Lösung zu Beispiel 2A

Angabe: Sei K ein angeordneter Körper, $x, y \in K$ mit $x < y$. Zeigen Sie: Für $0_K < a < 1_K$ gilt $x < ax + (1_K - a)y$ mit genauer Begründung aller Rechenschritte.

Hat die Menge $M := \{ax + (1_K - a)y : 0_K < a < 1_K\}$ ein Minimum oder ein Infimum? Bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.

1. Teil

Da K ein angeordneter Körper ist, existiert eine Menge $P \subseteq K$, sodass Eigenschaften $(\text{p1}), (\text{p2})$ und (p3) von Definition 2.2.1 erfüllt sind. Wegen der Voraussetzungen $a \in (0_K, 1_K)$ und $x < y$ gilt nach Definition der Relation $<$:

$$\begin{aligned} 1_K - a &\in P, &\quad& \text{(A)} \\ y - x &\in P. && \text{(B)} \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $x < ax + (1_K - a)y$ gilt, müssen wir, wieder nach Definition von $<$, Folgendes verifizieren:

$$ax + (1_K - a)y - x \in P, \text{ für alle } a \in (0_K, 1_K).$$

Unter der Verwendung der Eigenschaften von K und P rechnen wir:

$$\begin{aligned} &ax + (1_K - a)y - x =^{1.} -x + ax + (1_K - a)y =^{2.} \\ &= (1_K - a)(-x) + (1_K - a)y =^{3.} (1_K - a)(y - x) \in P. \end{aligned}$$

Wobei wir folgende Eigenschaften eines Körpers verwendet haben (Definition 2.1.1):

1. die Kommutativität bzgl. der Addition,
2. das Distributivgesetz, 1_K ist neutrales Element der Multiplikation, $(-a)(-x) = ax$ (Lemma 2.1.5),
3. das Distributivgesetz, Kommutativität bzgl. der Addition.

Den letzten Schluss haben wir mit (A) und (B) gezogen, und der Eigenschaft (p3) von P, dass: $p, q \in P \Rightarrow pq \in P$. Damit folgt nun die gesuchte Ungleichung.

2. Teil

Mit dem ersten Teil der Aufgabe haben wir jedenfalls gezeigt, dass x eine untere Schranke unserer Menge M ist. Weiters vermuten wir, dass x ein Infimum sein könnte. Wir führen einen Widerspruchsbeweis:

Angenommen es gebe eine größere untere Schranke z von M, welche größer als x ist, also $z \in K$ mit $x < z \leq m$ für alle $m \in M$. Wir führen nun diese Annahme auf einen Widerspruch, in dem wir ein Element $m_0 \in M$ konstruieren, das kleiner als z ist. Das widerspricht natürlich der Tatsache, dass z eine untere Schranke von M ist.

Dazu setzen wir $m_0 := \frac{x+z}{2}$, wobei $2 := 1_K + 1_K$. Lemma 2.2.3 (xii) besagt

$$x < z \Rightarrow x < \frac{x+z}{2} = m_0 < z.$$

Wir müssen noch zeigen, dass m_0 tatsächlich ein Element von M ist. Dazu müssen wir zeigen, dass es ein $a \in (0_K, 1_K)$ gibt, sodass

$$m_0 = \frac{x+z}{2} = ax + (1_K - a)y.$$

Indem wir diese Gleichung nach a auflösen, erhalten wir

$$a = \frac{x+z-2y}{2(x-y)}.$$

Wir setzen also $a_0 := \frac{x+z-2y}{2(x-y)}$ und müssen noch zeigen, dass a_0 in dem Intervall $(0_K, 1_K)$ liegt. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+z-2y}{2(x-y)} < 1_K &\iff x + z - 2y > 2x - 2y \\ &\iff z > x. \end{aligned}$$

Von der ersten auf die zweite Zeile haben wir verwendet, dass nach Voraussetzung $x-y < 0$ gilt. Da alle diese Aussagen äquivalent sind, und die letzte unsere Annahme ist, gilt auch die erste Aussage, und damit $a_0 < 1_K$. Als Nächstes zeigen wir $0 < a_0$:

$$\begin{aligned} \frac{x+z-2y}{2(x-y)} > 0 &\iff x + z - 2y < 0 \\ &\iff \frac{x+z}{2} < y \\ &\iff m_0 < y. \end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder $x - y < 0$ benutzt, sowie die Definition von m_0. Wie bereits weiter oben angemerkt, gilt $m_0 < z$. Wir behaupten nun, dass $z < y$ gilt. Um das zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass das arithmetische Mittel von x und y ein Element von M ist, da für die Wahl $a_1 := \frac{1_K}{2} \in (0_K, 1_K)$ offensichtlich $a_1 x + (1_K - a_1)y = \frac{x+y}{2}$ gilt. Weil z eine untere Schranke von M ist, gilt daher $z \leq \frac{x+y}{2} < y$, was die Behauptung zeigt. Aufgrund der Transitivität sehen wir damit $m_0 < y$, und schließen $0 < a_0$.

Insgesamt haben wir also $0 < a_0 < 1$ gezeigt. Aufgrund von $a_0 x + (1 - a_0)y = m_0$ folgt schließlich $m_0 \in M$. Gemeinsam mit $m_0 < z$ liefert das einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass z eine untere Schranke von M ist.

Der Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme es gäbe eine größere untere Schranke als x falsch war. Damit ist x die größte untere Schranke, x ist also das Infimum.

Weiters folgern wir aus dem ersten Teil, dass x kein Element von M sein kann, da $x < m$ für alle m in M gilt. Damit ist das Infimum von M nicht in M enthalten, und es kann also kein Minimum geben.