Serie 4

"Besprechung": Donnerstag, 2.4

4.1. Sei $Y \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$ eine Fundamentalmatrix für das lineare System $y' = A(t)y$. Zeigen Sie:

a) Die Matrixfunktion $X \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix, wenn es eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gibt mit $X(t) = Y(t)B$ für alle $t \in J$.

b) Die Matrix $X(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1}$ ist eine Hauptfundamentalmatrix.

4.2. Seien $X \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$ und $Y \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$.

a) Zeigen Sie die Produktregel

$$\frac{d}{dt}(XY) = \left(\frac{d}{dt}X\right)Y + X\left(\frac{d}{dt}Y\right)$$

b) Falls $X(t)$ für jedes $t \in J$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $t \mapsto (X(t))^{-1}$ in $C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$. Geben Sie $(X^{-1})'$ an.

c) Sei Y eine Fundamentalmatrix für das lineare System $y' = A(t)y$. Welche Differentialgleichung wird von Y^{-1} erfüllt?

4.3. Betrachten Sie das lineare System

$$y' = A(t)y, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 3t-1 & 1-t \\ t+2 & t-2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie ein Fundamentalsystem an. *Hinweis:* eine Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $y_1(t) = y_2(t)$.

4.4. Seien A, $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie:

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

Zeigen Sie: $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ für s, $t \in \mathbb{R}$.

4.5. Im allg. gilt *nicht* $e^{A+B} = e^A e^B$. Geben Sie ein Gebenbeispiel an.

4.6. Definieren Sie die matrixwertige Funktion $Z(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$ (hier ist $A \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{d\times d})$). Zeigen Sie: Man kann nicht erwarten, daß Z eine Fundamentalmatrix für

$$y' = A(t)y$$

ist. Geben Sie Bedingungen an, unter denen Z eine Fundamentalmatrix ist.

4.7. Zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

a) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

b) $e^{A^\top} = (e^A)^\top$

c) Falls A schiefsymmetrisch ist, dann ist e^{tA} orthogonal und $\det e^{tA} = 1$.

d) Sei $A \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$ punktweise schiefsymmetrisch, d.h. $A(t)^\top = -A(t)$ für alle $t \in J$. Zeigen Sie: Jede Lösung y von $y' = A(t)y$ erfüllt: die Funktion $t \mapsto \|y(t)\|_2$ ist konstant auf J.