Satz 1.11.14 (Homomorphiesatz für Gruppen) Sei $\Psi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : G/\ker\Psi \to \Psi(G) : a\ker\Psi \mapsto \Psi(a) \qquad (*)$$

ein Isomorphismus der Faktorgruppe $G/\ker\Psi$ auf die Gruppe $\Psi(G)$.

Beweis. Da die Nebenklassen von $\ker\Psi$ in G genau die Fasern von Ψ abgeben, ist die Definition von φ sinnvoll. Fasern sind Äquivalenzklassen. Die Definition von φ ist insofern sinnvoll, weil die Faktorgruppe $G/\ker\Psi$ alle Fasern $a\ker\Psi$ enthält und diese überall wohldefinierte Bilder durch φ zugewiesen kriegen. Wegen

$$\varphi((a\ker\Psi)\cdot(b\ker\Psi)) \overset{(1)}{=} \varphi((ab)\ker\Psi) \overset{(2)}{=} \Psi(ab) \overset{(3)}{=}$$

$$\Psi(a)\cdot\Psi(b) \overset{(4)}{=} \varphi(a\ker\Psi)\cdot\varphi(b\ker\Psi)$$

für alle $a,b \in G$ ist φ ein Gruppenhomomorphismus. (1) $\Leftarrow$ Satz 1.11.11: $(G/U, \cdot)$ ist eine Gruppe, (2) $\Leftarrow$ $(*)$, (3) $\Leftarrow$ Ψ ist ein Homomorphismus, (4) $\Leftarrow$ $(*)$. Der Kern von φ ist $\{\ker\Psi\} \subset G/\ker\Psi$. $\ker\Psi = e\ker\Psi \mapsto \Psi(e) = e'$ ist das neutrale Element von G'. Er besteht also nur aus dem neutralen Element der Faktorgruppe $G/\ker\Psi$. ... nämlich $\ker\Psi$. Nach Satz 1.11.6 (c) ist φ daher injektiv und nach Konstruktion auch surjektiv. ... weil $\{\Psi(a) : a \in G\} = \Psi(G)$. $\square$