Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 4

Übungstermin: 22.4.2020 2. April 2020

Aufgabe 16:
Wenden Sie die Methode der (Zweischritt-) Richardson Extrapolation aus Abschnitt 2.7 auf das explizite Euler-Verfahren an.

a) Welches Verfahren entsteht dabei?

b) Weisen Sie unabhängig von Abschnitt 2.7 nach, dass dieses Verfahren die Konvergenzordnung 2 besitzt.

Aufgabe 17:
Implementieren Sie das implizite Euler Verfahren unter Verwendung des Newton-Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems. Der Algorithmus soll als Input-Parameter einen Vektor von Stützstellen t, einen Startwert y_0, die rechte Seite und Ableitung der rechten Seite f bzw. $\frac{\partial}{\partial y}f$ sowie eine geeignete Abbruchbedinung für das Newton Verfahren (Toleranz und/oder maximale Anzahl an Interationen) akzeptieren.

Testen Sie das Verfahren an folgenden Anfangswertproblemen: Sei $Y = (y_1, y_2)^\top$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\,(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Sei $Z = (z_1, z_2)^\top$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 999\,(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \qquad Z(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Vergleichen Sie dabei auch mit den Ergebnissen und Schrittweiten des eingebetteten Runge-Kutta Verfahren RK5(4) aus Aufgabe 15. Verwenden Sie dazu die Parameter $t \in [0, 10], \rho = 0.7, \eta = 1.5, \mathrm{tol} = 10^{-6}, h_{min} = 10^{-10}$.

Aufgabe 18:
Gegeben sei ein implizites, s-stufiges Runge-Kutta Verfahren der Form

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline 0 & b^\top \end{array}. \tag{3}$$

Zeigen Sie: Angewendet auf das Anfangswertproblem $y' = \lambda y$ mit $y(0) = y_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt für hinreichend kleine h

$$y_{i+1} = R(\lambda h) y_i \tag{4}$$

mit einer rationalen Funktion $R = P/Q$ und Polynomen $P, Q \in \Pi_s$ vom maximalen Grad s.

Aufgabe 19:
Beweisen Sie, welche Konsistenzordnungen die impliziten Runge-Kutta Verfahren aus Example 3.11 (impliziter Euler), Example 3.12 (implizite Trapezregel) und Example 3.13 (implizite Mittelpunktsregel) besitzen.

Aufgabe 20:
Implizite Runge-Kutta Verfahren führen zu einem nichtlinearen Gleichungssystem, dessen Lösung sehr aufwändig sein kann. Zur Vereinfachung kann man folgende Verfahren zur Lösung von autonomen Differentialgleichungen $y'(t) = f(y(t))$ verwenden.

Gegeben sei $b \in \mathbb{R}^m$, $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit $A_{ij} = 0$ für $i \leq j$ und $B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit $B_{ij} = 0$ für $i < j$. Weiter sei J die Jacobi-Matrix von f, d.h. $J := \partial_y f$. Dann beschreiben die folgenden Gleichungen ein implizites Einschrittverfahren

$$k_i = J\left\{y_\ell + h\sum_{j=1}^{i}\left(B_{ij} - A_{ij}\right)k_j\right\} + f\left(y_\ell + h\sum_{j=1}^{i-1}A_{ij}k_j\right), \qquad i = 1,\dots,m \tag{5a}$$

$$y_{\ell+1} := y_\ell + h\sum_{j=1}^{m} b_j k_j. \tag{5b}$$

a) Zeigen Sie, dass für dieses Verfahren nur m lineare Gleichungssysteme (und keine nichtlinearen) gelöst werden müssen.
b) Mit welchem Gesamtaufwand sind diese linearen Gleichungssysteme lösbar, wenn $B_{ii} = \beta$ für alle $i = 1,\dots,m$?
c) Zeigen Sie, dass diese linearen Gleichungssysteme für alle $h > 0$ eindeutig lösbar sind, wenn $B_{ii} = \beta > 0$ für alle $i = 1,\dots,m$ und wenn J nur negative Eigenwerte besitzt.
d) Zeigen Sie, dass (5) für lineare Funktionen f ein implizites Runge-Kutta Verfahren beschreibt.