Prüfung Differentialgleichungen 1 (Melenk) 25.2.2021

Matrikelnr.:	Familienname:
Platznr.:	Vorname:

1:	2:	3:	4:	5:	Summe:

Bemerkungen:

1) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

2) **Taschenrechner mit einzeiligem Display (keine Graphik) sind erlaubt.**

3) Insgesamt können 25 Punkte erreicht werden.

4) Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein. Besser zu viel als zu wenig hinschreiben.

1. (4 Punkte) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $2t^2y' = t^2 + y^2$ mit Anfangsbedingung $y(1) = -1$ an.

2. (5 Punkte) Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $y'(t) = \mathbf{A}y(t)$.
b) Begründen Sie, warum die Ruhelage $y^* = 0$ stabil ist.
c) Lösen Sie die inhomogene Gleichung

$$y' = \mathbf{A}y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Bei Differentialgleichungen der Form $y' = \mathbf{A}y$, kann man die Stabilität des Ursprungs auch mittels einer Ljapunovfunktion der Form $V(y) = y^T\,\mathbf{P}\,y$ zeigen. Zeigen Sie, dass für normale Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, deren Spektrum in der linken Halbebene ist, die Wahl $\mathbf{P} = I_d$ (I_d ist die $d \times d$ Einheitsmatrix) auf eine Ljapunovfunktion führt.

3. (6 Punkte) Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} x' &= y - (x^2 + y^2 - 1)x, \\ y' &= -x - (x^2 + y^2 - 1)y, \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen. Sind diese stabil? Begründen Sie.
b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.
c) Zeigen Sie, dass für $R_1 < 1 < R_2$ die Kreisringe $\{(x, y) \mid R_1^2 \leq x^2+y^2 \leq R_2^2\}$ invariante Menge sind.
d) Zeigen Sie, dass die Lösungen für beliebigen Startwert global in der Zeit existieren.
e) Falls es periodische Lösungen gibt, geben Sie diese an. Begründen Sie, dass Sie alle periodischen Lösungen angegeben haben.

Bitte umdrehen!

4. (5 Punkte)

a) Zeigen Sie folgende Variante des Gronwall-Lemmas: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und erfülle v die Ungleichung

$$v'(t) \leq \alpha v(t), \qquad t \in [0, T].$$

Dann gilt $v(t) \leq v(0)e^{\alpha t}$ auf $[0, T]$.

b) Erfülle $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ die einseitige Lipschitzbedingung

$$\big(f(t,y) - f(t,z)\big)(y-z) \leq \alpha |y-z|^2 \qquad \forall (t,y),(t,z) \in \mathbb{R}^2$$

Zeigen Sie, dass für die Lösungen y_{y_0}, y_{y_1} der Anfangswertprobleme $y' = f(t,y)$ mit Startwerten $y_{y_0}(0) = y_0$ und $y_{y_1}(0) = y_1$ gilt:

$$|y_{y_0}(t) - y_{y_1}(t)| \leq |y_0 - y_1| e^{\alpha t} \qquad \forall t > 0.$$

---

5. (5 Punkte) Gegeben ist der Differentialoperator

$$y \mapsto Ly = -\frac{d}{dx}(x \frac{d}{dx} y)$$

mit den Randbedingungen $y(1) = 0$ und $y'(2) = 0$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Ly = 0$.

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion von L zu diesen Randbedingungen und dem Intervall $(1, 2)$

c) Ändern Sie die Randbedingung auf: $y(1) = 0$, $y(2) - (2\ln 2)y'(2) = 0$. Können Sie das Randwertproblem $Ly = f$ für jedes stetige f lösen? Begründen Sie.
