3.4.2 Satz. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

Entsprechend konvergiert eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\inf\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Also gilt $\forall n\in\mathbb{N}: x_n \leq x_{n+1}$ und $\exists C > 0 : \forall n\in\mathbb{N} : d(x_0, x_n) \leq C$, nach Definition 3.4.1 bzw. 3.2.11. Somit existiert $x := \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. $= x_0 + C$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. OK. Sei $\epsilon > 0$. Von mir aus... Wegen $x - \epsilon < x$ kann $x - \epsilon$ keine obere Schranke der Menge $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ sein. x ist ja die „kleinste obere Schranke", also kann es keine kleineren geben. Es gibt also ein $N\in\mathbb{N}$ mit $x_N > x - \epsilon$. Zum Beispiel $x_N = x$. Wegen der Monotonie folgt auch $x_n > x - \epsilon$ für alle $n \geq N$. $x_N \leq x_{N+1} \leq \cdots \leq x$. Da stets $x \geq x_n$ gilt, erhält man für $n \geq N$

$$0 \leq x - x_n < \epsilon,$$

und damit $|x_n - x| < \epsilon$. $x \geq x_n$, weil x eine obere Schranke ist. $x_n > x - \epsilon$ von oben wird umgeformt und die erste Ungleichheit folgt aus Definition 2.2.1, also „ $x < y$, wenn $y - x \in P$; ". Redundante Betragsstriche sorgen für Symmetrie. Vergleiche noch mit (3.3), also $\forall \epsilon\in\mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N} : d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Für monoton fallende Folgen schließt man auf analoge Art und

Weise. Man schreibt dann „$+$“ statt „$-$“ und „$>$“ statt „$<$“, sowie „$\leq$“ statt „$\geq$“, und $0 \leq x_n - x < \epsilon$ führt zu $d(x_n, x) = |x_n - x| < \epsilon$. $\square$