A 8.3.1

Gg.: $\frac{d^2}{dx^2}: \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \\ f(x) \mapsto \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \end{cases}$

Zz.: $\forall t \in \mathbb{R}$: t ist EW von $\frac{d^2}{dx^2}$.

Sei $t \in \mathbb{R}$, so suchen wir $f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \frac{d^2}{dx^2} f(x) = t \cdot f(x)$.

Wähle $f(x) := e^{x\sqrt{t}}$, dann (oBdA. $t \geq 0$)

$\frac{d^2}{dx^2} e^{x\sqrt{t}} = \frac{d}{dx} \sqrt{t}\, e^{x\sqrt{t}} = t e^{x\sqrt{t}}$.

Zz.: $\dim ER\left(\frac{d^2}{dx^2}, t\right) \geq 2$

d.h., wir suchen noch EV v. t.

Wähle $g(x) := \sin(x\sqrt{t})$, dann (oBdA. $t \geq 0$)

$\frac{d^2}{dx^2} \sin(x\sqrt{t}) = \frac{d}{dx} \sqrt{t} \cdot \cos(x\sqrt{t}) = -t \sin(x\sqrt{t})$.

Wähle $h(x) := \cos(x\sqrt{t})$, dann (oBdA $t \geq 0$)

$\frac{d^2}{dx^2} \cos(x\sqrt{t}) = \frac{d}{dx} \sqrt{t}\,(-\sin(x\sqrt{t})) = -t \cos(x\sqrt{t})$.

Ww.: g, h sind l.u., weil g gerade und h ungerade ist.

A 8.3.4 Gg.: $\dim V < \infty$, $c \in K$ kein EW von $f \in L(V)$

$\Rightarrow$ $g_c := (f - c\,id_V)^{-1}$ existiert

Zz.: $x, y \in K$ der Art $\Rightarrow$

(i) $g_x \circ g_y = g_y \circ g_x$

(ii) $g_x - g_y = (x-y)\, g_x \circ g_y$

x, y sind keine EW von $f \overset{8.3.5}{\Leftrightarrow} \ker(f - t\cdot id_V) = \{0\}$

$\Rightarrow$ $(f - t\cdot id_V)$ inj. $\Rightarrow$ ... sorj., weil $\dim V < \infty$ und

$(f - t\cdot id_V) \in L(V)$.

$\Rightarrow$ ... bij

(i) Sei $v \in V$, dann

$$(g_x \circ g_y)^{-1}(v) = (g_y^{-1} \circ g_x^{-1})(v) = f(f(v)) - yxv =$$
$$f(f(v)) - xyv = (g_x^{-1} \circ g_y^{-1})(v) = (g_y \circ g_x)^{-1}(v).$$

(ii) $g_x - g_y = g_x \circ g_x^{-1} \circ (g_x - g_y) \circ g_y^{-1} \circ g_y =$

$g_x \circ (\cancel{g_x^{-1} \circ g_x} \circ g_y^{-1} - g_x^{-1} \circ \cancel{g_y \circ g_y^{-1}}) \circ g_y =$

$g_x \circ (\cancel{f} - y\cdot id_V - \cancel{f} + x\cdot id_V) \circ g_y = (x-y)\, g_x \circ g_y.$

A 8.3.6 Gg.: $P(X) \in K[X]$, $f \in L(V,V)$.

(a) Zz.: $t \in K$ EW v. $f \Rightarrow P(t)$ EW v. $P(f)$

Ww.: $\exists a \in V^\times : f(a) = ta$ und durch Induktion zeigt man
$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) = t^n a$

$\Rightarrow P(f)(a) = P(t) \cdot a$

(b) Gg.: $K = \mathbb{C}$, $n := \operatorname{grad} P(X) \geq 1$

Zz: $\forall u$ EW v. $P(f)$ $\exists t$ EW v. f: $P(t) = u$

Sei u EW v. $P(f)$, dann
$\exists (t_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $a_n \in \mathbb{C}^\times$:

$$P(f) - u \cdot id_V = a_n \prod_{i=1}^n f - t_i \cdot id_V,$$

und $\exists a \in \ker(\cdots) : a \neq \mathcal{O}$.

$\Rightarrow \exists j = 1, \dots, n : (f - t_j \cdot id_V)(a) = 0$.

Wähle $t := t_j$, dann

$$P(t) - u = a_n \prod_{i=1}^n (t - t_i) = 0 \Rightarrow P(t) = u.$$

A 8.4.1 Ges.: EW, Basen der ER

(α) Geg.: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = X^4 - 1^4 = (X-1)^2 (X+1)^2$$

wie man durch Spaltenumformungen und Satz 7.4.2 für obere Δ-Matrizen, feststellt.

EW sind also ± 1.

Ww.: Wenn $t \in K$ ein EW v. $f \in L(V)$, dann ist der ER, $\operatorname{Ker}(f - t\,id_V)$:

$$\begin{bmatrix} \mp 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \mp 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathcal{O} \Rightarrow$$

Der ER sind also $[-(1,1,1,1)^T]$, $[(1,-1,1,-1)^T]$.

(γ) Geg.: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - X & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - X \end{vmatrix} = (\cos\varphi - X)^2 + \sin^2\varphi$$

$$= \cos^2\varphi - 2\cos\varphi\, X + X^2 + \sin^2\varphi = X^2 - 2\cos\varphi\, X + 1.$$

$$\Rightarrow X_{1,2} = -\frac{-2\cos\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2\cos\varphi}{2}\right)^2 - 1} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}$$

$$= \cos\varphi \pm i\sin\varphi,$$

sind die EW.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - X_{1,2} & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos - X_{1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \Leftrightarrow$$

$\sin\varphi\,(\mp i x_1 - x_2) = 0$

$\sin\varphi\,(x_1 \mp i x_2) = 0$

1. Fall. $\varphi \in \pi\mathbb{Z} \Rightarrow ER = \mathbb{R}$

2. Fall. sonst. $\Rightarrow$ ER sind $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

A 8.4.3

(a) Gg.: $t \in K$ EW v. $f \in L(V)$

Zz.: algebraische Vielfachheit v. $t \geq$ geometrische ...

Ww.: alg. Vh ... Vielfachheit von t in $\chi_f(X)$,

geom. Vh ... dim L mit $L = \{x \in V : (A - tE_n)x = 0\}$

$= ER_t$;

A 8.5.2

(a) Gg.: $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, d.h. $\exists P \in GL_n(K): B = PAP^{-1}$

Zz.: $\forall k \in \mathbb{N}: B^k = PA^kP^{-1}$

IS: $B^{k+1} = B^kB = (PA^k\cancel{P^{-1})(P}AP^{-1}) = PA^{k+1}P^{-1}.$

(b) Geg.: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Ges.: $\tilde{A} = PAP^{-1}$ Diagonalmatrix, mit $P \in GL_2(\mathbb{R})$

Wir bestimmen die EW v. A via Nullstellen von $\chi_A(X)$

$$= \det(A - XE_2) = \begin{vmatrix} 4-X & 3 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = (4-X)(2-X) - 3$$

$$= 8 - 6X + X^2 - 3 = X^2 - 6X + 5$$

$$\Rightarrow X_{1,2} = 3 \pm 2$$

$$\begin{pmatrix} 4-X_1 & 3 \\ 1 & 2-X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 4-X_2 & 3 \\ 1 & 2-X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow ER = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ww.: Wenn $t_1, t_2 = X_{1,2}$ EW, $k \in \mathbb{N}$, dann

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \langle b_1^*, t_1 b_1 \rangle & \langle b_1^*, t_2 b_2 \rangle \\ \langle b_2^*, t_1 b_1 \rangle & \langle b_2^*, t_2 b_2 \rangle \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \langle b_1^*, f_A(b_1) \rangle & \langle b_1^*, f_A(b_2) \rangle \\ \langle b_2^*, f_A(b_1) \rangle & \langle b_2^*, f_A(b_2) \rangle \end{pmatrix}^k$$

$$= \langle B^*, f_A(B) \rangle^k = \underbrace{\langle B^*, E \rangle}_{P^{-1} = \langle E^*, B \rangle^{-1}} \underbrace{\langle E^*, f_A(E) \rangle}_{A}{}^k \underbrace{\langle E^*, B \rangle}_{=: P} =: \tilde{A}^k,$$

wobei wir $B := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ges.: $\tilde{A}^{100}$, A^{100}

$$= \begin{pmatrix} t_1^{100} & 0 \\ 0 & t_2^{100} \end{pmatrix}, \quad P \tilde{A}^{100} P^{-1}.$$

A 8.5.4

(a) Geg.: $A, B \in K^{n \times n}$, C Basis aus EV von A, B

Zz.: $AB = BA$

Sei $C = (c_i)_{i \in I}$ jene Basis, dann gilt für $v \in V$,

$$(f_A \circ f_B)(v) = \sum_{i \in I} x_i (f_A \circ f_B)(c_i)$$
$$= \sum_{i \in I} x_i (f_B \circ f_A)(c_i) = (f_B \circ f_A)(v).$$

(b) Geg.: $A \in K^{n \times n}$

Zz.: $\underbrace{\{B \in K^{n \times n} : AB = BA\}}_{=: C_A} \in Sub(K^{n \times n})$

(i) $C_A \neq \emptyset$ ✓

(ii) $\forall X, Y \in C_A \; \forall c \in K: X + cY \in C_A$, weil

$$A(X + cY) = AX + AcY = XA + cYA = (X + cY)A.$$

(c) Zz.: $\forall n \geq 2$: $\dim C_A \geq 2$

Fall 1: $\exists c \in K: A = cE_n \Rightarrow \dim C_A = n \geq 2$
Fall 2: $\{A, E_n\}$ l.u. ✓

(d) Geg.: $A \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar

Zz.: $\dim C_A \geq n$

Ww.: $\exists P \in GL_n(K): PAP^{-1} =: D$ Diagonalmatrix

Sei $M_i := \operatorname{diag}(e_i^T)$, für $i = 1, \dots, n$, dann

$$A\,(P^{-1} M_i P) = (P^{-1} D P)(P^{-1} M_i P) = P^{-1}(D M_i) P$$
$$= P^{-1}(M_i D) P = (P^{-1} M_i P)(P^{-1} D P) = (P^{-1} M_i P) A.$$

Zudem, ist $M := \{P^{-1} M_i P : i = 1, \dots, n\}$ l.u. und $\# M = n$, weil $\{M_i : i = 1, \dots, n\}$ l.u., und

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i (P^{-1} M_i P) = P^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i M_i \, P \iff 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i M_i.$$

A 8.5.6 Gg.: $f \in L(V)$, $\dim V \leq \infty$;

(a) $f \circ f = f \Leftrightarrow f$ einfach strukturiert, $EW_f = \{0,1\}$

„$\Rightarrow$" Ww.: f ist eine Projektion, d.h.

$\exists U_1, U_2 \in Sub(V): V = U_1 \oplus U_2,\ f(U_1) = U_1,\ f(U_2) = \{0\}$.

Wähle Basen B_1 und B_2 von U_1 bzw U_2, dann ist

$B := B_1 \cup B_2$ eine Basis von V.

Insbesondere, gilt $\forall b \in B: f(b) \in \{0, b\}$.

„$\Leftarrow$" Ww.: $\exists B$ Basis v. $V: \forall b \in B: \exists t \in \{0,1\}: f(b) = tb$

Wir berechnen, dass $\forall b \in B$:

$(f \circ f)(b) = t f(b) = t^2 b = tb = f(b)$.

Sei $v \in V$, dann $\exists (x_b)_{b \in B} \in K^B$:

$f(v) = \sum_{b \in B} x_b f(b) = \sum_{b \in B} x_b (f \circ f)(b) = (f \circ f)(v)$.

(b) Gg.: Char $K \neq 2$.

Zz.: $f \circ f = id_V \Leftrightarrow f$ einfach strukturiert, $EW_f = \{\pm 1\}$

„$\Rightarrow$" Ww.: $f \circ f = id_V \Leftrightarrow \exists U^+, U^- \in Sub(V): V = U^+ \oplus U^-$,

$\forall x \in U^+: f(x) = x,\ \forall x \in U^-: f(x) = -x$

$\Rightarrow \exists B$ Basis v. $V: \forall b \in B: f(b) \in \{\pm b\}$, wie oben.

„$\Leftarrow$" Ww.: $\forall B$ Basis v. $V: \forall b \in B: \exists t \in \{\pm 1\}: f(b) = tb$

Wir berechnen, dass $\forall b \in B$:

$(f \circ f)(b) = t\, f(b) = t^2 b = b = id_V(b)$.

Sei $v \in V$, dann $\exists (x_b)_{b \in B} \in K^B$:

$$id_V(v) = \sum_{b \in B} x_b \, id_V(b) = \sum_{b \in B} x_b \, (f \circ f)(b) = (f \circ f)(v).$$