Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Michael Neunteufel

Numerik partieller Differentialgleichungen: stationäre Probleme - Übung 1

Übungstermin: 14.10.2020 7. Oktober 2020

Aufgabe 1:
Sei H ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot;\cdot)_H$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, elliptische und symmetrische Bilinearform und $f \in H^*$ ein stetiges, lineares Funktional. Weiter sei

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v;v) - f(v), \qquad v \in H. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass $u \in H$ genau dann eine Lösung von $a(u;\cdot) = f$ in H ist, wenn es das Funktional J auf H minimiert.
b) Sei nun $H_0 \subset H$ ein linearer Teilraum, $g \in H$ und $H_g := \{v \in H : v - g \in H_0\}$. Zeigen Sie, dass $u \in H_g$ genau dann eine Lösung von $a(u;\cdot) = f$ in H_0 ist, wenn es das Funktional J auf H_g minimiert.

Aufgabe 2:
a) Beweisen Sie die Aussage in Kapitel 1, Exercise 6 des Vorlesungsskriptes.
b) Beweisen Sie die Aussage in Kapitel 1, Exercise 7 des Vorlesungsskriptes.

Aufgabe 3:
Sei H ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot;\cdot)_H$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, elliptische und symmetrische Bilinearform, $u \in H$ und $V \subset H$ ein abgeschlossener, nicht-trivialer linearer Unterraum. Zeigen Sie
a) Es existiert ein Minimierer $u_0 \in V$ von $a(u-\cdot;u-\cdot)$ auf V.
b) Für diesen Minimierer gilt $a(u-u_0,v) = 0$ für alle $v \in V$.
c) Dieser Minimierer ist eindeutig.
d) Die Abbildung $P : u \mapsto Pu := u_0$ ist ein Projektor auf V mit

$$\sup_{v \in H\setminus\{0\}} \frac{a(Pv;Pv)}{a(v;v)} = 1. \tag{2}$$

Hinweis zu a: Wählen Sie eine Minimierungsfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\inf_{v\in V} a(u-v;u-v)$ und zeigen Sie, dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist. Hilfreich kann dabei folgende Identität sein:

$$a(v_n-v_m;v_n-v_m) = 2a(v_n-u;v_n-u)+2a(v_m-u;v_m-u)-4a\left(\frac{1}{2}(v_n+v_m)-u;\frac{1}{2}(v_n+v_m)-u\right) \tag{3}$$

Aufgabe 4:
Gegeben sei eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ des Intervalls $[a,b]$ mit $N \geq 2$. Auf

dieser Zerlegung sei $\mathbb{S}_0^p := \{v \in C([a,b]) : \forall j = 0, \dots, N-1 : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \Pi_p\}$ der Spline-Raum aus stückweisen Polynomen vom Grad p.

Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert sodass für alle Funktionen $u \in C^{p+1}([a,b])$ gilt

$$\inf_{v \in \mathbb{S}_0^p} \left\| u' - v' \right\|_{L^2((a,b))} \leq C \left\| u^{(p+1)} \right\|_\infty \left(\max_{j=0,\dots,N-1} (x_{j+1} - x_j) \right)^p. \tag{4}$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Interpolationsfehlerdarstellung.

Aufgabe 5:

Programmieren Sie eine Gauss-Quadratur mit m Stützstellen in einem Intervall (a,b). Verwenden Sie dazu die Berechnung der Stützstellen und Gewichte über das Eigenwertproblem der Tridiganonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-2} & \\ & & \beta_{n-2} & 0 & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad \beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}}. \tag{5}$$

Für letzteres können sie einen fertigen Eigenwertlöser verwenden. Testen Sie ihr Programm an unterschiedlichen Funktionen. Bestimmen Sie dafür den Quadraturfehler numerisch und vergleichen Sie ihn mit theoretischen Fehlerschranken.