Algebra TU Wien, SS 2020, Übungsaufgabe 325A

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n := \{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N}\}$, und $E := \bigcup_n E_n$. Mit der üblichen Addition sind diese Mengen Monoide.

Sei K ein Körper. In 4.2.4 haben wir den Monoidring $K(E)$ definiert, als die Menge aller formalen Summen $\sum_{e\in E} r_e e$, wobei die r_e Elemente von K sind, aber $\{e \in E \mid r_e \neq 0\}$ endlich ist.

Um die Notation an die von den Polynomen bekannte Notation anzugleichen, führen wir eine formale Variable (oder „Unbestimmte“) x ein und ersetzen (wie in 4.2.4.4) die Menge E durch die Menge aller formalen Potenzen x^e, $e \in M$. Die Menge $\{x^e \mid e \in E\}$ trägt nun eine multiplikative Struktur: $x^e \cdot x^{e'} := x^{e+e'}$, und die Elemente des Monoidrings $K(E)$ schreiben wir nun als endliche Summen $\sum_{e\in E} r_e x^e$, die wie Polynome aussehen, in denen aber als Exponenten nicht nur natürliche Zahlen erlaubt sind sondern beliebige Elemente von E. Addition und Multiplikation sind wie bei gewöhnlichen Polynomen definiert (siehe 4.2.4.1).

Analog definieren wir $K(E_n)$.

Es gilt der folgende Satz.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $K(E_n)$ ein Unterring von $K(E_{n+1})$, und von $K(E)$, und $K(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(E_n)$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Isomorphismus $\varphi_n : K[x] \to K(E_n)$.
   (Hinweis: Wähle φ_{n+1} so, dass $\varphi_{n+1}(x^e) = \varphi_n(x^{2e})$ für alle $e \in E_n$ gilt.)
3. Für alle n und alle $p, q \in K(E_n)$ gilt:[1] $K(E_n) \models p|q$ genau dann, wenn $K(E) \models p|q$.
   Achtung! Das klingt trivial, und ist jedenfalls für Monome auch trivial. Bemühen Sie sich trotzdem, diesen Punkt exakt zu beweisen.
4. Die Einheiten von $K(E_n)$ und von $K(E)$ sind genau die konstanten Polynome. (D.h., die Bilder von konstanten Polynomen unter φ_0.)
5. Für alle $p \in K(E_n)$ gilt:[2]
   $$K(E) \models \ p \text{ ist prim} \quad\Leftrightarrow\quad \forall k \geq n:\ K(E_k) \models \ p \text{ ist prim}$$
6. Analog für „irreduzibel“ statt „prim“.

UE-Aufgabe 325A: Zeigen Sie den gerade formulierten Satz. Schließen Sie daraus, dass in $K(E)$ die irreduziblen Elemente genau die primen Elemente sind. Finden Sie ein echt absteigende Teilerkette in $K(E)$ und folgern Sie, dass $K(E)$ kein faktorieller Ring ist.

(Wenn Ihnen das zu leicht ist: Finden Sie eine echt absteigende Teilerkette, in der alle Elemente einen nichtverschwindenden konstanten Term haben.)

---

[1] Für einen beliebigen Ring R und Elemente $p, q \in R$ schreiben wir $R \models p|q$ für die Aussage „p teilt q in R“, das heißt: es gibt ein $r \in R$ mit $p \cdot r = q$. Das Symbol $R \models \ldots$ lesen wir als „In R gilt …“ oder „R glaubt …“.

Analog schreiben wir für $p \in R$ „$R \models p$ prim“, wenn weder $p = 0$ noch $R \models p|1$ gilt (also wenn p weder 0 noch Einheit in R ist), und wenn für alle a, b in R die Implikation

$$R \models p|ab \ \Rightarrow\ R \models p|a \ \vee\ R \models p|b$$

gilt, und Analoges vereinbaren wir für andere Begriffe wie Irreduzibilität.
Zum Beispiel gilt zwar $\mathbb{Z} \models (2 \text{ ist prim}) \wedge \neg(2|3)$, aber $\mathbb{Q} \models \neg(2 \text{ ist prim}) \wedge (2|3)$.

[2] Achtung: Im Allgemeinen kann man aus „$K(E_n) \models \ p$ ist prim “ nicht schließen, dass p auch in $K(E)$ prim ist.