LinAG2

(VR mit) Skalarprodukt, Sorten

V VR$/K$, $\omega \in \operatorname{Aut} K$, $\iota \in \omega\text{-}L(V^2; K)$, ω-symm., rad.-fr. $:\Leftrightarrow$
ι SP auf V, (V, ι) VR mit SP,
ι ω-symm. $:\Leftrightarrow$ ι ω-symm. Ses.-lin.-F., $\omega = \mathrm{id}_K$ $\Leftrightarrow:$ ι symm.
ι symplektisch $:\Leftrightarrow$ ι alt. Bilin.-F.
$\perp$ ... Orth. bzgl. ι

Körper	SP ι	VR mit SP (V, ι)	
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	symm. Bilin.-F.	pseudoeuklidisch	
$\mathbb{R}$	pos. def. symm. Bilin.-F.	euklidisch	Prähilbertraum
$\mathbb{C}$	pos. def. herm. Ses.-lin.-F.	unitär	

LinAG2

(An) Isotropie, Konsequenzen

(V, ι) VR mit SP $\Rightarrow$ ι rad.-fr. $:\Leftrightarrow$ $V^{\perp} = \{0\}$

$U \in \mathrm{Sub}(V)$, $a \in V$ $\Rightarrow$

U isotrop $:\Leftrightarrow$ $\{0\} \neq U \cap U^{\perp}$ (Rad. v. U)

a ... $:\Leftrightarrow$ $U = [a]$ $\quad$ $(\Rightarrow \iota|_{U^2} \neg$ SP$)$

$(0 \neg$ isotrop$)$ $(\Leftrightarrow a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a \in a^{\perp})$

U anisotrop $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in U: a \neg$ isotrop

$(V \ldots \Rightarrow \forall U \in \mathrm{Sub}(V): U$ anisotrop $\Rightarrow \iota|_{U^2}$ SP v $U)$

$(V$ sympl. $\Rightarrow \forall a \in V^{\times}: a$ isotrop$)$

LinAG2

Längenquadrat, normiertes Vekt.,
Länge(nfunktion)

(V, ι) VR/K mit SP, $a \in V$ $\Rightarrow$:

$a \bullet a$ Läng.-Quad. v. a,

a norm. $:\Leftrightarrow$ $a \bullet a = 1$,

(V, ι) eukl. od. unit. $\Rightarrow$:

$\|a\| := \sqrt{a \bullet a} \in \mathbb{R}_0^+$, Länge v. a

$\|\cdot\|$ Läng.-Fkt. v. (V, ι)

LiBRO

LinAG2

S: Ungleichung v. Cauchy - Schwarz

$(V, \cdot)$ eukl. od. unit. $\Rightarrow$

$\forall a, b \in V : |a \cdot b| \leq \|a\| \|b\|$, a, b l.a. $\Rightarrow$ „ = "

Bew.

ToDo

LinAG2

5: Längen-Fkt. ist Pseudo-Norm

$(V, \cdot)$ eukl. (unit.) $\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ Pseudo-Norm

Bew. (i) $a = \mathcal{O} \Leftrightarrow \|a\| = 0$

(ii) $\|xa\|^2 = xa \cdot xa = (\bar{x}x)(a \cdot a) = (|x| \, \|a\|)^2$

(iii) $\|a+b\|^2 = \cdots \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \underbrace{|a \cdot b|}_{\leq \|a\| \, \|b\|}$

$\leq (\|a\| + \|b\|)^2$

Cauchy-Schwarz

LiBRO

LinAG 2

(orientiertes) Winkelmaß

$(V, \cdot)$ eukl. $\Rightarrow \forall a, b \in V^{\times}: \left| \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} \right| \leq 1 \Rightarrow:$

Cauchy-Schwarz

$\sphericalangle(a,b) := \arccos \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} \Rightarrow 0 \leq \sphericalangle(a,b) \leq \pi$

$\dim V = 2,\ \Delta \in DF(V) \Rightarrow:$

$$\vec{\sphericalangle}(a,b) := \begin{cases} -\sphericalangle(a,b), & \Delta(a,b) < 0 \\ \sphericalangle(a,b), & \text{sonst} \end{cases}$$

LIBRO

LinAG2

Orthogonalbasis, Orthonormalbasis

S: „∃" v. ...

(V, ι) ω-symm. VR/K mit SP, $B \in \mathrm{Bas}(V) \Rightarrow$

B OB $:\Leftrightarrow \forall b \neq b' \in B : b \perp b'$

B ONB $:\Leftrightarrow B$ OB, $\forall b \in B : \|b\| = 1$

(V, ι) endl.-dim. ω-symm. $\neg$ sympl. VR mit SP od.

... $\mathbb{C}$-ps.-eukl. od. eukl. od. unit $\Rightarrow$

$\exists B \in \mathrm{Bas}(V) : B$ OB (ONB)

LIBRO Bew. $\Leftrightarrow \delta(B) \in \mathrm{Diag}_n(K)$ $(= E_n)$

LinAG 2

Orthogonalsystem, Orthonormalsystem

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ VR mit SP, $M \subseteq V \Rightarrow$:

M OS $:\Leftrightarrow \forall a \neq b \in M: a \not\perp a, a \perp b$

M ONS $:\Leftrightarrow M$ OS, $\forall a \in M: \|a\| = 1$

LiBRO

LinAG2

S: Eig. v. OS

$(a_i)_{i\in I}$ OS v. (V, b) $\Rightarrow$

(a) $(a_i)_{i\in I}$ l.u.

(b) $U := [a_i]_{i\in I}$ $\neg$ isotr.

Bew. (a) $\forall j\in I:\ a_j \notin a_j^{\perp} \supseteq [a_i]_{i\in I\setminus j}$

(b) $\forall u\in U\cap U^{\perp}\ \exists (u_i)_{i\in I}\in K^{(I)}:\ u = \sum_{i\in I} u_i a_i$

$\Rightarrow \forall j\in I:\ 0 = a_j\bullet u = u_j\cdot \underbrace{(a_j\bullet a_j)}_{\neq 0}$

$\Rightarrow U\cap U^{\perp} = \{\mathcal{O}\}$

LinAG2

S: Mehr Eig. v. OS

$(a_i)_{i \in I}$ OS v. (V, ι), $U := [a_i]_{i \in I}$ $\Rightarrow$

(a) $p : U \oplus U^\perp \to : x \mapsto \sum_{i \in I} \frac{a_i \cdot x}{a_i \cdot a_i} a_i$ orth. Proj. auf U, $\mathrm{id}_{U \oplus U^\perp} - p$ ... $U^\perp$

(b) $(x_i)_{i \in I}$ Fourier-Koeff. v. $x \in V$, bzgl. $(a_i)_{i \in I}$ $\Rightarrow$

$x \in U \oplus U^\perp \Leftrightarrow \forall^\infty i \in I : x_i = 0$

Bew. (a) $x \in U \oplus U^\perp \Rightarrow \exists! s \in U^\perp \, \exists! (u_i)_{i \in I} \in K^{\langle I \rangle} : x = s + \overbrace{\sum_{i \in I} u_i a_i}^{=: u}$

$\Rightarrow \sum_{i \in I} \underbrace{\frac{a_i \cdot u}{a_i \cdot a_i}}_{\text{Fourier-Koeff. } \forall^\infty = 0} a_i = \dots = u$, $a_i \cdot x = \dots = a_i \cdot u$ $\Big\}$ p wohldef.

$p(x) = \dots = u$, $(\mathrm{id}_{U \oplus U^\perp} - p)(x) = \dots = s$ $\Rightarrow$ ...

(b) „$\Rightarrow$" siehe (a)

„$\Leftarrow$" $x = \underbrace{\sum_{i \in I} \frac{a_i \cdot x}{a_i \cdot a_i} a_i}_{\in U} + \underbrace{\left(x - \sum_{i \in I} \frac{a_i \cdot x}{a_i \cdot a_i} a_i\right)}_{\in U^\perp \text{ d.h. } a_j \cdot \dots = 0}$

Lin AG2

S: Orthogonalisierungsverfahren v. E. Schmidt

S: Anwendung v. ...

(V, ι) anisot VR mit SP, $(b_i)_{i\in I} \in \mathrm{Bas}(V)$, $I := \{1, \dots, n\}$ od. $\mathbb{N}^{\times}$ $\Rightarrow$

$\exists (a_i)_{i\in I}$ OB(V): $\forall k \in I: U_k := [b_i]_{i=1}^{k} = [a_i]_{i=1}^{k}$

Bew. IA: $a_1 := b_1$ ¬ isotr.

IS: $(a_1, \dots, a_k, b_{k+1}) \in \mathrm{Bas}(U_{k+1})$

$$\text{erzetzen} \hookrightarrow a_{k+1} := \underbrace{\underbrace{b_{k+1}}_{\notin U_k^{\perp}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j \cdot b_{k+1}}{a_j \cdot a_j} a_j}_{\text{Orth.-Proj. auf } U_k}}_{\text{Orth.-Proj. auf } U_k^{\perp}} \neq \mathcal{O}$$

$\square$

(V, ι) aniso. VR mit SP, $\dim V \leq \aleph_0$ $\Rightarrow$

$\forall M$ OS $\in \mathcal{E}(V)$ $\exists M' \subseteq V: M \dot\cup M' \in$ OB(V).