Übungen zu Analysis 2, 3. Übung 26. 3. 2019

Die Termine für die Übungstests sind:
11. 4. 2019 17-18 EI7
16. 5. 2019 12-13 EI7
26. 6. 2019 18-19 Audi Max

21. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktion
$$f(x, y, z) = xy + \sin(yz)$$
sowie das Differential df und die Richtungsableitung für den Richtungsvektor $\nu = (1, -1, 2)$ in $(1, 1, 0)$.

22. Für eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird eine Funktion c, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, für die $f \circ c$ konstant ist eine Niveau oder Höhenlinie genannt. Zeigen Sie, dass Niveaulinien für f, c differenzierbar Lösungen der Differentialgleichung
$$\nabla f \cdot \frac{dc(t)}{dt} = 0$$
sind. Zeigen Sie, dass Kreise Niveaulinien der Funktion $f(x_1, x_2) = a - x_1^2 - x_2^2, \quad a \in \mathbb{R}$ konstant sind und skizzieren Sie die Niveaulinien der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ durch $(0, 0)$.

    Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ das Maximum aller Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \nu}$, $\|\nu\| = 1$ für $\nu = \frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f$ angenommen wird.

23. Bestimmen Sie einen Richtungsvektor ν mit $\|\nu\| = 1$ für den in $(1, 1, 1)$
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3 \text{ mit } \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{1}{2}$$
gilt.

24. Für
$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
berechne man
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$
Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz von Schwarz?

25. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$F(t) := \int_t^{1+t^2} \sin(tx)\, dx$$

zuerst über Berechnung von F und dann mit der Kettenregel (Bsp. 10.1.22).

26. Für eine durch eine Funktion f gegebene Fläche $F = \{(x, y, f(x, y))\}$ im $\mathbb{R}^3$ heißt $T = \{(x, y, z) : \; z_0 + A(x - x_0, y - y_0)\}$ für A linear und $(x_0, y_0, z_0) \in F$ *Tangentialebene,* wenn

$$\lim_{(x_y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x, y) - z_0 - A(x - x_0, y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

gilt. Zeigen Sie, dass für C^1-Funktionen f Tangentialebenen existieren.

27. Bestimmen Sie df und $d^2 f$ in $(1, 0, 1)$ für die Funktion

$$f(x, y, z) = e^{x+yz}$$

sowie $d^2 f(1, 0, 1)(\nu_1, \nu_2)$ für $\nu_1 = (1, 1, 0)^t, \nu_2 = (0, 1, 1)^t$.

28. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades für die Funktion

$$f(x, y, z) = x + \log\left(1 + \frac{1}{yz}\right)$$

mit Anschlussstelle $(1, 1, 1)$.

29. Berechnen Sie df, $d^2 f$ in $(0, 1)$ für die Funktion

$$f(x, y) = \sin x + x^2 + \cos(xy),$$

sowie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Anschlussstelle $(0, 1)$.

30. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$h(x) = \ln(\sin^2 x \cos x)$$

direkt und durch Differentiation von $f \circ g$, $f(a, b) = \ln(ab)$, $g(t) = (\sin^2 t, \cos t)$.