Übungen zu Analysis 2, 2. Übung 19. 3. 2019
ENTWÜRZT

11. Beweisen Sie die Ungleichung von Young: Für $A, B > 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$$

Hinw.: Verwenden Sie die Konvexität der Exponentialfunktion.

12. Beweisen Sie die Ungleichung von Hölder: Für $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, gilt für $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/q}.$$

13. Zeigen Sie , dass für $1 \leq p < \infty$, $(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.
Hinw.: Für die Dreiecksungleichung zeige man

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

und wende die Hölder-Ungleichung an.

14. Man zeige, dass alle Normen $|| \cdot ||_p, || \cdot ||_q$, für $1 \leq p, q \leq \infty$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Man zeige insbesondere, dass für $1 \leq p < q < \infty$, $|| \cdot ||_p \geq || \cdot ||_q \geq || \cdot ||_\infty$.
Hinw.: Man verwende, dass aus $0 < p < q$ und $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda^q \leq \lambda^p$ folgt.

15. Bestimmen Sie die Operatornormen der Identität als Abbildung

$$(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_p) \to (\mathbb{R}^n, || \cdot ||_q) \text{ für } 1 \leq p < q \leq \infty$$

und von

$$(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_2) \to (\mathbb{R}^n, || \cdot ||_1),$$

sowie von $A_x : (\mathbb{R}^n, || \cdot ||_2) \to \mathbb{R}$, $A_x y = (x, y)$ ($(\cdot, \cdot)$ Skalarprodukt).
(Scheinbar nicht obligatorischer) Hinw.: Mit dem Skalarprodukt, ist tatsächlich jenes, aus der Schulmathematik gemeint. d.h. also, wir identifizieren A_x mit x^T und behandeln $A_x y$ als "Matrix-Matrix" Produkt.

16. Zeigen Sie, dass die Gruppe $SO_n(\mathbb{R})$, der orthogonalen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1, abgeschlossen (wahrscheindlich im topologischen Sinne) in $GL_n(\mathbb{R})$ ist, wenn man $GL_n(\mathbb{R})$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times n}$ auffasst.
Hinw.: Verwenden Sie, dass eine $n \times n$-Matrix genau dann orthogonal ist, wenn alle ihre Spaltenvektoren Euklidische Norm 1 haben und ihre Determinante ± 1 ist. Verwenden Sie dann Prop. 6.1.12.

17. Zeigen Sie, dass für $A : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ und $||A|| < \ln 2$ (!! siehe Beispiel 9.2.10 (iii) !!), die Abbildung $x \mapsto e^A x$ bijektiv ist.

18. Zeigen Sie, dass für $r, s \in \mathbb{R}$ und A eine $n \times n$-Matrix, $e^{rA}e^{sA} = e^{(r+s)A}$ gilt.
Hinw.: Berechnen Sie $\frac{d}{dr}(e^{rA}e^{(u-r)A})$.

19. Für

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\cosh t \\ te^{t^2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

berechne man $\int_0^1 F(t)dt$ und F'.

20. Berechnen Sie die Abbildungsnorm der lin. Abbildung T:

$$Tf(x) = \begin{pmatrix} \int_0^x F(t)dt \\ \int_x^1 F(s)ds \end{pmatrix}$$

als Abbildung

$$(C[0,1], ||\cdot||_\infty) \to ((C[0,1], ||\cdot||_\infty) \times (C[0,1], ||\cdot||_\infty), ||\cdot||_1),$$

bzw. nach

$$(C[0,1], ||\cdot||_\infty) \to ((C[0,1], ||\cdot||_\infty) \times (C[0,1], ||\cdot||_\infty), ||\cdot||_\infty).$$