Aufgabe 7:

Zum asymptotischen Vergleich von Folgen.

(a) Vergleichen Sie das asymptotische Verhalten von $f(n) = n!$ und $g(n) = (n+2)!$, d.h. überlegen Sie sich ob eine (welche) der Funktionen ein $o, O, \omega, \Omega, \Theta$ der anderen Funktion ist.

(b) Vergleichen Sie das aymptotische Verhalten von $f(n) = n^{\log_2 4}$ und $g(n) = 3^{\log_2(n)}$, d.h. überlegen Sie sich ob eine (welche) der Funktionen ein $o, O, \omega, \Omega, \Theta$ der anderen Funktion ist.

(c) Zeigen Sie an Hand der Definition, dass für positive Funktionen f und g die Beziehung

$$max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

gilt.

(d) Gilt selbige Beziehung ebenfalls für $min(f(n), g(n))$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(e) Folgt aus $f(n) = O(g(n))$, dass $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

(f) Gilt für alle positiven Funktionen f die Beziehung $f(n) = O((f(n))^2)$?

(g) Finden Sie eine Funktion f, sodass weder $f(n) = O(n)$ noch $f(n) = \Omega(n)$ gilt.

a) $f(n) = n!$ und $g(n) = (n+2)!$

Sei $c \in \mathbb{R}^+$ bel., wir wünschen uns $c\,|f(n)| \leq |g(n)| \Leftrightarrow c\,n! \leq (n+2)!$

$\Leftrightarrow c \leq (n+1)(n+2) \Leftrightarrow c \leq n^2 + 3n + 2 \Leftarrow n \geq \frac{-3 + \sqrt{9 - 4(2-c)}}{2}$

und $9 - 4(2-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 4c \geq 0 \Leftrightarrow c \geq -\frac{1}{4}$ also $g \in \omega(f)$

nach Lemma 1.3 Punkt 5 also $f \in o(g)$ und Punkt 1 $f \in o(g) \subseteq O(g)$

Ang. $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: c\,|g(n)| \leq |f(n)| \Rightarrow c\,(n+2)! \leq n! \Rightarrow$

$c(n+1)(n+2) \leq 1$ $\lightning$ also $f \notin \Omega(g)$ und nach Lemma 1.2 gilt $\Theta(g) = \Omega(g) \cap O(g)$

also $f \notin \Theta(g)$, g ist asymptotisch obere Schranke von f, aber nicht asymptotisch scharf

b) $f(n) = n^{\log_2(4)} = n^2$, $g(n) = 3^{\log_2(n)}$ Wir betrachten die Teilfolge $n(k) = 2^k$

Für bel. $c \in \mathbb{R}^+$ wünschen wir uns $|g(n(k))| \leq c\,|f(n(k))| \Leftrightarrow 3^k \leq c\,2^{2k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq c$ also ist g asymptotisch kleiner als f: $g \in o(f) \subseteq O(f)$

Wünschen wir uns aber ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $c\,|f(n(k))| \leq |g(n(k))| \Leftrightarrow c\,2^{2k} \leq 3^k \Leftrightarrow c \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$

So sehen wir dass es so ein c nicht geben kann, weil $\left(\frac{3}{4}\right)^k$ monoton gegen 0 konvergiert

also ist f keine asymptotisch scharfe Schranke; $g \notin \Omega(f)$, $g \notin \Theta(f)$

Kaltenbäck Lemma

2.2.12

c) Wir suchen zuerst ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|max(f(n), g(n))| \leq c\,|f(n) + g(n)|$

$|max(f(n), g(n))| = \left|\frac{f(n)+g(n) + |f(n)-g(n)|}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|f(n)+g(n)| + |f(n)-g(n)|\right) \overset{f,g \text{ positiv}}{\leq}$

$\leq |f(n) + g(n)|$ also $max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

umgekehrt $|\max(f(n),g(n))| = \left|\frac{f(n)+g(n) + |f(n)-g(n)|}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(|f(n)+g(n)| + |f(n)-g(n)|\right) \geq$

$\geq \frac{1}{2}|f(n)+g(n)|$ also $\max(f(n),g(n)) \in \Omega(f(n)+g(n))$

d) $g(n) := 1$, $f(n) := n$ so ist $\min(f(n),g(n)) = 1$, $f(n)+g(n) = 1+n$

es ist $1 \in O(1+n)$, aber $1 \notin \Omega(1+n)$

e) Nein, denn

$f(n) = n$, $g(n) = -n$ so gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(n)| \leq |g(n)|$ also $f \in O(g)$

aber $2^{f(n)} \leq c\, 2^{g(n)} \Leftrightarrow 2^n \leq c\, 2^{-n} \Leftrightarrow 2^{2n} \leq c \Leftrightarrow 4^n \leq c$ also $2^f \notin O(2^g)$

f) $f > 0$, suche c mit $f(n) \leq c(f(n))^2 \Leftrightarrow 1 \leq c f(n) \Leftrightarrow \frac{1}{f(n)} \leq c$

wähle $f(n) := \frac{1}{n}$, gäbe es ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{n} \leq c \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n \leq c$ ↯

also nein!

g)
$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ ungerade} \\ n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 8:

Zeigen Sie:

$$2^{2^{\lfloor \log_2 \log_2 n \rfloor}} = O(n)$$

und bestimmen Sie die größte Zahl $c > 0$, sodass

$$2^{2^{\lfloor \log_2 \log_2 n \rfloor}} = \Omega(n^c)$$

.

1) Betrachte $n(k) = 2^{2^k}$, gilt für ein $k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0$ $\quad f(n(k)) = 2^{2^{\lfloor \log_2 \log_2 (2^{2^k}) \rfloor}} \leq c\, 2^{2^k} = c\, g(n(k))$

So betrachte $n \geq 2^{2^{k_0}}$, $\exists\, k_1 \geq k_0$: $2^{2^{k_1}} \leq n < 2^{2^{k_1+1}}$ und $f(n) = f(n(k_1)) \leq c\, g(n(k_1)) \leq c\, g(n)$

also reicht es $n(k)$ zu betrachten und es gilt $f(n(k)) = 2^{2^k} = g(n(k))$

2) betrachte $n(k) = 2^{2^k} - 1$, vernachlässige vorerst „-1" $\quad d\, 2^{c 2^k} \leq 2^{2^{k-1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ d \leq 2^{2^k(\frac{1}{2} - c)}$, also Vermutung: $c \leq \frac{1}{2}$

Sei also $c = \frac{1}{2}$, es gilt $(2^{2^k} - 1)^{\frac{1}{2}} \leq (2^{2^k})^{\frac{1}{2}} = 2^{2^{k-1}}$

Sei nun $2^{2^{k-1}} \leq n \leq 2^{2^k} - 1$, es gilt $n^{\frac{1}{2}} \leq (2^{2^k} - 1)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{2^{k-1}} = 2^{2^{\lfloor \log_2 \log_2 (n) \rfloor}}$

Für $c > \frac{1}{2}$ nehmen wir an es gäbe ein $d > 0$ mit $d\,(2^{2^k} - 1)^c \leq 2^{2^{k-1}}$; $b\,\frac{1}{2} = c$, $b > 1$

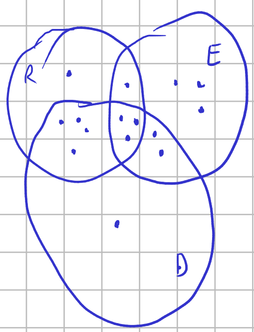
$$\Rightarrow d \leq \frac{(2^{2^k})^{\frac{1}{2}}}{(2^{2^k} - 1)^c} = \left(\frac{2^{2^k}}{(2^{2^k} - 1)^b} \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{Hospital}} \frac{a_1\, 2^{2^k}}{a_2\, b\, (2^{2^k} - 1)^{b-1}\, 2^{2^k}} = \frac{a_1}{a_2 b} \frac{1}{(2^{2^k} - 1)^{b-1}} \to 0$$

Aufgabe 9:

In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Russisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Russisch, 4 Englisch und Russisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?
(Hinweis: Prinzip von Inklusion und Exklusion)

$|D| = 10$; $|E| = 9$; $|R| = 9$; $|D \cap E| = 5$; $|D \cap R| = 7$; $|E \cap R| = 4$; $|E \cap D \cap R| = 3$

$|D \cup E \cup R| = |D| + |E| + |R| - |D \cap E| - |D \cap R| - |E \cap R| + |E \cap D \cap R| = 10 + 9 + 9 - 5 - 4 - 7 + 3 = 15$



Aufgabe 10:

Gegeben sei die Adjazenzmatrix A eines gerichteten Graphes $G = (V, E)$, welcher keine Schlingen (also Kanten (v, v), mit $v \in V$) und keine Mehrfachkanten enthält. Eine universelle Senke in solch einem gerichteten Graphen G ist ein Knoten s mit Hingrad $d^-(s) = |V| - 1$ und Weggrad $d^+(s) = 0$. Man zeige, dass es möglich ist, durch Untersuchen der Adjazenzmatrix A in Laufzeit $O(|V|)$ festzustellen, ob G solch eine universelle Senke enthält oder nicht.

$s := 1$

for $j = 2, \dots, n$

  if $A_{sj} = 1$

    $s := j$

  end if

end for

$d^+(s) := \sum_{i=1}^{n} A_{is}$

if $d^+(s) = n-1$

  v_s ist universelle Senke

else

  es gibt keine universelle Senke

end if

Seien die Elemente von V bezeichnet mit $(v_i)_{i=1}^{n}$ und $n := |V|$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schleifeninvariante

$I(A, s, j)$: $\forall i < j : (i \neq s \Rightarrow v_i$ ist keine universelle Senke$)$

Zu Beginn der Schleife ist $s = 1$ und $j = 2$, also $\nexists\, i < j : i \neq s$ und damit ist $I(A, s, j)$ erfüllt

Sei nun $I(A, s, j)$ erfüllt

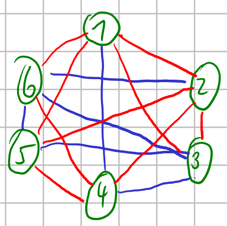
Fall 1: $A_{sj} = 1$ dann wird $s' := j$ und s kann keine universelle Senke sein, da sonst $d^-(s) \geq 1 = 0$ ↯

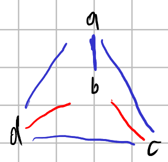
Fall 2: $A_{sj} = 0$ dann kann j keine universelle Senke sein, da sonst $d^+(s) \leq n-2 = n-1$ ↯

Aufwand $\approx 2n$ also $\Theta(n)$

Aufgabe 11:

Sei G der vollständige Graph auf 6 Knoten (d.h. 6 Knoten und eine Kante zwischen je 2 von ihnen). Jede Kante ist rot oder blau gefärbt. Zeigen Sie: es exisitiert in dem Graphen ein Dreieck (induzierter Teilgraph mit 3 Knoten) mit nur roten Kanten oder ein Dreieck mit nur blauen Kanten.
(Hinweis: Schubfachprinzip)





Wähle einen beliebigen Knoten a. Es gilt $d(a) = 5$. Teilt man 5 Kanten auf zwei Farben auf so gibt es eine Farbe – o.B.d.A blau – mit 3 Kanten. (Schubfachprinzip)

Seien also $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ad}$ die drei blauen Kanten

Fall 1: $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ad}$ sind rot, dann ist Δacd rot

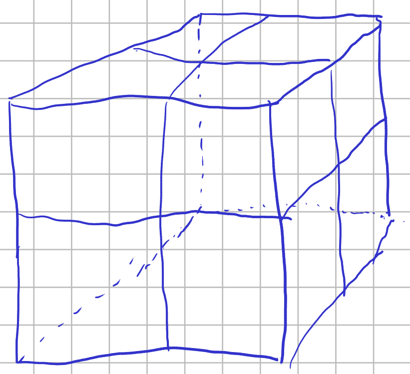
Fall 2: $\overline{dc}$ oder $\overline{db}$ oder $\overline{bc}$ blau

Δadc blau $\quad$ Δadb blau $\quad$ Δabc blau

Aufgabe 12:

Beweisen Sie, dass es unter je neun Punkten in einem Würfel der Kantenlänge 2 stets zwei Punkte gibt, deren Abstand höchstens $\sqrt{3}$ ist.
(Hinweis: Schubfachprinzip)

Seien $a_1, \dots, a_9$ Punkte in einem Würfel der Kantenlänge 2. Ang. $\forall i,j \in \{1,\dots,9\}: (i \neq j \rightarrow d(a_i, a_j) > \sqrt{3})$



Wir teilen den Würfel in 8 Sektoren (kleinere Würfel). In jedem Sektor ist der der Abstand zweier Punkte durch $\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ beschränkt, in jedem Sektor kann also maximal ein Punkt da liegen. Da wir 9 Punkte auf 8 Sektoren aufteilen ergibt sich nach dem Schubfachprinzip ein Widerspruch ↯