2.3 Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Man zeige $(x, y, z \in K)$:

$$0 < x \leq y \Rightarrow \left(\frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{y}{x} \wedge x^{-1} \geq y^{-1}\right)$$

Außerdem beweise man $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$, wobei $2 := 1_K + 1_K$, $3 := 1_K + 1_K + 1_K$, $4 := 1_K + 1_K + 1_K + 1_K$.

Wir zerstückeln den Beweis der oberen Aussage in 2 Teile:

Beweis: $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{y}{x}$ ist wahr, weil
$x \leq y \Rightarrow 1 = xx^{-1} \leq yx^{-1} \wedge xy^{-1} \leq yy^{-1} = 1$.
Also folgt $xy^{-1} \leq 1 \leq yx^{-1}$ und $x/y \leq 1 \leq y/x$
$0 < x \leq y \Rightarrow x^{-1} \geq y^{-1}$ ist wahr, weil
$x \leq y \Rightarrow xx^{-1}y^{-1} \leq yx^{-1}y^{-1} \Rightarrow y^{-1} \leq x^{-1}$ $\square$

Beweis: Um $-2/3 > -3/4$ zu zeigen, gehe man wie folgt vor:
$-(2 \cdot 3^{-1}) < -(3 \cdot 4^{-1}) \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{-1} > 3 \cdot 4^{-1}$ (um $a < b \Rightarrow -a > -b$ zu zeigen, lässt sich analog zum ersten Beweis argumentieren) $\Leftrightarrow$
$2 \cdot 4 < 3 \cdot 3 \Leftrightarrow (1+1)\cdot(1+1+1+1) < (1+1+1)\cdot(1+1+1)$
$\Leftrightarrow (1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1) < (1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)$
$\Leftrightarrow 0 < 1$ $\square$

2.5 Sei $\langle K, +, \cdot \rangle$ ein Körper, und seien $p, q \in K$. Man betrachte die Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ von K nach K.

Man zeige, dass wenn x_1 eine Nullstelle ist, dann auch $x_2 := -p - x_1$ eine Nullstelle ist, dass dann $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, und dass es keine weiteren Nullstellen von f gibt. Also hat f höchstens zwei Nullstellen. Dabei heißt x_0 eine Nullstelle von f, wenn $f(x_0) = 0$.

Hinweis: Ist x_1 eine feste Nullstelle und $x \in K$, so gilt $f(x) = f(x) - f(x_1)$. Man berechne die rechte Seite unter zu Hilfenahme von $x^2 - x_1^2 = (x - x_1)(x + x_1)$.

Beweis: $f(x_2) = (-p - x_1)^2 + p(-p - x_1) + q =$
$p^2 + 2px_1 + x^2 - p^2 - px_1 + q = x_1^2 + px_1 + q = f(x_1) = 0$

Um den nächsten Schritt zu zeigen, nützen wir den Hinweis 2 mal:

$(x - x_1)(x - x_2) \overset{1}{=} (x^2 + px + q) - (x_1^2 + px_1 + q) =$
$(x^2 - x_1^2) + p(x - x_1) + (q - q) \overset{2}{=}$
$(x - x_1)(x + x_1) + p(x - x_1) \Leftrightarrow$

1. Fall: $(x - x_1) \neq 0$: $(x - x_2) = (x + x_1) + p \Leftrightarrow$
$-x_2 = x_1 + p \Leftrightarrow x_2 = -x_1 - p$

2. Fall: $(x - x_1) = 0$: $\underbrace{(x - x_1)}_{0}(x + x_1) + p\underbrace{(x - x_1)}_{0} =$
$\underbrace{(x - x_1)}_{0}(x + x_2)$

Der letzte Schritt folgt daraus, dass $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ nur 0 sein kann, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist.

$\Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2 \; \big(\Leftrightarrow (x - x_1) = 0 \vee (x - x_2) = 0\big)$ $\square$

2.7 Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper. Um die Lösungsmenge einer Ungleichung z.B. der Form

$$|2 - x| \geq 4,$$

zu erhalten ($2 := 1_K + 1_K$, $4 := 2 + 2$) geht man folgendermaßen vor: Betrachte zuerst den Fall $x < 2$. Dann schreibt sich unsere Ungleichung als $2 - x \geq 4$, was zu $x \leq -2$ äquivalent ist. Also ist unsere Lösungsmenge in diesem Fall $\{x \in K : x < 2\} \cap \{x \in K : x \leq -2\} = \{x \in K : x \leq -2\}$.

Ist $x \geq 2$, so schreibt sich unsere Ungleichung als $x - 2 \geq 4$, und somit $x \geq 6 := 4 + 2$. Unsere Lösungsmenge ist in diesem Fall $\{x \in K : x \geq 2\} \cap \{x \in K : x \geq 6\} = \{x \in K : x \geq 6\}$.

Die Lösungsmenge insgesamt ist somit $\{x \in K : x \leq -2\} \cup \{x \in K : x \geq 6\} = (-\infty, -2] \cup [6, +\infty)$.

Man bestimme auf analoge Weise die Menge aller $x \in K$, $x \neq 1$, sodass

$$\frac{4x}{|1-x|} \leq 2.$$

Die Lösungsmenge ist $\{x \in K : x \leq 1/3\}$.

Beweis: 1. Fall: $x > 1$: Dann wäre $(1-x)$ negativ, also schreiben wir $4x/(x-1) \leq 2 \Leftrightarrow 4x \leq 2x - 2 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1$, was zu einem Widerspruch führt.

2. Fall: $x < 1$: Dann wäre $(1-x)$ positiv, also schreiben wir

$2 \geq 4x/(1-x) \Leftrightarrow 4x \leq 2-2x \Leftrightarrow 6x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1/3$. $\square$

2.9 Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Man zeige: Die Abbildung $\phi : x \mapsto \frac{x}{1_K + |x|}$ ist eine bijektive Abbildung von K auf $(-1_K, 1_K) = \{x \in K : -1_K < x < 1_K\}$. Man gebe auch die Inverse $\phi^{-1} : (-1_K, 1_K) \to K$ von ϕ an.

Weiters zeige man, dass ϕ streng monoton steigend ist: $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$.

Beweis: Die Bijektivität wird in 2 Schritten gezeigt.

Injektivität: Wir zeigen $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, also
$x_1/(1+|x_1|) = x_2/(1+|x_2|) \Rightarrow x_1 = x_2$.

1\. Fall: $x_1 > 0 \land x_2 < 0$: $x_1/(1+x_1) = x_2/(1-x_2) \Leftrightarrow$
$x_1 - x_1x_2 = x_2 + x_2x_1 \Leftrightarrow x_1 - 2x_1x_2 = x_2$

Nachdem $-2x_1x_2 > 0$, kommen wir zu einem Widerspruch.

$x_1 < 0 \land x_2 > 0$ folgt analog.

2\. Fall: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$: $0/(1+0) = x_2/(1+|x_2|) \Leftrightarrow$
$0 = x_2$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ folgt analog.

3\. Fall: $x_1 > 0 \land x_2 > 0$: $x_1/(1+x_1) = x_2/(1+x_2) \Leftrightarrow$
$x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_2x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

4\. Fall: $x_1 < 0 \land x_2 < 0$: $x_1/(1-x_1) = x_2/(1-x_2) \Leftrightarrow$
$x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_2x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: Setze $y = x/(1+|x|)$ und zeige, dass es für alle y einen Wert x gibt:

$\Leftrightarrow y(1+|x|) = x$

1\. Fall: $x > 0$: $\Leftrightarrow y + xy = x \Leftrightarrow y = x - xy \Leftrightarrow y = x(1-y)$
$\Leftrightarrow y/(1-y) = x$

2. Fall: $x < 0$: $\Leftrightarrow y - xy = x \Leftrightarrow y = x + xy \Leftrightarrow y = x(1+y)$
$\Leftrightarrow y/(1+y) = x$

Des Weiteren, schreibe für $\phi^{-1} : (-1,1) \to K : y \mapsto y/(1-y)$, wenn $y > 0$ und $y \mapsto y/(1+y)$, wenn $y < 0$, also
$\phi^{-1} : (-1,1) \to K : y \mapsto y/(1-|y|)$.

Für die Monotonie zeigen wir $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$, aber
$x/(1+|x|) < y/(1+|y|) \Leftrightarrow x + x|y| < y + |x|y \Leftrightarrow$
$|x|y \geq x|y|$. Dazu eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $0 < x < y$: trivial
2. Fall: $x < y < 0$: trivial
3. Fall: $0 = x < y$: trivial
4. Fall: $x < y = 0$: triviaaaaal :)
5. Fall: $x < 0 < y$: —"— $\square$

Anhang: Um zu zeigen, dass ϕ eine Wertemenge $(-1,1)$ besitzt, braucht man nur $\frac{x}{1+|x|} \to x < 1 + |x|$ zu erkennen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Fall: Wenn } x > 0: & x < 1 + x \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < 1 \\ \text{2. Fall: Wenn } x < 0: & x < 1 - x \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} < 1 \end{array}\right\} \frac{x}{1+|x|} < 1$$

Insbesondere ist aber noch $-x < 1 + |x|$, also:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Fall: Wenn } x > 0: & -x < 1 + x \Leftrightarrow \frac{-(x)}{-(1+x)} > -1 \\ \text{2. Fall: Wenn } x < 0: & -x < 1 - x \Leftrightarrow \frac{-(x)}{-(1-x)} > -1 \end{array}\right\} \frac{x}{1+|x|} > -1$$

2.10 Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Man bestimme Minimum, Maximum, Infimum und Supremum (falls existent) der Menge

$$\left(-1_K, \frac{1_K}{2\cdot 1_K}\right] \cup \left\{1_K + \frac{1_K}{n\cdot 1_K} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2\cdot 1_K, 3\cdot 1_K].$$

Begründen Sie ihre Antwort in mathematisch stichhaltiger Art und Weise!

$-1 = \inf M \neq \min M$; $3 = \sup M = \max M$;

Dabei ist M die oben angeschriebene Menge.

Beweis: M lässt sich wie folgt umschreiben:

$M = (-1, 1/2] \cup (1, 2] \cup (2, 3]$, weil

$\bar{M} := \{1_K + 1_K/n \cdot 1_K : n \in \mathbb{N}\}$; Wir induzieren:

Wenn $n = 1_K$, dann $2 \in \bar{M}$;

Wenn wir aber $n > 1_K$ nehmen, dann ist $1_K/n < 1_K$; dabei ist $1_K/n$ immer positiv.

Daher $\bar{M} = (1, 2]$.

Weiters folgt $M = \underbrace{(-1, 3]}_{A} \setminus \underbrace{(1/2, 1]}_{B}$

Es genügt, A zu betrachten, weil $\forall b \in B : -1 < b < 3$. $\square$

2.11: Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Man bestimme Minimum, Maximum, Infimum und Supremum (falls existent) der Menge

$$\bigcup_{0<x<y<1_K} \left\{ t \in K : \frac{1_K}{y} < t < \frac{1_K}{x} \right\}.$$

Begründen Sie ihre Antwort in mathematisch stichhaltiger Art und Weise!

$\exists!$ inf, sup: $\inf = 1$, $\sup = \infty$; $\nexists \min \vee \sup$;

Beweis: Angenommen, $\forall a, b \in K: a > 0 \wedge b > 0$. Dann ist $a > b \Leftrightarrow a \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} > b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \Leftrightarrow b^{-1} > a^{-1}$ wahr.
Also lässt sich der Ausdruck $y^{-1} < t < x^{-1}$ als $x < t^{-1} < y$ schreiben. Weiters ist $0 < x < y < 1_K$, also $0 < t^{-1} < 1_K$, und (wie mit a und b) gilt $1_K = 1_K^{-1} < t$. Daher lässt sich die oben angeschriebene Menge auch als $(1_K, \infty)$ schreiben. $\square$

2.12 Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper. Sei $M \subseteq K$ so, dass $\inf M$ existiert, und $s \in K$.

Man zeige: Es gilt $s < \inf M$ genau dann, wenn es ein $t \in K$ gibt, sodass $s < t \leq m$ für alle $m \in M$. Weiters zeige man:
$s \leq \inf M \Leftrightarrow s \leq m, \forall m \in M$.

Beweis: Wir zeigen zuerst $s < \inf M \Rightarrow \exists t \in K: s < t \leq m, \forall m \in M$.
Wähle $t = \inf M \in K$, dann folgt aus der Definition von $\inf M$, dass $s < t \leq m$ gilt.
Für die umgekehrte Implikation betrachte man $t \leq m$ und $\inf M \leq m (\in M \subseteq K)$. Es gibt also zwei Fälle:
1. Fall: $t < \inf M$: Also $s < t < \inf M \Rightarrow s < \inf M$
2. Fall: $t = \inf M$: Weil $s < t = \inf M$, ist $s < \inf M$
Die letzten Implikationen können durch die Definition von $\inf M$, $\inf M \leq m, \forall m \in M$, gezeigt werden: $s \leq \inf M \leq m$ $\square$

2.13 Man zeige: Ist $M \subseteq K$, so existiert $\sup M$ genau dann, wenn $\inf(-M)$ existiert. In diesem Falle gilt $-\sup M = \inf(-M)$.

Beweis: Sei $k \in K$ eine obere Schranke von M. Dann ist $\forall k \in K$: $k \geq m, \forall m \in M \Leftrightarrow \forall -k \in K: -k \leq -m, \forall -m \in -M$. Dabei ist aber $-k$ eine untere Schranke von $-M$.

Gibt es also eine kleinste obere Schranke von M (das ist $\sup M$), dann ist $\forall k \in K: k \geq \sup M \Leftrightarrow \forall -k \in K: -k \leq -\sup M$. Das ist aber genau die Definition der größten unteren Schranke von $-M$, also $\forall -k \in K: -k \leq \inf(-M)$. $\square$

2.14 Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper.

Sei $M \subseteq K$ nach oben beschränkt, und bezeichne O die Menge aller oberen Schranken. Man zeige, dass $O \cap M = \emptyset$ oder $O \cap M = \{z\}$, und dass die zweite Möglichkeit genau dann eintritt, wenn M ein Maximum hat.

Beweis: In Schritt 1 machen wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $O \cap M = \emptyset$

2. Fall: $O \cap M \neq \emptyset$: Seien $z_1, z_2 \in O \cap M$ beliebig, aber fest.
$\forall m \in M: z_1 \geq m$, und $z_2 \in M \Rightarrow z_1 \geq z_2$. Analog folgt $z_1 \leq z_2$, also $z_1 = z_2$.

Bei Schritt 2 erinnern wir uns, dass $\max M$ eine obere Schranke, also $\max M \in O$, ist und $\max M \in M$ per Definition. $\square$

2.22 Zeige mittels vollständiger Induktion: Für beliebige a, b aus einem Körper und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a) \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j}.$$

Leite daraus für $x \neq 1$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

her.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Äquivalenz für $n = 0$:

$$b^{0+1} - a^{0+1} = (b-a) \sum_{j=0}^{0} a^j b^{0-j} \Leftrightarrow$$
$$b^1 - a^1 = (b-a)\, a^0 \cdot b^{0-0}$$

Und nun $A(n) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(n+1)$:

$$b^{n+1+1} - a^{n+1+1} = (b-a) \sum_{j=0}^{n+1} a^j b^{n+1-j} \Leftrightarrow$$

$$b^{n+2} - a^{n+2} = (b-a)\left(\sum_{j=0}^{n} a^j b\, b^{n-j} + a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \right)$$

$$b^{n+2} - a^{n+2} = (b-a)\left(\left(\sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j} \right) b + a^{n+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$b^{n+2} - a^{n+2} = \left((b-a)\left(\sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j} \right) b + \left(a^{n+1} b - a^{n+2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(b^{n+2} - a^{n+2} + a^{n+2} - a^{n+1} b \right) \cdot b^{-1} = (b-a) \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j} \Leftrightarrow$$

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a) \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j}$$

Setzt man in die obere Formel $b = 1$ und $a = x$ ein, dann:

$$1^{n+1} - x^{n+1} = (1-x) \sum_{j=0}^{n} x^j 1^{n-j}$$

Schreibe dabei k anstatt j. $\square$