Übungen zu Analysis 3, 9. Übung 9. 12. 2019

72. Beweisen Sie die Guldinschen Regeln:

    Die Mantelfläche eines um die z-Achse rotationssymmetrischen Körpers im $\mathbb{R}^3$ ist gleich der Weglänge die der Schwerpunkt der Kurve die durch den Schnitt der Mantelfläche mit der Halbebene $\{(x,y,z) : x > 0, y = 0\}$ entsteht bei einer vollen Drehung um die z-Achse mal der Weglänge dieser Kurve.

    Das Volumen eines um die z-Achse rotationssymmetrischen Körpers K im $\mathbb{R}^3$ ist gleich der Weglänge die der Schwerpunkt der Fläche $\{(x,y,z) \in K, : x > 0, y = 0\}$ bei einer vollen Drehung um die z-Achse mal dem Flächenmaß dieser Fläche.

    Sie dürfen annehmen, dass diese Schnittkurven als Funktion von z dargestellt werden können, d.h. der Manterl ist $(r(z)\cos\varphi, r(z)\sin\varphi, z)$.

73. Berechnen Sie den Fluss
$$\int_M \mathbf{F}^t \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^2$$
    des Vektorfeldes
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, x^2 + y^2)$$
    durch den Zylindermantel $x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1$ direkt und mithilfe des Gauß´schen Integralsatzes.

74. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes
$$\mathbf{F} = (xz, xy, z^2 - x)$$
    durch den Rand des Gebietes
$$0 < x < 1,\ 0 < y < x + 1, 0 < z < x + y.$$

75. Verifizieren Sie den Integralsatz von Gauß für das Gebiet $\Omega = \{(x,y,z) : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$ und die Funktion $f(x,y,z) = (x, x+y, x^2+z)^t$.

76. Zeigen Sie: Für ein C^2-Vektorfeld $\mathbf{F}$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$. Für eine C^2-Funktion f gilt $\operatorname{rot}\nabla f = 0$.

77. Berechnen Sie das Wegintegral
$$\int_{\partial B} (x - y^3)\, dx + y^3\, dy$$
    direkt und über den Stoke'schen Integralsatz wobei B der offene Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ ist.

    (Das Wegintegral $\int_\gamma \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{z}) \\ f_2(\mathbf{z}) \end{pmatrix} d\mathbf{z}$ im $\mathbb{R}^2$ wird hier als $\int_\gamma f_1(\mathbf{z})\, dx + f_2(\mathbf{z})\, dy$ geschrieben).

78. Verifizieren Sie den Stoke'schen Integralsatz für das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1-xy, xz, x+z)^t$$

und das hyperbolische Paraboloid $z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 < 1$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}(t)\mathbf{t}\,dt &= \int_0^{2\pi} -\sin s + \cos s \sin^2 s + \cos^2 s(\cos^2 s - \sin^2 s) - 2(\cos s + \cos 2s)\sin 2s\,ds \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 s(1 - 2\sin^2 s)\,ds = \pi - 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2 2s\,ds = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

79. Berechnen Sie über den Satz von Stokes

$$I = \int_\Omega (\mathrm{rot} f, n)\, d\mathcal{H}^2$$

für die Fläche

$$x = 2r\cos t,\ y = 2r\sin t,\ z = r\cos t \sin t, \quad 0 \le r < 1,\ 0 \le t < 2\pi.$$

und das Vektorfeld $(z, -z, y)^T$, wobei das Normalvektorfeld n so gewählt sei, dass $n \cdot e_3 > 0$ gelte.

80. Beweisen Sie den Cauchyschen Integralsatz: Eine Funktion f sei in einer offenen Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$ holomorph, γ sei eine glatte Kurve in Ω die der Rand einer Teilmenge D von Ω ist. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ indem Sie das komplexe Wegintegral über γ als

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \mathrm{Re} f\,dx - \mathrm{Im} f\,dy + \mathrm{i}\int_\gamma \mathrm{Im} f\,dx + \mathrm{Re} f\,dy$$

($z = x + \mathrm{i}y$) auffassen, das Vektorfeld

$$F = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f + \mathrm{i}\mathrm{Im} f \\ -\mathrm{Im} f + \mathrm{i}\mathrm{Re} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} F_2 \end{pmatrix}$$

betrachen und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sowie einen Integralsatz verwenden.