Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Michael Neunteufel

Numerik partieller Differentialgleichungen: stationäre Probleme - Übung 7

Übungstermin: 27.1.2021 — 19. Januar 2021

Aufgabe 31:
a) Beweisen Sie die Aussage aus Ex. 43 des Vorlesungsskriptes.
b) Beweisen Sie die Aussage aus Ex. 45 des Vorlesungsskriptes.

Aufgabe 32:
Beweisen Sie die Aussage aus Ex. 46 des Vorlesungsskriptes.

Aufgabe 33:
a) Beweisen Sie die Aussage aus Ex. 49 des Vorlesungsskriptes.
b) Beweisen Sie die Aussage aus Ex. 50 des Vorlesungsskriptes durch direktes Arbeiten mit der Matrix ohne Verwendung von Brezzi (oder darauf aufbauenden Resultaten).

Aufgabe 34:
a) Überprüfen Sie durch ein Dimensionsargument ob das Stokes Element mit nicht-konformen Crouzeix-Raviart und konstanten unstetigen Druck $[V_h^{\mathrm{CR}}]^2 \times P^0(\mathcal{T})$ stabil sein könnte.

Hinweis: Theorem 6.14 und $3\#\mathcal{K} - \#(\mathcal{K} \cap \partial\Omega) = 3 + \#E$ mit $\#E$ Anzahl der Kanten.

b) Der Operator $\Pi : H^1(\Omega) \to V_h^{\mathrm{CR}}$ in den Crouzeix-Raviart Raum sei definiert durch die Eigenschaft

$$\int_E \Pi(u)\,ds = \int_E u\,ds \qquad \text{für alle Kanten } E. \tag{1}$$

Damit hat der Operator die eindeutige Form

$$\Pi(u) = \sum_{i=1}^{N_E} \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} u\,ds\,\lambda_i, \tag{2}$$

wobei N_E die Anzahl der Kanten und λ_i die baryzentrischen Koordinaten an den Kantenmittelpunkten bezeichnen. Beweisen Sie, dass für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\|\Pi(v)\|_{V_h^{\mathrm{CR}}} \leq c\|v\|_{H^1}. \tag{3}$$

Hinweis: Abbildung auf das Referenzelement.

c) Zeigen Sie für alle $(u, q_h) \in [V_h^{\mathrm{CR}}]^2 \times P^0(\mathcal{T})$

$$b(\tilde{\Pi}(u), q_h) = b(u, q_h), \tag{4}$$

wobei $\tilde{\Pi}(u) := (\Pi(u_x), \Pi(u_y))^T$ der komponentenweise Operator und $b(u,q) := \int_\Omega \operatorname{div}(u)\,q\,dx$ ist.

d) Zeigen Sie, dass das Stokes Element $[V_h^{\mathrm{CR}}]^2 \times P^0(\mathcal{T})$ stabil ist.

Aufgabe 35:
a) Sei $(u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$ eine Lösung der schwachen Stokes Formulierung. Zeigen Sie, dass dann auch $(u, p + c)$ mit beliebigen $c \in \mathbb{R}$ eine schwache Lösung ist.
b) Sei nun $0 < |\Gamma_D| < |\partial\Omega|$ und $(u, p) \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$. Zeigen Sie dass jetzt $(u, p + c)$ für $c \neq 0$ im Allgemeinen keine weitere Lösung ist. Was ist der richtige Raum für den Druck p?
c) Lösen Sie mit den zur Verfügung gestellten jupyter-notebooks ein Stokes Problem. Testen Sie dazu

- das Crouzeix–Raviart-$P^0(\mathcal{T})$ Stokes element aus Aufgabe 34.
- das Taylor-Hood-type Element $[\mathcal{S}^2(\mathcal{T})]^2 \times P^0(\mathcal{T})$.

Welche Konvergenzraten erwarten Sie?

Bemerkung: Nicht-homogene Dirichletdaten werden z.B. in Unit 1.3 auf der NGSolve Dokumentation (ngsolve.org/docu/latest/) behandelt.