2.9.2 Lemma. Ist $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein vollständig angeordneter Körper, so ist er archimedisch angeordnet.

Beweis. Wäre nämlich $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, so existierte wegen (s)

$$\eta = \sup \mathbb{N}$$

(s) bedeutet: „wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge von K ein Supremum hat." Sei n beliebig in $\mathbb{N}$. $n \in \mathbb{N}$. Mit n gehört aber auch $n+1$ zu $\mathbb{N}$. Peano Axiome! Also gilt $n+1 \leq \eta$, und somit $n \leq \eta - 1$. Umformen! Daher ist $\eta - 1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$, was den Widerspruch $\eta - 1 \geq \sup \mathbb{N} = \eta$ nach sich zieht. $\eta - 1$ ist eine obere Schranke per Definition, weil $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \eta - 1$. Die Existenz von $\eta - 1 \geq \sup \mathbb{N}$ im Körper zeigt aber, dass $\mathbb{N} \subseteq K$ nicht nach oben beschränkt ist, also ist K per Definition archimedisch angeordnet.

$\square$