2.2.4 Die folgenden Gesetze sind für Vektoren im Anschauungsraum klar. Die folgende Herleitung verwendet jedoch nur die Definition eines Vektorraumes:

$0a = \mathcal{O}$ für alle $a \in V$ (2.3)

$(-1)a = -a$ für alle $a \in V$ (2.4)

$x\mathcal{O} = \mathcal{O}$ für alle $x \in K$ (2.5)

Ist $x \in K$, $a \in V$ und $xa = \mathcal{O}$, so folgt $x = 0$ oder $a = \mathcal{O}$. (2.6)

$a + b = b + a$ für alle $a, b \in V$. (2.7)

Der Beweis ist in jedem Fall sehr einfach:

Zu (2.3): $0a = (0+0)a \overset{2.}{=} 0a + 0a$, daher ist $0a = \mathcal{O}$.

Zu (2.4): $\mathcal{O} \overset{(2.3)}{=} 0a = (1-1)a \overset{2.}{=} 1a + (-1)a \overset{4.}{=} a + (-1)a$, daher ist $(-1)a = -a$.

Zu (2.5): $x\mathcal{O} = x(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \overset{1.}{=} x\mathcal{O} + x\mathcal{O}$, daher ist $x\mathcal{O} = \mathcal{O}$.

Zu (2.6): Sei $xa = \mathcal{O}$. Wir unterscheiden zwei Fäll: Für $x = 0$ ist (2.6) richtig. Ist jedoch $x \neq 0$, so gilt

$\mathcal{O} \overset{(2.5)}{=} x^{-1}\mathcal{O} = x^{-1}(xa) \overset{3.}{=} (x^{-1}x)a = 1a \overset{4.}{=} a$.

Zu (2.7): Wir berechnen $(1+1)(a+b)$ auf zwei Arten:

$$(1+1)(a+b) \overset{1.}{=} (1+1)a + (1+1)b \overset{2.}{=} 1a + 1a + 1b + 1b \overset{4.}{=} a + a + b + b,$$

$$(1+1)(a+b) \overset{2.}{=} 1(a+b) + 1(a+b) \overset{1.}{=} 1a + 1b + 1a + 1b \overset{1.}{=} a + b + a + b.$$

Nun setzen wir die Ergebnisse gleich und kürzen auf beiden Seiten. Das ergibt $a + b = b + a$. Wir schreiben die wichtige Formel (2.7) nochmals mit anderen Worten auf:

Satz 2.2.5 In jedem Vektorraum V ist $(V, +)$ eine kommutative Gruppe.