

03/1: Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Zeige die folgende Version des Satzes von Baire: Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, und seien $V_n, n \in \mathbb{N}$, offene dichte Teilmengen von X . Dann ist auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht in X .

Orientierung am Beweis von Satz 4.1.1.:

Sei W eine nichtleere, offene Teilmenge von X

inkludiert:

•) $\exists x_1 \in W \cap V_1$, weil V_1 dicht in X ist also $V_1 \cap W \neq \emptyset$

Weiter ist $W \cap V_1$ als Schnitt zweier offener Mengen offen also Umgebung von x_1 , es gibt also Umgebung K_1 von x_1

mit $K_1 \subseteq W \cap V_1$ und K_1 kompakt, weil ja (X, \mathcal{T}) lokalkompakt ist.

•) Sei nun $n > 1$ und seien x_{n-1}, K_{n-1} bereits definiert

da K_{n-1} Umgebung von x_{n-1} ist gilt es $U_{n-1} \subseteq K_{n-1}$ offen mit $x_{n-1} \in U_{n-1}$

da V_n dicht in X ist gilt $V_n \cap U_{n-1} \neq \emptyset$ offen $\Rightarrow \exists x_n \in V_n \cap U_{n-1}$ und K_n kompakte Umgebung von x_n mit $K_n \subseteq V_n \cap K_{n-1}$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K_1 , das kompakt ist. Man gibt es eine Teilfolge $(x_i)_{i \in I}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$, so

gegen ein $x \in K_1$ konvergiert (vgl. Kallenläcke Prop. 12.11.2)

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ bel., dann ist $(x_i)_{i \geq k}$ eine Folge in K_k und da (X, \mathcal{T}) Hausdorff ist, ist

K_k abgeschlossen (vgl. Kallenläcke Lemma 12.11.7). Die Folge $(x_i)_{i \geq k}$ konvergiert gegen x

also ist nach Kallenläcke Prop. 12.2.7. $x \in \overline{K_k} = K_k$

da $k \in \mathbb{N}$ bel. man gilt $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq W \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ also $W \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$

03/2: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Zeige, dass die Mächtigkeit einer algebraischen Basis von X als \mathbb{C} -Vektorraum entweder endlich oder überabzählbar ist.

Hinweis. Zeige, dass ein linearer Teilraum $Y \subsetneq X$ keinen inneren Punkt hat.

Sei also $Y \subsetneq X$ linearer Teilraum und sei $(b_i)_{i \in J}$ Basis von Y und $(b_i)_{i \in I}$ die Erweiterung zu einer Basis von X , wobei $k \in I \setminus J$ das es sicher gilt weil $Y \subsetneq X$

Wähle nun beliebige Nullumgebung U in X . Da U Nullumgebung ist folgt, dass es absorbierend ist, also gibt es $t \in \mathbb{R}^+$ mit $tb_k \in U$, aber $tb_k \notin Y$ also $U \not\subset Y$ und da U bel. war ist 0 nicht innerer Punkt von Y . Da Translation ein Homöomorphismus ist hat Y keinen inneren Punkt.

Nehmen wir nun an X hat eine abzählbare Basis $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Sei $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung aller endl. Teilmengen von \mathbb{N}

und sei $K_k := \text{span} \{b_i \mid i \in M_k\}$ und $V_k := K_k^\circ$

Sei $x \in X$ bel. mit $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n b_n$, wobei $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 0$

also $\exists l \in \mathbb{N} : x \in K_l \Rightarrow x \notin V_l \Rightarrow x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ und weil x bel. war $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \emptyset$

aber:

•) $l \in \mathbb{N}$ bel. und W bel. offene nichtleere Teilmenge von X . Da K_l keine inneren Punkte besitzt gilt $\emptyset \neq K_l^\circ \cap W = V_l \cap W$ und da W bel. war ist V_l nicht also $\forall n \in \mathbb{N} : \overline{V_n} = X$

•) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist V_n als endlichdim. Teilraum nach Satz 2.2.1 (ii) abg. also V_n offen

Nach dem Satz von Baire bzw. Korollar 4.1.2 ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$ ∇

03/3: Eine Menge heisst G_δ -Menge, wenn sie der abzählbare Durchschnitt offener Mengen ist. Zeige, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen dichten G_δ -Mengen eines vollständigen metrischen Raumes wieder eine dichte G_δ -Menge ist.

(X, d) vollst. metr. Raum und sei $\forall n \in \mathbb{N} : M_n$ eine G_δ -Menge mit $M_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_{nk}$ und seien weiter alle M_n dicht in X

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_{nk} = \bigcap_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} P_{nk}$ ist nach dem Satz von Baire 4.1.1. dicht, weil die P_{nk} offen sind und als Obermenge von dichten Mengen $M_n \subseteq P_{nk}$ dicht.

03/4:* Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$ an denen f stetig ist eine G_δ -Menge ist.

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R} : |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon\}$$

Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus \mathbb{R}^+

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R} : |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon_n\}$$

$$\bullet) y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ \text{ bel.} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists \delta_n \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R} : |t-x| < \delta_n \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon_n$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ bel., da } \varepsilon_n \rightarrow 0 = \exists k \in \mathbb{N} : \varepsilon_k \leq \varepsilon \text{ und } \exists \delta_k \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R} : |t-x| < \delta_k \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon_k \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R} : |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow y \in M$$

\bullet) Sei umgekehrt $y \in M$ bel. und $k \in \mathbb{N}$ bel.

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R} : |t-y| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(y)| < \frac{\varepsilon_k}{2}$$

wähle $z \in W := \{x \in \mathbb{R} : |x-y| < \frac{\delta}{2}\}$ bel.

$$\forall t \in \{x \in \mathbb{R} : |x-z| < \frac{\delta}{2}\} \text{ gilt wegen } |t-y| \leq |t-z| + |z-y| < \delta \text{ und } |y-z| < \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$|f(t) - f(z)| \leq |f(t) - f(y)| + |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon_k}{2} + \frac{\varepsilon_k}{2} = \varepsilon_k \Rightarrow z \in U_k$$

und da $z \in W$ bel. was gilt $W \subseteq U_k$ und W ist offen mit $y \in W$ also $y \in U_k^\circ$

und weil $k \in \mathbb{N}$ bel. was gilt $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ$ und damit $M \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ$

Insgesamt: $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ$ und daher ist M eine G_δ Menge.

03/5: Zeige, dass es keine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt die an allen rationalen Punkten stetig aber an allen irrationalen Punkten unstetig ist. Finde eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die an allen irrationalen Punkten stetig aber an allen rationalen Punkten unstetig ist.

Hinweis. Ist die Teilmenge \mathbb{Q} von \mathbb{R} (welche ja dicht liegt) eine G_δ -Menge?

Ang. \mathbb{Q} ist G_δ -Menge

\mathbb{Q} ist dicht,

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$ ist G_δ -Menge und (dicht)

nach Aufgabe 3/3 ist $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ dichte G_δ -Menge, aber $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ ∇

Also ist \mathbb{Q} keine G_δ -Menge

Ang. $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f ist stetig auf \mathbb{Q} und unstetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

nach Aufgabe 3/4 ist \mathbb{Q} G_δ -Menge ∇

Also gibt es so ein f nicht

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \begin{cases} \frac{p}{q} \mapsto \frac{1}{q}, & \text{falls } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ x \mapsto 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

vollständig geklärt

•) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bel.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+: \left| \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} \in U_\varepsilon(x) \right\} \right| < \infty, \text{ wegen } \left| \frac{p}{q} - \frac{p+1}{q} \right| = \frac{1}{q}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. wähle δ so klein, dass $\forall q \in \mathbb{Q} : \frac{1}{q} \geq \varepsilon \Rightarrow \forall p \in \mathbb{Z} : \frac{p}{q} \notin U_\delta(x)$

endlich viele

$$\text{Also gilt dann } \forall y \in U_\delta(x) \quad |f(y) - f(x)| = |f(y)| < \varepsilon$$

•) $x \in \mathbb{Q}$:

$$x = \frac{p}{q} \quad \varepsilon := \frac{1}{2q} \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^+: \exists y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap U_\delta(x) \text{ und } |f(x) - f(y)| = |f(x)| = \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2q} = \varepsilon$$

04/1: Sei X ein Banachraum, und seien M, N zwei abgeschlossene lineare Teilräume von X mit

$$M + N = X, \quad M \cap N = \{0\}.$$

Es sind M und N mit der von X vererbten Norm selbst normierte Räume, also können wir den Produktraum $M \times N$ mit der Summennorm betrachten. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} M \times N & \rightarrow X \\ (m, n) & \mapsto m + n \end{cases}$$

ein linearer Homöomorphismus ist.

1) „Injektivität“: $\varphi(m, n) = \varphi(p, q) \Rightarrow m + n = p + q \Rightarrow m - p = q - n$, wobei $m - p \in M$ und $q - n \in N$, weil

M, N lineare Teilräume sind. Also gilt $m - p = q - n \in N \Rightarrow m - p \in N \cap M \Rightarrow m - p = 0 \Rightarrow m = p$

$q - n = m - p \in M \Rightarrow q - n \in M \cap N \Rightarrow q - n = 0 \Rightarrow q = n$

2) „Surjektivität“: $x \in X$ bel. wegen $M + N = X \Rightarrow \exists m \in M, n \in N: m + n = x \Rightarrow \varphi(m, n) = x$

3) „Linearität“ $\varphi((m, n) + \alpha(p, q)) = \varphi(m + \alpha p, n + \alpha q) = m + \alpha p + n + \alpha q = (m + n) + \alpha(p + q) = \varphi(m, n) + \alpha \varphi(p, q)$

4) „Stetigkeit“: Nach Proposition 2.4.5. (i) ist die von der Summennorm erzeugte Topologie gleich der

Produkttopologie $\tau_{\|\cdot\|_M} \times \tau_{\|\cdot\|_N}$

Nach Satz 7.2.1:

φ stetig $\Leftrightarrow \pi_1 \circ \varphi$ stetig $\wedge \pi_2 \circ \varphi$ stetig

und $\pi_2 \circ \varphi = \varphi_2 \circ \pi_2|_M$ stetig

$\pi_1 \circ \varphi = \varphi_1 \circ \pi_1|_M$ stetig also ist φ stetig und da X als Banachraum invers. TVR ist, wissen wir

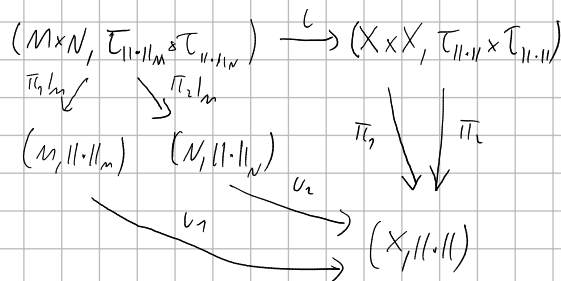
$\varphi: M \times N \rightarrow X: (x, y) \mapsto x + y$ stetig also auch $\varphi \circ \varphi$ und es ist $\varphi = \varphi \circ \varphi$ also ist auch φ stetig

Da M, N abg. lineare TR von X sind und X Banachraum, sind auch $(M, \|\cdot\|_M)$ und $(N, \|\cdot\|_N)$

nach Prop. 2.4.4. (ii) Banachräume und nach Prop. 2.4.5 also auch $M \times N$.

Zusammenfassend sind also $M \times N$ und X Banachräume sowie $\varphi: M \times N \rightarrow X$ linear, bijektiv und

stetig, nach Korollar 4.3.4. ist auch φ^{-1} stetig also φ ein linearer Homöomorphismus.



04/2: Sei Ω eine Menge, und X ein linearer Raum dessen Elemente Funktionen von Ω nach \mathbb{C} sind und dessen lineare Operationen durch punktweise Addition und skalare Multiplikation gegeben sind. Für $w \in \Omega$ bezeichne mit $\chi_w : X \rightarrow \mathbb{C}$ das Punktauswertungsfunktional

$$\chi_w(f) := f(w), \quad f \in X.$$

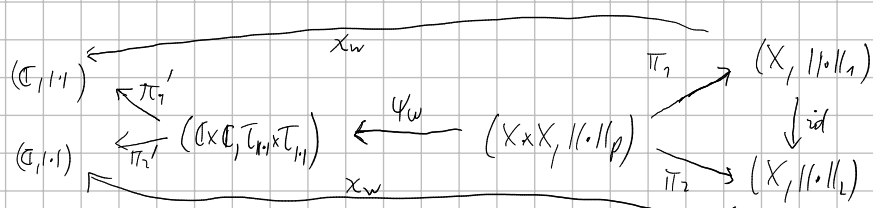
Dann ist χ_w linear. Zeige, dass es (bis auf Äquivalenz der Normen) höchstens eine Norm $\|\cdot\|$ auf X geben kann, sodass $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist und alle Punktauswertungsfunktionale bzgl. $\|\cdot\|$ stetig sind.

Hinweis. Wende den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die identische Abbildung an.

$$X = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$$

Ang. es gibt zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ so, dass $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind und alle Punktauswertungsfunktionale χ_w bzgl. $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_2$ stetig sind.

Betrachte den Graphen von $\text{id}: X \rightarrow X$, $\text{id} = \{(f, f) \in X \times X\}$, wobei wir $X \times X$ mit der Produkttopologie $\tau_{\|\cdot\|_1} \times \tau_{\|\cdot\|_2}$ versehen, wobei es nach Prop. 2.4.5 eine Norm $\|\cdot\|_p$ gibt mit $\tau_{\|\cdot\|_p} = \tau_{\|\cdot\|_1} \times \tau_{\|\cdot\|_2}$ und $(X \times X, \|\cdot\|_p)$ Banachraum. Sei nun $(f, f) \in \overline{\text{id}}^{\|\cdot\|_p}$ bel.



$$\Psi_w: X \times X \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}: (f, g) \mapsto (\chi_w(f), \chi_w(g))$$

$$\begin{aligned} \Psi_w^{-1}(\{(z, z) \mid z \in \mathbb{C}\}) &= \{(f, g) \in X \times X \mid \exists z \in \mathbb{C}: \Psi_w(f, g) = (\chi_w(f), \chi_w(g)) = (f(w), g(w)) = (z, z)\} \\ &= \{(f, g) \in X \times X \mid \exists z \in \mathbb{C}: f(w) = g(w) = z\} = \{(f, g) \in X \times X \mid f(w) = g(w)\} \end{aligned}$$

$\chi_w \circ \pi_1$ und $\chi_w \circ \pi_2$ sind nach Voraussetzung stetig also auch $\pi_1' \circ \Psi_w = \chi_w \circ \pi_1$ und $\pi_2' \circ \Psi_w = \chi_w \circ \pi_2$

und nach Satz 7.2.1. (1N₃) auch Ψ_w . Die Diagonale $D := \{(z, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ ist in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ abgeschlossen und als Urbild einer stetigen Abbildung nach Kaltenböck Satz 12.3.6 (iii) auch

$$\Psi_w^{-1}(D). \text{ Nach Kaltenböck Lemma 12.2.2 (A3) ist auch } \bigcap_{w \in \Omega} \Psi_w^{-1}(D) =$$

$$= \{(f, g) \in X \times X \mid \forall w \in \Omega: f(w) = g(w)\} = \{(f, f) \in X \times X\} = \text{id} \text{ abgeschlossen. Da id auch}$$

linear ist können wir den Satz vom abg. Graphen anwenden und erhalten, dass id stetig ist.

Da keine der Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ angegeben ist, ist auch id^{-1} stetig, also ist id ein Homöomorphismus

$$\Rightarrow \|x\|_2 = \|\text{id} \cdot x\|_2 \leq \|\text{id}\| \|x\|_1 \quad \text{und} \quad \|x\|_1 = \|\text{id}^{-1} \cdot x\|_1 \leq \|\text{id}^{-1}\| \|x\|_2 \Rightarrow \|\text{id}^{-1}\|^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \|\text{id}^{-1}\|^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|\text{id}\| \|x\|_1 \quad (\text{vgl. Kaltenböck Bem. 9.2.5})$$

$$\Rightarrow \|\cdot\|_1 \text{ und } \|\cdot\|_2 \text{ sind äquivalent.}$$

04 / 3: Analysiere den Beweis des Satzes über die offene Abbildung und zeige folgende allgemeinere Variante: Sei X Banachraum, Y normierter Raum und sei $A: X \rightarrow Y$ stetig und linear und $A(X)$ sei von 2. Kategorie (für die Terminologie siehe Bemerkung 4.1.4 im Skriptum) in Y . Dann folgt:

- (i) A ist offen.
- (ii) $A(X) = Y$.
- (iii) Y ist Banachraum.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad A(X) \text{ von 2. Kategorie} &\Leftrightarrow \forall (M_n)_{n \in \mathbb{N}}: \forall n \in \mathbb{N}: (\overline{M_n})^\circ = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \neq A(X) \\
 &\Leftrightarrow \forall (M_n)_{n \in \mathbb{N}}: \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k = A(X) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: (\overline{M_k})^\circ \neq \emptyset \\
 X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k^X(0) &\Rightarrow A(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A(U_k^X(0)) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: (\overline{A(U_k^X(0))})^\circ \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \exists W \subseteq U: W \text{ offen und } W \subseteq \overline{A(U_k^X(0))} \Rightarrow W \cap \overline{A(U_k^X(0))}^\circ = \emptyset
 \end{aligned}$$

Als hier kann man den Beweis von Satz 4.3.1. nachmischen

$$\text{also } W - W \text{ offene Nullumgebung} \Rightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}^+ : U_\eta^V(0) \subseteq W - W \subseteq \overline{A(U_{2\eta}^X(0))}$$

$$\text{Anwenden von Lemma 4.3.3. mit } T = \frac{2\eta}{\eta} A \text{ und (erhalten } U_{\frac{\eta}{2}}^V(0) \subseteq A(U_1^X(0))$$

Nach Lemma 4.3.2. ist A offen.

(ii) $y \in Y$ bel., aus (i) wissen wir bereits, dass A offen ist also auch $A(X) \subseteq Y$ offen und weil A linear ist $A(0_X) = 0_Y \in A(X)$. Wir schließen also, dass $A(X)$ eine Nullumgebung in Y ist. Als solche ist sie nach Lemma 2.1.8 (i) absorbierend, ergibt also $t \in \mathbb{R}^+ : ty \in A(X)$, also gibt es $x \in X$ mit $A(x) = ty$. Mit der Linearität von A gilt schließlich $A(\frac{1}{t}x) = \frac{1}{t}A(x) = \frac{1}{t}ty = y$ also $y \in A(X)$.

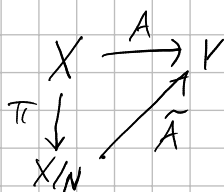
(iii) Da A stetig und linear ist erhalten wir mit $N := \ker A$ ein abgeschlossenen linearen Teilraum von $(X, \|\cdot\|_X)$ (vgl. Prop. 2.1.14). Mit der Norm $\|\cdot\|_{X/N}$ von Prop. 2.4.9 ist dann $(X/N, \|\cdot\|_{X/N})$ ebenfalls ein Banachraum

$\tilde{A}: X/N \rightarrow Y: x+N \mapsto A(x)$ ist wohldefinierter, lineares, stetiges Funktional, wobei Stetigkeit gilt wegen Satz 1.4.1. und $A = \tilde{A} \circ \pi$

mit $\tilde{A}(X \setminus N) = Y$, also surjektiv und auch injektiv also bijektiv

Nach Korollar 4.3.4 ist auch \tilde{A}^{-1} stetig

Mit Bem. 4.3.5 und Lemma 4.3.6 ist dann $\tilde{A}(X \setminus N) = Y$ ein Banachraum.



04/4: Betrachte $L^2(0,1)$ als Teilmenge von $L^1(0,1)$ und zeige auf drei verschiedene Arten, dass $L^2(0,1)$ von 1. Kategorie (für die Terminologie siehe Bemerkung 4.1.4 im Skriptum) in $L^1(0,1)$ ist:

(i) Zeige $\{f \in L^2 : \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq n\}$ ist abgeschlossen (in L^1) und hat leeres Inneres.

(ii) Setze

$$g_n(t) := \begin{cases} n & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n^3} \\ 0 & , \quad \frac{1}{n^3} < t \leq 1 \end{cases}$$

und zeige, dass

$$\int_0^1 f(t)g_n(t) dt \rightarrow 0$$

für jedes $f \in L^2$, aber nicht für jedes $f \in L^1$.

(iii) Bemerke, dass die identische Abbildung

$$\iota: \begin{cases} L^2 & \rightarrow L^1 \\ f & \mapsto f \end{cases}$$

stetig, aber nicht surjektiv ist.

Und argumentiere warum jede dieser Aussagen (i), (ii), (iii), tatsächlich die gewünschte Aussage impliziert!

i) $M_n := \{f \in L^2 : \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq n\} = \{f \in L^2 : \|f\|_2 \leq \sqrt{n}\}$

•) $f \in \overline{M_n}$ bel., dann gibt es ein Nekt $(f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ aus M_n mit $f_i \xrightarrow{L^1} f$

Nach Korollar 7.15 gilt dann $f_i \rightarrow f$ in Maß

Mit Korollar 7.88 erhalten wir ein Teilnekt $(f_{ij})_{i,j \in \mathbb{I}}$ mit $f_{ij} \rightarrow f$ λ -f.ü.

also auch $f_{ij}^2 \rightarrow f^2$ λ -f.ü. und damit auch $|f_{ij}|^2 \rightarrow |f|^2$ λ -f.ü.

$\forall j \in \mathbb{I} : |f_{ij}|^2 \geq 0$ λ -f.ü. $\wedge \int_{[0,1]} 0^- d\lambda = 0 < \infty$ Nach dem Lemma von Fatou

(Korollar Folgerung 9.32) gilt also

$$\int_{[0,1]} |f|^2 d\lambda = \int_{[0,1]} \liminf_{i \in \mathbb{I}} |f_{ij}|^2 d\lambda = \int_{[0,1]} \liminf_{i \in \mathbb{I}} |f_{ij}|^2 d\lambda \leq \liminf_{j \in \mathbb{I}} \int_{[0,1]} |f_{ij}|^2 d\lambda \leq n$$

also $f \in M_n$ und damit $M_n = \overline{M_n}$ also abgeschlossen

•) Sei $g \in L^1 \setminus L^2$ und $f \in M_n$ sowie $\forall k \in \mathbb{N} \ h_k := f + \frac{1}{k} g$

$\forall k \in \mathbb{N} : h_k \in L^1 \wedge h_k \notin L^2$

außerdem gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|h_k - f\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \|g\|_1 = 0$, also $h_k \xrightarrow{L^1} f$

also ist $M_n^\circ = \overline{M_n}^\circ = \emptyset$

und $L^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ also L^2 von 1. Kategorie

$$ii) g_n(t) := \begin{cases} n, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n^3} \\ 0, & \frac{1}{n^3} < t \leq 1 \end{cases}$$

.) $f \in L^2$ bel.

Mit der Ungleichung von Hölder (vgl. Kraschinsky Satz 13.4) gilt

$$\left| \int_{[0,1]} f g_n d\lambda \right| \leq \|f g_n\|_1 \leq \|f\|_2 \|g_n\|_2 = \|f\|_2 \int_0^{\frac{1}{n^3}} n^2 dt = \|f\|_2 \underbrace{\frac{1}{n}}_{< \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) g_n(t) dt = 0$$

$$.) f(t) := t^{-\frac{1}{2}} \quad \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2 \Rightarrow f \in L^1$$

$$\int_0^1 f(t) g_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n^3}} t^{-\frac{1}{2}} n dt = n \cdot 2 t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{n^3}} = n \cdot 2 \cdot n^{-\frac{3}{2}} = 2 n^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

L^1 Banachraum, \mathbb{C} normierter Raum $R_n: L^1 \rightarrow \mathbb{C}: f \mapsto \int_{[0,1]} f g_n d\lambda$

beschränkte lineare Operatoren, weil $g_n \in L^\infty$ (vgl. Kraschinsky Satz 13.38)

mit $\|R_n\| = \|g_n\|_\infty = n$, also $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R_n\| = \infty$

Nach Satz 4.2.1. gibt es also eine dichte G_δ -Menge $M \subseteq L^1$ mit

$$\forall f \in M: \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int f g_n d\lambda \right| = \infty$$

$$M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \quad \text{mit } M_k \text{ offen} \quad L^2 \subseteq M^c = \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \right)^c = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k^c$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ ist $M_k = \overline{M_k}$ und $M_k^o = \overline{M_k}^o = \emptyset$, weil sonst wäre M nicht dicht

$$L^2 = L^2 \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k^c = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (L^2 \cap M_k^c)$$

$$(iii) \quad \iota: L^2 \rightarrow L^1: f \mapsto f$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. $f \in L^2$ bel. $\delta := \varepsilon$ und $g \in L^2$ mit $\|f - g\|_2 < \delta$ dann ist

$$\|f - g\|_1 = \|(f - g) \cdot 1\|_1 \leq \|f - g\|_2 \|1\|_2 = \|f - g\|_2 < \delta = \varepsilon$$

also ist ι stetig, außerdem linear, L^1 ist normierter Raum und L^2 Banachraum

ι ist nicht surjektiv, denn $f(t) = t^{-\frac{1}{2}} \in L^1 \cap \notin L^2$ rechnet man nach:

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2 \Rightarrow f \in L^1$$

$$\int_0^1 (t^{-\frac{1}{2}})^2 dt = \int_0^1 t^{-1} dt = \ln(t) \Big|_0^1 = \ln(1) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(\varepsilon) = \infty \Rightarrow f \notin L^2$$

Nach Aufgabe 4/3 ist also $\iota(L^2)$ von 1. Kategorie (denn wäre es von 2. Kategorie so wäre $\iota(L^2) = L^1 \setminus \{0\}$)