# ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020 BLATT 2 (8. 10. 2020)

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

**1.** Bestimmen und skizzieren Sie diejenigen Gebiete in $\mathbb{R}^2$, für welche die folgenden Differentialgleichungen jeweils elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind:
(i) $(y^2+1)u_{xx} + 2xu_{xy} + 9u_{yy} - uu_y = y^2 - x$,
(ii) $xu_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + xu_x = 1$.

**2.** (i) Lösen Sie das Randwertproblem für die Laplacegleichung in ebenen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}(\Delta u)(r,\varphi) &= 0 \text{ für } r < R,\\ u(R,\varphi) &= f(\varphi) \text{ für alle } \varphi,\end{aligned}$$

wobei

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$

der Laplaceoperator in Polarkoordinaten, $R > 0$ eine positive Konstante und $f$ eine stückweise stetig differenzierbare $2\pi$-periodische Funktion ist.

(ii) Wie sieht die Lösung konkret im Fall

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0 & \varphi = 0, \pi \\ 1 & 0 < \varphi < \pi \\ -1 & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

mit $R = 1$ aus?

*Hinweis:* Verwenden Sie einen Separationsansatz. Betrachten Sie dazu zunächst Einzellösungen $u_n$ der Gestalt $u_n(r,\varphi) = v_n(r) \cdot w_n(\varphi)$ (mit $w_n$ $2\pi$-periodisch), welche die Differentialgleichung erfüllen und insbesondere $C^2$ im Nullpunkt sind. Die gesuchte Gesamtlösung ergibt sich dann als Summe über die Einzellösungen $u_n$ mit geeigneten Koeffizienten. Falls Sie dabei auf die homogene eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung stoßen, verwenden Sie Aufgabe 6 von Blatt 1 oder schlagen sie in einer beliebigen Quelle ein Fundamentalsystem von Lösungen nach.

**3.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um den Nullpunkt und $g, f \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachten Sie das Cauchyproblem

$$u_t + g(u)u_x = 0, \quad u(0,x) = f(x)$$

für $(t,x) \in I \times \mathbb{R}$.
(i) Bestimmen Sie die Charakteristiken und überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen für den Existenzsatz 2.3 erfüllt sind.

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

mit den Anfangsdaten $u(0,x) = -x$ und geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an. Skizzieren Sie die Charakteristiken und die Lösung zu verschiedenen Zeitpunkten.

**4.** Lösen Sie folgendes Problem für $x > 0$ mithilfe der Methode der Charakteristiken:

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= u + 1 \\ u(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

wobei $\psi$ eine beliebige Funktion ist.

**5.** Lösen Sie folgendes Problem mithilfe der Methode der Charakteristiken und geben Sie an, wo die Lösung definiert ist:

$$\begin{aligned} (y+u)u_x + yu_y &= x - y, \\ u(x,1) &= 1 + x \end{aligned}$$