*Beweis.* Sei  $\rho_{f|_K}(\gamma)$  die Oszillation von  $F|_{K \times K}$  aus Lemma 15.1.1, also

$$\rho_{f|_K}(\gamma) := \sup\{\|F(x, y) - F(\xi, \eta)\| : (x, y), (\xi, \eta) \in K \times K, \|(x, y) - (\xi, \eta)\|_\infty \leq \gamma\}.$$

Da  $F|_{K \times K}$  gemäß Satz 6.3.3 gleichmäßig stetig ist, folgt mit Bemerkung 8.3.2, dass  $\lim_{\gamma \rightarrow 0+} \rho_{f|_K}(\gamma) = 0$ . Ist nun  $y \in B \subseteq K$ , so folgt für jedes  $x \in B$

$$\|f(x) - f(y) - df(y)(x - y)\| = \|x - y\|_\infty \|F(x, y) - F(y, y)\| \leq d(B) \cdot \rho_{f|_K}(d(B)).$$

Daher liegt  $f(x) - f(y) - df(y)(x - y)$  in  $K_{d(B) \cdot \rho_{f|_K}(d(B))}(0)$ , und infolge

$$f(x) \in f(y) + df(y)(x - y) + K_{d(B) \cdot \rho_{f|_K}(d(B))}(0) \subseteq f(y) + df(y)(B - y) + K_{d(B) \cdot \rho_{f|_K}(d(B))}(0).$$

$\square$

**15.1.3 Satz.** Sei  $T : X \rightarrow Y$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Mengen  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ . Ist  $B \subseteq X$ ,  $B \in \mathfrak{B}_d$ , so gilt

$$\lambda_d(T(B)) = \int_B |\det dT(x)| d\lambda_d(x). \quad (15.1)$$

Eine Funktion  $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  ist genau dann integrierbar, wenn  $f \circ T \cdot |\det dT| : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  es ist. In diesem Fall gilt

$$\int_Y f d\lambda_d = \int_X f \circ T \cdot |\det dT| d\lambda_d. \quad (15.2)$$

*Beweis.* Im nun folgenden Beweis steht  $\|\cdot\|$  für  $\|\cdot\|_\infty$  bzw. die dazugehörige Abbildungsnorm; siehe Definition 9.2.4.

- (i) Zunächst folgt aus der Stetigkeit von  $T^{-1}$  und  $T$  mit Fakta 14.1.2, dass  $T(B) \in \mathfrak{B}_d \Leftrightarrow B \in \mathfrak{B}_d$  für alle  $B \subseteq X$ , und dass  $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  genau dann messbar ist, wenn  $f \circ T$  messbar ist. Wegen  $|\det dT| > 0$  ist das äquivalent zur Messbarkeit von  $f \circ T \cdot |\det dT|$ .
- (ii) Es genügt, (15.2) für alle messbaren Funktionen  $f \geq 0$  nachzuweisen, wobei die linke und die rechte Seite in (15.2) als Elemente von  $[0, +\infty]$  betrachtet werden. In der Tat folgt daraus einerseits (15.1), wenn man  $f = \mathbb{1}_{T(B)}$  setzt, und andererseits sofort auch (15.2) für alle messbaren Funktionen  $f$ , wobei die linke Seite genau dann integrierbar ist, wenn es die rechte Seite ist.
- (iii) Wir zeigen nun, dass

$$\lambda_d(T(B)) \leq \int_B |\det dT(x)| d\lambda_d(x), \quad (15.3)$$

wenn  $B = R$  ein halboffenes Rechteck  $R = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)$  mit  $\overline{R} \subseteq X$  ist. Zunächst gilt wegen der Kompaktheit von  $\overline{R}$

$$M := \sup_{x \in \overline{R}} \|dT(x)^{-1}\| < +\infty.$$

Nun nehmen wir  $\delta > 0$  beliebig, und schreiben  $R$  als disjunkte Vereinigung  $R = \sum_{j=1}^n R_j$  von kleineren Rechtecken  $R_j = [a_1^j, b_1^j) \times \cdots \times [a_d^j, b_d^j)$ , deren maximale Seitenlänge  $\max_i (b_i^j - a_i^j)$  – diese stimmt mit dem Durchmesser  $d(R_j)$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  überein – kleiner als  $\delta$  ist. Zusätzlich gelte<sup>2</sup>

$$\min_i (b_i^j - a_i^j) \geq \frac{d(R_j)}{2}. \quad (15.4)$$

Nun sei  $y_j \in \overline{R_j}$  mit  $|\det dT(y_j)| = \min_{t \in \overline{R_j}} |\det dT(t)|$ . Aus Korollar 15.1.2 folgt

$$T(R_j) \subseteq T(\overline{R_j}) \subseteq T(y_j) - dT(y_j)(y_j) + dT(y_j)(\overline{R_j}) + K_{d(\overline{R_j}) \cdot \rho_{T|_{\overline{R_j}}}(d(\overline{R_j}))}(0).$$

Wegen  $\|dT(y_j)^{-1}\| \leq M$  und  $d(R_j) = d(\overline{R_j})$  gilt

$$\begin{aligned} dT(y_j)(\overline{R_j}) + K_{d(\overline{R_j}) \cdot \rho_{T|_{\overline{R_j}}}(d(\overline{R_j}))}(0) &= dT(y_j)(\overline{R_j} + dT(y_j)^{-1}(K_{d(R_j) \cdot \rho_{T|_{\overline{R_j}}}(d(R_j))}(0))) \\ &\subseteq dT(y_j)(\overline{R_j} + K_{M \cdot d(R_j) \cdot \rho_{T|_{\overline{R_j}}}(d(R_j))}(0)), \end{aligned}$$

und somit  $T(R_j) \subseteq T(y_j) - dT(y_j)(y_j) + dT(y_j)(\overline{R_j} + K_\theta(0))$ , wobei  $\theta := M \cdot d(R_j) \cdot \rho_{T|_{\overline{R_j}}}(d(R_j))$ . Nach (14.14) gilt

$$\lambda_d(T(R_j)) \leq |\det dT(y_j)| \lambda_d(\overline{R_j} + K_\theta(0)).$$

Da  $K_\theta(0)$  eine abgeschlossene Kugel bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ist, folgt  $\overline{R_j} + K_\theta(0) =$

$$[a_1^j, b_1^j] \times \cdots \times [a_d^j, b_d^j] + [-\theta, \theta]^d = [a_1^j - \theta, b_1^j + \theta] \times \cdots \times [a_d^j - \theta, b_d^j + \theta].$$

<sup>2</sup>Dies lässt sich bewerkstelligen, indem man immer die  $[a_i^j, b_i^j)$  von maximaler Länge in zwei gleich lange Intervalle unterteilt, bis besagte Bedingung erfüllt ist.

Also (die letzte Ungleichung gilt wegen (15.4) und der Monotonie von  $\rho_{T|_{\bar{R}}}$ )

$$\begin{aligned} \lambda_d(T(R_j)) &\leq |\det dT(y_j)| \lambda_d(\overline{R_j} + K_\theta(0)) = |\det dT(y_j)| \prod_{i=1}^d (b_i^j - a_i^j + 2\theta) \\ &= |\det dT(y_j)| \prod_{i=1}^d (b_i^j - a_i^j) \prod_{i=1}^d (1 + 2M \cdot \rho_{T|_{\bar{R}}}(d(R_j)) \frac{d(R_j)}{b_i^j - a_i^j}) \\ &\leq |\det dT(y_j)| \lambda_d(R_j) (1 + 4M \cdot \rho_{T|_{\bar{R}}}(\delta))^d. \end{aligned}$$

Summieren wir über  $j$  auf, so folgt wegen der Wahl der  $y_j$

$$\begin{aligned} \lambda_d(T(R)) &\leq (1 + 4M \cdot \rho_{T|_{\bar{R}}}(\delta))^d \sum_{j=1}^n |\det dT(y_j)| \lambda_d(R_j) \\ &\leq (1 + 4M \cdot \rho_{T|_{\bar{R}}}(\delta))^d \sum_{j=1}^n \int_{R_j} |\det dT(x)| d\lambda_d(x) \\ &= (1 + 4M \cdot \rho_{T|_{\bar{R}}}(\delta))^d \int_R |\det dT(x)| d\lambda_d(x). \end{aligned}$$

Lassen wir  $\delta > 0$  gegen Null streben, so tut das wegen Korollar 15.1.2 auch  $\rho_{T|_{\bar{R}}}(\delta)$ , und wir erhalten (15.3) für  $B = R$ .

- (iv) Gemäß Lemma 14.1.3 wird  $\mathfrak{B}_d \cap X$  vom Semiring  $\mathfrak{I}_X$  aller  $d$ -dimensionalen Rechtecke  $R$  der Form (14.1) mit  $\bar{R} \subseteq X$  erzeugt.

Die beiden Mengenfunktionen links und rechts vom Gleichheitszeichen in (15.1) sind  $\sigma$ -endliche Maße auf  $\mathfrak{B}_d \cap X$ . Aus den Eindeutigkeits- und Fortsetzungssätzen, Satz 3.16, Satz 4.10 und Satz 4.13 in [K] folgt für  $B \in \mathfrak{B}_d \cap X$

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) : R_j \in \mathfrak{I}_X, j \in \mathbb{N}, \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \supseteq B \right\}.$$

Also setzt sich die Ungleichung (15.3) von den Rechtecken auf alle Borelmengen  $B \in \mathfrak{B}_d \cap X = \{C \in \mathfrak{B}_d : C \subseteq X\}$  fort.

- (v) Ist  $\lambda_d^{T^{-1}}$  das durch  $\lambda_d^{T^{-1}}(B) := \lambda((T^{-1})^{-1}(B)) = \lambda(T(B))$  definierte Maß, so besagt (15.3), dass  $\lambda_d^{T^{-1}} \leq \mu$ , wobei  $\mu(B) = \int_B |\det dT(x)| \lambda_d(x)$ . Zusammen mit Satz 14.4.7 folgt daraus für messbare Funktionen  $g \geq 0$  auf  $X$

$$\int_Y g \circ T^{-1} d\lambda_d = \int_X g d\lambda_d^{T^{-1}} \leq \int_X g d\mu = \int_X g \cdot |\det dT| d\lambda_d,$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, weil  $|\det dT(x)|$  gerade die *Radon-Nikodym Ableitung* von  $\mu$  nach  $\lambda_d$  ist; vgl. Folgerung 9.50 und Satz 11.19 in [K].

Setzen wir  $g = f \circ T$ , so folgt für alle messbaren Funktionen  $f \geq 0$  auf  $Y$

$$\int_Y f d\lambda_d \leq \int_X f \circ T \cdot |\det dT| d\lambda_d. \quad (15.5)$$



(vi) Da auch  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  ein Diffeomorphismus ist, folgt ebenso für messbare  $g \geq 0$  auf  $X$

$$\int_X g d\lambda_d \leq \int_Y g \circ T^{-1} \cdot |\det d(T^{-1})| d\lambda_d.$$

Setzen wir hier  $g(x) = f \circ T(x) \cdot |\det dT(x)|$ , so folgt wegen  $(dT(T^{-1}y))^{-1} = dT^{-1}(y)$

$$\begin{aligned} \int_X f \circ T \cdot |\det dT| d\lambda_d &\leq \\ \int_Y f \circ T(T^{-1}(y)) \cdot |\det dT(T^{-1}y)| \cdot |\det dT^{-1}(y)| d\lambda_d &= \int_Y f d\lambda_d, \end{aligned}$$

und mit (15.5) sogar (15.2) für messbare  $f \geq 0$ .

□

**15.1.4 Beispiel.** Man betrachte die *Polarkoordinaten* Darstellung von  $\mathbb{R}^2$ , also die Abbildung  $\phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\phi(r, \varphi)^T = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$ . Für auf  $\mathbb{R}^2$  integrierbare Funktionen gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot r d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (15.6)$$

Um das einzusehen, betrachte die Einschränkung

$$\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times \{0\}).$$

Diese Funktion ist augenscheinlich bijektiv, und

$$\det(d\phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Also ist  $\phi$  ein Diffeomorphismus, und nach Satz 15.1.3 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times \{0\})} f d\lambda_2 = \int_{(0, +\infty) \times (0, 2\pi)} f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot r d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (15.7)$$

Da nun aber  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times \{0\}$  bzw.

$$(\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup ([0, +\infty) \times \{0\}) \cup ([0, +\infty) \times \{2\pi\}),$$

also die Differenz der Integrationsbereiche in (15.6) und der in (15.7),  $\lambda_2$ -Nullmengen sind, folgt auch die Gültigkeit von (15.6).

**15.1.5 Beispiel.** Wir wenden (15.6) an, um  $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Also  $I = \sqrt{\pi}$ , wie wir schon in Beispiel 8.7.13 gesehen haben.

15.1.6 Beispiel. Wir wollen das Integral

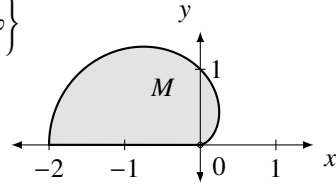
$$I = \int_M y \, d\lambda_2 \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_M \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \cdot y \, d\lambda_2 \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

berechnen, wobei  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  jene Teilmenge ist, die durch die  $x$ -Achse und durch die Kurve (Polarkoordinaten)

$$r = 1 - \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

begrenzt ist, also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in [0, \pi], \, 0 \leq r \leq 1 - \cos \varphi \right\}$$

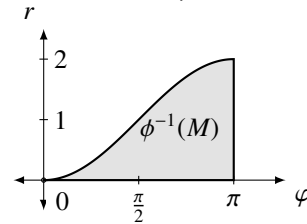


Aus (15.6) folgt

$$I = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} \mathbb{1}_M \left( \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \right) r^2 \sin \varphi \, d\lambda_2 \left( \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right).$$

Ist  $\phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\phi(r, \varphi)^T = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$  wie in Beispiel 15.1.4, so gilt  $\mathbb{1}_M(r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T = \mathbb{1}_M(\phi(r, \varphi)^T) = \mathbb{1}_{\phi^{-1}(M)}(r, \varphi)^T$ , wobei

$$\phi^{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] : \varphi \in [0, \pi], \, 0 \leq r \leq 1 - \cos \varphi \right\}$$



Also folgt mit Fubini

$$\begin{aligned} I &= \int_{\phi^{-1}(M)} r^2 \sin \varphi \, d\lambda_2 \left( \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right) = \int_0^\pi \int_0^{1-\cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{12} (1 - \cos \varphi)^4 \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

15.1.7 Beispiel. Sei  $R := [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^{n-2}$ , und sei  $T_n : R \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$T_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \sin \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \vdots \\ \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \sin \theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist  $T_n$  stetig. Ist  $(x_1, \dots, x_n)^T = T_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T$ , so gilt

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= r^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2}, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= r^2 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 &= r^2 \cos^2 \theta_{n-2} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Für  $(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$  sieht man unmittelbar, dass  $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ . Insbesondere gilt  $x_1 \neq 0$  oder  $x_2 \neq 0$ . Außerdem haben wir

$$\sin \theta_k = \frac{x_{k+2}}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{k+2}^2}} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-2, \quad (15.8)$$

sowie

$$\sin \alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (15.9)$$

Wegen  $\theta_k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $\alpha \in (0, 2\pi)$  folgt, dass  $(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T$  eindeutig durch sein Bild  $(x_1, \dots, x_n)^T$  unter  $T_n$  bestimmt ist, dh.  $T_n$  ist injektiv.

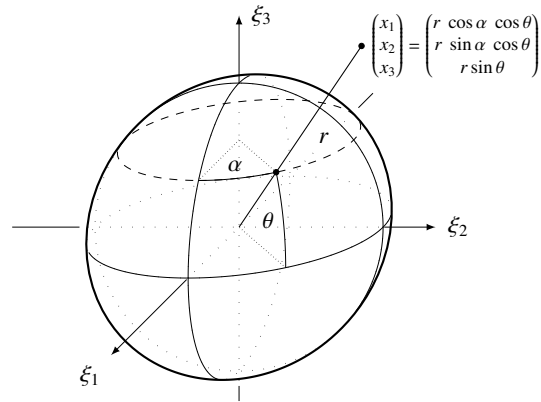
Nimmt man umgekehrt  $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  her, so ist insbesondere  $x_1 \neq 0$  oder  $x_2 \neq 0$ . Insbesondere gilt  $r := \|(x_1, \dots, x_n)^T\|_2 > 0$ . Außerdem ist  $x_{k+2}^2 < x_1^2 + \cdots + x_{k+2}^2$  für  $k = 1, \dots, n-2$ , weshalb wir  $\theta_k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  so finden, dass (15.8) erfüllt ist. Schließlich sei  $\alpha \in [0, 2\pi)$  so, dass (15.9) gilt. Wegen  $x_2 \neq 0$  oder  $x_1 < 0$  können wir  $\alpha = 0$  ausschließen.

Aus (15.8) folgt für  $k = n-2$ , dass  $r^2 \cos^2 \theta_{n-2} = r^2 - r^2 \sin^2 \theta_{n-2} = r^2 - x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2$ . Für  $k = n-3$  folgt

$$r^2 \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2} = (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2) \left( 1 - \frac{x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \right) = x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2,$$

usw. bis  $k = 1$ , wofür wir  $x_1^2 + x_2^2 = r^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2}$  erhalten. Kombinieren wir das mit (15.9) und (15.8), so sehen wir, dass  $T_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

Somit ist  $T_n : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  bijektiv. Man nennt  $(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T$  auch die  $n$ -dimensionalen Kugelkoordinaten von  $(x_1, \dots, x_n)^T$ .

Abbildung 15.1: Veranschaulichung der Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ 

Nun wollen wir  $\det dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  berechnen. Wir werden induktiv zeigen, dass für alle  $n \geq 2$

$$\det dT_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{n-2} \theta_{n-2}. \quad (15.10)$$

Für  $n = 2$  wissen wir aus Beispiel 15.1.4, dass  $\det dT_2(r, \alpha) = r$ . Sei also  $n \geq 3$  und angenommen wir wissen, dass (15.10) für  $n - 1$  statt  $n$  richtig ist. Zunächst gilt

$$T_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = \cos \theta_{n-2} \cdot (\iota_{n-1} \circ T_{n-1} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \sin \theta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist  $\iota_{n-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Einbettung  $(x_1, \dots, x_{n-1})^T \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)^T$ . Somit stimmt die linke obere  $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von  $dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  mit  $\cos \theta_{n-2} \cdot dT_{n-1}(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-3})$  überein.

Nun rechnet man leicht nach, dass (beachte  $\cos \theta_{n-2} > 0$ )

$$\frac{\partial T_n}{\partial \theta_{n-2}} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} + r \frac{\sin \theta_{n-2}}{\cos \theta_{n-2}} \cdot \frac{\partial T_n}{\partial r} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \cos \theta_{n-2} + r \frac{\sin^2 \theta_{n-2}}{\cos \theta_{n-2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{r}{\cos \theta_{n-2}} \end{pmatrix}. \quad (15.11)$$

Da die Determinante gleich bleibt, wenn man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen addiert, ist  $\det dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \det C$ , wobei  $C$  mit  $dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  die

ersten  $n - 1$  Spalten gemeinsam und in der letzten Spalte den Vektor (15.11) stehen hat. Entwickeln wir  $\det C$  nach der letzten Spalte, so erhalten wir

$$\det dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \frac{r}{\cos \theta_{n-2}} \cdot \cos^{n-1} \theta_{n-2} \cdot dT_{n-1}(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} \det dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) &= r \cdot \cos^{n-2} \theta_{n-2} \cdot r^{n-2} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{n-3} \theta_{n-3} \\ &= r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{n-2} \theta_{n-2}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  immer regulär. Aus Bemerkung 13.2.5 wissen wir, dass dann  $T_n : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  ein Diffeomorphismus ist.

Da  $\mathbb{R}^n \setminus (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$  in einer endlichen Vereinigung von echten affinen Unterräumen von  $\mathbb{R}^n$  enthalten ist, hat diese Menge  $\lambda_n$ -Maß Null. Aus dem selben Grund gilt  $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}) = 0$ . Somit folgt aus Satz 15.1.3, dass für ein messbares  $f$  definiert aus  $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_R (f \circ T_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix}) \cdot r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{n-2} \theta_{n-2} d\lambda_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (15.12)$$

**15.1.8 Beispiel.** Wir wollen das Volumen  $I$  folgenden Achtels  $M$  der Kugel mit Radius  $a > 0$  ausrechnen:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

Mit (15.12) folgt wegen  $\mathbb{1}_M \circ T_3 = \mathbb{1}_{T_3^{-1}(M)}$

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_M d\lambda_3 = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \mathbb{1}_{T_3^{-1}(M)} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix} r^2 \cos \theta d\lambda_3 \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$T_3^{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix} \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : r \in [0, a], \alpha, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\},$$

und daher (vgl. Beispiel 14.4.6)

$$I = \int_{[0, a] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} r^2 \cos \theta d\lambda_3 \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2} \left( \int_0^a r^2 dr \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{a^3}{3} \right) 1 = \frac{\pi a^3}{6}.$$

**15.1.9 Beispiel.** Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b < +\infty$ , wollen wir das Integral

$$I = \int_{\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2 - y^2)^2} e^{4x^2 y^2} (x^2 + y^2) d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

berechnen. Dazu könnten wir auf Polarkoordinaten transformieren und dann elementar rechnen. Um die Transformationsregel auch für Diffeomorphismen  $T$  zu üben, die nicht der Transformation auf Polarkoordinaten entspricht, wählen wir einen anderen Zugang.

Wir schreiben  $I$  als<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} I &= \int_{\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \int_{\{y>0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \int_{\{y<0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit affinen Abbildung  $T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$  folgt aus der Transformationsregel, Korollar 14.4.8, dass die beiden Integral übereinstimmen, also

$$\frac{I}{2} = \int_M e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei  $M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y > 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ . Setzen wir

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

so gilt  $h \circ F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2}$ . Außerdem rechnet man leicht nach, dass

$$dF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

und daher  $\det dF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2)$ . Damit hat man

$$\frac{I}{2} = \frac{1}{4} \int_M h \circ F \cdot |\det dF(\cdot)| d\lambda_2.$$

$F$  ist zwar auf  $\mathbb{R}^2$  kein Diffeomorphismus, es ist dort nicht injektiv, schränkt man es aber auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  ein, so ist  $F$  doch injektiv und

$$F(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\}.$$

Um das einzusehen, sei zunächst bemerkt, dass wenn  $F((x, y)^T) = (u, 0)^T$  für ein  $u \in \mathbb{R}$ , sicherlich  $x = 0$  oder  $y = 0$ . Für  $(x, y)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  folgt somit  $x = 0$ , woraus  $u = -y^2 < 0$  folgt. Also kann  $F((x, y)^T)$  nicht in  $[0, +\infty) \times \{0\}$  liegen. Die Funktion  $G : \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u}} \\ \sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u} \end{pmatrix}$$

ist wegen  $\sqrt{u^2+v^2}-u > 0$  wohldefiniert, und erfüllt  $G(\mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Zudem gilt  $F \circ G((u, v)^T) = (u, v)^T$  und  $G \circ F((x, y)^T) = (x, y)^T$ .

<sup>3</sup>Der Integrationsbereich wurde nur um eine  $\lambda_2$ -Nullmenge verkleinert

Also ist  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\}$  bijektiv mit der Inversen  $G^4$ . Nach Bemerkung 13.2.5 ist diese Abbildung sogar ein Diffeomorphismus.

Wegen  $M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  gilt auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  sicher  $\mathbb{1}_M = \mathbb{1}_{F(M)} \circ F$ , und daher

$$\frac{I}{2} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\mathbb{1}_{F(M)} \cdot h) \circ F \cdot |\det dF(\cdot)| d\lambda_2, \quad (15.13)$$

wobei wegen  $\|F((x, y)^T)\|_2 = \|(x, y)^T\|_2^2$

$$F(M) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\} : a^4 \leq u^2 + v^2 \leq b^4 \right\}.$$

Nach der Transformationsregel (15.2) (in der Richtung von rechts nach links verwendet) folgt

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\}} \mathbb{1}_{F(M)} \cdot h d\lambda_2 = \frac{1}{4} \int_{F(M)} e^{u^2+v^2} d\lambda_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \int_{[a^2, b^2] \times [0, 2\pi]} e^{r^2} r d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\pi}{4} (e^{b^4} - e^{a^4}), \end{aligned}$$

und somit  $I = \frac{\pi}{2} (e^{b^4} - e^{a^4})$ .

Starten wir nochmals mit (15.13) und wenden die Transformationsregel (15.2) (in der Richtung von links nach rechts) auf  $G : \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , so erhält man

$$\frac{I}{2} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\}} (\mathbb{1}_{F(M)} \cdot h) \circ F \circ G \cdot |\det dF(G(\cdot))| \cdot |\det dG(\cdot)| d\lambda_2.$$

Da wegen der Kettenregel  $dF(G(\cdot))dG(\cdot) = I$ , folgt wieder

$$\frac{I}{2} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \times \{0\}} \mathbb{1}_{F(M)} \cdot h d\lambda_2.$$

## 15.2 $C^1$ -Bilder von Nullmengen\*

Es sei daran erinnert, dass für metrische Räume  $\langle X, d \rangle$ ,  $\langle Y, d \rangle$  und  $D \subseteq X$  eine Abbildung  $f : D \rightarrow Y$  Lipschitz stetig mit Konstante  $C \geq 0$  heißt, falls

$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in D$$

gilt. Für  $z \in B \subseteq D$  gilt dann

$$f(B) \subseteq K_{C \cdot d(B)}(f(z)), \quad (15.14)$$

wobei  $d(B) = \sup_{x, y \in B} d(x, y)$  den Durchmesser von  $B$  bezeichnet.

**15.2.1 Lemma.** Ist für  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lipschitz stetig, so ist  $f(A)$  eine Lebesgue-Nullmenge für jede Lebesgue-Nullmenge  $A \subseteq D$  ist.

<sup>4</sup>Eine andere Art und Weise das einzusehen, ist  $\mathbb{R}^2$  als  $\mathbb{C}$  zu betrachten. Dann entspricht der Funktion  $F$  genau die Funktion  $z \mapsto z^2$ .

*Beweis.* Gemäß Folgerung 4.22 in [K] gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  abzählbar viele  $d$ -dimensionale halboffene Rechtecke  $R_j$  mit  $A \subseteq \bigcup_j R_j$  mit  $\sum_j \lambda_d(R_j) \leq \epsilon$ . Durch Unterteilen der Seiten können wir bewerkstelligen, dass die maximale Seitenlänge  $d(R_j)$  von  $R_j$  kleiner oder gleich zwei mal die minimale Seitenlänge von  $R_j$  ist; vgl. Beweis von Satz 15.1.3, Punkt 3. Somit gilt

$$\frac{d(R_j)^d}{2^d} \leq \lambda_d(R_j) \leq d(R_j)^d.$$

Bezeichnet  $C$  die Lipschitz Konstante von  $f$ , so schließen wir aus (15.14) angewandt auf die von  $\|\cdot\|_\infty$  induzierte Metrik, dass  $f(R_j) \subseteq y_j + [-C \cdot d(R_j), C \cdot d(R_j)]^d$  für ein  $y_j \in R_j$ . Da das von  $\lambda_d$  auf der Potenzmenge von  $\mathbb{R}$  induzierte äußere Maß  $\lambda^*$  monoton und  $\sigma$ -subadditiv ist, folgt

$$\begin{aligned} \lambda^*(f(A)) &\leq \lambda^*\left(\bigcup_j y_j + [-C \cdot d(R_j), C \cdot d(R_j)]^d\right) \leq \sum_j \lambda_d(y_j + [-C \cdot d(R_j), C \cdot d(R_j)]^d) \\ &= \sum_j 2^d C^d d(R_j)^d \leq 4^d C^d \sum_j \lambda_d(R_j) \leq 4^d C^d \epsilon. \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lambda^*(f(A)) = 0$ . □

**15.2.2 Bemerkung.** Sei  $\mathbb{R}^d$  mit irgendeiner Norm  $\|\cdot\|$  versehen. Dann lässt sich jedes offene  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  als Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Kugeln  $K_\epsilon^{\|\cdot\|}(x)$  schreiben.

In der Tat gibt es zu jedem  $x \in D$  ein  $\epsilon_x > 0$  mit  $K_{\epsilon_x}^{\|\cdot\|}(x) \subseteq D$ . Wir wenden das unten stehende Lemma 15.6.3 auf  $D$  und seine offene Überdeckung  $U_{\epsilon_x}^{\|\cdot\|}(x)$ ,  $x \in D$  an, und sehen

$$D = \bigcup_{x \in M} U_{\epsilon_x}^{\|\cdot\|}(x) \subseteq \bigcup_{x \in M} K_{\epsilon_x}^{\|\cdot\|}(x) \subseteq D,$$

für eine gewisse abzählbare Teilmenge  $M \subseteq D$ .

**15.2.3 Korollar.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar. Dann ist  $f(A)$  eine Lebesgue-Nullmenge, falls  $A$  eine Lebesgue-Nullmenge ist.

*Beweis.* Wir schreiben  $D$  als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Kugeln  $K_\epsilon^{\|\cdot\|}(x)$ ; vgl. Bemerkung 15.2.2. Da diese Kugeln konvex sind, folgt aus Korollar 10.1.24 zusammen mit der durch die Kompaktheit von  $K_\epsilon(x) := K_\epsilon^{\|\cdot\|}(x)$  bedingte Tatsache  $\sup_{y \in K_\epsilon(x)} \|df(y)\| < +\infty$ , dass  $f$  auf  $K_\epsilon(x)$  Lipschitz stetig ist. Nach Lemma 15.2.1 gilt  $\lambda^*(f(A \cap K_\epsilon(x))) = 0$ , und infolge

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(\bigcup f(A \cap K_\epsilon(x))\right) \leq \sum \lambda^*(f(A \cap K_\epsilon(x))) = 0.$$

□

### 15.3 Satz von Sard\*

Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar, so lässt sich wegen des Umkehrsatzes die Transformationsregel zumindest lokal bei jedem  $x \in D$  mit  $\text{rang } df(x) = d$  anwenden. Um über die Punkte  $x \in D$ , die das nicht erfüllen, etwas auszusagen, kann man folgenden Satz verwenden.



**15.3.1 Satz** (von Sard). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar. Weiters seien  $M \subseteq D$  die Menge der kritischen Punkte, also

$$M := \{x \in D : \text{rang } df(x) < d\}.$$

Dann ist die Menge  $f(M)$  der kritischen Werte eine Lebesgue-Nullmenge.

*Beweis.* Gemäß Bemerkung 15.2.2 lässt sich  $D$  als Vereinigung von abzählbar vielen Mengen der Form  $K_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x)$  schreiben. Somit reicht es,  $\lambda^*(f(K \cap M)) = 0$  für ein beliebiges  $K = z + [-\eta, +\eta]^d \subseteq D$  mit  $\eta > 0$  zu zeigen.

Wir setzen zunächst  $M := \sup_{u \in K} \|df(u)\| < +\infty$ , wobei wir hier die von Abbildungsnorm meinen, die wir erhalten, wenn wir  $\mathbb{R}^d$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  versehen. Nun zerlegen wir  $K$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  in  $n^d$ -viele kleinere Quader

$$K = \bigcup_{k_1, \dots, k_d \in \{1, \dots, n\}} z + \underbrace{\bigotimes_{j=1}^d [-\eta + 2\eta \frac{k_j - 1}{n}, -\eta + 2\eta \frac{k_j}{n}]}_{=: K_{k_1, \dots, k_d}}.$$

Gilt  $K_{k_1, \dots, k_d} \cap M \neq \emptyset$ , und ist  $y$  in diesem Schnitt, so folgt aus Korollar 15.1.2 wegen  $d(K_{k_1, \dots, k_d}) = \frac{2\eta}{n}$

$$f(K_{k_1, \dots, k_d}) \subseteq f(y) + df(y)(K_{k_1, \dots, k_d} - y) + K_{\frac{2\eta}{n} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0),$$

wobei  $\lim_{\gamma \rightarrow 0+} \rho_{f|_K}(\gamma) = 0$ . Wegen  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \dim(\mathbb{R}^d) \cdot \|\cdot\|_\infty$  gilt dabei

$$K_{\frac{2\eta}{n} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0) \subseteq K_{d \cdot \frac{2\eta}{n} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_2}(0) \subseteq K_{d \cdot \frac{2\eta}{n} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0).$$

Kugeln um 0 bzgl.  $\|\cdot\|_2$  sind invariant unter orthogonalen linearen Abbildungen, also unter  $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $UU^T = U^T U = I$ . Es folgt

$$Uf(K_{k_1, \dots, k_d}) \subseteq Uf(y) + Udf(y)(K_{k_1, \dots, k_d} - y) + K_{d \cdot \frac{2\eta}{n} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0)$$

für jedes orthogonale  $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Da  $df(y)$  nicht vollen Rang hat, gibt es ein orthogonales  $U$  mit  $\text{ran } Udf(y) \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^d$ . Zusammen mit<sup>5</sup>  $\|Udf(y)\| \leq \|U\| \|df(y)\| \leq dM$  erhalten wir für  $v := z - y + (-\eta + \eta \frac{2k_j - 1}{n})_{j=1}^d$

$$\begin{aligned} Udf(y)(K_{k_1, \dots, k_d} - y) &= Udf(y)v + Udf(y)([-\eta \frac{1}{n}, \eta \frac{1}{n}]^d) \\ &\subseteq Udf(y)v + [-dM \frac{2\eta}{n}, dM \frac{2\eta}{n}]^{d-1} \times \{0\}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} Uf(K_{k_1, \dots, k_d}) &\subseteq Uf(y) + Udf(y)v + \\ &\quad d \frac{2\eta}{n} \cdot \left( [-M - \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}), M + \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n})]^{d-1} \times [-\rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}), \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n})] \right). \end{aligned}$$

Da  $\lambda_d$  invariant unter  $U$  ist, folgt

$$\lambda_d^*(f(K_{k_1, \dots, k_d})) \leq d^d 4^d \eta^d \frac{1}{n^d} (M + \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}))^{d-1} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}).$$

<sup>5</sup>Für die zu  $\|\cdot\|_\infty$  gehörige Abbildungsnorm gilt  $\|U\| \leq d$ .

Summieren wir über alle  $k_1, \dots, k_d \in \{1, \dots, n\}$  mit  $K_{k_1, \dots, k_d} \cap M \neq \emptyset$  – also über höchstens  $n^d$  Summanden, so folgt

$$\begin{aligned} \lambda^*(f(K \cap M)) &\leq n^d \cdot d^d 4^d \eta^d \frac{1}{n^d} (M + \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}))^{d-1} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}) \\ &= d^d 4^d \eta^d (M + \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}))^{d-1} \cdot \rho_{f|_K}(\frac{2\eta}{n}). \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht dieser Ausdruck gegen Null.  $\square$

## 15.4 Fixpunktsatz von Brouwer\*

Mit Hilfe der Transformationsregel können wir einen analytischen Beweis des fundamentalen Fixpunktsatzes von Brouwer angeben. Andere Beweise verwenden Methoden aus der diskreten Mathematik oder aus der algebraischen Topologie. Im Folgenden sei  $S^d$  die Einheitskugel  $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\|_2 = 1\}$  im  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Außerdem sind alle offenen bzw. abgeschlossenen Kugeln bzgl. der  $\|\cdot\|_2$ -Norm am  $\mathbb{R}^{d+1}$  gemeint

**15.4.1 Proposition.** *Es gibt keine stetig differenzierbare Funktion  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  mit offenem  $O \supseteq K_1(0)$  ( $\subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ) so, dass  $g(O) \subseteq S^d$  und  $g|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$ .*

*Beweis.*

$\rightsquigarrow$  Angenommen es gäbe ein stetig differenzierbares  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  mit  $g|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$  und  $g(O) \subseteq S^d$ , wobei  $O \supseteq K_1(0)$  offen ist und es infolge ein  $\eta > 1$  derart gibt, dass sogar  $O \supseteq K_\eta(0) \supseteq K_1(0)$ .

$\rightsquigarrow$  Für  $t \geq 0$  betrachte die Funktion ( $x \in O$ )

$$h_t(x) := x + tg(x),$$

welche  $O$  nach  $\mathbb{R}^{d+1}$  hinein abbildet. Zudem ist  $h_t$  stetig differenzierbar, wobei

$$dh_t(x) = I + t dg(x).$$

Da für  $t \|dg(x)\| < 1$  die entsprechende *Neumannsche Reihe* aus Beispiel 9.3.6 konvergiert, ist  $dh_t(x)$  für solche  $t$  invertierbar. Wegen der Stetigkeit von  $z \mapsto \|dg(z)\|$  auf der kompakten Menge  $K_\eta(0)$ , gilt  $C := \sup_{\|z\|_2 \leq \eta} \|dg(z)\| < +\infty$ , und für  $0 \leq t < \frac{1}{C}$  und  $\|x\|_2 \leq \eta$  ist  $dh_t(x)$  invertierbar.

Da für ein festes  $x \in K_\eta(0)$  die Funktion  $t \mapsto \det dh_t(x)$  stetig ist und auf  $[0, \frac{1}{C})$  nicht verschwindet, muss sie darauf immer dasselbe Vorzeichen haben. Wegen  $\det dh_0(x) = 1$  folgt  $\det dh_t(x) > 0$  für alle  $t \in [0, \frac{1}{C})$ .

$\rightsquigarrow$  Für  $0 \leq t < \frac{1}{C}$  ist  $h_t|_{K_\eta(0)}$  injektiv. In der Tat, folgt aus  $h_t(x) = h_t(y)$  mit  $x, y \in K_\eta(0)$ , dass

$$x - y + t(g(x) - g(y)) = h_t(x) - h_t(y) = 0,$$

und somit  $x - y = -t(g(x) - g(y))$ . Andererseits folgt aus Korollar 10.1.24

$$\|g(x) - g(y)\|_2 \leq \sup_{\|z\|_2 \leq \eta} \|dg(z)\| \|x - y\|_2.$$

Infolge erhalten wir

$$\|x - y\|_2 = t \|g(x) - g(y)\|_2 \leq t \sup_{\|z\|_2 \leq \eta} \|dg(z)\| \|x - y\|_2,$$

was wegen  $tC < 1$  die Beziehung  $x = y$  nach sich zieht.

↪ Wir behaupten nun, dass  $h_t(U_1(0)) = U_{1+t}(0)$  für jedes  $0 \leq t < \frac{1}{c}$ . In der Tat folgt aus  $\|x\|_2 < 1$

$$\|h_t(x)\|_2 \leq \|x\|_2 + t\|g(x)\|_2 < 1 + t,$$

also gilt  $A := h_t(U_1(0)) \subseteq U_{1+t}(0)$ , wobei diese Teilmenge  $A$  von  $U_{1+t}(0)$  nichtleer und wegen Korollar 13.2.3 – es ist ja  $dh_t(x)$  für  $\|x\|_2 \leq 1 (< \eta)$  invertierbar – offen ist. Setzen wir  $B := U_{1+t}(0) \setminus h_t(U_1(0))$ , so gilt  $U_{1+t}(0) = A \dot{\cup} B$ . Außerdem gilt

$$\overline{B} \cap A \subseteq (\mathbb{R}^{d+1} \setminus A) \cap A = \emptyset,$$

da  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus A$  ja abgeschlossen in  $\mathbb{R}^{d+1}$  ist.

Andererseits gilt  $A \subseteq h_t(K_1(0))$ , wobei die rechte Menge als stetiges Bild einer kompakten Menge selber kompakt und daher in  $\mathbb{R}^{d+1}$  abgeschlossen ist. Also folgt

$$\overline{A} \cap B \subseteq h_t(K_1(0)) \cap B.$$

Ein  $y$  aus der linken Seite muss daher  $y = h_t(x) \in B$  für ein  $x \in K_1(0)$  erfüllen. Aus  $\|x\|_2 = 1$  würde  $y = h_t(x) = x + t \operatorname{id}|_{S^d}(x) = (1+t)x \notin U_{1+t}(0)$  folgen, was wegen  $B \subseteq U_{1+t}(0)$  unmöglich ist. Also muss  $\|x\|_2 < 1$ , und daher  $y = h_t(x) \in h_t(U_1(0)) \cap B = A \cap B = \emptyset$ , was ebenfalls unmöglich ist. Wir schließen somit auf  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ .

Da  $U_{1+t}(0)$  aber zusammenhängend ist, muss  $U_{1+t}(0) = A$ .

↪ Nach dem bisher gezeigten ist für jedes  $t \in [0, \frac{1}{c})$  die Abbildung  $h_t : U_1(0) \rightarrow U_{1+t}(0)$  eine stetig differenzierbare Bijektion mit regulärem  $dh_t(x)$ ,  $x \in U_1(0)$  – also ein Diffeomorphismus. Aus der Transformationsregel folgt

$$\lambda_{d+1}(U_{1+t}(0)) = \int_{U_1(0)} \det dh_t(x) d\lambda_{d+1}(x),$$

wobei man mit Hilfe der Formel zur Determinantenberechnung unmittelbar erkennt, dass

$$\det dh_t(x) = \det(I + t dg(x)) = \det dg(x) t^{d+1} + \beta_d(x) t^d + \cdots + \beta_1(x) t + 1,$$

für gewisse stetige reellwertige  $\beta_j : U_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir erhalten also

$$\begin{aligned} (1+t)^{d+1} \lambda_{d+1}(U_1(0)) &= \lambda_{d+1}(U_{1+t}(0)) = t^{d+1} \int_{U_1(0)} \det dg(x) d\lambda_{d+1}(x) + \\ &+ t^d \int_{U_1(0)} \beta_d(x) d\lambda_{d+1}(x) + \cdots + t \int_{U_1(0)} \beta_1(x) d\lambda_{d+1}(x) + \lambda_{d+1}(U_1(0)). \end{aligned}$$

Diese Gleichheit muss zumindest für alle  $t \in [0, \frac{1}{c})$  gelten. Da ein Polynom  $p(t)$  eindeutig durch die Polynomfunktion  $p|_{[0, \frac{1}{c})}$  bestimmt ist, müssen die Koeffizienten von  $t^{d+1}$  übereinstimmen. Also gilt

$$0 \neq \lambda_{d+1}(U_1(0)) = \int_{U_1(0)} \det dg(x) d\lambda_{d+1}(x). \quad (15.15)$$

↗ Andererseits folgt für die auf  $\mathbb{R}^{d+1}$  stetig differenzierbare Funktion  $h(x) = \|x\|_2^2$  aus  $g(O) \subseteq S^d$  mit Hilfe der Kettenregel

$$0 = d(h \circ g)(x) = dh(g(x)) dg(x) = 2g(x)^T dg(x).$$

Insbesondere kann  $dg(x)$  für kein  $x \in U_1(0)$  regulär sein. Also gilt  $\det dg(x) = 0$  im Widerspruch zu (15.15). □

**15.4.2 Korollar.** *Es gibt keine stetige Funktion  $h : K_1(0) \rightarrow S^d$  mit  $h|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$ .*

*Beweis.* Angenommen es gäbe eine solche Funktion schon, so könnten wir  $h$  auf ganz  $\mathbb{R}^{d+1}$  fortsetzen, indem wir  $h(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$  für  $\|x\|_2 > 1$  setzen. Wegen

$$\mathbb{R}^{d+1} = K_1(0) \cup (\mathbb{R}^{d+1} \setminus U_1(0))$$

und da  $h$  auf diesen beiden abgeschlossenen Teilmengen stetig ist, folgt die Stetigkeit von  $h$  auf  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Da die reellen Polynome in den Variablen  $(x_1, \dots, x_{d+1})^T = x$  eingeschränkt auf  $K_2(0)$  eine nirgends verschwindende und punkt-trennende Algebra in  $C(K_2(0))$  bilden, folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrass, Satz 12.15.6, dass es zu jedem  $\epsilon > 0$  derartige Polynome  $p_1, \dots, p_{d+1}$  mit

$$\|h_j - p_j\|_{K_2(0), \infty} < \epsilon \quad \text{für } j = 1, \dots, d+1,$$

gibt. Wählen wir  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, und setzen wir

$$p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_{d+1}(x) \end{pmatrix},$$

so folgt  $\sup_{\|x\|_2 \leq 2} \|h(x) - p(x)\|_2 < \frac{1}{2}$ .

Nun sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar derart, dass  $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$ , dass  $\varphi((-\infty, \frac{9}{4}]) = \{0\}$  und dass  $\varphi([4, +\infty)) = \{1\}$ ; siehe Beispiel 14.5.4. Die Funktion

$$r(x) = \varphi(\|x\|_2^2)h(x) + (1 - \varphi(\|x\|_2^2))p(x)$$

definiert auf  $\mathbb{R}^{d+1}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^{d+1}$  ist überall stetig differenzierbar, da für  $x \in U_{\frac{3}{2}}(0) \supseteq K_1(0)$  der Ausdruck  $r(x)$  mit  $p(x)$  übereinstimmt, und da auf  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus K_1(0)$  alle auftretenden Funktionen stetig differenzierbar sind.

Auf  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus K_2(0)$  gilt zudem  $r(x) = h(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ , und für  $x \in K_2(0)$  folgt

$$\begin{aligned} \|r(x)\|_2 &= \|h(x) - (1 - \varphi(\|x\|_2^2))(h(x) - p(x))\|_2 \\ &\geq \|h(x)\|_2 - (1 - \varphi(\|x\|_2^2))\|h(x) - p(x)\|_2 \geq 1 - \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Somit gilt  $r(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Infolge ist auch  $(x \in \mathbb{R}^{d+1})$

$$g(x) = \frac{r(2x)}{\|r(2x)\|_2}$$

eine überall stetig differenzierbare Funktion mit Werten in  $S^d$  so, dass für  $x \in S^d$  wegen  $r(2x) = h(2x) = x$

$$g(x) = \frac{r(2x)}{\|r(2x)\|_2} = x.$$

Gemäß Proposition 15.4.1 kann es aber kein solches  $g$  geben. □

**15.4.3 Bemerkung.** Ist  $E \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  kompakt, so gibt es wegen der Stetigkeit von  $y \mapsto \|x - y\|_2$  zu jedem  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  ein  $x_E \in E$  mit  $\|x - x_E\|_2 = d(x, E)$ ; vgl. (14.31).

Ist  $E$  auch konvex, so ist  $x_E$  eindeutig durch  $x$  bestimmt, da für ein weiteres  $z \in E$  mit  $\|x - z\|_2 = d(x, E)$  sicherlich  $\frac{1}{2}(x_E + z) \in E$  und somit  $\|x_E + z - 2x\|_2 \geq 2d(x, E)$ . Aus der Parallelogrammregel<sup>6</sup> folgt

$$\|x_E + z - 2x\|_2^2 + \|x_E - z\|_2^2 = 2\|z - x\|_2^2 + 2\|x_E - x\|_2^2 = 4d(x, E)^2,$$

also  $\|x_E - z\|_2 = 0$ .

Schließlich ist  $r : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow E$  definiert durch  $r(x) := x_E$  stetig, denn konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ , und ist  $y \in E$  ein Häufungspunkt der Folge  $(r(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , also  $r(x_{n(j)}) \rightarrow y$ ,  $j \rightarrow \infty$  für eine Teilfolge  $(r(x_{n(j)}))_{j \in \mathbb{N}}$ , so folgt aus

$$\|x - y\|_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n(j)} - r(x_{n(j)})\|_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n(j)}, E) = d(x, E)$$

zusammen mit der Eindeutigkeit von  $r(x)$  mit  $\|x - r(x)\|_2 = d(x, E)$ , dass  $r(x) = y$ . Wegen Lemma 5.2.11 erhalten wir  $r(x_n) \rightarrow r(x)$ .

**15.4.4 Satz (Fixpunktsatz von Brouwer).** Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  kompakt und konvex mit  $d \geq 0$ . Jede stetige Funktion  $f : E \rightarrow E$  hat dann einen Fixpunkt, dh. es gibt ein  $x \in E$  mit  $f(x) = x$ .

*Beweis.* Da  $E$  insbesondere beschränkt ist, gilt  $E \subseteq U_\eta(0)$  für ein  $\eta > 0$ . Betrachten wir  $\frac{1}{\eta}E$  und  $x \mapsto \frac{1}{\eta}f(\eta x)$  anstelle von  $E$  und  $f$ , so können wir oBdA.  $E \subseteq U_1(0)$  annehmen. Indem wir nötigenfalls  $E$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{d+1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{d+2}$  betrachten, können wir auch  $d > 0$  annehmen.

Wir nehmen nun an, dass es ein stetiges  $f : E \rightarrow E$  ohne Fixpunkt gibt. Ist  $r(x)$  definiert wie in Bemerkung 15.4.3, so ist die Funktion  $(x \in K_1(0))$

$$f \circ r : x \mapsto f(r(x))$$

stetig und hat Werte in  $E \subseteq K_1(0)$ . Außerdem hat  $f \circ r$  keinen Fixpunkt, da dieser in  $E$  liegen müsste und damit ein Fixpunkt von  $f$  wäre. Also gilt  $f(r(x)) - x \neq 0$  für alle  $x \in K_1(0)$ . Infolge gibt es für alle  $x \in K_1(0)$  ein eindeutiges  $\theta(x) \in (0, +\infty)$  mit

$$f(r(x)) + \theta(x)(x - f(r(x))) \in S^d.$$

$\theta(x)$  ist die positive Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \|f(r(x))\|_2^2 - 2\theta(f(r(x)), f(r(x)) - x) + \theta^2\|x - f(r(x))\|_2^2 = \\ \|f(r(x)) + \theta(x - f(r(x)))\|_2^2 = 1; \end{aligned}$$

also

$$\theta(x) = \frac{(f(r(x)), f(r(x)) - x)}{\|x - f(r(x))\|_2^2} + \sqrt{\frac{(f(r(x)), f(r(x)) - x)^2}{\|x - f(r(x))\|_2^4} + \frac{1 - \|f(r(x))\|_2^2}{\|x - f(r(x))\|_2^2}}.$$

Somit ist die Funktion  $h(x) := f(r(x)) + \theta(x)(x - f(r(x)))$  stetig. Außerdem bildet  $h$  die Menge  $K_1(0)$  nach  $S^d$  hinein ab. Dabei gilt  $\theta(x) = 1$  und damit  $h(x) = x$  für  $\|x\|_2 = 1$ . Gemäß Korollar 15.4.2 gibt es aber kein solches  $h$ .  $\square$

<sup>6</sup>Für  $a, b \in \mathbb{R}^m$  gilt  $\|a + b\|_2^2 + \|a - b\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|b\|_2^2$ , wie man leicht mit Hilfe des Euklidischen Skalarproduktes zeigen kann.

## 15.5 Die Invariansätze von Brouwer\*

Als wichtigstes Ergebnis zeigen wir in diesem Abschnitt, dass offene Teilmengen  $O \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  nur dann homöomorph sein können, wenn  $m = n$ .

Wir starten zunächst mit einer stetigen und injektiven Abbildung  $f : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $K_1(0)$  die abgeschlossene Kugel mit Radius 1 um den Ursprung in  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Da diese Menge kompakt ist, folgt aus Korollar 12.11.10, dass  $f : K_1(0) \rightarrow f(K_1(0))$  ein Homöomorphismus ist, wenn wir Definitions- und Zielmenge mit der Spurtopologie versehen. Insbesondere ist  $f^{-1} : f(K_1(0)) \rightarrow K_1(0)$  stetig. Mit dem Fortsetzungssatz von Tietze Satz 12.10.3 finden wir komponentenweise eine stetige Fortsetzung  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $f^{-1}$ . Die Abbildung  $G$  eingeschränkt auf  $f(K_1(0))$  hat genau eine Nullstelle, nämlich bei  $f(0)$ .

**15.5.1 Lemma.** Sei  $f : K_1(0) \rightarrow f(K_1(0))$  stetig und injektiv und  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Fortsetzung von  $f^{-1} : f(K_1(0)) \rightarrow K_1(0)$ . Weiters sei  $H : f(K_1(0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion mit

$$\|G(y) - H(y)\|_2 \leq 1 \text{ für alle } y \in f(K_1(0)).$$

Dann hat  $H$  mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein  $y \in f(K_1(0))$  mit  $H(y) = 0$ .

*Beweis.* Betrachte die stetige Funktion  $\psi : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\psi(x) := x - H(f(x)) = G(f(x)) - H(f(x)).$$

Nach Voraussetzung gilt  $\|G(y) - H(y)\|_2 \leq 1$  für  $y \in f(K_1(0))$ . Also ist  $\psi(x)$  eine stetige Abbildung von  $K_1(0)$  nach  $K_1(0)$ . Nach Satz 15.4.4 hat  $\psi(x)$  einen Fixpunkt  $x_0$ , womit

$$x_0 = \psi(x_0) = x_0 - H(f(x_0)).$$

Also gilt  $H(y) = 0$  für  $y = f(x_0)$ . □

**15.5.2 Lemma.** Sei  $Y = Y_1 \cup Y_2 \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $Y_1$  kompakt und  $Y_2$  eine Lebesgue-Nullmenge. Weiters sei  $G : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion mit  $G(y) \neq 0$  für  $y \in Y_1$ . Dann existiert zu jedem  $\delta > 0$  eine stetige Funktion  $Q : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  derart, dass

$$\|G(y) - Q(y)\|_\infty < \delta$$

und  $Q(y) \neq 0$  für alle  $y \in Y$  gilt.

*Beweis.* Wähle  $\eta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < 2\eta < \delta$  mit

$$G(Y_1) \cap U_{2\eta}(0) = \emptyset.$$

Das ist möglich, weil  $0 \notin G(Y_1)$ ,  $Y_1$  kompakt und  $G$  stetig ist. Da  $Y$  kompakt ist, finden wir mit Satz 12.15.6 Polynome in  $n$ -Veränderlichen  $P_1, \dots, P_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|G(y) - P(y)\|_\infty < \frac{\eta}{n} \text{ für alle } y \in Y,$$

wobei  $P = (P_1, \dots, P_n)^T : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist. Nach Korollar 15.2.3 ist  $P(Y_2)$  eine Nullmenge. Somit existiert ein  $d \in U_\eta(0) \setminus P(Y_2)$ . Für das verschobene Polynom

$$Q(y) := P(y) - d$$

gilt  $Q(y) = 0$  genau dann, wenn  $d = P(y)$ , womit  $0 \notin Q(Y_2)$ . Für  $y \in Y_1$  gilt

$$\begin{aligned} \|G(y) - Q(y)\|_2 &= \|G(y) - P(y) + d\|_2 \leq \|G(y) - P(y)\|_2 + \|d\|_2 \\ &\leq n\|G(y) - P(y)\|_\infty + \|d\|_2 < \eta + \eta = 2\eta < \delta. \end{aligned}$$

Wegen  $G(Y_1) \cap U_{2\eta}(0) = \emptyset$  schließen wir auch auf  $0 \notin Q(Y_1)$ .  $\square$

**15.5.3 Proposition.** *Ist  $f : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und injektiv, dann liegt  $f(0)$  im Inneren von  $f(K_1(0))$ .*

*Beweis.* Sei  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die stetige Fortsetzung von  $f^{-1}$  wie in Lemma 15.5.1. Wegen der Stetigkeit von  $G$  und wegen  $G(f(0)) = 0$  gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit

$$\|G(y)\|_2 \leq \frac{1}{10} \quad \text{wenn} \quad \|y - f(0)\|_2 \leq 2\epsilon.$$

Nehmen wir an, dass  $f(0)$  nicht in  $f(K_1(0))^\circ$  liegt, so existiert ein  $c \in f(K_1(0))^c$  mit  $\|f(0) - c\|_2 < \epsilon$ . Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\|G(y)\|_2 \leq \frac{1}{10} \quad \text{wenn} \quad \|y - c\|_2 \leq \epsilon. \quad (15.16)$$

Wir betrachten die Menge  $Y := Y_1 \cup Y_2$ , wobei

$$Y_1 := \{y \in f(K_1(0)) : \|y - c\|_2 \geq \epsilon\} \quad \text{und} \quad Y_2 := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - c\|_2 = \epsilon\},$$

und definieren die Funktion  $\phi : f(K_1(0)) \rightarrow Y$  durch

$$\phi(y) := \max\left(\frac{\epsilon}{\|y - c\|_2}, 1\right)(y - c) + c. \quad (15.17)$$

Diese ist wohldefiniert, da der Punkt  $c$  nicht in  $f(K_1(0))$  liegt, und stetig. Der Punkt  $\phi(y)$  liegt in  $Y$  für alle  $y \in f(K_1(0))$ , da für  $\|y - c\|_2 > \epsilon$

$$\phi(y) = y \in f(K_1(0)) \quad \text{und} \quad \|\phi(y) - c\|_2 = \|y - c\|_2 \geq \epsilon, \quad \text{also} \quad y \in Y_1,$$

und für  $\|y - c\|_2 \leq \epsilon$

$$\|\phi(y) - c\|_2 = \epsilon, \quad \text{also} \quad y \in Y_2 \quad \text{gilt}.$$

Nach Konstruktion sind  $Y_1, Y_2$  und infolge  $Y$  kompakt. Mit Kugelkoordinaten lässt sich leicht herleiten, dass  $\lambda_n(Y_2) = 0$ ; vgl. (15.12). Gemäß Lemma 15.5.2 finden wir daher eine stetige Funktion  $Q : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $0 \notin Q(Y)$  und

$$\|G(y) - Q(y)\|_2 < \frac{7}{10} \quad \text{für alle} \quad y \in Y. \quad (15.18)$$

Die durch  $H(y) := Q(\phi(y))$  definierte Funktion  $H : f(K_1(0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist als Zusammensetzung zweier stetiger Funktionen selber stetig und besitzt *keine* Nullstellen in  $f(K_1(0))$ . Um den Abstand zu  $G$  abzuschätzen, unterscheiden wir für  $y \in f(K_1(0))$  zwei Fälle: Falls  $\|y - c\|_2 > \epsilon$ , dann gilt  $\phi(y) = y$  und mit (15.18)

$$\|G(y) - H(y)\|_2 < \frac{7}{10}.$$

Falls  $\|y - c\|_2 \leq \epsilon$ , dann gilt  $\|\phi(y) - c\|_2 = \epsilon$  und wegen (15.16) infolge  $\|G(y)\|_2, \|G(\phi(y))\|_2 \leq \frac{1}{10}$ . Mit (15.18) und der Dreiecksungleichung erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \|G(y) - H(y)\|_2 &= \|G(y) - G(\phi(y)) + G(\phi(y)) - Q(\phi(y))\|_2 \\ &\leq \|G(y)\|_2 + \|G(\phi(y))\|_2 + \|G(\phi(y)) - Q(\phi(y))\|_2 \leq \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

In jedem Fall gilt

$$\|G(y) - H(y)\|_2 \leq 1 \quad \text{für } y \in f(K_1(0)),$$

womit die Voraussetzung von Lemma 15.5.1 erfüllt sind. Also müsste  $H$  im Gegensatz zu seiner Konstruktion mindestens eine Nullstelle besitzen.  $\square$

**15.5.4 Satz** (von der Invarianz offener Mengen). *Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und injektiv. Dann ist  $f(U)$  offen und  $f$  ein Homöomorphismen.*

*Beweis.* Sei  $u \in U$  beliebig. Da  $U$  offen ist, finden wir eine Kugel  $K_r(u)$ , die ganz in  $U$  liegt mit  $0 < r \leq 1$ . Die Funktion  $\tilde{f} : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{f}(x) := f(rx + u)$  ist somit wohldefiniert, stetig und injektiv. Nach Satz Proposition 15.5.3 liegt  $\tilde{f}(0) = f(u)$  im Inneren von  $\tilde{f}(K_1(0)) = f(K_r(u))$ . Also existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $U_\epsilon(f(u)) \subset f(U)$ . Da  $u \in U$  beliebig war, ist  $f(U)$  offen.

Wendet man diese Erkenntnis auf jede offene Teilmenge von  $U$  an, so sieht man, dass  $f$  eine offene Abbildung und infolge ein Homöomorphismus ist.  $\square$

**15.5.5 Satz** (von der Invarianz der Dimension). *Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  nicht leer und offen. Sind  $U$  und  $V$  homöomorph, dann folgt  $n = m$ .*

*Beweis.* Angenommen,  $m < n$  und es existierte ein Homöomorphismus  $f : U \rightarrow V$ . Definiere  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  als  $g := \iota \circ f$ , wobei  $\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Einbettung  $\iota((x_1, \dots, x_m)^T) := (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T$  ist. Die Menge  $g(U)$  ist in  $\mathbb{R}^m \times \{0\} (\subseteq \mathbb{R}^n)$  enthalten und hat somit leeres Inneres im Widerspruch zu Satz 15.5.4. Die Annahme  $m > n$  führt man genauso auf einen Widerspruch.  $\square$

## 15.6 Integration über Mannigfaltigkeiten

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, Funktionen, die auf einer  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  mit  $d < p$  definiert sind, sinnvoll zu integrieren. Dazu wollen wir  $M$  mit einem Maß versehen, das anschaulich dem  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maß entspricht, und *Oberflächenmaß* heißen soll.

**15.6.1 Beispiel.** Als erstes sei  $M$  ein  $d$ -dimensionaler Unterraum des Vektorraumes  $\mathbb{R}^p$ . Ist  $x_1, \dots, x_d$  eine Basis von  $M$ , die mit  $x_{d+1}, \dots, x_p$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^p$  fortgesetzt wird, so ist die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \sum_{j=1}^p \xi_j x_j \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$$

gemäß Beispiel 13.4.3 eine Karte von  $M$ . Sei  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ ,  $\phi(s) = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$  die zu  $\varphi$  gehörige Einbettung  $\phi_\varphi$  wie in (13.15).

Um einer Teilmenge  $A$  von  $M$  in sinnvoller Art und Weise ein Maß zuzuordnen<sup>7</sup>, betrachten wir  $M$  als isometrische Kopie von  $\mathbb{R}^d$ . Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $x_1, \dots, x_d$  eine Orthonormalbasis von  $M$  ist. Nun ist  $\phi(\mathfrak{B}_d)$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$  und  $\mu(A) := \lambda_d(\phi^{-1}(A))$  ein Maß. Es heißt das *Oberflächenmaß* auf  $M$ .

$\phi(\mathfrak{B}_d)$  und  $\mu$  sind unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis, denn ist  $y_1, \dots, y_d$  eine weitere Orthonormalbasis von  $M$  und  $\chi$  die entsprechende lineare Karte von  $M$  (siehe Beispiel 15.6.1) mit dazugehöriger Einbettung  $\psi := \phi_\chi$ , so gibt es eine

<sup>7</sup>Man beachte, dass wegen Bemerkung 14.4.5  $M$  und damit auch  $A$  eine  $\lambda_p$ -Nullmenge ist.



orthogonale Matrix  $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $\psi = \phi T$ . Wegen  $T(\mathfrak{B}_d) = \mathfrak{B}_d$  und  $\lambda_d(T^{-1}(B)) = \lambda_d(B)$  (siehe (14.14)) folgt

$$\psi(\mathfrak{B}_d) = \phi \circ T(\mathfrak{B}_d) = \phi(\mathfrak{B}_d) \quad (15.19)$$

und für  $A \in \phi(\mathfrak{B}_d)$

$$\mu(A) = \lambda_d(\phi^{-1}(A)) = \lambda_d(T^{-1}(\phi^{-1}(A))) = \lambda_d(\psi^{-1}(A)).$$

Was ist nun, wenn  $y_1, \dots, y_d$  keine ONB, sondern nur eine Basis von  $M$  ist? Zunächst gilt wie zuvor  $\psi = \phi T$ , wobei  $T$  im Allgemeinen keine orthogonale, sondern nur eine invertierbare  $d \times d$ -Matrix ist. Wegen  $T(\mathfrak{B}_d) = \mathfrak{B}_d$  gilt auch hier (15.19). Aus (14.14) folgt

$$\mu(A) = \lambda_d(\phi^{-1}(A)) = |\det T| \cdot \lambda_d(T^{-1}(\phi^{-1}(A))) = |\det T| \cdot \lambda_d(\psi^{-1}(A)).$$

Da die Spalten  $x_1, \dots, x_d$  von  $\phi$  orthonormiert sind, gilt  $\phi^T \phi = I_{d \times d}$  und infolge

$$|\det T|^2 = \det T^T T = \det T^T (\phi^T \phi) T = \det \psi^T \psi.$$

Also erhält man

$$\mu(A) = \sqrt{\det \psi^T \psi} \cdot \lambda_d(\psi^{-1}(A)) \quad (15.20)$$

für beliebige bijektive, lineare Abbildungen  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ .

In analoger Weise wollen wir allgemeine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit einem Oberflächenmaß versehen. Technisch ist das aber aufwendiger, da man im Allgemeinen nicht nur eine Einbettung auf  $M$  hat. Zunächst versehen wir  $M$  mit einer  $\sigma$ -Algebra.

**15.6.2 Definition.** Ist  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ , so sei  $\mathfrak{B}(M) := \mathfrak{B}(\mathcal{T}|_M)$  die Menge der Borelmengen auf  $M$ , wobei  $\mathcal{T}|_M$  die Spurtopologie der Euklidischen Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $M$  bezeichnet.

Aus Fakta 14.1.2 wissen wir, dass  $\mathfrak{B}(M) = \mathfrak{B}_p \cap M$  und dass jede Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  wie in Satz 13.4.9 wegen der Stetigkeit von  $\phi$  auch  $(\mathfrak{B}_d \cap C)$ - $\mathfrak{B}(M)$ -messbar ist.

Im Folgenden werden wir des Öfteren die Tatsache benötigen, dass man für eine Familie von Einbettungen  $\phi_i : C_i \rightarrow M$ ,  $i \in I$ , mit  $\bigcup_{i \in I} \phi_i(C_i) = M$  immer eine abzählbare  $J \subseteq I$  derart findet, dass schon  $\bigcup_{i \in J} \phi_i(C_i) = M$ . Diese Tatsache ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden topologischen Resultats<sup>8</sup>.

**15.6.3 Lemma (Lindelöf).** Sei  $U_i$ ,  $i \in I$ , eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$ , d.h.  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ . Hat  $(X, \mathcal{T})$  eine abzählbare Basis, so gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge  $J \subseteq I$  derart, dass  $U_i$ ,  $i \in J$ , ebenfalls  $X$  überdeckt.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{B}$  eine abzählbare Basis von  $(X, \mathcal{T})$ . Da jede offene Menge als Vereinigung von Basismengen geschrieben werden kann, gibt es zu jedem  $i$  und jedem  $x \in U_i$  ein  $B_{i,x} \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_{i,x} \subseteq U_i$ . Sei  $\mathcal{A}$  die Menge aller derart getroffenen Mengen aus  $\mathcal{B}$ .

Da mit  $\mathcal{B}$  auch  $\mathcal{A}$  höchstens abzählbar ist, gibt es  $(i(n), x(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit

$$\mathcal{A} = \{B_{i(n), x(n)} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist nun  $x \in X$ , so gibt es laut Voraussetzung ein  $i$  mit  $x \in U_i$ . Wegen  $B_{i,x} \in \mathcal{A}$  gibt es ein  $n$  mit  $x \in B_{i,x} = B_{i(n), x(n)} \subseteq U_i$ , wobei i.A.  $i \neq i(n)$ ,  $x \neq x(n)$ . Da aber auch  $B_{i(n), x(n)} \subseteq U_{i(n)}$ , folgt  $x \in U_{i(n)}$ , und wir sehen, dass die  $U_{i(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ganz  $X$  überdecken.  $\square$

<sup>8</sup>Die Spurtopologie auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  hat eine abzählbare Basis. Man nehme etwa alle Kugeln mit rationalem Radius und rationalen Koordinaten und dann deren Schnitte mit  $M$ .

**15.6.4 Korollar.** Für eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  gilt  $M \in \mathfrak{B}_p$  und daher  $\mathfrak{B}(M) = \{B \in \mathfrak{B}_p : B \subseteq M\}$ . Außerdem gehört ein  $A \subseteq M$  zu  $\mathfrak{B}(M)$  genau dann, wenn  $\phi^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_d$  für alle Einbettungen  $\phi : C \rightarrow M$ .

Im Falle  $d < p$  gilt zudem  $\lambda_p(M) = 0$  und infolge  $\lambda_p(A) = 0$  für jedes  $A \in \mathfrak{B}(M)$ .

*Beweis.* Der Fall  $d = p$  folgt sofort aus Fakta 14.1.2. Sei also  $d < p$ . Für jedes  $x \in M$  sei  $\varphi_x : U_x \rightarrow D_x$  eine Karte mit  $x \in U_x$ . Als Homöomorphismen sind alle diese Karten in beide Richtungen messbar, wenn  $U_x$  mit  $U_x \cap \mathfrak{B}_p$  und  $D_x$  mit  $D_x \cap \mathfrak{B}_p$  versehen wird. Da  $U_x \cap M, x \in M$ , eine offene Überdeckung von  $M$  ist, wird nach Lemma 15.6.3  $M$  schon von  $U_x \cap M, x \in I$ , mit einer abzählbaren Menge  $I \subseteq M$  überdeckt. Also gilt

$$M = \bigcup_{x \in I} M \cap U_x = \bigcup_{x \in I} \underbrace{\varphi_x(D_x \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^d))}_{=: C_x \times \{0\}}$$

mit  $C_x \times \{0\} \in D_x \cap \mathfrak{B}_p$ , und daher  $M \in \mathfrak{B}_p$ . Wie in Bemerkung 14.4.5 festgestellt, gilt dabei  $\lambda_p(C_x \times \{0\}) \leq \lambda_p(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = 0$ . Mit Satz 15.1.3 folgt  $\lambda_p(\varphi_x(C_x \times \{0\})) = 0$  und weiter  $\lambda_p(M) = 0$ .

Ist schließlich  $A \in \mathfrak{B}(M)$ , so folgt aus Fakta 14.1.2 wegen der Stetigkeit von  $\phi : C \rightarrow M$ , dass  $\phi^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_d \cap C \subseteq \mathfrak{B}_d$  für jede Einbettung  $\phi$ ; vgl. (13.15). Umgekehrt folgt für  $A \subseteq M$  aus dieser Eigenschaft, angewandt auf die Einbettungen  $\phi_{\varphi_x}$ , dass  $\varphi_x(A \cap U_x) = \varphi_x|_{M \cap U_x}(A \cap U_x) = \phi_{\varphi_x}^{-1}(A) \times \{0\} \in \mathfrak{B}_p$ . Da  $\varphi_x$  in beide Richtungen messbar ist, erhalten wir

$$A = \bigcup_{x \in I} U_x \cap A = \bigcup_{x \in I} \varphi_x^{-1}(\varphi_x(A \cap U_x)) \in \mathfrak{B}_p \cap M = \mathfrak{B}(M).$$

□

Sei  $\phi_j : C_j \rightarrow M, j \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte Folge von Einbettungen wie in Satz 13.4.9 mit  $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(C_j)$ <sup>9</sup>. Die Existenz einer solchen Überdeckung folgt aus Lemma 15.6.3, da die  $\phi_j(C_j)$  eine offene Überdeckung von  $M$  bilden, wenn  $\phi$  alle Einbettungen durchläuft; vgl. Satz 13.4.9. Weiters wählen wir eine messbare, disjunkte Zerlegung von  $M$ :

$$M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \quad \text{mit} \quad M_j \subseteq \phi_j(D_j) \quad \text{und} \quad M_j \in \mathfrak{B}(M) \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Ein Beispiel für eine derartige disjunkte Zerlegung ist

$$M_j := \phi_j(D_j) \setminus (\phi_1(D_1) \cup \dots \cup \phi_{j-1}(D_{j-1})), \quad j \in \mathbb{N}.$$

**15.6.5 Definition.** Für  $A \in \mathfrak{B}(M)$  definieren wir<sup>10</sup>

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(A \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s) \quad (\in [0, +\infty]), \quad (15.21)$$

und nennen  $\mu$  das *Oberflächenmaß* auf  $M$ .

<sup>9</sup>Sollten schon endlich viele  $\phi_1(C_1), \dots, \phi_k(C_k)$  ausreichen, um  $M$  zu überdecken, so kann man im Folgenden mit der Folge  $\phi_1, \dots, \phi_k, \phi_k, \phi_k, \dots$  von Einbettungen arbeiten.

<sup>10</sup>Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass für eine Matrix  $C \in \mathbb{R}^{p \times d}$  mit vollem Rang, also injektivem  $C \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ , die Matrix  $C^T C \in \mathbb{R}^{p \times d}$  selbstadjungiert, regulär und positiv definit ist. Somit hat  $C^T C$  nur positive Eigenwerte und infolge  $\det C^T C > 0$ .

Man beachte, dass im Falle  $A \subseteq M_j$  für ein  $j \in \mathbb{N}$  alle bis auf den  $j$ -ten Summanden der Reihe in (15.21) verschwinden. Um zu zeigen, dass  $\mu$  ein Maß ist, welches unabhängig von den  $\phi_j$  und den  $M_j$  ist, brauchen wir folgende Feststellung.

**15.6.6 Bemerkung.** Für Einbettungen  $\phi_1 : C_1 \rightarrow M$  und  $\phi_2 : C_2 \rightarrow M$  in die  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $\phi_1(C_1) \cap \phi_2(C_2) \neq \emptyset$  sind  $B_1 := \phi_1^{-1}(\phi_1(C_1) \cap \phi_2(C_2)) \subseteq C_1 \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $B_2 := \phi_2^{-1}(\phi_1(C_1) \cap \phi_2(C_2)) \subseteq C_2 \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Schränken wir  $\phi_1$  bzw.  $\phi_2$  auf diese Mengen ein, so erhalten wir offenbar wieder Einbettungen, womit

$$\omega := \psi|_{B_2}^{-1} \circ \phi|_{B_1} : B_1 \rightarrow B_2$$

ein Homöomorphismus ist. In der Tat ist  $\omega$  sogar ein Diffeomorphismus. Um das einzusehen, sei  $s \in B_1$ . Nach Bemerkung 13.4.10 gibt es für  $j = 1, 2$  Karten  $\varphi_j$  mit  $C_{\varphi_j} \subseteq B_j$ ,  $\phi_1(s) \in \phi_{\varphi_j}(C_{\varphi_j})$  und  $\phi_{\varphi_j} = \phi|_{C_{\varphi_j}}$ . Für  $t \in C_{\varphi_1} \cap \omega^{-1}(C_{\varphi_2})$  gilt dann

$$\omega(t) = \pi \circ \varphi_2 \circ \underbrace{\varphi_1^{-1}}_{\in M \cap U_{\varphi_1} \cap U_{\varphi_2}} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  die Projektion auf die ersten  $d$  Einträge ist. Also ist  $\omega$  lokal um  $s$  und infolge überall stetig differenzierbar. Vertauscht man die Rollen von  $\phi_1$  und  $\phi_2$ , so folgt auch die stetige Differenzierbarkeit von  $\omega^{-1}$ .

**15.6.7 Satz.** Die Mengenfunktion  $\mu : \mathfrak{B}(M) \rightarrow [0, +\infty]$  ist ein Maß, welches unabhängig von der Wahl der Folge  $\phi_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  von Einbettungen, und unabhängig von der disjunkten Zerlegung  $M_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  ist.

*Beweis.* Für jedes feste  $j \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathfrak{B}(M)$  können wir

$$\mu_j(A) := \mu(A \cap M_j) = \int_{\phi_j^{-1}(A \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s)$$

als  $\nu_j(\phi_j^{-1}(A))$  schreiben, wobei

$$\nu_j(B) := \int_B \mathbb{1}_{\phi_j^{-1}(M_j)}(s) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s), \quad B \in \mathfrak{B}_d,$$

bekannterweise ein Maß ist. Nach Satz 14.4.7 ist auch das transformierte Maß  $\mu_j$  ein solches. Nun ist  $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$  eine nichtnegative Mengenfunktion  $\mathfrak{B}(M) \rightarrow [0, +\infty]$  mit  $\mu(\emptyset) = 0$ . Die  $\sigma$ -Additivität folgt aus der Tatsache, dass Doppelsummen mit nichtnegativen Summanden nicht von der Summationsreihenfolge abhängen; vgl. z.B. Bemerkung 14.4.4.

Sei  $\psi_n : E_n \rightarrow M$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine weitere Folge von Einbettungen, deren Bilder ganz  $M$  überdecken, und sei  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine disjunkte Zerlegung von  $M$  mit  $L_n \subseteq \psi_n(E_n)$  und  $L_n \in \mathfrak{B}(M)$ . Weiters sei  $\vartheta$  wie in Definition 15.6.5 aber ausgehend von  $\psi_n : E_n \rightarrow M$  und  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  definiert. Für  $j, n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathfrak{B}(M)$  setzen wir

$$F_{j,n} := \phi_j(D_j) \cap \psi_n(E_n) \quad \text{und} \quad A_{j,n} := A \cap M_j \cap L_n.$$

Wegen  $A_{j,n} \subseteq F_{j,n}$  gilt im Falle  $F_{j,n} = \emptyset$  sicherlich  $\vartheta(A_{j,n}) = 0 = \mu(A_{j,n})$ .

Im Falle  $F_{j,n} \neq \emptyset$  ist  $\phi_j^{-1}(A_{j,n})$  eine Borelteilmenge des offenen  $\phi_j^{-1}(F_{j,n}) \subseteq C_j$  und  $\psi_n^{-1}(A_{j,n})$  eine Borelteilmenge des offenen  $\psi_n^{-1}(F_{j,n}) \subseteq E_n$ . Wegen Bemerkung 15.6.6 gilt

$$\psi_n \circ \omega(s) = \phi_j(s), \quad s \in \phi_j^{-1}(F_{j,n}),$$

für einen Diffeomorphismus  $\omega : \phi_j^{-1}(F_{j,n}) \rightarrow \psi_n^{-1}(F_{j,n})$ , der offenbar  $\phi_j^{-1}(A_{j,n})$  auf  $\psi_n^{-1}(A_{j,n})$  abbildet.

Nun sei bemerkt, dass für  $C \in \mathbb{R}^{p \times d}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$|\det T| \sqrt{\det C^T C} = \sqrt{\det T^T (\det C^T C) \det T} = \sqrt{\det (CT)^T CT}.$$

Setzen wir  $C = d\psi_n(\omega(s))$  und  $T = d\omega(s)$ , so folgt aus der Kettenregel, Proposition 10.1.18,  $CT = d\phi_j(s)$ . Aus Satz 15.1.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} \vartheta(A_{j,n}) &= \int_{\psi_n^{-1}(A_{j,n})} \sqrt{\det d\psi_n(t)^T d\psi_n(t)} d\lambda_d(t) \\ &= \int_{\phi_j^{-1}(A_{j,n})} \sqrt{\det d\psi_n(\omega(s))^T d\psi_n(\omega(s))} \cdot |\det d\omega(s)| d\lambda_d(s) \\ &= \int_{\phi_j^{-1}(A_{j,n})} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s) = \mu(A_{j,n}). \end{aligned}$$

Mit der  $\sigma$ -Additivität folgt schließlich  $\vartheta(A) = \sum_{n,j=1}^{\infty} \vartheta(A_{j,n}) = \sum_{n,j=1}^{\infty} \mu(A_{j,n}) = \mu(A)$ .  $\square$

### 15.6.8 Fakta.

1. Die Folge  $\phi_j : C_j \rightarrow M$ ,  $j \in \mathbb{N}$  von Einbettungen kann gemäß Satz 13.4.9 und Definition 13.4.1 so gewählt werden, dass  $\phi_j = \phi_{\varphi_j}$  mit Karten  $\varphi_j$  von  $M$ ; siehe (13.15). Die Forderung  $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(C_j)$  bedeutet dann nichts anderes als  $M \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{\varphi_j}$ .
2. Ist  $A \in \mathfrak{B}(M)$  in  $\phi(C)$  für eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  enthalten, so gibt es sicherlich eine Folge von Einbettungen derart, dass Bilder ganz  $M$  überdecken und dass  $\phi$  das erste Folgenglied ist. Wählt man noch  $M_1 = \phi(C)$ , so folgt aus Satz 15.6.7

$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} d\lambda_d(s). \quad (15.22)$$

3. Sollten schon endlich viele  $\phi_1(C_1), \dots, \phi_k(C_k)$  ausreichen, um ein gegebenes  $A \in \mathfrak{B}(M)$  zu überdecken, so kann man  $\phi_1, \dots, \phi_k$  zu einer Folge von Einbettungen fortsetzen, deren Bilder ganz  $M$  überdecken. Sind zudem  $M_1, \dots, M_k \in \mathfrak{B}(M)$  disjunkt mit  $M_j \subseteq \phi_j(C_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , und  $M_1 \cup \dots \cup M_k = \phi_1(C_1) \cup \dots \cup \phi_k(C_k)$ , so kann man auch diese  $M_j$  zu einer, im Sinne von Definition 15.6.5 zulässigen, disjunkten Zerlegung fortsetzen. Wir erhalten

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^k \int_{\phi_j^{-1}(A \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s).$$

4. Im Falle  $d = p$  ist  $M$  nach Fakta 13.4.12, 1, eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^p$ , und  $\iota_M : M \rightarrow M$  ist eine Karte. Ausgehend von dieser Karte folgt aus Definition 15.6.5 sofort, dass  $\mu = \lambda_d$ .
5. Nach dem ersten Beweisschritt von Satz 15.6.7 gilt  $\mu(A) = \sum_j \mu_j(A)$  für  $A \in \mathfrak{B}(M)$ , wobei  $\mu_j(A) = \mu(A \cap M_j) = \nu_j(\phi_j^{-1}(A))$  und

$$\nu_j(B) := \int_B \mathbb{1}_{\phi_j^{-1}(M_j)}(s) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s) \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{B}_d.$$

Also gilt (vgl. Satz 14.4.7 bzw. Satz 8.2 in [K])  $\mu_j = \nu_j^{\phi_j}$ . Die Radon-Nikodym Ableitung von  $\nu_j$  nach  $\lambda_d$  ist  $\mathbb{1}_{\phi_j^{-1}(M_j)}(s) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}$ . Für ein messbares  $f : M \rightarrow [0, +\infty]$  folgt daher

$$\int_M f \cdot \mathbb{1}_{M_j} d\mu = \int_{D_j} f \circ \phi_j d\nu_j = \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} (f \circ \phi_j(s)) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s).$$

Summiert man über  $j \in \mathbb{N}$  auf, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int_M f d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} (f \circ \phi_j(s)) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s), \quad (15.23)$$

wobei die linke Seite genau dann endlich ist, wenn es die rechte Seite ist. Wir schließen daraus, dass ein messbares, reell- oder komplexwertiges  $f$  auf  $M$  genau dann integrierbar ist, wenn

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} |f \circ \phi_j(s)| \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s) < +\infty.$$

In diesem Fall gilt (15.23).

6. Ist  $O \subseteq M$  offen bzgl. der Spurtopologie, so ist  $O$  für sich selbst genommen auch eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; vgl. Fakta 13.4.12. Aus Fakta 14.1.2 folgt unmittelbar, dass  $\mathfrak{B}(O) \subseteq \mathfrak{B}(M)$ . Bezeichnet  $\nu$  das Oberflächenmaß auf  $O$  und  $\mu$  jenes auf  $M$ , so zeigt man mit Hilfe von Fakta 13.4.12 leicht, dass für  $A \in \mathfrak{B}(O)$  immer  $\nu(A) = \mu(A)$ , also dass  $\nu$  eine Einschränkung von  $\mu$  ist.
7. Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ ,  $r > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  fest. Mit  $M$  ist auch  $N := rM + x$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ ; vgl. Fakta 13.4.12, 8. Bezeichnet  $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  die Abbildung  $T(y) = ry + x$ , so ist  $\varphi$  genau dann eine Karte von  $M$ , wenn  $\chi := \varphi \circ T^{-1} : T(U_\varphi) \rightarrow D_\varphi$  Karte von  $N$  ist. Aus der Beziehung  $\sqrt{\det d\phi_\chi(s)^T d\phi_\chi(s)} = r^d \cdot \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T d\phi_\varphi(s)}$  (siehe (13.15)) kann man herleiten, dass  $\mu_N(rB + x) = r^d \mu_M(B)$  für alle  $B \in \mathfrak{B}(M)$  und

$$\int_N f d\mu_N = r^d \int_M f(ry + x) d\mu_M(y)$$

für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [0, +\infty]$ , und für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte Seite tut.

**15.6.9 Bemerkung (\*).** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ , und sei  $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  orthogonal, dh.  $TT^* = T^*T = I$ . Mit  $M$  ist auch  $N := T(M)$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ ; vgl. Fakta 13.4.12, 8. Dabei ist  $\varphi$  genau dann eine Karte von  $M$ , wenn  $\chi := \varphi \circ T^{-1} : T(U_\varphi) \rightarrow D_\varphi$  Karte von  $N$  ist. Aus der Beziehung  $\sqrt{\det d\phi_\chi(s)^T d\phi_\chi(s)} = \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T T^T T d\phi_\varphi(s)} = \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T d\phi_\varphi(s)}$  kann man herleiten, dass  $\mu_N(T(B)) = \mu_M(B)$  für alle  $B \in \mathfrak{B}(M)$  und

$$\int_N f d\mu_N = \int_M f \circ T d\mu_M$$

für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [0, +\infty]$ , und für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte Seite tut.

**15.6.10 Proposition.** Für eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^p$  mit  $0 < d \leq p$  und sein Oberflächenmaß  $\mu$  gilt:

- (i) Für alle abzählbaren  $A \subseteq M$  gilt  $A \in \mathfrak{B}(M)$  mit  $\mu(A) = 0$ .
- (ii) Ist  $\emptyset \neq O \subseteq M$  offen bezüglich der Spurtopologie auf  $M$ , so gilt  $\mu(O) > 0$ , wobei  $O \in \mathfrak{B}(M)$ .
- (iii)  $M$  lässt sich schreiben als abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von  $M$ . Man sagt,  $M$  (versehen mit der Spurtopologie) ist  $\sigma$ -kompakt.
- (iv) Ist  $K \subseteq M$  kompakt, so folgt  $K \in \mathfrak{B}(M)$  mit  $\mu(K) < +\infty$ , dh.  $\mu$  ist ein sogenanntes Borelmaß.
- (v)  $\mu$  ist ein  $\sigma$ -endliches Maß.

*Beweis.*

1. Ist  $x \in M$  und  $\phi : C \rightarrow M$  eine Einbettung mit  $x \in \phi(C)$ , so ist  $\phi^{-1}(\{x\})$  eine einpunktige Teilmenge von  $C$  und daher  $\phi^{-1}(\{x\}) \in \mathfrak{B}_d$  mit  $\lambda_d(\phi^{-1}(\{x\})) = 0$ . Aus Korollar 15.6.4 folgt  $\{x\} \in \mathfrak{B}(M)$ , und aus (15.22) folgt  $\mu(\{x\}) = 0$ . Mit der  $\sigma$ -Additivität erhalten wir  $\mu(A) = 0$  für alle abzählbaren  $A \subseteq M$ .
2. Ist  $\emptyset \neq O \subseteq M$  offen bezüglich der Spurtopologie auf  $M$ , so gilt zunächst wegen  $\mathfrak{B}(M) = \mathfrak{B}(\mathcal{T}|_M)$  sicher  $O \in \mathfrak{B}(M)$ . Zudem gibt es eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  mit  $\phi(C) \cap O \neq \emptyset$  und infolge  $\phi^{-1}(O) \neq \emptyset$ . Da jede nichtleere offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  ein nichtleeres  $d$ -dimensionales Rechteck enthält, gilt  $\lambda_d(\phi^{-1}(O)) > 0$ . Somit folgt

$$\mu(O) \geq \mu(\phi(C) \cap O) = \int_{\phi^{-1}(O)} \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} d\lambda_d(s) > 0.$$

3. Zu jedem  $x \in M$  gibt es eine Einbettung  $\phi_x : C_x \rightarrow M$  mit  $x \in \phi_x(C_x)$ . Wähle eine offene Umgebung  $B_x \subseteq C_x$  von  $\phi_x^{-1}(x)$ , deren Abschluss kompakt und in  $C_x$  enthalten ist<sup>11</sup>. Nun ist  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in M$ , eine offene Überdeckung von  $M$  bezüglich

<sup>11</sup>Man nehme etwa  $U_\epsilon(\phi_x^{-1}(x))$ , wobei  $\epsilon > 0$  so klein gewählt ist, dass  $K_\epsilon(\phi_x^{-1}(x)) \subseteq C_x$ .

der Spurtopologie, und hat wegen Lemma 15.6.3 eine abzählbare Teilüberdeckung  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in I$ . Wegen der Stetigkeit der  $\phi_x$  ist

$$\bigcup_{x \in I} \phi_x(\overline{B_x}) = M$$

eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von  $M$ .

4. Ein kompaktes  $K \subseteq M$  ist auch in  $\mathbb{R}^p$  kompakt, womit  $K \in \mathfrak{B}_p \cap M = \mathfrak{B}(M)$ . Die bezüglich der Spurtopologie offene Überdeckung  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in M$ , aus dem letzten Punkt ist offensichtlich auch eine offene Überdeckung von  $K$ , und hat daher eine endlich Teilüberdeckung  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in J$ .

Da  $\sqrt{\det d\phi_x^T(s) d\phi_x(s)}$  ob der Stetigkeit auf den kompakten Menge  $\overline{B_x} \supseteq B_x$  beschränkt ist, und da  $\lambda_d(B_x) \leq \lambda_d(\overline{B_x}) < +\infty$ , folgt aus (15.22)

$$\mu(K) \leq \sum_{x \in J} \mu(\phi_x(B_x)) = \sum_{x \in J} \int_{B_x} \sqrt{\det d\phi_x^T(s) d\phi_x(s)} d\lambda_d(s) < +\infty.$$

5. Aus der  $\sigma$ -Kompaktheit von  $M$  folgt, dass  $M$  abzählbare Vereinigung von  $\mu$ -endlichen Mengen ist.

□

**15.6.11 Beispiel.** Man betrachte die Kugeloberfläche  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ . Um das Oberflächenmaß von  $S^2$  zu berechnen, sei an die in Beispiel 13.4.6 beschriebenen Karten  $\varphi_{+,z}, \varphi_{-,z}, \varphi_{+,y}, \varphi_{-,y}, \varphi_{+,x}, \varphi_{-,x}$  erinnert. Zunächst berechnen wir die Oberfläche von der offenen oberen Halbkugeloberfläche  $H_+$ , also von  $S^2 \cap U_{\varphi_{+,z}}$ . Für  $s = (\xi, \eta)^T$  gilt  $\phi_{\varphi_{+,z}}(s) = (\xi, \eta, \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2})^T$  und somit

$$\det d\phi_{\varphi_{+,z}}(s)^T d\phi_{\varphi_{+,z}}(s) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2 - \eta^2} & \frac{\xi\eta}{1 - \xi^2 - \eta^2} \\ \frac{\xi\eta}{1 - \xi^2 - \eta^2} & 1 + \frac{\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2} = \frac{1}{1 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Also erhält man aus Definition 15.6.5

$$\mu(H_+) = \int_{U_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} d\lambda_2(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr d\alpha = 2\pi,$$

wobei die vorletzte Gleichheit durch Transformation auf Polarkoordinaten mit Hilfe von Satz 15.1.3 folgt; vgl. Beispiel 15.1.4. Entsprechend erhält man  $\mu(H_-) = 2\pi$ , wobei  $H_-$  die untere offene Halbkugeloberfläche ist. Somit gilt

$$\mu(S^2) = \mu(H_+) + \mu(H_-) + \mu(\{x \in S^2 : x_3 = 0\}).$$

Wie wir aus dem folgenden Lemma erkennen, gilt  $\mu(\{x \in S^2 : x_3 = 0\}) = 0$ , also  $\mu(S^2) = 4\pi$ .

**15.6.12 Lemma.** Sei  $\mu$  das Oberflächenmaß einer  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$ , und sei  $\varphi_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , eine Folge von Karten mit  $M \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{\varphi_j}$ . Gilt für  $B \in \mathfrak{B}(M)$ , dass  $\lambda_d(\phi_{\varphi_j}^{-1}(B)) = 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , so folgt  $\mu(B) = 0$ .

Alle  $N \subseteq M$ , die selber  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten ( $0 < m < d$ ) sind, liegen in  $\mathfrak{B}(M)$  und haben in  $M$  Oberflächenmaß Null. Somit gilt auch  $\mu(B) = 0$  für alle  $B \in \mathfrak{B}(N)$ .

*Beweis.* Gemäß der Voraussetzung ist

$$\int_{\phi_{\varphi_j}^{-1}(B \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_{\varphi_j}(s)^T d\phi_{\varphi_j}(s)} d\lambda_d(s)$$

das Integral einer Funktion über eine Nullmenge. Also ist sein Wert Null. Die Summe über alle  $j \in \mathbb{N}$  ergibt Null und stimmt per definitionem mit  $\mu(B)$  überein.

Für eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $N \subseteq M$  mit  $0 < m < d$  ist im Falle  $N \cap U_{\varphi_j} \neq \emptyset$  auch  $N \cap U_{\varphi_j}$  und infolge  $\varphi_j(N \cap U_{\varphi_j})$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; siehe Fakta 13.4.12, 5 und 8. Wegen  $\varphi_j(N \cap U_{\varphi_j}) \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}$  ist auch  $\pi(\varphi_j(N \cap U_{\varphi_j})) = \phi_{\varphi_j}^{-1}(N)$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^d$ , wobei  $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  die Projektion auf die ersten  $d$  Einträge ist; siehe Fakta 13.4.12, 2. Nach Korollar 15.6.4 liegt  $\phi_{\varphi_j}^{-1}(N)$  in  $\mathfrak{B}_d$  und hat Lebesgue-Maß Null. Aus dem ersten Teil des Lemmas folgt  $\mu(N) = 0$ .

Für alle  $B \in \mathfrak{B}(N) = N \cap \mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}(M)$  gilt schließlich  $0 \leq \mu(B) \leq \mu(N) = 0$ .  $\square$

### 15.6.13 Beispiel.

$\rightsquigarrow$  Wir betrachten die Einheitssphäre

$$S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| = 1\}.$$

Offensichtlich ist  $S^{p-1}$  die Nullstellenmenge der Funktion  $x \mapsto \|x\|^2 - 1$  auf der offenen Teilmenge  $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  von  $\mathbb{R}^p$ . Nach Satz 13.4.4 ist  $S^{p-1}$  eine  $(p-1)$ -Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ .

Einbettungen in  $S^{p-1}$  lassen sich ausgehend von der Kugelkoordinatenfunktion (vgl. Beispiel 15.1.7)

$$T_p : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad T_p \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \sin \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \vdots \\ \sin \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_{p-2} \end{pmatrix}, \quad (15.24)$$

wobei

$$\det dT_p \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = r^{p-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{p-2} \theta_{p-2}, \quad (15.25)$$

angeben. Die Einschränkung von  $T_p$  auf  $D_\varphi := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}$  ist injektiv und infolge ein Diffeomorphismus; vgl. Korollar 13.2.3. Dabei gilt  $T_p(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{p-2})^T \in S^{p-1}$  genau dann, wenn  $r = 1$ .

Infolge ist  $T : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2} \times (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$ , definiert durch

$$T \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \\ r \end{pmatrix} := T_p \begin{pmatrix} r+1 \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix},$$



ebenfalls ein Diffeomorphismus und  $\varphi := T^{-1}$  eine Karte von  $S^{p-1}$ , wobei  $D_\varphi := (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2} \times (-1, +\infty)$  und  $U_\varphi := T(D_\varphi)$ . Die dazugehörige Einbettung (vgl. (13.15)) ist dann

$$\phi_\varphi : \underbrace{(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}}_{=C_\varphi} \rightarrow S^{p-1}, \quad \phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = T_p \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix},$$

wobei

$$dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}^T dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \cdot d\phi(s)^T d\phi(s) \end{pmatrix} \quad (15.26)$$

wie man elementar aus (15.24) herleitet.

↪ Ihr Bild  $\phi_\varphi(C_\varphi)$  ist dabei zwar nicht ganz  $S^{p-1}$ . Aber das, was auf die Einheitskugel fehlt, ist verhältnismäßig klein:

$$\phi_\varphi(C_\varphi) = S^{p-1} \setminus \{x \in \mathbb{R}^p : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}.$$

Klein deshalb, weil, wenn  $\mu$  das Oberflächenmaß von  $S^{p-1}$  bezeichnet, die Menge  $S^{p-1} \setminus \phi_\varphi(C_\varphi) = \{x \in S^{p-1} : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  in der  $(p-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\{x \in S^{p-1} : x_2 = 0\}$ <sup>12</sup> enthalten und infolge eine Nullmenge bezüglich  $\mu$  ist; siehe Lemma 15.6.12.

Aus (15.26) und (15.25) folgt zudem

$$\begin{aligned} \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T d\phi_\varphi(s)} &= \frac{1}{r^{p-1}} \sqrt{\det dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}^T dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}} \\ &= \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2}. \end{aligned}$$

Für ein messbares  $f : S^{p-1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  gilt somit

$$\int_{S^{p-1}} f d\mu = \int_{C_\varphi} (f \circ \phi_\varphi(s)) \cdot \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} d\lambda_{p-1}(s) \quad (15.27)$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut.

↪ Ist  $R > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  fest, und betrachtet man die Oberfläche  $x + R \cdot S^{p-1}$  der offenen Kugel  $U_R(x)$  mit Radius  $R$  um  $x$ , so ist wegen Fakta 15.6.8, 7, auch  $x + R \cdot S^{p-1}$  eine  $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wobei

$$\int_{x+R \cdot S^{p-1}} f d\mu_{x+R \cdot S^{p-1}} = R^{p-1} \int_{S^{p-1}} f(x + Ry) d\mu_{S^{p-1}}(y), \quad (15.28)$$

für jedes messbare, auf  $x + R \cdot S^{p-1}$  definierte  $f$ . Dabei bezeichnet  $\mu_{x+R \cdot S^{p-1}}$  das Oberflächenmaß auf  $x + R \cdot S^{p-1}$  und  $\mu_{S^{p-1}}$  das Oberflächenmaß auf  $S^{p-1}$ .

<sup>12</sup>Lässt man die zweite Koordinate weg, so ist das gerade  $S^{p-2}$ .

↪ Ist schließlich  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, +\infty]$  integrierbar, so folgt aus der Transformationsregel mehrdimensionaler Integrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} f d\lambda_p &= \int_{(0,+\infty) \times (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}} f \circ T_p \cdot |\det dT_p| d\lambda_p = \\ &= \int_{(0,+\infty)} r^{p-1} \cdot \int_{C_\varphi} f(r \cdot \phi_\varphi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix}) \cdot \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} d\lambda_{p-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} d\lambda(r) = \\ &= \int_{(0,+\infty)} r^{p-1} \cdot \int_{S^{p-1}} f(ry) d\mu(y) d\lambda(r) = \int_{(0,+\infty)} \int_{rS^{p-1}} f(y) d\mu_{rS^{p-1}}(y) d\lambda(r). \end{aligned}$$

Dabei können die Integrale auch den Wert  $+\infty$  annehmen. Infolge gilt

$$\int_{\mathbb{R}^p} f d\lambda_p = \int_{(0,+\infty)} \int_{rS^{p-1}} f(y) d\mu_{rS^{p-1}}(y) d\lambda(r) \quad (15.29)$$

für jedes messbare  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  in dem Sinn, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut.

↪ Wenden wir (15.29) speziell auf  $f = \mathbb{1}_{K_R(0)}$  an, so folgt

$$\lambda_p(K_R(0)) = \mu(S^{p-1}) \int_{(0,R]} r^{p-1} d\lambda(r) = \frac{R^p}{p} \cdot \mu(S^{p-1}). \quad (15.30)$$

#### 15.6.14 Beispiel.

↪ Man betrachte den Spezialfall einer 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^p$ , also  $d = 1$ . Angenommen  $\phi : (a, b) \rightarrow M$  mit  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ist eine Einbettung, so folgt für  $A \in \mathfrak{B}(M)$  mit  $A \subseteq \phi((a, b))$

$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det \phi'(s)^T \phi'(s)} d\lambda_1(s) = \int_{\phi^{-1}(A)} \|\phi'(s)\|_2 d\lambda(s).$$

Insbesondere gilt

$$\mu(\phi((a, b))) = \int_{(a,b)} \|\phi'(s)\|_2 ds.$$

Angenommen  $\phi$  ist sogar auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar, so stimmt nach Satz 11.1.8 dieser Wert mit der Weglänge von  $\phi$ , wie sie in der Analysis II definiert wurde, überein.

↪ Man betrachte den Spezialfall einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^p$ , also  $d = 2$ . Für eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  rechnet man elementar nach, dass

$$\sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} = \sqrt{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \right\|_2^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right)^2}, \quad (15.31)$$

wobei  $(\cdot, \cdot)$  das übliche Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^p$  bezeichnet. Daher gilt für ein  $B \in \mathfrak{B}(M)$  mit  $B \subseteq \phi(C)$ ,

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \right\|_2^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right)^2} d\lambda_2(s).$$

$\rightsquigarrow$  Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit, dh.  $p = 3, d = 2$ , so kann man (15.31) schreiben als

$$\sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2,$$

wobei  $x \times y$  das *Kreuzprodukt* zweier Dreivektoren ist:

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für ein  $B \in \mathfrak{B}(M)$  mit  $B \subseteq \phi(C)$ ,

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2 d\lambda_2(s).$$

In dem ganz einfachen Fall, dass  $\phi((\xi_1, \xi_2)^T) = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2$ , wobei  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängig sind, so folgt

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2 = \|v_1 \times v_2\|_2.$$

Nach elementargeometrischen Überlegungen ist das gerade die Fläche des von  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannten Parallelogramms  $\phi([0, 1] \times [0, 1])$ , was gemäß obiger Formel auch durch

$$\mu(\phi([0, 1] \times [0, 1])) = \int_{[0, 1] \times [0, 1]} \|v_1 \times v_2\|_2 d\lambda_2 = \|v_1 \times v_2\|_2$$

bestätigt wird. Also passen unser Oberflächenbegriff und der aus der elementaren Geometrie zusammen.

$\rightsquigarrow$  Kommen wir noch einmal zu dem Fall zurück, dass  $M$  ein  $d$ -dimensionaler linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^p$  ist. Aus Beispiel 13.4.3 wissen wir, dass für eine Basis  $x_1, \dots, x_d$  von  $M$  die lineare Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$  mit  $\phi((\xi_1, \dots, \xi_d)^T) = \sum_{j=1}^d \xi_j x_j$  eine Einbettung auf  $M$  ist. Wegen  $d\phi(s) = \phi$  gilt für  $A \in \mathfrak{B}(M)$

$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det \phi^T \phi} d\lambda_d(s) = \sqrt{\det \phi^T \phi} \cdot \lambda_d(\phi^{-1}(A)).$$

Damit stimmt in diesem Spezialfall die Definition von Oberflächenmaß aus Definition 15.6.5 mit der aus der Motivation in Beispiel 15.6.1 am Beginn des aktuellen Kapitels überein; siehe (15.20).

**15.6.15 Beispiel.** Man betrachte den zweidimensionalen Torus  $M$ . Wir verwenden die Notation aus Beispiel 13.4.11. Um das Oberflächenmaß  $\mu(M)$  von  $M$  zu berechnen sei zunächst bemerkt, dass wegen Lemma 15.6.12 sicherlich  $\mu(K_1) = 0 = \mu(K_2)$ . Außerdem gilt

$$d\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}^T d\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \cos \theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt aus (15.22)

$$\mu(M) = \mu(M \setminus (K_1 \cup K_2)) = \int_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)} (2 + \cos \theta) d\lambda_2\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos \theta) d\theta = 8\pi^2.$$

## 15.7 Integralsätze

**15.7.1 Lemma.** Sei  $A$  eine reelle und reguläre  $p \times p$ -Matrix geschrieben in der Form  $A = (B|b)$ , wobei  $b \in \mathbb{R}^p$  und  $B \in \mathbb{R}^{p \times (p-1)}$ . Dann ist der Vektor  $(e_p^T A^{-1})^T$  nicht der Nullvektor und steht normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$ . Somit ist

$$v := \frac{1}{\|(e_p^T A^{-1})^T\|_2} (e_p^T A^{-1})^T \quad (\in \mathbb{R}^p),$$

normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$  und hat bezüglich  $\|\cdot\|_2$  die Länge eins. Zudem gilt  $v^T b > 0$  sowie

$$|\det A| = \sqrt{\det(B^T B)} \cdot (v^T b).$$

*Beweis.* Für  $j = 1, \dots, p-1$  gilt

$$(Be_j, (e_p^T A^{-1})^T) = e_p^T A^{-1} A e_j = 0.$$

Also steht  $(e_p^T A^{-1})^T$  normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$ . Wegen

$$(b, (e_p^T A^{-1})^T) = e_p^T A^{-1} A e_p = 1$$

ist  $(e_p^T A^{-1})^T$  nicht der Nullvektor, wobei  $\frac{1}{\|(e_p^T A^{-1})^T\|_2} = v^T b > 0$ .

Sei  $c = (c_1, \dots, c_p)^T \in \mathbb{R}^p$  definiert durch

$$c_j = (-1)^{p+j} \det B_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Dabei bezeichnet  $B_j$  jene  $(p-1) \times (p-1)$ -Matrix, welche aus  $B$  durch Streichen der  $j$ -ten Zeile hervorgeht. Nach der Cramerschen Regel sind die  $\frac{1}{\det A} c_j$  genau die Einträge der letzten Zeile von  $A^{-1}$ . Es folgt

$$c = (\det A) \cdot (e_p^T A^{-1})^T = (\det A) \cdot \|(e_p^T A^{-1})^T\| \cdot v.$$

Also steht auch  $c$  normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$ , womit

$$(B|c)^T (B|c) = \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & c^T c \end{pmatrix}.$$

Bilden wir hier links und rechts die Determinante, so folgt  $(\det(B|c))^2 = (c^T c) \det B^T B$ . Andererseits kann man  $\det(B|c)$  dadurch berechnen, dass man nach der letzten Spalte entwickelt. Gemäß der Definition von  $c$  ergibt das  $\det(B|c) = c^T c$  und infolge

$$(c^T c) \det B^T B = (\det(B|c))^2 = (c^T c)^2.$$

Also erhalten wir

$$\det B^T B = c^T c = (\det A)^2 \cdot \|(e_1^T A^{-1})^T\|_2^2 \cdot v^T v = (\det A)^2 \cdot \frac{1}{|v^T b|^2}$$

und daraus die Behauptung.  $\square$

Für  $L \subseteq \mathbb{R}^p$  wird die Bedingung (siehe (14.33))

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{\lambda_p(K_\delta(L))}{\delta} = 0 \quad (15.32)$$

im kommenden Satz eine Rolle spielen. Sie bedeutet, dass die Menge  $L$  in einem gewissen Sinne klein ist. Insbesondere erfüllen endliche Mengen  $L$  diese Bedingung.

**15.7.2 Satz.** Für eine beschränkte und offene Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ , sei  $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion derart, dass  $f|_G$  stetig differenzierbar ist. Weiters sei der Träger  $\text{supp } f$  von  $f$  in  $G \cup \partial^o G \cup L$  enthalten, wobei  $L \subseteq \partial G \setminus \partial^o G$  die Bedingung (15.32) erfüllt.

Ist  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  für  $j = 1, \dots, p$  über  $G$  nach  $\lambda_p$  integrierbar, und ist  $f|_{\partial^o G}$  über  $\partial^o G$  nach dem Oberflächenmaß  $\mu$  integrierbar, so gilt für ein beliebiges  $w \in \mathbb{R}^p$

$$\int_G df(x) w d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} f(y) \cdot (v(y)^T w) d\mu(y), \quad (15.33)$$

wobei  $v(y)$  die äußere Normale im Punkt  $y \in \partial^o G$  ist; vgl. Korollar 13.6.8.

Die Integrierbarkeit von  $f|_{\partial^o G}$  über  $\partial^o G$  nach  $\mu$  ist automatisch erfüllt, wenn  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^o G$ , oder wenn  $\mu(\partial^o G) < +\infty$ .

*Beweis.*

$\rightsquigarrow$  Die Funktion  $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  ist wegen ihrer Stetigkeit und wegen der Kompaktheit von  $\bar{G}$  beschränkt. Also folgt aus  $\mu(\partial^o G) < +\infty$  sicherlich die Integrierbarkeit von  $f|_{\partial^o G}$  nach  $\mu$ .

Aus  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^o G$  folgt  $\text{supp } f \cap \partial G = \text{supp } f \cap \partial^o G$ . Diese Menge ist somit kompakt, woraus sich  $\mu(\text{supp } f \cap \partial^o G) < +\infty$  ergibt; vgl. Proposition 15.6.10. Da  $f|_{\partial^o G}$  außerhalb von  $\text{supp } f \cap \partial^o G$  verschwindet, erhalten wir die Integrierbarkeit von  $f|_{\partial^o G}$  nach  $\mu$ .

$\rightsquigarrow$  Wir zeigen zunächst, dass es zu jedem  $x \in G$  eine offene Umgebung  $U_x$  derart gibt, dass (15.33) stimmt, und zwar für alle  $f$  mit Träger in  $U_x$ . Für  $x \in G$  sei  $U_x$  eine  $\epsilon$ -Kugel bzgl. der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm, deren Abschluss ganz in  $G$  enthalten ist. Also

$$\begin{aligned} U_x &= (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_p - \epsilon, x_p + \epsilon) \\ \overline{U_x} &= [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \times \cdots \times [x_p - \epsilon, x_p + \epsilon] \subseteq G. \end{aligned}$$

Zunächst verschwindet mit dem Integranden auch das Oberflächenintegral auf der rechten Seite von (15.33). Für  $\text{supp}(f) \subseteq U_x$  folgt für  $w = e_1$  mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_G df(a) w d\lambda_p(a) &= \int_{U_x} df(a) e_1 d\lambda_p(a) \\ &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \cdots \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} df(x + t_1 e_1 + \cdots + t_p e_p) e_1 dt_1 \dots dt_p. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Das innerste Integral ist wegen  $df(a)e_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$  gleich

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t_1 e_1 + \dots + t_p e_p) dt_1 =$$

$$f(x + \epsilon e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_p e_p) - f(x - \epsilon e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_p e_p) = 0 - 0,$$

da  $f$  außerhalb von  $U_x$  verschwindet. Also ist auch das Integral in (15.34) Null. Vertauscht man die Integrationsreihenfolge in (15.34) entsprechend, so sieht man, dass auch  $\int_G df(a)w d\lambda_p(a) = 0$ , wenn  $w = e_2, \dots, e_p$ . Wegen der Linearität folgt, dass dieses Integral verschwindet für beliebige  $w \in \mathbb{R}^p$ .

↔ In diesem Schritt zeigen wir, dass es zu jedem  $x \in \partial^\circ G$  eine offene Umgebung  $U_x$  derart gibt, dass (15.33) für alle  $f$  mit Träger in  $U_x$  stimmt. Dazu wählen wir eine Karte  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  mit  $x \in U_\varphi$ , welche aus einer Einbettung  $\phi$  und aus einem  $w \notin T_x = d\phi(\phi^{-1}(x))\mathbb{R}$  wie in Bemerkung 13.4.10 hervorgeht.

Weiters schränken wir  $D_\varphi$  so ein, dass die Mengen  $D_\varphi^\pm$  aus (13.26) zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}^p$  sind. Gemäß Bemerkung 13.6.7 tritt damit Fall (ii) oder Fall (iii) von Lemma 13.6.4 ein. Indem wir nötigenfalls von  $\varphi$  zu  $S \circ \varphi$  übergehen, können wir Fall (iii) annehmen. Wegen Korollar 13.6.8 gilt dann

$$v(y) = v_\varphi(y) = \frac{1}{\|d\varphi(y)^T e_p\|_2} d\varphi(y)^T e_p \quad \text{für } y \in U_\varphi \cap \partial^s G. \quad (15.35)$$

Wir wählen  $\rho > 0$  so klein, dass  $K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)) \subseteq D_\varphi$ . Für  $f$  wie in der Aussage des Satzes mit  $\text{supp } f \subseteq \varphi^{-1}(U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) \subseteq U_\varphi$ , folgt wegen

$$G \cap U_\varphi \cap \varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) = U_\varphi^- \cap \varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0]),$$

wobei  $\binom{s}{0} := \varphi(x) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$ , aus der Transformationsregel, Satz 15.1.3,

$$\begin{aligned} \int_G df(a)w d\lambda_p(a) &= \int_{\varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0])} df(a)w d\lambda_p(a) \\ &= \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0]} df(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}) w \cdot \left| \det d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi} \right| d\lambda_p\binom{t}{\xi}. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass voraussetzungsgemäß das erste Integral in dieser Gleichungskette existiert und somit auch das letzte. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz stimmt  $\int_G df(a)w d\lambda_p(a)$  überein mit

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, -\epsilon]} df(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}) w \cdot \left| \det d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi} \right| d\lambda_p\binom{t}{\xi}. \quad (15.36)$$

Wenden wir Lemma 15.7.1 auf  $A = (B|b) = d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}$  an, so folgt wegen  $B = d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}(e_1 | \dots | e_{p-1}) = d\phi(t)$  und  $b = d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}e_p = w$  (siehe Bemerkung 13.4.10) sowie  $(e_p^T A^{-1})^T = d\varphi(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})^T e_p$ , dass

$$v_{t,\xi} := \frac{1}{\|d\varphi(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})^T e_p\|_2} d\varphi(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})^T e_p$$

normiert ist, normal auf  $d\phi(t) \mathbb{R}^{p-1}$  steht und  $v_{t,\xi}^T w > 0$  erfüllt. Da  $v_{t,0} = v(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$  auch diese Eigenschaften hat, folgt wegen  $(\dim d\phi(t) \mathbb{R}^{p-1})^\perp = 1$ , dass  $v_{t,\xi} = v(\phi(t))$ ; vgl. (15.35). Außerdem gilt

$$|\det d\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)| = |\det A| = \sqrt{\det(B^T B)} \cdot (v^T b) = \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} \cdot (v(\phi(t))^T w).$$

Die Kettenregel, Proposition 10.1.18, ergibt zudem

$$\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)}{\partial \xi} = df(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)) d\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) e_p = df(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)) w.$$

Mit dem Satz von Fubini, Satz 14.4.1, erhalten wir daher

$$\begin{aligned} & \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, -\epsilon]} df(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)) w \cdot |\det d\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)| d\lambda_p\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) = \\ & \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s)} \int_{-\rho}^{-\epsilon} \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)}{\partial \xi} \cdot v(\phi(t))^T w \cdot \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} d\xi d\lambda_{p-1}(t) = \\ & \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s)} \left( f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} -\epsilon \\ t \end{smallmatrix}\right) - f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} -\rho \\ t \end{smallmatrix}\right) \right) \cdot (v(\phi(t))^T w) \cdot \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} d\lambda_{p-1}(t). \end{aligned}$$

Nun gilt  $f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} -\rho \\ t \end{smallmatrix}\right) = 0$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  auch  $f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} -\epsilon \\ t \end{smallmatrix}\right) \rightarrow f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$  für  $\epsilon \searrow 0$ . Da  $\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \mapsto d\phi(t)$  und  $\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \mapsto f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)$  auf der kompakten Menge  $K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0]$  stetig und infolge beschränkt sind, können wir den Satz von der beschränkten Konvergenz für  $\epsilon \searrow 0$  anwenden. Also stimmt (15.36) überein mit

$$\int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s)} f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (v(\phi(t))^T w) \cdot \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} d\lambda_{p-1}(t) = \int_{\partial^o G} f(y) \cdot (v(y)^T w) d\mu(y).$$

Wir haben also zu festem  $x \in \partial^o G$  und  $w \notin T_x$  eine offene Umgebung  $U(w)$ , nämlich das von  $w$  ausgehend konstruierte  $\varphi^{-1}(U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)))$ , derart gefunden, dass die Aussage gilt für alle  $f$  mit Träger in dieser Umgebung.

Man wähle nun eine Basis von  $w_1, \dots, w_p$  von  $\mathbb{R}^p$  mit  $w_j \notin T_x$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Sei  $U_x$  der Schnitt der  $U(w_j)$ . Für  $f$  mit  $\text{supp } f \subseteq U_x$  und  $w \in \mathbb{R}^p$  folgt dann (15.33) wegen der Linearität der Integrale in  $w$ .

$\rightsquigarrow$  Sei  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den im Satz gemachten Voraussetzungen, wobei  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^o G$ . Zu jedem  $x \in \text{supp } f$  gibt es nach den ersten beiden Beweisteilen offene  $U_x \ni x$  derart, dass der Satz für Funktionen mit Träger in  $U_x$  richtig ist. Nach Lemma 14.5.8 gibt es zu dieser offenen Überdeckung  $C^\infty$ -Funktionen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  derart, dass  $\text{supp } \gamma_k \subseteq U_{x(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , und (14.30) gilt.

Insbesondere haben wir  $\text{supp } f \cdot \gamma_k \subseteq U_{x(k)}$ . Somit stimmt (15.33) für diese Funktionen. Andererseits gilt  $f = f \cdot \sum_{k=1}^n \gamma_k$  und daher

$$\begin{aligned} \int_G df(a)w d\lambda_p(a) &= \sum_{k=1}^n \int_G d(f \cdot \gamma_k)(a) w d\lambda_p(a) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\partial^o G} (f \cdot \gamma_k)(y) \cdot (v(y)^T w) d\mu(y) = \int_{\partial^o G} f(y) \cdot (v(y)^T w) d\mu(y). \end{aligned}$$

↪ Wir behandeln nun den allgemeinsten Fall. Sei also sei  $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den im Satz gemachten Voraussetzungen, wobei  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^o G \cup L$ . Für  $\delta \in (0, 1)$  betrachte die Funktion

$$f_\delta := (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) f,$$

welche klarerweise  $C^1$  auf  $G$  und stetig auf  $\bar{G}$  ist. Aus (14.27) in Lemma 14.5.7 wissen wir, dass  $\text{supp } f_\delta \subseteq \text{supp } f \setminus \bar{L} \subseteq G \cup \partial^o G$ . Somit können wir das bereits Bewiesene anwenden und erhalten

$$\int_G df_\delta(x)w d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} f_\delta(y) \cdot (v(y)^T w) d\mu(y). \quad (15.37)$$

Auf  $\bar{G} \setminus \bar{L} \supseteq \partial G \setminus (\partial G \setminus \partial^o G) = \partial^o G$  gilt gemäß (14.29) in Lemma 14.5.7  $f_\delta(y) \rightarrow f(y)$  für  $\delta \searrow 0$ . Daraus und aus der vorausgesetzten Integrierbarkeit von  $y \mapsto f(y)$  nach  $\mu$  schließen wir mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz, dass die rechte Seite für  $\delta \searrow 0$  gegen  $\int_{\partial^o G} f(y) \cdot (v(y)^T w) d\mu(y)$  konvergiert.

$df(x)w$  minus der Integrand der linken Seite lässt sich für  $x \in G$  betragsmäßig abschätzen, siehe (14.22), (14.23):

$$\begin{aligned} |df(x)w - df_\delta(x)w| &= |d((k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) \cdot f)w| \\ &= \left| \sum_{j=1}^p \left( \frac{\partial(k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})}{\partial x_j}(x) f(x) + (k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) w_j \right| \\ &\leq \frac{C\|f\|_\infty\|w\|_1}{\delta} + |df(x)w|. \end{aligned}$$

Aus (14.28) in Lemma 14.5.7 folgt

$$\begin{aligned} \int_G |df(x)w - df_\delta(x)w| d\lambda_p(x) &= \int_G \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) \cdot |df(x)w - df_\delta(x)w| d\lambda_p(x) \\ &\leq 5C\|f\|_\infty\|w\|_1 \frac{\lambda_p(K_{5\delta}(L))}{5\delta} + \int_G \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) \cdot |df(x)w| d\lambda_p(x). \end{aligned} \quad (15.38)$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  strebt der erste Summand wegen (15.32) gegen Null. (14.29) in Lemma 14.5.7 ergibt  $\mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) \rightarrow 0$ ,  $x \in G \subseteq \bar{G} \setminus \bar{L}$ . Wegen der Integrierbarkeit von  $|df(x)w|$  können wir den Satz von der beschränkten Konvergenz anwenden, um auch die Konvergenz des zweiten Summanden von (15.38) gegen Null zu erhalten. Somit konvergiert die linke Seite von (15.37) gegen  $\int_G df(x)w d\lambda_p(x)$ .





**15.7.3 Bemerkung.** Oft wird Satz 15.7.2 angewandt, wenn  $L := \partial G \setminus \partial^o G$  Bedingung (15.32) erfüllt. Wegen  $G \cup \partial^o G \cup L = G \cup \partial G = \overline{G}$  fällt dann die Bedingung an den Träger weg.

Wie schon bemerkt, bedeutet Bedingung (15.32), dass  $L$  in einem gewissen Sinn klein ist. Das spiegelt sich auch in der nächsten wieder.

**15.7.4 Lemma.** Sei  $F \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ , enthalten in der endlichen Vereinigung von kompakten Mengen  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , wobei  $F_j$  endlich oder  $F_j$  Teilmenge einer  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit<sup>13</sup> mit  $0 < d \leq p - 2$  ist. Dann gilt

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{\lambda_p(K_\delta(F))}{\delta} = 0. \quad (15.39)$$

*Beweis.* Zunächst genügt es, wegen<sup>14</sup>

$$K_\delta(F) \subseteq K_\delta\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right) \subseteq K_\delta(F_1) \cup \dots \cup K_\delta(F_n)$$

zu zeigen, dass (15.39) für die einzelnen Mengen  $F_j$  gilt. Dabei können wir obendrein voraussetzen, dass die endlichen  $F_j$  sogar einpunktig sind. Also können wir  $n = 1$  und  $F_1 = F$  annehmen. Ist  $F$  einpunktig, so folgt wegen  $p > 1$  für eine geeignete Konstante  $c$  aus (14.16)

$$\frac{\lambda_p(K_\delta(F))}{\delta} \leq c \frac{\delta^p}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Sei nun  $F \subseteq M$  für eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $0 < d \leq p - 2$ . Zu jedem  $x \in F$  gibt es eine Karte  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  mit  $x \in U_\varphi$ , welche aus einer Einbettung  $\phi$  und aus Vektoren  $w_1, \dots, w_{p-d} \in \mathbb{R}^p$ , welche zusammen mit dem Bildraum von  $d\phi(\phi^{-1}(x))$  ganz  $\mathbb{R}^p$  aufspannen, wie in Bemerkung 13.4.10 hervorgeht.

Sei  $\rho_x > 0$  so klein, dass  $K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)) \subseteq D_\varphi$ . Infolge ist  $A_x := \varphi^{-1}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) \subseteq U_\varphi$  eine kompakte Umgebung von  $x$ . Daher und wegen der Abgeschlossenheit von  $U_\varphi^c$  gilt  $d(A_x, U_\varphi^c) = \inf\{\|u - v\|_\infty : u \in A_x, v \in U_\varphi^c\} > 0$ ; siehe Lemma 14.6.1. Also gilt für  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}d(A_x, U_\varphi^c) =: \beta$  sicher  $K_\delta(M \cap A_x) \subseteq U_\varphi$ . Nun ist

$$M \cap A_x = M \cap U_\varphi \cap A_x = \varphi^{-1}(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) \cap \varphi^{-1}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi^{-1}(x)) \times \{0\})$$

kompakt. Zu  $y \in K_\delta(M \cap A_x)$  gibt es demnach ein  $z \in M \cap A_x$  mit  $\|y - z\|_\infty = d(y, M \cap A_x) \leq \delta$ ; siehe Lemma 14.6.1. Da jeder Punkt der Form  $ty + (1 - t)z$  mit  $t \in [0, 1]$  einen Abstand zu  $z$  und daher zu  $M \cap A_x$  kleiner oder gleich  $\delta$  hat, liegt diese Verbindungsstrecke ganz in  $K_\delta(M \cap A_x) \subseteq K_\beta(M \cap A_x) \subseteq U_\varphi$ . Mit<sup>15</sup>

$$c := \sup\{\max(\|d\varphi(u)\|, |\det d\varphi^{-1}(\varphi(u))|) : u \in K_\beta(M \cap A_x)\} < +\infty$$

folgt daher aus Lemma 10.1.23 angewandt auf  $\varphi$

$$d(\varphi(y), K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi^{-1}(x)) \times \{0\}) \leq \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \leq c \|y - z\|_\infty \leq c\delta,$$

<sup>13</sup> $d$  kann vom Index  $j$  abhängen.

<sup>14</sup>Aus  $x \in K_\delta(\bigcup_{j=1}^n F_j)$  folgt, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $j(n) \in \{1, \dots, n\}$  und ein  $y_n \in F_{j(n)}$  gibt mit  $d(x, y_n) < \delta + \frac{1}{n}$ . Also gibt es zumindest ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  derart, dass für eine Teilfolge  $(y_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  immer  $j(n(k)) = j$ , und somit  $x \in K_\delta(F_j)$ .

<sup>15</sup>Man beachte, dass  $K_\beta(M \cap A_x)$  kompakt ist.

und somit

$$\varphi(K_\delta(M \cap A_x)) \subseteq K_{c\delta}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi^{-1}(x)) \times \{0\}) \subseteq K_{c\delta+\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi^{-1}(x)) \times K_{c\delta}^{\|\cdot\|_\infty}(0).$$

Aus Satz 15.1.3 folgt wegen Beispiel 14.4.6 mit einer gewissen Konstanten  $\alpha > 0$ , die nur von den Dimensionen  $p$  und  $d$  abhängt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \lambda_p(K_\delta(M \cap A_x)) &= \frac{1}{\delta} \int_{\varphi(K_\delta(M \cap A_x))} |\det d\varphi^{-1}(u)| d\lambda_p(u) \\ &\leq \frac{c^p \cdot p!}{\delta} \lambda_d(K_{c\delta+\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi^{-1}(x))) \cdot \lambda_{p-d}(K_{c\delta}^{\|\cdot\|_\infty}(0)) \\ &\leq \frac{\alpha \cdot c^p \cdot c^{p-d} \cdot \delta^{p-d} \cdot (c\delta + \rho_x)^d}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Da  $U_x := \varphi^{-1}(U_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)))$  offen in  $\mathbb{R}^p$  ist, lässt sich  $F$  wegen seiner Kompaktheit durch endlich viele Mengen  $U_{x_1}, \dots, U_{x_l}$  dieser Form, überdecken. Wegen

$$K_\delta(F) \subseteq K_\delta\left(\bigcup_{i=1}^l M \cap U_{x_i}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^l K_\delta(M \cap A_{x_i})$$

folgt auch  $\delta^{-1} \cdot \lambda_p(K_\delta(F)) \rightarrow 0$ . □

**15.7.5 Beispiel.** Wir betrachten nochmals den Würfel, wie in Beispiel 13.6.11.

Auf die Kanten  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, 12$ , können wir Lemma 15.7.4 anwenden und erhalten daher für  $\partial G \setminus \partial^o G = \bigcup_{j=1, \dots, 12} E_j$

$$\frac{\lambda_p(K_\delta(\partial G \setminus \partial^o G))}{\delta} \xrightarrow{\delta \searrow 0} 0.$$

Also können wir auf den Würfel Satz 15.7.2 anwenden.

Wir wollen nun einige klassische Integralsätze formulieren, die mehr oder weniger unmittelbar aus Satz 15.7.2 folgen. Dazu benötigen wir neue Begriffsbildungen.

**15.7.6 Definition.** Sei  $h : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ , ( $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ) eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann bezeichnen wir mit  $\operatorname{div} h : G \rightarrow \mathbb{R}$  (*Divergenz von  $h$* ) die Abbildung<sup>16</sup>

$$\operatorname{div} h(x) := \operatorname{tr} dh(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial h_j}{\partial x_j}(x).$$

Ist  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ) ebenfalls  $C^1$ , so bezeichnet  $\operatorname{grad} g = \nabla g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  (*Gradient von  $g$  bzw. Nabla  $g$* ) die Abbildung

$$\operatorname{grad} g(x) = \nabla g(x) := dg(x)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix}.$$

Ist schließlich  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ) zweimal stetig differenzierbar, so bezeichnet  $\Delta g : G \rightarrow \mathbb{R}$  (*Laplace  $g$* ) die Abbildung

$$\Delta g(x) := \operatorname{div}(\nabla g(x)) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

<sup>16</sup>Die Spur  $\operatorname{tr} C$  einer quadratischen Matrix  $C$  ist die Summe aller Einträge auf ihrer Hauptdiagonalen.

**15.7.7 Korollar** (Gaußscher Integralsatz). Für eine beschränkte und offene Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ , sei  $h : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine stetige Funktion derart, dass  $h|_G$  stetig differenzierbar ist. Weiters sei der Träger  $\text{supp } h$  von  $h$  in  $G \cup \partial^o G \cup L$  enthalten, wobei  $L \subseteq \partial G \setminus \partial^o G$  Bedingung (15.32) erfüllt.

Ist  $x \mapsto \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x)$  für  $i = 1, \dots, p$  über  $G$  nach  $\lambda_p$  integrierbar, und ist  $h_i|_{\partial^o G}$  für  $i = 1, \dots, p$  über  $\partial^o G$  nach dem Oberflächenmaß  $\mu$  integrierbar, so gilt

$$\int_G \text{div } h(x) d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} v(y)^T h(y) d\mu(y).$$

Die Integrierbarkeit der  $h_i|_{\partial^o G}$  über  $\partial^o G$  nach  $\mu$  ist automatisch erfüllt, wenn  $\text{supp } h \subseteq G \cup \partial^o G$ , oder wenn  $\mu(\partial^o G) < +\infty$ .

*Beweis.* Wir wenden Satz 15.7.2 auf  $f = h_j$ ,  $w = e_j$  für  $j = 1, \dots, p$  an, addieren die entsprechenden linken und rechten Seiten von (15.33), und erhalten

$$\begin{aligned} \int_G \text{div } h(x) d\lambda_p(x) &= \sum_{j=1}^p \int_G dh_j(x) e_j d\lambda_p(x) \\ &= \sum_{j=1}^p \int_{\partial^o G} h_j(y) \cdot (v(y)^T e_j) d\mu(y) = \int_{\partial^o G} v(y)^T h(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

□

**15.7.8 Beispiel.** Sei  $G = U_1(0) \subseteq \mathbb{R}^p$  die offene Einheitskugel. Wir wissen schon, dass  $\partial^o G = \partial G = S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 = 1\}$  und dass  $v(y) = y$ . Die Funktion  $f(x) = x$  erfüllt die Voraussetzungen aus Korollar 15.7.7, wobei  $\text{div } f(x) \equiv p$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} p\lambda_p(U_1(0)) &= \int_G \text{div } f(x) d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} v(y)^T f(y) d\mu(y) \\ &= \int_{\partial^o G} y^T y d\mu(y) = \mu(S^{p-1}). \end{aligned}$$

**15.7.9 Korollar** (Greenscher Integralsatz). Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und beschränkt, und seien  $h, g : O \rightarrow \mathbb{R}$  beide  $C^2$  auf einer offenen,  $\bar{G}$  enthaltenden Menge  $O$ . Weiters seien die Träger von  $h$  und  $g$  in  $G \cup \partial^o G \cup L$  enthalten, wobei  $L \subseteq \partial G \setminus \partial^o G$  Bedingung (15.32) erfüllt.

Sind  $g|_{\partial^o G}$  und  $h|_{\partial^o G}$  über  $\partial^o G$  nach dem Oberflächenmaß  $\mu$  integrierbar, so gilt (Erste Greensche Identität)

$$\int_G g(x) \Delta h(x) d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} g(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) d\mu(y) - \int_G \text{grad}(g)(x)^T \text{grad}(h)(x) d\lambda_p(x),$$

und (Zweite Greensche Identität)

$$\int_G (h(x) \Delta g(x) - g(x) \Delta h(x)) d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} (h(y) \frac{\partial g}{\partial v(y)}(y) - g(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)) d\mu(y).$$

Dabei ist  $\frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)$  die Richtungsableitung von  $h$  in Richtung der äußeren Normalen  $v(y)$ , also  $dh(y)v(y)$ .

Die Integrierbarkeit von  $g|_{\partial^o G}$  und  $h|_{\partial^o G}$  nach  $\mu$  ist automatisch erfüllt, wenn  $\text{supp } g, \text{supp } h \subseteq G \cup \partial^o G$ , oder wenn  $\mu(\partial^o G) < +\infty$ .

*Beweis.* Für  $f(x) = g(x) \text{grad } h(x)$  ( $\in \mathbb{R}^p$ ) berechnet man

$$\text{div } f(x) = g(x) \Delta h(x) + \text{grad } g(x)^T \text{grad } h(x).$$

Außerdem ist  $v(y)^T f(y) = g(y) dh(y) v(y) = g(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)$ .

Da alle partiellen Ableitungen von  $f$  stetig auf  $O$  und daher auf  $\bar{G} \subseteq O$  beschränkt sind, sind alle Funktionen  $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  für  $i, j = 1, \dots, p$  über  $G$  nach  $\lambda_p$  integrierbar.

Aus dem selben Grund ist  $\|\text{grad } h(x)\|$  beschränkt auf  $\bar{G}$ . Wegen der Integrierbarkeit von  $g|_{\partial^o G}$  folgt daher die von  $f_j|_{\partial^o G}$  für  $j = 1, \dots, p$  nach  $\mu$ .

Wir können also Korollar 15.7.7 auf  $f$  anwenden, und erhalten die erste Greensche Identität. Die zweite folgt, wenn man die erste Greensche Identität zweimal hernimmt, einmal wie oben und einmal mit vertauschten Rollen von  $g$  und  $h$ , und diese dann von einander subtrahiert.  $\square$

*15.7.10 Beispiel.* Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_3^2 \\ x_1^2 x_2 - x_3^3 \\ 2x_1 x_2 + x_2^2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei  $M$  die „offene“ obere Halbkugeloberfläche mit Radius  $a > 0$ , dh.

$$M = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\|_2 = a, y_3 > 0\}.$$

Als offene Teilmenge der Kugeloberfläche ist  $M$  eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Für  $y \in M$  ist  $y \mapsto v(y) := \frac{1}{a}y$  eine stetige Normalenfunktion; vgl. Beispiel 13.6.10.

Wir wollen das Flussintegral  $\int_M v(y)^T f(y) d\mu(y)$  berechnen, und zwar nicht direkt, sondern mit Hilfe von Korollar 15.7.7. Dazu betrachten wir die offene obere Halbkugel mit Radius  $a$ , dh. die offene Menge

$$G = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\|_2 < a, y_3 > 0\}.$$

Setzen wir

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0, \|y\|_2 = a\} \quad \text{und} \quad N = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0, \|y\|_2 < a\},$$

so überprüft man leicht, dass

$$\partial G = L \cap M \cup N, \quad \partial^s G = \partial^o G = M \cup N, \quad \partial G \setminus \partial^o G = L.$$

Da  $L$  als 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, Bedingung (15.32) erfüllt, siehe Lemma 15.7.4, und da sicherlich  $\mu(\partial^o G) < +\infty$ , können wir Korollar 15.7.7 anwenden und erhalten

$$\int_G \text{div } f d\lambda_3 = \int_M v(y)^T f(y) d\mu(y) + \int_N v(y)^T f(y) d\mu(y).$$

Wegen  $\operatorname{div} f(x) = x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2$  folgt mit Transformation auf Kugelkoordinaten, vgl. Beispiel 15.1.7,

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} f \, d\lambda_3 &= \int_{[0,a] \times [0,2\pi] \times (0,\frac{\pi}{2}]} r^2 \cdot r^2 \cos \theta \, d\lambda_3(r, \alpha, \theta)^T \\ &= \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \cos \theta \, d\alpha \, d\theta \, dr = 2\pi \frac{1}{5} a^5. \end{aligned}$$

Für  $y \in N$  sieht man unmittelbar, dass  $v(y) = (0, 0, -1)^T$ . Außerdem ist  $(\xi, \eta)^T \mapsto (\xi, \eta, 0)^T$  eine Einbettung von  $U_a(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  auf  $N$ . Also gilt

$$\int_N v(y)^T f(y) \, d\mu(y) = \int_{U_a(0)} -2\xi\eta \, d\lambda_2 \left( \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = -2 \int_{-a}^a \eta \int_{-\sqrt{a^2-\eta^2}}^{\sqrt{a^2-\eta^2}} \xi \, d\xi \, d\eta = 0.$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\int_M v(y)^T f(y) \, d\mu(y) = \frac{2\pi}{5} a^5.$$

**15.7.11 Beispiel.** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^p$  definiert durch  $f(x) = \frac{1}{\|x\|^p} x$  ist als Zusammensetzung von  $C^1$ -Funktionen offensichtlich selber stetig differenzierbar, wobei  $(j = 1, \dots, p)$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( x_j \left( \sum_{k=1}^p x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} \right) = \left( \sum_{k=1}^p x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} - x_j \frac{p}{2} \left( \sum_{k=1}^p x_k^2 \right)^{-\frac{p+2}{2}} 2x_j = \frac{1}{\|x\|^{p+2}} (\|x\|^2 - px_j^2),$$

und daher  $\operatorname{div} f(x) = \frac{1}{\|x\|^{p+2}} \sum_{j=1}^p (\|x\|^2 - px_j^2) = 0$ .

Wir nehmen irgendein offenes und beschränktes  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  derart, dass  $\mu(\partial^o G) < +\infty$  und dass  $\partial G \setminus \partial^o G$  klein im Sinne von (15.32) ist.

Falls  $0 \notin \overline{G}$ , so können wir unmittelbar Korollar 15.7.7 anwenden, da  $f$  auf einer offenen Obermenge von  $\overline{G}$  stetig differenzierbar ist. Wir erhalten

$$\int_{\partial^o G} v(y)^T f(y) \, d\mu(y) = \int_G \operatorname{div} f \, d\lambda_p = 0.$$

Ist andererseits  $0 \in G$ , so wähle man  $\rho > 0$  so klein, dass  $K_\rho(0) \subseteq G$ , und betrachte die offene Menge  $G' = G \setminus K_\rho(0)$ . Man überprüft elementar, dass  $\partial G' = \partial G \cup (\rho S^{p-1})$  und  $\partial^o G' = \partial^o G \cup (\rho S^{p-1})$ , wobei  $v(y) = -\frac{1}{\rho} y$ .

Jetzt ist  $f$  auf einer offenen Obermenge von  $\overline{G'}$  stetig differenzierbar. Also können wir Korollar 15.7.7 anwenden, und erhalten

$$\int_{\partial^o G} v(y)^T f(y) \, d\mu(y) + \int_{\rho S^{p-1}} v(y)^T f(y) \, d\mu(y) = \int_{\partial^o G'} v(y)^T f(y) \, d\mu(y) = 0.$$

Für  $y \in \rho S^{p-1}$  gilt dabei  $v(y)^T f(y) = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\|y\|^p} (y, y) = -\frac{1}{\rho^{p-1}}$ , und daher

$$\int_{\rho S^{p-1}} v(y)^T f(y) d\mu(y) = -\frac{1}{\rho^{p-1}} \mu(\rho S^{p-1}) = -\frac{1}{\rho^{p-1}} \rho^{p-1} \mu(S^{p-1}) = -\mu(S^{p-1}),$$

wobei vorletzte Gleichheit aus Fakta 15.6.8 folgt. Also gilt im Fall  $0 \in G$

$$\int_{\partial^o G} v(y)^T f(y) d\mu(y) = \mu(S^{p-1}).$$

## 15.8 Poissonsche Darstellung harmonischer Funktionen\*

**15.8.1 Definition.** Ist  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit offenem  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  zweimal stetig differenzierbar, so heißt  $g$  *harmonisch*, wenn  $\Delta g \equiv 0$ , wobei

$$\Delta g(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

Für reellwertige  $g$  gilt  $\Delta g(x) = \operatorname{div}(\nabla g(x))$ ; vgl. Definition 15.7.6.

15.8.2 Beispiel.

↔ Die Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(t) = \ln \|t\| = \frac{1}{2} \ln(t_1^2 + t_2^2), \quad (15.40)$$

erfüllt  $\nabla g(t) = \frac{1}{\|t\|^2} \cdot t$ . Wegen  $\Delta g(t) = \operatorname{div}(\nabla g(t))$  folgt aus Beispiel 15.7.11, dass  $g$  harmonisch ist.

↔ Für  $p > 2$  wird die Funktion  $g : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(t) = \frac{1}{2-p} \cdot \|t\|^{2-p} = \frac{1}{2-p} \cdot \left( \sum_{k=1}^p t_k^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} \quad (15.41)$$

genauso wie die Funktion aus dem letzten Beispiel eine wichtige Rolle spielen. Sie erfüllt auch  $\nabla g(t) = \frac{1}{\|t\|^p} \cdot t$ , und wieder wegen Beispiel 15.7.11 ist  $g$  harmonisch.

↔ Ist  $g$  wie in (15.40) bzw. (15.41) und ist  $y \in \mathbb{R}^p$ , so folgt sofort, dass auch die Funktion  $g_{-y} : \mathbb{R}^p \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto g(t-y)$  harmonisch ist.

↔ Sei  $\hat{g}_0$  die konstante Funktion  $\hat{g}_0 = \frac{1}{2-p} \cdot \mathbb{1}_{(2,+\infty)}(p)$  und für  $x \neq 0$  sei

$$\hat{g}_{-x} : t \mapsto g(\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x), \quad t \in \mathbb{R}^p \setminus \{\frac{1}{\|x\|^2}x\}.$$

Nun gilt  $\Delta \hat{g}_{-x}(t) = \|x\|^2 (\Delta g)(\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x) = 0$ . Also ist auch diese Funktion harmonisch genauso, wie  $(\frac{1}{\|x\|^2}x := \infty \notin \mathbb{R}^p)$

$$w_x(t) = g_{-x}(t) - \hat{g}_{-x}(t), \quad t \in \mathbb{R}^p \setminus \{x, \frac{1}{\|x\|^2}x\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\nabla w_x(t) = \frac{1}{\|t - x\|^p} \cdot (t - x) - \frac{\|x\|}{\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \|^p} \cdot (\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x).$$

Explizit ist für  $x \neq 0$  und  $t \in \mathbb{R}^p \setminus \{x, \frac{x}{\|x\|^2}\}$

$$w_x(t) = \begin{cases} \ln \|t - x\| - \ln \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|, & \text{falls } p = 2, \\ \frac{1}{2-p} \cdot \left( \|t - x\|^{2-p} - \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^{2-p} \right), & \text{falls } p > 2. \end{cases} \quad (15.42)$$

Für  $x = 0$  und  $t \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  gilt

$$w_0(t) = \begin{cases} \ln \|t\|, & \text{falls } p = 2, \\ \frac{1}{2-p} \cdot (\|t\|^{2-p} - 1), & \text{falls } p > 2. \end{cases} \quad (15.43)$$

**15.8.3 Bemerkung.** Sind  $x, y \in \mathbb{R}^p$  mit  $x \neq 0$ , so folgt für  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2 = (\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$  wegen der Bilinearität des Skalarproduktes

$$\begin{aligned} \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^2 &= \|x\|^2\|y\|^2 - 2(x, y) + 1 \\ &= \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1) \\ &= \|x - y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1). \end{aligned} \quad (15.44)$$

Insbesondere gilt  $\|x - y\| = \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$ , wenn  $\|y\| = 1$ , und  $\|x - y\| < \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$ , wenn  $x, y \in U_1(0)$ .

Aus dieser Bemerkung folgt, dass die Funktion  $w_x$  für festes  $x \in U_1(0)$  für  $\|t\| = 1$  verschwindet und für  $t \in U_1(0) \setminus \{x\}$  negativ ist. Man beachte, dass  $K_1(0) \setminus \{x\}$  im Harmonizitätsbereich von  $w_x$  enthalten ist.

**15.8.4 Bemerkung.** Die Funktion  $t \mapsto \ln \|t - x\|$  im Fall  $p = 2$  bzw.  $t \mapsto \|t - x\|^{2-p}$  im Fall  $p > 2$  ist für beliebiges  $x \in \mathbb{R}^p$  über jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^p$  nach  $\lambda_p$  integrierbar. Dazu sei  $R > 0$  so groß, dass  $K_R(x)$  das gegebene Kompaktum umfasst. Nun gilt im Fall  $p = 2$  mit Transformation auf Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{K_R(x)} |\ln \|t - x\|| d\lambda_2(t) &= \int_{K_R(0)} |\ln \|t\|| d\lambda_2(t) \\ &= \int_{(0, R]} 2\pi |\ln r| r d\lambda(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{R^2}{4}(2 \ln R - 1), & \text{falls } R \geq 1, \\ \frac{R^2}{4}(1 - 2 \ln R), & \text{falls } R < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall  $p > 2$  gilt mit Transformation auf Kugelkoordinaten (siehe auch (15.27))

$$\begin{aligned} \int_{K_R(x)} \|t - x\|^{2-p} d\lambda_p(t) &= \int_{K_R(0)} \|t\|^{2-p} d\lambda_p(t) \\ &= \int_{(0, R]} r^{p-1} \cdot \int_{(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}} r^{2-p} \cdot \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} d\lambda_{p-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} d\lambda(r) \end{aligned}$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \mu(S^{p-1}).$$

Somit ist  $w_0$  auf  $U_1(0)$  nach  $\lambda_p$  integrierbar. Da für festes  $x \in U_1(0) \setminus \{0\}$  die Funktion  $t \mapsto \ln \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$  bzw.  $t \mapsto \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^{2-p}$  auf  $U_1(0)$  beschränkt ist, folgt auch, dass  $w_x$  auf  $U_1(0)$  nach  $\lambda_p$  integrierbar ist.

**15.8.5 Lemma.** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^p$  offen mit  $O \supseteq K_1(0)$  und  $h : O \rightarrow \mathbb{R}$  liege in  $C^2(O)$ . Dann gilt für alle  $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y) d\mu(y) + \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int_{U_1(0)} w_x(t) \Delta h(t) d\lambda_p(t),$$

wobei  $\wp(x, y) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$  der Poissonkern ist und  $w_x(t)$  wie in (15.42) gegeben ist.

*Beweis.* Sei  $x \in U_1(0)$  und  $0 < \rho$  so klein, dass  $K_\rho(x) \subseteq U_1(0)$ . Die offene Menge  $G = U_1(0) \setminus K_\rho(x)$  erfüllt offenbar  $\partial G = S^{p-1} \cup (x + \rho S^{p-1})$ , wobei für die äußere Normale gilt

$$v(y) = y, \quad y \in S^{p-1} \quad \text{und} \quad v(y) = -\frac{1}{\rho}(y - x), \quad y \in x + \rho S^{p-1}.$$

Wenden wir Korollar 15.7.9 an, so folgt wegen  $\Delta w = 0$  auf  $G$

$$\begin{aligned} - \int_G w_x(t) \Delta h(t) d\lambda_p(t) &= \int_{\partial G} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)) d\mu(y) \\ &= \int_{S^{p-1}} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)) d\mu(y) + \int_{x + \rho S^{p-1}} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)) d\mu(y). \end{aligned}$$

Da  $w_x$  auf  $S^{p-1}$  verschwindet, und da für  $x \neq 0$  ( $y \in S^{p-1}$  und somit  $\left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\| = \|x - y\|$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) &= (\nabla w_x(y))^T v(y) = \left( \frac{1}{\|y - x\|^p} \cdot (y - x) - \frac{\|x\|}{\left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^p} \cdot \left( \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right) \right)^T y \\ &= \frac{1}{\|y - x\|^p} \left( (y - x) - (\|x\|^2 y - x) \right)^T y = \frac{1 - \|x\|^2}{\|y - x\|^p} = \wp(x, y), \end{aligned}$$

und für  $x = 0$  ( $y \in S^{p-1}$ )

$$\frac{\partial w_0}{\partial v(y)}(y) = (\nabla w_0(y))^T v(y) = \frac{1}{\|y\|^p} \cdot y^T y = 1 = \wp(0, y),$$

folgt

$$\begin{aligned} &\int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y) d\mu(y) + \int_G w_x(t) \Delta h(t) d\lambda_p(t) \\ &= - \int_{x + \rho S^{p-1}} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)) d\mu(y) \end{aligned} \tag{15.45}$$



$$\begin{aligned}
&= - \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial v(y)}(y) d\mu(y)}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial v(y)}(y) d\mu(y)}_{=:I_2} \\
&\quad - \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} \hat{g}_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) d\mu(y)}_{=:I_3} + \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} g_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) d\mu(y)}_{=:I_4}.
\end{aligned}$$

Für  $y \in x + \rho S^{p-1}$  gilt

$$\frac{\partial g_{-x}}{\partial v(y)}(y) = (\nabla g_{-x})^T v(y) = -\left(\frac{1}{\|y-x\|^p} \cdot (y-x)\right)^T \frac{1}{\rho}(y-x) = -\rho^{1-p}.$$

Aus Fakta 15.6.8, 7, folgt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial v(y)}(y) d\mu(y) \\
&= -\rho^{1-p} \int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) d\mu(y) = -\rho^{1-p} \rho^{p-1} \int_{S^{p-1}} h(x + \rho y) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $h$  bei  $x$  konvergiert dieser Ausdruck für  $\rho \searrow 0$  nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz gegen  $-\mu(S^{p-1}) h(x)$ .

Da  $y \mapsto h(y)$ ,  $y \mapsto \hat{g}_{-x}(y)$ ,  $y \mapsto \nabla h(y)$ ,  $y \mapsto \nabla \hat{g}_{-x}(y)$  alle auf  $K_1(0)$  stetig und daher dort beschränkt sind, und da wegen der Cauchy-Schwarzen Ungleichung

$$\left| \frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial v(y)}(y) \right| \leq \|\nabla \hat{g}_{-x}(y)\|, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \right| \leq \|\nabla h(y)\|,$$

folgt für ein  $C > 0$  mit  $C \geq \|\nabla h(y)\| \cdot \|\hat{g}_{-x}(y)\| + \|\nabla \hat{g}_{-x}(y)\| \cdot |h(y)|$ ,  $y \in K_1(0)$ ,

$$|I_2 - I_3| \leq \int_{x+\rho S^{p-1}} C d\mu = C \rho^{p-1} \mu(S^{p-1}) \rightarrow 0, \quad \rho \searrow 0.$$

Es bleibt  $I_4$ . Auf  $x + \rho S^{p-1}$  ist  $g(y-x)$  konstant gleich  $\ln \rho$  im Fall  $p = 2$  und konstant gleich  $\frac{1}{2-p} \rho^{2-p}$  im Fall  $p > 2$ . Somit gilt für ein geeignetes  $c > 0$  mit  $c \geq \|\nabla h(y)\|$ ,  $y \in K_1(0)$ ,

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq c \int_{x+\rho S^{p-1}} |g(y-x)| d\mu(y) = c(\rho^{p-1} \mu(S^{p-1})) \cdot \begin{cases} |\ln \rho|, & \text{falls } p = 2, \\ \frac{1}{p-2} \rho^{2-p}, & \text{falls } p > 2, \end{cases} \\
&= c \mu(S^{p-1}) \cdot \begin{cases} \rho |\ln \rho|, & \text{falls } p = 2, \\ \frac{1}{p-2} \rho, & \text{falls } p > 2, \end{cases} \xrightarrow{\rho \searrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Für  $\rho \searrow 0$  folgt die Aussage des Lemmas nun aus (15.45), da wegen Bemerkung 15.8.4 und dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\int_G w_x(t) \Delta h(t) d\lambda_p(t) \xrightarrow{\rho \searrow 0} \int_{U_1(0)} w_x(t) \Delta h(t) d\lambda_p(t).$$

□

Im folgenden sei  $\sigma$  das Oberflächenmaß  $\mu$  auf  $S^{p-1}$  multipliziert mit dem Faktor  $\frac{1}{\mu(S^{p-1})}$ . Somit gilt  $\sigma(S^{p-1}) = 1$ .

**15.8.6 Satz (Poisson-Darstellung).** Sei  $h : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig so, dass  $h|_{U_1(0)}$  harmonisch ist. Dann gilt für alle  $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y) d\sigma(y),$$

wobei  $\wp(x, y) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$  der Poissonkern ist.

*Beweis.* Ist  $h$  harmonisch auf einer  $K_1(0)$  umfassenden offenen Menge, so folgt die Darstellung

$$h(x) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y) d\sigma(y),$$

unmittelbar aus Lemma 15.8.5, da  $\Delta h = 0$ .

Für allgemeines  $h$  wie im Satz gefordert gehen wir folgendermaßen vor. Ein stetiges  $h : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$  ist wegen der Kompaktheit von  $K_1(0)$  sogar gleichmäßig stetig. Insbesondere konvergiert  $x \mapsto h(rx)$ ,  $x \in S^{p-1}$  gleichmäßig für  $r \nearrow 1$  gegen  $h|_{S^{p-1}}$ . Für  $r \in (0, 1)$  ist  $x \mapsto h(rx)$  auf  $U_{\frac{1}{r}}(0)$  harmonisch. Also wissen wir

$$h(rx) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(ry) d\sigma(y).$$

Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz geht die rechte Seite für  $r \nearrow 1$  gegen  $\int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y) d\sigma(y)$  und die linke wegen der Stetigkeit von  $h$  gegen  $h(x)$ .  $\square$

**15.8.7 Korollar (Mittelwerteigenschaft).** Sei  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch mit  $G \supseteq K_r(a)$  für  $r > 0$ , so gilt

$$\int_{S^{p-1}} h(a + ry) d\sigma(y) = h(a).$$

*Beweis.* Wende Satz 15.8.6 mit  $x = 0$  auf die ebenfalls harmonische Funktion  $u \mapsto h(a + ru)$  an.  $\square$

**15.8.8 Korollar.** Sei  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch mit  $G \supseteq K_R(a)$  für  $R > 0$ , so gilt

$$\frac{1}{\lambda_p(K_R(a))} \int_{K_R(a)} h d\lambda_p = h(a).$$

*Beweis.* Wir wenden (15.29) auf die Funktion  $x \mapsto u(a + x) \cdot \mathbb{1}_{K_R(0)}$  an und erhalten wegen der Translationsinvarianz von  $\lambda_p$

$$\begin{aligned} \int_{K_R(a)} h d\lambda_p &= \int_{K_R(0)} h(a + x) d\lambda_p(x) = \int_{(0, R)} r^{p-1} \cdot \int_{S^{p-1}} h(a + ry) d\mu(y) d\lambda(r) \\ &= \int_{(0, R)} r^{p-1} \cdot h(a) \cdot \mu(S^{p-1}) d\lambda(r) = \frac{R^p}{p} h(a) \mu(S^{p-1}). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus (15.30).  $\square$

## 15.9 Stokesscher Integralsatz\*

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  offen, beschränkt und  $F : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ,  $F = (F_1, F_2)$ , ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Erfüllt  $h := (F_2, -F_1)^T$  die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes, Korollar 15.7.7, so erhält man die Formel

$$\int_G \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) d\lambda_p(x) = \int_{\partial^\circ G} F(y) t(y) d\mu(y), \quad (15.46)$$

wobei  $t(y) := J\nu(y)$  mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man spricht auch von dem *Gaußschen Integralsatz in der Ebene*.

Wir wollen hier die folgende Bemerkung machen: Der Vektor  $t(y)$  hat Norm 1 und liegt stets im Tangentialraum von  $\partial^\circ G$ , spannt diesen daher auf. Wir sprechen von  $t$  als einer normierten Tangente an  $\partial^\circ G$ .

Der Gaußsche Satz setzt also für ein ebenes Gebiet und ein dort gegebenes Vektorfeld das Integral längs dem Rand von  $G$  über „ $F$  mal Tangentialvektor“ in Verbindung mit dem Flächenintegral über einen gewissen Ausdruck in den Ableitungen des Vektorfeldes. Wir kommen nun zum Integralsatz von Stokes, welcher das gleiche macht, nur dass man anstelle eines ebenen Gebietes eine gekrümmte Fläche betrachtet.

Als erstes wollen wir die Situation des Satzes von Stokes im Detail beschreiben.

**15.9.1 Lemma.** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $T : O \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv und stetig differenzierbar, und sei vorausgesetzt, dass stets  $\text{rang } dT = 2$  gilt. Sei weiters  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt mit  $\bar{G} \subseteq O$ . Definiere

$$M := T(G), \quad \partial^\circ M := T(\partial^\circ G).$$

Dann gilt:

(i)  $M$  ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, und  $\partial^\circ M$  ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

(ii) Seien  $\nu_M : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $t_M : \partial^\circ M \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert als

$$\nu_M := \frac{1}{\left\| \frac{\partial T}{\partial x_1} \times \frac{\partial T}{\partial x_2} \right\|} \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \times \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \circ T^{-1}, \quad t_M := \frac{dT J\nu}{\|dT J\nu\|} \circ T^{-1},$$

wobei  $\nu$  die äußere Normale an  $G$  bezeichnet.

Dann ist  $\nu_M$  eine stetige normierte Normale an  $M$ , und  $t_M$  eine stetige normierte Tangente an  $\partial^\circ M$ .

(iii) Ist  $F : M \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  ein messbares Vektorfeld auf  $M$ , so gilt<sup>17</sup>

$$\int_M F \nu_M d\mu_M = \int_G (F \circ T) \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \times \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) d\lambda_2.$$

Ist  $F : \partial^\circ M \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  ein messbares Vektorfeld auf  $\partial^\circ M$ , so gilt

$$\int_{\partial^\circ M} F t_M d\mu_{\partial^\circ M} = \int_{\partial^\circ G} (F \circ T) dT J\nu d\mu_{\partial^\circ G}.$$

<sup>17</sup>  $\times$  ist hier das Kreuzprodukt zweier Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* Da  $\bar{G}$  kompakt ist und  $T$  stetig und injektiv, ist  $T|_{\bar{G}}$  ein Homöomorphismus auf sein Bild; vgl. Korollar 12.11.10. Somit ist auch  $T|_G : G \rightarrow M$  ein Homöomorphismus und somit sogar eine Einbettung. Also ist  $M$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit; vgl. Fakta 13.4.12. Weiters überzeugt man sich leicht, dass für jede Einbettung  $\phi : D \rightarrow \partial^o G$  in die Mannigfaltigkeit  $\partial^o G$  auch  $T \circ \phi$  eine Einbettung ist. Also wird  $\partial^o M$  durch die Familie der Einbettungen  $T \circ \phi$ , wobei  $\phi$  alle Einbettungen von  $\partial^o G$  durchläuft, beschrieben und ist daher eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Die Abbildungen  $\nu_M$  und  $t_M$  sind wohldefiniert, da stets  $\text{rang } dT = 2$  ist, und daher die Vektoren  $\frac{\partial T}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial T}{\partial x_2}$  linear unabhängig sind, sowie stets  $\ker dT = \{0\}$  ist. Die Stetigkeit von  $\nu_M$  und  $t_M$  ist klar, da beide Zusammensetzungen stetiger Abbildungen sind. Weiters wird der Tangentialraum an  $M$  von den Vektoren  $\frac{\partial T}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial T}{\partial x_2}$  aufgespannt, und damit ist  $\nu_M$  eine Normale. Schließlich ist  $\nu$  orthogonal auf den Tangentialraum von  $\partial^o G$ , und daher spannt  $J\nu$  diesen auf. Wegen der Kettenregel folgt, dass der Tangentialraum an  $\partial^o M$ , als Bild unter  $dT$  von dem von  $\partial^o G$ , von  $t$  aufgespannt wird.

Sei nun  $F : M \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  gegeben. Nach Definition des Oberflächenmaßes gilt

$$\int_M F \nu_M d\mu_M = \int_G [(F \nu_M) \circ T] \sqrt{\det dT^T dT} d\lambda_2.$$

Nun ist, wie eine elementare Rechnung zeigt,  $\det dT^T dT = \|\frac{\partial T}{\partial x_1} \times \frac{\partial T}{\partial x_2}\|^2$ . Setzt man die Definition von  $\nu_M$  ein, so erhält man damit die gewünschte Formel.

Sei schließlich  $F : \partial^o M \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  gegeben. Ist  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Einbettung für  $\partial^o G$ , so ist  $\tilde{\phi} := T \circ \phi$  eine für  $\partial^o M$ . Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\phi}(D)} F t_M d\mu_{\partial^o M} &= \int_D [(F t_M) \circ \tilde{\phi}] \sqrt{\det d\tilde{\phi}^T d\tilde{\phi}} d\lambda_2 \\ &= \int_D (F \circ \tilde{\phi}) \left( \frac{dT J\nu}{\|dT J\nu\|} \circ \phi \right) \sqrt{\det d\tilde{\phi}^T d\tilde{\phi}} d\lambda_2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial^o G} (F \circ T) dT J\nu d\mu_{\partial^o G} &= \int_D [(F \circ T) dT J\nu] \circ \phi \sqrt{\det d\phi^T d\phi} d\lambda_2 \\ &= \int_D (F \circ \tilde{\phi}) (dT J\nu \circ \phi) \sqrt{\det d\phi^T d\phi} d\lambda_2. \end{aligned}$$

Schreibe  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ , dann ist  $d\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch die Matrix  $(\phi'_1, \phi'_2)^T$ . Wir erhalten mit der Kettenregel

$$\det(d\tilde{\phi}^T d\tilde{\phi}) = \det(d\phi^T (dT \circ \phi)^T (dT \circ \phi) d\phi) = d\phi^T (dT \circ \phi)^T (dT \circ \phi) d\phi,$$

sowie

$$\det(d\phi^T d\phi) = (\phi'_1)^2 + (\phi'_2)^2, \quad J\nu \circ \phi = \pm \frac{1}{\sqrt{(\phi'_1)^2 + (\phi'_2)^2}} \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(dT J\nu) \circ \phi\|^2 &= (J\nu \circ \phi)^T (dT \circ \phi)^T (dT \circ \phi) (J\nu \circ \phi) \\ &= \frac{d\phi^T (dT \circ \phi)^T (dT \circ \phi) d\phi}{(\phi'_1)^2 + (\phi'_2)^2} = \frac{\det(d\tilde{\phi}^T d\tilde{\phi})}{\det(d\phi^T d\phi)}, \end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$\int_D (F \circ \tilde{\phi}) \left( \frac{dT J_V}{\|dT J_V\|} \circ \phi \right) \sqrt{\det d\tilde{\phi}^T d\tilde{\phi}} d\lambda_2 = \int_D (F \circ \tilde{\phi}) (dT J_V \circ \phi) \sqrt{\det d\phi^T d\phi} d\lambda_2.$$

Die gewünschte Gleichheit folgt nun, indem man  $\partial^\circ G$  durch Bilder von Einbettungen überdeckt, eine entsprechende disjunkte Zerlegung wählt, und das Bewiesene auf das entsprechend zerlegte Integral anwendet.  $\square$

Ist  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  offen, und  $F = (F_1, F_2, F_3) : P \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  ein Vektorfeld, so bezeichnet man das Vektorfeld

$$\text{rot } F := \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

als die *Rotation* von  $F$ .

**15.9.2 Proposition** (Stokesscher Integralsatz). *In der Situation von Lemma 15.9.1 sei zusätzlich  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit  $T(\bar{G}) \subseteq P$  und ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $F : P \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  derart gegeben, dass der Träger von  $F \circ T|_{\bar{G}}$  in  $G \cup \partial^\circ G \cup L$  enthalten ist, wobei  $L \subseteq \partial G \setminus \partial^\circ G$  Bedingung (15.32) erfüllt. Dann gilt*

$$\int_M \text{rot } F \nu_M d\mu_M = \int_{\partial^\circ M} F t_M d\mu_{\partial^\circ M}. \quad (15.47)$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst ein Vektorfeld  $F$  der Gestalt  $(F_1(y_1, y_2, y_3), 0, 0)$ . Schreibe  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  als  $(T_1(x_1, x_2), T_2(x_1, x_2), T_3(x_1, x_2))^T$ , dann ist

$$(F \circ T) dT J = \left( (F_1 \circ T) \frac{\partial T_1}{\partial x_2}, -(F_1 \circ T) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \right).$$

Wir verwenden den Gaußschen Integralsatz mit  $h := ((F_1 \circ T) \frac{\partial T_1}{\partial x_2}, -(F_1 \circ T) \frac{\partial T_1}{\partial x_1})^T$ , und erhalten

$$\int_{\partial^\circ M} F t_M d\mu_{\partial^\circ M} = \int_{\partial^\circ G} (F \circ T) dT J_V d\mu_{\partial^\circ G} = \int_{\partial^\circ G} \nu^T h d\mu_{\partial^\circ G} = \int_G \text{div } h d\lambda_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{div } h &= \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \circ T \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \circ T \right) \frac{\partial T_2}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \circ T \right) \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + (F_1 \circ T) \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ &\quad - \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \circ T \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \circ T \right) \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \circ T \right) \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - (F_1 \circ T) \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \circ T \right) \left( \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \frac{\partial T_1}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \circ T \right) \left( \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \frac{\partial T_1}{\partial x_2} - \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\text{rot } F = \left( 0, \frac{\partial F_1}{\partial y_3}, -\frac{\partial F_1}{\partial y_2} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} \times \frac{\partial T}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \frac{\partial T_1}{\partial x_2} - \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \frac{\partial T_2}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

und wir sehen, dass

$$\operatorname{div} h = [(\operatorname{rot} F) \circ T] \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \times \frac{\partial T}{\partial x_2} \right).$$

Es folgt

$$\int_G \operatorname{div} h \, d\lambda_2 = \int_M \operatorname{rot} F \, \nu_M \, d\mu_M,$$

und das ist die Behauptung.

Eine genau analoge Rechnung zeigt, dass die gewünschte Behauptung auch für Vektorfelder der Gestalt  $(0, F_2, 0)$  bzw.  $(0, 0, F_3)$  gilt. Da beide Seiten der Formel (15.47) linear von  $F$  abhängen, gilt diese daher auch für beliebige Vektorfelder.  $\square$

Wir wollen anmerken, dass man den Gaußschen Integralsatz in der Ebene, vgl. (15.46), aus dem Stokesschen Satz als Spezialfall  $T(x_1, x_2) := (x_1, x_2, 0)$  erhält.

# Kapitel 16

## Funktionenräume

### 16.1 $L^p$ -Räume

Ist  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum, so wurde in der Maßtheorie gezeigt (vgl. Satz 13.16 in [K]), dass für  $p \in [1, +\infty)$  die Menge  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ <sup>1</sup> aller reellwertigen, messbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $|f|^p$  integrierbar ist, versehen mit der Norm

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (16.1)$$

ein vollständiger normierter Raum über dem Skalkörper  $\mathbb{R}$ , d.h. ein Banachraum ist.

In Satz 13.16 in [K] wurde auch gezeigt, dass  $L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ , also alle reellwertigen Funktionen auf  $\Omega$ , die außerhalb einer Nullmenge beschränkt sind, versehen mit

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \eta \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > \eta\} = 0 \},$$

ein Banachraum ist.

Die Sprechweise, dass  $L^p$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , ein Banachraum ist, ist etwas schlampig, da ja Funktionen, die fast überall Null sind, Norm Null haben. Genauer müsste man sagen, dass  $L^p / \{f \in L^p : \|f\|_p = 0\}$  ein Banachraum ist. Wir betrachten aber dennoch  $L^p$  als Banachraum, indem wir Funktionen  $f, g$  identifizieren, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, oder äquivalent, die  $\|f - g\|_p = 0$  erfüllen.

Man kann auch die Menge  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  aller komplexwertigen, auf  $\Omega$  definierten Funktionen  $f$  mit  $|f| \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$  betrachten und diese Menge mit der Norm  $\|\cdot\|_p$  versehen. Wir identifizieren wieder Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

$(L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$  ist auch ein normierter Raum, denn aus  $\|f\|_p = 0$  folgt, dass  $|f|^p$  und daher auch  $f$  fast überall Null ist.  $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , sieht man unmittelbar. Die Dreiecksungleichung folgt wegen der Tatsache, dass sie für reelle Funktionen gilt, aus

$$\|f + g\|_p \leq \| |f| + |g| \|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Viele Eigenschaften von  $(L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$  – etwa die Vollständigkeit – lassen sich wegen folgender Bemerkung auf den reellen Fall zurückführen.

<sup>1</sup> Wenn klar ist, um welchen Maßraum und ob es sich um reellwertige oder komplexwertige Funktionen handelt, dann schreibt man oft nur  $L^p(\Omega)$  oder  $L^p$ .

**16.1.1 Bemerkung.** Spalten wir eine komplexwertige Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  in Real- und Imaginärteil auf, so erhält man zwei reellwertige Funktionen. Nimmt man zwei disjunkte Kopien  $\Omega_1, \Omega_2$  von  $\Omega$ , so kann man in Folge jedem  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktion  $\tilde{f} : \Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{f}(x) = \operatorname{Re} f(x)$  für  $x \in \Omega_1$  und  $\tilde{f}(x) = \operatorname{Im} f(x)$  für  $x \in \Omega_2$  zuordnen. Offenbar lässt sich das auch umkehren, und man erhält einen bijektiven Zusammenhang zwischen allen komplexwertigen Funktionen auf  $\Omega$  und allen reellwertigen Funktionen auf  $\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2$ .

Ist  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  und bezeichnen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  ihre Kopien auf  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$ , so ist auch

$$\mathfrak{A}_{12} = \{C \subseteq \Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2 : C \cap \Omega_1 \in \mathfrak{A}_1, C \cap \Omega_2 \in \mathfrak{A}_2\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2$ . Man überprüft dann leicht, dass  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann messbar ist, wenn  $\tilde{f} : \Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  messbar ist.

Ist nun  $\mu$  ein Maß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ , und  $\mu_j$  seine Kopie auf  $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$ , so wird durch  $\mu_{12}(C) := \mu_1(C \cap \Omega_1) + \mu_2(C \cap \Omega_2)$  ein Maß auf  $(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12})$  definiert, welches genau dann endlich ( $\sigma$ -endlich) ist, wenn  $\mu$  diese Eigenschaft hat. Für ein messbares  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  gilt nun

$$\int_{\Omega} |f|^2 d\mu = \int_{\Omega} (|\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2) d\mu = \int_{\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2} |\tilde{f}|^2 d\mu_{12}.$$

Insbesondere entsprechen sich  $(L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$  und  $(L^2(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12}, \mu_{12}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$  isometrisch als reelle normierte Räume, wenn man  $f$  mit  $\tilde{f}$  identifiziert.

Für allgemeines  $p \in [1, +\infty)$  ist diese Entsprechung zwar nicht mehr isometrisch, aber für ein messbares  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  gilt wegen<sup>2</sup>  $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha + \beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p)$  für  $\alpha, \beta \geq 0$ , wegen  $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f|$  und wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2} |\tilde{f}|^p d\mu_{12} \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{\Omega} |\operatorname{Re} f|^p d\mu + \int_{\Omega} |\operatorname{Im} f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\operatorname{Re} f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\Omega} |\operatorname{Im} f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2 \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left( \int_{\Omega} |\operatorname{Re} f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + 2 \left( \int_{\Omega} |\operatorname{Im} f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2 \cdot 2^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\Omega} |\operatorname{Re} f|^p d\mu + \int_{\Omega} |\operatorname{Im} f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{2-\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2} |\tilde{f}|^p d\mu_{12} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Somit entsprechen sich  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  und  $L^p(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12}, \mu_{12}, \mathbb{R})$  als reelle normierte Räume, wenn man  $f$  mit  $\tilde{f}$  identifiziert, wobei noch  $\|\cdot\|_p$  auf dem ersten Raum äquivalent zu  $\|\cdot\|_p$  auf dem zweiten Raum ist.

Entsprechendes gilt für  $(L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  und  $(L^\infty(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12}, \mu_{12}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**16.1.2 Lemma.** Für  $p \in [1, +\infty]$  ist  $(L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$  ein Banachraum.

<sup>2</sup>Diese Ungleichung folgt aus  $(1+t)^p \leq (1+t)^p$  für  $t \geq 0$  und aus der Konvexität der Funktion  $t \mapsto t^p$  auf  $[0, +\infty)$ .



*Beweis.* Wegen Bemerkung 16.1.1 lässt sich  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  als reeller Vektorraum mit einem  $L^p(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12}, \mu_{12}, \mathbb{R})$  identifizieren, wobei die entsprechenden  $\|\cdot\|_p$ -Normen äquivalent sind.

Insbesondere ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezüglich  $\|\cdot\|_p$  in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  genau dann eine Cauchy Folge bzw. eine gegen  $f$  konvergente Folge, wenn  $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezüglich  $\|\cdot\|_p$  in  $L^p(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12}, \mu_{12}, \mathbb{R})$  eine Cauchy Folge bzw. eine gegen  $\tilde{f}$  konvergente Folge ist.

Daraus folgt unmittelbar die Vollständigkeit von  $(L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ .  $\square$

**16.1.3 Bemerkung.** Der Banachraum  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  umfasst den Banachraum  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ . Also ist zweiter ein abgeschlossener Unterraum von  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ , wenn wir beide Räume über dem Skalkörper  $\mathbb{R}$  betrachten.

Dabei ist zu bemerken, dass  $f$  genau dann in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  liegt, falls  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$  liegen, wie man leicht aus der Äquivalenz der Normen im Beweis von Lemma 16.1.2 ableiten kann.

**16.1.4 Definition.** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Der *topologische Dualraum*  $X'$  von  $(X, \|\cdot\|)$  ist die Menge aller linearen und beschränkten Funktionale von  $X$  in den Skalkörper ( $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ ) von  $X$ .

**16.1.5 Bemerkung.** Die Elemente  $f \in X'$  sind gerade die beschränkten linearen Abbildungen von  $X$  nach  $\mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{R}$ , also  $f \in L(X, \mathbb{C})$  bzw.  $f \in L(X, \mathbb{R})$ .

Aus Satz 9.2.7 wissen wir, dass  $L(X, \mathbb{C})$ ,  $(L(X, \mathbb{R}))$  versehen mit der Abbildungsnorm ein Banachraum ist. Wir betrachten daher in Hinkunft  $X'$  immer mit der Abbildungsnorm versehen.

Klarerweise ist  $X'$  ein Untervektorraum aller linearen Abbildungen  $X^*$  von  $X$  in den Skalkörper.

Ganz analog zu reellen  $L^p$  Räumen (siehe Lemma 13.35 und Satz 13.37 in [K]) kann man auch den *Dualraum* von  $(L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$  identifizieren.

**16.1.6 Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum mit einem nichtnegativen Maß  $\mu$ . Weiters seien  $p, q \in [1, +\infty]$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Für jedes  $g \in L^q(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  ist dann

$$\Phi_g : f \mapsto \int_{\Omega} fg \, d\mu$$

ein beschränktes lineares Funktional auf  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  mit  $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q$ . Im Falle

- $p \in (1, +\infty)$ ,  $q \in (1, +\infty)$ , ist  $g \mapsto \Phi_g$  eine isometrische, lineare Bijektion von  $L^q(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  nach  $(L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}))'$ .
- $p = +\infty$ ,  $q = 1$ , ist  $g \mapsto \Phi_g$  eine isometrische und lineare Abbildung von  $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  in  $(L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}))'$ .
- $p = 1$ ,  $q = +\infty$ , und im Falle eines  $\sigma$ -endlichen  $\mu$  ist  $g \mapsto \Phi_g$  eine isometrische, lineare Bijektion von  $L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  nach  $(L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}))'$ .

*Beweis.* Ist  $g \in L^q$ , so folgt für  $f \in L^p$  wegen der Hölderschen Ungleichung (siehe Satz 13.4 in [K])

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \left( \int |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

im Falle  $p, q \in (1, +\infty)$  bzw. wegen der Ungleichung  $\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|g\|_\infty \left( \int |f| \, d\mu \right)$  im Falle  $p = 1, q = +\infty$ , dass  $fg \in L^1$  und

$$|\Phi_g(f)| = \left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|g\|_q \cdot \|f\|_p.$$

Also ist  $\Phi_g(f) \in \mathbb{C}$  wohldefiniert und hängt offensichtlich linear von  $f$  ab. Da die Abbildungsnorm  $\|\Phi_g\|$  das kleinste  $C \geq 0$  derart ist, dass  $|\Phi_g(f)| \leq C\|f\|_p$  für alle  $f \in L^p$  (siehe Definition 9.2.4), folgt die Beschränktheit von  $\Phi_g$ , wobei  $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q$ .

Um hier Gleichheit nachzuweisen, können wir  $g \neq 0$  (als Element von  $L^q$ ) annehmen, und schreiben  $g$  gemäß Fakta 14.2.2 in der Form  $g(t) = |g(t)| \exp(i\phi(t))$  mit einem messbaren  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiters sei  $f(t) = |g(t)|^{\frac{q}{p}} \exp(-i\phi(t))$  für  $p, q \in (1, +\infty)$ ,  $f(t) = \exp(-i\phi(t))$  für  $p = +\infty, q = 1$  und  $f(t) = \exp(-i\phi(t)) \mathbb{1}_A$  für  $p = 1, q = +\infty$  mit einer zunächst beliebigen Menge  $A \in \mathfrak{A}$  so, dass  $\mu(A) < +\infty$ . In jedem Fall ist  $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ .

Im Fall  $p, q \in (1, +\infty)$  folgt wegen  $\frac{q}{p} + 1 = q$  und  $\|f\|_p = \left( \int_\Omega |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$

$$\|g\|_q^q = \int_\Omega |g(t)|^q \, d\mu = \left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| = |\Phi_g(f)| \leq \|\Phi_g\| \|f\|_p = \|\Phi_g\| \|g\|_q^{\frac{q}{p}},$$

und daher  $\|g\|_q \leq \|\Phi_g\|$ . Im Fall  $p = +\infty, q = 1$  gilt

$$\|g\|_1 = \int_\Omega |g(t)| \, d\mu = \left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| = |\Phi_g(f)| \leq \|\Phi_g\| \|f\|_\infty = \|\Phi_g\|.$$

Im Fall  $p = 1, q = +\infty$  folgt für jedes  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $\mu(A) < +\infty$

$$\int_A |g(t)| \, d\mu = \left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| = |\Phi_g(f)| \leq \|\Phi_g\| \|f\|_1 = \int_A \|\Phi_g\| \, d\mu.$$

Für  $\sigma$ -endliches  $\mu$  können wir Satz 9.46 in [K] anwenden und erhalten  $|g(t)| \leq \|\Phi_g\|$   $\mu$ -fast überall, also  $\|g\|_\infty \leq \|\Phi_g\|$ .

Wir haben also gezeigt, dass unter den diversen Bedingungen die offenbar lineare Abbildung  $g \mapsto \Phi_g$  als Abbildung von  $L^q$  nach  $(L^p)'$  isometrisch und damit injektiv ist. Für die Surjektivität im Fall  $p, q \in (1, +\infty)$  bzw. im Fall  $p = 1, q = +\infty$  mit  $\sigma$ -endlichem  $\mu$  sei  $\Phi : L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  linear und beschränkt. Dann sind offenbar  $\operatorname{Re} \Phi$  und  $\operatorname{Im} \Phi$  zwei  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen, die auch beschränkt sind, wenn man  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  als reellen Banachraum betrachtet.

Gemäß Bemerkung 16.1.1 lassen sich  $\operatorname{Re} \Phi$  und  $\operatorname{Im} \Phi$  als beschränkte lineare Funktionale auf  $(L^p(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12}, \mu_{12}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$  auffassen. Aus Satz 13.37 in [K] folgt die Existenz einer Funktion  $\tilde{h} \in L^q(\Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2, \mathfrak{A}_{12}, \mu_{12}, \mathbb{R})$  derart, dass für die entsprechende

Funktion  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  aus  $L^q(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(f) &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \tilde{f} \tilde{h} d\mu_{12} = \int_{\Omega_1} \tilde{f} \tilde{h} d\mu_1 + \int_{\Omega_2} \tilde{f} \tilde{h} d\mu_2 \\ &= \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} h) d\mu + \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im} h) d\mu, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \operatorname{Re} \Phi(f) + i \operatorname{Im} \Phi(f) = \operatorname{Re} \Phi(f) - i \operatorname{Re}(i\Phi(f)) = \operatorname{Re} \Phi(f) - i \operatorname{Re}(\Phi(if)) \\ &= \int_{\Omega} \left( (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} h) + (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im} h) - i((\operatorname{Re} if)(\operatorname{Re} h) + (\operatorname{Im} if)(\operatorname{Im} h)) \right) d\mu \\ &= \int_{\Omega} \left( (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} h) - (\operatorname{Im} f)(-\operatorname{Im} h) + i((\operatorname{Im} f)(\operatorname{Re} h) + (\operatorname{Re} f)(-\operatorname{Im} h)) \right) d\mu \\ &= \int_{\Omega} f \bar{h} d\mu \end{aligned}$$

für alle  $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ . Also gilt  $\Phi = \Phi_g$ , wenn wir  $g = \bar{h}$  setzen.  $\square$

**16.1.7 Lemma.** Die Menge  $\mathcal{T}_{<\infty}$  aller komplexwertigen (reellwertigen) integrierbaren Treppenfunktionen<sup>3</sup>  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ ) ist ein Untervektorraum von  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  (von  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ ).

Für  $p < +\infty$  ist  $\mathcal{T}_{<\infty}$  dicht in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  ( in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$  ) bezüglich  $\|\cdot\|_p$ , d.h.  $\overline{\mathcal{T}_{<\infty}} = L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ .

Schließlich ist die Menge  $\mathcal{T}_{<\infty}^+$  aller nichtnegativen und integrierbaren Treppenfunktionen dicht in

$$\{f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0\},$$

d.h.  $\overline{\mathcal{T}_{<\infty}^+} = \{f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0 \mu\text{-fast überall}\}$ .

Setzt man zusätzlich  $\mu(\Omega) < +\infty$  voraus, so gilt obige Aussage auch für  $p = \infty$ .

*Beweis.* Da eine Linearkombination von Treppenfunktionen wieder eine solche ist und da  $f \in \mathcal{T}_{<\infty} \Leftrightarrow |f|^p \in \mathcal{T}_{<\infty}$ , bildet die Menge  $\mathcal{T}_{<\infty}$  aller komplexwertigen (reellwertigen) integrierbaren Treppenfunktionen mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation einen in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  (in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ ) enthaltenen Vektorraum.

Sei nun  $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ . Die Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von reellwertigen und messbaren Treppenfunktionen definiert durch (vgl. Satz 7.30 in [K])

$$g_n := -n \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(-\infty, -n]} + \sum_{j=-n2^{n-1}}^{-1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]} + \sum_{j=1}^{n2^{n-1}-1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})} + n \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[n, +\infty)}$$

erfüllt

$$\max(g_n, 0) \nearrow \max(f, 0), \quad -\min(g_n, 0) \nearrow -\min(f, 0), \quad |g_n| \leq |f|.$$

Falls  $p < +\infty$ , so gilt  $|g_n|^p \leq |f|^p$ . Also sind die  $g_n$  integrierbar, dh.  $g_n \in \mathcal{T}_{<\infty}$ , und mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt  $\|g_n - f\|_p \rightarrow 0$ .

<sup>3</sup> Also genau solche Funktionen, für die  $f(\Omega)$  endlich mit  $\mu(f^{-1}(\{0\})^c) < +\infty$  ist.

Ist  $p = +\infty$  und  $\mu(\Omega) < +\infty$ , so sind die  $g_n$  ohnehin integrierbar. Außerdem gilt für  $\|f\|_\infty < n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), dass  $\{x : f(x) \leq -n\}$  und  $\{x : f(x) \geq n\}$  Nullmengen sind. Somit gilt  $\|f - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n}$ .

Also ist in jedem Fall jedes  $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$  Grenzwert einer Folge aus  $\mathcal{T}_{<\infty}$ , und somit  $\overline{\mathcal{T}_{<\infty}} = L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ .

Ist  $f \geq 0$ , so gilt klarerweise auch  $g_n \geq 0$ , und somit ist jedes nichtnegative  $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$  Grenzwert einer Folge aus  $\mathcal{T}_{<\infty}^+$ . Umgekehrt ist  $\{f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0 \mu - \text{fast überall}\}$  wegen Satz 13.15 in [K] abgeschlossen.

Ist  $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ , so folgt  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ . Wegen des schon Gezeigten gibt es zwei Folgen  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}, (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von reellwertigen, integrierbaren Treppenfunktionen mit  $\|g_n - \operatorname{Re} f\|_p \rightarrow 0$  und  $\|h_n - \operatorname{Im} f\|_p \rightarrow 0$ . Somit folgt  $\|(g_n + ih_n) - f\|_p \rightarrow 0$ , wobei  $(g_n + ih_n)$  eine Folge von komplexwertigen, integrierbaren Treppenfunktionen ist.  $\square$

**16.1.8 Korollar.** *Besteht  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$  aus Mengen von endlichem Maß derart, dass es für jedes  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $\mu(A) < +\infty$  und jedes  $\epsilon > 0$  ein  $C \in \mathfrak{C}$  mit  $\mu(A \triangle C) \leq \epsilon$  gibt, so ist die Menge aller Treppenfunktionen der Form*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{C_j}, \quad (16.2)$$

mit  $C_j \in \mathfrak{C}$  und  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  dicht in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  für  $p \in [1, +\infty)$ .

Die entsprechende Aussage gilt auch im reellwertigen Fall. Zudem ist die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (16.2) dicht in  $\{h \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$ .

*Beweis.* Sei  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{T}_{<\infty}$ . Da  $f$  integrierbar ist, gilt  $\mu(A_j) < +\infty$ . Also gibt es zu  $\epsilon > 0$  nach Voraussetzung Mengen  $C_j \in \mathfrak{C}$  mit  $\mu(A_j \triangle C_j) \leq \epsilon$ . Aus der Dreiecksungleichung und wegen  $\mathbb{1}_{A_j}(x) - \mathbb{1}_{C_j}(x) \in \{-1, 0, 1\}$  folgt

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} |f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{C_j}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \left( \int_{A_j \cup C_j} |\mathbb{1}_{A_j} - \mathbb{1}_{C_j}| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \cdot \mu(A_j \triangle C_j)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^n |\alpha_j|. \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, lässt sich  $f$  durch Funktionen erwähnten Typs approximieren, und da  $\mathcal{T}_{<\infty}$  seinerseits dicht in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  ist, ist auch die Menge aller Funktionen dieses Typs dicht.

Den Fall von reellwertigen Funktionen beweist man genauso. Darüber hinaus lässt sich jede Funktion  $h \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}), h \geq 0$ , gemäß Lemma 16.1.7 beliebig gut durch nichtnegative Treppenfunktionen  $f$  approximieren. Die oben konstruierte Approximation von  $f$  ist dann auch nichtnegativ. Also ist die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (16.2) dicht in  $\{h \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$ .  $\square$

**16.1.9 Bemerkung.** Allgemeiner weiß man für ein  $\sigma$ -endliches  $\mu$  und einen  $\mathfrak{A}$  erzeugenden Semiring  $\mathfrak{S}$ , dass (vgl. Satz 3.16, Satz 4.10 und Satz 4.13 in [K]) für  $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) : R_j \in \mathfrak{S}, j \in \mathbb{N}, \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \supseteq A \right\}.$$

<sup>4</sup>  $A \triangle C$  ist die symmetrische Differenz  $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ .

Ist  $\mu(A) < +\infty$ , so gibt es zu  $\epsilon > 0$  Mengen  $R_j \in \mathfrak{H}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , mit  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n) - \mu(A) \leq \epsilon$  und weiters ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} R_n) \leq \epsilon$ .

Wegen  $A \setminus \bigcup_{n=1}^m R_n \subseteq \bigcup_{n=m+1}^{\infty} R_n$  und  $\bigcup_{n=1}^m R_n \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \setminus A$  folgt mit  $R = \bigcup_{n=1}^m R_n$ , dass

$$\mu((A \setminus R) \cup (R \setminus A)) \leq 2\epsilon.$$

Also erfüllt der von  $\mathfrak{I}$  erzeugte Ring die Voraussetzungen von Korollar 16.1.8.

**16.1.10 Korollar.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  eine nichtleere und offene Menge. Dann ist die Menge aller Treppenfunktionen der Form  $(\alpha_j \in \mathbb{C})$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{R_j}, \quad (16.3)$$

wobei  $R_1, \dots, R_n$  alle  $d$ -dimensionale Rechtecke der Form (14.1) mit  $\overline{R_j} \subseteq G$  sind, dicht in  $L^p(G, \mathfrak{B}_d \cap G, \mu, \mathbb{C})$ ,  $p \in [1, +\infty)$ , wobei  $\mu : \mathfrak{B}_d \cap G \rightarrow [0, +\infty]$  ein  $\sigma$ -endliches Maß ist.

Die entsprechende Aussage gilt auch im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (16.3) dicht in  $\{h \in L^p(G, \mathfrak{B}_d \cap G, \lambda_d|_{\mathfrak{B}_d \cap G}, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$  ist.

*Beweis.* Gemäß Lemma 14.1.3 wird  $\mathfrak{B}_d \cap G$  vom Semiring  $\mathfrak{I}_G$  aller  $d$ -dimensionalen Rechtecke  $R$  der Form (14.1) mit  $\overline{R} \subseteq G$  erzeugt.

Die Aussage folgt nun wegen Bemerkung 16.1.9 aus Korollar 16.1.8 und aus der Tatsache, dass sich jede Menge aus dem von  $\mathfrak{I}_G$  erzeugten Ring als disjunkte endliche Vereinigung von Mengen aus  $\mathfrak{I}_G$  schreiben lässt; vgl. Satz 2.60 in [K].  $\square$

Wird im folgenden eine Aussage mit  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  formuliert, so soll das bedeuten, dass selbige Aussage für  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$  und  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  gilt.

**16.1.11 Korollar.** Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d)$ ,  $p \in [1, +\infty)$ . Für  $t \in \mathbb{R}^d$  betrachte man die Abbildung  $f \mapsto f_t$ , wobei  $f_t(x) = f(x + t)$ . Diese ist eine lineare und isometrische<sup>5</sup> Bijektion von  $L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d)$  auf sich.

Weiters gilt für ein festes  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d)$ , dass die Funktion  $t \mapsto f_t$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^d$  nach  $L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d)$  gleichmäßig stetig ist, vgl. Definition 6.3.2.

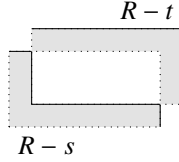
*Beweis.* Klarerweise ist  $f \mapsto f_t$  linear und bijektiv, denn die Inverse ist gerade  $f \mapsto f_{-t}$ . Die Tatsache, dass  $\|f_t\|_p = \|f\|_p$  folgt aus der Translationsinvarianz von  $\lambda_d$ .

Für ein  $d$ -dimensionales halboffenes Rechteck  $R = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$ ,  $f = \mathbb{1}_R$  und  $s, t \in \mathbb{R}^d$  gilt  $f_t = \mathbb{1}_{R-t}$ ,  $f_s = \mathbb{1}_{R-s}$ .

Wegen  $(R-s) \triangle (R-t) = ((R-s) \setminus ((R-s) \cap (R-t))) \dot{\cup} ((R-t) \setminus ((R-s) \cap (R-t)))$  haben wir

$$\begin{aligned} \|f_s - f_t\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{R-s} - \mathbb{1}_{R-t}| d\lambda_d = \lambda_d((R-s) \triangle (R-t)) \\ &= \lambda_d((R-s) \setminus ((R-s) \cap (R-t))) + \lambda_d((R-t) \setminus ((R-s) \cap (R-t))) \\ &= \lambda_d(R-s) + \lambda_d(R-t) - 2\lambda_d((R-s) \cap (R-t)). \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Also gilt  $\|f_t\|_p = \|f\|_p$ .

Abbildung 16.1: Veranschaulichung von  $(R - s) \triangle (R - t)$ .

Wegen der Translationsinvarianz und wegen

$$\begin{aligned} (R - s + t) \cap R &= \left( \bigtimes_{j=1}^d (a_j - s_j + t_j, b_j - s_j + t_j] \right) \cap \left( \bigtimes_{j=1}^d (a_j, b_j] \right) \\ &= \bigtimes_{j=1}^d (\max(a_j, a_j - s_j + t_j), \min(b_j, b_j - s_j + t_j)] \end{aligned}$$

folgt für  $|t_j - s_j| < (b_j - a_j)$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,

$$\begin{aligned} \|f_s - f_t\|_p^p &= 2\lambda_d(R) - 2\lambda_d((R - s + t) \cap R) \\ &= 2 \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) - 2 \prod_{j=1}^d (\min(b_j, b_j - s_j + t_j) - \max(a_j, a_j - s_j + t_j)) \\ &= 2 \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) - 2 \prod_{j=1}^d (b_j - a_j - |t_j - s_j|). \end{aligned}$$

Somit ist  $\|f_s - f_t\|_p^p$  beliebig klein, wenn nur  $\|t - s\|_\infty$  hinreichend klein ist. Also ist  $t \mapsto f_t$  gleichmäßig stetig.

Ist  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mathbb{1}_{R_j}$  eine Linearkombination von derartigen Charakteristischen Funktionen, so ist  $f_t = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot (\mathbb{1}_{R_j})_t$  eine Linearkombination von  $L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d)$ -wertigen Funktionen und damit selber stetig, vgl. Korollar 9.1.3.

Ist nun  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d)$  beliebig, so wissen wir aus Bemerkung 16.1.9, dass es eine Folge  $g_n$  von Treppenfunktionen der Form (16.3) gibt, die bezüglich  $\|\cdot\|_p$  gegen  $f$  konvergiert, also  $\|f - g_n\|_p \rightarrow 0$ . Wegen  $\|f_t - (g_n)_t\|_p = \|f - g_n\|_p$  konvergiert die Folge von stetigen Funktionen  $t \mapsto (g_n)_t$  gleichmäßig gegen  $t \mapsto f_t$ . Als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen ist letztere auch stetig, vgl. Korollar 6.6.14.

Die gleichmäßige Stetigkeit von  $t \mapsto f_t$  folgt schließlich wegen  $\|f_s - f_t\|_p = \|f - f_{t-s}\|_p$  aus der Stetigkeit von  $t \mapsto f_t$  bei  $0 \in \mathbb{R}^d$ .  $\square$

## 16.2 Faltung auf Funktionenräumen

Wir wollen nun auf dem Banachraum  $(L^1(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$  mit der Faltung eine multiplikative Struktur einführen. Dazu seien  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  zunächst messbar.

Die Funktionen  $(x, y) \mapsto x - y$  und  $(x, y) \mapsto y$  sind stetig als Funktionen von  $\mathbb{R}^{2d}$  nach  $\mathbb{R}^d$ . Also sind sie auch  $\mathfrak{B}_{2d} - \mathfrak{B}_d$  messbar, und damit sind auch die Zusammensetzungen

$(x, y) \mapsto f(x - y)$  und  $(x, y) \mapsto g(y)$  beide  $\mathfrak{B}_{2d} - \mathfrak{B}$  messbar. Daraus folgt schließlich die Messbarkeit von

$$(x, y) \mapsto f(x - y)g(y). \quad (16.4)$$

Sind  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , so gilt nach dem Satz von Fubini Satz 14.4.1 und der Tatsache, dass  $\lambda_d$  translationsinvariant ist,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x - y)g(y)| d\lambda_{2d}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| d\lambda_d(x) |g(y)| d\lambda_d(y) \\ &= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| d\lambda_d(y) = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Somit ist die Funktion in (16.4) auf  $\mathbb{R}^{2d}$  integrierbar, und nach dem Satz von Fubini ist für  $\lambda_d$ -fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , also für alle  $x$  außerhalb von einer  $\lambda_d$ -Nullmenge  $A$ , die Funktion  $y \mapsto f(x - y)g(y)$  integrierbar.

**16.2.1 Definition.** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  sei  $f * g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) d\lambda_d(y), & \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus A, \\ 0, & \text{für } x \in A. \end{cases}$$

Man bezeichnet  $f * g$  als *Faltung* von  $f$  und  $g$ .

Ebenfalls gemäß dem Satz von Fubini ist  $f * g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar, wobei mit (16.5)

$$\|f * g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)g(y)| d\lambda_d(y) d\lambda_d(x) = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Ändert man  $f$  oder  $g$  auf einer Nullmenge, so bleibt  $f * g$  unverändert. Also hängt die Faltung nur von den Restklassen in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ab und stellt somit eine Abbildung

$$* : L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$$

dar. Diese ist bilinear<sup>6</sup>, da für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $f_1, f_2, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} (af_1 + bf_2) * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (af_1(x - y) + bf_2(x - y))g(y) d\lambda_d(y) \\ &= a \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x - y)g(y) d\lambda_d(y) + b \int_{\mathbb{R}^d} f_2(x - y)g(y) d\lambda_d(y) \\ &= a(f_1 * g)(x) + b(f_2 * g)(x), \end{aligned}$$

und zwar für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  bis auf eine Nullmenge, nämlich die Vereinigung der Ausnahmengen für die Bildung von  $(af_1 + bf_2) * g$ ,  $f_1 * g$  und  $f_2 * g$ .

Da es für die Elemente aus  $L^1(\mathbb{R}^d)$  auf Nullmengen nicht ankommt, gilt  $(af_1 + bf_2) * g = a(f_1 * g) + b(f_2 * g)$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Die Linearität im zweiten Argument sieht man genauso.

<sup>6</sup>Die Bilinearität wird auch als Distributivität in beiden Argumenten bezeichnet.

Die Faltung ist auch assoziativ, d.h.  $(f * g) * h = f * (g * h)$ . Wegen der Bilinearität und Bemerkung 16.1.3 genügt es das nur für  $f, g, h \geq 0$  nachzuweisen. Das hat den Vorteil, dass man den Satz von Fubini anwenden kann, ob das Integral jetzt endlich ist oder nicht. Aus der Translationsinvarianz von  $\lambda_d$  folgt für  $x \in \mathbb{R}^d$  bis auf die Ausnahmemengen für  $(f * g) * h$  und  $f * (g * h)$ :

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x - y) h(y) d\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y - z) g(z) h(y) d\lambda_d(z) d\lambda_d(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - z) g(z - y) h(y) d\lambda_d(z) d\lambda_d(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - z) \int_{\mathbb{R}^d} g(z - y) h(y) d\lambda_d(y) d\lambda_d(z) = f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

**16.2.2 Definition.** Ist  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und  $\bullet : X \times X \rightarrow X$  eine bilineare und assoziative Abbildung, die  $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  erfüllt, so heißt  $(X, \bullet, \|\cdot\|)$  *Banachalgebra*.

Ist  $\bullet$  sogar kommutativ, so spricht man von einer *kommutativen Banachalgebra*.

Oben haben wir gesehen, dass  $(L^1(\mathbb{R}^d), *, \|\cdot\|_1)$  eine Banachalgebra ist. Sie ist sogar kommutativ, wie man leicht aus Korollar 14.4.8 herleitet:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) d\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) f(y) d\lambda_d(y) = g * f(x).$$

**16.2.3 Fakta.** Seien  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Wir haben im Abschnitt 14.5 schon gesehen, dass sich  $L^1$ - und  $L^\infty$ -Funktionen falten lassen. Weiters gilt:

1. Sind  $p, q \in (1, +\infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , und sind  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , so gilt wegen  $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)|^p d\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p d\lambda_d(y)$  (siehe Korollar 14.4.8) und wegen der Hölderschen Ungleichung<sup>7</sup>

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) g(y)| d\lambda_d(y) \leq \|f\|_p \|g\|_q < +\infty.$$

Somit ist  $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) d\lambda_d(y)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  definiert, und erfüllt

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) g(y)| d\lambda_d(y) \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \quad (16.6)$$

also  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ . Wegen Korollar 14.4.8 gilt dabei  $f * g = g * f$ .

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$  stimmt diese Definition der Faltung mit der von weiter oben überein, wobei  $f * g$  überall und nicht nur außerhalb einer Nullmenge als Faltungsintegral geschrieben werden kann. Zudem gilt hier  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

<sup>7</sup>Man beachte, dass diese Ungleichung auch besagt, dass wenn die rechte Seite endlich ist, es auch die linke Seite ist; vgl. Satz 13.4 in [K].



2. Sind wieder  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , so folgt für  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  aus Korollar 14.4.8

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)| \cdot |g(y)| d\lambda_d(y) \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(y + (x_1 - x_2)) - f(y)|^p d\lambda_d(y) \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_q \\ &= \|f_{x_1 - x_2} - f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Wegen Korollar 16.1.11 wird dieser Ausdruck kleiner  $\epsilon > 0$ , wenn nur  $\|x_1 - x_2\|$  hinreichend klein ist. Also ist  $f * g$  gleichmäßig stetig.

3. Für  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  und  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  folgt aus Korollar 14.4.8

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x_1 - y) - f(y)g(x_2 - y)| d\lambda_d(y) \quad (16.7) \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| d\lambda_d(y) \\ &= \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |g(y - (x_1 - x_2)) - g(y)| d\lambda_d(y). \end{aligned}$$

Wegen Korollar 16.1.11 wird dieser Ausdruck kleiner  $\epsilon$ , wenn nur  $\|x_1 - x_2\|$  hinreichend klein ist. Also ist  $f * g$  gleichmäßig stetig.

Für das Folgende wollen wir vorausschicken, dass jedes  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit kompaktem Träger<sup>8</sup> zu allen Räumen  $L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $p \in [1, +\infty]$  gehört, da  $|f|^p$  beschränkt und ungleich Null nur auf einer Menge mit endlichem  $\lambda_d$ -Maß ist.

**16.2.4 Lemma.** Sei  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit kompakten Trägern  $\text{supp}(k_n)$  derart, dass  $\|k_n\|_1 = 1$ ,  $k_n \geq 0$  und dass der maximale Abstand von  $\text{supp}(k_n)$  zu 0 gegen Null für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert, also  $\sup_{x \in \text{supp}(k_n)} \|x\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Dann gilt für alle  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und alle  $p \in [1, +\infty)$ , dass  $f * k_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * k_n\|_p = 0.$$

*Beweis.* Aus Fakta 16.2.3 wissen wir, dass  $f * k_n$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  liegt, womit auch  $\mathbb{1}_K \cdot (f - f * k_n) \in L^p(\mathbb{R}^d)$  für jedes kompakte  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ . Wegen  $\int k_n d\lambda_d = \|k_n\|_1 = 1$  und dem Satz von Fubini folgt für jedes  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K \cdot (f - f * k_n) g d\lambda_d \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y) (f(x) - f(x - y)) d\lambda_d(y) \mathbb{1}_K(x) g(x) d\lambda_d(x) \right| \leq \\ &= \int_{\text{supp}(k_n)} k_n(y) \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(x - y)) \mathbb{1}_K(x) g(x) d\lambda_d(x) \right| d\lambda_d(y) \leq \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Der Träger  $\text{supp } k$  einer komplexwertigen Funktion  $k$  ist der Abschluss von  $k^{-1}(\{0\}^c)$ .

$$\int_{\text{supp}(k_n)} k_n(y) \|f - f_{-y}\|_p \|g\|_q d\lambda_d(y) \leq \|g\|_q \sup_{y \in \text{supp}(k_n)} \|f - f_{-y}\|_p,$$

wobei  $y \mapsto \|f - f_{-y}\|_p$  wegen Korollar 16.1.11 stetig in  $y$  ist.

Da  $g \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K \cdot (f - f * k_n) g d\lambda_d$  ein beschränktes lineares Funktional auf  $L^q(\mathbb{R}^d)$  ist, folgt aus Satz 16.1.6, dass dessen Abbildungsnorm mit  $\|\mathbb{1}_K \cdot (f - f * k_n)\|_p$  übereinstimmt. Also gilt  $\|\mathbb{1}_K \cdot (f - f * k_n)\|_p \leq \sup_{y \in \text{supp}(k_n)} \|f - f_{-y}\|_p$ . Setzen wir  $K = K_m^{\mathbb{R}^d}(0)$  und lassen  $m \rightarrow \infty$  streben, so folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi), dass  $f - f * k_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und damit  $f * k_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Dazu gilt

$$\|f - f * k_n\|_p \leq \sup_{y \in \text{supp}(k_n)} \|f - f_{-y}\|_p.$$

Nach Voraussetzung und Korollar 16.1.11 konvergiert dieser Ausdruck gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**16.2.5 Bemerkung.** In Lemma 16.2.4 kann man zum Beispiel die Funktion  $k_n := k_\delta$  mit  $\delta = \frac{1}{n}$  wählen, wobei die  $k_\delta$  wie in Definition 14.5.5 gewählt werden.

**16.2.6 Bemerkung (\*).** Die Banachalgebra  $(L^1(\mathbb{R}^d), *, \|\cdot\|_1)$  hat zwar kein Einselement<sup>9</sup> (vgl. Bemerkung 17.1.10), aber eine sogenannte *approximative Einheit* – also eine Folge  $e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  aus  $L^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f * e_n = f$  für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , wie man sofort aus Lemma 16.2.4 im Fall  $p = 1$  erkennt.

**16.2.7 Korollar.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und nichtleer. Der Vektorraum aller komplexwertigen, unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem, in  $G$  enthaltenem Träger liegt für jedes  $p \in [1, +\infty)$  dicht in  $L^p(G, \mathfrak{B}_d \cap G, \lambda_d|_{\mathfrak{B}_d \cap G}, \mathbb{C})$ .

Die entsprechende Aussage gilt auch im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Funktionen aus  $C_{00}^\infty(G)$  dicht in  $\{h \in L^p(G, \mathfrak{B}_d \cap G, \lambda_d|_{\mathfrak{B}_d \cap G}, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$  ist.

*Beweis.* Da stetige Funktionen mit kompaktem Träger beschränkt sind, folgt ihre Integrierbarkeit, und daher  $C_{00}^\infty(G) \subseteq L^p(G, \mathfrak{B}_d \cap G, \lambda_d|_{\mathfrak{B}_d \cap G}, \mathbb{C})$ .

Sei  $f \in L^p(G, \mathfrak{B}_d \cap G, \lambda_d|_{\mathfrak{B}_d \cap G}, \mathbb{C})$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei (siehe Lemma 14.6.1)

$$K_n := K_n(0) \setminus U_{\frac{1}{n}}(G^c) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, G^c) \geq \frac{1}{n}, \|x\| \leq n\}.$$

Die  $K_n$  sind kompakte, monoton wachsende Teilmengen von  $G$ , deren Vereinigung  $G$  ist. Aus dem Satz der beschränkten Konvergenz folgt

$$\|f - \mathbb{1}_{K_n} \cdot f\|_p^p = \int_G (1 - \mathbb{1}_{K_n}) |f|^p d\lambda_d \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  sei  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\|f - \mathbb{1}_{K_N} \cdot f\|_p^p < \epsilon$ . Aus der Hölderschen Ungleichung (siehe Satz 13.4 in [K]) folgt im Falle  $p, q \in (1, +\infty)$  zudem wegen

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{K_N} \cdot f| d\lambda_d \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_N} d\lambda_d \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

<sup>9</sup>D.h. ein  $e$  in der Banachalgebra mit  $e \bullet x = x \bullet e = x$  für alle  $x$  aus der Banachalgebra.

dass  $\mathbb{1}_{K_N} \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Für  $p = 1$  ist das ohnehin klar. Somit wissen wir aus Fakta 14.5.1, dass  $(k_{\frac{1}{n}} * (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen aus  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist, wobei die  $k_\delta$  wie in Definition 14.5.5 sind mit  $\text{supp } k_\delta \subseteq K_{2\delta}(0)$ . Man sieht auch sofort, dass diese Funktionen reell bzw. nichtnegativ sind, wenn  $f$  reell bzw. nichtnegativ ist.

Nach Lemma 14.5.3 verschwindet  $k_{\frac{1}{n}} * (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f)$  außerhalb der kompakten Menge  $K_N + K_{\frac{2}{n}}(0)$ . Somit ist der Träger dieser Funktion in  $K_N + K_{\frac{2}{n}}(0)$  enthalten und daher kompakt. Für hinreichend großes  $n$  ist wegen Lemma 14.6.1 letztere Menge in  $G$  enthalten, womit  $k_{\frac{1}{n}} * (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f) \in C_{00}^\infty(G)$ .

Schließlich konvergiert  $(k_{\frac{1}{n}} * (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f))_{n \in \mathbb{N}}$  gemäß Lemma 16.2.4 gegen  $(\mathbb{1}_{K_N} \cdot f)$ , und für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  gilt somit  $\|(\mathbb{1}_{K_N} \cdot f) - k_{\frac{1}{n}} * (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f)\|_p < \epsilon$  und daher

$$\|f - k_{\frac{1}{n}} * (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f)\|_p \leq \|f - (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f)\|_p + \|(\mathbb{1}_{K_N} \cdot f) - k_{\frac{1}{n}} * (\mathbb{1}_{K_N} \cdot f)\|_p < 2\epsilon.$$

□

## 16.3 Fourierreihen

Wir wollen zunächst einige Begriffe aus der Linearen Algebra wiederholen.

**16.3.1 Definition.** Ist  $\mathcal{H}$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , und ist  $(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Skalarprodukt, dh. eine hermitsche, positiv definite Sesquilinearform, so nennen wir  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  einen *Skalarproduktraum*. Weiters setzen wir für  $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}.$$

Nicht ganz zufällig wird für  $\sqrt{(x, x)}$  das Symbol  $\|x\|$  gewählt. In der Tat ist  $\|\cdot\|$  eine Norm, denn es gilt offensichtlich  $\|x\| \geq 0$  und wegen der positiven Definitheit, dass  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ ; es gilt  $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 \cdot \|x\|^2$  und schließlich liefert die aus der Linearen Algebra bekannte Cauchy-Schwarzsche Ungleichung  $|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

$$\|(f + g)\|^2 = |(f, (f + g)) + (g, (f + g))| \leq \|f\| \cdot \|f + g\| + \|g\| \cdot \|f + g\|,$$

und daher  $\|(f + g)\| \leq \|f\| + \|g\|$ . Also ist  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum; vgl. siehe Definition 9.1.1.

**16.3.2 Definition.** Ein Skalarproduktraum  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  heißt *Hilbertraum*, wenn  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  sogar ein Banachraum ist.

### 16.3.3 Beispiel.

↪ Versehen wir etwa  $\mathbb{C}^p$  mit dem natürlichen Skalarprodukt  $(x, y) := \sum_{j=1}^p x_j \bar{y}_j$ , so ist die von  $(\cdot, \cdot)$  erzeugte Norm gerade  $\|\cdot\|_2$  und  $(\mathbb{C}^p, (\cdot, \cdot))$  ist ein Hilbertraum.

↪ Ein Beispiel eines unendlich dimensional Hilbertraumes ist

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < +\infty \right\}$$

versehen mit

$$((z_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} z_n \bar{w}_n,$$

wobei diese Reihe wegen

$$\sum_{n=1}^N |z_n \bar{w}_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N |z_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^N |w_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2}$$

sogar absolut konvergiert. Die von  $(.,.)$  erzeugte Norm ist  $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2}$ .

Um die Vollständigkeit nachzuweisen, sei  $((z_n^k)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $l^2(\mathbb{N})$  bezüglich der von  $(.,.)$  erzeugten Norm. Für ein festes  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $(k, l \in \mathbb{N})$

$$|z_m^k - z_m^l| \leq \| (z_n^k)_{n \in \mathbb{N}} - (z_n^l)_{n \in \mathbb{N}} \|,$$

und man sieht, dass  $(z_m^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$  ist. Also  $z_m^k \rightarrow z_m, k \rightarrow \infty$  für ein  $z_m \in \mathbb{C}$ . Sei  $\epsilon > 0$  und  $K \in \mathbb{N}$  so, dass aus  $k, l \geq K$  die Ungleichung  $\| (z_n^k)_{n \in \mathbb{N}} - (z_n^l)_{n \in \mathbb{N}} \| < \epsilon$  folgt. Für ein festes  $N \in \mathbb{N}$  und  $k \geq K$  gilt dann

$$\sum_{n=1}^N |z_n^k - z_n^l|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n^k - z_n^l|^2 < \epsilon^2.$$

Lassen wir  $l \rightarrow \infty$  streben, so erhalten wir  $\sum_{n=1}^N |z_n^k - z_n|^2 \leq \epsilon^2$ , und da  $N$  beliebig war sogar  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n^k - z_n|^2 \leq \epsilon^2$ . Daraus folgt einerseits  $(z_n^k - z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$  und somit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$  und andererseits

$$\| (z_n^k)_{n \in \mathbb{N}} - (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \| \leq \epsilon.$$

Also konvergiert  $((z_n^k)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$  für  $k \rightarrow \infty$  bezüglich  $\|.\|$  gegen den Grenzwert  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

↔ Für einen Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ist  $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  verstehen mit

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int |f|^2 d\mu}$$

ein Banachraum. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (vgl. Bemerkung 13.5 in [K]) folgt, dass für  $f, g \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  die Funktion  $f\bar{g}$  integrierbar ist. Durch

$$(f, g) := \int f\bar{g} d\mu$$

ist somit für jedes Paar  $f, g \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  eine komplexe Zahl definiert. Man zeigt unschwer, dass  $(.,.)$  ein Skalarprodukt ist, wobei die von  $(.,.)$  erzeugte Norm gerade  $\|.\|_2$  ist. Insbesondere ist  $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$  verstehen mit  $(.,.)$  ein Hilbertraum.

Das vorherige Beispiel kann man als Spezialfall des gegenwärtigen Beispiels betrachten, wenn man  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  setzt und für  $\mu$  das Zählmaß hernimmt.

**16.3.4 Beispiel (\*).** Im Raum  $l^2(\mathbb{N})$  findet man auch eine unbedingt konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe; vgl. Definition 9.3.4 und im Anschluss den Punkt (6).

Dazu sei  $b_k \in l^2(\mathbb{N})$  für  $k \in \mathbb{N}$  jene Folge, die  $(b_k)_n = 0$  falls  $k \neq n \in \mathbb{N}$  und  $(b_k)_n = 1$  falls  $k = n$  erfüllt. Für  $a_k = \frac{1}{k} \cdot b_k$  gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

womit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nicht absolut konvergiert. Andererseits liegt

$$b = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$$

wegen  $\|b\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$  in  $l^2(\mathbb{N})$ . Außerdem gilt für  $A \subseteq \mathbb{N}$  endlich

$$\|b - \sum_{k \in A} a_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{N} \setminus A}(k) \cdot \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k \in A} \frac{1}{k^2}.$$

Aus Fakta 5.4.3, (6) folgt  $\lim_{A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{k \in A} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  und somit die unbedingte Konvergenz  $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k = b$ .

**16.3.5 Definition.** Sei  $(\mathcal{H}, (.,.))$  ein Skalarproduktraum. Eine Familie  $(e_i)_{i \in I}$  von nicht-verschwindenden Elementen aus  $\mathcal{H}$ , d.h.  $0 \neq e_i \in \mathcal{H}$ ,  $i \in I$ , heißt *Orthogonalsystem*, wenn  $(e_i, e_j) = 0$ ,  $i \neq j$ . Ein Orthogonalsystem heißt *Orthonormalsystem*, wenn zusätzlich  $\|e_i\| = 1$ ,  $i \in I$ .

Klarerweise ist jedes Orthogonalsystem  $(e_i)_{i \in I}$  linear unabhängig und lässt sich durch Normierung in das Orthonormalsystem  $(\frac{1}{\|e_i\|} e_i)_{i \in I}$  überführen.

Aus der Linearen Algebra ist folgende Aussage bekannt (siehe Satz 11.5.5 und die drei Zeilen unmittelbar nach dem Beweis von Satz 11.5.5 im Buch Lineare Algebra von Hans Havlicek). Wir wiederholen der Vollständigkeit halber den Beweis.

**16.3.6 Proposition.** Sei  $I = \{1, \dots, n\}$  endlich und  $(e_i)_{i \in I}$  ein Orthonormalsystem in einem Skalarproduktraum  $(\mathcal{H}, (.,.))$ . Weiters sei  $\mathcal{G}$  der von  $(e_i)_{i \in I}$  aufgespannte Teilraum in  $\mathcal{H}$ .

Dann ist  $(e_i)_{i \in I}$  linear unabhängig, es gilt  $\mathcal{H} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^\perp$ , und

$$P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}, P(x) := \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$$

ist eine Projektion von  $\mathcal{H}$  auf  $\mathcal{G}$  mit Kern  $\mathcal{G}^\perp$ .

*Beweis.* Offenbar ist  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definiert durch  $P(x) := \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$  linear. Weiters gilt

$$\begin{aligned} P(P(x)) &= \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in I} (x, e_j) e_j, e_i \right) e_i \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (x, e_j) \underbrace{(e_j, e_i)}_{=\delta_{ij}} e_i = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i = Px, \end{aligned} \tag{16.8}$$

womit  $P$  eine Projektion ist. Also ist  $\mathcal{H}$  die direkte Summe von  $\ker P$  und von  $\text{ran } P$ . Offenbar gilt  $\text{ran } P \subseteq \mathcal{G}$  und wegen  $Pe_j = e_j$  sogar  $\text{ran } P = \mathcal{G}$ . Aus  $(P(\sum_{i \in I} c_i e_i), e_j) = c_j$  für Skalare  $c_i \in \mathbb{C}$  folgt die lineare Unabhängigkeit von  $(e_i)_{i \in I}$ . Somit gilt  $Px = 0$  genau dann, wenn  $(x, e_i) = 0$  für alle  $i \in I$ , was aber zu  $x \in \mathcal{G}^\perp$  äquivalent ist.  $\square$

**16.3.7 Lemma.** Mit der Notation aus Proposition 16.3.6 gilt für alle  $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2,$$

und damit

$$\|Px\| \leq \|x\|. \tag{16.9}$$

Sind  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ , so gilt  $\|\sum_{i \in I} c_i e_i\|^2 = \sum_{i \in I} |c_i|^2$ . Insbesondere gilt

$$\|Px\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2.$$

Schließlich ist  $y = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$  der eindeutige Vektor in  $\mathcal{G}$  mit minimalem Abstand zu  $x$ .

*Beweis.* Sind  $u, v \in \mathcal{H}$  und  $u \perp v$ , so gilt  $(u + v, u + v) = (u, u) + (v, v)$ . Wenden wir diese Tatsache auf  $u = Px$  und  $v = (I - P)x$  an, so erhalten wir die erste Gleichung.

Wenden wir sie  $n$ -mal auf die Summe  $c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$  an, und beachten, dass  $\|c_j e_j\|^2 = |c_j|^2$ , so folgt die zweite Gleichung.

Um die letzte Behauptung zu zeigen, sei  $y \in \mathcal{G}$  beliebig. Der Abstand zum Quadrat von  $y$  zu  $x$  ist wegen  $(x - Px) \perp (y - Px)$

$$\begin{aligned} (x - y, x - y) &= (x - Px + (Px - y), x - Px + (Px - y)) \\ &= (x - Px, x - Px) + (Px - y, Px - y) = \|x - Px\|^2 + \|Px - y\|^2. \end{aligned}$$

Also ist immer  $\|x - y\| \geq \|x - Px\|$  außer  $\|Px - y\|^2 = 0$  bzw.  $y = Px$ .  $\square$

Ist nun  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein abzählbares Orthonormalsystem, so kann man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die orthogonale Projektion  $P_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}_n$  wie in Proposition 16.3.6 betrachten, wobei  $\mathcal{G}_n$  die lineare Hülle von  $e_1, \dots, e_n$  ist. Zudem gilt

$$P_n x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k.$$

Aus Lemma 16.3.7 wissen wir, dass

$$\|x\|^2 = \|(I - P_n)x\|^2 + \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2. \quad (16.10)$$

Wir erhalten somit folgenden Satz.

**16.3.8 Satz.** Sei  $(\mathcal{H}, (.,.))$  ein Skalarproduktraum und  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein abzählbares Orthonormalsystem darin. Für ein  $x \in \mathcal{H}$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ , also  $((x, e_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Insbesondere ist diese Folge von komplexen Zahlen eine Nullfolge.

Außerdem konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$  in  $\mathcal{H}$  bzgl.  $\|\cdot\|$  gegen  $x$  genau dann, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$ .

**16.3.9 Definition.** Man bezeichnet  $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$  als *Fourierreihe* von  $x$  bezüglich dem Orthonormalsystem  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ob sie nun konvergiert, oder nicht. Konvergiert die Fourierreihe von jedem  $x \in \mathcal{H}$  und ist ihr Grenzwert  $x$ , so bezeichnet man  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  als *Orthonormalbasis*.

**16.3.10 Proposition.** Mit der Notation aus Satz 16.3.8 ist  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die lineare Hülle von  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist.

*Beweis.* Da die Folge der Partialsummen der Fourierreihe von  $x \in \mathcal{H}$  in der linearen Hülle von  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  liegt, folgt aus der Orthonormalbasiseigenschaft, dass die lineare Hülle von  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist.

Umgekehrt folgt aus der Dichtheit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$  für eine Folge  $x_n = \sum_{j=1}^{m(n)} \alpha_j^n e_j$  aus der linearen Hülle von  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Sei  $(N(n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge aus  $\mathbb{N}$  mit  $N(n) \geq m(n)$ . Dann gilt wegen  $P_{N(n)} x_n = x_n$

$$\|x - P_{N(n)} x\| \leq \|x - x_n\| + \|P_{N(n)}(x_n - x)\| \leq 2\|x - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Aus (16.10) erhalten wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N(n)} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$ , und infolge  $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$ , was schließlich auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x$  bedingt.  $\square$

Für Hilberträume erhalten wir folgendes, schönes Resultat.

**16.3.11 Satz.** Sei  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum und  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ . Dann ist die Abbildung  $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$

$$\psi(x) = ((x, e_k))_{k \in \mathbb{N}}$$

linear, bijektiv und Norm erhaltend, wobei

$$\psi^{-1}((c_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

*Beweis.* Dass  $\psi$  den Raum  $\mathcal{H}$  Norm erhaltend nach  $\ell^2(\mathbb{N})$  hinein abbildet, folgt aus Satz 16.3.8. Die Linearität ist auch klar. Um die Surjektivität zu zeigen, sei  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Nun konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

in  $\mathcal{H}$ , da die Folge  $(\sum_{k=1}^n c_k e_k)_{n \in \mathbb{N}}$  von Partialsummen wegen (siehe Lemma 16.3.7)

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k - \sum_{k=1}^l c_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=l+1}^n c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=l+1}^n |c_k|^2 = \left| \sum_{k=1}^n |c_k|^2 - \sum_{k=1}^l |c_k|^2 \right| \quad (16.11)$$

eine Cauchy-Folge ist. Da wegen  $|(x, e_j)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(e_j, e_j)}$  (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) die lineare Abbildung  $x \mapsto (x, e_j)$  beschränkt ist, folgt aus (9.6), dass

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k, e_j) = c_j,$$

womit  $\psi(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k) = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**16.3.12 Bemerkung (\*).** Nach Proposition 16.3.10 ist jedes Orthonormalsystem  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in einem Skalarproduktraum  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  Orthonormalbasis in dem Skalarproduktraum  $(\mathcal{G}, (\cdot, \cdot))$ , wobei  $\mathcal{G} (\subseteq \mathcal{H})$  der Abschluss der linearen Hülle von  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  ist.

Mit Satz 16.3.8 folgt ähnlich wie in (16.11), dass die Folge der Partialsummen von  $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$  eine Cauchy-Folge ist. Ist  $(\mathcal{G}, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum, so konvergiert diese Reihe. Setzen wir  $P(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ , so folgt offenbar die Linearität von  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ . Wegen Satz 16.3.11 gilt  $Px = x$  für  $x \in \mathcal{G}$ , womit insbesondere  $P(Px) = Px$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ . Also ist  $P$  eine Projektion auf  $\mathcal{G}$ , deren Kern wegen  $\|Px\|^2 = \|\psi(Px)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$  genau mit  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}^{\perp}$  übereinstimmt. Wegen der Linearität und der Stetigkeit von  $x \mapsto (x, y)$  für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt dabei  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \mathcal{G}^{\perp}$ ; vgl. Proposition 16.3.6.

**16.3.13 Bemerkung (\*).** Mit Hilfe des Begriffes der unbedingten Konvergenz aus dem ersten Semester lassen sich obige Ergebnisse auf Orthonormalsysteme bzw. Orthonormalbasen  $(e_i)_{i \in I}$  mit beliebiger Mächtigkeit der Indexmenge  $I$  ausdehnen.

<sup>9</sup>Das ist sicher der Fall, wenn  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum ist.

## 16.4 Fourierreihen auf $L^2[-\pi, \pi]$

Wir betrachten nun den Hilbertraum  $L^2[-\pi, \pi] := L^2([-\pi, \pi], \mathfrak{B} \cap [-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi}\lambda|_{\mathfrak{B} \cap [-\pi, \pi]})$  versehen mit

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f \bar{g} d\lambda,$$

so überprüft man leicht, dass für  $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (\exp(ni.), \exp(mi.)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(nit) \overline{\exp(mit)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp((n-m)it) dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } m = n, \\ 0, & \text{falls } m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist

$$1 = \exp(0it), \exp(it), \exp(-it), \exp(2it), \exp(-2it), \exp(3it), \exp(-3it), \dots$$

ein Orthonormalsystem in  $L^2[-\pi, \pi]$ .

**16.4.1 Lemma.** *Das Orthonormalsystem  $(\exp(ni.))_{n \in \mathbb{Z}}$  ist eine Orthonormalbasis in  $L^2[-\pi, \pi]$ .*

*Beweis.* Zu  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  und jedem  $\epsilon > 0$  gibt es nach Korollar 16.2.7 ein  $g \in C_{00}^\infty(-\pi, \pi)$  mit  $\|f - g\|_2 < \epsilon$ . Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (siehe Beispiel 12.15.9) gibt es ein  $h$  aus der linearen Hülle von  $(\exp(ni.))_{n \in \mathbb{Z}}$  – also ein trigonometrisches Polynom – mit  $\|g - h\|_\infty < \epsilon$ . Wegen  $\|g - h\|_2^2 = \int_{[-\pi, \pi]} |h - g|^2 \frac{1}{2\pi} d\lambda \leq \|g - h\|_\infty^2$  folgt  $\|f - h\|_2 < 2\epsilon$ , womit die lineare Hülle von  $(\exp(ni.))_{n \in \mathbb{Z}}$  dicht in  $L^2[-\pi, \pi]$  liegt. Die Aussage folgt nun aus Proposition 16.3.10.  $\square$

Nach Satz 16.3.11 gibt es also einen bijektiven Zusammenhang zwischen  $L^2[-\pi, \pi]$  und  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , wobei für jedes  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  seine *Fourierreihe*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(nit) \tag{16.12}$$

mit den *Fourierkoeffizienten*

$$c_n = (f, \exp(ni.)) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(t) \exp(-int) d\lambda(t) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z},$$

in der von  $(., .)$  induzierten Norm  $\|.\|_2$  gegen  $f$  konvergiert. Dabei denken wir uns diese Funktionenreihe über die Indizes  $n$  in der Reihenfolge  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$  aufsummiert.

**16.4.2 Bemerkung.** Indem wir in (16.12) die Summanden  $+n$  und  $-n$  zusammenfassen, erhalten wir aus  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$ , dass (16.12) genau dann konvergiert, wenn die



Funktionenreihe

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \exp(mit) + c_{-m} \exp(-mit))$$

$$= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \underbrace{(c_m + c_{-m})}_{=: a_m} \cos(mt) + i \underbrace{(c_m - c_{-m})}_{=: b_m} \sin(mt) \right) \quad (16.13)$$

es tut, und zwar gilt diese Äquivalenz jeweils im punktweisen Sinn, im gleichmäßigen Sinn, oder bzgl.  $\|\cdot\|_2$ . Man rechnet leicht nach, dass dabei ( $m \in \mathbb{N}$ )

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(t) \cos(mt) d\lambda(t), \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(t) \sin(mt) d\lambda(t).$$

Beachte, dass für reellwertige Funktionen  $f$  offenbar  $\bar{c}_n = c_{-n}$  gilt, und damit die  $a_m$  und die  $b_m$  sowie  $c_0$  auch alle reell sind.

Weiters gilt für *gerade Funktionen*, dh.  $f(t) = f(-t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ , immer  $b_m = 0$  und somit  $c_m = c_{-m}$ , und für *ungerade Funktionen*, dh.  $f(t) = -f(-t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ , immer  $a_m = 0$  sowie  $c_0 = 0$  und in Folge  $c_m = -c_{-m}$  für  $m \in \mathbb{N}$ .

16.4.3 Beispiel. Betrachte die Funktion

$$f := \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{falls } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \pm\pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{falls } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

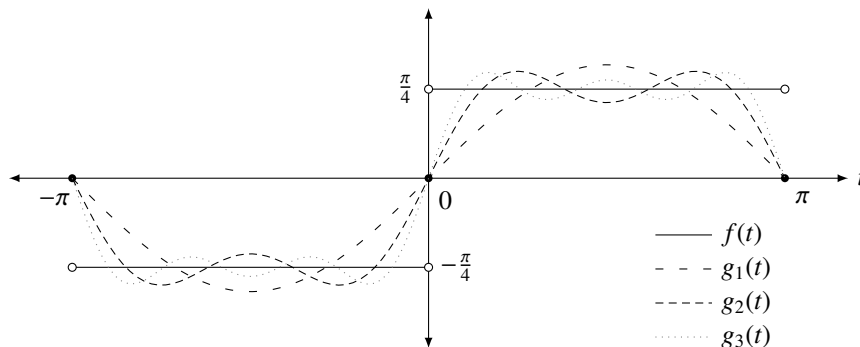
Da die Funktion ungerade ist, folgt  $c_0 = 0$  sowie  $a_m = 0$  bzw.  $c_m = -c_{-m} = \frac{b_m}{2i}$ . Die Reihe in (16.13) wird also eine reine Sinusreihe. In der Tat berechnet man  $b_m = 0$  für gerade  $m \in \mathbb{N}$  und  $b_m = \frac{1}{m}$  für ungerade  $m \in \mathbb{N}$ . (16.13) hat für diese Funktion also die Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}.$$

Diese Reihe konvergiert bzgl.  $\|\cdot\|_2$  gegen  $f$ . Wir können aber bis jetzt nichts über die Konvergenz dieser Reihe – also der Folge der Partialsummen

$$g_N(t) := \sum_{k=1}^N \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1}, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

im punktweisen Sinne geschweige denn im gleichmäßigen Sinne aussagen.



Wir wenden uns nun der Frage nach punktweiser Konvergenz der Fourierreihe zu.

**16.4.4 Definition.** Eine Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *trigonometrisches Polynom* vom Grad kleiner oder gleich  $l$ , falls  $f$  eine Linearkombination von Funktionen  $\exp(int)$ ,  $|n| \leq l$ , bzw. äquivalent, eine Linearkombination von  $1, \cos t, \dots, \cos lt, \sin t, \dots, \sin lt$  ist.

Sei zunächst  $f(x)$  ein trigonometrisches Polynom vom Grad  $\leq l$ . Da die  $k$ -te Partialsumme

$$s_k(x) = c_0 + \sum_{m=1}^k (c_m \exp(imx) + c_{-m} \exp(-imx)) = c_0 + \sum_{m=1}^k (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

der Reihe in (16.13) gerade die Projektion  $P_{2k+1}(f)$  aus Proposition 16.3.6 von  $f$  auf die lineare Hülle von  $1, \cos x, \dots, \cos kx, \sin x, \dots, \sin kx$  ist, folgt  $s_k(x) = f(x)$  für  $k \geq l$ . Also konvergiert  $(s_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  trivialerweise gegen  $f(x)$  für alle  $x$ .

Die  $k$ -te Partialsumme  $s_k(x)$  der Reihe in (16.13) für eine beliebige Funktion  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  lässt sich folgendermaßen umschreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f d\lambda + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^k \left( \int_{[-\pi, \pi]} f(t) \exp(-mit) d\lambda(t) \cdot \exp(imx) + \right. \\ \left. \int_{[-\pi, \pi]} f(t) \exp(mit) d\lambda(t) \cdot \exp(-imx) \right) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(t) \cdot \left( \sum_{n=-k}^k \exp(ni(x-t)) \right) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Setzt man für  $k \geq 0$

$$D_k(t) := \sum_{n=-k}^k \exp(nit),$$

so erhalten wir

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(t) D_k(x-t) d\lambda(t). \quad (16.14)$$

Die Funktion  $D_k(t)$  heißt *Dirichlet-Kern* und ist  $2\pi$  periodisch. Man sieht leicht mit Hilfe der Formel für die endliche geometrische Reihe, dass sich  $D_k$  schreiben lässt als

$$\begin{aligned} D_k(t) &= \sum_{n=-k}^k e^{int} = \exp(-kit) \frac{1 - \exp((2k+1)it)}{1 - \exp(it)} \\ &= \frac{\exp((-k - \frac{1}{2})it) - \exp((k + \frac{1}{2})it)}{\exp(-\frac{1}{2}it) - \exp(\frac{1}{2}it)} \\ &= \frac{\sin((k + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} = (\cos kt + \cot \frac{t}{2} \cdot \sin kt). \end{aligned} \quad (16.15)$$

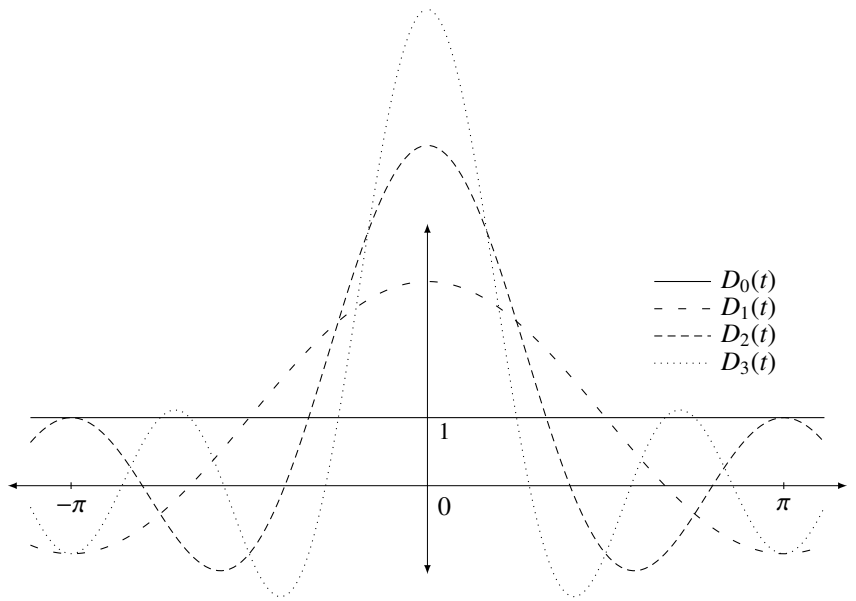


Abbildung 16.2: Dirichlet-Kern

Nehmen wir uns eine Funktion  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  her, vernachlässigen den Funktionswert bei  $\pi$  und setzen  $f|_{[-\pi, \pi)}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $\tilde{f}$  fort, so können wir (16.14) in der Form

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \tilde{f}(x+t) D_k(t) d\lambda(t) \quad (16.16)$$

schreiben. Man beachte, dass dieser Ausdruck für alle  $x \in \mathbb{R}$  existiert und so wie  $\tilde{f}$  auch  $2\pi$ -periodisch ist. Wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 2\pi$$

konvergiert die Folge der Partialsummen  $s_k$  in einem Punkt  $x$  gegen ein  $s(x) \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn

$$\int_{[-\pi, \pi]} (\tilde{f}(x+t) - s(x)) D_k(t) d\lambda(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (16.17)$$

Folgender Satz liefert uns ein hinreichendes und einfach nachzuprüfendes Kriterium für die Konvergenz der Folge  $(s_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ .

**16.4.5 Satz.** Sei  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ , und sei  $\tilde{f}$  die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung von  $f|_{[-\pi, \pi)}$  auf ganz  $\mathbb{R}$ . Weiters sei  $x \in \mathbb{R}$ . Existieren die einseitigen Limites

$$\tilde{f}(x+) := \lim_{t \rightarrow x+} \tilde{f}(t), \quad \tilde{f}(x-) := \lim_{t \rightarrow x-} \tilde{f}(t),$$

und die verallgemeinerten einseitigen Ableitungen

$$\tilde{f}'(x+) := \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x+)}{h}, \quad \tilde{f}'(x-) := \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-)}{h},$$

dann folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}. \quad (16.18)$$

*Beweis.* Wegen (16.17) lässt sich die gewünschte Beziehung (16.18) umformulieren zu<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi]} \left( \tilde{f}(x+t) - \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2} \right) D_k(t) d\lambda(t) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0, \pi]} (\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t) - \tilde{f}(x+) - \tilde{f}(x-)) D_k(t) d\lambda(t) = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (16.15) sehen wir, dass dieses Integral übereinstimmt mit

$$\begin{aligned} \int_{[0, \pi]} (\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t) - \tilde{f}(x+) - \tilde{f}(x-)) \cdot \cos kt d\lambda(t) + \\ + \int_{[0, \pi]} \left( \frac{\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t) - \tilde{f}(x+) - \tilde{f}(x-)}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \right) \cdot \sin kt d\lambda(t). \quad (16.19) \end{aligned}$$

Die Funktion in der Klammer im ersten Integral ist offenbar in  $L^2[-\pi, \pi]$ . Das erste Integral ist also bis auf eine multiplikative Konstante die Summe  $c_{-k} + c_k$  der Fourierkoeffizienten der Funktion

$$(\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t) - \tilde{f}(x+) - \tilde{f}(x-)) \cdot \mathbb{1}_{(0, \pi)},$$

und damit gemäß Satz 16.3.8 eine Nullfolge für  $k \rightarrow \infty$ .

Die Funktion  $g$  in der Klammer des zweiten Integrals erfüllt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-t) - \tilde{f}(x-)}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \cos \frac{t}{2} = \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \left( \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x+)}{t} + \frac{\tilde{f}(x-t) - \tilde{f}(x-)}{t} \right) \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \cos \frac{t}{2} = 2(\tilde{f}'(x+) - \tilde{f}'(x-)). \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $g \cdot \mathbb{1}_{(0, \pi)}$  auf einem hinreichend kleinen Intervall  $(0, \delta]$  beschränkt. Auf  $(\delta, \pi)$  überträgt sich die Tatsache, dass  $t \mapsto \tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)$  quadratisch integrierbar ist, auf  $g \cdot \mathbb{1}_{(0, \pi)}$ . Insgesamt liegt  $g \cdot \mathbb{1}_{(0, \pi)}$  in  $L^2[-\pi, \pi]$ . Also ist das zweite Integral in (16.19) wieder bis auf eine multiplikative Konstante die Differenz  $c_{-k} - c_k$  der Fourierkoeffizienten der Funktion  $g \cdot \mathbb{1}_{(0, \pi)}$  und nach Satz 16.3.8 abermals eine Nullfolge für  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**16.4.6 Bemerkung.** Mit einer nur etwas verfeinerten Argumentation sieht man, dass (16.18) gilt, wenn für ein hinreichend kleines  $\delta > 0$

$$\int_{(0, \delta)} \frac{|f(x+t) - f(x+)|}{t} d\lambda(t) < +\infty \quad \text{und} \quad \int_{(0, \delta)} \frac{|f(x-t) - f(x-)|}{t} d\lambda(t) < +\infty$$

gilt.

<sup>10</sup>Man beachte, dass  $D_k(t)$  eine gerade Funktion ist.

**16.4.7 Bemerkung.** Ist  $f$  stückweise stetig differenzierbar auf  $[-\pi, \pi]$ , so sind die Voraussetzungen von Satz 16.4.5 für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt. Also konvergiert die Fourierreihe bei Stetigkeitspunkten  $x$  von  $\tilde{f}$  gegen  $\tilde{f}(x)$  und sonst gegen  $\frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}$ .

**16.4.8 Beispiel.** Wir betrachten  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ . Die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung dieser Funktion<sup>11</sup> ist stückweise stetig differenzierbar. Also konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen  $f$ .

Da  $f$  eine gerade Funktion ist, gilt  $b_m = 0$  und damit  $c_m = c_{-m}$ ; vgl. Bemerkung 16.4.2. Für  $m > 0$  gilt zudem

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{a_m}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos mt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos mt \, dt \\ &= -\frac{1}{m\pi} \int_0^{\pi} \sin mt \, dt = \frac{1}{m^2\pi} (\cos m\pi - \cos 0) = \frac{1}{m^2\pi} ((-1)^m - 1), \end{aligned}$$

sowie  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \, dt = \frac{\pi}{2}$ . Also gilt für alle  $x \in [-\pi, \pi]$  die punktweise Konvergenz

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \exp(nix) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos((2m-1)x).$$

Setzen wir  $x = 0$ , so erhalten wir

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}.$$

**16.4.9 Bemerkung.** Hat man eine Funktion  $f \in L^2[-T, T]$  gegeben, so kann man diese mittels einer Umskalierung in eine Fourierreihe der Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(ni \frac{\pi x}{T}\right) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos m \frac{\pi x}{T} + b_m \sin m \frac{\pi x}{T} \right)$$

mit  $(n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp\left(-ni \frac{\pi t}{T}\right) dt, \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos k \frac{\pi t}{T} dt, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin k \frac{\pi t}{T} dt \end{aligned}$$

entwickeln.

Hat man nun zum Beispiel eine Funktion  $g(x)$  am Intervall  $[0, 1]$  gegeben und möchte diese in eine reine Sinusreihe entwickeln, so geht man folgendermaßen vor. Zunächst definiert man eine Funktion  $f$  auf  $[-1, 1]$ , indem man  $g$  ungerade fortsetzt, dh.

$$f(x) := \begin{cases} -g(-x), & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ g(x), & \text{falls } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

<sup>11</sup>Sägezahnfunktion.

Diese Funktion entwickelt man auf  $[-1, 1]$  in eine Fourierreihe. Das ist eine reine Sinusreihe, da wir  $f$  ja als ungerade definiert haben. Eingeschränkt auf  $[0, 1]$  erhalten wir die gewünschte Entwicklung von  $g$ .

**16.4.10 Satz (Lokalisationsprinzip\*).** Für jedes  $\delta > 0$  und für die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $\tilde{g}$  von  $g \in L^2[-\pi, \pi]$  auf  $\mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]} \tilde{g}(x+t) D_k(t) d\lambda(t) = 0. \quad (16.20)$$

Somit hängt das Verhalten der Partialsummen  $s_k(x)$  einer Funktion  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  nur von den Werten von  $\tilde{f}$  lokal bei  $x$  ab. Genauer gesagt konvergiert  $s_k(x)$  gegen einen Wert  $s(x)$  genau dann, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-\delta, \delta]} (\tilde{f}(x+t) - s(x)) D_k(t) d\lambda(t) = 0. \quad (16.21)$$

*Beweis.* Setze

$$\alpha(t) := \begin{cases} \tilde{g}(t+x), & \text{falls } \delta < |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{falls } |t| \leq \delta, \end{cases} \quad \beta(t) := \begin{cases} \tilde{g}(t+x) \cot \frac{t}{2}, & \text{falls } \delta < |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{falls } |t| \leq \delta. \end{cases}$$

Beachte, dass  $\cot \frac{t}{2}$  auf  $\delta \leq |t| \leq \pi$  stetig und damit beschränkt ist. Also gilt  $\beta \in L^2[-\pi, \pi]$ . Mit (16.15) erhalten wir

$$\int_{[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]} \tilde{g}(t+x) D_k(t) d\lambda(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) \cos kt dt + \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \sin kt d\lambda(t).$$

Wegen  $2 \cos kt = \exp(kit) + \exp(-kit)$  und  $2i \sin kt = \exp(kit) - \exp(-kit)$  ist die rechte Seite die Summe von Fourierkoeffizienten von  $L^2[-\pi, \pi]$ -Funktionen und somit gemäß Satz 16.3.8 gegen Null konvergent

Schließlich folgt (16.21) aus (16.17) und (16.20), wobei wir  $g(t) = f(t) - s(x)$  setzen.  $\square$

**16.4.11 Bemerkung.** Das Lokalisationsprinzip zeigt einen grundlegenden Unterschied zwischen trigonometrischen Reihen und Potenzreihen auf. Stimmen nämlich zwei Funktionen in einer Umgebung des Entwicklungspunktes überein, so haben sie die selbe Taylorreihe. Dagegen folgt für die entsprechenden Fourierreihen nur, dass sie sich lokal bei diesem Punkt gleich verhalten.

## 16.5 Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen\*

Sei  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  und

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(nit)$$

ihre Fourierreihe. Falls diese Reihe auf  $[-\pi, \pi]$  – und wegen der  $2\pi$ -Periodizität damit auf  $\mathbb{R}$  – gleichmäßig konvergiert, so ist die Grenzfunktion als gleichmäßiger Grenzwert

stetiger Funktionen sicherlich stetig. Damit die Fourierreihe dann  $f$  als gleichmäßigen Grenzwert hat, ist es also notwendig, dass auch  $f$  stetig ist.

Für ein hinreichendes Kriterium betrachten wir ein stetiges und stückweise stetig differenzierbares  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Als solche ist sie beschränkt und liegt daher in  $L^2[-\pi, \pi]$ . Nun sei  $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $g(x) = f'(x)$ , wenn  $f$  bei  $x$  differenzierbar ist, und  $g(x) = 0$  sonst.

Da  $f$  stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, gibt es eine Zerlegung  $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$  von  $[-\pi, \pi]$  derart, dass sich die Funktionen  $f|_{(t_{j-1}, t_j)}$  stetig differenzierbar auf  $[t_{j-1}, t_j]$  fortsetzen lassen. Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist diese Fortsetzung gerade  $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ .

Also gilt  $g(x) = f'(x)$  für alle  $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$ , und  $g|_{(t_{j-1}, t_j)}$  hat die stetige Fortsetzung  $(f|_{[t_{j-1}, t_j]})'$  auf  $[t_{j-1}, t_j]$ , womit  $g$  beschränkt ist und daher in  $L^2[-\pi, \pi]$  liegt.

Bezeichnet  $\gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , die Fourierkoeffizienten von  $g$ , so folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} g(t) \exp(-nit) d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{[t_{j-1}, t_j]} (f|_{[t_{j-1}, t_j]})'(t) \exp(-nit) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n (f(t_j) \exp(-nit_j) - f(t_{j-1}) \exp(-nit_{j-1})) - \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{[t_{j-1}, t_j]} f|_{[t_{j-1}, t_j]}(t) (-in) \exp(-nit) d\lambda(t) \\ &= f(\pi) \exp(-n\pi i) - f(-\pi) \exp(n\pi i) + inc_n = inc_n. \end{aligned}$$

Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgender Satz.

**16.5.1 Satz.** *Ist  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $f(-\pi) = f(\pi)$ , so konvergiert ihre Fourierreihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(nit)$  absolut als Funktionenreihe und somit auch gleichmäßig gegen die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $\tilde{f}$  von  $f|_{[-\pi, \pi]}$ .*

*Beweis.* Wir verwenden obige Notation. Nach Satz 16.3.8 ist die Folge der Fourierkoeffizienten  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  von  $g$  quadratisch summierbar, dh.  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\gamma_n|^2$ . Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Lemma 3.1.4, folgt

$$\sum_{0 \neq n = -N}^N |c_n| = \sum_{0 \neq n = -N}^N \frac{|nc_n|}{|n|} = \sum_{0 \neq n = -N}^N \frac{|\gamma_n|}{|n|} \leq \left( \sum_{0 \neq n = -N}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{0 \neq n = -N}^N |\gamma_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

und für  $N \rightarrow \infty$ , dass

$$\sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \|c_n \cdot \exp(ni \cdot)\|_{\infty} = \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} |c_n| \leq \left( \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} |\gamma_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Nach dem Kriterium von Weierstraß, Korollar 6.8.4, konvergiert die Fourierreihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(ni \cdot)$  absolut als Funktionenreihe und damit auch gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  und zwar wegen Satz 16.4.5 gegen  $\tilde{f}$ .  $\square$

## 16.6 Fejér Kern\*

Man überzeugt sich leicht, dass für eine Nullfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  bestehend aus nichtnegativen reellen Zahlen auch die Folge der arithmetischen Mittel  $\left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k a_j\right)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  eine Nullfolge bildet. Daraus schließt man leicht, dass für eine konvergente Folge  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  auch die Folge  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  der arithmetischen Mittel

$$\sigma_k := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_k}{k+1}$$

konvergiert, und zwar gegen den gleichen Grenzwert. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie man am Beispiel der Folge  $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$  sieht.

Somit ist es einen Versuch wert, für eine Funktion  $f$  mit Fourierreihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(nix) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \exp(mix) + c_{-m} \exp(-mix))$ , die Reihe in diesem verallgemeinerten Sinne zu summieren. Man betrachtet also die sogenannten *Cesaro-Mittel*:

$$\sigma_k(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_k(x)}{k+1}$$

wobei  $s_j(x) = \sum_{n=-j}^j c_n \exp(nix)$  ist. Man beachte, dass genauso wie die  $s_k(x)$  auch die  $\sigma_k(x)$  trigonometrische Polynome vom Grad  $\leq k$  sind.

Die Vorgangsweise ist nun ähnlich wie vorher. Mit (16.16) können wir  $\sigma_k(x)$  für  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  als

$$\sigma_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \tilde{f}(x+t) F_k(t) d\lambda(t), \quad (16.22)$$

schreiben, wobei  $\tilde{f}$  die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung von  $f|_{[-\pi, \pi]}$  auf  $\mathbb{R}$  ist und wobei  $F_k(t)$  den *Fejér-Kern*

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1} (D_0(t) + \dots + D_k(t))$$

bezeichnet. Aus (16.15) folgt

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \frac{1}{(k+1) \sin \frac{t}{2}} \left( \sin(0 + \frac{1}{2})t + \dots + \sin(k + \frac{1}{2})t \right) \\ &= \frac{1}{(k+1) \sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left( \sum_{j=0}^k \exp\left((j + \frac{1}{2})it\right) \right) \\ &= \frac{1}{(k+1) \sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left( \frac{\exp(i(k+1)t) - 1}{\exp(it/2) - \exp(-it/2)} \right) \\ &= \frac{1}{(k+1) \sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left( \exp\left(i(k+1)\frac{t}{2}\right) \frac{\sin(k+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{1}{(k+1)} \left( \frac{\sin \frac{(k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Der Fejér Kern hat folgende Eigenschaften.

**16.6.1 Lemma.** Für alle  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt

- $F_k(t) \geq 0$ ,
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_k(t) dt = 1$
- Für jedes  $\delta > 0$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(t) = 0$  gleichmäßig auf  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .



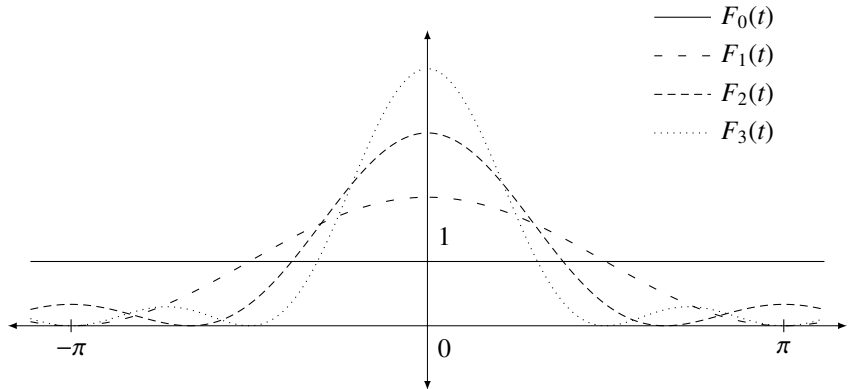


Abbildung 16.3: Fejér-Kern

*Beweis.* Die Eigenschaft  $F_k(t) \geq 0$  ist klar wegen der Darstellung (16.23).

$\int_{-\pi}^{\pi} F_k(t) dt = 2\pi$  folgt wegen  $\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 2\pi$  und der Definition von  $F_k$ . Um die letzte Aussage zu zeigen, genügt es zu bemerken, dass auf Grund von (16.23)

$$F_k(t) \leq \frac{1}{(k+1) \sin^2 \frac{t}{2}} \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}.$$

□

**16.6.2 Satz (Fejér).** Sei  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, wobei  $f(\pi) = f(-\pi)$ . Weiters sei  $\tilde{f}$  die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$ .

Bezeichne  $\sigma_k$  die Folge der Cesaro-Mittel der Fourierreihe, dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k(x) = \tilde{f}(x)$$

gleichmäßig für alle  $x \in \mathbb{R}$ , d.h.  $\sigma_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{f}$  bzgl.  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Für reellwertiges  $f$  sind die  $\sigma_k$  dabei auch reellwertig.

*Beweis.* Zuerst sei bemerkt, dass  $f$  auf  $[-\pi, \pi]$  wegen Satz 6.3.3 gleichmäßig stetig ist. Man sieht sofort, dass dann auch  $\tilde{f}$  gleichmäßig stetig ist.

Wegen (16.22) und Lemma 16.6.1 ist die Behauptung äquivalent zu

$$2\pi(\sigma_k(x) - f(x)) = \int_{[-\pi, \pi]} (\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)) F_k(t) d\lambda(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

und zwar gleichmäßig in  $x$ . Sei also  $\epsilon > 0$  und wähle gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit  $\delta > 0$  so, dass  $|\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)| < \epsilon$ , wenn nur  $|(x+t) - x| = |t| < \delta$ .

Wegen Lemma 16.6.1 gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq F_k(t) < \epsilon$  für alle  $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  und  $k \geq N$ . Wir erhalten (durch mehrfache Verwendung von Lemma 16.6.1)

$$\left| \int_{[-\pi, \pi]} (\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)) F_k(t) d\lambda(t) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{[-\delta, \delta]} |\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)| F_k(t) d\lambda(t) + \int_{[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]} |\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)| F_k(t) d\lambda(t) \\
&\leq \int_{[-\delta, \delta]} \epsilon \cdot F_k(t) d\lambda(t) + \int_{[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]} 2 \cdot \|\tilde{f}\|_\infty \cdot \epsilon d\lambda(t) \leq 2\pi\epsilon + 4\pi \cdot \|\tilde{f}\|_\infty \cdot \epsilon.
\end{aligned}$$

Damit konvergiert  $\sigma_k$  gleichmäßig gegen  $\tilde{f}$ . Für reellwertiges  $f$  sind  $c_0$ , die  $a_m = c_m + c_{-m}$  und die  $b_m = i(c_m - c_{-m})$  die Fourierkoeffizienten reell und daher auch die  $\sigma_k$  reellwertig.  $\square$

# Kapitel 17

## Integraltransformationen

### 17.1 Fouriertransformation

Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $\zeta \in \mathbb{R}$ , so gilt wegen  $|f(\xi) \exp(-i\xi\zeta)| = |f(\xi)|$ , dass auch  $\xi \mapsto f(\xi) \exp(-i\xi\zeta)$  zu  $L^1(\mathbb{R})$  gehört.

**17.1.1 Definition.** Für  $f \in L^1(\mathbb{R})$  sei die *Fouriertransformierte*  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$  definiert durch

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi).$$

Wir zeigen zunächst einige einfache Eigenschaften. Dazu sei an den Raum  $C_0(\mathbb{R})$  aller komplexwertigen, beschränkten, stetigen und im Unendlichen verschwindenden<sup>1</sup> Funktionen erinnert; vgl. Korollar 12.15.10.

Wir betrachten  $C_0(\mathbb{R})$  als Unterraum des Raumes  $C_b(\mathbb{R})$  aller komplexwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen und versehen letzteren mit der Supremumsnorm  $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ . Wir wissen aus Beispiel 9.1.9, dass  $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$  ein Banachraum ist.

$C_0(\mathbb{R})$  ist nun in  $C_b(\mathbb{R})$  abgeschlossen und somit selbst ein Banachraum. Um das einzusehen, sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_0(\mathbb{R})$ , die bzgl.  $\|\cdot\|_{\infty}$ , also gleichmäßig, gegen  $f \in C_b(\mathbb{R})$  konvergiert. Nach Lemma 8.7.1 gilt

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{|t| \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0.$$

Also ist  $f \in C_0(\mathbb{R})$ ; vgl. auch Proposition 12.14.6.

Wir wollen noch bemerken, dass  $(C_0(\mathbb{R}), \cdot, \|\cdot\|_{\infty})$  mit der punktweisen Multiplikation sogar eine Banachalgebra ist.

**17.1.2 Satz.** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  und  $a, b \in \mathbb{C}$  gilt immer  $\widehat{af + bg} \in C_0(\mathbb{R})$ , wobei  $(\widehat{af + bg}) = a\hat{f} + b\hat{g}$  und  $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$ . Also ist  $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$  eine beschränkte lineare Abbildung mit Abbildungsnorm kleiner oder gleich  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

*Beweis.* Aus der Linearität des Integrals folgt sofort  $(\widehat{af + bg})(\zeta) = a\hat{f}(\zeta) + b\hat{g}(\zeta)$  für alle  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Weiters gilt wegen  $|f(\xi) \exp(-i\xi\zeta)| = |f(\xi)|$

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)| d\lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1, \quad (17.1)$$

---

<sup>1</sup>D.h.  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

womit  $\hat{f}$  eine beschränkte, komplexwertige Funktion auf  $\mathbb{R}$  ist. Wegen der Stetigkeit von  $\zeta \mapsto f(\xi) \exp(-i\xi\zeta)$  und der Integrierbarkeit von  $|f(\xi) \exp(-i\xi\zeta)| = |f(\xi)|$  folgt aus Lemma 14.2.6, dass  $\hat{f}$  stetig ist. Also ist  $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R})$  eine lineare Abbildung, die wegen (17.1) beschränkt mit Abbildungsnorm kleiner oder gleich  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  ist. Es bleibt zu zeigen, dass diese Abbildung sogar nach  $C_0(\mathbb{R})$  hinein abbildet.

Für  $-\infty < c < d < +\infty$  und  $\zeta \neq 0$  gilt

$$\widehat{\mathbb{1}_{(c,d)}}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d \exp(-i\xi\zeta) d\xi = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\zeta} (\exp(-id\zeta) - \exp(-ic\zeta)).$$

Für  $|\zeta| \rightarrow +\infty$  konvergiert diese Funktion gegen Null, womit  $\widehat{\mathbb{1}_{(c,d)}} \in C_0(\mathbb{R})$ .

Wegen der Linearität von  $\hat{\cdot}$  gilt für den Raum  $\mathcal{M}$  aller Treppenfunktionen der Form  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{(c_j, d_j]}$ , dass  $\hat{\mathcal{M}} \subseteq C_0(\mathbb{R})$ . Gemäß Bemerkung 16.1.9 und Korollar 16.1.8 ist  $\mathcal{M}$  dicht in  $L^1(\mathbb{R})$ . Wegen der Stetigkeit von  $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R})$  folgt (vgl. Satz 12.3.6)

$$\widehat{L^1(\mathbb{R})} = \widehat{\mathcal{M}} \subseteq \overline{\widehat{\mathcal{M}}} \subseteq \overline{C_0(\mathbb{R})} = C_0(\mathbb{R}).$$

□

**17.1.3 Proposition.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $r, t \in \mathbb{R}, r \neq 0$ . Dann gilt

1. Ist auch  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , so gilt  $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}$ .
2. Mit  $f_t(\xi) = f(\xi + t)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  folgt  $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\|f_t\|_1 = \|f\|_1$  und  $\widehat{f_t}(\zeta) = \exp(it\zeta) \hat{f}(\zeta)$ .
3. Mit  $g(\xi) = \exp(it\xi) f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , folgt  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\|g\|_1 = \|f\|_1$  und  $\hat{g}(\zeta) = \hat{f}(\zeta - t)$ .
4. Mit  $g(\xi) = |r|f(r\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , folgt  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\|g\|_1 = \|f\|_1$  und  $\hat{g}(\zeta) = \hat{f}(\frac{1}{r}\zeta)$ .
5. Mit  $g(\xi) = \overline{f(-\xi)}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , folgt  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\|g\|_1 = \|f\|_1$  und  $\hat{g}(\zeta) = \overline{\hat{f}(\zeta)}$ .
6. Ist  $g(\xi) = -i\xi f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , so folgt  $\hat{g}(\zeta) = \hat{f}'(\zeta)$ .
7. Sei  $f \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $f, g := f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann folgt  $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} f(\xi) = 0$  und

$$\hat{g}(\zeta) = i\zeta \hat{f}(\zeta).$$

*Beweis.* 1.  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , so gilt (siehe Korollar 14.4.8)

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi - \eta) g(\eta) d\lambda(\eta) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi - \eta) \exp(-i(\xi - \eta)\zeta) d\lambda(\xi) g(\eta) \exp(-i\eta\zeta) d\lambda(\eta) \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\zeta) \hat{g}(\zeta). \end{aligned}$$

2.  $f_t \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\|f_t\|_1 = \|f\|_1$  folgt aus Korollar 16.1.11. Weiters gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f_t}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi + t) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-i(\xi - t)\zeta) d\lambda(\xi) = \exp(it\zeta) \hat{f}(\zeta). \end{aligned}$$

3. Ist  $g(\xi) = \exp(it\xi)f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , so prüft man wieder unmittelbar nach, dass  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\|g\|_1 = \|f\|_1$ .

$$\begin{aligned}\hat{g}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(it\xi) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-i\xi(\zeta - t)) d\lambda(\xi) = \hat{f}(\zeta - t).\end{aligned}$$

4. Ist  $g(\xi) = rf(r\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , so folgt aus Korollar 14.4.8 mit  $T : \xi \mapsto \frac{\xi}{r}$ , dass  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\|g\|_1 = \|f\|_1$  und

$$\begin{aligned}\hat{g}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |r| f(r\xi) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-i\xi \frac{\zeta}{r}) d\lambda(\xi) = \hat{f}(\frac{1}{r}\zeta).\end{aligned}$$

5. Ist  $g(\xi) = \overline{f(-\xi)}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , so folgt  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\|g\|_1 = \|f\|_1$  und

$$\hat{g}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-\xi)} \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-\xi) \exp(i\xi\zeta)} d\lambda(\xi) = \overline{\hat{f}(\zeta)}.$$

6. Ist  $g(\xi) = -i\xi f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , so ist  $\frac{\partial}{\partial \zeta} f(\xi) \exp(-i\xi\zeta) = g(\xi) \exp(-i\xi\zeta)$  vom Betrag her durch  $|g(\xi)|$  gleichmäßig in  $\zeta$  beschränkt. Nach Lemma 14.2.8 gilt

$$\hat{f}'(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)(-i)\xi \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi) = \hat{g}(\zeta).$$

7. Wegen Satz 14.2.4 ist  $f'$  uneigentlich Riemann-integrierbar, und somit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t) dt.$$

Also existieren die Limites  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ . Diese Grenzwerte müssen aber verschwinden, da sonst  $f$  nicht integrierbar wäre. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_{-N}^N f'(t) \exp(-it\zeta) dt = (\exp(-it\zeta)f(t)) \Big|_{t=-N}^N + i\zeta \int_{-N}^N f(t) \exp(-it\zeta) dt.$$

Lassen wir  $N$  gegen  $+\infty$  gehen, so folgt nach dem eben hergeleiteten Grenzverhalten von  $f(t)$  die behauptete Gleichheit.  $\square$

**17.1.4 Bemerkung.** Die vorletzte Behauptung in der letzten Proposition besagt, dass umso schneller  $f$  im Unendlichen gegen Null konvergiert, desto öfter ist  $\hat{f}$  ableitbar.

Insbesondere sind die Fouriertransformierten von  $f$ 's mit kompaktem Träger  $K$  beliebig oft ableitbar.

In der Tat ist  $\hat{f}$  für einen kompakten Träger  $\text{supp}(f)$  sogar auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzbar, da ja

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K f(\xi) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi)$$

für alle  $\zeta \in \mathbb{C}$  integrierbar ist. Wir können hier Lemma 14.2.9 anwenden und sehen, dass  $\zeta \mapsto \hat{f}(\zeta)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist, d.h.  $\hat{f}$  ist eine *ganze Funktion*.

### 17.1.5 Beispiel.

$\rightsquigarrow$  Ist  $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ , rechnet man elementar nach, dass

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp(-i\xi\zeta) d\xi = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\zeta} (\exp(-i\zeta) - 1).$$

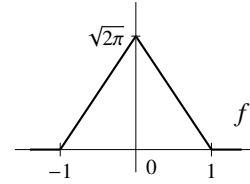
$\rightsquigarrow$  Um die Fouriertransformierte von  $g(t) = t \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t) = i(-i)t \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$  zu bestimmen, verwenden wir Proposition 17.1.3, (6):

$$\hat{g}(\zeta) = i[(-i)t \cdot \widehat{\mathbb{1}_{[0,1]}(t)}](\zeta) = i \frac{d}{d\zeta} \widehat{\mathbb{1}_{[0,1]}(\zeta)} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-i) \exp(-i\zeta)\zeta - \exp(-i\zeta) + 1}{\zeta^2}.$$

Entsprechend ist die Fouriertransformierte von  $t^k \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$  die Funktion  $i^k \frac{d^k}{d\zeta^k} \frac{i}{\sqrt{2\pi}\zeta} (\exp(-i\zeta) - 1)$ .

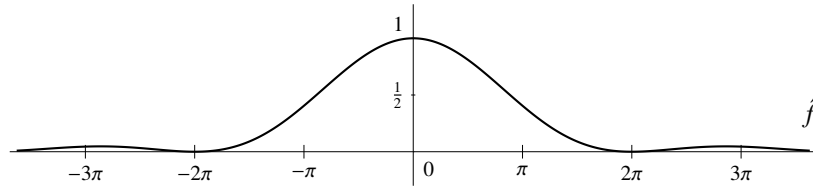
### 17.1.6 Beispiel. Wir wollen die Fouriertransformierte von

$$f(\xi) = \sqrt{2\pi} \max(1 - |\xi|, 0)$$



berechnen, die offensichtlich integrierbar mit  $\|f\|_1 = \sqrt{2\pi}$  ist. Wir zerlegen  $\exp(-i\xi\zeta)$  in Real- und Imaginärteil, dh.  $\exp(-i\xi\zeta) = \cos(\xi\zeta) - i \sin(\xi\zeta)$ . Da für festes  $\zeta \in \mathbb{R}$  die Funktion  $\xi \mapsto f(\xi) \sin(\xi\zeta)$  ungerade ist, verschwindet das Integral darüber. Also gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\zeta) &= \int_{[-1,1]} (1 - |\xi|) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi) = \int_{-1}^1 (1 - |x|) \cos(x\zeta) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(x\zeta) dx \\ &= 2(1 - x) \frac{\sin(x\zeta)}{\zeta} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\sin(x\zeta)}{\zeta} dx = \frac{2}{\zeta^2} (1 - \cos(\zeta)) = \left( \frac{\sin \frac{\zeta}{2}}{\frac{\zeta}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$



Diese Funktion liegt auch in  $L^1(\mathbb{R})$  und hat damit auch eine Fouriertransformierte:

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\xi)}{\xi^2} \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\xi). \quad (17.2)$$

Wir zerlegen wieder  $\exp(-i\xi\zeta)$  in Real- und Imaginärteil. Da  $\xi \mapsto \frac{(\cos(\xi)-1)}{\xi^2} i \sin(\xi\zeta)$  eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral darüber, und (17.2) stimmt überein mit

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\xi)}{\xi^2} \cos(\xi\zeta) d\lambda(\xi) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi^2} \left( 2(\cos(\xi\zeta) - 1) - (\cos(\xi(\zeta+1)) - 1) - (\cos(\xi(\zeta-1)) - 1) \right) d\lambda(\xi). \end{aligned}$$

Für  $\zeta \notin \{-1, 0, 1\}$  stimmt das überein mit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{2|\zeta|^2(\cos(\xi\zeta) - 1)}{(\xi\zeta)^2} d\lambda(\xi) - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta+1|^2(\cos(\xi(\zeta+1)) - 1)}{(\xi(\zeta+1))^2} d\lambda(\xi) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta-1|^2(\cos(\xi(\zeta-1)) - 1)}{(\xi(\zeta-1))^2} d\lambda(\xi) \right). \end{aligned}$$

Mit Korollar 14.4.8 gleicht das dem Ausdruck

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{2|\zeta|(\cos(\eta) - 1)}{\eta^2} d\lambda(\eta) - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta+1|(\cos(\eta) - 1)}{\eta^2} d\lambda(\eta) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta-1|(\cos(\eta) - 1)}{\eta^2} d\lambda(\eta) \right) = \\ & = (2|\zeta| - |\zeta+1| - |\zeta-1|) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\eta) - 1}{\eta^2} d\lambda(\eta) \\ & = (2|\zeta| - |\zeta+1| - |\zeta-1|) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (-\pi), \end{aligned}$$

da man mittels partieller Integration

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

erhält; vgl. Beispiel 8.7.14. Außerdem zeigt man leicht durch Fallunterscheidung, dass

$$-(2|\zeta| - |\zeta + 1| - |\zeta - 1|) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |\zeta| > 1, \\ 2(1 - \zeta), & \text{falls } \zeta \in (0, 1), \\ 2(1 + \zeta), & \text{falls } \zeta \in (-1, 0). \end{cases}$$

Also gilt

$$\hat{f}(\zeta) = \sqrt{2\pi} \max(1 - |\zeta|, 0) = f(\zeta), \quad \zeta \notin \{-1, 0, 1\}.$$

Wegen der Stetigkeit von  $\hat{f}$  und  $f$  stimmen diese Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  überein.

**17.1.7 Beispiel.** Sei  $f(\xi) = \sqrt{2\pi} \max(1 - |\xi|, 0)$  die Funktion aus Beispiel 17.1.6 und sei

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\xi - 2n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{-2n}(\xi).$$

Da  $f(\xi - 2n)$  außerhalb von  $(2n-1, 2n+1)$  verschwindet, ist für ein festes  $\xi \in \mathbb{R}$  höchstens ein Summand von  $g(\xi)$  ungleich Null. Insbesondere konvergiert obige Funktionenreihe punktweise. Nun folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\|g\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(\xi - 2n)(\xi) d\lambda(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi}.$$

Wegen

$$\|g - \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} f_{-2n}\|_1 = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\xi - 2n)(\xi) \right\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2^N} \sqrt{2\pi}$$

konvergiert die Folge  $s_N(\xi)$  der Partialsummen in  $L^1(\mathbb{R})$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$  gegen  $g$ . Wegen Satz 17.1.2 konvergiert daher die Folge (siehe Proposition 17.1.3, (2), sowie Beispiel 17.1.6)

$$\widehat{s_N}(\zeta) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} \hat{f}_{-2n}(\zeta) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} \exp(-i2n\zeta) \hat{f}(\zeta) = \frac{2}{\zeta^2} (1 - \cos(\zeta)) \cdot \frac{1 - \left(\frac{\exp(-i2\zeta)}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\exp(-i2\zeta)}{2}}$$

der Fouriertransformierten der Partialsummen bzgl.  $\|\cdot\|_{\infty}$ , also gleichmäßig, im Banachraum  $C_0(\mathbb{R})$  gegen  $\hat{g}(\zeta)$ . Also gilt

$$\hat{g}(\zeta) = \frac{2}{\zeta^2} (1 - \cos(\zeta)) \frac{1}{1 - \frac{\exp(-i2\zeta)}{2}}.$$

**17.1.8 Bemerkung (\*).** Setzen wir  $m := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$  und  $\|\cdot\|_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\cdot\|_1$ , so stimmt  $L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$  mit  $L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, m)$  als Vektorraum überein. Klarerweise ist  $\|\cdot\|_1$  die 1-Norm, die zum Maß  $m$  gehört, und  $\|\cdot\|_1$  ist äquivalent zu  $\|\cdot\|_1$ .

Weiters überprüft man leicht, dass  $(L^1(\mathbb{R}), \star, \|\cdot\|_1)$ , wobei  $f \star g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g$ , ebenfalls eine Banachalgebra ist. Die Fouriertransformation schreibt sich jetzt als

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-i\xi\zeta) dm(\xi),$$



und aus Satz 17.1.2 folgt, dass  $f \mapsto \hat{f}$  eine beschränkte lineare Abbildung mit Abbildungsnorm  $\leq 1$  von  $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  nach  $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$  ist. Darüber hinaus folgt aus Proposition 17.1.3, (1), dass diese Abbildung sogar mit den multiplikativen Strukturen verträglich ist. Also ist die Fouriertransformation ein beschränkter Banachalgebren-Homomorphismus von  $(L^1(\mathbb{R}), \star, \|\cdot\|_1)$  nach  $(C_0, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ .

**17.1.9 Beispiel.** Die Funktion  $f(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$  liegt in  $L^1(\mathbb{R})$  mit  $\|f\|_1 = \sqrt{2\pi}$ , siehe Beispiel 8.7.13. Wie man aus Lemma 14.2.8 leicht folgert, ist die komplexwertige Funktion

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R},$$

stetig differenzierbar und erfüllt  $F'(x) + xF(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Löst man diese Differentialgleichung und beachtet, dass  $F(0) = \|f\|_1 = \sqrt{2\pi}$ , so folgt  $F(x) = \sqrt{2\pi} \exp(-\frac{x^2}{2})$ . Also folgt

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \exp(-it\zeta) d\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(-\zeta) = \exp(-\frac{\zeta^2}{2}) = f(\zeta).$$

**17.1.10 Bemerkung (\*).** In Lemma 16.2.4 haben wir gesehen, dass  $L^1(\mathbb{R})$  eine approximative Einheit zulässt. Nun werden wir sehen, dass es eine Einheit  $e$  im Sinne von  $f * e = f$  für alle  $f$  nicht gibt.

In der Tat gilt für  $f(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$ , dass  $\hat{f} = f$ . Aus  $f * e = f$  würde  $\sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{e} = \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$  folgen, was wiederum  $\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  zur Folge hätte. Nun ist aber diese Funktion nicht in  $C_0(\mathbb{R})$  im Widerspruch zu Satz 17.1.2.

Die schlagende Eigenschaft der Fouriertransformation ist, dass sie fast involutorisch ist, also dass sie zweimal auf eine Funktion angewendet – falls das möglich ist – fast die Funktion ergibt, mit der man gestartet ist.

**17.1.11 Satz.** Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$  derart, dass auch  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , so gilt  $\hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi)$  für fast alle  $\xi \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Wir setzen

$$k_n(\xi) = \sqrt{2\pi} \max(n - n^2|\xi|, 0),$$

und sehen wegen  $k_n(\xi) = nk_1(n\xi)$  aus Beispiel 17.1.6 und Proposition 17.1.3, (4), dass

$$\hat{k}_n(\zeta) = \left( \frac{\sin \frac{\zeta}{2n}}{\frac{\zeta}{2n}} \right)^2, \quad \hat{\hat{k}}_n = k_n,$$

und

$$|\hat{k}_n(\zeta)| \leq 1, \quad \hat{k}_n(\zeta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Somit folgt  $\hat{k}_n \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , wobei wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\|\hat{k}_n \hat{f} - \hat{f}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}| \cdot |\hat{k}_n - 1| d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wegen Satz 17.1.2 und der Tatsache, dass eine lineare Abbildung genau dann stetig ist, wenn sie beschränkt ist, gilt somit  $\widehat{k_n \hat{f}}(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi)$  im Banachraum  $C_0(\mathbb{R})$ , also gleichmäßig.

Andererseits folgt aus dem Satz von Fubini und aus  $\hat{k}_n(\eta) = k_n(\eta) = k_n(-\eta)$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{k_n \hat{f}}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{k}_n(\zeta) \hat{f}(\zeta) \exp(-i\xi\zeta) d\lambda(\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{k}_n(\zeta) \exp(-i\xi\zeta) \int_{\mathbb{R}} f(\eta) \exp(-i\eta\zeta) d\lambda(\eta) d\lambda(\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\eta) \int_{\mathbb{R}} \hat{k}_n(\zeta) \exp(-i(\xi + \eta)\zeta) d\lambda(\zeta) d\lambda(\eta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\eta) \hat{k}_n(\xi + \eta) d\lambda(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k_n * f(-\xi). \end{aligned}$$

Nun erfüllt aber  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k_n$  die Voraussetzungen von Lemma 16.2.4. Also  $\widehat{k_n \hat{f}}(\xi) \rightarrow f(-\xi)$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . Insbesondere gilt für ein festes  $N > 0$

$$\left\| \widehat{k_n \hat{f}}|_{[-N, N]} - f(-\cdot)|_{[-N, N]} \right\|_1 = \int_{[-N, N]} |\widehat{k_n \hat{f}}(\xi) - f(-\xi)| d\lambda(\xi) \leq \left\| \widehat{k_n \hat{f}} - f(-\cdot) \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Andererseits gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $\widehat{k_n \hat{f}}$  gegen  $\hat{f}$ , dass

$$\left\| \widehat{k_n \hat{f}}|_{[-N, N]} - \hat{f}|_{[-N, N]} \right\|_1 \leq 2N \left\| \widehat{k_n \hat{f}}|_{[-N, N]} - \hat{f}|_{[-N, N]} \right\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Somit muss  $\hat{f}|_{[-N, N]}$  mit  $f(-\cdot)|_{[-N, N]}$  als Element von  $L^1[-N, N]$ , also bis auf eine  $\lambda$ -Nullmenge, übereinstimmen. Da  $N$  beliebig ist, folgt die Aussage.  $\square$

Aus Satz 17.1.11 erkennen wir nun auch, warum bei der Definition der Fouriertransformation die Konstante  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  auftaucht. Ohne diese Konstante würde nämlich nicht  $\hat{f}(\xi) = f(-\xi)$  gelten.

**17.1.12 Korollar.** Die Fouriertransformation ist injektiv. Sind also  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $f \neq g$  als Elemente von  $L^1(\mathbb{R})$ , so folgt  $\hat{f} \neq \hat{g}$ .

*Beweis.* Wäre nämlich  $\hat{f} = \hat{g}$ , so wären  $f - g$  und  $\hat{f} - \hat{g} = \widehat{(f - g)} = 0$  beide in  $L^1(\mathbb{R})$ . Also müsste nach Satz 17.1.11  $\widehat{(f - g)} = \hat{0} = 0$  gleich  $(f - g)(-\cdot)$  sein.  $\square$

### 17.1.13 Beispiel.

$\rightsquigarrow$  Für  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  liegt die Funktion  $t^n \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . Um das einzusehen, sei zunächst bemerkt, dass für  $|t| > 2$

$$|t^n| \cdot \exp(-\frac{t^2}{2}) \leq |t^n| \cdot \exp(-|t|) = |t^n| \cdot \exp(-\frac{|t|}{2}) \cdot \exp(-\frac{|t|}{2}). \quad (17.3)$$

Aus der Regel von de L'Hospital Satz 7.2.14 folgert man, dass  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} |t^n| \cdot \exp(-\frac{|t|}{2}) = 0$ . Also gilt  $|t^n| \cdot \exp(-\frac{|t|}{2}) \leq 1$  außerhalb eines bestimmten kompakten

Intervalls  $[-K, K]$ , und wegen (17.3) ist  $t^n \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})$  über  $\mathbb{R} \setminus [-K, K]$  nach dem Lebesgue-Maß integrierbar. Auf  $[-K, K]$  ist diese Funktion stetig und daher beschränkt. Somit ist  $t^n \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})$  auch über  $[-K, K]$  integrierbar.

↪ Wir behaupten, dass für jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[t]$  mit Grad kleiner oder gleich  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  die Fouriertransformierte der Funktion  $p(t) \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})$  auch von der Form  $q(\zeta) \cdot \exp(-\frac{\zeta^2}{2})$  mit einem Polynom  $q \in \mathbb{C}[\zeta]$  mit Grad kleiner oder gleich  $n$  ist.

Für  $n = 0$  folgt diese Behauptung sofort aus Beispiel 17.1.9. Angenommen sie gilt für Polynome  $p(t)$  vom Grad kleiner oder gleich  $n$ . Sei nun  $p(t)$  vom Grad kleiner oder gleich  $n + 1$ . Wir schreiben es als  $p(t) = a_0 + t\tilde{p}(t)$  für ein  $a_0 \in \mathbb{C}$  und einem Polynom  $\tilde{p}(t)$  vom Grad kleiner oder gleich  $n$ . Aus Proposition 17.1.3 folgt

$$\widehat{[p(t) \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})]}(\zeta) = a_0 \widehat{[\exp(-\frac{t^2}{2})]}(\zeta) + i \frac{d}{d\zeta} \widehat{[\tilde{p}(t) \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})]}(\zeta).$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung stimmt das mit

$$a_0 \exp(-\frac{\zeta^2}{2}) + i(\tilde{q}(\zeta) \cdot \exp(-\frac{\zeta^2}{2}))' =$$

$$a_0 \exp(-\frac{\zeta^2}{2}) + i\tilde{q}'(\zeta) \cdot \exp(-\frac{\zeta^2}{2}) - i\zeta \tilde{q}(\zeta) \cdot \exp(-\frac{\zeta^2}{2}) = (a_0 + i\tilde{q}'(\zeta) - i\zeta \tilde{q}(\zeta)) \cdot \exp(-\frac{\zeta^2}{2})$$

überein, wobei  $\tilde{q}(\zeta)$  ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $n$  ist. Da dann  $a_0 + i\tilde{q}'(\zeta) - i\zeta \tilde{q}(\zeta)$  ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $n + 1$  ist, haben wir durch vollständige Induktion die Behauptung gezeigt.

↪ Offensichtlich ist der Funktionenraum

$$\mathcal{P}_n := \{p(t) \cdot \exp(-\frac{t^2}{2}) : p(t) \in \mathbb{C}[t], \deg p(t) < n\}$$

ein linearer Teilraum von  $L^1(\mathbb{R})$  von der Dimension  $n$ . Wir haben eben gesehen, dass die Fouriertransformation  $\mathcal{P}_n$  in  $\mathcal{P}_n$  abbildet. Also ist  $\hat{\cdot} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  eine nach Korollar 17.1.12 injektive und daher auch surjektive lineare Abbildung.

Ist  $p(t)$  vom Grad  $n$ , und  $q(\zeta) \cdot \exp(-\frac{\zeta^2}{2})$  die Fouriertransformierte von  $p(t) \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})$ , so muss der Grad von  $q(\zeta)$  genau  $n$  sein. Wäre dieser echt kleiner, also gleich  $k < n$ , so wäre  $q(\zeta) \cdot \exp(-\frac{\zeta^2}{2})$  wegen der Surjektivität von  $\hat{\cdot} : \mathcal{P}_{k+1} \rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$  auch Bild unter der Fouriertransformation einer Funktion aus  $\mathcal{P}_{k+1}$ . Ein Gradvergleich zeigt, dass diese Funktion ungleich  $p(t) \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})$  ist. Also wäre die Fouriertransformation nicht injektiv.

**17.1.14 Definition.** Wir definieren die *Schwartz Klasse* als folgende Menge von Funktionen

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \|x^n f^{(m)}(x)\|_\infty < +\infty\}.$$

**17.1.15 Beispiel.** Ist  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  und hat  $f$  kompakten Träger, so haben auch alle Ableitungen von  $f$  kompakten Träger. Also sind alle Funktionen der Bauart  $x^n f^{(m)}(x)$  beschränkt, und liegen damit in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Somit gilt  $C_{00}^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Eine  $C^\infty(\mathbb{R})$ -Funktion, die in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  aber nicht in  $C_{00}^\infty(\mathbb{R})$  liegt, ist etwa  $f(x) = e^{-x^2}$ .

**17.1.16 Lemma.** Die Menge  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  bildet einen Vektorraum von Funktionen mit den zusätzlichen Eigenschaften, dass aus  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  immer auch  $f \cdot g$ ,  $\tilde{f}$  sowie  $(x^l f(x))^{(k)}$ ,  $x^l f^{(k)}(x)$  für alle  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  folgt.

Weiters gilt  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , wobei  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dicht in  $L^j(\mathbb{R})$  bzgl.  $\|\cdot\|_j$  für  $j = 1, 2$  enthalten ist.

*Beweis.* Dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ein Vektorraum ist, der mit  $f$  auch  $\tilde{f}$  enthält, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  mit  $f, g$  auch  $\alpha f + \beta g$  und  $\tilde{f}$  in  $C^\infty(\mathbb{R})$  liegen, wobei  $(\alpha f + \beta g)^{(m)} = \alpha f^{(m)} + \beta g^{(m)}$  und  $(\tilde{f})^{(m)} = \overline{f^{(m)}}$ . Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist bekannterweise mit  $f$  und  $g$  auch  $f \cdot g$  unendlich oft differenzierbar, wobei

$$(f \cdot g)^{(m)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} f^{(j)} g^{(m-j)}.$$

Mit dieser Formel folgt unmittelbar aus  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dass  $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  sowie  $(x \mapsto (x^l f(x))^{(k)}), (x \mapsto x^l f^{(k)}(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Insbesondere folgt aus  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  auch  $(x \mapsto (1+x^2)f(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , und damit  $|(1+x^2)f(x)| \leq C, x \in \mathbb{R}$ . Also ist

$$f(x) = (1+x^2)f(x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Produkt einer beschränkten Funktion und einer Funktion aus  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , und daher auch selber aus  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

Zusammen mit Beispiel 17.1.15 folgt  $C_{00}^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^j(\mathbb{R})$ . Da für  $j = 1, 2$  wegen Korollar 16.2.7  $C_{00}^\infty(\mathbb{R})$  dicht in  $L^j(\mathbb{R})$  bezüglich  $\|\cdot\|_j$  ist, muss es auch  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sein.  $\square$

Gemäß der gerade gemachten Bemerkung hat jede Funktion aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  eine Fouriertransformierte. Nun gilt folgende bemerkenswerte Aussage.

**17.1.17 Lemma.** Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , so folgt  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Die Abbildung  $f \mapsto \hat{f}$  ist eine lineare Bijektion auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , wobei  $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  folgt  $-ixf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ . Also hat letztere Funktion eine Fouriertransformierte, wobei nach Proposition 17.1.3, (6),  $\hat{f}$  differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{f}(\zeta) = \widehat{-ixf(x)}(\zeta).$$

Nun wende man diese Schlussweise auf  $-ixf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und so weiter an, um auf  $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R})$  und

$$\frac{d^m}{d\zeta^m} \hat{f}(\zeta) = \widehat{(-ix)^m f(x)}(\zeta)$$

mit beliebigem  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  zu schließen. Somit gilt  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

Für  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ist auch  $[(-ix)^m f(x)]^{(n)}$  in der Schwartz Klasse, also insbesondere in  $L^1(\mathbb{R})$ . Wiederholte Anwendung von Proposition 17.1.3, (7), zeigt, dass die Fouriertransformierte von  $x \mapsto [(-ix)^m f(x)]^{(n)}$  die Funktion  $\zeta \mapsto i^n \zeta^n [\widehat{(-ix)^m f(x)}](\zeta) = i^n \zeta^n (\hat{f}(\zeta))^{(m)}$

ergibt. Insbesondere ist  $\zeta^n(\hat{f}(\zeta))^{(m)} \in C_0(\mathbb{R})$  und damit beschränkt. Es folgt also  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Aus Satz 17.1.11 wissen wir auch, dass  $\hat{\hat{f}} = f(-.)$  fast überall. Da  $\lambda$ -Nullmengen keine nichtleeren offenen Mengen enthalten, ist das Komplement einer Nullmenge dicht in  $\mathbb{R}$ . Wegen der Stetigkeit von  $\hat{f}$  und von  $f(-.)$  stimmen diese Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  überein. Da  $f \mapsto f(-.)$  eine Bijektion auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist, muss wegen  $(f \mapsto f(-.)) = \hat{\hat{\cdot}}$  auch  $\hat{\cdot}$  eine Bijektion auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sein.  $\square$

**17.1.18 Lemma.** Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \cdot \bar{g} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \cdot \bar{\hat{g}} \, d\lambda.$$

*Beweis.* Da  $(s, t) \mapsto f(s)g(t)$  auf  $\mathbb{R}^2$  nach  $\lambda_2$  integrierbar ist, folgt nach dem Satz von Fubini, nach Proposition 17.1.3, (5), sowie Lemma 17.1.17

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \bar{\hat{g}}(t) \, d\lambda(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s) \exp(-ist) \bar{g}(t) \, d\lambda(s) \, d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ist) \bar{g}(t) \, d\lambda(t) \, d\lambda(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s) \hat{\hat{g}}(-s) \, d\lambda(s) = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} \, d\lambda. \end{aligned}$$

$\square$

**17.1.19 Satz.** Es gibt eine eindeutige, lineare, bijektive und isometrische Abbildung  $U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , die  $\hat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  fortsetzt, welche auf  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  mit  $\hat{\cdot}$  übereinstimmt, die also  $Uf = \hat{f}$  für  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  erfüllt. Es gilt für  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$U \circ U(f) = f(-.),$$

und für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$(Uf, Ug) = (f, g), \quad \text{wobei} \quad (f, g) = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} \, d\lambda.$$

*Beweis.* Da  $\hat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gemäß Lemma 17.1.17 und Lemma 17.1.18 linear, bijektiv und isometrisch (bzgl.  $\|\cdot\|_2$ ) ist, und in  $L^2(\mathbb{R})$  dichten Definitionsbereich und dichten Bildbereich hat (vgl. Lemma 17.1.16 und Lemma 17.1.17), ist aus der Funktionalanalysis bekannt, dass sich  $\hat{\cdot}$  eindeutig zu einem  $U$ , wie oben beschrieben, fortsetzen lässt. Der Vollständigkeit halber wollen wir das auch explizit zeigen.

Ist  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , so gibt es wegen der Dichtheit von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in  $L^2(\mathbb{R})$  (bzgl.  $\|\cdot\|_2$ ) eine Folge  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ . Wegen

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$$

ist mit  $(f_n)$  auch  $(\hat{f}_n)$  eine Cauchy-Folge und wegen der Vollständigkeit von  $L^2(\mathbb{R})$  konvergent. Also existiert  $Uf := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n$ .

Diese Definition hängt nicht von der konkreten Folge  $(f_n)$  ab, denn ist  $g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine weitere Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$ , und betrachtet man die gemischte Folge  $(h_n)$

von  $(f_n)$  und  $(g_n)$ , d.h.  $h_1 = f_1, h_2 = g_1, h_3 = f_2, h_4 = g_2, \dots$ , so folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = f$ . Somit konvergiert wie oben gezeigt die Folge  $(\hat{h}_n)$ .

Nun sind aber  $(\hat{f}_n)$  und  $(\hat{g}_n)$  Teilfolgen von  $(\hat{h}_n)$ . Als solche konvergieren sie auch gegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}_n$ . Also folgt

$$Uf = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}_n.$$

Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , so kann man  $f_n := f$  setzen, und erhält  $Uf = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \hat{f}$ . Also ist  $U$  eine Fortsetzung von  $\hat{\cdot}$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Da die Grenzwertbildung und  $\hat{\cdot}$  linear sind folgt leicht, dass auch die Abbildung  $U : L^2 \rightarrow L^2$  linear ist. Die Isometrie-eigenschaft folgt aus

$$\|Uf\|_2 = \|\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

Insbesondere ist  $U$  beschränkt, vgl. Definition 9.2.4. Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  gilt auch

$$4(f, g) = \sum_{j=0}^3 i^j \|f + i^j g\|_2^2 = \sum_{j=0}^3 i^j \|U(f + i^j g)\|_2^2 = 4(Uf, Ug).$$

Als Hintereinanderausführung zweier linearer und beschränkter Abbildungen ist  $U \circ U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  selber linear und beschränkt und wegen Satz 9.2.6 auch stetig. Außerdem gilt für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dass  $Uf = \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und wegen Lemma 17.1.17

$$U \circ U(f) = U(\hat{f}) = \hat{\hat{f}} = f(-).$$

Also stimmt  $U \circ U$  auf der in  $L^2(\mathbb{R})$  dichten Teilmenge  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (vgl. Lemma 17.1.16) überein mit der offensichtlich linearen, bijektiven und isometrischen Abbildung  $f \mapsto f(-)$  von  $L^2(\mathbb{R})$  nach  $L^2(\mathbb{R})$ . Nach Korollar 6.1.5 bzw. Lemma 12.3.7 stimmen dann  $U \circ U$  und  $f \mapsto f(-)$  auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$  überein. Insbesondere ist dann auch  $U$  bijektiv.

Zur Eindeutigkeit der Fortsetzung: Wäre  $\tilde{U}$  eine weitere beschränkte und lineare Fortsetzung von  $\hat{\cdot}$ , so sind  $U$  und  $\tilde{U}$  beide stetig auf  $L^2(\mathbb{R})$  und stimmen auf der dichten Menge  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  überein. Wieder nach Korollar 6.1.5 bzw. Lemma 12.3.7 muss  $U = \tilde{U}$ .

Für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit kompaktem Träger  $K \subseteq \mathbb{R}$  gilt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung  $(\int |f| \cdot 1 \, d\lambda)^2 \leq (\int |f|^2 \, d\lambda)(\int_K 1 \, d\lambda)^2$  und daher  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Mit  $k_\delta$  wie in Definition 14.5.5 folgt aus Lemma 16.2.4

$$\|k_{\frac{1}{n}} * f - f\|_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

für  $j = 1, 2$ . Nach Lemma 14.5.3 verschwindet  $k_{\frac{1}{n}} * f$  außerhalb von  $K + K_{\frac{2}{n}}(0)$ , und nach Fakta 14.5.1 ist es unendlich oft differenzierbar. Also gilt  $k_{\frac{1}{n}} * f \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Nach Konstruktion von  $U$  gilt bzgl.  $\|\cdot\|_2$

$$Uf = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{k_{\frac{1}{n}} * f},$$

und gemäß der Stetigkeit von  $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$  gilt bzgl.  $\|\cdot\|_1$

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{k_{\frac{1}{n}} * f}.$$

Da aus der Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_j$  die  $\lambda$ -fast gleichmäßige und damit die punktweise Konvergenz einer Teilfolge folgt, muss  $Uf = \hat{f}$   $\lambda$ -fast überall gelten; vgl. Satz 13.20 und Satz 7.85 in [K].

Ist schließlich  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , so folgt aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, dass  $\mathbb{1}_{[-n,n]} \cdot f$  für  $n \rightarrow \infty$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$  und bzgl.  $\|\cdot\|_2$  gegen  $f$  konvergiert. Da nach dem oben Gezeigten  $U(\mathbb{1}_{[-n,n]}f) = \widehat{\mathbb{1}_{[-n,n]}f}$ , kann man obige Argumentation nochmals anwenden, um  $Uf = \hat{f}$  zu erhalten.  $\square$

**17.1.20 Bemerkung.** Mit ganz wenigen Adaptionen lässt sich die Fouriertransformation auch auf Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  definieren. Für  $z \in \mathbb{R}^d$  setzt man

$$\hat{f}(z) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i \sum_{j=1}^d x_j z_j) d\lambda_d(x).$$

Es gelten dabei alle oben gebrachten Resultate, wobei die jeweiligen Beweise fast identisch zu den hier gebrachten sind.

## 17.2 Laplacetransformation

Sei  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  eine messbare Funktion. Wir nehmen an, dass es ein  $s \in \mathbb{R}$  derart gibt, dass  $\exp(-st)f(t)$  als Funktion von  $t \in [0, +\infty)$  bezüglich des Lebesgueschen Maßes integrierbar ist, also in  $L^1[0, +\infty)$  liegt. Für  $r > s$  folgt  $|\exp(-rt)f(t)| \leq |\exp(-st)f(t)|$ . Also ist auch  $t \mapsto \exp(-rt)f(t)$  in  $L^1[0, +\infty)$ .

Allgemeiner folgt für  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} z > s$ , dass

$$|\exp(-zt)f(t)| = \exp(-\operatorname{Re}(z)t)|f(t)| \leq |\exp(-st)f(t)|,$$

und damit liegt  $\exp(-zt)f(t)$  auch in  $L^1[0, +\infty)$ . Wegen dieser Überlegungen macht folgende Definition Sinn.

**17.2.1 Definition.** Sei  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Liegt  $t \mapsto \exp(-st)f(t)$  für kein  $s \in \mathbb{R}$  in  $L^1[0, +\infty)$ , so setzen wir  $\sigma(f) := +\infty$ . Anderenfalls sei  $\sigma(f) \in [-\infty, +\infty)$  das Infimum aller jener Zahlen  $s \in \mathbb{R}$ , die  $\exp(-st)f(t) \in L^1[0, +\infty)$  erfüllen. Wir definieren als die *Laplacetransformierte* von  $f$  die Funktion

$$\mathcal{L}(f) : \begin{cases} (\sigma(f), +\infty) & \rightarrow \mathbb{C}, \\ s & \mapsto \int_{[0, +\infty)} f(t) \exp(-st) d\lambda(t). \end{cases}$$

Sei  $\mathcal{L}_c(f) : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Fortsetzung von  $\mathcal{L}(f)$ , d.h.

$$\mathcal{L}_c(f)(z) = \int_{[0, +\infty)} f(t) \exp(-zt) d\lambda(t).$$

**17.2.2 Bemerkung.** Für  $s = \sigma(f)$  kann  $\mathcal{L}(f)(s)$  existieren, muss es aber nicht.

**17.2.3 Beispiel.** Als ganz einfaches Beispiel betrachte  $f(t) = 1$ ,  $t \in [0, +\infty)$ . Da  $t \mapsto \exp(-st)$  genau für  $s \in (0, +\infty)$  über  $[0, +\infty)$  integrierbar ist, gilt  $\sigma(1) = 0$  und für  $\operatorname{Re} z > \sigma(1) = 0$

$$\mathcal{L}_c(1)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}.$$

**17.2.4 Proposition.** Seien  $f, g$  Funktionen wie in Definition 17.2.1 und  $\eta, b \in \mathbb{C}$ ,  $\eta \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Dann gilt

1.  $\mathcal{L}_c(0) = 0$ .
2.  $\sigma(\eta f) = \sigma(f)$  und  $\mathcal{L}_c(\eta f) = \eta \mathcal{L}_c(f)$ .
3.  $\sigma(f + g) \leq \max(\sigma(f), \sigma(g))$  und  $\mathcal{L}_c(f + g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(z) + \mathcal{L}_c(g)(z)$  für  $\operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))$ .
4. Ist  $f$  reellwertig, so gilt  $\mathcal{L}_c(f)(\bar{z}) = \overline{\mathcal{L}_c(f)(z)}$ . Insbesondere ist  $\mathcal{L}(f)$  auch reellwertig.
5. Für  $g(t) = f(at)$  folgt  $\sigma(g) = a\sigma(f)$  und  $a\mathcal{L}_c(g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(\frac{z}{a})$ .
6. Für  $g(t) = f(t) \exp(bt)$  folgt  $\sigma(g) = \sigma(f) + \operatorname{Re} b$  und  $\mathcal{L}_c(g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(z - b)$ .
7.  $\mathcal{L}_c(f)$  ist eine auf ganz  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$  holomorphe Funktion.

Entsprechende Aussagen gelten für  $\mathcal{L}(f)$ . Insbesondere ist diese Funktion  $C^\infty$ .

*Beweis.* Alle Punkte bis auf den letzten sind elementar nachzuprüfen. Diesen könnten wir leicht mit Hilfe von Lemma 14.2.9 beweisen. In der Tat gilt

$$\mathcal{L}_c(f)(z) = \int_{[0, +\infty)} \underbrace{f(x) \exp(-zx)}_{=: h(z, x)} d\lambda(x),$$

wobei  $z \mapsto h(z, x)$  für alle  $x \in [0, +\infty)$  auf  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$  holomorph ist,  $x \mapsto h(z, x)$  für alle komplexen  $z$  mit  $\operatorname{Re} z > \sigma(f)$  integrierbar ist, und wobei  $|h(z, x)| \leq |f(x)| \exp(-(\delta + \sigma(f))x)$  für alle  $x \in [0, +\infty)$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z \geq \delta + \sigma(f)$  für jedes  $\delta > 0$ . Da jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$  in  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \delta + \sigma(f)\}$  für ein hinreichend kleines  $\delta > 0$  enthalten ist, sind alle Voraussetzungen von Lemma 14.2.9 erfüllt und  $\mathcal{L}_c(f)$  damit holomorph.  $\square$

**17.2.5 Bemerkung.** Wegen Satz 11.6.18 ist die Holomorphie einer Funktion  $g$  auf einer offenen Teilmenge  $G$  von  $\mathbb{C}$  äquivalent zur Analytizität dieser Funktion. Also ist sie um jeden Punkt lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Gemäß Korollar 6.8.9 muss  $g$  dann auf einer Kreisscheibe um jeden Häufungspunkt von Nullstellen von  $g$ , der in  $G$  liegt, identisch verschwinden. Ist  $G$  sogar ein Gebiet, so folgt daraus, dass  $g$  auf  $G$  identisch verschwindet.

In Folge stimmen zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet  $G$  überein, wenn sie nur auf einer Menge mit Häufungspunkt in  $G$  übereinstimmen.

Für  $\operatorname{Re} z > \sigma(f)$  schreiben wir  $z$  als  $a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  und sehen, dass

$$\mathcal{L}_c(f)(a + ib) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, +\infty)} f(t) \exp(-at) \exp(-ibt) d\lambda(t) \quad (17.4)$$

betrachtet als Funktion von  $b \in \mathbb{R}$  mit der Fouriertransformierten von  $\sqrt{2\pi} f(t) \exp(-at) \mathbb{1}_{[0, +\infty)}$  übereinstimmt.

**17.2.6 Korollar.** Die Laplacetransformation ist injektiv. Genauer folgt aus  $\mathcal{L}_c(f)(z) = \mathcal{L}_c(g)(z)$ ,  $z \in M$  für eine Menge  $M \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))\}$  mit Häufungspunkt in  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))\}$ , dass  $f = g$  fast überall.



*Beweis.* Wegen der Voraussetzung folgt mit Bemerkung 17.2.5, dass  $\mathcal{L}_c(f)(z)$  und  $\mathcal{L}_c(g)(z)$  auf  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))\}$  übereinstimmen. Ist  $a > \max(\sigma(f), \sigma(g))$ , so stimmen nach (17.4) die Fouriertransformierten von  $\sqrt{2\pi} f(t) \exp(-at) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$  und von  $\sqrt{2\pi} g(t) \exp(-at) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$  überein. Wegen Korollar 17.1.12 folgt die Behauptung.  $\square$

*17.2.7 Bemerkung.* Wir wollen noch zwei wichtige Eigenschaften der Laplacetransformation bemerken, die sich entweder mit Hilfe von (17.4) oder direkt verifizieren lassen.

Die erste besagt, dass  $\mathcal{L}_c(f * g) = \mathcal{L}_c(f) \mathcal{L}_c(g)$ , wobei hier wegen

$$f * g(t) = \int_{[0,t]} f(s)g(t-s) d\lambda(s) = e^{rt} \int_{[0,t]} (f(s)e^{-rs})(g(t-s)e^{-r(t-s)}) d\lambda(s)$$

$f * g$  auch definiert ist, wenn nicht notwendigerweise  $f, g \in L^1[0, +\infty)$ , sondern nur  $f$  und  $g$  eine Laplacetransformierte haben.

Schließlich gilt für  $f \in C^k[0, +\infty)$  so, dass  $f, f', \dots, f^{(k)}$  alle eine Laplacetransformierte haben, ( $\operatorname{Re} z > \max_{j=0,\dots,k} \sigma(f^{(j)})$ )

$$\mathcal{L}_c(f^{(k)})(z) = z^k \mathcal{L}_c(f)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) z^{k-1-j}.$$



# Kapitel 18

## Sobolevräume

### 18.1 Schwache Ableitung

Als Motivation für diesen Abschnitt sei an die Regel der partiellen Integration erinnert. Dabei gilt für zwei stetig differenzierbare Funktionen  $f, \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und einem  $\eta > 0$

$$\int_{-\eta}^{\eta} f'(t)\phi(t) dt = (f(\eta)\phi(\eta) - f(-\eta)\phi(-\eta)) - \int_{-\eta}^{\eta} f(t)\phi'(t) dt.$$

Hat nun etwa  $\phi$  einen kompakten Träger, so verschwinden sowohl die Integranden außerhalb von  $[-\eta, \eta]$  als auch die Randterme für hinreichend großes  $\eta > 0$ , womit

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\phi(t) d\lambda(t) = - \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi'(t) d\lambda(t) \quad (18.1)$$

für  $g = f'$ . Wir werden weiter unten sehen, dass es aber höchstens eine Funktion  $g$  geben kann, die diese Gleichung für alle  $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$  erfüllt. Also lässt sich  $f'$  dadurch charakterisieren, dass es (18.1) mit  $g = f'$  für alle  $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$  erfüllt. Diese Charakterisierung der Ableitung gibt uns eine Möglichkeit, eine Art Ableitung auch von nicht notwendigerweise überall differenzierbaren Funktionen zu definieren. Wir werden das nicht nur für Funktionen in einer, sondern für Funktionen in mehreren Variablen und auch für höhere Ableitungen durchführen.

**18.1.1 Definition.** Sei  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Dann bezeichnet  $L_{loc}^1(G)$  die Menge aller messbaren Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  derart, dass  $f$  über jede kompakte Teilmenge von  $G$  nach  $\lambda_d|_{\mathcal{B}_d \cap G}$  integrierbar ist. Dabei ist  $G$  mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}_d \cap G$  versehen. Diese Funktionen in  $L_{loc}^1(G)$  heißen *lokal integrierbare Funktionen*.

Für einen *Multiindex*  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  sei  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ ; vgl. Bemerkung 10.2.4 und Beispiel 10.2.12. Sind nun  $f, g \in L_{loc}^1(G)$ , sodass für alle  $\phi \in C_{00}^{\infty}(G)$

$$\int_G g\phi d\lambda_d = (-1)^{|\alpha|} \int_G f \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} d\lambda_d, \quad (18.2)$$

so sagen wir, dass  $g$  die  $\alpha$ -te *schwache Ableitung* von  $f$  ist, und schreiben für  $g$  auch  $D^{\alpha}f$ . Die Funktionen  $\phi$  aus  $C_{00}^{\infty}(G)$  nennt man in diesem Zusammenhang auch *Testfunktionen*.

Die Eindeutigkeit bis auf  $\lambda_d$ -Nullmengen der schwachen Ableitung im Falle ihrer Existenz, folgt sofort aus folgendem Lemma, weil die Differenz zweier schwacher Ableitungen genau die Voraussetzung von diesem Lemma erfüllt.

**18.1.2 Lemma.** Ist  $g \in L^1_{loc}(G)$ , sodass  $\int_G g \phi \, d\lambda_d = 0$  für alle  $\phi \in C^\infty_0(G)$ , so gilt  $g = 0$   $\lambda_d$ -fast überall.

*Beweis.* Für jedes feste  $\psi \in C^\infty_0(G)$  ist  $g\psi$  auf  $G$  nach  $\lambda_d$  integrierbar. Zudem gilt  $\int_G (g\psi)\phi \, d\lambda_d = 0$  und zwar sogar für alle  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Wir denken uns diese Funktion außerhalb von  $G$  mit Null fortgesetzt. Dann folgt aus Lemma 16.2.4, dass bzgl.  $\|\cdot\|_1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_{\frac{1}{n}} * (g\psi) = g\psi,$$

wobei die Funktionen  $k_\delta$  wie in Definition 14.5.5 gewählt sind. Nun gilt aber für alle  $x \in \mathbb{R}^d$

$$k_{\frac{1}{n}} * (g\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_{\frac{1}{n}}(x-y) (g\psi)(y) \, d\lambda_d(y) = 0,$$

weil die Funktion  $y \mapsto k_{\frac{1}{n}}(x-y)$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  liegt. Somit folgt  $g\psi = 0$   $\lambda_d$ -fast überall.

Wir setzen nun  $K_n := K_n(0) \setminus U_{\frac{1}{n}}(G^c) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, G^c) \geq \frac{1}{n}, \|x\| \leq n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen Bemerkung 14.5.9 gibt es eine nichtnegative  $C^\infty$ -Funktion  $\psi$  mit einem kompakten, in  $G$  enthaltenen Träger und mit  $\psi(x) = 1$  für alle  $x \in K_n$ . Insbesondere sehen wir, dass  $g$   $\lambda_d$ -fast überall auf  $K_n$  verschwindet. Aus  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = G$  folgt schließlich die Behauptung.  $\square$

**18.1.3 Fakta.** Sei  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen.

1. Ändert man ein  $g$  in (18.2) auf einer  $\lambda_d$ -Nullmenge, so erhält man auch eine schwache Ableitung von  $f$ . Wegen Lemma 18.1.2 kann man  $g$  aber nicht auf einer größeren Menge abändern.
2. Unterscheidet sich ein messbares  $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f \in L^1_{loc}(G)$  nur auf einer  $\lambda_d$ -Nullmenge, so ist auch  $\tilde{f}$  lokal integrierbar. Außerdem folgt aus der Existenz der  $\alpha$ -ten schwachen Ableitung von  $f$  auf  $G$  die Existenz der  $\alpha$ -ten schwachen Ableitung von  $\tilde{f}$ , wobei  $D^\alpha f = D^\alpha \tilde{f}$   $\lambda_d$ -fast überall.

Insbesondere hängt  $D^\alpha f \in L^1_{loc}(G)$  nur von der Restklasse ab, in der  $f$  liegt, wenn man den Vektorraum  $L^1_{loc}(G)$  nach dem Teilraum aller  $\lambda_d$ -fast überall verschwindenden Funktionen faktorisiert, und  $D^\alpha f$  ist dann auch nur bis auf äquivalente eindeutig bestimmt.

3. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt für  $f \in L^p(G)$  mit  $p \in (1, +\infty)$  und kompaktes  $K \subseteq G$

$$\int_K |f| \, d\lambda_d = \int_G \mathbb{1}_K \cdot |f| \, d\lambda_d \leq \left( \int_G \mathbb{1}_K \, d\lambda_d \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left( \int_G |f|^p \, d\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

wobei  $q \in (1, +\infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Also gilt  $L^p(G) \subseteq L^1_{loc}(G)$  für alle  $p \in (1, +\infty)$ . Offenbar gilt auch  $L^1(G), L^\infty(G) \subseteq L^1_{loc}(G)$ .

4. Gemäß Bemerkung 14.5.9 kann man für jedes kompakte  $K \subseteq G$  eine Funktion  $\psi \in C_{00}^\infty(G)$  mit Werten in  $[0, 1]$  und mit  $\psi|_K \equiv 1$  finden. Daraus folgt leicht, dass ein messbares  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann in  $L_{loc}^1(G)$  liegt, wenn für jedes  $\phi \in C_{00}^\infty(G)$  die Funktion  $f \cdot \psi$  nach  $\lambda_d$  integrierbar ist.
5. Da sich jedes  $\phi \in C_{00}^\infty(G)$  durch  $\phi(x) = 0$  für  $x \notin G$  zu einer  $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$ -Funktion fortsetzen lässt, wobei alle möglichen partiellen Ableitungen von  $\phi$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus G$  verschwinden, und da man auch  $f$  und  $g$  zu auf ganz  $\mathbb{R}^d$  lokal integrierbaren Funktionen fortsetzen kann, lässt sich die Bedingung (18.2) auch durch die äquivalente Forderung

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \phi \, d\lambda_d = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d \quad \text{für alle } \phi \in C_{00}^\infty(G), \quad (18.3)$$

ersetzen.

**18.1.4 Proposition.** Seien  $D, G, G_i \subseteq \mathbb{R}^d, i \in I$ , nichtleer und offen, und seien  $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  sowie  $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$ .

- (i) Haben  $f, g \in L_{loc}^1(G)$   $\alpha$ -te schwache Ableitungen, so auch  $\eta f + \zeta g$ , wobei  $D^\alpha(\eta f + \zeta g) = \eta D^\alpha(f) + \zeta D^\alpha(g)$   $\lambda_d$ -fast überall.
- (ii) Gilt  $D \subseteq G$  und existiert die  $\alpha$ -te schwache Ableitung von  $f \in L_{loc}^1(G)$ , so existiert auch die  $\alpha$ -te schwache Ableitung von  $f|_D \in L_{loc}^1(D)$ , wobei  $D^\alpha(f|_D) = D^\alpha(f)|_D$   $\lambda_d$ -fast überall. Insbesondere gilt  $G \cap \text{supp } D^\alpha f \subseteq G \cap \text{supp } f$ .
- (iii) Ein  $f \in L_{loc}^1(\bigcup_{i \in I} G_i)$  hat genau dann eine  $\alpha$ -te schwache Ableitung auf  $\bigcup_{i \in I} G_i$ , wenn  $f|_{G_i}$  eine  $\alpha$ -te schwache Ableitung auf  $G_i$  für alle  $i \in I$  besitzt. In dem Fall gilt dann  $\lambda_d$ -fast überall<sup>1</sup>

$$D^\alpha(f) = \bigcup_{i \in I} D^\alpha(f|_{G_i}).$$

- (iv) Hat  $f \in L_{loc}^1(G)$  die  $\alpha$ -te schwache Ableitung  $D^\alpha f$  und hat  $D^\alpha f \in L_{loc}^1(G)$  die  $\beta$ -te schwache Ableitung  $D^\beta(D^\alpha f)$ , so hat  $f$  eine  $(\alpha + \beta)$ -te schwache Ableitung, wobei  $\lambda_d$ -fast überall

$$D^{(\alpha+\beta)} f = D^\beta(D^\alpha f).$$

- (v) Hat  $f \in L_{loc}^1(G)$  die  $\alpha$ -te schwache Ableitung  $D^\alpha f$ , und ist  $z \in \mathbb{R}^d$  derart, dass<sup>2</sup>  $\|z\| < d(\text{supp } f, G^c)$ , so gilt  $f_z \in L_{loc}^1(G)$  und  $f_z$  hat die  $\alpha$ -te schwache Ableitung  $(D^\alpha f)_z$ .
- (vi) Hat  $f \in L_{loc}^1(G)$  die  $\alpha$ -te schwache Ableitung  $D^\alpha f$ , hat  $f$  einen kompakten, in  $G$  enthaltenen Träger, und ist  $\psi \in C_{00}^\infty(U_\rho(0))$ , wobei  $\rho := d(\text{supp } f, G^c) (> 0)$ , so gilt  $f * \psi \in L_{loc}^1(G)$  und  $f * \psi$  hat die  $\alpha$ -te schwache Ableitung  $(D^\alpha f) * \psi$ .

*Beweis.*

- (i) Diese Aussage folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrales.

<sup>1</sup> Insbesondere hängt die schwache Ableitung nur lokal von  $f$  ab.

<sup>2</sup> Hier ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^d$  und  $d$  die von  $\|\cdot\|$  induzierte Metrik.

- (ii) Wegen Fakta 18.1.3, 5, ist der erste Teil eine unmittelbare Konsequenz der Inklusion  $C_{00}^\infty(D) \subseteq C_{00}^\infty(G)$ , wobei wir uns die Funktionen aus  $C_{00}^\infty(D)$  und  $C_{00}^\infty(G)$  durch Null auf  $\mathbb{R}^d \setminus D$  bzw.  $\mathbb{R}^d \setminus G$  fortgesetzt denken.

Auf der offenen Menge  $G \setminus \text{supp } f$  verschwindet  $f$  und hat somit die Nullfunktion als schwache Ableitung. Also verschwindet auch  $D^\alpha(f|_{G \setminus \text{supp } f}) = D^\alpha(f)|_{G \setminus \text{supp } f}$  auf dieser Menge.

- (iii) Habe  $f$  zunächst auf  $\bigcup_{i \in I} G_i$  eine  $\alpha$ -te schwache Ableitung. Dann folgt aus (ii) die Existenz von  $D^\alpha(f|_{G_i}) = D^\alpha(f)|_{G_i}$  für alle  $i \in I$ . Insbesondere gilt  $D^\alpha(f) = \bigcup_{i \in I} D^\alpha(f|_{G_i})$ .

Existieren umgekehrt alle  $D^\alpha(f|_{G_i})$ , so gilt wegen (ii)  $D^\alpha(f|_{G_i})|_{G_i \cap G_k} = D^\alpha(f|_{G_k})|_{G_i \cap G_k}$  für  $i, k \in I$  mit  $G_i \cap G_k \neq \emptyset$ . Also ist durch

$$g := \bigcup_{i \in I} D^\alpha(f|_{G_i})$$

eine komplexwertige Funktion auf  $\bigcup_{i \in I} G_i$  wohldefiniert.

Sei  $\phi \in C_{00}^\infty(\bigcup_{i \in I} G_i)$  beliebig. Aus Lemma 14.5.8 angewandt auf die kompakte Menge  $\text{supp } \phi$  und die offene Überdeckung  $\{G_i : i \in I\}$  folgt die Existenz nichtnegativer Funktionen  $\chi_j \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $j = 1, \dots, m$  und  $i(1), \dots, i(m) \in I$ , mit

$$\text{supp } \chi_j \subseteq G_{i(j)} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^m \chi_j|_{\text{supp } \phi} = 1. \quad (18.4)$$

Daraus folgt wegen  $\phi \chi_j \in C_{00}^\infty(G_{i(j)})$

$$\phi \cdot g = \sum_{j=1}^m \chi_j \cdot \phi \cdot g = \sum_{j=1}^m \underbrace{D^\alpha(f|_{G_{i(j)}})}_{\in L^1(G_{i(j)})} \cdot \phi \chi_j.$$

Also ist  $\phi \cdot g$  integrierbar. Mit Fakta 18.1.3, 4, folgt  $g \in L_{loc}^1(\bigcup_{i \in I} G_i)$ . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i \in I} G_i} g \phi \, d\lambda_d &= \sum_{j=1}^m \int_{\bigcup_{i \in I} G_i} g \chi_j \phi \, d\lambda_d = \sum_{j=1}^m \int_{G_{i(j)}} D^\alpha(f|_{G_{i(j)}}) \cdot \chi_j \phi \, d\lambda_d \\ &= (-1)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^m \int_{G_{i(j)}} f|_{G_{i(j)}} \frac{\partial^{|\alpha|}(\chi_j \phi)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d \\ &= (-1)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^m \int_{\bigcup_{i \in I} G_i} f \frac{\partial^{|\alpha|}(\chi_j \phi)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d \end{aligned}$$

und somit  $g = D^\alpha f$ .

(iv) Sei  $\phi \in C_{00}^\infty(G)$ . Wegen  $\frac{\partial^{|\beta|}\phi}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_d^{\beta_d}} \in C_{00}^\infty(G)$  folgt

$$\begin{aligned} \int_G D^\beta(D^\alpha f)\phi \, d\lambda_d &= (-1)^{|\beta|} \int_G (D^\alpha f) \frac{\partial^{|\beta|}\phi}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_d^{\beta_d}} \, d\lambda_d \\ &= (-1)^{|\beta|} (-1)^{|\alpha|} \int_G f \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_d^{\beta_d}} \phi \, d\lambda_d \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_G f \frac{\partial^{|\alpha+\beta|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d+\beta_d}} \, d\lambda_d. \end{aligned}$$

Also gilt  $D^{\alpha+\beta}f = D^\beta(D^\alpha f)$ .

(v) Zunächst sei bemerkt, dass wegen der Voraussetzung  $0 < \delta := d(\text{supp } f, G^c) - \|z\| \leq d((\text{supp } f) - z, G^c) = d(\text{supp } f_z, G^c)$  gilt. Also liegt  $U_\delta(\text{supp } f_z)$  sowie  $U_\delta(\text{supp } f)$  ganz in  $G$ . Daraus und aus der Translationsinvarianz von  $\lambda_d$  folgt insbesondere  $f_z \in L_{loc}^1(G)$ .

Zudem gilt  $U_\delta(x), U_\delta(x+z) \subseteq G$ , wenn  $x \in \text{supp } f_z = (\text{supp } f) - z$ . Für  $\phi \in C_{00}^\infty(U_\delta(x))$  folgt wegen  $\phi_{-z} \in C_{00}^\infty(U_\delta(x+z)) \subseteq C_{00}^\infty(G)$

$$\begin{aligned} \int_{U_\delta(x)} f_z \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d &= \int_{U_\delta(x+z)} f \frac{\partial^{|\alpha|}\phi_{-z}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d = \int_G f \frac{\partial^{|\alpha|}\phi_{-z}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_G D^\alpha f \phi_{-z} \, d\lambda_d = (-1)^{|\alpha|} \int_{U_\delta(x)} (D^\alpha f)_z \phi \, d\lambda_d. \end{aligned}$$

Also gilt  $D^\alpha(f_z|_{U_\delta(x)}) = (D^\alpha f)_z|_{U_\delta(x)}$ .

Auf  $G \setminus \text{supp } f_z$  verschwindet  $f_z$  und somit  $D^\alpha(f_z|_{G \setminus \text{supp } f_z}) = 0$ . Wegen (ii) gilt

$$\text{supp}(D^\alpha f)_z = (\text{supp } D^\alpha f) - z \subseteq \text{supp } f - z = \text{supp } f_z.$$

Insbesondere verschwindet auch  $(D^\alpha f)_z$  auf  $G \setminus \text{supp } f_z$ . Wegen  $G = (G \setminus \text{supp } f_z) \cup \bigcup_{x \in \text{supp } f_z} U_\delta(x)$ , folgt nun  $D^\alpha(f_z) = D^\alpha(f)_z$  auf  $G$  aus (iii).

(vi) Da  $\text{supp } f$  kompakt ist, liegt  $f$  sogar in  $L^1(G)$ . Denken wir uns  $f$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus G$  durch Null fortgesetzt, so folgt  $f * \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  und somit  $f * \psi|_G \in L_{loc}^1(G)$ .

Gemäß Lemma 14.5.3 gilt  $\text{supp } f * \psi \subseteq \text{supp } f + \text{supp } \psi \subseteq \text{supp } f + U_\rho(0) \subseteq G$ , da ja  $\rho = d(\text{supp } f, G^c)$ . Für  $\phi \in C_{00}^\infty(G)$  folgt aus  $\| -y \| < \rho = d(\text{supp } f, G^c)$  für  $y \in U_\rho(0)$  wegen (v)

$$\begin{aligned} \int_G (f * \psi) D^\alpha \phi \, d\lambda_d &= \int_G \int_{U_\rho(0)} f(x-y) \psi(y) \, d\lambda_d(y) (D^\alpha \phi)(x) \, d\lambda_d(x) \\ &= \int_{U_\rho(0)} \psi(y) \int_G f_{-y}(x) (D^\alpha \phi)(x) \, d\lambda_d(x) \, d\lambda_d(y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{U_\rho(0)} \psi(y) \int_G (D^\alpha f)_{-y}(x) \phi(x) \, d\lambda_d(x) \, d\lambda_d(y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_G (D^\alpha f * \psi) \phi \, d\lambda_d. \end{aligned}$$

Also gilt  $D^\alpha(f * \psi) = (D^\alpha f) * \psi$ .

□

**18.1.5 Korollar.** Für  $k \in \mathbb{N}$ , ein offenes  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$ , und eine Funktion  $f \in C^k(G)$  existiert für alle Multiindizes  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  mit  $|\alpha| \leq k$  die  $\alpha$ -te schwache Ableitung  $D^\alpha f$ , wobei  $\lambda_d$ -fast überall

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

*Beweis.* Wir denken uns  $\phi \in C_{00}^\infty(G)$  und  $f$  außerhalb von  $G$  mit Null fortgesetzt. Für alle Punkte  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt entweder  $x \in \text{supp } \phi$  oder  $x \notin \text{supp } \phi$ . Im ersten Fall liegt  $x$  in  $G$ , und  $\mathbb{R}^d \ni t \mapsto \phi(t)f(t)$  ist lokal bei  $x$   $k$ -mal partiell differenzierbar. Im zweiten Fall, dh.  $x$  liegt in der offenen Menge  $\mathbb{R}^d \setminus \text{supp } \phi$ , ist  $\mathbb{R}^d \ni t \mapsto \phi(t)f(t)$  lokal bei  $x$  identisch Null und somit auch  $k$ -mal partiell differenzierbar. In jedem Fall gilt dabei für  $j \in \{1, \dots, d\}$  gemäß der Produktregel

$$\frac{\partial(\phi f)}{\partial x_j}(x) = \phi(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x).$$

Für  $t \in \mathbb{R}^d$  folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und aus der Tatsache, dass für  $\tau \in \mathbb{R}$  mit  $|\tau|$  hinreichend groß  $\phi(t + \tau e_j)f(t + \tau e_j) = 0$ , die Beziehung (vgl. (18.1))

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(t + \tau e_j) \phi(t + \tau e_j) d\lambda(\tau) = - \int_{\mathbb{R}} f(t + \tau e_j) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(t + \tau e_j) d\lambda(\tau).$$

Der Satz von Fubini ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} \phi d\lambda_d = - \int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\lambda_d,$$

und wegen Fakta 18.1.3, 5, schließlich  $D^{e_j} f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ , wobei wir hier  $e_j$  als jenes Element von  $(\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  ansehen, das an der  $j$ -ten Stelle Eins und sonst überall Null stehen hat. Für allgemeine Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$  folgt die Aussage wegen Proposition 18.1.4, (iv), leicht durch Induktion. □

Wegen Korollar 18.1.5 stimmen für  $\phi \in C^{|\alpha|}(G)$  insbesondere  $\frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$  und  $D^\alpha \phi$  überein. Wir werden in Hinkunft dafür und der Einfachheit halber insbesondere auch für Testfunktionen immer  $D^\alpha \phi$  schreiben.

**18.1.6 Beispiel.** Wir betrachten  $G = \mathbb{R}$  und wollen die schwache Ableitbarkeit einer Funktion  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  explizit charakterisieren.

Falls  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  auf jedem kompakten Intervall *absolut stetig* ist, so ist für  $\phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$  auch die Funktion  $\phi f$  absolut stetig, wie man aus Satz 12.15 und Satz 10.35 in [K] erkennt. Dabei gilt  $\lambda$ -fast überall<sup>3</sup>

$$(\phi f)' = \phi' f + \phi f'.$$

<sup>3</sup>Hier steht  $f'$  für die Ableitung von  $f$   $\lambda$ -fast überall im Sinne von Satz 12.30 in [K].



Gemäß Satz 12.30 in [K] gilt für  $\eta > 0$

$$(\phi(\eta)f(\eta) - \phi(-\eta)f(-\eta)) = \int_{[-\eta, \eta]} (\phi f)' d\lambda,$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}} \phi f' d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} \phi' f d\lambda.$$

Also ist  $f'$  auch die schwache Ableitung  $Df$  von  $f$  im Sinne von Definition 18.1.1.

Sei nun umgekehrt  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  mit schwacher Ableitung  $Df$ . Gemäß Satz 12.30 in [K] ist dann

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \int_{[0, x]} (Df)(t) d\lambda(t), & \text{falls } x \geq 0, \\ - \int_{[x, 0]} (Df)(t) d\lambda(t), & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

eine Funktion auf  $\mathbb{R}$ , die auf jedem kompakten Intervall absolut stetig ist. Dabei gilt  $\tilde{f}' = Df$ . Nach dem ersten Teil des aktuellen Beispiels, folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \phi' \tilde{f} d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} \phi (Df) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \phi' f d\lambda$$

für alle  $\phi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R})$ . Also erfüllt  $h = \tilde{f} - f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi' h d\lambda = 0, \quad \text{für alle } \phi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R}).$$

Sei nun  $\psi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R})$  mit  $\int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda = 1$  fest. Für jedes  $\phi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R})$  verschwindet das Integral über  $\mathbb{R}$  von

$$\omega := \phi - \left( \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \right) \cdot \psi.$$

Also ist  $\theta(x) := \int_{[-\infty, x]} \omega d\lambda$  ebenfalls aus  $C^\infty_{00}(\mathbb{R})$ , womit

$$\int_{\mathbb{R}} \phi h d\lambda - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \psi h d\lambda}_{=: c} \cdot \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \omega h d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \theta' h d\lambda = 0$$

bzw.  $\int_{\mathbb{R}} \phi(h - c) d\lambda = 0$  für alle  $\phi \in C^\infty_{00}(\mathbb{R})$ . Man beachte, dass hier  $c \in \mathbb{C}$  nicht von  $\phi$  abhängt. Nach Lemma 18.1.2 folgt  $\tilde{f} - f - c = h - c = 0$   $\lambda$ -fast überall.

Wir haben also gesehen, dass bis auf  $\lambda$ -Nullmengen genau die auf allen kompakten Intervallen absolut stetigen Funktion die schwach ableitbaren Funktionen sind.

**18.1.7 Beispiel.** Die Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist auf  $\mathbb{R}$  schwach ableitbar mit  $D(|\cdot|) = \text{sgn}$   $\lambda_d$ -fast überall.

Es gilt folgende Variante der *Leibnizschen Produktregel*.

**18.1.8 Proposition.** Für ein offenes  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$  habe  $f \in L_{loc}^1(G)$  für ein  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  und alle  $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  mit  $\beta \leq \alpha$  eine schwache  $\beta$ -te Ableitung. Weiters sei  $\psi \in C^\infty(G)$ .

Dann liegt  $\psi \cdot f$  in  $L_{loc}^1(G)$  und hat eine schwache  $\alpha$ -te Ableitung, wobei  $\lambda_d$ -fast überall<sup>4</sup>

$$D^\alpha(\psi \cdot f) = \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha} \underbrace{\binom{\alpha}{\beta}}_{:= \prod_{j=1}^d \binom{\alpha_j}{\beta_j}} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} f.$$

*Beweis.*  $\psi \cdot f \in L_{loc}^1(G)$  folgt sofort aus der Beschränktheit des stetigen  $\psi$  auf jeder kompakten Teilmenge von  $G$ .

Wir zeigen die behauptete Gleichung durch vollständige Induktion nach  $|\alpha|$ . Für  $|\alpha| = 0$  ist die Aussage klar. Gelte sie nun für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| = m$ . Für ein  $\alpha$  mit  $|\alpha| = m + 1$  sei  $j \in \{1, \dots, d\}$  so, dass  $\alpha_j > 0$ . Für  $\phi \in C_{00}^\infty(G)$  gilt nach der Produktregel  $\psi \cdot D^{e_j} \phi = D^{e_j}(\psi \cdot \phi) - \phi \cdot D^{e_j} \psi$  und daher

$$\begin{aligned} \int_G (\psi \cdot f) D^{e_j} \phi \, d\lambda_d &= \int_G f \cdot D^{e_j}(\psi \cdot \phi) \, d\lambda_d - \int_G \phi f (D^{e_j} \psi) \, d\lambda_d \\ &= - \int_G ((D^{e_j} f) \cdot \psi + f \cdot D^{e_j} \psi) \cdot \phi \, d\lambda_d. \end{aligned}$$

Also ist  $(D^{e_j} f) \cdot \psi + (f \cdot D^{e_j} \psi)$  die  $e_j$ -te schwache Ableitung von  $\psi \cdot f$ , dh.  $D^{e_j}(\psi \cdot f) = (D^{e_j} f) \cdot \psi + (f \cdot D^{e_j} \psi)$ .

Da  $\alpha - e_j \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  mit  $|\alpha - e_j| = m$  liegt, gilt die Induktionsvoraussetzung für  $\alpha - e_j$ , und wir erhalten mit Proposition 18.1.4

$$\begin{aligned} D^\alpha(\psi \cdot f) &= D^{e_j} D^{\alpha-e_j}(\psi \cdot f) = \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha-e_j} \binom{\alpha-e_j}{\beta} D^{e_j} (D^\beta \psi D^{\alpha-e_j-\beta} f) \\ &= \underbrace{\sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha-e_j} \binom{\alpha-e_j}{\beta} (D^{\beta+e_j} \psi D^{\alpha-e_j-\beta} f)}_{= \sum_{e_j \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha-e_j}{\beta-e_j} (D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} f)} \\ &\quad + \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha-e_j} \binom{\alpha-e_j}{\beta} (D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} f) \\ &= \psi D^\alpha f + f D^\alpha \psi + \sum_{e_j \leq \beta \leq \alpha-e_j} \underbrace{\left( \binom{\alpha-e_j}{\beta-e_j} + \binom{\alpha-e_j}{\beta} \right)}_{= \binom{\alpha}{\beta}} (D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} f) \\ &= \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} f. \end{aligned}$$

□

**18.1.9 Bemerkung.** Den Vektorraum  $C_{00}^\infty(G)$  kann man mit der grössten Topologie (initiale Topologie) versehen, dass alle linearen Funktionale  $\phi \mapsto \int_G f \phi \, d\lambda_d$  mit

<sup>4</sup>Hier bedeutet  $\beta \leq \alpha$ , dass  $\alpha_j \leq \beta_j$  für alle  $j = 1, \dots, d$ , und  $\alpha - \beta$  wird komponentenweise berechnet.

$f \in L^1_{loc}(G)$  stetig sind. Ein wichtiges Resultat aus der Funktionalanalysis besagt, dass dann jedes bzgl. dieser Topologie stetige lineare Funktional auf  $C^\infty_{00}(G)$  von der Form  $\phi \mapsto \int_G f \phi \, d\lambda_d$  für ein wegen Lemma 18.1.2 eindeutiges  $f \in L^1_{loc}(G)$ .

Versieht man  $C^\infty_{00}(G)$  mit initialen Topologie  $\mathcal{T}$ , die von alle möglichen Abbildungen

$$\phi \mapsto \int_G f D^\alpha \phi \, d\lambda_d,$$

erzeugt wird, wobei  $f \in L^1_{loc}(G)$  und  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$  läuft, so erhält man eine feinere Topologie als zuvor. Der *Dualraum*  $\mathfrak{D}(G)$ , d.h. der Raum aller bzgl.  $\mathcal{T}$  stetigen linearen Funktionale auf  $C^\infty_{00}(G)$  stellt einen möglichen Zugang zu Theorie der *Distributionen* auf  $G$  dar.

Distributionen sind eine Verallgemeinerung von Funktionen aus  $L^1_{loc}(G)$ . In der Tat kann man  $L^1_{loc}(G)$  als Teilraum von  $\mathfrak{D}(G)$  betrachten, da für jedes  $f \in L^1_{loc}(G)$  das lineare Funktional  $I(f) : \phi \mapsto \int_G f \phi \, d\lambda_d$  bzgl.  $\mathcal{T}$  stetig ist, und da wegen Lemma 18.1.2 die Zuordnung  $f \mapsto I(f)$  injektiv ist.

$\mathfrak{D}(G)$  enthält aber noch viel mehr lineare Funktionale wie etwa

$$I(f, \alpha) : \phi \mapsto \int_G f D^\alpha \phi \, d\lambda_d$$

für festes  $f \in L^1_{loc}(G)$  und festes  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ . Vergleicht man das mit der Definition der schwachen Ableitung, so stimmt dieses Funktional mit  $I((-1)^{|\alpha|} D^\alpha f)$  überein, falls  $f$  eine  $\alpha$ -te schwache Ableitung besitzt.

Also kann man das für beliebige  $f \in L^1_{loc}(G)$  existierende  $(-1)^{|\alpha|} I(f, \alpha)$  als Verallgemeinerte  $\alpha$ -te Ableitung von  $f$  interpretieren. Somit hat jedes  $f \in L^1_{loc}(G)$  eine Art Ableitung – wir sprechen von der *Ableitung im distributionellen Sinn*. Noch allgemeiner lässt sich für jedes  $I \in \mathfrak{D}(G)$  eine  $\alpha$ -te Ableitung  $D^\alpha I$  definieren, indem wir  $D^\alpha I(\phi) := I(D^\alpha \phi)$  setzen.

## 18.2 Sobolevräume

Ein insbesondere in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen oft und gern verwendetes Konzept ist das des Sobolevraumes.

**18.2.1 Definition.** Sei  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $p \in [1, +\infty]$  und  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Dann sei  $W^{m,p}(G)$  – man spricht vom *Sobolevraum* – die Menge aller  $f \in L^p(G)$  derart, dass alle  $\alpha$ -te schwachen Ableitungen mit  $|\alpha| \leq m$  von  $f$  existieren<sup>5</sup> und wieder in  $L^p(G)$  liegen. Für  $f \in W^{m,p}(G)$  mit  $p \in [1, +\infty)$  setzen wir

$$\|f\|_{m,p} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für  $f \in W^{m,\infty}(G)$

$$\|f\|_{m,\infty} := \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

$\|\cdot\|_{m,p}$  heißt *Sobolevnorm*.

---

<sup>5</sup>Siehe Fakta 18.1.3, 3.

Offenbar gilt  $C_{00}^\infty(G) \subseteq W^{m,p}(G)$ . Weiters beachte man, dass wegen Fakta 18.1.3 für  $f \in W^{m,p}(G)$  der Ausdruck  $D^\alpha f$  nicht vom gewählten Repräsentanten der Restklasse  $f \in L^p(G)$  abhängt.

**18.2.2 Satz.** *Der Sobolevraum  $W^{m,p}(G)$  versehen mit  $\|\cdot\|_{m,p}$  ist ein Banachraum. Im Fall  $p = 2$  ist er sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(f, g)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g).$$

*Beweis.* Das endliche Produkt  $X := \prod_{\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d, |\alpha| \leq m} L^p(G)$  versehen mit  $\max_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_p$  ist ein Banachraum; vgl. Beispiel 9.1.9. Wegen

$$\max_{|\alpha| \leq m} \eta_\alpha \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \eta_\alpha^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} 1 \right) \max_{|\alpha| \leq m} \eta_\alpha$$

für alle  $\eta_\alpha \geq 0$ ,  $|\alpha| \leq m$ , ist diese Norm im Fall  $p < +\infty$  äquivalent zur Norm  $\|(f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\| := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$ . Für  $p = \infty$  setzen wir  $\|(f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\| := \max_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_\infty$ . In jedem Fall ist  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum.

Nun lässt sich  $W^{m,p}(G)$  als Teilmenge  $Y$  von  $X$  betrachten, indem wir  $f \in W^{m,p}(G)$  mit  $(D^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}$  identifiziert. Bei dieser Identifizierung gilt  $\|(D^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}\| = \|f\|_{m,p}$ . Außerdem liegt ein  $(f_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in X$  genau dann in  $Y$ , wenn

$$I_\phi^\beta((f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}) := \int_G (f_{(0, \dots, 0)} D^\beta \phi - f_\beta (-1)^{|\beta|} \phi) d\lambda_d = 0$$

für alle  $\phi \in C_{00}^\infty(G)$  und alle  $|\beta| \leq m$ . Man überprüft leicht, dass jedes  $I_\phi^\beta : X \rightarrow \mathbb{C}$  linear und beschränkt ist. Also lässt sich  $Y$  als  $\bigcap_{\phi \in C_{00}^\infty(G), |\beta| \leq m} \ker I_\phi^\beta$  schreiben. Da die  $\ker I_\phi^\beta$  abgeschlossene Unterräume von  $X$  sind, ist auch  $Y$  ein abgeschlossener Unterraum und somit ein Banachraum; vgl. Lemma 9.1.6. Also ist auch  $(W^{m,p}(G), \|\cdot\|_{m,p})$  ein Banachraum.

Im Fall  $p = 2$  ist  $(X, \|\cdot\|)$  sogar ein Hilbertraum, da wegen  $\|(f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\|^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} (f_\alpha, f_\alpha)$  die Norm  $\|\cdot\|$  von dem Skalarprodukt  $((f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}, (g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}) = \sum_{|\alpha| \leq m} (f_\alpha, g_\alpha)$  erzeugt wird.  $\square$

**18.2.3 Satz.** *Sei  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $p \in [1, +\infty)$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Dann ist  $C^\infty(G) \cap W^{m,p}(G)$  dicht in  $W^{m,p}(G)$  bzgl.  $\|\cdot\|_{m,p}$ .*

*Beweis.* Zunächst habe  $f \in W^{m,p}(G)$  einen in  $G$  enthaltenen, kompakten Träger. Nach Proposition 18.1.4, (ii), gilt  $\text{supp } D^\alpha f \subseteq \text{supp } f$  für  $|\alpha| \leq m$ . Wir setzen  $f$  außerhalb von  $G$  mit Null fort. Wegen der Hölderschen Ungleichung und wegen  $f \in L^p(G)$  ist dann  $f$  auf  $\mathbb{R}^d$  integrierbar. Dasselbe gilt für alle  $D^\alpha f$  mit  $|\alpha| \leq m$ .

Sei  $k_\delta$  wie in Definition 14.5.5 mit  $\text{supp } k_\delta \subseteq K_{2\delta}(0)$ . Aus Fakta 14.5.1 wissen wir, dass  $k_{\frac{1}{n}} * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 14.5.3 verschwindet  $k_{\frac{1}{n}} * f$  außerhalb von  $\text{supp } f + K_{\frac{2}{n}}(0)$ . Somit ist der Träger dieser Funktion in  $\text{supp } f + K_{\frac{2}{n}}(0)$  enthalten und daher kompakt.

Für  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{2}{N} < d(\text{supp } f, G^c) =: \rho$  folgt für alle  $n \geq N$ , dass  $\text{supp } f + K_{\frac{2}{n}}(0) \subseteq G$  – also  $k_{\frac{1}{n}} * f \in C_{00}^\infty(G) \subseteq W^{m,p}(G)$ . Wegen  $\text{supp } D^\alpha f \subseteq \text{supp } f$  gilt entsprechendes für  $k_{\frac{1}{n}} * D^\alpha f$ . Aus  $\text{supp } k_\delta \subseteq K_{\frac{2}{n}}(0) \subseteq U_\rho(0)$  folgt mit Proposition 18.1.4, (vi), auch

$D^\alpha(f * k_{\frac{1}{n}}) = (D^\alpha f) * k_{\frac{1}{n}}$ . Wegen Lemma 16.2.4 gilt somit für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^\alpha f - D^\alpha(f * k_{\frac{1}{n}})\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|D^\alpha f - (D^\alpha f) * k_{\frac{1}{n}}\|_p = 0. \quad (18.5)$$

Also konvergiert  $f * k_{\frac{1}{n}} \in C_{00}^\infty(G)$  für  $n \rightarrow \infty$  auch bzgl.  $\|\cdot\|_{m,p}$  gegen  $f$ .

Nun sei  $f \in W^{m,p}(G)$  beliebig. Wir betrachten wieder die Teilmengen ( $k \in \mathbb{N}$ )

$$K_k := K_k(0) \setminus U_{\frac{1}{k}}(G^c) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, G^c) \geq \frac{1}{k}, \|x\| \leq k\},$$

$$G_k := U_k(0) \setminus K_{\frac{1}{k}}(G^c) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, G^c) > \frac{1}{k}, \|x\| < k\},$$

die  $G_k \subseteq K_k \subseteq G_{k+1} \subseteq K_{k+1} \subseteq \dots \subseteq G$  und  $\bigcup K_k = \bigcup G_k = G$  erfüllen. Nach Bemerkung 14.5.9 gibt es Funktionen  $h_k \in C_{00}^\infty(G_{k+1})$  mit Werten in  $[0, 1]$  so, dass  $h_k|_{K_k} = \mathbb{1}_{K_k}$ . Offenbar verschwindet  $h_k - h_{k-1}$  auf  $K_{k-1}$ , womit  $\text{supp}(h_k - h_{k-1}) \subseteq G_{k+1} \cap G_{k-1}^c \subseteq G_{k+1} \setminus K_{k-2}$  für  $k > 2$ .

Da wegen Proposition 18.1.8 alle Funktionen  $f \cdot (h_k - h_{k-1})$  in  $W^{m,p}(G)$  liegen und einen in  $G$  enthaltenen, kompakten Träger haben, gibt es bei gegebenem  $\epsilon > 0$  wegen (18.5) zu jedem  $k$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  mit

$$\|f \cdot (h_k - h_{k-1}) - (f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}}\|_{m,p} \leq \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dabei setzen wir  $h_0 = 0$ . Wir wählen  $n_k$  für  $k > 2$  auch so groß, dass  $d(\text{supp}(h_k - h_{k-1}), (G_{k+1} \setminus K_{k-2})^c) > \frac{2}{n_k}$ , wodurch zusammen mit Proposition 18.1.4, (ii),

$$\text{supp}(f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}} \subseteq \text{supp}(h_k - h_{k-1}) + K_{\frac{2}{n_k}}(0) \subseteq G_{k+1} \setminus K_{k-2}.$$

Für  $x \in G_l$  gilt daher  $(f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}}(x) = 0$  für  $k \geq l + 2$ , womit

$$h(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}}(x) = \sum_{k=1}^{l+1} (f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}}(x).$$

Mit ihren Summanden ist auch  $h$  auf  $G_l$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Da jedes  $x \in G$  in einem  $G_l$  liegt, und da die  $G_l$  offen sind, ist  $h$  eine auf  $G$  wohldefinierte Funktion aus  $C^\infty(G)$ . Zudem gilt für  $l \in \mathbb{N}$  wegen  $f|_{G_l} = \sum_{k=1}^{l+1} f \cdot (h_k - h_{k-1})$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{G_l} |D^\alpha(f - h)|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{G_l} |D^\alpha \sum_{k=1}^{l+1} (f \cdot (h_k - h_{k-1}) - (f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}})|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{l+1} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{G_l} |D^\alpha (f \cdot (h_k - h_{k-1}) - (f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}})|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{l+1} \|f \cdot (h_k - h_{k-1}) - (f \cdot (h_k - h_{k-1})) * k_{\frac{1}{n_k}}\|_{m,p} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt für  $l \rightarrow \infty$ , dass  $f - h \in W^{m,p}(G)$  und somit  $h \in W^{m,p}(G)$ , und auch  $\|f - h\|_{m,p} \leq \epsilon$ .  $\square$

Es ist nun naheliegend, zu fragen, ob auch  $C_0^\infty(G)$  dicht in  $W^{m,p}(G)$  liegt. Im Allgemeinen stellt sich heraus, dass dem nicht so ist. Aber etwa für  $G = \mathbb{R}^d$  ist  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  sehr wohl dicht in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ .

**18.2.4 Satz.** Sei  $p \in [1, +\infty)$  und  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Dann ist  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$  bzgl.  $\|\cdot\|_{m,p}$ .

*Beweis.* Nach Satz 18.2.3 reicht es  $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{m,p}} \supseteq C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$  zu zeigen. Dazu sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$  und  $k_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  wie in Definition 14.5.5. Nun gilt  $\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , wobei  $\text{supp } \mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1 \subseteq K_{n+2}(0)$  und auch  $\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1(x) = 1$ , wenn  $K_2(x) \subseteq K_n(0)$ , also wenn  $x \in K_{n-2}(0)$ ; vgl. Fakta 14.5.6. Außerdem hat  $\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1$  Werte in  $[0, 1]$ .

Wegen Proposition 18.1.8 gilt auch  $f \cdot (\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1) \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ , wobei für festen Multiindex mit  $|\alpha| \leq m$

$$\begin{aligned} D^\alpha(f \cdot (\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)) &= \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta}(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1) \\ &= (D^\alpha f)(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1) + \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta}(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f - D^\alpha(f \cdot (\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1))\|_p &\leq \\ \|D^\alpha f - (D^\alpha f)(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)\|_p &+ \sum_{(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha} \|D^\beta f D^{\alpha-\beta}(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)\|_p. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Dabei gilt wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz

$$\|D^\alpha f - (D^\alpha f)(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d \setminus K_{n-2}(0)} |D^\alpha f|^p (1 - \mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1) d\lambda_d \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Für  $(\mathbb{N} \cup \{0\})^d \ni \beta \leq \alpha$  gilt zudem wegen  $(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)|_{K_{n-2}(0)} = 1$

$$\begin{aligned} \|D^\beta f D^{\alpha-\beta}(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)\|_p &= \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K_{n-2}(0)} D^\beta f D^{\alpha-\beta}(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)\|_p \\ &\leq \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K_{n-2}(0)} D^\beta f\|_p \|D^{\alpha-\beta}(\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die linke Seite in (18.6) gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ . Aufsummieren über alle  $|\alpha| \leq m$  ergibt  $f \cdot (\mathbb{1}_{K_n(0)} * k_1) \rightarrow f$  bzgl.  $\|\cdot\|_{m,p}$ .  $\square$

Indem man folgendes Resultat auf konstante Funktionen anwendet, sieht man, dass für beschränkte  $G$  der Raum  $C_0^\infty(G)$  nicht dicht in  $W^{m,p}(G)$  liegt.

**18.2.5 Satz (Friedrichs Ungleichung).** Sei  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $p \in [1, +\infty)$  und  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt mit endlichem Durchmesser  $d_\infty(G) := \sup\{\|x - y\|_\infty : x, y \in G\}$ . Dann gibt es eine nur von  $m$  und  $d_\infty(G)$  abhängige Konstante  $C_m \geq 0$  derart, dass

$$\|f\|_{m,p} \leq C_m \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle  $f \in W_0^{m,p}(G) := \overline{C_0^\infty(G)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$ .

*Beweis.* Sei  $f \in C_{00}^\infty(G)$ . Wir denken uns  $f$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus G$  durch Null fortgesetzt. Man überzeugt sich leicht, dass es ein kleinstes offenes Rechteck der Form  $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$  gibt, welches  $G$  enthält. Offenbar gilt  $b_j - a_j \leq d_\infty(G)$ .

Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt für  $x = (x_1, \dots, x_d)^T \in (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$

$$f(x) = \underbrace{f(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T}_{=0} + \int_{a_j}^{x_j} D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau, x_{j+1}, \dots, x_d)^T d\tau.$$

Für  $p \in (1, +\infty)$  folgt mit der Hölderschen Ungleichung ( $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ )

$$|f(x)|^p \leq (x_j - a_j)^{\frac{p}{q}} \int_{(a_j, b_j)} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau, x_{j+1}, \dots, x_d)^T|^p d\lambda(\tau).$$

Man beachte, dass der erste Faktor nur von  $x_j$  und der zweite von allen anderen Einträgen von  $x$  außer  $x_j$  abhängt. Integrieren wir zuerst über  $x_j \in (a_j, b_j)$  und dann über die anderen Variablen, so folgt mit Fubini

$$\|f\|_p^p \leq \frac{(b_j - a_j)^p}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f(x)|^p d\lambda_d(x) \leq \frac{d_\infty(G)^p}{p} \|D^{e_j} f\|_p^p. \quad (18.7)$$

Man überzeugt sich leicht, dass für  $p = 1$  diese Ungleichung auch gilt. Aus (18.7) ergibt sich

$$\|f\|_{1,p}^p = \|f\|_p^p + \sum_{j=1}^d \|D^{e_j} f\|_p^p \leq (1 + \frac{d_\infty(G)^p}{p}) \sum_{j=1}^d \|D^{e_j} f\|_p^p.$$

Da per definitionem  $C_{00}^\infty(G)$  dicht in  $W_0^{1,p}(G)$  ist, und da bzgl.  $\|\cdot\|_{1,p}$  die linke und die rechte Seite dieser Ungleichung stetig von  $f$  abhängen, folgt die Behauptung für allgemeines  $f \in W_0^{1,p}(G)$ .

Insbesondere haben wir den aktuellen Satz für  $m = 1$  bewiesen. Angenommen die Aussage gilt für  $m$  und  $f \in W_0^{m+1,p}(G)$ . Offenbar liegt für  $|\alpha| = m$  die Funktion  $D^\alpha f$  in  $W_0^{1,p}(G)$ , wodurch mit (18.7)

$$\|D^\alpha f\|_p^p \leq \frac{d_\infty(G)^p}{p} \sum_{j=1}^d \|D^{e_j} D^\alpha f\|_p^p \leq \frac{d_\infty(G)^p}{p} \sum_{|\beta|=m+1} \|D^\beta f\|_p^p.$$

Also folgt für eine geeignete Konstante  $C_{m+1} \geq 0$

$$\begin{aligned} \|f\|_{m+1,p}^p &= \|f\|_{m,p}^p + \sum_{|\beta|=m+1} \|D^\beta f\|_p^p \\ &\leq C_m^p \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_p^p + \sum_{|\beta|=m+1} \|D^\beta f\|_p^p \leq C_{m+1}^p \sum_{|\beta|=m+1} \|D^\beta f\|_p^p. \end{aligned}$$

□

## 18.3 Einbettungen

Da die Definition der Sobolevnorm auch die schwachen Ableitungen involviert, ist es nicht abwegig zu fragen, ob die Elemente von  $f \in W^{m,p}(G)$  neben der Integrierbarkeit von  $|D^\alpha f|^p$  für  $|\alpha| \leq m$  auch weitere Eigenschaften wie etwa die der Stetigkeit haben.

Mit ähnlichen Überlegungen wie im Beweis von Satz 18.2.5 erhalten wir folgendes Lemma.

**18.3.1 Lemma.** *Sei  $p > d$  sowie  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen, beschränkt und konvex. Dann gilt für  $f \in C^1(G)$  und  $x \in G$*

$$|f_G - f(x)| \leq \frac{p \, d_\infty(G)}{(p-d) \, \lambda_d(G)^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^d \|D^{e_i} f\|_p$$

wobei  $f_G = \frac{\int_G f \, d\lambda_d}{\lambda_d(G)}$  das Mittel von  $f$  über  $G$  ist.

*Beweis.* Wir können oBdA.  $x = 0$  annehmen. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für  $y \in G$

$$f(y) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(ty) \, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^d y_i (D^{e_i} f)(ty) \, dt.$$

Mit Fubini und der Tatsache, dass  $|y_i| \leq \|y - 0\|_\infty \leq d_\infty(G)$  für  $y \in G$  folgt

$$\begin{aligned} |f_G - f(0)| &= \frac{1}{\lambda_d(G)} \left| \int_G (f(y) - f(0)) \, d\lambda_d(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_d(G)} \sum_{i=1}^d \int_{[0,1]} \int_G |y_i| |(D^{e_i} f)(ty)| \, d\lambda_d(y) \, d\lambda(t) \\ &\leq \frac{d_\infty(G)}{\lambda_d(G)} \sum_{i=1}^d \int_{[0,1]} \int_G |(D^{e_i} f)(ty)| \, d\lambda_d(y) \, d\lambda(t). \end{aligned}$$

Nach der Transformationsregel – beachte, dass  $tG \subseteq G$  – und nach der Hölderschen Ungleichung ( $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ) ist dieser Ausdruck gleich

$$\begin{aligned} &\frac{d_\infty(G)}{\lambda_d(G)} \sum_{i=1}^d \int_{[0,1]} \int_{tG} t^{-d} |(D^{e_i} f)(z)| \, d\lambda_d(z) \, d\lambda(t) \\ &\leq \frac{d_\infty(G)}{\lambda_d(G)} \sum_{i=1}^d \int_{[0,1]} t^{-d} \underbrace{\lambda_d(tG)^{\frac{1}{q}}}_{=t^{\frac{d}{q}} \lambda_d(G)^{\frac{1}{q}}} \left( \int_{tG} |(D^{e_i} f)(z)|^p \, d\lambda_d(z) \right)^{\frac{1}{p}} \, d\lambda(t) \\ &\leq \frac{d_\infty(G)}{\lambda_d(G)^{1-\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^d \|D^{e_i} f\|_p \int_0^1 t^{\frac{d}{q}-d} \, dt = \frac{d_\infty(G)}{\lambda_d(G)^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^d \|D^{e_i} f\|_p \underbrace{\int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} \, dt}_{=\frac{p}{p-d}}. \end{aligned}$$

□

**18.3.2 Korollar.** *Sei  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $p \in (d, +\infty)$ . Dann haben alle  $f \in W^{1,p}(G)$  einen stetigen Repräsentanten.*



Genauer gilt, dass alle  $f \in W^{1,p}(G)$  einen stetigen Repräsentanten haben, der für  $x, y \in W$ , wobei  $W$  ein in  $G$  enthaltener,  $d$ -dimensionaler, achsenparalleler und kompakter Würfel ist,

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|_\infty^{1-\frac{d}{p}} \frac{2pd}{p-d} \|f\|_{1,p}, \quad (18.8)$$

sowie die Abschätzung ( $l$  ist die Seitenlänge von  $W$ )

$$|f(x)| \leq \frac{pd}{p-d} l^{-\frac{d}{p}} \max(1, l) \|f\|_{1,p} \quad (18.9)$$

erfüllt<sup>6</sup>.

*Beweis.* Für  $\epsilon > 0$  ist die Kugel  $V_\epsilon := U_{\frac{\|x-y\|_\infty}{2} + \epsilon}(\frac{x-y}{2})$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  ein offener Würfel, der  $x$  und  $y$  enthält. Da  $K_{\frac{\|x-y\|_\infty}{2}}(\frac{x-y}{2}) \subseteq W \subseteq G$  kompakt ist, gilt  $V_\epsilon \subseteq G$  für alle hinreichend kleinen  $\epsilon > 0$ .

Sei  $f \in C^\infty(G) \cap W^{1,p}(G)$ . Nach Lemma 18.3.1 gilt für das Mittel  $f_{V_\epsilon}$  von  $f$  über  $V_\epsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f_{V_\epsilon} - f(x)| + |f_{V_\epsilon} - f(y)| \leq \frac{2p d_\infty(V_\epsilon)}{(p-d) \lambda_d(V_\epsilon)^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^d \|D^{e_i} f\|_{L^p(V_\epsilon)} \\ &\leq \frac{2p (\|x-y\|_\infty + \epsilon)}{(p-d) (\|x-y\|_\infty + \epsilon)^{\frac{d}{p}}} \sum_{i=1}^d \|D^{e_i} f\|_{L^p(G)} \\ &\leq (\|x-y\|_\infty + \epsilon)^{1-\frac{d}{p}} \frac{2pd}{p-d} \|f\|_{1,p}. \end{aligned}$$

Für  $\epsilon \searrow 0$  folgt die Abschätzung (18.8).

Da  $W$  kompakt ist, gilt für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$ , dass auch der offene Würfel  $W_\epsilon$  mit Seitenlänge  $l + \epsilon$  und gleichem Mittelpunkt wie  $W$  ganz in  $G$  enthalten ist. Somit erhalten wir aus Lemma 18.3.1 und wegen  $\|f\|_{L^1(W_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(G)} \lambda(W_\epsilon)^{1-\frac{1}{p}}$  (Hölderschen Ungleichung)

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f_W - f(x)| + |f_W| \leq \frac{p(l+\epsilon)}{(p-d)(l+\epsilon)^{\frac{d}{p}}} \sum_{i=1}^d \|D^{e_i} f\|_{L^p(W_\epsilon)} + \frac{1}{(l+\epsilon)^d} \|f\|_{L^1(W_\epsilon)} \\ &\leq \frac{p}{p-d} (l+\epsilon)^{1-\frac{d}{p}} \sum_{i=1}^d \|D^{e_i} f\|_{L^p(G)} + (l+\epsilon)^{-\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p(G)}. \end{aligned}$$

Für  $\epsilon \searrow 0$  folgt die Abschätzung (18.9).

Für allgemeines  $f \in W^{1,p}(G)$  gibt es nach Satz 18.2.3 eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $C^\infty(G) \cap W^{1,p}(G)$ , die bzgl.  $\|\cdot\|_{1,p}$  gegen  $f$  konvergiert. Ist  $W \subseteq G$  ein kompakter und achsenparalleler Würfel mit Seitenlänge  $l$ , so folgt aus (18.9) angewandt auf  $f_n - f_m$ , dass  $(f_n|_W)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C_b(W), \|\cdot\|_\infty)$  ist.

Da jedes  $x \in G$  in einem hinreichend kleinen Würfel enthalten ist, folgt auch die punktweise Konvergenz von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen eine Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Auf jedem abgeschlossenen Würfel ist die Konvergenz gleichmäßig. Insbesondere ist  $g$  stetig auf  $G$ .

<sup>6</sup>Wegen  $W^{1,p}(G) \supseteq W^{m,p}(G)$ , wobei  $\|f\|_{1,p} \leq \|f\|_{m,p}$  für  $f \in W^{m,p}(G)$ , gelten entsprechende Ungleichungen für alle  $W^{m,p}(G)$ ,  $m \geq 1$ .

Da die  $L^p$ -Konvergenz die punktweise Konvergenz fast überall einer Teilfolge impliziert, gilt andererseits  $f_{n(k)} \rightarrow f$  für  $k \rightarrow \infty$  punktweise fast überall. Also gilt  $g = f$  fast überall auf  $G$ , und  $f$  und  $g$  stimmen als Elemente von  $W^{1,p}(G)$  überein. Die Abschätzungen (18.8) und (18.9) folgen nun einfach durch den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  in den entsprechenden Abschätzungen angewandt auf  $f_n$ .  $\square$

**18.3.3 Bemerkung.** Ist in der Situation von Korollar 18.3.2 das offene  $G$  so, dass jedes  $x \in G$  in einem Würfel  $W$  mit fixer Seitenlänge  $l$  liegt, so folgt aus (18.9) unmittelbar, dass jedes  $f \in W^{1,p}(G)$  sogar einen auf  $G$  beschränkten und stetigen Repräsentanten hat. Insbesondere lässt sich  $W^{1,p}(G)$  dann als linearer Teilraum von  $C_b(G)$  betrachten.

Im Fall  $G = \mathbb{R}^d$  gilt (18.8) sogar für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , und  $f$  ist beschränkt mit (wähle  $l = 1$  in (18.9))

$$\|f\|_\infty \leq \frac{pd}{p-d} \|f\|_{1,p}. \quad (18.10)$$

Wegen (18.8) sind die Funktionen aus  $W^{1,p}(G)$  sogar  $\gamma$ -Hölder-stetig für ein geeignetes  $\gamma > 0$ . Dabei ist ein  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$   $\gamma$ -Hölder-stetig, wenn  $|f(x) - f(y)| \leq C d(x, y)^\gamma$  für ein gewisse  $C \geq 0$  und alle  $x, y \in M$ . Nennt man das kleinst mögliche  $C$  hier  $|f|_\gamma$ , so ist  $|f|_\gamma$  eine *Seminorm*<sup>7</sup> auf dem Raum aller  $\gamma$ -Hölder-stetigen  $f$ , und

$$\|\cdot\|_\gamma := \|\cdot\|_\infty + |\cdot|_\gamma$$

definiert eine Norm auf dem Raum aller  $\gamma$ -Hölder-stetigen Funktionen auf  $M$ .

Wir benötigen für den folgenden Satz 18.3.4 eine Verallgemeinerung der Hölderschen Ungleichung. Für einen Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , messbaren Funktionen  $f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  und Zahlen  $p_1, \dots, p_k > 0$  mit  $\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} = 1$  gilt

$$\int f_1 \cdots f_k d\mu \leq \prod_{j=1}^k \left( \int f_j^{p_j} d\mu \right)^{\frac{1}{p_j}}. \quad (18.11)$$

Für  $k = 2$  ist das die bekannte Höldersche Ungleichung. Gilt (18.11) für  $k$ , so auch für  $k + 1$ , da nach der Hölderschen Ungleichung und nach Induktionsvoraussetzung angewandt auf  $f_j^{\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}}$  und den Exponenten  $\frac{p_j(p_{k+1}-1)}{p_{k+1}}$

$$\begin{aligned} \int f_1 \cdots f_k \cdot f_{k+1} d\mu &\leq \left( \int f_1^{\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}} \cdots f_k^{\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}} d\mu \right)^{\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}} \cdot \left( \int f_{k+1}^{p_{k+1}} d\mu \right)^{\frac{1}{p_{k+1}}} \\ &\leq \prod_{j=1}^k \left( \int f_j^{\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}} \cdot \frac{p_j(p_{k+1}-1)}{p_{k+1}}} d\mu \right)^{\frac{1}{p_j}} \cdot \left( \int f_{k+1}^{p_{k+1}} d\mu \right)^{\frac{1}{p_{k+1}}}. \end{aligned}$$

In den Einbettungsergebnissen bisher haben wir  $p > d$  vorausgesetzt. Folgende Ungleichung behandelt dagegen Einbettungen im Fall kleiner  $p$ .

**18.3.4 Satz (Sobolev-Ungleichung).** Für  $1 \leq mp < d$  gilt  $W_0^{m,p}(G) \subseteq L^r(G)$  mit  $r = \frac{dp}{d-mp}$ , wobei die Inklusionsabbildung  $W_0^{m,p}(G) \ni f \mapsto f \in L^r(G)$  beschränkt ist. Für  $m = 1$  gilt konkret für alle  $f \in W_0^{1,p}(G)$

$$\|f\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq \frac{p(d-1)}{d^{\frac{1}{p}}(d-p)} \|f\|_{1,p}.$$

<sup>7</sup>Eine Seminorm erfüllt alle Eigenschaften einer Norm bis auf die Eigenschaft  $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ .

*Beweis.* Sei  $f \in C_{00}^1(G)$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus G$  mit Null fortgesetzt. Wir gehen von der Ungleichung ( $x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$ )

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^x D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T d\tau_j \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T| d\tau_j \end{aligned}$$

aus. Nehmen wir das Produkt über  $j = 1, \dots, d$  und dann die  $(n-1)$ -te Wurzel, so folgt

$$|f(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{j=1}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T| d\tau_j \right)^{\frac{1}{d-1}},$$

wobei der  $j$ -te Faktor nicht von  $x_j$  abhängt. Integrieren wir nach  $x_1$ , ziehen den ersten Faktor vor und wenden (18.11) an, so folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, \dots, x_d)^T|^{\frac{d}{d-1}} dx_1 \leq$$

$$\begin{aligned} &\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_1} f(\tau_1, x_2, \dots, x_d)^T| d\tau_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \times \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=2}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T| d\tau_j \right)^{\frac{1}{d-1}} dx_1 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_1} f(\tau_1, x_2, \dots, x_d)^T| d\tau_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \times \\ &\prod_{j=2}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T| d\tau_j dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}}. \end{aligned}$$

Der Faktor rechts für  $j = 2$  ist von  $x_2$  unabhängig, womit er im Folgenden nach vorne gezogen wird.

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, \dots, x_d)^T|^{\frac{d}{d-1}} dx_1 dx_2 \leq \\ &\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_2} f(x_1, \tau_2, \dots, x_d)^T| d\tau_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_1} f(\tau_1, x_2, \dots, x_d)^T| d\tau_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \times \\
& \quad \prod_{j=3}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T| d\tau_j dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} dx_2 \leq \\
& \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_2} f(x_1, \tau_2, \dots, x_d)^T| d\tau_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_1} f(\tau_1, x_2, \dots, x_d)^T| d\tau_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{d-1}} \times \\
& \quad \prod_{j=3}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_d)^T| d\tau_j dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{d-1}}.
\end{aligned}$$

Nach  $k$  Schritten folgt

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, \dots, x_d)^T|^{\frac{d}{d-1}} dx_1 \dots dx_k \leq \\
& \prod_{j=1}^k \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_d)^T| dx_1 \dots dx_k \right)^{\frac{1}{d-1}} \\
& \quad \prod_{j=k+1}^d \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{e_j} f(x_1, \dots, x_d)^T| dx_j dx_1 \dots dx_k \right)^{\frac{1}{d-1}},
\end{aligned}$$

und schließlich für  $k = d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^{\frac{d}{d-1}} d\lambda_d \leq \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f| d\lambda_d \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Also gilt

$$\|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f| d\lambda_d \right)^{\frac{1}{d}} \leq \prod_{j=1}^d \|f\|_{1,1}^{\frac{1}{d}} = \|f\|_{1,1},$$

und somit die Sobolev-Ungleichung für  $p = m = 1$  und  $f \in C_{00}^1(G)$ .

Um die Ungleichung für  $p > 1$  zu zeigen, sei  $\gamma > 1$ . Da für  $f \in C_{00}^1(G)$  auch  $|f|^\gamma$  in  $C_{00}^1(G)$  liegt, wobei  $D^{e_j}(|f|^\gamma) = \gamma|f|^{\gamma-1} D^{e_j} f$ , folgt

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^{\frac{\gamma d}{d-1}} d\lambda_d \right)^{\frac{d-1}{d}} = \| |f|^\gamma \|_{\frac{d}{d-1}} \leq \gamma \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^{\gamma-1} D^{e_j} f d\lambda_d \right)^{\frac{1}{d}} \leq$$

$$\gamma \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^{(\gamma-1)q} d\lambda_d \right)^{\frac{1}{qd}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{pd}} = \\ \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^{(\gamma-1)q} d\lambda_d \right)^{\frac{1}{q}} \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{pd}}.$$

Mit  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  ist die letzte Ungleichung hier eine Konsequenz der Hölder Ungleichung.

Für  $(\gamma - 1)q = \gamma \frac{d}{d-1}$ , dh.  $\gamma = \frac{p(d-1)}{d-p}$ , folgt

$$\|f\|_{\frac{pd}{d-p}} = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^{\frac{pd}{d-p}} d\lambda_d \right)^{\frac{d-p}{pd}} = \| |f|^\gamma \|_{\frac{d}{d-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^{(\gamma-1)q} d\lambda_d \right)^{-\frac{1}{q}} \\ \leq \frac{p(d-1)}{d-p} \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{pd}} \leq \frac{p(d-1)}{d(d-p)} \sum_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei hier in der letzten Ungleichung die bekannte Tatsache, dass  $\left( \prod_{j=1}^d b_j \right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d b_j$  für  $b_j \geq 0$  gilt, verwendet wurde. Wegen<sup>8</sup>  $\sum_{j=1}^d b_j \leq \left( \sum_{j=1}^d b_j^p \right)^{\frac{1}{p}} d^{1-\frac{1}{p}}$  für  $b_j \geq 0$  folgt weiter

$$\|f\|_{\frac{pd}{d-p}} \leq \frac{p(d-1)}{d^{\frac{1}{p}}(d-p)} \left( \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |D^{e_j} f|^p d\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p(d-1)}{d^{\frac{1}{p}}(d-p)} \|f\|_{1,p}.$$

Somit gilt die Sobolev-Ungleichung für  $p \in [1, d)$ ,  $m = 1$  und  $f \in C_{00}^1(G)$ .

Für  $m \geq 1$  und  $p \in [1, \frac{d}{m})$  zeigen wir die Sobolev-Ungleichung für  $f \in C_{00}^\infty(G)$  durch vollständige Induktion nach  $m$ . Den Induktionsanfang  $m = 1$  haben wir schon. Mit einer von  $f$  unabhängigen Konstanten  $C_m \geq 0$  gelte  $\|f\|_{\frac{pd}{d-mp}} \leq C_m \|f\|_{m,p}$  für alle  $f \in C_{00}^\infty(G)$ . Wenden wir diese Ungleichung auf  $f$  und alle  $D^{e_j} f$  an, so folgt für eine geeignete, von  $f$  unabhängige Konstante  $c_{m+1} \geq 0$

$$\|f\|_{1, \frac{pd}{d-mp}} \leq \|f\|_{\frac{pd}{d-mp}} + \sum_{j=1}^d \|D^{e_j} f\|_{\frac{pd}{d-mp}} \leq C_m \|f\|_{m,p} + C_m \sum_{j=1}^d \|D^{e_j} f\|_{m,p} \leq c_{m+1} \|f\|_{m+1,p}.$$

Für  $1 \leq p < \frac{d}{m+1}$  folgt  $1 \leq \frac{pd}{d-mp} < \frac{d}{m} \leq d$ . Also können wir die Sobolev-Ungleichung für  $m = 1$  und  $\frac{pd}{d-mp}$  anstatt  $p$  anwenden und erhalten mit einem von  $f$  unabhängigen  $\tilde{c}$

$$\tilde{c} \|f\|_{1, \frac{pd}{d-mp}} \geq \|f\|_{\frac{\frac{pd}{d-mp} d}{d - \frac{pd}{d-mp}}} = \|f\|_{\frac{pd}{d-(m+1)p}}.$$

Also gilt für eine geeignete, von  $f$  unabhängige Konstante  $C_{m+1} \geq 0$  die Ungleichung  $\|f\|_{\frac{pd}{d-(m+1)p}} \leq C_{m+1} \|f\|_{m+1,p}$ .

Für den allgemeinsten Fall  $f \in W_0^{m,p}(G)$ ,  $m \geq 1$ ,  $p \in [1, \frac{d}{m})$  wissen wir, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  bzgl.  $\|\cdot\|_{m,p}$  für eine geeignete Folge  $f_n \in C_{00}^\infty(G)$ . Aus  $\|\cdot\|_{\frac{pd}{d-mp}} \leq C_m \|\cdot\|_{m,p}$

<sup>8</sup>Das folgt aus der Hölderschen Ungleichung auf  $\mathbb{R}^d$ .

angewandt auf  $f_n - f_m$  folgt, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^{\frac{pd}{d-mp}}(G)$  ist, und daher bzgl. der entsprechenden Norm gegen ein  $g \in L^{\frac{pd}{d-mp}}(G)$  konvergiert, wobei

$$\|g\|_{\frac{pd}{d-mp}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\frac{pd}{d-mp}} \leq C_m \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{m,p} = \|f\|_{m,p}.$$

Somit konvergiert eine Teilfolge von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise fast überall gegen  $g$ . Wegen  $f_n \rightarrow f$  bzgl.  $\|\cdot\|_p$  konvergiert diese Teilfolge auch bzgl.  $\|\cdot\|_p$ , und es gibt eine Teilfolge der Teilfolge, die punktweise fast überall auch gegen  $f$  strebt. Wir erhalten  $f = g$  als Elemente von  $L^{\frac{pd}{d-mp}}(G)$ , und in Folge auch die Ungleichung  $\|f\|_{\frac{pd}{d-mp}} \leq C_m \|f\|_{m,p}$ .  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [B] M.BLÜMLINGER: *Analysis 3*, Skriptum, 2011.
- [C] L.CONLON: *Differentiable manifolds*, Birkhäuser Boston, 2001.
- [DJ] J.J.DUISTERMAAT, J.A.C. KLOK: *Multidimensional Real Analysis I+II*, Cambridge University Press 2004.
- [L] J.ELSTRODT: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2005.
- [H] H.HEUSER: *Lehrbuch der Analysis 1,2*, Teubner Verlag, Stuttgart 1989.
- [J] K.JÄNICH: *Vektor Analysis*, Springer Verlag 2001.
- [K] N.KUSOLITSCH: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer.
- [R2] W.RUDIN: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1966, third edition 1987.

# Index

- $C_{00}^{\infty}(G)$ , 116
- $D^{\alpha}f$ , 149
- $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ , 106
- $S^d$ , 68
- $T_x$ , 21
- $\partial G$ , 27
- $\partial^o G$ , 29
- $\partial^s G$ , 27
- $\sigma$ -kompakt, 80
- $\text{supp } h$ , 49
- $d_{\infty}(G)$ , 160
- Abbildung
  - offene, 10
- Ableitung
  - im distributionellen Sinn, 157
  - schwache, 149
- Banachalgebra, 114
  - kommutative, 114
- Banachscher Fixpunktsatz, 1
- Betafunktion, 44
- Borelmaß, 80
- Borelmengen, 33, 34
- Cesaro-Mittel, 130
- Diffeomorphismus, 10, 55
- Dirichlet-Kern, 124
- Distributionen, 157
- Divergenz, 92
- Dualraum, 107, 157
  - topologischer, 107
- Durchmesser, 160
- Einbettung, 16
- Einheit
  - approximative, 116
- Einheitssphäre, 68
- Erste Greensche Identität, 93
- Extremum unter Nebenbedingung, 25
- Faltung, 47, 113
- Fejér-Kern, 130
- Fläche, 13
- Fourierkoeffizienten, 122
- Fourierreihe, 120, 122
- Fouriertransformation, 133
- Fouriertransformierte, 133
- Friedrichs Ungleichung, 160
- Fubini
  - Satz von, 43
- Funktion
  - absolut stetige, 154
  - ganze, 136
  - harmonische, 96
  - lokal integrierbare, 149
  - messbare, 33, 34
- Funktionen
  - gerade, 123
  - komplexwertig integrierbar, 34
  - komplexwertig messbar, 34
  - ungerade, 123
- Gammafunktion, 39
  - Grenzwertdarstellung, 40
- Gaußscher Integralsatz, 93
  - in der Ebene, 101
- gerade Funktionen, 123
- Gradient, 92
- Greenscher Integralsatz, 93
- Hölder-stetig, 164
- Höldersche Ungleichung, 108
  - Verallgemeinerung, 164
- harmonisch, 96
- Hilbertraum, 117
- Implicit function theorem, 3
- implizites Differenzieren, 2
- Jensensche Ungleichung, 42
- Karte, 13



- Kreuzprodukt, 85
- Kugelkoordinaten, 15, 61
- Kurve, 13
  
- Lagrangesche Multiplikatorenregel, 25
- Lagrangeschen Multiplikatoren, 25
- Laplace, 92
- Laplacetransformierte, 145
- Lebesgue-Maß
  - Translationsinvarianz, 45
- Lebesgue-messbare Teilmengen, 35
- Leibnizsche Produktregel, 155
- Lie-Gruppen, 16
- Lindelöf, 75
- Lipschitz stetig, 65
- Lokalisationsprinzip, 128
  
- Möbiusband, 23
- Maßraum, 34
- Majorante
  - integrierbare, 34
- Mannigfaltigkeit, 13
  - implizit definiert, 14
- Menge
  - kritischen Punkte, 67
- Mittelwerteigenschaft, 100
- Mollifier, 50
- Multiindex, 149
  
- Nabla, 92
- Neumannsche Reihe, 68
- Normale
  - äußere, 30
- Normalvektor, 23
  
- Oberflächenmaß, 74, 76
- Orthogonalsystem, 119
- Orthonormalbasis, 120
- Orthonormalsystem, 119
  
- Poisson-Darstellung, 100
- Poissonkern, 98
- Polarkoordinaten, 59
- Polynom
  - trigonometrisches, 124
  
- Radon-Nikodym Ableitung, 58
- Rand
  - topologischer, 27
- Riemann-Integral
  - uneigentlich, 36
  
- Rotation, 103
  
- Satz
  - über die Inverse Funktion, 13
  - Fejer, 131
  - Fixpunktsatz von Brouwer, 71
  - Hauptsatz über implizite Funktionen, 3, 12
  - Rangsatz, 24
  - Umkehrsatz, 9
  - von der Invarianz der Dimension, 74
  - von der Invarianz offener Mengen, 74
  - von Sard, 67
- schwache Ableitung, 149
- Schwartz Klasse, 141
- Seminorm, 164
- Skalarproduktraum, 117
- Sobolev-Ungleichung, 164
- Sobolevnorm, 157
- Sobolevraum, 157
- Stokesscher Integralsatz, 103
  
- Tangentialraum, 21
- Testfunktion, 149
- Torus, 18
- Träger, 49, 115
- Transformationsformel, 55
- trigonometrisches Polynom, 124
  
- ungerade Funktionen, 123
- Untermannigfaltigkeit, 13
- Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^p$ , 13
  
- Zerlegung der Eins
  - glatte, 52
- Zweite Greensche Identität, 93