9.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$ sei eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen mit einer Gleichverteilung auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass die Trajektorien $X_.(\omega)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 in allen Punkten unstetig sind.

2. Auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ist eine Zufallsvariable T mit einer Gleichverteilung auf $[0,1]$ gegeben. Wir definieren die Familien von Zufallsvariablen $(X_t, t \in [0,1])$ und $(Y_t, t \in [0,1])$ durch

$$X_t(\omega) = 0, 0 \leq t \leq 1, \omega \in \Omega,$$

und

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} n & \text{wenn } n \in \mathbb{N} \text{ und } t = T(\omega)/n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

   (a) Die endlichdimensionalen Randverteilungen, also die gemeinsamen Verteilungen von $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ bzw. und von $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ stimmen für alle $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq 1$ überein.

   (b) Die Trajektorien $X_.(\omega)$ sind mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig und beschränkt, die Trajektorien $Y_.(\omega)$ nicht.

Dies demonstriert, dass in dem überabzählbaren Produktraum $\mathbb{R}^{[0,1]}$ viele wichtige Mengen wie die der stetigen oder der beschränkten Funktionen nicht messbar (also nicht in der Produktsigmaalgebra enthalten) sind.

3. (a) Erzeugen Sie 1000 Zufallszahlen mit einer Gleichverteilung auf $[-1,1]$ und zeichnen Sie den Graphen der Mittelwerte $\bar{X}_n$.

   (b) Erzeugen Sie 1000 Zufallszahlen mit einer Cauchyverteilung und zeichnen Sie den Graphen der Mittelwerte $\bar{X}_n$.

4. Die Annahme-Verwerfungsmethode zur Erzeugung von Zufallszahlen in allgemeinerer Form: Wir wollen eine Zufallszahlen mit der Dichte f erzeugen (mit einer schwierigen Verteilungsfunktion). Wir nehmen an, dass wir leicht Zufallzahlen X erzeugen können, deren Dichte g die Beziehung $f \leq Mg$ mit einer Konstanten $M < \infty$ erfüllt. Wir erzeugen eine Realisation von X und zusätzlich eine (von X unabhängige) Zufallszahl U mit einer Gleichverteilung auf $[0,1]$. Wenn $U < f(x)/Mg(x)$, dann setzen wir $Z = X$, andernfalls wird dieser Versuch verworfen und mit einem neuen X und U wiederholt, solange, bis wir einen Versuch annehmen können.

   Zeigen Sie, dass Z mit Dichte f verteilt ist. Wie viele Versuche sind im Schnitt notwendig, um eine Realisation von Z zu erhalten?

5. Um eine standardnormalverteilte Zufallszahl mit der Annahme-Verwerfungsmethode zu erzeugen, kann man als g eine Laplacedichte

$$g(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}$$

verwenden. Bestimmen Sie M ud die optimale Wahl für a.

6. X und Y seien unabhängig $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von $S = X + Y$ und $U = X/(X + Y)$ und zeigen Sie, dass S und U unabhängig sind.

7. X und Y seien unabhängig exponentialverteilt mit Parameter λ bzw. μ. Bestimmen Sie die Verteilung von $X - Y$.