Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 3

Übungstermin: 1.4.2020 28. März 2020

Aufgabe 11:
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und y die Lösung des Anfangwertproblems

$$y'(t) = |a - y(t)| + b, \quad t \geq 0, \qquad y(0) = c. \tag{1}$$

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem analytisch. Welches Verhalten der Lösung erhalten Sie für unterschiedliche Parameter a, b, c? Wie glatt ist die Lösung?
b) Lösen Sie das Anfangswertproblem numerisch mit expliziten Runge-Kutta-Verfahren unterschiedlicher Ordnung. Welche Konvergenzordnung erhalten Sie bei unterschiedlichen Parametern a, b, c? Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Sie können das vom Übungsleiter im TUWEL zur Verfügung gestellte Programm zur Aufgabe 6 verwenden.

Aufgabe 12:
Sei y die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y)$ mit $t \in [0, T]$, $y(0) = y_0$ und beliebig glattem f. Weiter seien y_i für $i = 0, \ldots, N$ die Approximationen an $y(t_i)$, welche durch ein Einschrittverfahren der Ordnung p mit den Stützstellen $t_0 = 0, \ldots, t_N = T$ berechnet werden. Sei weiter $\tilde{y}$ der lineare Spline mit $\tilde{y}(t_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, N$.

Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ unabhängig von h_i und N existiert mit

$$\sup_{t \in [0,T]} |\tilde{y}(t) - y(t)| \leq C \max\{h_0, \ldots, h_{N-1}\}. \tag{2}$$

Aufgabe 13:
Ein explizites Einschrittverfahren mit Inkrementfunktion $\Phi(t, y, h)$ kann mit der sogenannten diskreten Evolution

$$\Psi^{t,t+h} y := y + h\Phi(t, y, h) \tag{3}$$

formuliert werden durch

$$y_{j+1} = \Psi^{t_j, t_j + h_j} y_j. \tag{4}$$

Es heisst reversibel, wenn gilt $\Psi^{t+h,t}\Psi^{t,t+h} y = y$ für alle zulässigen (t, y) und alle hinreichend kleinen h. Zeigen Sie, dass es kein konsistentes, explizites Runge-Kutta-Verfahren gibt, welches für jedes beliebige Anfangswertproblem reversibel ist.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\Psi^{0,h} y_0$ für ein s-stufiges, explizites Runge-Kutta Verfahren ein Polynom der Ordnung s in h ist, wenn das Verfahren auf die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t), \qquad y(0) = y_0, \tag{5}$$

angewendet wird.

Zusatzinformation: Bei reversiblen Einschrittverfahren führt ein Schritt des Verfahrens mit positiver Schrittweite h gefolgt von einem Schritt des Verfahrens mit negativer Schrittweite $-h$ wieder auf den Anfangswert.

Aufgabe 14:

Ein explizites Runge-Kutta Verfahren wurde in (2.27) und (2.28) im Skript definiert. Für ein implizites Runge-Kutta Verfahren wird die Gleichung (2.28) ersetzt durch

$$k_i = f\left(t + c_i h, y + h\sum_{j=1}^{m} A_{ij}k_j\right), \qquad i = 1, \dots, m. \tag{6}$$

Die Matrix A ist dabei keine strikte untere Dreicksmaxtrix mehr sondern eine vollbesetzte Matrix.

Verallgemeinern Sie Theorem 2.27 auf implizite Runge-Kutta Verfahren. Beweisen Sie dazu, dass solche Verfahren in dem dortigen Sinne stabil sind.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass das implizite Runge-Kutte Verfahren eindeutig durchführbar ist. Diese Frage ist nicht trivial, da (6) ein nichtlineares Gleichungssystem ist.

Aufgabe 15:

Erweitern Sie das Programm zu Aufgabe 6 um eine Schrittweitensteuerung mit eingebettetem RK-Verfahren (RK5(4)) und wenden Sie es auf das Räuber-Beute-Modell an. Vergleichen Sie die Schrittweiten mit der Lösung.

Hinweis: Es gibt einen Fehler im Vorlesungsskript zum RK5(4)-Schema. Verwenden Sie bitte das folgende Schema.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
1/5 & 1/5 & & & & & & \\
3/10 & 3/40 & 9/40 & & & & & \\
4/5 & 44/45 & -56/15 & 32/9 & & & & \\
8/9 & 19372/6561 & -25360/2187 & 64448/6561 & -212/729 & & & \\
1 & 9017/3168 & -355/33 & 46732/5247 & 49/176 & -5103/18656 & & \\
1 & 35/384 & 0 & 500/1113 & 125/192 & -2187/6784 & 11/84 & \\
\hline
 & 35/384 & 0 & 500/1113 & 125/192 & -2187/6784 & 11/84 & 0 \\
 & 5179/57600 & 0 & 7571/16695 & 393/640 & -92097/339200 & 187/2100 & 1/40
\end{array}
$$