

# Kapitel 12

## Verzweigungstheorie

Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f \in C^1(G \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$ . In diesem Kapitel betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (12.1)$$

die einen zeitunabhängigen Parameter  $\lambda \in \Lambda$  enthält.

### 12.1 Umkehrpunkte

Die Menge der Equilibria von (12.1) zu einem gegebenen  $\lambda \in \Lambda$  wird mit  $\mathcal{E}_\lambda$  bezeichnet, dies ist der  $\lambda$ -Schnitt der Menge

$$\mathcal{E} = \{(x, \lambda) \in G \times \Lambda : f(x, \lambda) = 0\}, \quad \mathcal{E}_\lambda = \{x \in G : f(x, \lambda) = 0\}.$$

Sei  $(x_*, \lambda_*) \in \mathcal{E}$ . Wir nennen  $(x_*, \lambda_*)$  **regulär** falls die Jacobi-Matrix  $\partial_x f(x_*, \lambda_*)$  invertierbar ist, wenn also  $\det \partial_x f(x_*, \lambda_*) \neq 0$  ist; andernfalls heißt  $(x_*, \lambda_*)$  **singulär**. Ist  $(x_*, \lambda_*)$  regulär, dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Kugel  $B_\delta(\lambda_*)$  und eine  $C^1$ -Abbildung  $x : B_\delta(\lambda_*) \rightarrow G$ , sodass  $x(\lambda_*) = x_*$  und  $f(x(\lambda), \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in B_\delta(\lambda_*)$  gilt. In einer Umgebung  $B_r(x_*) \times B_\delta(\lambda_*) \subset G \times \Lambda$  sind dies die einzigen Lösungen der Gleichung  $f(x, \lambda) = 0$ . Die Menge  $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in B_\delta(\lambda_*)\}$  nennt man einen **Lösungsweig** der Gleichung  $f(x, \lambda) = 0$  (genauer: ein Stück eines Lösungszweiges).

Die Funktion  $x(\lambda)$  ist Lösung einer Differentialgleichung, nämlich von

$$\partial_x f(x(\lambda), \lambda) x'(\lambda) + \partial_\lambda f(x(\lambda), \lambda) = 0,$$

mit Anfangswert  $x(\lambda_*) = x_*$ . Daher kann man nach dem Fortsetzungssatz den Lösungsweig auf ein maximales Intervall fortsetzen. Allerdings kommt hier zu den üblichen Obstruktionen, nämlich  $|x(\lambda)| \rightarrow \infty$  oder  $\text{dist}(x(\lambda), \partial G) \rightarrow 0$ , eine

weitere hinzu, nämlich die Jacobi-Matrix  $\partial_x f(x(\lambda), \lambda)$  kann singular werden: Die Lösung kann sich **verzweigen**.

Haben alle Eigenwerte von  $\partial_x f(x_*, \lambda_*)$  negative Realteile, so ist  $x_*$  asymptotisch stabil für (12.1) mit  $\lambda = \lambda_*$ . Da die Eigenwerte einer Matrix stetig von ihren Koeffizienten abhängen, ist  $x(\lambda)$  ebenfalls asymptotisch stabil für  $\lambda$  in der Nähe von  $\lambda_*$ , und bleibt es bis mindestens ein Eigenwert die imaginäre Achse überquert. Generisch gibt es zwei Fälle die von Interesse sind:

1. Ein einfacher reeller Eigenwert geht durch Null; hier wird die Jacobi-Matrix singular.
2. Ein Paar einfacher komplex-konjugierter Eigenwerte überquert simultan die imaginäre Achse.

Diese zwei Fälle wollen wir in diesem Kapitel im Detail diskutieren.

Sei  $(x_*, \lambda_*) \in \mathcal{E}$  singular, also  $A_* := \partial_x f(x_*, \lambda_*)$  nicht invertierbar. Dann ist  $A_*$  nicht surjektiv. Der einfachste Fall ist nun der, dass noch  $\text{span}\{R(A_*), b_*\} = \mathbb{R}^n$  gilt, wobei wir  $b_* := \partial_\lambda f(x_*, \lambda_*)$  gesetzt haben. Solch einen Punkt  $(x_*, \lambda_*)$  nennt man **Umkehrpunkt** für die Gleichung  $f(x, \lambda) = 0$ . Das folgende Beispiel illustriert die Situation.

**Beispiel.** Betrachte die eindimensionale Gleichung

$$\dot{x} = x(\lambda - (x - 1)^2).$$

Ein Equilibrium ist  $x = 0$ , das triviale. Ist  $\lambda > 0$  so finden wir zwei weitere nämlich  $x = 1 \pm \sqrt{\lambda}$ . Davon ist  $1 - \sqrt{\lambda}$  instabil falls  $\lambda \in (0, 1)$  (ein Sattelpunkt in einer Dimension) und  $1 + \sqrt{\lambda}$  stabil für alle  $\lambda > 0$  (ein stabiler Knoten in einer Dimension). Der Punkt  $(1, 0)$  ist ein Umkehrpunkt: Es gilt  $\partial_x f(1, 0) = 0$  und  $\partial_\lambda f(1, 0) = 1$ . Das Verzweigungsdiagramm ist in Abb. 12.1 dargestellt.

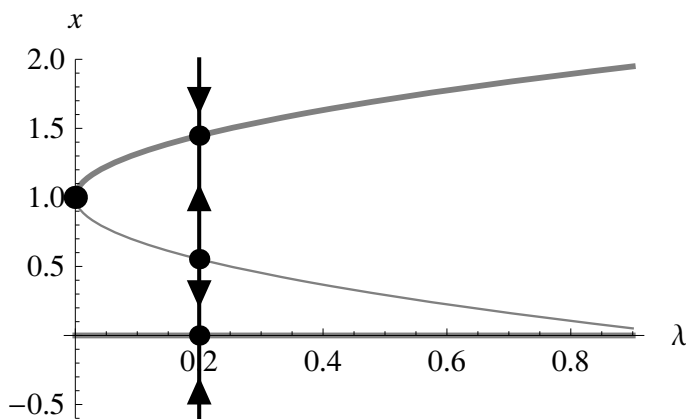


Abbildung 12.1: Sattel-Knoten-Verzweigung

Wir wollen zeigen, dass dieses einfache eindimensionale Beispiel schon den allgemeinen Fall beinhaltet.

Dazu sei  $(x_*, \lambda_*)$  ein Umkehrpunkt. Dann ist der Rang von  $A_*$ , also die Dimension von  $R(A_*)$  gleich  $n - 1$ , und  $N(A_*)$  ist eindimensional. Wir zerlegen nun  $\mathbb{R}^n = N(A_*) \oplus Y$ , d.h.  $Y$  ist ein  $n - 1$ -dimensionaler, zu  $N(A_*)$  komplementärer Unterraum. Man beachte, dass  $A_*Y = R(A_*)$  ist. Wir zerlegen demgemäß  $x = su_0 + y$ , wobei  $u_0 \in N(A_*)$ ,  $u_0 \neq 0$  fixiert ist,  $s \in \mathbb{R}$  und  $y \in Y$ . Um die Lösungsmenge von  $f(x, \lambda) = 0$  in der Nähe von  $(x_*, \lambda_*)$  zu beschreiben, betrachten wir nun die Funktion

$$g(s, y, \mu) := f(su_0 + y + x_*, \mu + \lambda_*), \quad (s, y, \mu) \in (-a, a) \times \{B_r(0) \cap Y\} \times (-b, b),$$

wobei  $a, b, r > 0$  klein genug gewählt sind. Mit  $f$  ist auch  $g$  in  $C^1$ . Wir wollen die Gleichung  $g(s, y, \mu) = 0$  nach  $(y, \mu)$  auflösen. Dazu verwenden wir den Satz über implizite Funktionen im Punkt  $(0, 0, 0)$ . Die Ableitung von  $g$  nach  $(y, \mu)$  in diesem Punkt ist

$$\partial_{(y, \mu)} g(0) \begin{bmatrix} v \\ \sigma \end{bmatrix} = \partial_x f(x_*, \lambda_*)v + \partial_\lambda f(x_*, \lambda_*)\sigma = A_*v + b_*\sigma.$$

Da  $\text{span}\{R(A_*), b_*\} = \mathbb{R}^n$  ist, ist  $\partial_{(y, \mu)} g(0)$  surjektiv, also aus Dimensionsgründen invertierbar. Daher liefert der Satz über implizite Funktionen eine  $C^1$ -Funktion  $s \mapsto (y(s), \mu(s))$ ,  $s \in (-\delta, \delta)$ , mit  $y(0) = \mu(0) = 0$  und die einzigen Lösungen von  $f(x, \lambda) = 0$  in einer Umgebung von  $(x_*, \lambda_*)$  sind  $(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*)$ ,  $|s| < \delta$ . Weiter folgt aus  $f(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*) = 0$  die Relation

$$0 = \partial_x f(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*)(u_0 + y'(s)) + \partial_\lambda f(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*)\mu'(s),$$

also mit  $A(s) = \partial_x f(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*)$  und  $b(s) = \partial_\lambda f(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*)$ ,

$$A(s)(u_0 + y'(s)) + \mu'(s)b(s) = 0, \quad s \in (-\delta, \delta). \quad (12.2)$$

Speziell in  $s = 0$  ergibt sich mit  $u_0 \in N(A_*)$

$$A_*y'(0) + \mu'(0)b_* = 0,$$

folglich ist  $\mu'(0) = 0$  wegen  $b_* \notin R(A_*)$ , und dann auch  $y'(0) = 0$ , da  $A_*$  auf  $Y$  injektiv ist. Daher liegt  $\lambda(s) = \mu(s) + \lambda_*$  für kleine  $s$  typischerweise auf einer Seite von  $\lambda_*$ , was den Namen *Umkehrpunkt* erläutert. Wir fassen zusammen.

**Satz 12.1.1.** *Sei  $f \in C^1(G \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$ ,  $(x_*, \lambda_*) \in \mathcal{E}$ , und sei  $A_* := \partial_x f(x_*, \lambda_*)$  nicht invertierbar. Es gelte:*

1.  $N(A_*) = \text{span}\{u_0\}$  ist eindimensional, und
2.  $b_* := \partial_\lambda f(x_*, \lambda_*) \notin R(A_*)$ .

Dann sind alle Lösungen der Gleichung  $f(x, \lambda) = 0$  in einer Umgebung von  $(x_*, \lambda_*)$  durch die Menge

$$\{(x(s) := su_0 + y(s) + x_*, \lambda(s) := \mu(s) + \lambda_*) : |s| < \delta\}$$

gegeben, wobei  $y : (-\delta, \delta) \rightarrow R(A_*)$  und  $\mu : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^1$  eindeutig bestimmt sind, und  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $\mu(0) = \mu'(0) = 0$  erfüllen.

$\sigma_* = 0$  ist Eigenwert von  $A_*$  mit Eigenvektor  $u_0 \neq 0$ . Es sei  $u_0^* \neq 0$  ein Eigenvektor der adjungierten  $A_*^\top$  zum Eigenwert 0, mit  $(u_0|u_0^*) = 1$ . Letzteres ist eine zusätzliche Annahme, die bedeutet, dass  $\sigma_* = 0$  halbeinfach, also algebraisch einfacher Eigenwert von  $A_*$  ist. Wir zeigen, dass es dann eine Eigenwertkurve  $s \mapsto (\sigma(s), u(s), u^*(s))$  gibt mit  $\sigma(0) = 0$ ,  $u(0) = u_0$ ,  $u^*(0) = u_0^*$ , und  $A(s)u(s) = \sigma(s)u(s)$ ,  $A^\top(s)u^*(s) = \sigma(s)u^*(s)$ , und  $(u(s)|u^*(s)) = 1$ . Da wir dieses Ergebnis häufiger benötigen werden, formulieren wir es allgemein als

**Lemma 12.1.2.** Sei  $A \in C^m((-a, a); \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $a > 0$ ,  $m \geq 0$ , und sei  $A_* := A(0)$ . Es gelte  $N(A_*) = \text{span}\{u_0\}$ ,  $N(A_*^\top) = \text{span}\{u_0^*\}$  und  $(u_0|u_0^*) = 1$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  und Funktionen  $u, u^* \in C^m((-\delta, \delta); \mathbb{R}^n)$ ,  $\sigma \in C^m((-\delta, \delta); \mathbb{R})$ , mit  $u(0) = u_0$ ,  $u^*(0) = u_0^*$ ,  $\sigma(0) = 0$ , sodass

$$A(s)u(s) = \sigma(s)u(s), \quad A^\top(s)u^*(s) = \sigma(s)u^*(s), \quad (u(s)|u^*(s)) = 1,$$

für alle  $s \in (-\delta, \delta)$  gilt.

*Beweis.* Definiere  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  mittels

$$g(u, \sigma, s) = \begin{bmatrix} A(s)u - \sigma u \\ (u|u_0^*) - 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist  $g \in C^m$ ,  $g(u_0, 0, 0) = 0$  und

$$L := \partial_{(u, \sigma)} g(u_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} A_* & -u_0 \\ u_0^{*\top} & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir zeigen, dass  $L$  injektiv, also bijektiv ist. Dazu sei  $L[v, \rho]^\top = 0$ , also  $A_*v = \rho u_0$  und  $(v|u_0^*) = 0$ . Es folgt

$$\rho = \rho(u_0|u_0^*) = (A_*v|u_0^*) = (v|A_*^\top u_0^*) = 0,$$

folglich  $A_*v = 0$ , d.h.  $v = \alpha u_0$  mit einem  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dies impliziert schließlich auch  $\alpha = \alpha(u_0|u_0^*) = (v|u_0^*) = 0$ . Der Satz über implizite Funktion liefert nun  $C^m$ -Funktionen  $u(s), \sigma(s)$  mit  $u(0) = u_0$ ,  $\sigma(0) = 0$  und  $A(s)u(s) = \sigma(s)u(s)$ ,  $(u(s)|u_0^*) = 1$  auf einem Intervall  $(-\delta_1, \delta_1)$ .

Um  $u^*(s)$  zu finden, betrachten wir die Funktion  $h : \mathbb{R}^n \times (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$h(v, s) = A^\top(s)v - \sigma(s)v + ((u(s)|v) - 1)u_0^*.$$

Es ist  $h(u_0^*, 0) = A_*^\top u_0^* - ((u_0|u_0^*) - 1)u_0^* = 0$ , und  $L := \partial_v h(0, 0) = A_*^\top + u_0^* \otimes u_0$  ist injektiv, also bijektiv. Denn  $Lv = 0$  impliziert  $A_*^\top v + (u_0|v)u_0^* = 0$ , also nach Skalarmultiplikation mit  $u_0$  folgt  $(u_0|v) = 0$ , sowie  $A_*^\top v = 0$ , d.h.  $v = \beta u_0^*$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , und dann auch  $v = 0$ . Der Satz über implizite Funktion liefert uns eine Funktion  $u^*(s)$  der Klasse  $C^m$  auf einem evtl. kleineren Intervall  $(-\delta, \delta)$  mit

$$0 = A^\top(s)u^*(s) - \sigma(s)u^*(s) + ((u(s)|u^*(s)) - 1)u_0^*, \quad s \in (-\delta, \delta), \quad u^*(0) = u_0^*.$$

Skalarmultiplikation mit  $u(s)$  ergibt dann  $(u(s)|u^*(s)) = 1$ , da  $(u(s)|u_0^*) = 1$  ist, folglich auch  $A^\top(s)u^*(s) = \sigma(s)u^*(s)$ .  $\square$

In der Situation des Umkehrpunktes gibt die Relation  $A(s)u(s) = \sigma(s)u(s)$  nach Multiplikation mit  $u^*(s)$  die Beziehung  $\sigma(s) = (A(s)u(s)|u^*(s))$ . Andererseits führt (12.2) nach Multiplikation mit  $u^*(s)$  auf

$$(b(s)|u^*(s))\mu'(s) = -(A(s)(u_0 + y'(s))|u^*(s)) = -\sigma(s)(u_0 + y'(s)|u^*(s)),$$

also

$$\mu'(s) = -\sigma(s)l(s), \quad s \in (-\delta, \delta), \quad (12.3)$$

mit der Funktion  $l(s) := (u_0 + y'(s)|u^*(s))/(b(s)|u^*(s))$ , die wegen  $b_* \notin R(A_*) = N(A_*^\top)^\perp$  für kleine  $|s|$  wohldefiniert ist, und  $l(0) = 1/(b_*|u_0^*) \neq 0$  erfüllt.

Sei jetzt zusätzlich  $f \in C^m$ ,  $m \geq 2$ . Differenziert man die Gleichung

$$f(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*) = 0$$

ein zweites Mal, so erhält man in  $s = 0$  die Beziehung

$$b_*\mu''(0) + A_*y''(0) + \partial_x^2 f(x_*, \lambda_*)u_0u_0 = 0,$$

also nach Skalarmultiplikation mit  $u_0^*$

$$(b_*|u_0^*)\mu''(0) = -(\partial_x^2 f(x_*, \lambda_*)u_0u_0|u_0^*).$$

Man beachte, dass  $(b_*|u_0^*) \neq 0$  ist, sodass diese Beziehung  $\mu''(0)$  eindeutig definiert. Nun differenzieren wir die Eigenwertgleichung nach  $s$  und erhalten in  $s = 0$

$$\sigma'(0)u_0 = A_*u'(0) + A'(0)u_0.$$

Nach Skalarmultiplikation mit  $u_0^*$  und wegen

$$A(s) = \partial_x f(su_0 + y(s) + x_*, \mu(s) + \lambda_*)$$

erhalten wir schließlich

$$\sigma'(0) = (A'(0)u_0|u_0^*) = (\partial_x^2 f(x_*, \lambda_*)u_0u_0|u_0^*).$$

Daraus folgt die zentrale Relation

$$\sigma'(0) = -(b_*|u_0^*)\mu''(0). \quad (12.4)$$

Diese Beziehung zeigt, dass im generischen Fall  $\mu''(0) \neq 0$  die Lösungsbranche für  $s > 0$  bzw.  $s < 0$  unterschiedliches Stabilitätsverhalten haben: auf dem einen Zweig ist  $\sigma(s) < 0$  auf dem anderen  $\sigma(s) > 0$ . Sind alle anderen Eigenwerte von  $A_*$  in der offenen linken Halbebene, so ist  $x(s) := su_0 + y(s) + x_*$  auf dem einen Zweig ein Sattelpunkt, auf dem anderen ein stabiler Knoten für (12.1). Deshalb werden Verzweigungspunkte dieser Art in Anlehnung an den 2D-Fall in der Literatur auch als **Sattel-Knoten Verzweigungen** bezeichnet.

**Satz 12.1.3.** *Es seien die Voraussetzungen von Satz 12.1.1 erfüllt, zusätzlich seien  $f \in C^2$ , und 0 ein halbeinfacher Eigenwert für  $A_*$ . Ferner sei  $u_0^* \in N(A_*^\top)$  mit  $(u_0|u_0^*) = 1$ , O.B.d.A. gelte  $(b_*|u_0^*) > 0$ , und es sei  $\sigma(A_*) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}_-$ , sowie*

$$\gamma := (\partial_x^2 f(x_*, \lambda_*) u_0 | u_0^*) > 0.$$

Dann gelten für (12.1) die folgenden Stabilitätsaussagen:

1. Der Zweig  $\{(su_0 + y(s), \mu(s) + \lambda_*) : -\delta < s < 0\}$  besteht aus asymptotisch stabilen Equilibria.
2. Der Zweig  $\{(su_0 + y(s), \mu(s) + \lambda_*) : 0 < s < \delta\}$  besteht aus instabilen Equilibria.

Entsprechendes gilt im Fall  $\gamma < 0$  wobei  $s$  durch  $-s$  zu ersetzen ist.

Für  $\gamma < 0$  gilt  $s\lambda'(s) > 0$ , d.h. beide Zweige sind **superkritisch**. Im Fall  $\gamma > 0$  gilt  $s\lambda'(s) < 0$ , d.h. beide Zweige sind **subkritisch**.

## 12.2 Pitchfork-Verzweigung

In vielen Anwendungen ist die triviale Lösung  $x(\lambda) = 0$  für alle  $\lambda$  gegeben, d.h. es gilt  $f(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ . Typischerweise resultiert diese Eigenschaft aus einer Normierung des Systems, das triviale Equilibrium repräsentiert dessen Normalzustand. In dieser Situation ist  $\partial_\lambda f(0, \lambda) = 0$ , daher kann ein singulärer Punkt  $(0, \lambda_*)$  kein Umkehrpunkt sein. Das folgende Beispiel zeigt was hier passiert.

**Beispiel.** Betrachte die Gleichung  $\dot{x} = x(\lambda - x^2)$ . Hier haben wir für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  das triviale Equilibrium  $x = 0$ , und für  $\lambda > 0$  zusätzlich  $x = \pm\sqrt{\lambda}$ . Damit sieht das Verzweigungsdiagramm wie eine Heugabel, englisch pitchfork, aus. Für  $\lambda = 0$  ist  $x = 0$  asymptotisch stabil. Die Linearisierung in  $x = 0$  ist durch  $A = \lambda$  gegeben, also ist  $x = 0$  für  $\lambda < 0$  ebenfalls asymptotisch stabil und für  $\lambda > 0$  ist  $x = 0$  instabil; es ist  $\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda) \equiv 1$ . Die beiden nichttrivialen Zweige sind superkritisch, beide sind asymptotisch stabil für alle  $\lambda > 0$ . Das entsprechende Verzweigungsdiagramm ist in Abb. 12.2 wiedergegeben.

Sei nun  $f(0, \lambda) \equiv 0$ , und sei  $(0, \lambda_*)$  ein singulärer Punkt, also  $A_* := \partial_x f(0, \lambda_*)$  nicht invertierbar. Wir interessieren uns für weitere Lösungen der Gleichung

$$f(x, \lambda) = 0$$

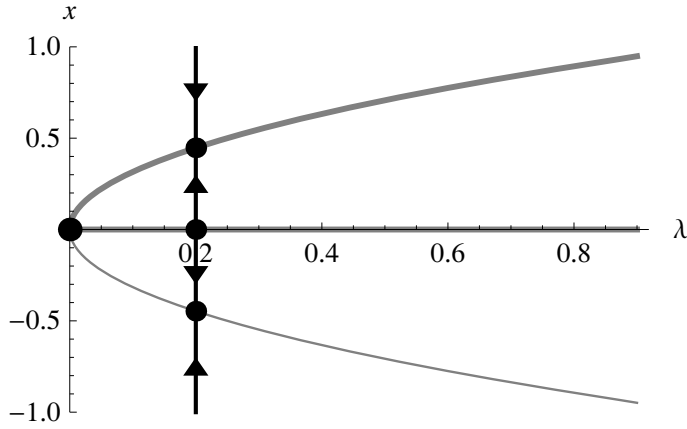


Abbildung 12.2: Pitchfork-Verzweigung

in der Nähe von  $(0, \lambda_*)$ . Dazu wählen wir ein Komplement  $Y$  zum Kern  $N(A_*)$ , und ein Komplement  $Z$  zum Bild von  $R(A_*)$ , es gelten also  $N(A_*) \oplus Y = \mathbb{R}^n$  und  $R(A_*) \oplus Z = \mathbb{R}^n$ , und bezeichnen die dazugehörigen Projektionen mit  $P$  und  $Q$ ; es ist also  $R(P) = N(A_*)$ ,  $N(P) = Y$ , und  $N(Q) = R(A_*)$ ,  $R(Q) = Z$ . Setzt man nun  $u = Px$ ,  $y = (I - P)x$ , so ist die Gleichung  $f(x, \lambda) = 0$  äquivalent zum System

$$(I - Q)f(u + y, \lambda) = 0, \quad Qf(u + y, \lambda) = 0.$$

Da  $A_*$  auf  $Y$  injektiv ist, ist  $A_* : Y \rightarrow R(A_*)$  ein Isomorphismus. Also kann man die erste dieser Gleichungen nach  $y$  auflösen. Dazu setzen wir

$$g(u, y, \mu) := (I - Q)f(u + y, \mu + \lambda_*), \quad (u, y, \mu) \in B_r^{N(A_*)}(0) \times B_r^Y(0) \times (-b, b).$$

Der Bildbereich von  $g$  liegt in  $R(A_*)$ ; man beachte, dass  $\dim R(A_*) = \dim Y$  gilt. Nun ist  $\partial_y g(0, 0, 0) = (I - Q)A_* = A_*$  ein Isomorphismus von  $Y$  auf  $R(A_*)$ . Ist also  $f \in C^1$ , so gibt es ein  $\delta \in (0, \min\{r, b\})$ , und eine  $C^1$ -Funktion  $y : B_\delta^{N(A_*)}(0) \times (-\delta, \delta) \rightarrow Y$ , sodass  $y(0, 0) = 0$  ist, und

$$(I - Q)f(u + y(u, \mu), \mu + \lambda_*) = 0, \quad \text{für alle } u \in B_\delta^{N(A_*)}(0), \quad |\mu| < \delta,$$

gilt. In einer Umgebung von 0 gibt es keine weiteren Lösungen. Weiter erhalten wir mittels Differentiation bezüglich  $\mu$  und  $u$

$$(I - Q)\partial_x f(u + y(u, \mu), \mu + \lambda_*)\partial_\mu y(u, \mu) + (I - Q)\partial_\lambda f(u + y(u, \mu), \mu + \lambda_*) = 0,$$

und

$$(I - Q)\partial_x f(u + y(u, \mu), \mu + \lambda_*)[I_{N(A_*)} + \partial_u y(u, \mu)] = 0,$$

und somit  $(I-Q)A_*\partial_\mu y(0,0) = 0$ , also  $\partial_\mu y(0,0) = 0$ , sowie  $(I-Q)A_*\partial_u y(0,0) = 0$ , also  $\partial_u y(0,0) = 0$ , da  $A_*$  auf  $N(A_*)$  verschwindet. Ferner ist  $y(0,\mu) \equiv 0$ , da  $f(0,\lambda) \equiv 0$  angenommen wurde, und  $y(u,\mu)$  eindeutig ist.

Setzt man nun die Funktion  $y(u,\mu)$  in die zweite Gleichung ein, so erhält man die reduzierte Gleichung

$$h(u,\mu) := Qf(u + y(u,\mu), \mu + \lambda_*) = 0. \quad (12.5)$$

Diese Gleichung bestimmt die Lösungsmenge in der Nähe von  $(0, \lambda_*)$ , sie heißt **Verzweigungsgleichung** des Problems. Man beachte, dass  $h(0,0) = 0$  aber auch  $\partial_u h(0,0) = 0$  und  $\partial_\mu h(0,0) = 0$  gilt. Wegen  $\dim N(A_*) < n$  liegt der Vorteil dieser Reduktion bei der Verkleinerung der Dimension des Problems, ohne Lösungen aufzugeben. Eine Lösung von (12.5) ist nach wie vor die triviale  $(0, \mu)$ , da  $y(0, \mu) \equiv 0$  ist; durch die Auflösung nach  $y$  ist auch diese Lösung nicht verloren gegangen.

Im Allgemeinen ist die Verzweigungsgleichung nicht leicht zu analysieren, insbesondere wenn  $N(A_*)$  mehrdimensional ist. Der einfachste nichttriviale, aber auch der wichtigste, ist der eindimensionale Fall, also  $\dim N(A_*) = \dim Z = 1$ . Dazu sei wieder  $N(A_*) = \text{span}\{u_0\}$ . Die Idee, welche weitere Lösungen liefert, besteht darin, die triviale Lösung "heraus zu dividieren". Dazu setzen wir

$$g(s, \mu) = \begin{cases} h(su_0, \mu)/s & \text{für } s \neq 0, \\ \partial_u h(0, \mu)u_0 & \text{für } s = 0. \end{cases}$$

Aufgrund von  $h(0, \mu) = 0$  ist  $g$  wohldefiniert; allerdings geht eine Differenzierbarkeitsstufe verloren, aber man überzeugt sich leicht, dass  $g$  in  $C^1$  ist, wenn  $f$  zur Klasse  $C^2$  gehört.

Die verbleibende Gleichung ist  $g(s, \mu) = 0$ , und diese wollen wir nach  $\mu$  auflösen. Wie im vorhergehenden Abschnitt parametrisieren wir nichttriviale Lösungen über den Kern von  $A_*$ . Nun ist  $g(0,0) = \partial_u h(0,0)u_0 = 0$  und  $\partial_\mu g(0,0) = \partial_\mu \partial_u h(0,0)u_0$ , sofern  $h$ , also  $f$  aus  $C^2$  ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen lässt sich die Verzweigungsgleichung daher nach  $\mu$  auflösen sofern

$$\partial_\mu \partial_u h(0,0)u_0 = Q\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*)u_0 \neq 0$$

erfüllt ist. Da  $N(Q) = R(A_*)$  ist, lässt sich diese Bedingung auch folgendermaßen formulieren:

$$\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*)u_0 \notin R(A_*). \quad (12.6)$$

Wir fassen das Bewiesene in folgendem Satz zusammen:

**Satz 12.2.1.** *Sei  $f \in C^2(G \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$  und  $f(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ . Sei  $A_* := \partial_x f(0, \lambda_*)$  nicht invertierbar, und gelte:*

1.  $N(A_*) = \text{span}\{u_0\}$  ist eindimensional, und
2.  $\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*)u_0 \notin R(A_*)$ .



Dann sind alle nichttrivialen Lösungen der Gleichung  $f(x, \lambda) = 0$  in einer Umgebung von  $(0, \lambda_*)$  durch

$$\{(x(s) := su_0 + y(s), \lambda(s) := \mu(s) + \lambda_*) : |s| < \delta\}$$

gegeben, wobei  $y : (-\delta, \delta) \rightarrow Y$  und  $\mu : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^1$  eindeutig bestimmt sind, und  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $\mu(0) = 0$  erfüllen.

Aus Gründen, die wir gleich sehen werden, heißt (12.6) **Transversalitätsbedingung**. Nun kann man auch den Namen *Pitchfork* für diesen Verzweigungstyp verstehen: die triviale Lösung bildet den Stiel und die mittlere Zinke der Heugabel, die abzweigenden Lösungen bilden die zwei äußeren Zinken.

Zur Untersuchung der Stabilität der Equilibria in der Nähe des Verzweigungspunktes, wenden wir Lemma 12.1.2 zweimal an. Dazu setzen wir wie im vorigen Abschnitt wieder voraus, dass 0 halbeinfach für  $A_*$  ist, und wählen ein  $u_0^* \in N(A_*^T)$  mit  $(u_0 | u_0^*) = 1$ . Man beachte, dass in diesem Fall  $\mathbb{R}^n = N(A_*) \oplus R(A_*)$  gilt. An der trivialen Lösung setzen wir  $A(\mu) = \partial_x f(0, \mu + \lambda_*)$  und erhalten eine Eigenwertkurve  $(u(\mu), u^*(\mu), \sigma(\mu))$  mit  $(u(\mu) | u^*(\mu)) \equiv 1$ ,  $\sigma(0) = 0$ ,  $u(0) = u_0$  und  $u^*(0) = u_0^*$ . Aus  $A(\mu)u(\mu) = \sigma(\mu)u(\mu)$  folgt mit Differentiation nach  $\mu$  und Multiplikation mit  $u^*(\mu)$  die Relation

$$\sigma'(\mu) = (A'(\mu)u(\mu) | u^*(\mu)), \quad |\mu| < \mu_0.$$

Für  $\mu = 0$  ergibt dies

$$\sigma'(0) = (A'(0)u_0 | u_0^*) = (\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*)u_0 | u_0^*), \quad (12.7)$$

was mit  $u_0^* \perp R(A_*)$  und der Transversalitätsbedingung (12.6) die Bedingung  $\sigma'(0) \neq 0$  impliziert. Damit haben wir eine geometrische Interpretation der Transversalitätsbedingung erhalten: in  $\lambda = \lambda_*$  überquert ein einfacher reeller Eigenwert von  $\partial_x f(0, \lambda)$  bei wachsendem  $\lambda$  die imaginäre Achse mit nichttrivialer Geschwindigkeit.

Am nichttrivialen Lösungsweig setzen wir  $B(s) = \partial_x f(su_0 + y(s), \mu(s) + \lambda_*)$ , und erhalten eine Eigenwertkurve  $(v(s), v^*(s), \theta(s))$  mit  $v(0) = u_0$ ,  $v^*(0) = u_0^*$  und  $\theta(0) = 0$ . Differenziert man die Gleichung  $B(s)v(s) = \theta(s)v(s)$  und multipliziert mit  $v^*(s)$ , so folgt

$$\begin{aligned} \theta'(s) &= (B'(s)v(s) | v^*(s)) = (\partial_x^2 f(su_0 + y(s), \mu(s) + \lambda_*)(u_0 + y'(s))v(s) | v^*(s)) \\ &\quad + (\partial_\lambda \partial_x f(su_0 + y'(s), \mu(s) + \lambda_*)\mu'(s)v(s) | v^*(s)), \end{aligned}$$

also mit  $s = 0$

$$\begin{aligned} \theta'(0) &= (\partial_x^2 f(0, \lambda_*)u_0u_0 | u_0^*) + (\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*)u_0 | u_0^*)\mu'(0) \\ &= (\partial_x^2 f(0, \lambda_*)u_0u_0 | u_0^*) + \sigma'(0)\mu'(0). \end{aligned}$$

Andererseits ergibt zweimalige Differentiation von  $f(su_0 + y(s), \mu(s) + \lambda_*) = 0$  in  $s = 0$  die Relation

$$\partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 + 2\mu'(0) \partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*) u_0 + A_* y''(0) = 0. \quad (12.8)$$

Multiplikation mit  $u_0^* \in N(A_*^\top)$  impliziert

$$(\partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 | u_0^*) + 2\sigma'(0) \mu'(0) = 0,$$

folglich gilt

$$\theta'(0) = -\sigma'(0) \mu'(0). \quad (12.9)$$

Daraus kann man den folgenden Schluss ziehen: Es seien für  $\mu < 0$  alle Eigenwerte von  $A(\mu)$  in der linken Halbebene, und in  $\lambda = \lambda_*$  wird die triviale Lösung durch die Transversalitätsbedingung instabil, also  $\sigma'(0) > 0$ ; die Verzweigung sei **transkritisch**, also  $\mu'(0) \neq 0$ . Dann besteht der *superkritische* Zweig aus asymptotisch stabilen Equilibria für (12.1), der *subkritische* Zweig hingegen aus instabilen.

Ist nun  $\mu'(0) = 0$ , was in Anwendungen häufig vorkommt, so ist (12.9) nicht aussagekräftig genug, wir benötigen ein feineres Argument. Dazu definieren wir eine Funktion  $k(s)$  mittels

$$k(s) = \begin{cases} \partial_\lambda f(su_0 + y(s), \mu(s) + \lambda_*)/s & \text{für } s \neq 0 \\ \partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*) u_0 & \text{für } s = 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $k(s)$  ist stetig, und es gilt nun mit

$$B(s)(u_0 + y'(s)) + \partial_\lambda f(su_0 + y(s), \mu(s) + \lambda_*) \mu'(s) = 0$$

nach Multiplikation mit  $v^*(s)$  für  $s \neq 0$

$$\begin{aligned} (k(s)|v^*(s))s\mu'(s) &= -(B(s)(u_0 + y'(s))|v^*(s)) = -(u_0 + y'(s)|B^\top(s)v^*(s)) \\ &= -\theta(s)(u_0 + y'(s)|v^*(s)). \end{aligned}$$

Da  $(u_0 + y'(s)|v^*(s)) \rightarrow 1$  für  $s \rightarrow 0$  gilt, ist somit

$$\varphi(s) := (k(s)|v^*(s))/(u_0 + y'(s)|v^*(s))$$

für hinreichend kleines  $|s|$  wohldefiniert, und es folgt die zentrale Beziehung

$$\theta(s) = -s\mu'(s)\varphi(s), \quad |s| < s_0, \quad (12.10)$$

wobei  $\varphi(s)$  stetig und  $\varphi(0) = \sigma'(0) > 0$  ist. Damit gilt die Stabilitätsaussage, die wir für den transkritischen Fall getroffen haben, auch im Fall  $\mu'(0) = 0$ . Es ergibt sich so folgendes Bild für die Stabilität der abzweigenden Lösungen.

**Satz 12.2.2.** *Es seien die Voraussetzungen von Satz 12.2.1 erfüllt und zusätzlich sei 0 ein halbeinfacher Eigenwert von  $A_*$ . Ferner sei  $u_0^* \in N(A_*^\top)$  mit  $(u_0|u_0^*) = 1$ , und es sei  $\sigma(A_*) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}_-$ , sowie  $(\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*) u_0 | u_0^*) > 0$ . Dann gelten für (12.1) die folgenden Stabilitätsaussagen für  $|s| < s_0$ :*

1. *Superkritische Zweige, d.h.  $s\lambda'(s) > 0$ , bestehen aus asymptotisch stabilen Equilibria.*
2. *Subkritische Zweige, d.h.  $s\lambda'(s) < 0$  bestehen aus instabilen Equilibria.*

Um zu sehen, ob ein Zweig sub- oder superkritisch ist, differenzieren wir die Gleichung  $f(x(s), \lambda(s)) = 0$  zweimal nach  $s$ , wobei  $x(s) = s u_0 + y(s)$  und  $\lambda(s) = \mu(s) + \lambda_*$  ist. Nach Multiplikation mit  $v^*(s)$  erhält man

$$\begin{aligned} 0 = & (\partial_x^2 f(x(s), \lambda(s)) x'(s) x'(s) | v^*(s)) + 2(\partial_\lambda \partial_x f(x(s), \lambda(s)) x'(s) | v^*(s)) \lambda'(s) \\ & + (B(s) x''(s) | v^*(s)) + (\partial_\lambda^2 f(x(s), \lambda(s)) \lambda'(s)^2 | v^*(s)) \\ & + (\partial_\lambda f(x(s), \lambda(s)) \lambda''(s) | v^*(s)), \end{aligned}$$

also in  $s = 0$

$$(\partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 | u_0^*) + 2(\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*) u_0 | u_0^*) \lambda'(0) = 0.$$

Wegen  $(\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*) u_0 | u_0^*) > 0$  ist der abzweigende Zweig genau dann transkritisch, wenn  $(\partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 | u_0^*) \neq 0$  ist. Gilt nun andererseits  $(\partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 | u_0^*) = 0$ , also

$$\partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 \in N(A_*^\top)^\perp = R(A_*),$$

so existiert wegen  $\mathbb{R}^n = N(A_*) \oplus R(A_*)$  ein eindeutiges  $w_0 \in R(A_*)$ , als Lösung der Gleichung

$$A_* w_0 + \partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 = 0.$$

Aus (12.8) folgt somit  $w_0 = y''(0) \in R(A_*)$ . Nochmalige Ableitung der Gleichung  $f(x(s), \lambda(s)) = 0$  nach  $s$  und Multiplikation mit  $u_0^*(s)$  ergibt dann – sofern  $f$  aus  $C^3$  ist – in  $s = 0$

$$\begin{aligned} 3\lambda''(0)(\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*) u_0 | u_0^*) \\ = -(\partial_x^3 f(0, \lambda_*) u_0 u_0 u_0 | u_0^*) - 3(\partial_x^2 f(0, \lambda_*) u_0 w_0 | u_0^*). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Aus dieser Beziehung lässt sich nun im generischen Fall ablesen, ob die Verzweigung sub- oder superkritisch ist.

## 12.3 Hopf-Verzweigung

In diesem Abschnitt betrachten wir (12.1) in der Situation  $f(0, \lambda) \equiv 0$ , wobei diesmal ein Paar einfacher, komplex konjugierter Eigenwerte  $\sigma_\pm(\lambda)$  für  $\lambda = \lambda_*$  die imaginäre Achse überquert, es gilt also  $\sigma_\pm(\lambda_*) = \pm i\omega_0$ , mit einem  $\omega_0 > 0$ . Die linearisierte Gleichung  $\dot{x} = A_* x$ , mit  $A_* = \partial_x f(0, \lambda_*)$ , besitzt dann die periodischen Lösungen  $e^{i\omega_0 t} \varphi$  und  $e^{-i\omega_0 t} \bar{\varphi}$  mit Periode  $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ . Daher erwartet

man, dass in dieser Situation periodische Lösungen von der Trivialen abzweigen. Diese Art der Verzweigung wird **Hopf-Verzweigung** genannt.

**Beispiel.** Der *Brusselator* von Prigogine und Nicolis (vgl. Abschnitt 9.3) besitzt im positiven Quadranten  $\mathbb{R}_+^2$  genau ein Equilibrium nämlich  $(a, b/a)$ . Die Linearisierung des Modells in diesem Punkt ergibt die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix},$$

also ist  $\text{sp } A = b - (1 + a^2)$  und  $\det A = a^2 > 0$ . Daher sind die Eigenwerte für  $\text{sp } A = 0$ , also für  $b = 1 + a^2$  rein imaginär und natürlich algebraisch einfach. Fasst man  $b$  als Verzweigungsparameter auf, so findet für  $b = 1 + a^2$  eine Hopf-Verzweigung statt, wie wir später sehen werden.

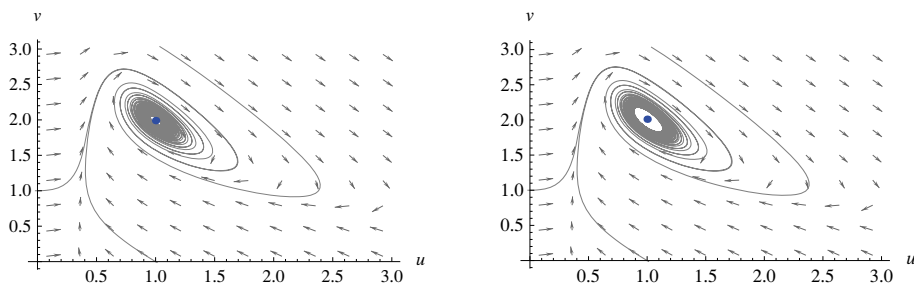


Abbildung 12.3: Brusselator mit  $a = 1$ ,  $b = 1.99$ , bzw.  $b = 2.01$

**Satz 12.3.1.** Sei  $f \in C^2(G \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$  mit  $f(0, \lambda) \equiv 0$  gegeben, und setze  $A_* = \partial_x f(0, \lambda_*)$  und  $L_* = \partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*)$ . Ferner seien die folgenden Bedingungen für ein  $\omega_0 > 0$  erfüllt:

1.  $i\omega_0$  ist algebraisch einfacher Eigenwert von  $A_*$ ,  $A_*\varphi = i\omega_0\varphi$ ,  $A_*^\top \varphi^* = -i\omega_0\varphi^*$ , und es gelte  $(\varphi|\varphi^*) = 1$ .
2. Es gilt  $\text{Re}(L_*\varphi|\varphi^*) \neq 0$ .
3. Keine Vielfachen  $ik\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \notin \{-1, 1\}$ , sind Eigenwerte von  $A_*$ .

Dann gibt es ein  $\delta > 0$  und  $C^1$ -Funktionen  $\tau : [0, \delta) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $\lambda : [0, \delta) \rightarrow \Lambda$ ,  $x : \mathbb{R} \times [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , derart dass  $x(\cdot; s)$  eine  $\tau(s)$ -periodische Lösung von (12.1) für  $\lambda = \lambda(s)$  ist. Es gelten  $\tau(0) = 2\pi/\omega_0$ ,  $\lambda(0) = \lambda_*$ ,  $x(\cdot, 0) \equiv 0$ . In einer Umgebung  $B_r(0) \times (\lambda_* - a, \lambda_* + a)$  von  $(0, \lambda_*)$  gibt es bis auf Phasenverschiebungen  $x(\cdot + \alpha; s)$  keine weiteren nichttrivialen periodischen Lösungen.

Der Beweis dieses Satzes ist konzeptionell und technisch deutlich schwieriger als die der Verzweigungssätze in den vorhergehenden Abschnitten, da hier nicht Equilibria, also Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ , sondern periodische Funktionen gesucht sind. Das Problem wird dadurch unendlichdimensional!

Bedingung 2. nennt man auch hier *Transversalitätsbedingung*, wir werden später sehen warum das gerechtfertigt ist. Bedingung 3. rührt daher, dass mit  $\pm i\omega_0$  auch Eigenwerte  $ki\omega_0$   $\tau_0$ -periodische Lösungen der linearisierten Gleichung  $\dot{x} = A_*x$  liefern, was hier für  $k \notin \{-1, 1\}$  ausgeschlossen werden soll.

Da (12.1) bezüglich  $t$  translationsinvariant ist, sind mit  $x(t; s)$  auch  $x(t + \alpha; s)$  periodische Lösungen, die aber dasselbe Orbit haben wie  $x(t; s)$ . In diesem Satz sind die periodischen Orbits eindeutig, die periodischen Lösungen sind nur bis auf Translationen, also Phasenverschiebungen eindeutig bestimmt.

*Beweis.* (i) Zunächst beachte man, dass mit  $i\omega_0$  auch  $-i\omega_0$  Eigenwert von  $A_*$  ist, mit Eigenvektor  $\bar{\varphi}$  und adjungiertem Eigenvektor  $\bar{\varphi}^*$ . Es ist

$$i\omega_0(\varphi|\bar{\varphi}^*) = (A_*\varphi|\bar{\varphi}^*) = (\varphi|A_*^T\bar{\varphi}^*) = (\varphi|i\omega_0\bar{\varphi}^*) = -i\omega_0(\varphi|\bar{\varphi}^*),$$

also  $(\varphi|\bar{\varphi}^*) = 0$ ; ebenso gilt auch  $(\bar{\varphi}|\varphi^*) = \overline{(\varphi|\bar{\varphi}^*)} = 0$ . Da die Periode der gesuchten periodischen Lösungen von vornherein nicht bekannt ist, ist es zweckmäßig, auf Periode  $2\pi$  zu normieren. Daher betrachten wir anstelle von (12.1) die normierte Gleichung

$$\omega\dot{x} = f(x, \lambda). \quad (12.12)$$

Die Periode  $\tau$  ist dann gegeben durch  $\tau = 2\pi/\omega$ ; gesucht ist nun auch noch  $\omega$ .

(ii) Es bezeichne  $X_0 := C_{per}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  den Raum aller  $\mathbb{C}^n$ -wertigen, stetigen,  $2\pi$ -periodischen Funktionen, und  $X_1 := C_{per}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen aus  $X_0$ . Versehen mit den Maximumsnormen  $|x|_{X_0} = |x|_\infty$  bzw.  $|x|_{X_1} = |x|_\infty + |\dot{x}|_\infty$  sind dies Banachräume. Wir untersuchen als erstes die Gleichung

$$\omega_0\dot{x} = A_*x + b(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12.13)$$

bei gegebenem  $b \in X_0$  im Raum  $X_1$ . Diese Gleichung hat einen zweidimensionalen Kern  $\mathcal{N}$ , der durch  $\psi(t) = e^{it}\varphi$  und  $\bar{\psi}(t) = e^{-it}\bar{\varphi}$  aufgespannt wird. Wir bezeichnen den Raum der Funktionen  $b \in X_0$ , sodass (12.13) eine Lösung in  $X_1$  besitzt, mit  $\mathcal{R}$ .

Die Lösung von (12.13) mit Anfangswert  $x(0) = x_0$  ist mit der Formel der Variation der Konstanten durch

$$x(t) = e^{A_*t/\omega_0}x_0 + \int_0^t e^{A_*(t-r)/\omega_0}b(r)/\omega_0 dr, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben. Diese Lösung ist genau dann  $2\pi$ -periodisch, wenn

$$(I - e^{2\pi A_*/\omega_0})x_0 = \int_0^{2\pi} e^{A_*(2\pi-r)/\omega_0}b(r)/\omega_0 dr$$

gilt. Da  $e^{A_*t/\omega_0}\varphi = \psi(t)$  und  $e^{A_*t/\omega_0}\bar{\varphi} = \bar{\psi}(t)$  sind, die homogene Gleichung (12.13) aufgrund von Annahmen 1. und 3. keine weiteren unabhängigen  $2\pi$ -periodischen Lösungen besitzt, ist der Kern von  $I - e^{2\pi A_*/\omega_0}$  durch

$$N(I - e^{2\pi A_*/\omega_0}) = \text{span}\{\varphi, \bar{\varphi}\}$$

gegeben, und der Orthogonalraum des Bildes von  $I - e^{2\pi A_*/\omega_0}$  ist

$$R(I - e^{2\pi A_*/\omega_0})^\perp = N(I - e^{2\pi A_*^\top/\omega_0}) = \text{span}\{\varphi^*, \bar{\varphi}^*\}.$$

Damit besitzt (12.13) genau dann eine Lösung in  $X_1$  wenn

$$\left(\int_0^{2\pi} e^{A_*(2\pi-r)/\omega_0} b(r) dr \middle| \varphi^*\right) = \left(\int_0^{2\pi} e^{A_*(2\pi-r)/\omega_0} b(r) dr \middle| \bar{\varphi}^*\right) = 0$$

erfüllt ist. Wir setzen nun  $\psi^*(t) = e^{it}\varphi^* = e^{-A_*^\top t/\omega_0}\varphi^*$  und  $\bar{\psi}^*(t) = e^{-it}\bar{\varphi}^* = e^{-A_*^\top t/\omega_0}\bar{\varphi}^*$ . Dann sind die Lösbarkeitsbedingungen wegen

$$\left(\int_0^{2\pi} e^{A_*(2\pi-r)/\omega_0} b(r) dr \middle| \varphi^*\right) = \int_0^{2\pi} (b(r) | e^{A_*^\top(2\pi-r)/\omega_0} \varphi^*) dr = \int_0^{2\pi} (b(r) | \psi^*(r)) dr$$

und der analogen Identität mit  $\bar{\varphi}^*$  äquivalent zu

$$\int_0^{2\pi} (b(r) | \psi^*(r)) dr = \int_0^{2\pi} (b(r) | \bar{\psi}^*(r)) dr = 0.$$

Gilt nun  $b \in \mathcal{R}$ , d.h.  $b$  erfüllt die Lösbarkeitsbedingungen, dann existiert eine Lösung von (12.13). Damit hat der beschränkte lineare Operator  $\omega_0 \frac{d}{dt} - A_*$  :  $X_1 \rightarrow X_0$  den Kern  $\mathcal{N}$  und das Bild  $\mathcal{R}$ ; man beachte, dass  $\mathcal{R}$  abgeschlossen ist.

(iii) Zur Abkürzung führen wir das Skalarprodukt

$$\langle u | v \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(t) | v(t)) dt, \quad u, v \in X_0,$$

ein, und definieren  $P : X_0 \rightarrow X_0$  mittels

$$Pu := \langle u | \psi^* \rangle \psi + \langle u | \bar{\psi}^* \rangle \bar{\psi}, \quad u \in X_0.$$

Offensichtlich ist  $P : X_0 \rightarrow X_0$  eine stetige Projektion in  $X_0$  mit Bild  $R(P) = \mathcal{N}$ . Andererseits gilt  $b \in \mathcal{R}$  genau dann, wenn  $\langle b | \psi^* \rangle = \langle b | \bar{\psi}^* \rangle = 0$  ist, d.h. es gilt  $N(P) = \mathcal{R}$ . Damit haben wir die Zerlegung

$$X_0 = N(P) \oplus R(P) = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N},$$

und mit  $X_0$  ist auch  $\mathcal{R} \subset X_0$  ein Banachraum, da  $\mathcal{R}$  abgeschlossen ist. Da  $\mathcal{N} \subset X_1$  gilt, ist  $P$  auch eine Projektion in  $X_1$  und es gelten  $R(P|_{X_1}) = \mathcal{N}$ ,  $N(P|_{X_1}) = \mathcal{R}_1$ , sowie  $X_1 = \mathcal{N} \oplus \mathcal{R}_1$ . Daher ist die Einschränkung  $S_0$  des Operators  $\omega_0 \frac{d}{dt} - A_*$  auf  $\mathcal{R}_1 := \mathcal{R} \cap X_1$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{R}_1$  auf  $\mathcal{R}$ . Man beachte, dass  $\overline{Pu} = P\bar{u}$  gilt, also ist mit  $u$  auch  $Pu$  reell. Ebenso ist die Lösung  $S_0^{-1}b$  reell, wenn  $b \in \mathcal{R}$  reell ist.

(iv) Von nun an sei o.B.d.A.  $\lambda_* = 0$ . Wir zerlegen die Funktion  $f$  wie folgt.

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= f(0, \lambda) + \partial_x f(0, \lambda)x + \tilde{r}(x, \lambda) \\ &= A_*x + \lambda L_*x + r(x, \lambda), \end{aligned}$$

wobei  $r$  wieder aus  $C^2$  ist, und  $r(0, 0) = \partial_x r(0, 0) = \partial_\lambda r(0, 0) = \partial_\lambda \partial_x r(0, 0) = 0$  erfüllt. Dann ist (12.12) äquivalent zu

$$\omega \dot{x} - A_*x - \lambda L_*x = r(\lambda, x).$$

Wir wählen nun den Ansatz

$$x = s(\psi + \bar{\psi}) + sy, \quad \langle y | \psi^* \rangle = \langle y | \bar{\psi}^* \rangle = 0.$$

Dabei ist mit  $y$  auch  $x$  reell, denn es ist  $\psi + \bar{\psi} = 2\operatorname{Re} \psi$ . In die letzte Gleichung eingesetzt ergibt dieser Ansatz nach Division durch  $s > 0$

$$i(\omega - \omega_0)\psi - i(\omega - \omega_0)\bar{\psi} + \omega \dot{y} - A_*y - \lambda L_*(\psi + \bar{\psi} + y) = r_0(s, \lambda, y),$$

mit

$$r_0(s, \lambda, y) := \begin{cases} r(s(\psi + \bar{\psi}) + sy, \lambda)/s, & s \neq 0, \\ \partial_x r(0, \lambda)(\psi + \bar{\psi} + y), & s = 0. \end{cases}$$

Man beachte, dass  $r_0$  eine Differenzierbarkeitsstufe weniger besitzt als  $r$ , aber immer noch aus  $C^1$  ist, und es gilt  $r_0(0, 0, 0) = \partial_y r_0(0, 0, 0) = \partial_\lambda r_0(0, 0, 0) = 0$ . Nun ist

$$\langle L_*\psi | \psi^* \rangle = (L_*\varphi | \varphi^*) =: \gamma, \quad \langle \overline{L_*\psi} | \bar{\psi}^* \rangle = \bar{\gamma}, \quad \langle \psi | \bar{\psi}^* \rangle = \langle \bar{\psi} | \psi^* \rangle = 0,$$

und nach partieller Integration auch  $\langle \dot{y} | \psi^* \rangle = \langle \dot{y} | \bar{\psi}^* \rangle = 0$ , sowie  $\langle A_*y | \psi^* \rangle = \langle A_*y | \bar{\psi}^* \rangle = 0$ . Nach Anwendung von  $\psi^*$  und  $\bar{\psi}^*$  und  $I - P$  erhält man daher das äquivalente System

$$\begin{aligned} i(\omega - \omega_0) - \lambda\gamma &= \langle r_0(s, \lambda, y) | \psi^* \rangle + \lambda \langle L_*y | \psi^* \rangle \\ -i(\omega - \omega_0) - \lambda\bar{\gamma} &= \langle r_0(s, \lambda, y) | \bar{\psi}^* \rangle + \lambda \langle L_*y | \bar{\psi}^* \rangle \\ S_0y - (\omega - \omega_0)\dot{y} &= \lambda(I - P)L_*(\psi + \bar{\psi} + y) + (I - P)r_0(s, \lambda, y). \end{aligned} \tag{12.14}$$

Hierbei ist die 2. Gleichung die komplex-konjugierte der 1., also redundant. Die letzte Gleichung, also

$$S_0y - (\omega - \omega_0)\dot{y} = \lambda(I - P)L_*(\psi + \bar{\psi} + y) + (I - P)r_0(s, \lambda, y), \tag{12.15}$$

lässt sich mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen im reellen Banachraum  $\mathcal{R}_1$  nach  $y$  auflösen, denn ihre Ableitung nach  $y$  im Punkt  $(s, \omega, \lambda, y) = (0, \omega_0, 0, 0)$  ist  $S_0$  und nach Beweisschritt (iii) ist  $S_0 : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}$  ein Isomorphismus. Wir erhalten so eine  $C^1$ -Funktion  $y : (-\delta, \delta) \times (\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{R}_1$  mit  $y(0, \omega_0, 0) = 0$

sowie  $\partial_\omega y(0, \omega_0, 0) = 0$ . Setzt man  $y(s, \omega, \lambda)$  in die erste Gleichung aus (12.14) ein, so erhält man die *Verzweigungsgleichung*:

$$i(\omega - \omega_0) - \lambda\gamma = g(s, \omega, \lambda), \quad (12.16)$$

wobei

$$g(s, \omega, \lambda) = \langle r_0(s, \lambda, y(s, \omega, \lambda)) | \psi^* \rangle + \lambda \langle L_* y(s, \omega, \lambda) | \psi^* \rangle$$

ist. Aufspalten in Real- und Imaginärteil ergibt das zweidimensionale reelle System

$$-\lambda \operatorname{Re} \gamma = \operatorname{Re} g(s, \omega, \lambda), \quad (12.17)$$

$$(\omega - \omega_0) - \lambda \operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Im} g(s, \omega, \lambda), \quad (12.18)$$

Dieses System kann man nun mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen nach  $\omega$  und  $\lambda$  auflösen. Denn dessen Ableitung nach  $\omega$  und  $\lambda$  im Punkt  $(0, \omega_0, 0)$  ist die Matrix

$$C := \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{Re} \gamma \\ 1 & -\operatorname{Im} \gamma \end{bmatrix},$$

deren Determinante  $\det C = \operatorname{Re} \gamma$  ist, also nach Voraussetzung 2.  $\det C \neq 0$ . Damit erhalten wir Funktionen  $\omega, \lambda : (-s_0, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^1$  mit  $\omega(0) = \omega_0, \lambda(0) = 0 = \lambda_*$ , und es gibt keine weiteren Lösungen in einer Umgebung von  $(\omega_0, \lambda_*)$ . Der Satz ist damit bewiesen.  $\square$

Um die Richtung der Verzweigung zu bestimmen, muss man zur Kenntnis nehmen, dass  $\lambda'(0) = \omega'(0) = 0$  ist; vgl. Abschnitt 12.5. Daher differenzieren wir die Gleichung  $-\lambda(s) \operatorname{Re} \gamma = \operatorname{Re} g(s, \omega(s), \lambda(s))$  zweimal nach  $s$  und werten sie in  $s = 0$  aus. Zunächst ergibt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Darstellung

$$g(s, \omega, \lambda) = \left\langle \int_0^1 (\partial_x r(\sigma s(\psi + \bar{\psi} + y), \lambda)(\psi + \bar{\psi} + y) | \psi^*) d\sigma \right\rangle + \lambda \langle L_* y | \psi^* \rangle.$$

Nach Einsetzen der Funktionen  $\lambda(s), \omega(s), y = y(s, \omega(s), \lambda(s))$  ergibt eine einfache, aber längere Rechnung für  $s = 0$  die Identität

$$\begin{aligned} -3\lambda''(0) \operatorname{Re} \gamma &= \operatorname{Re}[(\partial_x^3 f(0, \lambda_*) \varphi \varphi \bar{\varphi} | \varphi^*) + 3\langle \partial_x^2 f(0, \lambda_*) y'(0)(\psi + \bar{\psi}) | \psi^* \rangle \\ &\quad + 3\langle \partial_x^2 f(0, \lambda_*) (\psi + \bar{\psi}) y'(0) | \psi^* \rangle]. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Dabei beachte man, dass  $y'(0)$  als Lösung des aus (12.15) resultierenden Problems

$$S_0 y'(0) = \frac{1}{2} \partial_x^2 f(0, \lambda_*) (\psi + \bar{\psi})(\psi + \bar{\psi})$$

eindeutig bestimmt ist. Die Beziehung (12.19) ermöglicht die Bestimmung der Verzweigungsrichtung. Natürlich müssen wir hierbei  $f \in C^3$  voraussetzen, damit diese Argumentation erlaubt ist.



## 12.4 Periodische Lösungen Hamiltonscher Systeme

Als Anwendung der Hopf-Verzweigung zeigen wir ein klassisches Resultat über periodische Lösungen Hamiltonscher Systeme, das auf Ljapunov zurückgeht. Dazu betrachten wir das Hamilton-System

$$\dot{q} = \partial_p H(q, p), \quad \dot{p} = -\partial_q H(q, p), \quad (12.20)$$

mit einer Hamilton-Funktion  $H \in C^3(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ . Es ist bequem, dieses System in der Gleichung  $\dot{x} = J\nabla H(x)$  zusammenzufassen, wobei  $x = (q, p)$  und

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

sind. Die Matrix  $J$  heißt *Symplektik* und hat die Eigenschaften  $J^\top = J^{-1} = -J$ ,  $(Jx|x) = 0$  für reelle  $x$  und  $(Jz|z) \in i\mathbb{R}$  für komplexe  $z$ . Wir betrachten das Hamilton-System in der Nähe eines Equilibriums  $x_* = (q_*, p_*)$ , also eines kritischen Punktes von  $H$ . Es gilt das folgende Resultat:

**Satz 12.4.1.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  offen,  $H \in C^3(U; \mathbb{R})$ , und  $x_* \in U$  ein kritischer Punkt von  $H$ . Es sei  $i\omega$  ein algebraisch einfacher Eigenwert von  $A_* := J\nabla^2 H(x_*)$ ,  $\omega > 0$ , und kein Eigenwert  $\mu \neq \pm i\omega$  von  $A_*$  sei auf der imaginären Achse. Dann besitzt das Hamilton-System  $\dot{x} = J\nabla H(x)$  in einer Umgebung  $B_r(x_*) \subset U$  von  $x_*$  eine eindeutige einparametrische Schar periodischer Lösungen.*

*Beweis.* Die Idee besteht darin, Satz 12.3.1 auf die Gleichung  $\dot{x} = f(x, \lambda)$  im Punkt  $(x_*, 0)$  anzuwenden, wobei  $f(x, \lambda) = J\nabla H(x) + \lambda\nabla H(x)$  ist. Offenbar ist  $\partial_x f(x_*, 0) = A_*$  und  $\partial_x \partial_\lambda f(x_*, 0) = \nabla^2 H(x_*) =: L_*$ . O.B.d.A. kann man  $x_* = 0$  annehmen. Die Annahmen 1. und 3. von Satz 12.3.1 sind nach Voraussetzung erfüllt, wir verifizieren nun 2. Es seien  $\varphi$  und  $\varphi^*$  wie in Satz 12.3.1 definiert. Dann gelten  $J\nabla^2 H(0)\varphi = i\omega\varphi$  und

$$\nabla^2 H(0)J^\top \varphi^* = (J\nabla^2 H(0))^\top \varphi^* = -i\omega\varphi^*,$$

folglich

$$J\nabla^2 H(0)J^\top \varphi^* = -i\omega J\varphi^* = i\omega J^\top \varphi^*,$$

und somit  $J^\top \varphi^* = \alpha\varphi$ , da  $i\omega$  einfach ist. Ferner ist  $\alpha \neq 0$  da sonst  $\varphi^* = 0$  wäre, im Widerspruch zu  $(\varphi|\varphi^*) = 1$ . Nun folgt

$$(L_*\varphi|\varphi^*) = (\nabla^2 H(0)\varphi|\varphi^*) = (J\nabla^2 H(0)\varphi|J\varphi^*) = i\omega(\varphi| - J^\top \varphi^*) = -i\omega\bar{\alpha}|\varphi|_2^2.$$

Danach wäre die Annahme 2. in Satz 12.3.1 erfüllt, falls  $\text{Im } \alpha \neq 0$  ist. Es gilt

$$1 = (\varphi|\varphi^*) = (J\varphi|J\varphi^*) = -(J\varphi|\alpha\varphi) = -\bar{\alpha}(J\varphi|\varphi).$$

Da der Term  $(J\varphi|\varphi)$  rein imaginär ist, gilt  $\alpha \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Nach Satz 12.3.1 findet also eine Hopf-Verzweigung statt, und wir finden eine eindeutige Schar periodischer Orbits  $\gamma(s)$ , Perioden  $\tau(s)$ , und Parameter  $\lambda(s)$ , wobei  $s \in (0, \delta)$  ist.

Der Clou des Beweises ist nun der, dass  $\lambda(s) = 0$  für alle  $s$  gilt, d.h. die periodischen Orbits gehören zu Lösungen des Hamilton Systems. In der Tat ist nach Voraussetzung  $J\nabla^2 H(0)$  nichtsingulär, also auch  $\nabla^2 H(0)$ . Dies impliziert, dass  $x_* = 0$  isolierter kritischer Punkt von  $H$  ist, also dass  $\nabla H(x) \neq 0$  in einer punktierten Umgebung  $B_r(0) \setminus \{0\}$ . Weiter gilt

$$\dot{H}(x) = (J\nabla H(x)|\nabla H(x)) + \lambda|\nabla H(x)|_2^2 = \lambda|\nabla H(x)|_2^2,$$

also ist die Funktion  $-\lambda H(x)$  für  $\lambda \neq 0$  eine strikte Ljapunov-Funktion für  $\dot{x} = f(x, \lambda)$ . Damit hat diese Gleichung für  $\lambda \neq 0$  keine nichtkonstanten periodischen Lösungen. Daher muss  $\lambda(s) = 0$  für alle  $s \in (0, \delta)$  gelten.  $\square$

## 12.5 Stabilität bei Hopf-Verzweigung

(i) Es seien die Voraussetzungen von Satz 12.3.1 erfüllt. Da  $i\omega$  algebraisch einfacher Eigenwert von  $A_*$  ist, gibt es nach einer einfachen Modifikation von Lemma 12.1.2 eine  $C^1$ -Eigenwertkurve  $(\sigma(\lambda), \phi(\lambda), \phi^*(\lambda))$ ,  $\lambda \in (\lambda_* - \eta, \lambda_* + \eta)$ , sodass  $\sigma(\lambda_*) = i\omega_0$ ,  $\phi(\lambda_*) = \varphi$ ,  $\phi^*(\lambda_*) = \varphi^*$ ,  $(\phi(\lambda)|\phi^*(\lambda)) = 1$ , und

$$A(\lambda)\phi(\lambda) = \sigma(\lambda)\phi(\lambda), \quad A^\top(\lambda)\phi^*(\lambda) = \bar{\sigma}(\lambda)\phi^*(\lambda), \quad \lambda \in (\lambda_* - \eta, \lambda_* + \eta),$$

gelten. Differentiation nach  $\lambda$  und Multiplikation mit  $\phi^*(\lambda)$  ergibt

$$(A'(\lambda)\phi(\lambda)|\phi^*(\lambda)) = \sigma'(\lambda),$$

also für  $\lambda = \lambda_*$

$$\operatorname{Re} \sigma'(\lambda_*) = \operatorname{Re} (L_* \varphi | \varphi^*),$$

da  $A'(\lambda) = \partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda)$ , also  $A'(\lambda_*) = L_*$  ist. Daher ist Bedingung 2. aus Satz 12.3.1 äquivalent zu  $\operatorname{Re} \sigma'(\lambda_*) \neq 0$ , d.h. der Eigenwert  $\sigma(\lambda)$  überquert die imaginäre Achse für  $\lambda = \lambda_*$  mit nichttrivialer Geschwindigkeit. Dies rechtfertigt die Bezeichnung *Transversalitätsbedingung* auch im Fall der Hopf-Verzweigung.

Sind alle Eigenwerte von  $A_*$  mit Ausnahme von  $\pm i\omega_0$  in der offenen linken Halbebene, und gilt  $\operatorname{Re} \sigma'(\lambda_*) > 0$ , so ist das triviale Equilibrium von (12.1) für  $\lambda_* - \eta < \lambda < \lambda_*$  asymptotisch stabil, für  $\lambda_* < \lambda < \lambda_* + \eta$  instabil, verliert also in  $\lambda = \lambda_*$  seine Stabilität. Wir nehmen im Folgenden  $\operatorname{Re} \sigma'(\lambda_*) > 0$  an.

(ii) Ersetzt man  $s$  durch  $-s$  so ergibt sich  $-s(\psi(t) + \bar{\psi}(t)) = s(\psi(t + \pi) + \bar{\psi}(t + \pi))$ , d.h. eine Phasenverschiebung um  $\pi$ . Mit der Transformation  $\tau y(t) = -y(t + \pi)$  sieht man nun die Symmetrie

$$r_0(-s, \lambda, \tau y) = \tau r_0(s, \lambda, y),$$

und daher gilt aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen von (12.15) die Symmetrie  $y(-s, \lambda, \omega) = \tau y(s, \lambda, \omega)$ . Da außerdem  $g(-s, \omega, \lambda) = g(s, \omega, \lambda)$  ist, folgt  $\omega(-s) = \omega(s)$  und  $\lambda(-s) = \lambda(s)$ , und die periodischen Lösungen  $x(\cdot; s) = s(\psi + \bar{\psi} + y(s))$

sind für negative  $s$  lediglich die um  $\pi$  phasenverschobenen für  $|s|$ . Daher genügt es tatsächlich nur den Zweig für  $s > 0$  zu betrachten, denn der Zweig für  $s < 0$  gibt keine weiteren Lösungen. Insbesondere sind  $\lambda'(0) = \omega'(0) = 0$ . Dies impliziert, dass die periodische Lösung sehr schnell abzweigt. Denn ihre Amplitude ist proportional zu  $s$ . Hingegen ist für kleine  $s$  die Änderung des Parameters  $\lambda(s)$  ebenso wie der Frequenz  $\omega(s)$  und daher auch der Periode  $\tau(s) = 2\pi/\omega(s)$  proportional zu  $s^2$ . Diese Größen ändern sich also verglichen mit der Amplitude nur langsam in der Nähe des Verzweigungspunktes.

(iii) Um die Stabilität der abzweigenden Lösungen zu untersuchen, verwenden wir die *Floquet-Theorie* aus Abschnitt 11.2. Da die Gleichung (12.1) autonom ist, ist ein Floquet-Multiplikator stets gleich eins, und er ist algebraisch zweifach aber halbeinfach für  $s = 0$ . Daher ist der zweite Floquet-Multiplikator  $\mu(s)$  reell, und seine Lage entscheidet über die Stabilität der abzweigenden periodischen Lösungen, denn wegen  $\sigma(A_*) \setminus \{\pm i\omega_0\} \subset \mathbb{C}_-$  befinden sich alle anderen Floquet-Multiplikatoren für  $s = 0$  strikt innerhalb des Einheitskreises, also auch für kleine positive  $s$ . Daher müssen wir  $\mu(s)$  studieren; man beachte, dass auch  $\mu'(0) = 0$  aufgrund der Symmetrie  $\mu(-s) = \mu(s)$  gilt.

Wir betrachten daher das Problem

$$\omega(s)\dot{u}(t) = B(t; s)u(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad u(2\pi) = \mu(s)u(0), \quad (12.21)$$

wobei  $B(t; s) = \partial_x f(x(t; s), \lambda(s))$  und  $x(t; s) = s(\psi(t) + \bar{\psi}(t) + y(t; s))$  gesetzt wurde. Für  $s = 0$  ergibt sich das Problem

$$\omega_0\dot{u}(t) = A_*u(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad u(2\pi) = \mu_0u(0),$$

welches  $\mu_0 = 1$  als halbeinfachen doppelten Floquet-Multiplikator hat, und die Eigenvektoren lauten  $\varphi$  und  $\bar{\varphi}$ .

Sei  $X(t; s)$  das Hauptfundamentalsystem von (12.21), und  $M(s) = X(2\pi; s)$  die zugehörige Monodromiematrix. Ist  $\mu(s) \neq 1$ , dann sind die Kerne  $N(M(s) - I)$  und  $N(M(s) - \mu(s))$  eindimensional, denn die Eigenwerte 1 und  $\mu(s)$  von  $M(s)$  sind algebraisch einfach. Wir fixieren dann  $u_0(s) \in N(M(s) - I)$ ,  $u_0^*(s) \in N(M^T(s) - I)$  mit  $(u_0(s)|u_0^*(s)) = 1$ , und  $v_0(s) \in N(M(s) - \mu(s))$ ,  $v_0^*(s) \in N(M^T(s) - \mu(s))$  mit  $(v_0(s)|v_0^*(s)) = 1$ ; man beachte dass  $\mu(s) \neq 1$  schon  $(u_0(s)|v_0^*(s)) = (v_0(s)|u_0^*(s)) = 0$  nach sich zieht. Da  $M(s)$  reell ist, können alle diese Vektoren reell gewählt werden, und o.B.d.A. können wir  $|v_0^*(s)|_2 = 1$  annehmen. Als nächstes setzen wir  $u(t; s) = X(t; s)u_0(s)$ ,  $v(t; s) = X(t; s)v_0(s)$  sowie  $u^*(t; s) = X^{-T}(t; s)u_0^*(s)$ ,  $v^*(t; s) = X^{-T}(t; s)v_0^*(s)$ ; dann gilt  $\langle u(s)|u^*(s) \rangle = \langle v(s)|v^*(s) \rangle = 1$  und  $\langle u(s)|v^*(s) \rangle = \langle v(s)|u^*(s) \rangle = 0$ .

Differenziert man  $\omega\dot{x} = f(x, \lambda)$  nach  $t$  so folgt

$$\omega(s)\ddot{x}(t; s) = \partial_x f(x(t; s), \lambda(s))\dot{x}(t; s) = B(t; s)\dot{x}(t; s),$$

folglich kann man o.B.d.A.  $u(t; s) = \dot{x}(t; s)/s = i(\psi - \bar{\psi})(t) + \dot{y}(t; s)$  setzen. Mit  $s \rightarrow 0$  folgt dann  $u(\cdot; s) \rightarrow i(\psi - \bar{\psi})$ , also auch  $u_0(s) \rightarrow i(\varphi - \bar{\varphi})$ . Differenziert man

die Gleichung nach  $s$  so erhält man (der  $'$  bedeutet die Ableitung nach  $s$ )

$$\omega(s)\dot{x}'(t; s) = \partial_x f(x(t; s), \lambda(s))x'(t; s) + \partial_\lambda f(x(t; s), \lambda(s))\lambda'(s) - \omega'(s)\dot{x}(t; s).$$

Andererseits gilt  $x'(t; s) = \psi(t) + \bar{\psi}(t) + y(t; s) + sy'(t; s) \rightarrow \psi(t) + \bar{\psi}(t)$  für  $s \rightarrow 0$ . Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit  $u^*(s)$  und erhalten nach partieller Integration die Beziehung

$$s\omega'(s) = \lambda'(s)\langle \partial_\lambda f(x(\cdot; s), \lambda(s)) | u^*(\cdot; s) \rangle.$$

Des Weiteren gilt wegen

$$v^*(2\pi; s) = X^{-\top}(2\pi; s)v_0^*(s) = M^{-\top}(s)v_0^*(s) = \frac{1}{\mu(s)}v_0^*(s),$$

die Relation

$$\left(\frac{1}{\mu(s)} - 1\right)\omega(s)(x'(0; s)|v_0^*(s)) = \omega(s)(x'(0; s)|v^*(2\pi; s) - v^*(0; s)).$$

Damit ergibt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\omega(s)(x'(0; s)|v^*(2\pi; s) - v^*(0; s)) = \omega(s) \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(x'(t; s)|v^*(t; s))dt,$$

denn  $x'(0; s) = x'(2\pi; s)$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \omega(s) \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(x'(t; s)|v^*(t; s))dt \\ &= \omega(s) \int_0^{2\pi} [(x'(t; s)|v^*(t; s)) + (x'(t; s)|\dot{v}^*(t; s))]dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(B(t; s)x'(t; s) + \partial_\lambda f(x(t; s), \lambda(s))\lambda'(s) - \omega'(s)\dot{x}(t; s)|v^*(t; s)) \\ &\quad - (x'(t; s)|B^\top(t; s)v^*(t; s))]dt \\ &= 2\pi\langle \partial_\lambda f(x(\cdot; s), \lambda(s))\lambda'(s) - \omega'(s)\dot{x}(\cdot; s) | v^*(\cdot; s) \rangle \\ &= 2\pi\langle \partial_\lambda f(x(\cdot; s), \lambda(s))\lambda'(s) | v^*(\cdot; s) \rangle, \end{aligned}$$

denn  $\omega(s)\dot{v}^*(t; s) = -B^\top(t; s)v^*(t; s)$  und  $\langle \dot{x}(\cdot; s) | v^*(\cdot; s) \rangle = s\langle u(\cdot; s) | v^*(\cdot; s) \rangle = 0$ . Insgesamt erhalten wir so die Beziehung

$$(1 - \mu(s))\omega(s)(x'(0; s)|v_0^*(s)) = 2\pi\lambda'(s)\mu(s)\langle \partial_\lambda f(x(\cdot; s), \lambda(s)) | v^*(\cdot; s) \rangle.$$

Sei nun  $s_k \rightarrow 0$  eine Folge mit  $\mu(s_k) \neq 1$ . Da die Folge  $(v_0^*(s_k))$  beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge die gegen ein  $v_0^* \in N(M(0)^\top - I)$  konvergiert;  $v_0^*$  ist reell, hat Norm Eins, und ist von der Form  $v_0^* = a\varphi^* + b\bar{\varphi}^*$ . Da nun außerdem  $(i(\varphi - \bar{\varphi})|v_0^*) = 0$  gilt,

folgt  $a = b \in \mathbb{R}$ . Wegen  $|v_0^*|_2 = 1$  sind  $\pm a(\bar{\varphi} + \bar{\varphi}^*)$  die einzigen Häufungspunkte von  $(v(s_k))$ . Wir erhalten somit

$$(x'(0; s)|v_0^*(s)) \rightarrow (\varphi + \bar{\varphi}|\pm a(\varphi^* + \bar{\varphi}^*)) = \pm 2a \neq 0.$$

Als nächstes berechnen wir

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial_\lambda f(x(t; s), \lambda(s))}{s} = \partial_x \partial_\lambda f(0, \lambda_*) x'(t, 0) + \partial_\lambda^2 f(0, \lambda_*) \lambda'(0) = L_*(\psi(t) + \bar{\psi}(t)),$$

und erhalten damit

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{s} \partial_\lambda f(x(\cdot; s), \lambda(s)) | v^*(\cdot; s) \right\rangle = \langle L_*(\psi + \bar{\psi}) | \pm a(\psi^* + \bar{\psi}^*) \rangle = \pm 2a \operatorname{Re}(L_* \varphi | \varphi^*).$$

Dies ergibt schließlich die wichtige Identität

$$1 - \mu(s) = s \lambda'(s) \mu(s) h(s), \quad h(s) = 2\pi \frac{\left\langle \frac{1}{s} \partial_\lambda f(x(\cdot; s), \lambda(s)) | v^*(\cdot; s) \right\rangle}{\omega(s)(x'(0; s)|v_0^*(s))}, \quad (12.22)$$

wobei  $h(s) \rightarrow 2\pi \operatorname{Re}(L_* \varphi | \varphi^*) / \omega_0$  für  $s \rightarrow 0$  gilt. Ist nun  $\operatorname{Re}(L_* \varphi | \varphi^*) = \operatorname{Re} \sigma'(0) > 0$ , so zeigt Identität (12.22), dass  $\lambda'(s) > 0$  einen Floquet-Multiplikator  $\mu(s) < 1$  nach sich zieht, also impliziert Satz 11.4.3 die orbitale asymptotische Stabilität des abzweigenden Orbits. Im Fall  $\lambda'(s) < 0$  hingegen ergibt sich analog die Instabilität des abzweigenden Orbits. Dies ist der Inhalt des folgenden Resultats.

**Satz 12.5.1.** *Es seien die Voraussetzungen von Satz 12.3.1 erfüllt. Es sei  $A_* \varphi = i\omega_0 \varphi$ ,  $A_*^\top \varphi^* = -i\omega_0 \varphi^*$ , mit  $(\varphi | \varphi^*) = 1$  und  $\operatorname{Re}(\partial_\lambda \partial_x f(0, \lambda_*) \varphi | \varphi^*) > 0$ . Ferner gelte  $\sigma(A_*) \setminus \{\pm i\omega_0\} \subset \mathbb{C}_-$ . Dann gelten für die abzweigenden periodischen Orbits von (12.1) die folgenden Stabilitätsaussagen für  $0 < s < s_0$ :*

1. *Superkritische Zweige, d.h.  $\lambda'(s) > 0$ , bestehen aus orbital asymptotisch stabilen periodischen Lösungen.*
2. *Subkritische Zweige, d.h.  $\lambda'(s) < 0$  bestehen aus instabilen periodischen Lösungen.*

Zum Abschluss dieses Abschnitts kommen wir auf den Brusselator zurück.

**Beispiel.** *Der Brusselator.* Offensichtlich ist  $\sigma'(b_*) = 1/2$ , also überqueren 2 konjugiert komplexe Eigenwerte in  $b = b_* = 1 + a^2$  die imaginäre Achse mit positiver Geschwindigkeit. Wir interessieren uns für die Stabilität des abzweigenden Orbits. Da es nach Beispiel 2 in Abschnitt 9.3 im Bereich  $b \leq 1 + a^2$  keine echten periodischen Orbits gibt, muss  $b(s) > 1 + a^2$  für  $s > 0$  sein. Die Eigenwerte von  $A_*$  sind  $\pm ia$ , daher ist die Periode  $\tau_* = 2\pi/a$ . Da  $f$  im Falle des Brusselators polynomial, also analytisch ist, hat auch die Funktion  $b(s)$  diese Eigenschaft. Daher gibt es ein kleinstes  $m \in \mathbb{N}$  mit  $b^{(m)}(0) \neq 0$ , und es ist  $b(s) = 1 + a^2 + b^{(m)}(0)s^m/m! + O(s^{m+1})$ .

Da  $b$  symmetrisch ist, muss  $m$  gerade sein, und es ist  $b^{(m)}(0) > 0$ , da der Zweig periodischer Lösungen im Bereich  $b > 1 + a^2$  liegt. Damit ist der abzweigende Zweig superkritisch, besteht also nach Satz 12.5.1 aus orbital asymptotisch stabilen periodischen Lösungen.

## 12.6 Chemische Reaktionstechnik

Als Anwendung betrachten wir in diesem Abschnitt einen idealen Rührkessel, in dem eine nichtisotherme Reaktion 1. Ordnung abläuft. Zur Modellierung sei  $c(t)$  die Konzentration der abreagierenden Substanz,  $\theta(t)$  die absolute Temperatur,  $c^f$  die Konzentration im Zustrom,  $\theta^f$  dessen Temperatur, sowie  $V$  das Volumen,  $\dot{V}$  der Volumenstrom durch den Reaktor,  $r(c, \theta)$  die Reaktionsgeschwindigkeit, und  $q(\theta)$  eine externe Kühlung des Reaktors. Dann erfüllen  $(c, \theta)$  unter der Annahme konstanter Wärmekapazität  $\kappa > 0$  und vernachlässigbarer Volumenveränderung sowie idealer Durchmischung das System

$$\begin{aligned} V\dot{c} &= \dot{V}(c^f - c) - Vr(c, \theta), & c(0) &= c_0 \geq 0, \\ \kappa V\dot{\theta} &= \kappa\dot{V}(\theta^f - \theta) + \Delta H\kappa Vr(c, \theta) - \kappa Vq(\theta), & \theta(0) &= \theta_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet  $\Delta H$  die *Reaktionsenthalpie*, welche angibt, wieviel Wärmeenergie pro Mol durch die Reaktion frei, bzw. verbraucht wird. Die Reaktion heißt *exotherm* wenn  $\Delta H > 0$ , *endotherm* wenn  $\Delta H < 0$ , und *isotherm* wenn  $\Delta H = 0$  ist. Die Reaktionsrate  $r(c, \theta)$  ist typischerweise vom *Arrhenius-Typ*:

$$r(c, \theta) = k_0 c e^{-E/R\theta}, \quad c, \theta > 0,$$

wobei  $k_0 > 0$  die maximale Reaktionsgeschwindigkeit angibt.  $E > 0$  heißt *Aktivierungsenergie*, und  $R > 0$  ist die *Avogadro-Konstante*. Die Kühlungsfunktion  $q(\theta)$  ist wachsend, ein typisches Beispiel ist die *Newtonsche Kühlung*

$$q(\theta) = K(\theta - \theta_K), \quad \theta > 0,$$

wobei  $K \geq 0$  die Kühlintensität und  $\theta_K > 0$  die Temperatur der Kühlung bedeuten. Naheliegenderweise dividiert man die Gleichung für  $c$  durch  $V$ , die für  $\theta$  durch  $\kappa V$ , und erhält so das System

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\tau}(c^f - c) - r(c, \theta), & c(0) &= c_0 \geq 0, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\tau}(\theta^f - \theta) + \Delta H r(c, \theta) - q(\theta), & \theta(0) &= \theta_0 \geq 0, \end{aligned}$$

wobei die Zahl  $\tau = V/\dot{V}$  *Verweilzeit* des Reaktors genannt wird;  $\tau$  gibt die mittlere Zeit an, die ein Partikel im Reaktor verweilt. Wir skalieren die Variablen nun wie folgt.

$$u(t) := c(\tau t)/c^f, \quad v(t) = (\theta(\tau t) - \theta^f)/(\Delta H c^f),$$

und erhalten das skalierte System

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 1 - u - du\psi(v), & u(0) &= u_0 \geq 0, \\ \dot{v} &= -v + du\psi(v) - g(v), & v(0) &= v_0.\end{aligned}\tag{12.23}$$

Dabei sind  $d = k_0\tau > 0$  die *Damköhler-Zahl*, und mit  $\beta = \Delta H c^f / \theta^f$ ,  $\gamma = E / R\theta^f > 0$ ,  $v_K = (\theta_K - \theta^f) / \Delta H c^f$  ist

$$\psi(v) = \begin{cases} e^{-\gamma/(1+\beta v)}, & 1 + \beta v > 0, \\ 0, & 1 + \beta v \leq 0, \end{cases} \quad g(v) = \tau K(v - v_K).$$

Dieses skalierte Problem soll in diesem Abschnitt untersucht werden. Wegen  $0 \leq \psi(v) < 1$  gilt  $\dot{v} \geq 0$ , falls  $v \leq \tau K v_K / (1 + \tau K)$ , sowie  $\dot{u} \geq 0$ , falls  $u \leq 0$ . Daher ist die Menge  $\mathcal{K} := \mathbb{R}_+ \times [\tau K v_K / (1 + \tau K), \infty)$  positiv invariant. Ferner gilt  $\dot{u} \leq 0$ , falls  $u \geq 1$  und  $\dot{v} \leq 0$ , falls  $v \geq (d + \tau K v_K) / (1 + \tau K)$ . Demnach existieren die Lösungen in  $\mathcal{K}$  global nach rechts, und der Bereich

$$D := [0, 1] \times [(\tau K v_K) / (1 + \tau K), (d + \tau K v_K) / (1 + \tau K)]$$

ist positiv invariant und ein globaler Attraktor in  $\mathcal{K}$ . Die Dynamik des Systems (12.23) spielt sich folglich in  $D$  ab, und nach Satz 7.3.5 gibt es mindestens ein Equilibrium in  $D$ . Wir unterscheiden im Weiteren 3 Fälle.

(i) *Der endotherme Fall.* Dieser Fall ist durch  $\beta < 0$  charakterisiert. Hier gilt

$$\psi'(v) = \frac{\beta\gamma}{(1 + \beta v)^2} \psi(v) \leq 0, \quad v > 0,$$

also ist  $\psi$  nichtnegativ und fallend. Das System (12.23) ist quasimonoton, wir können daher Satz 7.6.2 anwenden. Eine Unterlösung lautet  $[0, (\tau K v_K) / (1 + \tau K)]^T$  und eine Oberlösung ist gegeben durch  $[1, (d + \tau K v_K) / (1 + \tau K)]^T$ . Die Equilibria des Systems ergeben sich aus den Gleichungen

$$u = 1 - v - g(v), \quad \frac{v + g(v)}{1 - v - g(v)} = d\psi(v).\tag{12.24}$$

Die linke Seite der Gleichung für  $v$  ist streng wachsend da  $g(v)$  wachsend ist, die rechte Seite hingegen fallend. Daher ist das Equilibrium eindeutig bestimmt, folglich nach Satz 7.6.2 global asymptotisch stabil in  $D$  und damit auch in  $\mathcal{K}$ .

Hierbei können die Funktionen  $g$  und  $\psi$  beliebig sein, wichtig sind nur  $\psi(v) \geq 0$  fallend und  $g$  wachsend.

(ii) *Der exotherme adiabatische Fall.* Nun gilt  $\beta > 0$ . Adiabatisch bedeutet keine externe Kühlung, also  $g(v) \equiv 0$ . Hier ist nun  $\psi(v)$  streng wachsend, also ist a priori die Eindeutigkeit der Equilibria nicht gesichert, diese hängt von den Parametern  $d, \beta, \gamma > 0$  ab. Es bezeichne  $f(u, v, d)$  die rechte Seite von (12.23); wir

sehen  $d$  als den Verzweigungsparameter an, da  $d$  im Wesentlichen die Verweilzeit ist, die man einfach kontrollieren kann. Die Ableitung von  $f$  nach  $x = [u, v]^T$  ist

$$A = \begin{bmatrix} -1 - d\psi(v) & -d\psi'(v) \\ d\psi(v) & -1 + d\psi'(v) \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von  $A$  ergibt sich zu

$$\det A = 1 + d\psi(v) - d\psi'(v),$$

und für die Spur erhalten wir

$$\text{sp } A = -2 - d\psi(v) + d\psi'(v) = -1 - \det A.$$

Daher sind die Eigenwerte von  $A$  durch  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -\det A$  gegeben. Im adiabatischen Fall gibt es somit keine Hopf-Verzweigung, und die Stabilität eines Equilibriums wird durch  $\det A$  bestimmt;  $\det A > 0$  bedeutet asymptotische Stabilität, und  $\det A < 0$  Instabilität, ein Sattelpunkt. Nach dem Satz von Poincaré-Bendixson konvergiert damit jede in  $\mathcal{K}$  startende Lösung gegen ein Equilibrium.

Die Gleichung  $\det A = 0$  ergibt die möglichen Verzweigungspunkte. Dann ist  $\lambda = 0$  algebraisch einfacher Eigenwert von  $A$ , und ein Eigenvektor ist durch  $w = [-1, 1]^T$  gegeben. Ein dualer Eigenvektor lautet  $w^* = [d\psi(v), 1 + d\psi(v)]^T$ . Andererseits ergibt die Ableitung von  $f$  nach  $d$

$$b := \partial_d f(u, v, d) = \begin{bmatrix} -u\psi(v) \\ u\psi(v) \end{bmatrix},$$

also gilt  $(b|w^*) = u\psi(v) \neq 0$ , d.h.  $b \notin N(A^T)^\perp = R(A)$ . Daher sind mögliche Verzweigungspunkte nur Umkehrpunkte, Pitchforks treten nicht auf.

Wir untersuchen nun  $\det A$  genauer an Equilibria. Es gelte also

$$0 = \det A = 1 + d\psi(v) - d\psi'(v), \quad u = 1 - v, \quad \frac{v}{1-v} = d\psi(v).$$

Elimination von  $u$  mit der zweiten Beziehung und Einsetzen der dritten in die erste ergibt mit  $\psi'(v) = \psi(v)\beta\gamma/(1+\beta v)^2$

$$1 + \frac{v}{1-v} - \frac{\beta\gamma v}{(1+\beta v)^2} = 0,$$

also die quadratische Gleichung

$$\beta(\beta + \gamma)v^2 + \beta(2 - \gamma)v + 1 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt 2 reelle Lösungen, wenn  $\gamma > 4(1 + 1/\beta)$  ist und keine für  $\gamma < 4(1 + 1/\beta)$ . Im zweiten Fall gibt es keine Umkehrpunkte, im ersten sind sie durch

$$v_{1,2} = \frac{\gamma - 2 \pm \sqrt{\gamma(\gamma - 4(1 + 1/\beta))}}{2(\beta + \gamma)}$$



gegeben. Mit diesen Werten für die skalierte Temperatur, die im Equilibrium gleich dem Umsatz  $1 - u$  ist, erhält man die entsprechenden kritischen Werte für den Verzweigungsparameter  $d$ , nämlich  $d_{1,2} = v_{1,2}/(1 - v_{1,2})\psi(v_{1,2})$ .

Schließlich gilt in einem Equilibrium

$$\det A = (1 - v) \left[ \frac{1}{(1 - v)^2} - d\psi'(v) \right] = (1 - v) \frac{d}{dv} \left[ \frac{v}{1 - v} - d\psi(v) \right].$$

Besitzt die Gleichung  $\frac{v}{1-v} - d\psi(v) = 0$  nun 3 Lösungen, so ist folglich die mittlere instabil, die untere und die obere asymptotisch stabil, und falls es nur eine Lösung gibt, so ist sie asymptotisch stabil.

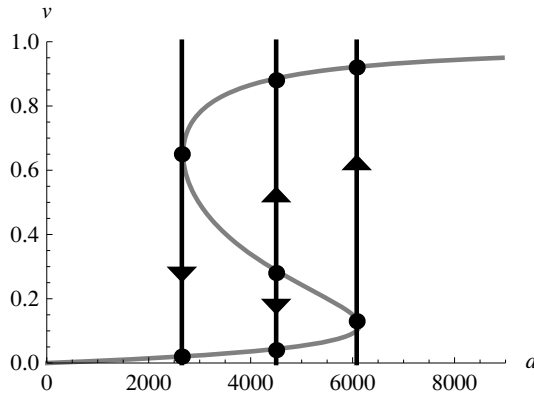


Abbildung 12.4: Equilibriazweige des adiabatischen exothermen idealen Rührkessels mit  $\gamma = 12$ ,  $\beta = 1$ .

Die physikalische Interpretation im interessanteren Fall  $\gamma > 4(1 + 1/\beta)$  ist nun folgendermaßen. Bei kleiner Verweilzeit findet kaum Umsatz statt, aber dieser steigt mit wachsendem  $\tau$ , d.h. mit  $d$ . Erreicht  $d$  den größeren kritischen Wert  $d_1$ , so endet der Zweig auf dem sich das Equilibrium befindet, daher springt die Lösung auf den darüber liegenden stabilen Zweig, man sagt die Reaktion zündet. Erhöht man die Verweilzeit weiter passiert nichts Wesentliches mehr, der Umsatz erhöht sich nur weiter. Nun spielen wir das umgekehrte Szenario durch. Wir starten mit sehr großer Verweilzeit und erniedrigen diese. Dann wandert das Equilibrium auf dem oberen Zweig nach links, bis der Parameterwert  $d_2$ , also der kleinere kritische Wert, erreicht wird. Verkleinert man  $d$  weiter, so springt die Lösung auf den unteren stabilen Zweig, die Reaktion erlischt. Dieses Phänomen wird als *Hysterese* bezeichnet, es ist eine der *Thomschen Elementarkatastrophen*: die Falte.

(iii) *Der exotherme nichtadiabatische Fall.* Im nichtadiabatischen Fall  $g(v) \neq 0$  erhalten wir für die Ableitung von  $f$  nach  $x = [u, v]^T$

$$A = \begin{bmatrix} -1 - d\psi(v) & -du\psi'(v) \\ d\psi(v) & -1 + du\psi'(v) - \tau K \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von  $A$  ergibt sich zu

$$\det A = 1 + d\psi(v) - du\psi'(v) + \tau K(1 + d\psi(v)),$$

und für die Spur erhalten wir

$$\operatorname{sp} A = -2 - d\psi(v) + du\psi'(v) - \tau K = -1 + \tau K d\psi(v) - \det A.$$

Da auch hier im Fall  $\det A = 0$  der Vektor  $u^* = [d\psi(v), 1 + d\psi(v)]^T$  dualer Eigenvektor ist, folgt mit  $b = \partial_d f(u, v) = [-u\psi(v), u\psi(v)]^T$  wie in (ii)  $(b|u^*) = u\psi(v) \neq 0$ , also  $b \notin R(A)$ . Daher gibt es auch im nichtadiabatischen Fall keine Pitchfork. Ferner ist 0 offensichtlich geometrisch einfach,  $u = [-(1 + \tau K), 1]^T$  ist ein Eigenvektor von  $A$ , und  $(u|u^*) = 1 - K d\psi(v)$ , also ist 0 algebraisch einfach, es sei denn  $d\psi(v) = 1/(\tau K)$ . Umkehrpunkte existieren hier für

$$\gamma > 4\left[1 + \frac{1 + K}{\beta} + 2Kv_K + \beta \frac{K}{1 + K} v_K(1 + Kv_K)\right],$$

daher ist der qualitative Verlauf der Equilibriumszweige wie im adiabatischen Fall. Weiter gilt nun

$$\begin{aligned} \det A &= (1 - v - g(v))\left[\frac{1 + K}{(1 - v - g(v))^2} - d\psi'(v)\right] \\ &= (1 - v - g(v))\frac{d}{dv}\left[\frac{v + g(v)}{1 - v - g(v)} - d\psi(v)\right], \end{aligned}$$

daher ist das mittlere Equilibrium wieder instabil, ein Sattelpunkt. Am oberen und am unteren Zweig gilt wie zuvor  $\det A > 0$ , woraus man aber hier noch nicht Stabilität schließen kann, da an diesen Zweigen Hopf-Verzweigung auftreten kann. Diese Art Verzweigung tritt auf wenn  $\operatorname{sp} A = 0$  und  $\det A > 0$  ist, was äquivalent zu

$$\frac{2 + K}{v + g(v)} + \frac{1}{1 - v - g(v)} = \frac{\beta\gamma}{(1 + \beta v)^2} < \frac{1 + K}{(v + g(v))(1 - v - g(v))}$$

ist. Die Ungleichung impliziert, dass nur Lösungen der Gleichung mit  $1 > v + g(v) > 1/(1 + K)$  in Frage kommen. Die linke Seite der Gleichung hängt nur von den Parametern  $K$  und  $v_K$  ab, die Rechte nur von  $\gamma$  und  $\beta$ . Wählt man nun  $\gamma$  hinreichend groß, so sieht man, dass es Punkte gibt an denen Hopf-Verzweigung auftritt.

## Übungen

1. Sei  $f$  aus  $C^2$  und  $x(\lambda)$  ein  $C^1$ -Lösungszweig von Equilibria von (12.1), stabil für  $\lambda < \lambda_*$ . Es sei 0 algebraisch einfacher Eigenwert von  $A_* := \partial_x f(x(\lambda_*), \lambda_*)$ . Wie lautet in dieser Situation die Transversalitätsbedingung für Pitchfork-Verzweigung?
2. Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^2$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ ,  $g''(0) \neq 0$ . Untersuchen Sie die Lösungsmenge von  $g(x, \lambda) = 0$  in einer Umgebung von 0.

3. Untersuchen Sie Verzweigung der trivialen Lösung der van-der-Pol-Gleichung (vgl. Abschnitt 9.4)  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ , wobei  $\mu$  der Verzweigungsparameter sei.
4. Untersuchen Sie das Verzweigungsverhalten der Fitzhugh-Nagumo Gleichung (vgl. Übung 4.6) in Abhängigkeit vom Parameter  $\gamma$ . Gibt es Umkehrpunkte, Pitchforks oder Hopf-Verzweigung?
5. Betrachten Sie das Holling-Modell aus Übung 7.10 mit  $\lambda = 0$ . Sei zusätzlich  $s_0 > 0$  striktes globales Minimum der Funktion  $s \mapsto s/f(s)$  in  $(0, \infty)$ , mit  $(s/f(s))'' > 0$ , und sei  $\mu_0 = f(s_0)$ . Zeigen Sie, dass für  $\mu = \mu_0$  eine Hopf-Verzweigung am Koexistenz-Equilibrium stattfindet, und untersuchen Sie die Stabilität der abzweigenden periodischen Lösungen. Betrachten Sie die Funktion  $f(s) = (\gamma s / (1 + \gamma s))^2$  als konkretes Beispiel ( $\gamma > 0$ ).
6. Sei  $H(q, p) = p^2/2m + \phi(q)$  die Hamilton Funktion eines Teilchens im Potentialfeld. Für welche kritischen Punkte  $q_*$  von  $\phi$  ist Satz 12.4.1 anwendbar? Betrachten Sie insbesondere den Fall  $n = 1$ .
7. Verifizieren Sie die Gleichungen (12.11) und (12.19).