7.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2019

1. Gegeben sei die Funktion
$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0, \\ 1 + x^2 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 3x & \text{für } 1 \le x < 2, \\ 9 & \text{für } x \ge 2. \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
   (b) Bestimmen Sie $\mu_F(]0,2])$, $\mu_F(]0,2[)$, $\mu_F([0,2[)$, $\mu_F([0,2])$, $\mu_F(]-1.2,0.7[)$, $\mu_F(\mathbb{Q})$.

2. Spass mit Cantor: wir setzen die Cantorfunktion zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort indem wir für $x > 0$ $c(x) = 0$ und für $x > 1$ $c(x) = 1$ setzen. Als stetige und monotone Funktion ist c Verteilungsfunktion eines Lebesgue-Stieltjes Maßes μ_c. Zeigen Sie für die Cantormenge C
$$\mu_c(C) = 1.$$
   (wenn es für zwei Maße μ und ν — so wie für λ und μ_c eine Menge mit $\mu(A) = \nu(A^C) = 0$, wenn Sie also gewissermaßen “in getrennten Welten leben”, dann nennen wir sie singulär zueinander).

3. Zeigen Sie, dass $F(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist und bestimmen Sie $\mu_F(]0,1]\times]0,1])$ und $\mu_F(\{(x,x) : 0 < x \le 1\})$.

4. $F_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $F_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ seien zwei (mehrdimensionale) Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie, dass durch
$$F(x_1, \dots, x_{n+m}) = F_1(x_1, \dots, x_n) F_2(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$$
   eine $m + n$-dimensionale Verteilungsfunktion definiert wird.

5. Bekanntlich (aus der Vorlesung) ist
$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 [x_2 \ge 0]$$
   eine zweidimensionale Verteilungsfunktion. Bestimmen Sie das Maß des Einheitskreises
$$\mu_F(\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\})$$
   (eine Überdeckung durch ßchmaleRechtecke führt zu einem Riemann-Integral).

6. Zeigen Sie, dass durch
$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x_1 < 0 \text{ oder } x_2 < 0, \\ 1 & \text{wenn } 0 \le x_1 < 1 \text{ und } x_2 \ge 0, \\ 3 & \text{wenn } x_1 \ge 1 \text{ und } 0 \le x_2 < 1, \\ 6 & \text{wenn } x_1 \ge 1 \text{ und } x_2 \ge 1. \end{cases}$$
   eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist. Bestimmen Sie $\mu_F(\{(0,0)\})$, $\mu_F(\{(1,0)\})$ und $\mu_F(\{(1,1)\})$, und stellen Sie $\mu_F(A)$ möglichst einfach dar.

7. In einer Gameshow werden der Kandatin vom Spielleiter drei Türen gezeigt, hinter einer liegt ein toller Preis, hinter den anderen nichts. Die Kandidatin wählt eine Tür aus, aber bevor die Tür geöffnet wird, öffnet der Spielleiter eine Tür, hinter der der Preis nicht liegt, und gibt der Kandidatin die Möglichkeit, ihre Wahl zu ändern. Was ist besser: zu wechseln oder nicht zu wechseln?

   In dieser Formulierung ist die Geschichte natürlich unrealistisch. Der Spielleiter bietet ja nicht in jeder Runde diese Wahl an, und wenn er etwa nur dann dieses Angebot macht, wenn die Kandidatin die Tür mit dem Gewinn wählt, dann sieht die Sache ganz anders aus. So etwas fällt natürlich mit der Zeit auf, und daher muss etwas Gefinkelteres her:

   (a) Nehmen Sie an, dass der Spielleiter diese Wahl mit einer Wahrscheinlichkeit p anbietet, wenn die Kandidatin die Tür mit dem Preis gewählt hat, und mit Wahrscheinlichkeit q, wenn sie eine andere Tür gewählt hat. Zeigen Sie, dass die Kandidatin (die p und q kennt) in jedem Fall eine (bedingte) Wahrscheinlichkeit $\geq 1/2$ für einen Gewinn erreichen kann.

   (b) Umgekehrt soll die Kandidatin mit Wahrscheinlichkeit r wechseln und mit Wahrscheinlichkeit $1-r$ bei ihrer ursprünglichen Wahl bleiben. Zeigen Sie, dass der Spielleiter (der r kennt) in jedem Fall erreichen kann, dass die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns $\leq 1/2$ ist.

   (c) Das beste Ergebnis für beide ist also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $1/2$. Zeigen Sie, dass beide ihre Strategie (also die Wahl von p und q bzw. r) so gestalten können, dass unabhängig von der Strategie des/der anderen die Gewinwwahrscheinlichkeit $1/2$ beträgt.