7. Übung zur Komplexen Analysis (alle Gruppen)

1. Man beweise, dass durch $w(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{E}$ die Automorphismen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ gegeben sind.

2. Man zeige, dass $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ zu $\mathbb{E}\backslash\{0\}$ konform äquivalent ist.

3. Man gebe jeweils eine biholomorphe Abbildung zwischen den angegebenen Gebieten an ($E_\alpha := \{re^{i\phi} : 0 < \phi < \alpha,\ 0 < r < 1\}$ bezeichne den Kreissektor zum Winkel α):

   (a) Kreissektor $E_{\frac{\pi}{8}}$ und Kreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

   (b) erster Quadrant $Q := \{x + iy : x, y > 0\}$ und Viertelkreisscheibe $E_{\frac{\pi}{4}}$.

   Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ biholomorph auf die Kreisscheibe $\mathbb{E}$ abbildet.

4. $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $h : \mathbb{C} \to T$ mit $h(z) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$. Geben Sie mit Hilfe von h einen Atlas an, der T zu einer Riemann'schen Fläche macht!

5. Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ definiert durch $h(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$. Zeigen Sie: $\mathcal{A} = \{(U, h^{-1}) : U \text{ offen in } \mathbb{E}\}$ ist ein Atlas von $\mathbb{E}$ und $(\mathbb{E}, \mathcal{A})$ somit eine Riemann'sche Fläche.

   Riemann'sche Flächen $(M_1, \mathcal{A}_1), (M_2, \mathcal{A}_2)$ heißen *isomorph*, wenn es eine biholomorphe Abbildung $h : M_1 \to M_2$ gibt. Ist $(\mathbb{E}, \mathcal{A})$ isomorph zu $(\mathbb{E}, \{id\})$?

6. Sei $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Zahlkugel aufgefasst als Riemann'sche Fläche. Zeigen Sie:

   (a) Ist $f : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ analytisch, so ist f konstant.

   (b) Ist $f \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$, so ist f eine rationale Funktion.

   (c) Ist $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ biholomorph, so ist $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit geeigneten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

7. Zeigen Sie, die beiden folgenden Aussagen

   (a) Jede nicht konstante analytische Abbildung zusammenhängender Riemann'scher Flächen ist offen.

   (b) Eine analytische Funktion auf einer zusammenhängenden Riemann'schen Fläche, welche ein Betragsmaximum annimmt, ist konstant

8. Man zeige: Jede nicht konstante analytische Abbildung $f : X \to Y$ von einer zusammenhängenden kompakten Riemann'schen Fläche X in eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche Y ist surjektiv.
   Da man Polynome als analytische Abbildungen der Zahlkugel in sich selbst auffassen kann, erhält man einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.