81.) Wir zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n + n(-1)^n}$$

divergiert: Es bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die in der Reihe stehende Folge, sowie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die dazugehörige Partialsummenfolge. Eine einfache Rechnung ergibt, dass

$$a_{2n} + a_{2n+1} = \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{8n} \geq \frac{1}{5n} - \frac{1}{8n} \quad (n \geq 2)$$

Mit dieser Ungleichung kann man die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ durch die harmonische Reihe nach unten abschätzen:

$$s_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) \frac{1}{n}$$

Man beachte, dass diese Abschätzung möglich ist, da in einer endlichen Summe beliebig umgeklammert werden darf. Limesbildung auf beiden Seiten zeigt damit, dass $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \infty$. Damit kann die Folge der Partialsummen nicht konvergieren, da eine Teilfolge divergiert.

82.) Wir zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n + 3(-1)^n}$$

konvergiert. Dazu beobachten wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$ eine konvergente Reihe ist (Leibniz Kriterium). Außerdem konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n + 3(-1)^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$$

indem man sich folgender Abschätzung bedient:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{3n + 3(-1)^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{3n} \right| = \frac{3}{3n(3n + 3(-1)^n)} \leq \frac{3}{6n^2}$$

für $n \geq 3$. Somit muss die Summe beider Reihen konvergieren und es folgt die Aussage. Absolute Konvergenz der Reihe kann man sich nicht erwarten (Ein formaler Beweis dafür wäre wieder ein Vergleich mit der harmonischen Reihe und anwendung des Minoratnenkriteriums).

83.) Nur Beweisskizze: $A_1 \subseteq A_2$ impliziert, dass jeder Häufungspunkt von A_1 ein Häufungspunkt von A_2 ist. $c(A)$ ist aber nichts anderes als A vereinigt mit seinen Häufungspunkten. Damit $c(A_1) \subseteq c(A_2)$. (Ein formaler Beweis hierfür wäre nicht viel länger, eventuell ein Aufschreiben der Definition eines Häufungspunktes und daraus die Argumentation dass diese unter Teilmengen erhalten bleiben). Für den zweiten Punkt bemerke man, dass $c(B) = B$ für B

abgeschlossen. Sei B abgeschlossen und $A \subseteq B$. Dann ist mit dem ersten Punkt $c(A) \subseteq c(B) = B$. Außerdem ist $c(A)$ abgeschlossen. Damit folgt die zweite Aussage, da B beliebig gewählt war.

84.) $M = \{\frac{i^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{C}$: Offensichtlich ist $0 \notin M$, aber 0 ist Häufungspunkt von M: Laut Definition muss jede Umgebung von 0 in der auf $\mathbb{C}$ durch die euklidische Metrik induzierte Topologie einen nichttrivialen Schnitt mit M haben. Das heißt soviel wie:

$$\forall \epsilon > 0 : M \cap U_\epsilon(0) \neq \emptyset$$

Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Ein Punkt liegt in dem obigen Schnitt genau dann wenn

$$x \in M \wedge d(x, 0) < \epsilon$$

Nach Definition der euklidischen Metrik, suchen wir also ein $x = \frac{i^k}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $|x| < \epsilon$. Dies führt auf

$$|\frac{i^k}{k}| \overset{!}{<} \epsilon \iff \frac{|i|^k}{|k|} < \epsilon \iff \frac{1}{k} < \epsilon$$

Da $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist, lässt sich so ein k finden und die erste Aussage ist bewiesen. Nun kann man dem Hinweis folgen und zeigen, dass $M \subset M_n = K_{\frac{1}{n}}(0) \cup F_n$ ist. Definiert man $F_n = \{\frac{i^k}{k} : k \leq n\}$ so ist dies offensichtlich der Fall. Da endliche Mengen abgeschlossen sind, sowie $K_{\frac{1}{n}}(0)$ ebenfalls, muss M_n abgeschlosssen sein. Außerdem ist $\cap_{n \in \mathbb{N}} M_n = M \cup \{0\}$. Insgesamt beweist dies die Vermutung, dass $M \cup \{0\} = c(M)$.

85.) Wie in der Übung schon besprochen geht der Beweis recht kurz: Man kann die Menge

$$A_n := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2n+2} < x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{2n+1}\right\}$$

auch schreiben als

$$A_n = U_{\frac{1}{2n+1}(0)} \cap K^C_{\frac{1}{2n+2}}(0)$$

Letzte Übung wurde schon die Offenheit der Kugeln $U_r(x_0)$ sowie die Abgeschlossenheit von $c(U_r(x_0)) = K_r(x_0)$ bewiesen. Da der Schnitt von zwei offenen Mengen offen ist, sowie die Vereinigung beliebig vieler offenen Mengen wieder offen ist, folgt die Offenheit der Vereinigung über die A_n.

86.) Wir zeigen zuerst den Hinweis: Sei also $z > 0$ und

$$Q_z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < z, y > \sqrt{z}\}$$

Man bemerkt unmittelbar, dass für $(x, y) \in Q_z$ gilt: $x < z < y^2$. Damit kann (x, y) nicht in K liegen. Dies beweist $Q_z \subseteq K^C$ für alle $z > 0$. Nun sei $y^2 - x = \rho > 0$, wobei $x \geq 0, y > 0$. Damit folgt $x = y^2 - \rho = (y^2 - \frac{\rho}{2}) - \frac{\rho}{2} < y^2 - \frac{\rho}{2}$

Außerdem ist auch $y > \sqrt{y^2 - \frac{\rho}{2}}$. Insgesamt entspricht das genau der Definition von $Q_{y^2-\frac{\rho}{2}}$ und wir erhalten

$$(x, y) \in Q_{y-\frac{\rho}{2}} \subseteq K^C$$

Da (x, y) mit $y^2 - x = \rho > 0$ beliebig waren, folgt damit dass jedes (x, y) im positiven Quadranten von $\mathbb{R}^2$, welches außerhalb von K liegt in einem der Q_z liegt. Folglich gilt

$$K^C = \cup_{z\geq 0} Q_z \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$$

und K^C ist somit als Vereinigung offener Mengen offen. damit ist K abgeschlossen. Die Beschränktheit folgt aus der Erkenntnis, dass K im Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ eingeschlossen ist.

88.) Es ist

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j} = 1 + \sum_{j>1} \frac{-1}{j} + \frac{1}{j} = 1$$

sowie

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j} = 1 + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{j} + \frac{-1}{i+1} = 1$$

Die Konvergenz der Reihen ist unbedingt, da die innere immer eine endliche Summe ist und die äußeren sind beschränkte, monotone Folgen. Die Reihe über das Kreuzprodukt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{i,j}$$

kann nicht absolut konvergieren: Ansonsten dürfte man umordnen und könnte über die Diagonale summieren, was genau die harmonische Reihe ergeben würde, welche nicht unbedingt konvergiert (sogar divergiert). Nach Proposition 5.4.8 folgt die Aussage.