Maß 2, Übung 11

January 8, 2020

Aufgabe 1

Lemma 1. *Wenn* $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig und beschränkt sind,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig ist,* $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$ *sowie* P *Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *sind und* $f_n \to f$ *gleichmäßig und* $P_n \to P$ *schwach, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}P_n = \int f \mathrm{d}P.$$

Beweis. Wir schreiben ganz einfach mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \int f_n \mathrm{d}P_n - \int f \mathrm{d}P \right| \leq \left| \int (f_n - f) \mathrm{d}P_n \right| + \left| \int f \mathrm{d}P_n - \int f \mathrm{d}P \right|$$

Für hinreichend gorße $n \in \mathbb{N}$ wird der erste Summand wegen $f_n \to f$ gleichmäßig und der zweite Summand wegen $P_n \to P$ schwach klein. □

Aufgabe 2

Definition 1. *Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen* P_n *auf dem Messraum* $(\Omega, \mathfrak{S})$ *heißt stark konvergent gegen* P*, wenn für alle* $A \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \tag{1}$$

gilt.

Lemma 2. *Wenn* $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$ *sowie* P *Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum* $(\Omega, \mathfrak{S})$ *sind und* $P_n \to P$ *stark, dann gilt für jede beschränkte und messbare Funktion* $f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

$$\lim_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}P_n = \int f \mathrm{d}P.$$

Beweis. Wir wählen eine beliebige beschränkte und messbare Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und ein beliebiges $\epsilon > 0$. Zuerst spalten wir die Funktion in einen Positivteil und einen Negativteil auf.

$$\left| \int f \mathrm{d}P_n - \int f \mathrm{d}P \right| \leq \left| \int f^+ \mathrm{d}P_n - \int f^+ \mathrm{d}P \right| + \left| \int f^- \mathrm{d}P_n - \int f^- \mathrm{d}P \right|$$

Gemäß gibt es eine monoton steigende Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass $t_k \to f^+$ gleichmäßig, wobei $t_k = \sum_{i=1}^{l_k} x_i \mathbb{1}_{[t_k = x_i]}$ ist. Jetzt verwenden wir abermals die Dreiecksungleichung und erhalten

$$\begin{aligned} &\left| \int f^+ \mathrm{d}P_n - \int f^+ \mathrm{d}P \right| \\ &\leq \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P_n \right| + \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P \right| + \left| \int t_k \mathrm{d}P_n - \int t_k \mathrm{d}P \right| \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz $t_k \to f^+$ können wir ein $K \in \mathbb{N}$ finden so, dass für alle $k \geq K$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P_n \right| < \frac{\epsilon}{6} \wedge \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P \right| < \frac{\epsilon}{6}$$

Jetzt können wir $P_n \to P$ stark nützen, was es uns erlaubt ein $N^+ \in \mathbb{N}$ zu finden so, dass für alle $n \geq N^+$:

$$\begin{aligned} \left| \int t_k \mathrm{d}P_n - \int t_k \mathrm{d}P \right| &= \left| \sum_{i=1}^{l_k} x_i P_n(t_k = x_i) - \sum_{i=1}^{l_k} x_i P(t_k = x_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{l_k} x_i \left(P_n(t_k = x_i) - P(t_k = x_i)\right) \right| < \frac{\epsilon}{6} \end{aligned}$$

gilt. Da man das Integral des Negativteils analog abschätzen kann gilt also insgesamt, dass $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$:

$$\left| \int f \mathrm{d}P_n - \int f \mathrm{d}P \right| < \epsilon$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 3

Lemma 3. *Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$ ein sigmaendlicher Maßraum und und seien $P_n, n \in \mathbb{N}$ und P bezüglich μ absolutstetige Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit den Dichten f_n und f und gelte weiters $f_n \to f$ punktweise. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $P_n \to P$ *schwach*

(b) $P_n \to P$ *stark*

Beweis. Der Satz von Radon Nikodym garantiert die Existenz der Dichten und deren Nichtnegativität sowie die Tatsache, dass μ-fast überall $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ und f reellwertig sind.

Wir erhalten zuerst

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = \int f \mathrm{d}\mu = \|f\|_1.$$

Nach gilt demnach $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$. Nun können wir für ein beliebiges $A \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} |P_n(A) - P(A)| &= \left| \int_A f_n \mathrm{d}\mu - \int_A f \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_A (f_n - f) \mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \int_A |f_n - f| \mathrm{d}\mu \leq \int |f_n - f| \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Der letzte Term wird für hinreichend große n beliebig klein, weshalb $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$, also $P_n \to P$ stark und damit (b) folgt. Aus Aufgabe 2 wissen wir nun, dass unmittelbar auch $P_n \to P$ schwach, also (a) gilt. □

Aufgabe 4

Lemma 4. *Wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ ist dann konvergiert X_n in Verteilung genau dann, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$ der Grenzwert $p_k := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ existiert und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 1$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Hinrichtung, also "$\Rightarrow$". In einem ersten Schritt wollen wir zeigen, dass F auf ganz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig ist. Dafür wählen wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und ein $\epsilon > 0$ so, dass $U_\epsilon(x) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ gilt. Da die X_n nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, dass $F_n|_{U_\epsilon(x)}$ konstant ist. Aus der Charakterisierung der Stetigkeit durch die Levy-Metrik wissen wir, dass es für alle $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, das für alle $n \geq n_0 : F_n(x - \delta) - \delta \leq F(x) \leq F_n(x + \delta) + \delta$ gilt. Daraus erhält man unmittelbar $F_n(x) \to F(x)$ und da die $F_n|_{U_\epsilon(x)}$ konstant ist muss auch der Grenzwert für alle Punkte der gleiche sein, also $F|_{U_\epsilon(x)}$ konstant und damit F auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig. Die Werte von F in $\mathbb{Z}$ ergeben sich nun schon automatisch durch die Rechtsstetigkeit von F. Betrachte dazu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{k} P(X_n = j) - \sum_{j=-\infty}^{k-1} P(X_n = j) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(F_n(k) - F_n(k-1)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(F_n\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_n\left(k - \frac{1}{2}\right) \right) \\
&= F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F\left(k - \frac{1}{2}\right) \\
&= F(k) - F(k-1) = P(X = k) =: p_k
\end{aligned}$$

Da P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und X nach unseren obigen Überlegungen nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen kann gilt $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 1$

Um die andere Richtung zu beweisen definieren wir eine Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_k$$

Wir wählen zusätzlich $k_n \in \mathbb{Z}$, sodass: $\lim_{n\to\infty} F(k_n) = 0$.
Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |F_n(x) - F(x)| &= |\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{k_n} P(X_n = k) - p_k + \sum_{k=k_n+1}^{\lfloor x \rfloor} P(X_n = k) + p_k| \\
&= \sum_{k=k_n+1}^{\lfloor x \rfloor} \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) - p_k = \sum_{k=k_n+1}^{\lfloor x \rfloor} 0
\end{aligned}$$

Da weiters $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$ ist F eine Verteilungsfunktion im engeren Sinn und $F_n \to F$ in allen Stetigkeitspunkten von F. Also gilt für $X \sim F$, dass $X_n \to X$ in Verteilung. □

Aufgabe 5

Lemma 5. *Zeigen Sie: Wenn F eine stetige Verteilungsfunktion ist, dann konvergiert die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann schwach gegen F, wenn sie gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Laut Satz 12.5 des Vorlesungsskript ist die schwache Konvergenz äquivalent zu

$$\forall x \in \mathcal{C}(F) : \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \tag{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(F_n, F) := \inf\{\epsilon \geq 0 : \forall x : F_n(x-\epsilon) - \epsilon \leq F(x) \leq F_n(x+\epsilon) + \epsilon\} = 0, \tag{ii}$$

wobei $\mathcal{C}(F)$ die Menge aller Stetigkeitspunkte von F bezeichnet. Aus *ii* erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : d(F_n, F) < \delta \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists \epsilon_0 < \delta : \forall \epsilon > \epsilon_0 : \forall x : F_n(x-\epsilon) - \epsilon \leq F(x) \leq F_n(x+\epsilon) \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists \epsilon_0 < \delta : \forall \epsilon > \epsilon_0 : \forall x : F(x-\epsilon) - \epsilon \leq F_n(x) \leq F(x+\epsilon)
\end{aligned}$$

Also reicht es aus zu zeigen, dass aus der punktweisen Konvergenz der $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gleichmäßige Konvergenz jener Folge folgt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig.
Zu zeigen: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall x : |F_n(x) - F(x)| < \epsilon$
Wähle $n_0 : \forall x : F(x-\epsilon) - \epsilon \leq F_n(x) \leq F(x+\epsilon)$ und vice versa. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\forall x : |F(x) - F_n(x)| \leq |F(x) - F(x+\delta)| + |F(x+\delta) - F_n(x)|$$

Wir wissen aus der Analysis, dass stetige, monotone, beschränkte Funktionen sogar gleichmäßig stetig sind. Da F eine solche Funktion ist können wir den ersten Term gleichmäßig klein machen, wenn wir δ hinreichend klein wählen.

Betrachten wir nun den zweiten Term. Mit einigen Umformungen erhalten wir aus der Konvergenz der Lèvy-Prohorov-Metrik:

$$\forall x : F(x) - F_n(x+\delta) \leq \delta \tag{iii}$$

$$\forall x : F_n(x+\delta) - \delta \leq F(x+2\delta) \Leftrightarrow F_n(x+\delta) \leq F(x+2\delta) + \delta \tag{iv}$$

Nun gilt wegen (iv) auch

$$\forall x : F_n(x+\delta) - F(x) \leq F(x+2\delta) + \delta - F(x)$$

Wegen der gleichmäßigen Setigkeit von F können wir nun auch diesen Ausdruck für hinreichend kleines δ gleichmäßig klein machen, also erhalten wir gemeinsam mit (iii)

$$\forall x : |F(x+\delta) - F_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Damit haben wir auch den zweiten Term gleichmäßig abgeschätzt und erhalten insgesamt die gleichmäßige Konvergenz. □

Aufgabe 6

Lemma 6. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Seien (X_n) und (Y_n) Folgen von Zufallsvariablen sowie X eine Zufallsvariable auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$. Es gelte $X_n \to X$ in Verteilung und $Y_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit. Dann gilt $X_n + Y_n \to X$ in Verteilung.

(b) Konvergiert eine Folge X_n auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ in Wahrscheinlichkeit gegen X, so gilt auch $X_n \to X$ in Verteilung.

(c) Eine Folge X_n auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ konvergiert in Verteilung gegen 0 genau dann, wenn X_n in Verteilung gegen 0 konvergiert.

Beweis. (a):
Durch Einsetzen in die Definition, sowie Satz 12.5 erhalten wir:

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = 0 \qquad (i)$$

$$\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) := \inf\{\epsilon \geq 0 : \forall x : X_n(x-\epsilon) - \epsilon \leq X(x) \leq X_n(x+\epsilon) + \epsilon\} = 0 \qquad (ii)$$

Wir zeigen:

$$\forall x \in \mathcal{C}(F_X) : \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) + F_{Y_n}(x) = F_X(x)$$

$$|F_{X_n}(x) + F_{Y_n}(x) - F_X(x)| = |\mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)| \leq$$
$$|\mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) - \mathbb{P}(X_n \leq x)| + |\mathbb{P}(X_n \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)|$$

Der zweite Term lässt sich dabei aufgrund der schwachen Konvergenz von X_n gegen X zu Null diskutieren.

$$|\mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) - \mathbb{P}(X_n \leq x)| \leq$$
$$|\mathbb{P}([X_n + Y_n \leq x] \cap [|Y_n| < \epsilon]) - \mathbb{P}([X_n \leq x] \cap [|Y_n| \geq \epsilon])| \leq$$
$$|\mathbb{P}([|Y_n| < \epsilon])| + |\mathbb{P}([X_n \leq x + \epsilon] \setminus ([X_n + Y_n \leq x] \cap [|Y_n| < \epsilon]))| + |\mathbb{P}([X_n \leq x]) - \mathbb{P}([X_n \leq x + \epsilon])|$$

Jetzt wird der Ausdruck schon wieder ziemlich lang, Zeit Ballast abzuwerfen:
Der erste Ausdruck konvergiert aufgrund i gegen 0 und der letzte wegen der Rechtsstetigkeit von Verteilungsfunktionen.
Und munter weiter:

$$|\mathbb{P}([X_n \leq x + \epsilon] \setminus ([X_n + Y_n \leq x] \cap [|Y_n| \leq \epsilon]))| \leq$$
$$|\mathbb{P}([X_n \leq x + \epsilon] \cap [X_n + Y_n > x]) + \mathbb{P}([X_n \leq x + \epsilon] \cap [|Y_n| > \epsilon])|$$

Mal wieder lassen wir den zweiten Ausdruck verschwinden.

$$|\mathbb{P}([X_n \leq x + \epsilon] \cap [X_n + Y_n > x])| \leq$$
$$|\mathbb{P}([x - Y_n < X_n \leq x + \epsilon] \cap [|Y_n| \leq \epsilon]) + \mathbb{P}([x - Y_n < X_n \leq x + \epsilon] \cap [|Y_n| > \epsilon])|$$

Selber Trick wie immer.

$$|\mathbb{P}([x - Y_n < X_n \leq x + \epsilon] \cap [|Y_n| \leq \epsilon])| \leq$$
$$|\mathbb{P}([x - \epsilon \leq X_n \leq x + \epsilon])| =$$
$$|F_{X_n}(x + \epsilon) - F_{X_n}(x - \epsilon)|$$

Um diese letzte Hürde noch zu bezwingen müssen wir wieder die Lèvy-Prohorov-Metrik zurate ziehen:

$$|F_{X_n}(x + \epsilon) - F_{X_n}(x - \epsilon)| \leq$$
$$|2\epsilon + F_X(x + 2\epsilon) - F_X(x - 2\epsilon)|$$

Und dieser Ausdruck verschwindet schließlich, da wir x als Stetigkeitspunkt von F_X vorausgesetzt haben.
(b):
Folgt direkt aus (a), wenn man für die Folge X_n die konstante Nullfolge wählt.
(c):
Aus (b) erhalten wir die Rückrichtung der Aussage, Satz 17.5. Kusolitsch liefert uns die Hinrichtung:

Satz. ***17.5.***
Sind X_n Zufallsvariablen auf beliebigen Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega_n, \Sigma_n, \mathbb{P}_n)$, dann folgt aus $X_n \implies a, a \in \mathbb{R}$ auch

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_n(|X_n - a| > \epsilon) = 0$$

□

Aufgabe 7

Lemma 7. *Die Levy-Prokhorov-Metrik ist eine Metrik auf der Menge $M := \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F$ ist eine Verteilungsfunktion$\}$.*

$$d(F, G) := \inf\{\epsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} : F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon\}.$$

Beweis. Es sind drei Eigenschaften nachzuweisen.

(M1) $d(F, G) = 0 \Leftrightarrow F = G$.

Aus $d(F, G) = 0$ folgt definitionsgemäß $F(x-\epsilon)-\epsilon \leq G(x) \leq F(x+\epsilon)+\epsilon$ für beliebig kleine $\epsilon > 0$. Da F monoton nichtfallend ist, existieren der links- und rechtsseitige Grenzwert bei x und mit $\epsilon \to 0$ erhält man $F(x-) \leq G(x) \leq F(x+)$. F und G stimmen also an allen Stetigkeitspunkten von F überein. F und G haben als Verteilungsfunktionen nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $x_k \searrow x$, die nur aus Stetigkeitsstellen von F und G besteht. Daher gilt $F(x) = \lim_k F(x_k) = \lim_k G(x_k) = G(x)$.

Die andere Richtung ist klar.

(M2) $d(F, G) = d(G, F)$.

$E_{FG} := \{\epsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} : F(x-\epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x+\epsilon) + \epsilon\}$,
$E_{GF} := \{\epsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} : G(x-\epsilon) - \epsilon \leq F(x) \leq G(x+\epsilon) + \epsilon\}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $G(x-\epsilon)-\epsilon \leq F(x) \Leftrightarrow G(x) \leq F(x+\epsilon)+\epsilon$; das erhält man sofort durch Einsetzen von $x+\epsilon$ und Addition von ϵ.

Analog zeigt man $F(x-\epsilon)-\epsilon \leq G(x) \Leftrightarrow F(x) \leq G(x+\epsilon)+\epsilon$. Daher gilt $E_{FG} = E_{GF}$ und folglich

$$d(F, G) = \inf(E_{FG}) = \inf(E_{GF}) = d(G, F).$$

(M3) $d(F, H) + d(H, G) \geq d(F, G)$.

Sei $d(F, H) \leq \epsilon_1$, $d(H, G) \leq \epsilon_2$. Dann gilt

$F(x-\epsilon_1-\epsilon_2)-\epsilon_1-\epsilon_2 \leq H(x-\epsilon_2)+\epsilon_2 \leq G(x) \leq H(x+\epsilon_2)+\epsilon_2 \leq F(x+\epsilon_1+\epsilon_2)+\epsilon_1+\epsilon_2$, also $\epsilon_1+\epsilon_2 \in E_{FG}$ und somit $\epsilon_1+\epsilon_2 \geq d(F, G)$.

Nun gilt $d(F, H) + d(H, G) = \inf_{\epsilon_1 \in E_{FH}} \epsilon_1 + \inf_{\epsilon_2 \in E_{HF}} \epsilon_2 = \inf_{\epsilon_1 \in E_{FH},\ \epsilon_2 \in E_{HF}} \epsilon_1 + \epsilon_2$. Infima erhalten Ungleichungen und wir die gewünschte Aussage.

□