3.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ x+1 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 3 & \text{für } X \geq 2 \end{cases}$$

und

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 1, \\ x^2 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 5 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

2. Zeigen Sie:

   (a) Bekanntlich ist die Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   Im Intervall $[0,1]$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie

   $$g(x) = \int_0^x f(u)du = x^2\cos(1/x) - \int_0^x 2u\cos(1/u)du$$

   und damit $g'(x) = f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ (wobei in 0 eigentlich nur die einseitige Ableitung existiert, Sie können sich aber vorstellen, dass g (und f) auf er negativen Achse einfach null sind).

   (b) Für $a > 0$ wählen wir n so, dass

   $$\frac{1}{n\pi} < \frac{a}{2}$$

   gilt. Dann ist für $a > 0$ die Funktion

   $$h_{0,a}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n\pi}, \\ g(\frac{1}{n\pi}) & \text{für } \frac{1}{n\pi} < x < a - \frac{1}{n\pi}, \\ g(a-x) & \text{für } a - \frac{1}{n\pi} \leq x \leq a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   überall differenzierbar, die Ableitung $h'_{0,a}$ ist überall stetig außer in den Punkten 0 und a, und in jeder Umgebung von 0 und a gibt es Punkte mit $h' = 1$ und $h' = -1$.

   (c) $h_{a,b}(x) = h_{0,b-a}(x-a)$ ist überall differenzierbar mit einer Ableitung, die überall stetig ist, außer in den Punkten a und b (es soll natürlich $a < b$ gelten).

3. $(q_n, n \in \mathbb{N})$ sei eine Abzählung der rationalen Zahlen in $]0,1[$, $\epsilon > 0$. Die Menge

$$A = (\bigcup_n]q_n - \frac{\epsilon}{2^n}, q_n + \frac{\epsilon}{2^n}[) \cap]0,1[$$

ist offen und daher als disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen darstellbar:

$$A = \sum_n]a_n, b_n[.$$

jedes offene intervall hat mit A nichtleeren Schnitt, insbesondere gibt es in jeder Umgebung eines Punktes $x \in]0,1[\setminus A$ einen a_n oder b_n. Die Funktion

$$F = \sum_n h_{a_n,b_n}$$

ist dann überall differenzierbar, und ihre Ableitung F' ist beschränkt, auf A stetig und auf A^C unstetig. Insbesondere hat die Menge der Unstetigkeitsstellen von F' positives Lebesguemaß, und daher ist F' nicht Riemann-integrierbar.

4. Die Funktion

$$F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$$

mit $F(0) = 0$ ist im Intervall $[-1,1]$ überall differenzierbar, aber F' ist nicht Lebesgue-integrierbar (und auch nicht eigentlich Riemann-integrierbar, weil unbeschränkt, aber immerhin noch uneigentlich Riemann-integrierbar).

Anmerkung: Das zeigt uns Grenzen unserer Hauptsatz-Variationen. Wir haben schöne Ergebnisse, wenn wir mit integrierbaren Funktionen (im Legesgueschen oder Riemannschen Sinn) beginnen: dann ist das Integral (als Funktion der Obergrenze) fast überall differenzierbar, und die Ableitung stimmt fast überall mit der Ausgangsfunktion überein. In der anderen Richtung sind wir weniger glücklich: wenn eine Funktion überall differenzierbar ist, muss ihre Ableitung weder im (uneigentlich) Riemannschen noch im Lebesguschen Sinn integrierbar sein. Wenn wir nur Differenzierbarkeit fast überall fordern, dann gibt es sogar ein negatives Resultat: da jede singuläre monotone Funktion fast überall Ableitung 0 hat, ist es hoffnungslos, aus dieser die ursprüngliche Funktion zurückbekommen zu wollen. Es bleibt die Frage, ob es für *überall* differenzierbare Funktionen ein Integral gibt, das die ursprüngliche Funktion rekonstruiert, und erstaunlicherweise gibt es das mit dem Henstock-Kurzweil-Integral (auch als verallgemeinertes Riemann-Integral bekannt).

5. Zeigen Sie: wenn F eine stetige Verteilungsfunktion ist, dann gilt μ_F-fast überall

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta F}(x,h) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta F}(x,h) = 1,$$

wobei wir für zwei Verteilungsfunktionen F und G

$$\frac{\Delta G}{\Delta F}(x,h) = \begin{cases} \frac{G(x+h)-G(x)}{F(x+h)-F(x)} & \text{wenn } F(x+h) \neq F(x), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen.

6. F und G seien eindimensionale Verteilungsfunktionen. Dann ist $H = F \circ G$ ebenfalls eine Verteilungsfunktion, und wenn F absolutstetig ist, dann gilt $\mu_H \ll \mu_G$ (für Mutige außer Konkurrenz: wie sieht die Radon-Nikodym-Dichte aus?).

7. Es ist naheliegend, dass für eine diskrete Verteilungsfunktion F die Menge der Punkte, in denen F' nicht 0 ist, mit der Menge der Sprungstellen von F übereinstimmen sollte (und dass F', wenn definiert, nur die Werte 0 und ∞ annimmt). Das gilt so, wenn die Sprungstellen schön getrennt liegen (was eigentlich im "diskret" drinsteckt), muss aber im allgemeinen nicht so sein:

   Zeigen sie, dass für

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -1, \\ \frac{-1}{n+1} & \text{für } n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{n+1} & \text{für } n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

   $|F(x) - x| \leq x^2$ und daher $F'(0) = 1$ gilt.