Serie 2

Thema: homogene ODEs

Homogene ODEs sind von der Bauart:

$$y' = f(y/t).$$

Die Substitution $\widetilde{y} := y/t$ führt auf die ODE

$$\widetilde{y}' = \frac{1}{t}\left(f(\widetilde{y}) - \widetilde{y}\right),$$

d.h. separierbare Form.

Aufgaben

$$ty' = y + t\cos^2(y/t) \tag{1}$$
$$(t-y) + ty' = 0 \tag{2}$$
$$ty' = y\,(\ln y - \ln t) \tag{3}$$
$$t^2 y' = (y^2 - ty + t^2) \tag{4}$$
$$ty' = y + \sqrt{y^2 - t^2} \tag{5}$$
$$2t^2 y' = t^2 + y^2 \tag{6}$$
$$(4t - 3y) + (2y - 3t)y' = 0 \tag{7}$$
$$(y - t) + (y + t)y' = 0 \tag{8}$$

Die Technik kann auch auf ODEs der Form

$$y' = f\left(\frac{ay + bt + g}{cy + dt + h}\right)$$

mit Konstanten a, b, c, d, g, h erweitert werden. Dabei gibt es 2 Fälle:

1. Die Determinante $ad - cd \neq 0$. Dann kann man Zahlen α, β finden, so daß

   $$a\alpha + b\beta = g \quad \text{und} \quad c\alpha + d\beta = h$$

   so daß
   $$\frac{a(y+\alpha) + b(t+\beta) - a\alpha - b\beta + g}{c(y+\alpha) + d(t+\beta) - c\alpha - d\beta + h} = \frac{a(y+\alpha) + b(t+\beta)}{c(y+\alpha) + d(t+\beta)}$$

   Nach Substition $\widetilde{y} = y + \alpha$, $\widetilde{t} = t + \beta$ ist die ODE auf eine homogene ODE reduziert worden.

2.

3. Die Determinante $ad - cd = 0$. Dann sind die Vektoren $(a, b)^\top$ und $(c, d)^\top$ linear abhängig. Man kann $\lambda \in \mathbb{R}$ finden, so daß $(a, b) = \lambda(c, d)$. Damit hat die ODE die Form
   $$y' = f\left(\frac{\lambda(ct + dy) + g}{(ct + dy) + h}\right).$$

   Die Substitution $z = ct + dy$ führt wieder auf eine separierbare ODE.

Lösungen

$$\tan(y/t) = \ln(Ct) \tag{1}$$
$$y = t(C - \ln t) \tag{2}$$
$$y = te^{1+Ct} \tag{3}$$
$$(t - y)\ln(Ct) = t \tag{4}$$
$$y + \sqrt{y^2 - t^2} = Ct^2 \quad \text{und } y = t \quad \text{und } y = -t \tag{5}$$
$$2t = (t - y)\ln(Ct) \tag{6}$$
$$y^2 - 3ty + 2t^2 = C \tag{7}$$
$$y^2 + 2ty - t^2 = C \tag{8}$$