2.9.5 Satz. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, sodass $y^n = x$.

Beweis. Im Fall $n = 1$ ist die Aussage trivial. ..., weil $y^1 = y = x$. Sei also $n \geq 2$. Ok. Die Eindeutigkeit von y folgt unmittelbar aus Lemma 2.4.10, da aus $0 \leq y_1 < y_2$ immer $y_1^n < y_2^n$ folgt. In Lemma 2.4.10 war das sogar ein „genau dann, wenn". Somit können nicht beide der Gleichung $y^n = x$ genügen. Für zwei $y_1 \neq y_2 \Leftrightarrow y_1 > y_2 \vee y_1 < y_2$. Die Gleichheich $y_1^n = x = y_2^n$ wäre also falsch.

Zur Existenz: Ist $x = 0$, so ist klarerweise $y^n = x$ für $y = 0$. $0^n = x = 0$. Im Fall $x > 0$ sei

$$E := \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ t^n < x\}.$$

Alle rationalen Zahlen, die positiv und deren beliebige Potenz n dennoch echt kleiner x ist. Die Menge ist nicht leer, denn für $s = \frac{x}{1+x}$ gilt $0 < s < \min(x, 1)$ und daher $s^n < s < x$; also $s \in E$. $\frac{x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow x < x + 1$ und $\frac{x}{1+x} < x \Leftrightarrow x < x + x^2$. Das stimmt, weil $x > 0$, also ist $0 < s < \min(x, 1)$. Weil $\frac{x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1} < 1^{n-1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = s^n < \frac{x}{1+x} = s$. Zudem gilt $s < x$, also $s^n < s < x$. Für $T := 1 + x$ gilt $T > 1$ und daher $T^n > T > x$. $T > 1$ ist klar, weil $1 + x$ mit $x > 0$ ist $1 + x > 1$. $T > 1 \Leftrightarrow T^{n-1} > 1^{n-1} = 1 \Leftrightarrow T^n > T$ und $T = 1 + x > x$. Aus $t \geq T$ folgt dann $t^n \geq T^n > x$ und damit $t \notin E$. Daher $t < T$. Also muss T eine obere Schranke von E sein. $t < T$.

Da $\mathbb{R}$ vollständig angeordnet ist, existiert $y := \sup E$. „Jede nach oben beschränkte $E \subseteq \mathbb{R}$ hat ein $\sup E$." Wegen $0 < \frac{x}{1+x} \in E$ gilt $y > 0$. $0 < \frac{x}{1+x} \leq \sup E = y$. Wir schreiben im Folgenden, dass $y^n = x$, und zwar indem wir beide anderen Möglichkeiten $y^n < x$ und $y^n > x$ ausschließen. Fallunterscheidung! Dazu benötigen wir, dass die für beliebige Elemente $a, b \in \mathbb{R}$ geltende und mit vollständiger Induktion nach n zu beweisende Gleichung

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}). \qquad (2.9)$$

Das ist Übung 2.22, nur mit n statt $n+1$. Für $0 < a < b$ erhalten wir daraus die Abschätzung

$$b^n - a^n < (b-a)\,n\,b^{n-1}. \qquad (2.10)$$

Aus (2.9) wird bei $(b^{n-1}a^0 + b^{n-2}a^1 + \ldots + b^1a^{n-2} + b^0a^{n-1})$ jedes a mit $b > a$ ausgetauscht und das sind dann n mal die Terme b^{n-1}. Das kann wegen $0 < a < b$ nur größer werden.

Angenommen $y^n < x$, so gibt es gemäß Satz 2.8.3 ein $\epsilon \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 < \epsilon < \min\left(\frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}, 1\right).$$

Satz 2.8.3 gilt für archimedisch angeordnete Körper und laut Lemma 2.9.2 insbesondere für vollständig angeordnete Körper, wie $\mathbb{R}$. Des weiteren sind $1 > 0$ und $\frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}} > 0$, weil $x - y^n > 0 \Leftrightarrow x > y^n$ (siehe oben) und $n(y+1)^{n-1} > 0$, wegen $n \geq 2$ und $y + 1 > y > 0$ und daher gilt durch Lemma 2.4.10, dass $(y+1)^{n-1}$.

Für $a = y$ und $b = y + \epsilon$ folgt aus (2.10)

$$(y+\epsilon)^n - y^n < \epsilon n (y+\epsilon)^{n-1} < \epsilon n (y+1)^{n-1} < x - y^n.$$

Tatsächlich kommt durch Einsetzen folgendes heraus:
$(y+\epsilon)^n - y^n < ((y+\epsilon) - y) n (y+\epsilon)^{n-1} = \epsilon n (y+\epsilon)^{n-1}$
und, weil $1 > \epsilon$ folgt die zweite Ungleichheit. Die letzte Ungleichheit folgt aus $0 < \epsilon < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$, wenn mit dem Zähler multipliziert wir. Also gilt $(y+\epsilon)^n < x$ und daher $y + \epsilon \in E$ im Widerspruch zu $y = \sup E$. $-y^n$ wird gekürzt und $y + \epsilon \in \{t \in \mathbb{R} : t > 0, t^n < x\} =: E$.

Wäre andererseits $y^n > x$, so gilt für

$$\delta := \frac{y^n - x}{n y^{n-1}}$$

$0 < \delta < \frac{y}{n} < y$. Die erst Ungleichheit $0 < \frac{y^n - x}{n y^{n-1}}$ erkennt man dadurch, dass $y^n - x > 0 \Leftrightarrow y^n > x$ und $y > 0 \wedge n \geq 2 \Rightarrow n y^{n-1} > 0$. Die zweite Ungleichheit folgt aus $\frac{y^n - x}{n y^{n-1}} = \frac{y^n}{n y^{n-1}} - \frac{x}{n y^{n-1}} = \frac{y}{n} - \frac{x}{n y^{n-1}}$ und $\frac{x}{n y^{n-1}} > 0$, weil $x > 0$ und (siehe oben) $n y^{n-1} > 0$. Wir wollen zeigen, dass $y - \delta$ eine obere Schranke von E ist. Das würde $y = \sup E$ widersprechen und den (zweiten) Fall $y^n > x$ ausgrenzen. Wäre dem nicht so, dann gilt $t > y - \delta$ für ein $t \in E$. Erstens: „Widerspruch-Inception"; Zweitens $\neg(\forall t \in E : t \leq y - \delta) \Leftrightarrow (\exists t \in E : t > y - \delta)$, also Satz vom Widerspruch angewendet auf die Definition einer oberen Schranke. Aus (2.10) folgt aber mit $b = y$, $a = (y - \delta)$

$$y^n - t^n < y^n - (y-\delta)^n < \delta n y^{n-1} = y^n - x.$$

Tatsächlich kommt durch Einsetzen folgendes heraus:

$y^n - (y-\delta)^n < (y-(y-\delta))ny^{n-1} = \delta n y^{n-1}$, was die zweite Ungleichheit erklärt. Die erste Ungleichheit gilt, wegen $t^n > (y-\delta)^n \Leftrightarrow -t^n < -(y-\delta)^n \Leftrightarrow y^n - t^n < y^n - (y-\delta)^n$. Die Gleichheit ist durch $\delta n y^{n-1} = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} \cdot ny^{n-1} = y^n - x$ erklärt. Also $t^n > x$, und daher der Widerspruch $t \notin E$. $E := \{t \in \mathbb{R} : t > 0, t^n < x\}$. Die Tatsache, dass $y - \delta$ eine obere Schranke von E ist, widerspricht aber $y = \sup E$. ... weil $y - \delta < y = \sup E$ und $\sup E$ also doch nicht die kleinste obere Schranke wäre.

Weil $y^n \nless x$ und $y^n \ngtr x$ folgt $y^n = x$ und die Eindeutigkeit ist bewiesen. $\square$