Übung 11 - MW1 - Lösungen

Richard Weiss vs. Prof. Grill

1. Bestimmen Sie für $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, $\mathbb{P}$ die Standardnormalverteilung die Wahrscheindlichkeiten $\mathbb{P}(]-\infty, 1.6[)$, $\mathbb{P}(]-1.1, 1.8[)$ und $\mathbb{P}(]1.4, \infty[)$.

   Lösung. Nachdem die Wahrscheindlichkeit $\mathbb{P}(]-\infty, x[)$ nichts Anderes, als

   $$F(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt \tag{1}$$

   ist, kann man kann direkt aus einer Tabelle der Standardnormalverteilung (hier von `https://de.wikipedia.org/wiki/Standardnormalverteilungstabelle`), also mit $\mu = 0$, $\sigma = 1$, herauslesen, dass

   $$\mathbb{P}(]-\infty, 1.6[) = F(1.6) = 0.94520.$$

   Üblicherweise, befinden sich, in der Tabelle, die Argumente bis auf Zehntel auf der Vertikalen und bis auf Hundertstel (direkt anknüpfend) auf der Horizontalen.
   Nützt man die Eigenschaften der Integral-Grenzen bzw. von Verteilungsfunktionen, sowie $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$ und die Symmetrie um 0, so bestimmt man

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(]-1.1, 1.8[) &= F(1.8) - F(-1.1)\\ &= F(1.8) - (1 - F(1.1))\\ &= 0.96407 - 1 + 0.86433\\ &= 0.8284.\end{aligned}$$

   Wieder aus Symmetrie-Gründen, folgt

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(]1.4, \infty[) &= 1 - F(1.4)\\ &= 1 - 0.91924\\ &= 0,08076.\end{aligned}$$

2. X_n hat eine Binomialverteilung $B(n, p_n)$, Y eine Poissonverteilung $P(\lambda)$.
   Zeigen Sie: wenn $np_n \to \lambda$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{N}_0$

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(Y = x).$$

   Lösung.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x) &= \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x}\\ &= \frac{1}{x!}\frac{n}{n}\cdots\frac{n-x+1}{n}(np_n)^x\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n (1-p_n)^{-x} = \cdots\end{aligned}$$

Nun gilt aber

- $\frac{n-k}{n} \to 1$, für $k = 0, \dots, x-1$,
- $(np_n)^x \to \lambda^x$,
- $p_n \to 0$, also $(1-p_n)^{-x} \to 1$.

Weil $\exp : t \mapsto \lim_{n\to\infty}(1+\frac{t}{n})^n$, gilt schließlich

$$\cdots \to \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \mathbb{P}(Y = x).$$

3. Bestimmen Sie für $X \sim B(6, 0.6)$ die Wahrscheindlichkeit $\mathbb{P}(X \leq 2)$, $\mathbb{P}(1 < X < 5)$ und $\mathbb{P}(X > 3)$.

   Lösung. Seien also $n = 6$ und $p = 0.6$, so berechnet man, weil B diskret ist,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 2) &= \sum_{x=0}^{2} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 0.1792, \\
\mathbb{P}(1 < X < 5) &= \sum_{x=2}^{4} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 0.72576, \\
\mathbb{P}(X > 3) &= \sum_{x=4}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 0.54432.
\end{aligned}$$

4. Vergleichen Sie die Wahrscheindlichkeiten aus dem vorigen Beispiel mit den entsprechenden für die Poissonverteilung $P(3.6)$.

   Lösung. Sei also $\lambda = 3.6$, so berechnet man, weil P diskret ist,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 2) &= \sum_{x=0}^{2} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \approx 0.302746845, \\
\mathbb{P}(1 < X < 5) &= \sum_{x=2}^{4} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \approx 0.580749326, \\
\mathbb{P}(X > 3) &= 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \approx 0.4848.
\end{aligned}$$

5. X sei normalverteilt mit $\mu = 4$ und $\sigma^2 = 25$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $[X < 7]$, $[X > 3]$ und $[|X| > 6]$ und eine Zahl c, für die $\mathbb{P}(X < c) = 0.9$ gilt.

   Lösung. Wenn wir die Substitution $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$ auf (1) anwenden, dann bekommen wir

$$\overline{F}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du,$$

   was genau der Standardnormalverteilung entspricht. Also, gilt $\overline{F}(x\sigma + \mu) = F(x)$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_F(X < 7) &= \mathbb{P}_{\overline{F}}(X < u(7)) \\
&= \overline{F}(0.6) \\
&= 0.72575,
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_F(X > 3) &= \mathbb{P}_{\overline{F}}(X > u(3)) \\
&= 1 - (1 - \overline{F}(0.2)) \\
&= \overline{F}(0.2) \\
&= 0.57926,
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_F(|X| > 6) &= \mathbb{P}_F(X > 6) + \mathbb{P}_F(X < -6) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{F}}(X > u(6)) + \mathbb{P}_{\overline{F}}(X < u(-6)) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{F}}(X > 0.4) + \mathbb{P}_{\overline{F}}(X < -2) \\
&= 1 - \overline{F}(0.4) + 1 - \overline{F}(2) \\
&= 1 - 0.65542 + 1 - 0.97725 \\
&= 0.36733.
\end{aligned}
$$

Zuletzt, setzen wir an mit $c \in \mathbb{R}$ als

$$
\begin{aligned}
0.9 &= \mathbb{P}_F(X < c) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{F}}(X < u(c)) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{F}}\left(X < \frac{c-\mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Nun gilt also

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 1.285 \approx \frac{c-4}{5} \\
&\Rightarrow c \approx 10.425.
\end{aligned}
$$

6. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Exponentialverteilung.

   Lösung. Die Dichtefunktion der Exponentialverteilung $E(\lambda)$ lautet

$$
f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x},
$$

also beschreibt

$$
F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda x} dx
$$

die Exponentialverteilung.
Wir nützen

$$\int_{]a,b]} f d\mu_F = \int_a^b f(x)F'(x)dx, \tag{2}$$

aus der letzten Übung und rechnen mittels

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3}$$

partieller Integration und der Regel von de L'Hospital, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} X d\mathbb{P}_F \overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}} xF'(x)dx \overset{(3)}{=} \lambda \int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx \\ &= \lambda \left(x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}dx \right) = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\bigg|_0^\infty - \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{1}{-\lambda} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass für die Varianz und

$$\forall\, c \in \mathbb{R} : \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-c)^2) - (\mathbb{E}(X) - c)^2. \tag{4}$$

Für $c \coloneqq 0$, rechnet man also, ähnlich wie oben,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) + \frac{1}{\lambda^2} &\overset{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}} X^2 d\mathbb{P}_F \overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}} x^2F'(x)dx \overset{(3)}{=} \lambda \int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx \\ &= \lambda \left(x^2\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty 2x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}dx \right) = 2\underbrace{\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx}_{\frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}} - \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Also, müssen $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ und $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

7. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Poissonverteilung.

   Lösung. Vorerst sei angemerkt, dass für die Poissonverteilung $P(\lambda)$

$$\forall\, x \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{P}(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

   gilt.
   Nachdem die Poissonverteilung diskret ist, kann man direkt die Definition eines Integrals von Treppenfunktionen (was Folgen schließlich sind) nützen und bekommt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{N}_0} X d\mathbb{P} = \sum_{x\in\mathbb{N}_0} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in\mathbb{N}_0} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= 0 + \sum_{x=1}^\infty x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda\frac{1}{e^\lambda}\sum_{x=1}^\infty \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\frac{1}{e^\lambda}\sum_{x=0}^\infty \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda. \end{aligned}$$

Für die Varianz, berechnet man analog

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) + \lambda^2 &\overset{(4)}{=} \int_{\mathbb{N}_0} X^2 d\mathbb{P} = \sum_{x \in \mathbb{N}_0} x^2 \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in \mathbb{N}_0} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= 0 + \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda \frac{1}{e^\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \frac{1}{e^\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} (1+x) \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda \frac{1}{e^\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} + \lambda \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}_{\mathbb{E}(X)} = \lambda + \lambda^2.
\end{aligned}$$

Also, müssen $\mathbb{E}(X) = \lambda$ und $\mathbb{V}(X) = \lambda$.