Kapitel 6

Existenz und Eindeutigkeit II

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in G$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, und betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(t_0) = x_0. \tag{6.1}$$

Wir wissen aus Teil I, dass (6.1) lokal eindeutig lösbar ist, und dass sich die Lösungen auf ein maximales Existenzintervall fortsetzen lassen, sofern f lokal Lipschitz in x ist. Auch sind uns aus Kapitel 2 bereits einige Kriterien für globale Existenz bekannt.

Ziel dieses Kapitels ist die Erweiterung solcher Resultate auf den Fall allgemeiner stetiger rechter Seiten f.

6.1 Der Existenzsatz von Peano

Bezüglich der lokalen Existenz von Lösungen des Anfangswertproblems (6.1) für allgemeine stetige rechte Seiten f gilt der

Satz 6.1.1 (Existenzsatz von Peano). *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Funktion $x \in C^1(J_\delta; \mathbb{R}^n)$ mit $J_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, sodass $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in J_\delta$ gilt, und $x = x(t)$ löst* (6.1) *im Intervall J_δ.*

Beweis. Seien $\delta_0 > 0$ und $r > 0$ so fixiert, dass $J_{\delta_0} \times \bar{B}_r(x_0) \subset G$ gilt, und setze $M := \max\{|f(t,x)| : (t,x) \in J_{\delta_0} \times \bar{B}_r(x_0)\}$. Zunächst approximieren wir f gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G durch eine Folge von C^1-Funktionen $f_k \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, die daher lokal Lipschitz in x sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|f_k(t,x)| \le M + 1$ für alle $(t,x) \in J_{\delta_0} \times \bar{B}_r(x_0)$ und $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf besitzen die Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = f_k(t,x), \quad t \in J_\delta, \; x(t_0) = x_0,$$

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme,*
Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_6, © Springer Basel AG 2010

jeweils eindeutige Lösungen $x_k \in C^1(J_\delta;\mathbb{R}^n)$ auf einem gemeinsamen Existenzintervall $J_\delta = [t_0-\delta, t_0+\delta]$, und die Werte der Lösungen bleiben in der Kugel $\bar{B}_r(x_0)$. Dabei sind $r>0$ wie oben und $\delta = \min\{\delta_0, r/(M+1)\}$. Die Folge $(x_k) \subset C^1(J_\delta;\mathbb{R}^n)$ ist daher gleichmäßig beschränkt, aber auch gleichgradig stetig, denn ihre Ableitungen $\dot{x}_k(t) = f_k(t, x_k(t))$ sind beschränkt durch $M+1$. Der Satz von Arzéla-Ascoli liefert daher eine auf J_δ gleichmäßig konvergente Teilfolge $x_{k_m} \to x$. Die x_k genügen den Integralgleichungen

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_k(s, x_k(s))\, ds, \quad t \in J_\delta,$$

also erhält man nach Grenzübergang

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in J_\delta.$$

Daher ist der Grenzwert der Folge (x_{k_m}) eine Lösung von (6.1) auf J_δ. □

6.2 Nichtfortsetzbare Lösungen

Für allgemeines stetiges f kann man die Fortsetzbarkeit von Lösungen bis zum Rand von G nicht direkt wie in Abschnitt 2.2 zeigen. Das Existenzintervall einer Lösung hängt aufgrund der Nichteindeutigkeit nicht nur von (t_0, x_0) ab, sondern auch von der Lösung selbst. Daher sind wir gezwungen, das *Zornsche Lemma* zu verwenden. Dazu betrachten wir die Menge $\mathcal{L}$ aller Lösungen von (6.1), die eine gegebene, auf einem Intervall $J_a \ni t_0$ definierte Lösung x_a fortsetzen. Genauer ist $\mathcal{L}$ durch

$$\mathcal{L} = \{(J,x) : x \in C^1(J;\mathbb{R}^n) \text{ löst } (6.1) \text{ auf } J \supset J_a \ni t_0,\, x|_{J_a} = x_a\}$$

definiert; J ist dabei ein Intervall, welches das gegebene Intervall J_a enthält. Auf dieser Menge führen wir eine Ordnungsrelation wie folgt ein:

$$(J_1, x_1) \le (J_2, x_2) \quad \Leftrightarrow \quad J_1 \subset J_2,\ x_2|_{J_1} = x_1.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also ist sie eine teilweise Ordnung auf $\mathcal{L}$. Ist nun $V \subset \mathcal{L}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{L}$, so ist das Supremum $\sup V := (J_*, x_*) \in \mathcal{L}$ durch $J_* = \bigcup_{v\in V} J_v$, und $x_* = x_v$ auf J_v, $v = (J_v, x_v) \in V$ gegeben. Das Zornsche Lemma besagt dann, dass es ein maximales Element in $\mathcal{L}$ gibt. Die maximalen Elemente von $\mathcal{L}$ sind also Paare (J_*, x_*) mit der Eigenschaft, dass x_* das Anfangswertproblem auf J_* löst, und dass es kein Element $(J,x) \in \mathcal{L}$ gibt, das echt größer als (J_*, x_*) ist. Also gibt es kein $(J,x) \in \mathcal{L}$ mit $J \supset J_*$, $J \neq J_*$, und $x_*|_J = x$. Solche Elemente (J_*, x_*) von $\mathcal{L}$ nennt man **nichtfortsetzbare** Lösungen von (6.1). Das Zornsche Lemma stellt somit die Existenz nichtfortsetzbarer Lösungen sicher, und jede Lösung ist Restriktion einer nichtfortsetzbaren Lösung.

Der Fortsetzungssatz charakterisiert das Existenzintervall nichtfortsetzbarer Lösungen.

Satz 6.2.1 (Fortsetzungssatz). *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. Dann existiert zu jeder auf einem Intervall J definierten Lösung $x(t)$ von* (6.1)*, eine nichtfortsetzbare Lösung x_m mit $x_m|_J = x$. x_m ist auf einem Intervall (t_-, t_+) definiert, dessen rechter Endpunkt t_+ durch die folgenden Alternativen charakterisiert ist.*

1. $t_+ = \infty$*: $x_m(t)$ ist eine globale Lösung nach rechts.*
2. $t_+ < \infty$ *und* $\liminf_{t \to t_+} \operatorname{dist}((t, x_m(t)), \partial G) = 0$.
3. $t_+ < \infty$ *und* $\liminf_{t \to t_+} \operatorname{dist}((t, x_m(t)), \partial G) > 0$, $\lim_{t \to t_+} |x_m(t)| = \infty$.

Entsprechendes gilt für den linken Endpunkt t_-.

Der Beweis kann genauso wie in Abschnitt 2.3 geführt werden, wenn man anstelle des Satzes von Picard–Lindelöf den Satz von Peano verwendet.

6.3 Stetige Abhängigkeit

Gegeben sei eine Lösung $x(t)$ von (6.1) auf ihrem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+). Es bezeichne $\operatorname{graph}_J(x) := \{(t, x(t)) : t \in J\} \subset G$, wobei $J = [a, b] \subset (t_-, t_+)$ ein kompaktes Teilintervall mit $t_0 \in (a, b)$ ist.

Definition 6.3.1. *Die gegebene Lösung $x(t)$ heißt* **stetig abhängig** *von (t_0, x_0, f), falls es zu jedem Intervall $J = [a, b] \subset (t_-, t_+)$, mit $t_0 \in (a, b)$, eine kompakte Umgebung $K \subset G$ von $\operatorname{graph}_J(x)$ gibt, sodass gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass jede Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{y} = g(t, y)$, $y(\tau_0) = y_0$, $(\tau_0, y_0) \in K$, für alle $t \in [a, b]$ existiert und der Ungleichung*

$$|x(t) - y(t)| \le \varepsilon, \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

genügt, sofern $g \in C(K, \mathbb{R}^n)$, und

$$|\tau_0 - t_0| \le \delta, \ |x_0 - y_0| \le \delta, \ \sup_{(s,z) \in K} |f(s, z) - g(s, z)| \le \delta$$

erfüllt ist.

Damit können wir das Hauptresultat dieses Abschnittes formulieren.

Satz 6.3.2. *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. Die nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ von*

$$\dot{x} = f(t, x), \ x(t_0) = x_0, \tag{6.2}$$

sei eindeutig bestimmt. Dann hängt $x(t)$ stetig von den Daten (t_0, x_0, f) ab.

Beweis. Sei $y(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y} = g(t,y)$, $y(\tau_0) = y_0$. Wie in Kapitel 2 schreiben wir die Anfangswertprobleme für $x(t)$ und $y(t)$ als äquivalente Integralgleichungen

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad y(t) = y_0 + \int_{\tau_0}^{t} g(s, y(s))\, ds.$$

Wähle $\alpha > 0$ und $\eta > 0$, sodass die Menge K definiert durch

$$K := \{(t,y) : t \in [a-\eta, b+\eta], |x(t) - y| \leq \alpha\}$$

die Inklusion $K \subset G$ erfüllt, wobei η so klein ist, dass außerdem $[a-\eta, b+\eta] \subset (t_-, t_+)$ gilt. Offensichtlich ist K kompakt. Sei $|t_0 - \tau_0| \leq \delta$, $|x_0 - y_0| \leq \delta$ sowie $|f(t,x) - g(t,x)| \leq \delta$ für alle $(t,x) \in K$, wobei $\delta \leq \delta_0 := \min\{1, \eta/2, \alpha/2\}$ ist. Dann ist $(\tau_0, y_0) \in K$, und mit $M := \sup\{|f(t,x)| : (t,x) \in K\}$ gilt $|g(t,x)| \leq M+1$ auf K.

Wir zeigen zunächst, dass jede Lösung von $\dot{y} = g(t,y)$, $y(\tau_0) = y_0$ auf $J = [a,b]$ existiert, mit $\mathrm{graph}_J(y) \subset K$, sofern $\delta > 0$ klein genug ist. Angenommen es gibt Folgen $\tau_{0k} \to t_0$, $y_{0k} \to x_0$, $g_k \to f$ gleichmäßig auf K, und Lösungen $y_k(t)$ von $\dot{y}_k = g_k(t, y_k)$, $y_k(\tau_{0k}) = y_{0k}$, auf Intervallen $J_k = [a_k, b_k] \subset J$, sodass $(t, y_k(t)) \in K$ für alle $t \in J_k$ gilt, und $|y_k(b_k) - x(b_k)| = \alpha$ oder $|y_k(a_k) - x(a_k)| = \alpha$ ist. O.B.d.A. nehmen wir den ersten Fall an. Sei $a_\infty = \limsup a_k$, $b_\infty = \liminf b_k$. Wir können durch Übergang zu einer Teilfolge z.B. $b_k \to b_\infty$ annehmen. Die Lösungen y_k existieren nach Abschnitt 6.1 mindestens auf den Intervallen $[\tau_{0k} - \delta_1, \tau_{0k} + \delta_1]$, wobei $\delta_1 > 0$ von k unabhängig ist, sofern k hinreichend groß ist. Daher gilt $a_\infty \leq t_0 - \delta_1 < t_0 + \delta_1 \leq b_\infty$. Sei $\rho \in (0, (b_\infty - a_\infty)/2)$ beliebig, aber fixiert. Für hinreichend große k gilt dann $J_\rho := [a_\infty + \rho, b_\infty - \rho] \subset J_k$. Die Funktionen y_k sind auf dem Intervall J_ρ beschränkt, und mit $|g_k| \leq M+1$ auch ihre Ableitungen, also sind sie gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzéla-Ascoli besitzen sie eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{k_m} \to y$. Grenzübergang in den Integralgleichungen für die y_{k_m} zeigt, dass $y(t)$ eine Lösung von (6.2) ist, also $y \equiv x$ auf J_ρ, da nach Voraussetzung x die einzige Lösung von (6.2) ist. Nun gilt mit $|\dot{x}|, |\dot{y}_{k_m}| \leq M+1$

$$\begin{aligned}\alpha &= |y_{k_m}(b_{k_m}) - x(b_{k_m})| \\ &\leq |y_{k_m}(b_{k_m}) - y_{k_m}(b_\infty - \rho)| + |y_{k_m}(b_\infty - \rho) - x(b_\infty - \rho)| \\ &\qquad\qquad + |x(b_\infty - \rho) - x(b_{k_m})| \leq 2(M+1)(b_{k_m} - b_\infty + \rho) + \varepsilon,\end{aligned}$$

sofern $m \geq m(\varepsilon)$ hinreichend groß ist. Wähle nun $\varepsilon < \alpha/3$, $\rho < \alpha/(6(M+1))$ und schließlich $m \geq m(\varepsilon)$ so groß, dass $|b_{k_m} - b_\infty| < \alpha/(6(M+1))$ gilt. Mit dieser Wahl erhält man einen Widerspruch, also war die Annahme falsch. Ist also $\delta \leq \delta_0$ hinreichend klein, so existiert jede Lösung $y(t)$ von $\dot{y} = g(t,y)$, $y(\tau_0) = y_0$ auf $J = [a,b]$ und erfüllt $\mathrm{graph}_J(y) \subset K$.

Sei jetzt $\tau_k \to t_0$, $y_{0k} \to x_0$, sowie $g_k \to f$ gleichmäßig auf K, und seien $y_k(t)$ Lösungen von $\dot{y} = g_k(t,y)$, $y(\tau_k) = y_{0k}$, auf $[a,b]$. Da sowohl die y_k als auch ihre

Ableitungen $\dot{y}_k = g_k(t, y_k)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig beschränkt sind, sind sie gleichgradig stetig, also gibt es nach dem Satz von Arzéla und Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{k_m} \to y$. Durch Grenzübergang in der Integralgleichung für y_{k_m} sieht man, dass y das Anfangswertproblem (6.2) löst, also $y = x$, da dies nach Voraussetzung die einzige Lösung von (6.2) ist. Daraus folgt nun unmittelbar die gleichmäßige Konvergenz der ganzen Folge gegen die Lösung x von (6.2). □

Die Formulierung der stetigen Abhängigkeit mittels Folgen lautet:

Korollar 6.3.3. *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in G$, $f, f_k : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, und es sei $x(t)$ die* eindeutige *Lösung von (6.2) auf dem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+). Es gelte*

$$t_k \to t_0,\ x_{0_k} \to x_0 \text{ und } f_k(t, x) \to f(t, x),$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G. Sei $[a, b] \subset (t_-, t_+)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_k), \quad x_k(t_k) = x_{0_k},\ t \in [a, b], \tag{6.3}$$

für hinreichend großes k mindestens eine Lösung auf $[a, b]$, und es gilt

$$x_k(t) \to x(t),$$

gleichmäßig auf $[a, b]$ für $k \to \infty$.

6.4 Differentialungleichungen

Wie wir in Teil I gesehen haben, sind Differentialungleichungen ein wichtiges Hilfsmittel und werden auch in diesem Teil häufig verwendet. Es ist daher wichtig, solche Ungleichungen möglichst allgemein zu formulieren.

Sei $\omega : [a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{\rho} = \omega(t, \rho), \quad t \in [a, b),\ \rho(a) = \rho_0. \tag{6.4}$$

Die **Maximallösung** ρ^* von (6.4) wird wie folgt definiert: Betrachte das Problem

$$\dot{\rho}_k = \omega(t, \rho_k) + \frac{1}{k}, \quad t \in [a, b),\ \rho_k(a) = \rho_0 + \frac{1}{k}. \tag{6.5}$$

Sei $\rho(t)$ eine Lösung von (6.4) und ρ_k eine von (6.5). Nach Lemma 2.4.2 folgt dann die Ungleichung $\rho(t) < \rho_k(t)$ für alle $t \in [a, b)$, für die beide Lösungen existieren. Ebenso erhält man $\rho_k(t) < \rho_l(t)$, sofern $k > l$ ist. Daher ist die Folge $(\rho_k(t))$ fallend in k, nach unten beschränkt durch $\rho(t)$, also konvergent gegen eine Funktion $\rho^*(t)$. Betrachtung der entsprechenden Integralgleichungen ergibt, dass $\rho^*(t)$ eine Lösung von (6.4) ist, und dass *jede* andere Lösung $\rho(t)$ von (6.4) die Relation $\rho(t) \leq \rho^*(t)$

erfüllt, solange beide Lösungen existieren. Dieses $\rho^*(t)$ heißt **Maximallösung** von (6.4) und ist unabhängig von der gewählten Folge $(1/k)$.

Wir benötigen ferner die **Dini-Ableitungen**, die wie folgt definiert sind:

$$D_+\rho(t) := \liminf_{h\to 0_+} \frac{\rho(t+h)-\rho(t)}{h}$$

heißt rechte untere Dini-Ableitung von $\rho(t)$. Man beachte, dass diese definiert ist, auch wenn $\rho(t)$ nicht differenzierbar ist, sofern man die Werte $\pm\infty$ zulässt. Ersetzt man in dieser Definition den $\liminf$ durch $\limsup$, so erhält man die rechte obere Dini-Ableitung $D^+\rho(t)$ von ρ. Entsprechend sind die linke obere Dini-Ableitung durch

$$D^-\rho(t) := \limsup_{h\to 0_+} \frac{\rho(t)-\rho(t-h)}{h},$$

und analog die linke untere Dini-Ableitung $D_-\rho(t)$ definiert.

Lemma 6.4.1. *Sei $\omega : [a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b)\to\mathbb{R}$ stetig und es gelte*

$$\begin{cases} D_+\varphi(t) \le \omega(t,\varphi(t)) \text{ für alle } t\in[a,b), \\ \varphi(a)\le\rho_0. \end{cases} \tag{6.6}$$

Sei $\rho^*(t)$ die Maximallösung von $\dot\rho = \omega(t,\rho),\ \rho(a)=\rho_0$. Dann gilt $\varphi(t)\le\rho^*(t)$ für alle $t\in[a,b)$ mit $\rho^*(t)<\infty$.

Beweis. Sei $\rho_k(t)$ eine Lösung von $\dot\rho = \omega(t,\rho)+1/k,\ \rho(a)=\rho_0+1/k$. Wir zeigen $\varphi(t)\le\rho_k(t)$ für alle $t\in[a,b)$, für die $\rho_k(t)$ endlich ist.

Angenommen, dieses wäre falsch. Dann gibt es ein $t_0\in(a,b)$ und ein $\delta>0$ mit $\varphi(t_0)=\rho_k(t_0)$ und $\varphi(t)>\rho_k(t)$ für $t_0<t<t_0+\delta$. Nun gilt für $0<h<\delta$

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} > \frac{\rho_k(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} = \frac{\rho_k(t_0+h)-\rho_k(t_0)}{h},$$

folglich

$$D_+\varphi(t_0)\ge\dot\rho_k(t_0)=\omega(t_0,\rho_k(t_0))+1/k>\omega(t_0,\rho_k(t_0))=\omega(t_0,\varphi(t_0)).$$

Andererseits ist aber nach Voraussetzung $D_+\varphi(t_0)\le\omega(t_0,\varphi(t_0))$, was einen Widerspruch bedeutet. Mit $k\to\infty$ konvergiert $\rho_k(t)$ punktweise gegen die Maximallösung $\rho^*(t)$, folglich gilt $\varphi(t)\le\rho^*(t)$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Resultate über Differentialungleichungen wie Lemma 6.4.1 lassen sich für den Nachweis globaler Existenz verwenden. Das nächste Korollar ist dafür ein Beispiel.

Korollar 6.4.2. *Seien $\omega : [t_0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f : [t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ stetig, und gelte*

$$|f(t,x)|\le\omega(t,|x|) \text{ für } t\in[t_0,\infty),\ x\in\mathbb{R}^n,$$

wobei $|\cdot|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ sei. Es bezeichne $\rho^*(t)$ die Maximallösung von

$$\dot\rho = \omega(t,\rho), \quad t \in [t_0,\infty),\ \rho(t_0) = |x_0|,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

und sie existiere auf dem ganzen Intervall $[t_0,\infty)$. Dann existiert jede nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ von (6.2) global nach rechts.

Beweis. Für $\varphi(t) = |x(t)|$ gilt auf dem rechtsseitigen Existenzintervall $J = [t_0, t_+)$ von x

$$\begin{aligned} D_+\varphi(t) &= \liminf_{h\to 0_+} \frac{1}{h}(|x(t+h)| - |x(t)|) \le |\dot x(t)| = |f(t,x(t))| \\ &\le \omega(t,|x(t)|) = \omega(t,\varphi(t)). \end{aligned}$$

Folglich impliziert Lemma 6.4.1 die Abschätzung $|x(t)| = \varphi(t) \le \rho^*(t) < \infty$. Der Fortsetzungssatz ergibt die Behauptung. □

Die Aussage in Korollar 6.4.2 gilt auch nach links, wie man mittels Zeitumkehr zeigt.

Allerdings sind Normabschätzungen in Anwendungen meist zu stark. Um einseitige Bedingungen zu erhalten, sei $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $|x^*|_* := \max\{(x|x^*) : |x| \le 1\}$ die dazu duale Norm. In Abschnitt 7.3 zeigen wir, dass zu jedem $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| = 1$ ein $y^* \in \mathbb{R}^n$ existiert, mit $(x|y^*) \le 1$ für alle $x \in \bar B_1(0)$ und $(y|y^*) = |y| = 1$. Daraus folgt

$$|y^*|_* = \max_{|x|\le 1} (x|y^*) \le 1 = (y|y^*) \le |y^*|_*,$$

also $|y^*|_* = 1$. Damit ist die folgende Definition sinnvoll:

$$[x,y] := \min\{(x|y^*) : (y|y^*) = |y|, |y^*|_* = 1\}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Die Klammer lässt sich für konkrete Normen wie die l_p-Normen $|\cdot|_p$ leicht angeben. So ist für die euklidische Norm $|\cdot|_* = |\cdot|_2$ und $[x,y]_2 = (x|y)/|y|_2$, sofern $y \ne 0$, und $[x,0]_2 = -|x|_2$. Später verwenden wir die Klammer für die Norm $|\cdot|_1$. Hierfür ergibt sich

$$|\cdot|_* = |\cdot|_\infty \quad \text{und} \quad [x,y]_1 = \sum_{y_k\ne 0} x_k \operatorname{sgn} y_k - \sum_{y_k = 0} |x_k|.$$

Ist nun $x(t)$ differenzierbar, so wähle ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $|x^*|_* = 1$ und $(x(t)|x^*) = |x(t)|$; damit erhalten wir

$$\begin{aligned} D^-|x(t)| &= \limsup_{h\to 0_+} \frac{1}{h}(|x(t)| - |x(t-h)|) = \limsup_{h\to 0_+} \frac{1}{h}((x(t)|x^*) - |x(t-h)||x^*|_*) \\ &\le \limsup_{h\to 0_+} \frac{1}{h}((x(t)|x^*) - (x(t-h)|x^*)) = (\dot x(t)|x^*), \end{aligned}$$

also nach Übergang zum Minimum die wichtige Relation

$$D^-|x(t)| \leq [\dot{x}(t), x(t)] = [f(t, x(t)), x(t)] \tag{6.7}$$

für Lösungen von (6.1). Dies erfordert nur einseitige Abschätzungen an f, verlangt aber die linksseitige Dini-Ableitung.

Korollar 6.4.3. *Seien $\omega : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, und gelte*

$$[f(t, x), x] \leq \omega(t, |x|) \text{ für } t \in [t_0, \infty),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $|\cdot|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ sei. Es bezeichne $\rho^*(t)$ die Maximallösung von

$$\dot{\rho} = \omega(t, \rho), \quad t \in [t_0, \infty),\ \rho(t_0) = |x_0|,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

und sie existiere auf dem ganzen Intervall $[t_0, \infty)$. Dann existiert jede nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ von (6.2) global nach rechts.

Es gilt $[x, y] \leq |x|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$; daher ist Korollar 6.4.2 ein Spezialfall von Korollar 6.4.3. Der Beweis verläuft genau wie der von Korollar 6.4.2; man verwendet dabei das folgende Lemma.

Lemma 6.4.4. *Sei $\omega : [a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte*

$$\begin{cases} D^-\varphi(t) \leq \omega(t, \varphi(t)) \text{ für alle } t \in (a, b), \\ \varphi(a) \leq \rho_0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Sei $\rho^*(t)$ die Maximallösung von $\dot{\rho} = \omega(t, \rho)$, $\rho(a) = \rho_0$. Dann gilt $\varphi(t) \leq \rho^*(t)$ für alle $t \in [a, b)$ mit $\rho^*(t) < \infty$.

Der Beweis dieses Lemmas ist ähnlich zu dem von Lemma 6.4.1; vgl. Übung 6.8.

6.5 Eindeutigkeit

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $(t_0, x_0) \in G$. Ist $f : G \to \mathbb{R}^n$ nur stetig, so müssen die Lösungen nicht eindeutig durch ihren Anfangswert bestimmt sein, wie wir schon in Kapitel 1 gesehen haben. Um zu Kriterien zu kommen, die Eindeutigkeit implizieren, verwenden wir nochmals Differentialungleichungen. Es seien x und $\bar{x}$ zwei Lösungen von (6.1) auf einem Intervall $[t_0, t_1]$. Wir setzen dann $\phi(t) = |x(t) - \bar{x}(t)|$, wobei $|\cdot|$ eine beliebige Norm sei, und erhalten mit (6.7)

$$\begin{aligned} D^-\phi(t) &\leq [\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t), x(t) - \bar{x}(t)] \\ &= [f(t, x(t)) - f(t, \bar{x}(t)), x(t) - \bar{x}(t)], \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Gilt nun eine einseitige Abschätzung der Form

$$[f(t, x) - f(t, \bar{x}), x - \bar{x}] \leq \omega(t, |x - \bar{x}|), \quad t \geq t_0,\ (t, x), (t, \bar{x}) \in G,$$

mit einer stetigen Funktion $\omega : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so folgt weiter

$$D^-\phi(t) \le \omega(t, \phi(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \phi(t_0) = 0.$$

Lemma 6.4.4 impliziert dann

$$|x(t) - \bar{x}(t)| = \phi(t) \le \rho^*(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

sofern die Maximallösung von $\dot{\rho} = \omega(t, \rho)$, $\rho(t_0) = 0$ auf $[t_0, t_1]$ existiert. Die Forderung $\rho^* \equiv 0$ impliziert dann $\phi(t) = 0$, d.h. $x(t) = \bar{x}(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$. Diese Argumente ergeben den folgenden Eindeutigkeitssatz für (6.2).

Satz 6.5.1. *Seien $f : G \to \mathbb{R}^n$ und $\omega : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sei $|\cdot|$ eine beliebig fixierte Norm auf $\mathbb{R}^n$, und gelte*

$$[f(t, x) - f(t, \bar{x}), x - \bar{x}] \le \omega(t, |x - \bar{x}|), \quad t \ge t_0, \ (t, x), (t, \bar{x}) \in G.$$

Es sei ferner $\rho^* \equiv 0$ die Maximallösung von

$$\dot{\rho} = \omega(t, \rho), \quad t \ge t_0, \quad \rho(t_0) = 0.$$

Dann ist die Lösung von (6.2) *eindeutig bestimmt.*

Man beachte, dass für ω in diesem Satz notwendigerweise $\omega(t, 0) = 0$ gelten muss. Das wichtigste Beispiel für ein solches ω ist die Funktion $\omega(t, \rho) = L\rho$; dies bedeutet eine einseitige Lipschitz-Bedingung an f. Aufgrund von $[x, y] \le |x|$ sind Bedingungen der Form

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \le \omega(t, |x - \bar{x}|), \quad (t, x), (t, \bar{x}) \in G,$$

stärker als die im Satz geforderte einseitige Bedingung. Andererseits ergeben letztere nur Eindeutigkeit nach rechts, die Normabschätzung aber auch Eindeutigkeit nach links.

Zusammenfassend beinhaltet Satz 6.5.1 eine wesentliche Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes aus Kapitel 2, der auf der Lipschitz-Bedingung beruht. Dies soll jetzt durch zwei Anwendungen belegt werden.

6.6 Anwendungen

(a) Chemische Kinetik. Wir betrachten eine irreversible Reaktion $A + B \to P$ in einem ideal durchmischten Rührkessel mit Zu- und Abstrom. Es bezeichnen x_1 bzw. x_2 die Konzentration von A bzw. B im Reaktor, die Reaktionsrate sei durch eine Funktion $r : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ gegeben, die stetig und in beiden Variablen wachsend sei und $r(0, x_2) = r(x_1, 0) = 0$ erfülle, wie z.B. $r(x_1, x_2) = kx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, mit Konstanten $k, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. In der Chemie ist r häufig eine Bruttokinetik; dabei können auch Exponenten $\alpha_k < 1$ auftreten. Daher ist r zwar stetig, aber im allgemeinen nicht lokal Lipschitz. Zu- und Abstrom werden durch Terme der Form $a_i - x_i$ modelliert ($a_i > 0$), und die Gleichung für das Produkt x_3 kann weggelassen werden, da r hier nicht von x_3 abhängt. Das führt auf das folgende Anfangswertproblem für $x = (x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 - x_1 - r(x_1, x_2), \quad x_1(0) = x_{01} > 0, \\ \dot{x}_2 &= a_2 - x_2 - r(x_1, x_2), \quad x_2(0) = x_{02} > 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Da nur positive Lösungen interessant sind, wählen wir hier $G = (0, \infty)^2$. Existenz ist mit Hilfe des Satzes von Peano klar, da r, also auch die rechte Seite von (6.9) stetig ist. Wir interessieren uns vornehmlich für Eindeutigkeit, denn ist diese gewährleistet, so impliziert die Positivitätsbedingung (P) aus Kapitel 4 Positivität der Lösungen, und dann erhält man mit $r \geq 0$ auch globale Existenz, also einen Halbfluss auf G und auch auf $\mathbb{R}^2_+$. Sei die rechte Seite von (6.9) mit f bezeichnet. Dann haben wir bzgl. der l_1-Norm $|\cdot|_1$ nach Abschnitt 6.4

$$\begin{aligned} [f(x) - f(\bar{x}), x - \bar{x}]_1 = &\sum_{x_k \neq \bar{x}_k} (f_k(x) - f_k(\bar{x}))\,\mathrm{sgn}(x_k - \bar{x}_k) \\ &- \sum_{x_k = \bar{x}_k} |f_k(x) - f_k(\bar{x})| \\ \leq& -|x - \bar{x}|_1 - (r(x) - r(\bar{x})) \sum_{x_k \neq \bar{x}_k} \mathrm{sgn}(x_k - \bar{x}_k) \leq 0. \end{aligned}$$

Denn ist $x_1 > x_2$ und $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, so ist die verbleibende Summe gleich 2, und $r(x) \geq r(\bar{x})$ aufgrund der Monotonie von r; ebenso wird der Fall $x_1 < x_2$ und $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ behandelt. Gilt hingegen $(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) < 0$, so ist die Summe Null. Die Grenzfälle folgen entsprechend. In diesem Fall kann man also z.B. $\omega \equiv 0$ wählen, oder $\omega(t, \rho) = -\rho$. Jedenfalls ist die Voraussetzung des Eindeutigkeitssatzes 6.5.1 erfüllt und die Lösungen von (6.9) sind eindeutig bestimmt.

(b) Ein Modell zur Paarbildung. Wir betrachten eine zweigeschlechtliche Population, die aus weiblichen Singles s_f, männlichen Singles s_m und Paaren p besteht. Im diesem Modell können Singles verschiedenen Geschlechts Paare bilden, nur Paare produzieren Nachwuchs, jede der Arten wird irgendwann sterben, und Paare können sich trennen. Diese Modellannahmen führen auf das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Evolution von s_m, s_f und p in der Zeit:

$$\begin{aligned} \dot{s}_f &= -\mu_f s_f + (\beta_f + \tilde{\mu}_m + \sigma)p - \phi(s_f, s_m), \\ \dot{s}_m &= -\mu_m s_m + (\beta_m + \tilde{\mu}_f + \sigma)p - \phi(s_f, s_m), \\ \dot{p} &= -(\tilde{\mu}_f + \tilde{\mu}_m + \sigma)p + \phi(s_f, s_m). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Hierin bezeichnet die Konstante $\mu_j > 0$, $j \in \{f, m\}$, die Sterberate der unverheirateten Frauen ($j = f$) bzw. Männer ($j = m$), entsprechend $\tilde{\mu}_j > 0$, $j \in \{f, m\}$, die Sterberate der verheirateten Frauen bzw. Männer und β_j, $j \in \{f, m\}$, die Geburtenraten. $\sigma \geq 0$ steht für die Scheidungsrate, und ϕ ist die sogenannte *Paarbildungsfunktion*. Der Term $\phi(s_f, s_m)$ gibt an, wie viele Paare aus s_f weiblichen und s_m männlichen Singles pro Zeiteinheit gebildet werden. Demographische Beobachtungen legen nahe, dass ϕ die folgenden drei plausiblen Eigenschaften besitzen sollte:

(ϕ1) $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+;\ \ \phi(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ xy = 0$ für alle $x,\ y \geq 0$.

(ϕ2) ϕ ist stetig; $\phi(\cdot, y)$ und $\phi(x, \cdot)$ sind monoton wachsend für alle $x,\ y \geq 0$.

(ϕ3) ϕ ist positiv homogen , d.h. $\phi(\alpha x, \alpha y) = \alpha\phi(x, y)$ für alle $\alpha,\ x,\ y \geq 0$.

Typische Beispiele für Funktionen ϕ mit den Eigenschaften (ϕ1)–(ϕ3) sind die *Minimumfunktion*

$$\phi_1(x, y) = \kappa \min\{x, y\},$$

das harmonische Mittel

$$\phi_2(x, y) = \begin{cases} 2\kappa\, \frac{xy}{x+y} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und *das geometrische Mittel*

$$\phi_3(x, y) = \kappa\sqrt{xy},$$

wobei κ jeweils eine positive Konstante ist. Es gilt $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3$, und $\phi_i(x, y) = \kappa x$, $i = 1, 2, 3$, falls $x = y$. Insbesondere das geometrische Mittel ist zwar stetig aber nicht lokal Lipschitz, daher ist die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösungen von (6.10) von Bedeutung. Wir schränken uns auch hier auf den positiven Bereich $G = (0, \infty)^3$ ein, der allein modellmäßig interessant ist.

Dazu seien zwei Lösungen (s_f, s_m, p) und $(\bar{s}_f, \bar{s}_m, \bar{p})$ gegeben. Wir verwenden zunächst (6.7) für die ersten zwei Gleichungen des Systems, also für $s = (s_f, s_m)$ in der Norm $|\cdot|_1$, und erhalten wie in (a)

$$\begin{aligned} D^-|s(t) - \bar{s}(t)|_1 &\leq [\dot{s}(t) - \dot{\bar{s}}(t), s(t) - \bar{s}(t)] \\ &\leq -\mu_f|s_f(t) - \bar{s}_f(t)| - \mu_m|s_m(t) - \bar{s}_m(t)| \\ &\qquad\qquad\qquad + (\tilde{\beta}_f + \tilde{\beta}_m)|p(t) - \bar{p}(t)| \\ &\leq -\mu|s(t) - \bar{s}(t)|_1 + \tilde{\beta}|p(t) - \bar{p}(t)|, \end{aligned}$$

da die Paarbildungsfunktion ϕ in beiden Variablen wachsend ist. Hierbei bezeichnen $\mu = \min\{\mu_f, \mu_m\}$, $\tilde{\beta}_f = \beta_f + \tilde{\mu}_m + \sigma$, $\tilde{\beta}_m = \beta_m + \tilde{\mu}_f + \sigma$, und $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_f + \tilde{\beta}_m$. Durch Addition der Gleichungen für s_f und p erhält man ebenso

$$\begin{aligned} &D^-|s_f(t) + p(t) - (\bar{s}_f(t) + \bar{p}(t))| \\ &\qquad \leq -\mu_f|s_f(t) + p(t) - (\bar{s}_f(t) + \bar{p}(t))| + |\beta_f - \tilde{\mu}_f + \mu_f||p(t) - \bar{p}(t)|. \end{aligned}$$

Schließlich addiert man beide Ungleichungen und erhält mit

$$\psi(t) = |s_f(t) - \bar{s}_f(t)| + |s_m(t) - \bar{s}_m(t)| + |s_f(t) + p(t) - (\bar{s}_f(t) + \bar{p}(t))|$$

die Differentialungleichung

$$D^-\psi(t) \le L|p(t) - \bar{p}(t)| \le L\psi(t), \quad t \ge 0, \quad \psi(0) = 0,$$

mit einer Konstanten $L > 0$. Lemma 6.4.4 impliziert $\psi \equiv 0$, also Eindeutigkeit der Lösungen von (6.10).

Dieses Beispiel zeigt, dass man nicht immer mit Satz 6.5.1 direkt ans Ziel gelangt, aber häufig Lemma 6.4.4 dem entsprechenden Problem angepasst verwenden kann. Es sei bemerkt, dass in beiden Beispielen Normabschätzungen nicht ausreichen, um Eindeutigkeit ohne Zusatzannahmen zu erhalten, einseitige Abschätzungen sind hier essentiell.

Übungen

1. Sei $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig, $\omega(0) = 0$, und gelte $\int_{0_+}^1 \frac{ds}{\omega(s)} = \infty$; solche Funktionen werden gelegentlich *Osgood-Funktionen* genannt. Zeigen Sie, dass die Maximallösung von

$$\dot{\rho} = \omega(\rho), \quad t \ge 0, \quad \rho(0) = 0$$

identisch Null ist.

2. Wie verhalten sich Dini-Ableitungen bei Summen, Produkten und Quotienten stetiger Funktionen?

3. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein nichttriviales offenes Intervall und $\rho : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $t_0 \in J$, mit $\rho'(t_0) \ge 0$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz. Zeigen Sie

$$\mathrm{D}\, g(\rho(t_0)) = (\mathrm{D}\, g)(\rho(t_0))\rho'(t_0),$$

wobei D eine der vier Dini-Ableitungen bezeichnet.

4. Sei $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, man fixiere $x, y \in \mathbb{R}^n$ und setze $\varphi(t) = |y + tx|$. Dann ist

$$[x, y] = D^-\varphi(0) = D_-\varphi(0) = \lim_{t \to 0_+} \frac{|y| - |y - tx|}{t}.$$

5. Berechnen Sie die Klammer $[\cdot, \cdot]$ für die l_p-Normen auf $\mathbb{R}^n$, wobei $p \in [1, \infty]$.

6. Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, und sei $|x|_Q = \sqrt{(Qx|x)}$ die erzeugte Norm auf $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die entsprechende Klammer $[\cdot, \cdot]_Q$.

7. Seien $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ stetig und gelte $D_+\varphi(t) \le \psi(t)$ für alle $t \in [a, b]$, $\varphi(a) = \varphi_0$. Dann folgt

$$\varphi(t) \le \varphi_0 + \int_a^t \psi(\tau)d\tau, \quad t \in [a, b].$$

8. Beweisen Sie Lemma 6.4.4.