Übungen zu Analysis 1, 3. Übung 6. 11. 2018 (korrigiert)

31. Es sei $P[x]$ die Menge aller Polynome $\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$, $N \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_N \neq 0$ für $N > 0$, sowie $P_+[x]$ die Menge aller Polynome $\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ mit $a_N > 0$. Auf $P[x] \times P_+[x]$ sei die Relation $\sim$ durch
$$(p,q) \sim (\hat{p},\hat{q}) \iff p\hat{q} = \hat{p}q$$
definiert. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

32. Definieren Sie auf $P[x] \times P_+[x]$ eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$, die sich auf die Äquivalenzklassen $[(p,q)]_\sim$ übertragen lässt, sodass die Menge
$$\{[(p,q)]_\sim : (p,q) \in P[x] \times P_+[x]\}$$
mit diesen Operationen zu einem Körper K wird. Es reicht wenn Sie die Aussage für die Addition beweisen, d.h. wenn Sie zeigen dass K mit der so definierten Addition auf K und einem Nullelement $0_K \in K$ eine kommutative Gruppe ist.

    Hinw.: $\mathbb{Q}$

33. Sei $K_+ = \{[(p,q)]_\sim \in K : (p,q) \in P_+ \times P_+\}$. Zeigen Sie, dass damit eine Ordnung auf K wohldefiniert ist, mit der K zu einem angeordneten Körper wird, der nicht Archimedisch angeordnet ist.

34. Für welche $n \in \mathbb{N}$ wird $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit Addition und Multiplikation modulo n zu einem Körper?

    Hinw.: Zeigen Sie mit einem Schubfachargument, dass ein endlicher Integritätsbereich (nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins) ein Körper ist.

35. Zeigen Sie, dass kein endlicher Körper angeordnet werden kann.

    Hinw. Betrachten Sie $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$.

36. Bsp. 2.16

37. Bsp 2.17

38. Bsp. 2.19

39. Bsp. 2.20

40. Bsp 2.21