Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Michael Neunteufel

Numerik partieller Differentialgleichungen: stationäre Probleme - Übung 4

Übungstermin: 25.11.2020 19. November 2020

Aufgabe 16:
Sei $\hat{T}$ das Referenzdreieck mit den Eckpunkten $V_1 := (0,0)$, $V_2 := (1,0)$ und $V_3 := (0,1)$ und den Randkanten $E_1 := \overline{V_1V_2}$, $E_2 := \overline{V_2V_3}$ und $E_3 := \overline{V_3V_1}$. Für $p \in \mathbb{N}$ definieren wir die Punkte

$$z_{jk} = \left(\frac{j}{p}, \frac{k}{p}\right) \in \hat{T}, \qquad j = 0, \dots, p-k, \quad k = 0, \dots, p, \tag{1}$$

die dazugehörigen Lagrange Basisfunktionen $L_{jk} \in P_p$ mit $L_{jk}(z_{j'k'}) = \delta_{jj'}\delta_{kk'}$ und für Funktionen $u \in C(\hat{T})$ den Interpolationsoperator $\hat{I}_p$ durch

$$\hat{I}_p u := \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-k} u(z_{jk}) L_{jk}. \tag{2}$$

a) Skizzieren Sie für $p = 1, \dots, 4$ die Punkte z_{jk} und beweisen Sie, dass $\hat{I}_p u|_{V_j}$ und $\hat{I}_p u|_{E_j}$ für $j = 1, 2, 3$ und beliebige $p \in \mathbb{N}$ nur von den Werten $u(V_j)$ bzw. $u|_{E_j}$ abhängt.
b) Konstruieren Sie aus $\hat{I}_p$ einen stetigen Interpolationsoperator $I_{h,p} : H^2(\Omega) \to \mathbb{S}_0^p(\mathcal{T}) := \{v_h \in C(\Omega) : \forall T \in \mathcal{T} \quad v_h|_T \in P_p\}$. Verwenden Sie dazu die Transformationen aus Lemma 3.9 des Vorlesungsskriptes.
c) Formulieren und beweisen Sie Theorem 3.5 des Vorlesungsskriptes für $I_{h,p}$.

Aufgabe 17:
Sei $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung des beschränkten Lipschitz-Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $h \in L^\infty(\Omega)$ definiert durch $h|_T = h_T$ für alle $T \in \mathcal{T}$.
a) Zu einer Funktion $v \in H^1(\Omega)$ definieren wir die Funktion $v_\mathcal{T} \in \mathbb{S}_{-1}^0(\mathcal{T}) := \{v_h \in L^2(\Omega) : \forall T \in \mathcal{T} \quad v_h|_T \in P_0\}$ durch $v_\mathcal{T}|_T := |T|^{-1} \int_T v \, dx$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass

$$\|v - v_\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|h \nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt. Die Konstante $C > 0$ hängt dabei weder von Ω noch von v oder $\mathcal{T}$ ab.
b) Zeigen Sie für $\|h\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$ und $p \in \mathbb{N}$

$$\left\|hD^2 v_h\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|v_h\|_{H^1(\Omega)}, \qquad v_h \in \mathbb{S}_0^p(\mathcal{T}). \tag{3}$$

Die Konstante $C > 0$ hängt dabei nur von $\sigma(\mathcal{T})$ ab.

Aufgabe 18:
Verallgemeinern Sie Theorem 3.5 auf die Triangulierung eines beschränkten Lipschitz-Gebietes $\Omega \in$

$\mathbb{R}^3$ mit Tetraedern. Beweisen Sie dazu die Abschätzungen (3.20) und (3.21) für ein nicht-entartetes Tetraeder T. Die Konstante $\sigma(T)$ wird dabei analog zu Aufgabe 11b definiert durch den Quotienten aus dem Durchmesser $h_T := \max\{|x-y| : x, y \in T\}$ von T und dem Radius ρ_T der größten Kugel, welche noch ganz in T liegt, d.h.

$$\rho_T := \sup\{\rho > 0 : \exists x \in T \quad B(x,\rho) \subset T\}. \tag{4}$$

Aufgabe 19:
Für ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definieren wir den Hilbertraum

$$H(\mathrm{curl}, \Omega) := \{\xi \in [L^2(\Omega)]^2 \mid \mathrm{curl}\, \xi \in L^2(\Omega)\}, \quad (\xi, \zeta)_{H(\mathrm{curl})} := (\xi, \zeta)_{L^2(\Omega)} + (\mathrm{curl}\, \xi, \mathrm{curl}\, \zeta)_{L^2(\Omega)},$$

mit $\mathrm{curl}\, \xi := \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$ für $\xi(x,y) = (\xi_1(x,y), \xi_2(x,y))^\top$. Weiter sei $X := H_0^1(\Omega) \times H(\mathrm{curl}, \Omega)$ ein Hilbert-Raum wie in Aufgabe 6.

Für ein $c \geq 0$ und $f \in L^2(\Omega)$ sei das folgende Variationsproblem gegeben: Finden Sie $(u, \xi) \in X$ sodass für alle $(v, \zeta) \in X$

$$\int_\Omega (\nabla u - \xi) \cdot (\nabla v - \zeta)\, dx + c \int_\Omega \xi \cdot \zeta \, dx + \int_\Omega \mathrm{curl}\, \xi \, \mathrm{curl}\, \zeta \, dx = \int_\Omega f\, v\, dx. \tag{5}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Lax–Milgram, dass für $c > 0$ das Problem eine eindeutige Lösung hat. Verwenden Sie dazu am besten die Young Ungleichung $-ab \geq -\frac{\varepsilon}{2} a^2 - \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.
b) Es sei nun $c = 0$. Zeigen Sie durch geschicktes Wählen von $(u, \xi) \in X$, dass das Problem nicht koerziv ist. *Hinweis*: Was gilt für $\mathrm{curl}\, \nabla u$?
c) Begründen Sie mit den Funktionen $\xi_\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^2$ definiert durch $\xi_\varepsilon(x,y) := \left(\sin(\frac{1}{\varepsilon} x), 0\right)^T$ mit $\epsilon > 0$, dass das Problem auf dem Produktraum $\hat{X} := H_0^1(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^2$ mit $c > 0$ nicht koerziv und damit nicht wohlgestellt ist.

Aufgabe 20:
a) Es sei $\Omega = (0,1)$, $t > 0$, $f \in L^2(\Omega)$, und $X := H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega)$ mit $H_D^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u(0) = 0\}$. Das Problem des Timoshenko Balkens lautet: Gesucht ist $(w, \beta) \in X$ sodass für alle $(v, \delta) \in X$

$$\int_\Omega \beta' \delta' \, dx + \frac{1}{t^2} \int_\Omega (w' - \beta)(v' - \delta)\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass das Problem eindeutig lösbar ist. Wie verhält sich die Konstante in Cea's Lemma wenn $t \to 0$? *Hinweis*: Verwenden Sie wie in Aufgabe 19 die Young Ungleichung für den gemischten Term sowie die Friedrich Ungleichung.
b) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $X := H_D^1(\Omega) \times [H_D^1(\Omega)]^2$. Betrachten Sie die Reissner–Mindlin Platte als zweidimensionale Erweiterung des Timoshenko Balkens beschrieben durch das Problem: Gesucht ist $(w, \beta) \in X$ sodass für alle $(v, \delta) \in X$

$$\int_\Omega \epsilon(\beta) : \epsilon(\delta)\, dx + \frac{1}{t^2} \int_\Omega (\nabla w - \beta) \cdot (\nabla v - \delta)\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx, \tag{7}$$

wobei $\epsilon(\beta) := 0.5(\nabla \beta + (\nabla \beta)^T)$ der symmetrische Gradient ist sowie $A : B := \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} B_{ij}$. Untersuchen Sie mit dem zur Verfügung gestellten Jupyter-File das Konvergenzverhalten für lineare Elemente bei verschiedenen Dickenparametern, $t \in \{1, 0.1, 0.01, 0.001\}$. Was beobachten Sie? Wie ändert sich das Verhalten für quadratische finite Elemente?