1. Gg.: Cantormenge

$C := \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} : a_n \in \{0,2\}\}$,

$\forall n \geq 1 : C_n := \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} : a_k \in \{0,1,2\}, \forall k \leq n : a_k \in \{0,2\}\}$;

Zz.: $\# C > \aleph_0$

Ww.: Wenn C abzählbar, dann $\exists f : \mathbb{N} \to C$ surj.

Sei $(x_m)_m \in C^{\mathbb{N}}$, dann bezeichne $a_{mn} \in \{0,2\}$ die Ziffer von x_m an der n-ten Nachkommastelle.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 0.a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ x_2 & = & 0.a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ x_3 & = & 0.a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$\exists y \in C : \nexists m \in \mathbb{N} : y = x_m$, weil

$b := 0.c_1 c_2 c_3 \ldots$ mit $\forall i \in \mathbb{N} : c_i := \begin{cases} 0, & a_{ii} = 2 \\ 2, & a_{ii} = 0 \end{cases}$

Zz.: $\lambda(C) = 0$

$C \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ ✓

$C \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$: Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n :\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x \in C_n$.

Angenommen, $x \notin C \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : a_k = 1$,

aber $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq k$ ↯

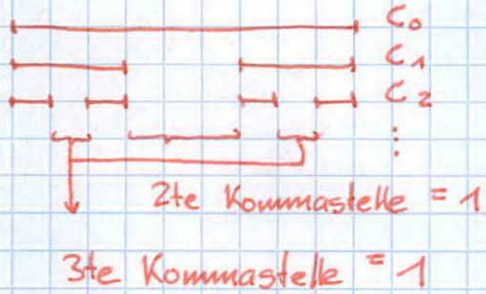
Ww.: $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend

$$\lambda(C) = \lambda\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\le n} C_k\right) = \lambda\left(\lim_{n\to\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Wir zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N} : \lambda(C_n) = (2/3)^n$:

IA: ✓

IS: $\lambda(C_{n+1}) = \lambda(C_n) \cdot 2/3$, weil man bei der $(n+1)$ten Kommastelle nicht mehr 1 benutzen darf



2. Geg.: C Cantormenge, Cantorfunktion $c: [0,1] \to [0,1]$:

$$c(x) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n/2}{2^n} & , x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in C \\ \sup\{c(y): x \geq y \in C\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zz.: c monoton

Seien $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$.

Fall 1. $x_1, x_2 \in C$. ✓

Fall 2. $x_1 \in C$, $x_2 \notin C$. Definition vom „sup"

Fall 3. $x_1 \notin C$, $x_2 \in C$.
Monotonie gilt $\forall y \leq x_1 \Rightarrow$ gilt für's „sup"

Fall 4. $x_1, x_2 \notin C$. ✓

Zz.: c surj.

Sei $z \in [0,1]$, dann gilt $\forall z \in C: c(z) = z$ und
$\forall z \in [0,1] \setminus C: \exists x \in [0,1] \setminus C:$
$z = \sup\{c(y): x \geq y \in C\}$, weil $x := z$.

Zz.: $\forall x \in [0,1] \setminus C: c'(x) = 0$

Sei $x \in [0,1] \setminus C$ ist offen, dann
$\exists \varepsilon > 0: \forall z \in U_\varepsilon(x):$
$c(z) = \sup\{c(y): y < u \in U_\varepsilon(x)\}$.

Also ist c in einer ε-Umgebung konstant.

3. Gg.: $\alpha = \log(2)/\log(3)$, μ_α Hausdorffmaß;

Zz.: $\mu_\alpha(C) \leq 1$

Ww.: $d(C_n) = \sup\limits_{x,y \in C_n} |x-y|$, $\mu_\alpha(C) =$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} d(C_n)^\alpha : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (2^{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}, C \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \forall n \in \mathbb{N} : d(C_n) < \varepsilon \}$$

Ww.: $\forall n \in \mathbb{N} : C_n \supseteq C$, wenn C_n so wie in 1.

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{(2/3)^n}_{\lambda(C_n)} < \varepsilon$

Wähle $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass
die Folge alle Teilintervalle von C_n abdeckt.

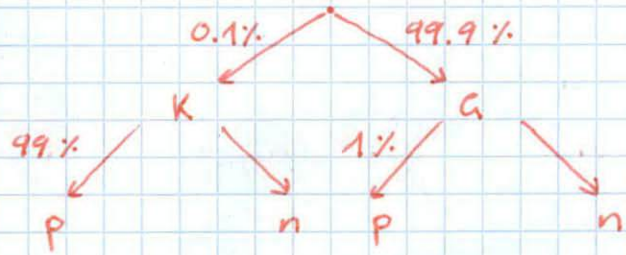
$\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} d(A_k) \leq (2/3)^{n \cdot \alpha} \leq 1.$

5. Geg.: 0.1 % erkrankt,

Test erkennt Krankheit mit 99 %,

falsches Positiv bei gesunder Person mit 1 %;

(a) Ges.: $\mathbb{P}$(positiv)



$\ldots = 0.001 \cdot 0.99 + 0.999 \cdot 0.01 = 0.01098.$

(b) Ges.: $\mathbb{P}$(krank | positiv)

$$= \frac{\mathbb{P}(\text{krank} \wedge \text{positiv})}{\mathbb{P}(\text{positiv})} = \frac{\mathbb{P}(\text{krank})\,\mathbb{P}(\text{positiv} \mid \text{krank})}{\mathbb{P}(\text{positiv})}$$

$= 0.090163934.$

6. Gg.: $\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{\{x, x+1\} : x \in \mathbb{Z}\}$,

$\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$, $\mu(\mathbb{Z}) = \nu(\mathbb{Z}) = \infty$,

$\forall x \in \mathbb{Z}: \mu(\{x, x+1\}) = \nu(\{2x-1, 2x\}) = 1$,

$\nu(\{2x, 2x+1\}) = 2$;

Zz: μ, ν Maße

- $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$ ✓
- $\mu, \nu \geq 0$ ✓
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}: \mu(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Ww: $\forall n \in \mathbb{N}: A_n = \emptyset \ \dot{\vee} \ \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z} \ \dot{\vee}$
$\exists! k \in \mathbb{N}: \# A_k \geq 2$ ✓

Zz: $\nexists \zeta$ Maß auf $\mathcal{C}: \nu = \zeta + \mu$

Ww.: $\mathbb{Z} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{2x-1, 2x\}}_{\zeta = 0} \Rightarrow \zeta(\mathbb{Z}) = 0$,

Ww.: $\mathbb{Z} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{2x, 2x+1\}}_{\zeta = 1} \Rightarrow \zeta(\mathbb{Z}) = \infty \neq 0$.

7. Gg: $\mathcal{C}$ durchschnittstabiles Mengensystem, μ, ν Maße auf $\mathcal{C}$ mit $\mu \leq \nu$

Zz: $\exists\, \zeta$ Maß auf $\mathcal{C}$: $\nu = \mu + \zeta$

$\mathcal{E} := \{A \in \mathcal{C} : \mu(A) < \infty\}$

$\mathcal{E}^* := \{A \in \mathcal{C} : \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} : A = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$

$\forall M \in \mathcal{E} : \zeta(M) := \underbrace{\nu(M) - \underbrace{\mu(M)}_{<\infty}}_{\dots \geq \dots}$ ist wohldefiniert

$\forall M \in \mathcal{E}^* : \zeta(M) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(M_n) - \mu(M_n)$ ebenfalls, weil

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \Rightarrow$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) - \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} B_k \cap A_n\Big) - \mu\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} B_k \cap A_n\Big)$$

$$= \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \nu(A_n \cap B_k) - \mu(A_n \cap B_k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B_k\Big) - \mu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B_k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(B_k) - \mu(B_k).$$

Man darf die „Σ" vertauschen, weil die (doppel-) Reihe entweder absolut konvergiert, oder bestimmt divergiert.