3.6.1 Proposition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p}) \in \mathbb{R}^p$, und $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Dann impliziert $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ bezüglich einer der Metriken d_1, d_2, d_∞ auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ bezüglich einer der anderen zwei Metriken aus d_1, d_2, d_∞.

Die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x bezüglich einer und daher aller dieser Metriken ist wiederum äquivalent zur Komponentenweise Konvergenz[8]

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = x_k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, p. \tag{3.11}$$

Insbesondere konvergiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gegen ein $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn[9]

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$

[8] Diese Konvergenz versteht sich in $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Metrik

[9] Vergleiche Bemerkung 3.3.6

Beweis. Aus Ungleichung (3.10) schließen wir auf

$$d_\infty(x_n, x) \le d_2(x_n, x) \le d_1(x_n, x) \le p \cdot d_\infty(x_n, x).$$

Ungleichung (3.10) lautet wie folgt:

$$\max_{k=1,\dots,p} |x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 \right)^{1/2} \le \sum_{k=1}^{p} |x_k| \le p \cdot \max_{k=1,\dots,p} |x_k|.$$

Die erste Ungleichheit erkennt man dadurch, dass ....

$$\max_{k=1,\dots,p} |x_k| =: x_{max} = \left(\sum_{k=max}^{max} |x_{max}|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Die zweite wird durch ausquadrieren klar, also

$$\left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{p} |x_k| \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k| \right)^2 =$$

$$|x_1|^2 + \dots + |x_2|^2 + \dots + |x_p|^2 + \dots = \sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 + \dots,$$

wobei für die vorletzte Gleichheit das Distributivgesetz einfach mehrmals angewendent wird und bei der letzten Gleichheit nur noch alle $|x_k|^2$ in eine Summe zusammengefasst wird (mittels Kommutativität und Assoziativität). Das, was die „…" ganz am Ende darstellen sollen ist positiv, also gilt die Ungleichheit tatsächlich.

Für die letzte Ungleichheit von (3.10), bemerken wir, dass es in der zweiten Summe insgesamt p Summanden mit wahrscheindlich unterschiedlicher größe gibt. Durch $\max_{k=1,\dots,p} |x_k|$ wird jedoch der größte dieser Summanden ausgewählt und ersetzt alle anderen wegen „$p \cdot \dots$".

Weil das genau den Metriken d_1, d_2, und d_∞ entspricht, gilt die Ungleichheitskette unseres Beweises tatsächlich.

Das Einschlusskriterium Satz 3.3.2 liefert nun sofort, dass wenn eine der Folgen $(d_1(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_2(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(d_\infty(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, es dann die beiden anderen Folgen auch sind. Gemäß Bemerkung 3.2.3, also „Wegen $|d(x, x_n) - 0| = d(x, x_n)$ konvergiert eine $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) genau dann gegen ein $x \in X$, wenn die Folge $(d(x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, versehen mit der euklidischen Metrik, gegen 0 konvergiert.", ist die Aussage gerecht fertigt, wenn man $0 \leq d(x_n, x)$ in Betracht zieht und $d_\infty(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow p \cdot d_\infty(x_n, x) \to p \cdot 0 = 0$, wegen Satz 3.3.5(iii). Aus Bemerkung 3.2.3 folgt, dass die Konvergenzbegriffe bzgl. der drei Metriken übereinstimmen. ... d.h. „alles Konvergiert zum selben x."

Sei nun $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ bezüglich bezüglich einer dieser Metriken und daher insbesondere bezüglich d_∞. „bezüglich" LOL. Das wurde ja oben gerade bewiesen. Für $k = 1, \ldots, p$ gilt

$$0 \leq |x_{n,k} - x_k| \leq \max_{j=1,\ldots,p} |x_{n,j} - x_j| = d_\infty(x_n, x).$$

Die erste Ungleichheit ist trivial, die zweite ist klar, weil das Maximum von p Gliedern immer größer gleich jedem einzelnen dieser p Glieder ist und die Gleichheit gilt ja laut Definition.

Wieder nach Einschlusskriterium Satz 3.3.2 zusammen mit Bemerkung 3.2.3 folgt $\lim_{n \to \infty} x_{n,k} = x_k$. Wir betrachten also wieder die obere Ungleichung und argumentieren jetzt für jede Komponente einzeln. Mir fällt spontan ein, dass Bemerkung 3.2.3 mit „$(d(x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$" insbesondere dadurch gerechtfertigt wird, dass $d(x, x_n) \in \mathbb{R}$ (laut Axiom). Sei umgekehrt (3.11) vorausgesetzt und $\varepsilon > 0$ gegeben. Das ist jetzt der Beweis der umgekehrten Implikation, also dass wenn alle Komponenten von x_n konvergieren, so auch x_n selbst. Wähle $N_1, \ldots, N_p$, sodass für $k =$

$1, \dots, p$ folgt $|x_{n,k} - x_k| < \epsilon$, $n \geq N_k$. Das geht, weil jede Komponente von x_n, also $x_{n,k}$, laut Voraussetzung gegen x_k konvergiert. Für jede Komponente $x_{n,k}$ wird hier ein (möglicherweise) anderes $N_k \in \mathbb{N}$ gewählt. Setzt man $N := \max\{N_1, \dots, N_p\}$, so folgt

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{k=1,\dots,p} |x_{n,k} - x_k| < \epsilon.$$

Jetzt gilt wohl $n \geq N \geq N_1, \dots, N_p$. Das N ist nun einheitlich für alle Komponenten gewählt und es gilt $|x_{n,k} - x_k| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, wenn $k = 1, \dots, p$, insbesonder gilt also die obere Ungleichheit. Die Gleichheit gilt laut Definition.

Also gilt $x_n \to x$ bezüglich d_∞ ... weil schließlich praktischerweise $d_\infty(x_n, x) < \epsilon$, $\forall n \geq N$ da steht und deshalb (laut oberer Ungleichheit) auch $d_1(x_n, x) < \epsilon$ und $d_2(x_n, x) < \epsilon$ gilt. Also folgt aus der komponentenweise Konvergenz in einer der Metriken d_1, d_2, oder d_∞ auch die Konvergenz der Folge von Punkten $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p}) \in \mathbb{R}^p$, mit jeder der Metriken d_1, d_2, und d_∞. $\square$