1. Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit C^∞-Rand und 1_Ω ihre Indikatorfunktion. Zeigen Sie

$$\langle \Delta 1_\Omega, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist.

$$\langle \Delta \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbb{1}_\Omega}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbb{1}_\Omega}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathbb{1}_\Omega, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \, d\lambda^n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega \Delta \varphi \, d\lambda^n = \int_\Omega 1 \Delta \varphi \, d\lambda^n \overset{(1)}{=} \int_{\partial_r \Omega} 1 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dH^{n-1} - \int_\Omega (\nabla \varphi)^T \underbrace{\nabla 1}_{=0} \, d\lambda^n = \int_{\partial_r \Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dH^{n-1} \overset{(2)}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dH^{n-1}$$

(1) Blümlinger Satz 5.3.9: Erster Green'scher Integralsatz; bzw. Satz 1.5

Was fehlt? Ist Ω offen?

Fragen: Warum braucht man $\partial\Omega \in C^\infty$; reicht $\partial\Omega \in C^1$?

Ist ein C^∞-Rand überall regulär nach Blümlinger-Definition?

2. Zeigen Sie, dass

$$F = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n}$$

eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(u) = \operatorname{div} u$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, wobei σ_n die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist. Achtung: obwohl F eigentlich eine vektorwertige Distribution in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)^n$ ist, wird das nicht gebraucht um die Behauptung

$$\langle \operatorname{div} F, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

zu zeigen, da $\operatorname{div} F = \frac{1}{\sigma_n} \sum_i \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

Wir betrachten die Menge $B_\varepsilon(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \varepsilon\}$, $\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$ und berechnen

$$\langle \operatorname{div} F, \varphi \rangle \overset{?}{=} \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \langle \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n}\right), \varphi \rangle = -\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \langle \frac{x_i}{|x|^n}, \varphi \rangle = -\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{x_i}{|x|^n} \partial_i \varphi(x)\, dx = -\int_{\Omega_\varepsilon} F \cdot \nabla\varphi\, dx$$

$$\overset{(1)}{=} -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \operatorname{div} F \, d\lambda^n,$$ wobei $\nu(x) = \frac{-x}{|x|}$ der ins Äußere zeigende Normalvektor von $\partial\Omega_\varepsilon$ ist.

Bei (1) verwenden wir „mehrdimensionale partielle Integration" die sich als Folgerung des Satzes von Gauß ergibt, vgl. Skriptum S. 9, obwohl Ω_ε nicht beschränkt ist – auf S. 46 wird es auch so gemacht...

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi(x) \frac{|x|^2}{|x|^{n+1}} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^{n-1}} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\sigma_n} \varphi(x_\varepsilon) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-1}} \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma_n} \varphi(x_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{\sigma_n} \varphi(x_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \sigma_n \varepsilon^{n-1} = \varphi(x_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \varphi(0)$$

(2) ist hier der Mittelwertsatz der Integralrechnung nach dem Vorbild auf S. 46

$$\partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n}\right) = \partial_i \left(x_i \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \right) = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}} - x_i \frac{n}{2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} 2x_i = \frac{1}{|x|^n} - \frac{n x_i^2}{|x|^{n+2}}$$ wegen $-\frac{n}{2} - 1 = -\frac{n}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{n+2}{2}$

also $$\operatorname{div} F = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n}\right) = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|x|^n} - \frac{n x_i^2}{|x|^{n+2}} \right) = \frac{n}{\sigma_n} \left(\frac{1}{|x|^n} - \frac{|x|^2}{|x|^{n+2}} \right) = 0$$ und daher

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \operatorname{div} F \, d\lambda^n = 0$$

$$-\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{x_i}{|x|^n} \partial_i \varphi(x)\, dx = -\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'_{\varepsilon_i}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{x_i}{|x|^n} \partial_i \varphi(x)\, dx_i \, dz_i$$ $z_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$y_{i,1} = (x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$$= -\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'_{\varepsilon_i}} \left(\frac{x_i}{|x|^n} \varphi(x) \Big|_{x_i = -\infty}^{-\varepsilon} + \frac{x_i}{|x|^n} \varphi(x) \Big|_{x_i = \varepsilon}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \left(\frac{1}{|x|^n} - \frac{n x_i^2}{|x|^{n+2}} \right) \varphi(x)\, dx_i \right) dz_i$$

$y_{i,2} = (x_1, \dots, x_{i-1}, -\varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$$= -\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega'_{\varepsilon_i}} \left(\frac{-\varepsilon \varphi(y_{i,1})}{|y_{i,1}|^n} - \frac{\varepsilon \varphi(y_{i,2})}{|y_{i,2}|^n} \right) dz_i + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{n x_i^2}{|x|^{n+2}} \varphi(x)\, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x|^n} \varphi(x)\, dx \right)$$

$|y_{i,1}| = |y_{i,2}|$

$$= \frac{\varepsilon}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'_{\varepsilon_i}} \frac{\varphi(y_{i,1}) + \varphi(y_{i,2})}{|y_{i,1}|^n} \, dz_i + \frac{n}{\sigma_n} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x|^n} \varphi(x)\, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|x|^2}{|x|^{n+2}} \varphi(x)\, dx \right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'_{\varepsilon_i}} \frac{\varphi(y_{i,1}) + \varphi(y_{i,2})}{|y_{i,1}|^n} \, dz_i$$

3. Gegeben $v \in C^2(\mathbb{R})$, sei $u(x,t) = v(x/\sqrt{t})$ für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie:

$$u_t = u_{xx} \iff v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung v und damit u.

(ii) Wählen sie die Konstanten in u so, dass

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = 0 \text{ für } x < 0, \quad \lim_{t\to 0+} u(t,x) = 1 \text{ für } x > 0.$$

(iii) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Funktion $f(x,t) = ((\partial_x u(.,t)) * \varphi)(x)$ (Faltung in der x-Variablen) folgendes Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung löst:

$$f_t - f_{xx} = 0$$

$$\lim_{t\to 0+} f(t,x) = \varphi(x)$$

(i) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(v(xt^{-1/2})) = v'(xt^{-1/2})(-\frac{1}{2})x\,t^{-3/2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v'(\frac{x}{\sqrt{t}})\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = v''(\frac{x}{\sqrt{t}})\frac{1}{t}$

also $u_t = u_{xx} \iff -v'(\frac{x}{\sqrt{t}})\frac{1}{2}x\,t^{-3/2} = v''(\frac{x}{\sqrt{t}})t^{-1} \iff v''(\frac{x}{\sqrt{t}}) + v'(\frac{x}{\sqrt{t}})\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{t}} = 0 \overset{z=\frac{x}{\sqrt{t}}}{\iff} v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0$

Betrachte also $v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0$ also $v''(z) = -\frac{z}{2}v'(z) \rightsquigarrow 2\frac{v''}{v'} = -z \to (\ln(v'))' = -\frac{z}{2}$

$\to \ln(v') = -\frac{1}{4}z^2 + c_1 \to v' = c_2 e^{-\frac{z^2}{4}} \rightsquigarrow v(z) = c_2 \int_{-\infty}^{z} e^{-(\frac{y}{2})^2}dy + c_3 \left| \begin{matrix} s = \frac{y}{2} \\ \frac{ds}{dy} = \frac{1}{2} \\ dy = 2ds \end{matrix} \right| = 2c_2 \int_{-\infty}^{\frac{z}{2}} e^{-s^2} ds$

also $u(x,t) = \underbrace{c_4}_{=2c_2} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds + c_3$

vgl. Kaltenbäck Bsp. 8.7.13

(ii) $x<0$: $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = c_3 \overset{!}{=} 0$ und $x>0$: $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = c_4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \overset{!}{=} c_4\sqrt{\pi} \overset{!}{=} 1$ also $c_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

damit $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds \left| \begin{matrix} r = 2\sqrt{t}\,s \\ \frac{dr}{ds} = 2\sqrt{t} \\ ds = \frac{dr}{2\sqrt{t}} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr$

(iii) $\partial_x u(\cdot,t) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ also: $f(x,t) = ((\partial_x u(\cdot,t)) * \varphi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4t}} \varphi(x-y)\,dy$

$f_t - f_{xx} = \partial_t((\partial_x u(\cdot,t) * \varphi)(x)) = (\partial_{tx} u(\cdot,t) * \varphi)(x) - (\partial_{xxx} u(\cdot,t) * \varphi)(x) =$

$= ((\partial_{tx} u(\cdot,t) - \partial_{xxx} u(\cdot,t)) * \varphi)(x) = ((\partial_x(\underbrace{\partial_t u(\cdot,t) - \partial_{xx} u(\cdot,t)}_{=0})) * \varphi)(x) = 0$

$\lim_{t\to 0+} f(x,t) \overset{\text{Lemma 3.14}}{=} \lim_{t\to 0+} (u(\cdot,t) * \varphi')(x) = \lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}} u(x-y,t)\varphi'(y)\,dy \overset{|u(x-y,t)| \le \sqrt{\pi}}{\overset{!}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0+} u(x-y,t)\varphi'(y)\,dy =$

$= \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\lim_{t\to 0+} u(x-y,t)}_{=1} \varphi'(y)\,dy + \int_{x}^{\infty} \underbrace{\lim_{t\to 0+} u(x-y,t)}_{=0} \varphi'(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \varphi'(y)\,dy = \varphi(x)$

4. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(x,y) = (8\pi)^{-1}(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

ist eine Fundamentallösung von Δ^2 mit Pol in $(0,0)$ im $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_i x_j x_j}.$$

$\langle \Delta^2 u, \varphi \rangle = 2 \langle \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \varphi \rangle + \langle \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \varphi \rangle + \langle \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \varphi \rangle$

$\langle \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \varphi \rangle = \langle u, \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \rangle$

$K \subseteq \mathbb{R}^2$, K kompakt: $\int_K |u| \, d\lambda^2 \leq \int_0^{2\pi} \int_0^r |(8\pi)^{-1} \rho^2 \ln(\rho) \rho| \, d\rho \, d\varphi$ $\int_0^1 -\frac{1}{4} \rho^3 \ln(\rho) = -\frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\rho^4 \ln(\rho) - \frac{1}{16}\rho^4\right)' d\rho < \infty$

also ist $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ und mit $\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^2 \setminus \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| < \varepsilon\}$ gilt

$\langle u, \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} u \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \, d\lambda^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = (8\pi)^{-1} \left(2x \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + x^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \ln(x^2+y^2)\right) = (8\pi)^{-1}\left((2x+y^2)\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (8\pi)^{-1}\left((2+y^2)\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + (2x+y^2)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}\left(2x(x^2+y^2)^{-1} - x^2(x^2+y^2)^{-2} 2x\right)\right) =$

$= (8\pi)^{-1}\left((2+y^2)\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2}\right) =$

$= (8\pi)^{-1}\left((2+y^2)\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2+y^2}\right.$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (8\pi)^{-1}\left((2+y^2)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right.$

$u(r) = (8\pi)^{-1} r^2 \ln(r) \rightarrow u'(r) = (8\pi)^{-1}(r 2\ln(r) + r) = (8\pi)^{-1} r(2\ln(r)+1)$

$u''(r) = (8\pi)^{-1}\left((2\ln(r)+1) + r 2 \frac{1}{r}\right) = (8\pi)^{-1}(2\ln(r)+3)$

$\Delta u(r) = u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) = \frac{1}{4\pi}\ln(r) + \frac{3}{8\pi} + \frac{1}{4\pi}\ln(r) + \frac{1}{8\pi} = \frac{1}{2\pi}\ln(r) + \frac{1}{2\pi}$

Nach Satz 4.1. ist Δu Fundamentallösung des Laplace Operators

5. Bestimmen Sie die formal adjungierten Operatoren von

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ L\phi &= a(x,y)\phi_x + b(x,y)\phi_y + c(x,y)\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\,, \\ \text{(ii)}\ L\phi &= x^2\phi'' + \phi' - 3x^2\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \\ \text{(iii)}\ L\phi &= \Delta\phi + v(x)\cdot\nabla\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,, \end{aligned}$$

mit $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

(i) $L^*\varphi = -\partial_x(a\varphi) - \partial_y(b\varphi) + c\varphi = -\partial_x a\varphi - a\partial_x\varphi - \partial_y b\varphi - b\partial_y\varphi + c\varphi$

(ii) $L^*\varphi = (x^2\varphi)'' - \varphi' - 3x^2\varphi = (2x\varphi + x^2\varphi')' - \varphi' - 3x^2\varphi = 2\varphi + 2x\varphi' + 2x\varphi' + x^2\varphi'' - \varphi' - 3x^2\varphi = x^2\varphi'' + (2x-1)\varphi' + (2-3x^2)\varphi$

(iii) $L\phi = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_ix_i}\phi + v_i\partial_{x_i}\phi)$

$L^*\phi = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_ix_i}\phi - \partial_{x_i}(v_i\phi)) = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_ix_i}\phi - \partial_{x_i}v_i\phi - v_i\partial_{x_i}\phi) = \Delta\phi - \nabla v\cdot\phi - v\cdot\nabla\phi$

6. Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von ∂^α in $\mathbb{R}^n$ mit Träger in

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ \forall i = 1 \ldots n\},$$

wobei alle $\alpha_i > 0$ sind.

$n=1$: $k=1$: $u_1 = \mathbb{1}_{]0,\infty[} \rightsquigarrow \langle u_1', \phi\rangle = -\langle u_1, \phi'\rangle = -\int_0^\infty \phi'(x)dx = -\left(\lim_{r\to\infty} \phi(r) - \phi(0)\right) = \phi(0)$

$k=2$: $u_2 = id\, \mathbb{1}_{]0,\infty[} \rightsquigarrow \langle u_2'', \phi\rangle = \langle u_2, \phi''\rangle = \int_0^\infty x\,\phi''(x)\,dx = \left[x\,\phi'(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0)$

$k=3$: $u_3(x) = \frac{x^2}{2}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \rightsquigarrow \langle u_3''', \phi\rangle = -\langle u_3, \phi'''\rangle = -\int_0^\infty \frac{x^2}{2}\phi'''(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2}\phi''(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty x\,\phi''(x)dx = \phi(0)$

ang. $u_k(x) = \frac{x^k}{k!}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$ mit $\langle u_k^{(k)}, \phi\rangle = \phi(0)$

so gilt $u_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$ erfüllt $\langle u_{k+1}^{(k+1)}, \phi\rangle = (-1)^{k+1}\langle u_{k+1}, \phi^{(k+1)}\rangle = (-1)^{k+1}\int_0^\infty \frac{x^{k+1}}{k+1}\phi^{(k+1)}(x)dx$

$= \left[(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k+1}\phi^{(k)}(x)\right]_0^\infty + (-1)^{k+2}\int_0^\infty \frac{x^k}{k}\phi^{(k)}(x)dx = (-1)^k\int_0^\infty \frac{x^k}{k}\phi^{(k)}(x)dx = (-1)^k\langle u_k, \phi^{(k)}\rangle = \langle u_k^{(k)}, \phi\rangle = \phi(0)$

Behauptung: $u_{n\alpha}(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\,\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i!\right)^{-1}$

$\langle D^\alpha u_{n+1,\alpha}, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_{n+1,\alpha}, D^\alpha\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i!\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\,\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x_i)\right)\int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{\alpha_{n+1}!}D^\alpha\phi(x)\,dx_{n+1}\,dx'$

$$\boxed{\text{wobei } x' = (x_1, \ldots, x_n),\ \alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

$= (-1)^{|\alpha|}\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i!\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\,\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x_i)\right)D^{\alpha'}\phi(x',0)\,dx' = \langle D^{\alpha'}u_{n,\alpha'}, \phi\rangle = \phi(0)$

7. Bestimmen Sie Fundamentallösungen mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$ folgender Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}$:

(i) $L(u) = u'$

(ii) $L(u) = u''$

(iii) $L(u) = u' - au$ $(a \neq 0)$ (*Hinweis:* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung u_{hom} der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ und verwenden Sie einen Ansatz der Form $U_0(x) = C_1 u_{hom}(x)$ für $x < 0$, $U_0(x) = C_2 u_{hom}(x)$ für $x > 0$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

(i) Vermutung: $u_\xi(x) = \left(-\mathbb{1}_{]-\infty,\xi]}(x) + \mathbb{1}_{]\xi,\infty[}(x)\right)\frac{1}{2}$

$\langle u_\xi', \phi\rangle = -\langle u_\xi, \phi'\rangle = \left(\int_{-\infty}^{\xi} \phi'(x)dx - \int_{\xi}^{\infty} \phi'(x)dx\right)\frac{1}{2} = \phi(\xi)$

(ii) $u_\xi(x) = x(\xi-1)\mathbb{1}_{]-\infty,\xi]}(x) + \xi(x-1)\mathbb{1}_{]\xi,\infty[}(x)$; siehe dazu Jüngel Beispiel 3.20

(iii) $u' - au = 0 \rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom $\chi(\lambda) = \lambda - a$ also $u_{hom}(x) = Ce^{ax}$

Ansatz: $U_0(x) = C_1 e^{ax}\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + C_2 e^{ax}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$

$\langle U_0', \phi\rangle = -C_1\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\phi'(x)\,dx - C_2\int_{0}^{\infty} e^{ax}\phi'(x)\,dx = \left[-C_1 e^{ax}\phi(x)\right]_{-\infty}^{0} + C_1 a\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\phi(x)dx + \left[-C_2 e^{ax}\phi(x)\right]_0^{\infty} + C_2 a\int_0^{\infty} e^{ax}\phi(x)dx$

$a\langle U_0, \phi\rangle = C_1 a\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\phi(x)\,dx + C_2 a\int_0^{\infty} e^{ax}\phi(x)dx$

$\langle U_0', \phi\rangle - a\langle U_0, \phi\rangle = -C_1\phi(0) + C_2\phi(0)$, also $C_2 - C_1 \stackrel{!}{=} 1$ wähle $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_1 = -\frac{1}{2}$

daher $U_0(x) = \frac{1}{2}e^{ax}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) - \frac{1}{2}e^{ax}\mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x)$

$U_\xi(x) = T_{-\xi}(U_0)(x) = U_0(x-\xi) = \frac{1}{2}e^{a(x-\xi)}\mathbb{1}_{]\xi,\infty[}(x) - \frac{1}{2}e^{a(x-\xi)}\mathbb{1}_{]-\infty,\xi]}(x)$