Satz 3.6.2 Es seien V und W Vektorräume über K. Dann ist $L(V, W)$ ein Unterraum des Vektorraumes aller Abbildungen $V \to W$.

Beweis. Die Menge $L(V, W)$ enthält die Nullabbildung $V \to W : x \mapsto \mathcal{O}$. Unterraumkriterium. Die Nullabbildung f ist linear, weil $f(x) + cf(y) = \mathcal{O} + c\mathcal{O} = \mathcal{O} = f(x + cy)$. Also $L(V, W) \neq \emptyset$. Sind weiters Abbildungen $f_1, f_2 \in L(V, W)$, Vektoren $a, b \in V$ und Skalare $c, x \in K$ beliebig gegeben, so gilt

$$\begin{aligned}(f_1 + cf_2)(a + xb) &\overset{(1)}{=} f_1(a + xb) + cf(a + xb)\\ &\overset{(2)}{=} f_1(a) + xf_1(b) + cf_2(a) + xcf_2(b)\\ &\overset{(3)}{=} (f_1 + cf_2)(a) + x((f_1 + cf_2)(b)).\end{aligned}$$

(1) $\Leftrightarrow$ Definition von Addition und Multiplikation von Funktionen, (2) $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 sind linear, (3) $\Leftrightarrow$ umordnen, $x \cdot$ herausheben und (2).

Gemäß Satz 3.2.2 ist $f_1 + cf_2$ daher eine lineare Abbildung.

... Somit erfüllt $L(V, W)$ die beiden Bedingungen des Unterraumkriteriums 2.3.2. ... $\square$