Satz 3.3.3 (Fortsetzungssatz) Es seien $(b_j)_{j\in I}$ eine Basis von V und $(d_j)_{j\in I}$ eine Familie in W. Dann existiert genau eine lineare Abbildung

$f: V \to W$ mit der Eigenschaft $f(b_j) = d_j$ für alle $j \in I$.

Beweis: Nach Satz 3.3.2 genügt es, die Existenz einer Lösung zu zeigen. Satz 3.3.2 besagt, dass $\forall j \in I$: $f_1(m_j) = f_2(m_j) \Rightarrow f_1 = f_2$. Hier deckt das die Eindeutigkeit ab, weil $f_1(b_j) = d_j = f_2(b_j) \Rightarrow f_1 = f_2$. Jeder Vektor $x \in V$ hat nach Satz 2.5.3 eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von $(b_j)_{j\in I}$. ... weil $(b_j)_{j\in I}$ eine Basis von V ist. Das ermöglicht die Definition einer Abbildung

$$f: V \to W: x = \sum_{j\in I} x_j b_j \mapsto \sum_{j\in I} x_j d_j.$$

... weil die Eindeutigkeit der Darstellung als LK von x dafür sorgt, dass f wohldefiniert ist und, dass wirklich alle $x \in V$ als LK der Basisvektoren dargestellt werden kann, sorgt dafür, das f überall definiert ist.

Wir erhalten also das f-Bild eines Vektors $x \in V$, indem wir ihn zunächst als Linearkombination der Basisvektoren b_j darstellen und dann mit den hierbei auftretenden Skalaren die oben angeschriebene Linearkombination der Vektoren d_j bilden. Ja, das macht f. Um zu zeigen, dass f tatsächlich linear ist, wenden wir Satz 3.2.2 an.
„$f: V \to W$ ist genau dann linear, falls gilt $\forall x, y \in V\ \forall c \in K$:

$f(x+cy) = f(x) + c f(y)$." Wir berechnen für $x = \sum_{j\in I} x_j b_j$, $y = \sum_{j\in J} y_j b_j$ und $c \in K$:

$$f(x+cy) \overset{(1)}{=} f\Big(\sum_{j\in I} x_j b_j + c \sum_{j\in J} y_j b_j\Big) \overset{(2)}{=} f\Big(\sum_{j\in J} (x_j + c y_j) b_j$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{j\in I} (x_j + c y_j) d_j \overset{(4)}{=} \sum_{j\in I} x_j d_j + c \sum_{j\in I} y_j d_j$$

$$\overset{(5)}{=} f(x) + c f(y).$$

(1): für x, y einsetzen; (2): Summen zusammen ziehen und b_j herausheben; (3): f anwenden (siehe oben); (4): d_j ausmultiplizieren und Summen aufteilen; (6): f anwenden (diesmal rückwärts);

$\square$