Satz 1.9.6 Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe.

(a) Aus $xy = xy'$ folgt $y = y'$ für alle $x, y, y' \in G$.

(b) Aus $xy = x'y$ folgt $x = x'$ für alle $x, x', y \in G$.

(c) Für alle $u, v \in G$ gibt es genau ein $y \in G$ mit $uy = v$ und genau ein $x \in G$ mit $xu = v$.

Beweis: (a) Es gibt das zu x inverse Element $x^{-1} \in G$.
... laut Satz 1.9.5 (b). Wir haben daher:

$xy = xy'$	Wir multiplizieren mit x^{-1} von links.
$x^{-1}(xy) = x^{-1}(xy')$	Wir wenden das Assoziativgesetz an.
$(x^{-1}x)y = (x^{-1}x)y'$	$x^{-1}x = e$
$ey = ey'$	$ey = y,\ ey' = y'$
$y = y'$	

(b) Durch Multiplikation der Gleichung $xy = x'y$ von rechts mit dem zu y inversen Element y^{-1} folgt analog $x = x^{-1}$.

$xy = x'y \Rightarrow (xy)y^{-1} = (x'y)y^{-1} \Rightarrow x(yy^{-1}) = x'(yy^{-1}) \Rightarrow$
$xe = x'e \Rightarrow x = x'$.

(c) Das Element $y := u^{-1}y \in G$ hat die gewünschte Eigenschaft, da

$$uy \overset{(1)}{=} u(u^{-1}v) \overset{(2)}{=} (uu^{-1})v \overset{(3)}{=} ev \overset{(4)}{=} v.$$

(1) $\Leftrightarrow$ Definition von y oben, (2) $\Leftrightarrow$ Assoziativität, (3) $\Leftrightarrow$ Axiom 2, (4) $\Leftrightarrow$ Axiom 3.

Gilt für $y' \in G$ ebenfalls $uy^{-1} = v$, so folgt $uy = v = uy'$.
Wir zeigen Eindeutigkeit... Wir kürzen $uy = uy^{-1}$ gemäß (a) und erhalten $y = y^{-1}$. ... ja, genau so. Die Richtigkeit der zweiten Behauptung ergibt sich analog aus (b) und
$x := vu^{-1}$.

$$xu = (vu^{-1})u = v(u^{-1}u) = ve = v.$$

Der Rest folgt jetzt aber wirklich analog. $\square$