1 Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \Omega \\ u &= g, \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

Ω	$\partial\Omega$	f	g	Resultate
$\mathbb{R}^n$	-	0	-	$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}r & ,n=1 \\ \frac{1}{2\pi}ln(r) & ,n=2 \\ \frac{1}{(2-\pi)\cdot s_n}r^{2-n} & ,n>2 \end{cases} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ... FL mit Pol in 0, wobei $r = \lvert x\rvert,\ x \in \mathbb{R}^n$ und $s_n = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}$ ... Kugeloberfläche
$\subseteq \mathbb{R}^n$ offen	-	$\in \mathcal{D}(\Omega)$	-	$U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ FL von Δ mit Pol an $0 \Rightarrow N(x) = (U * f)(x) = \int_\Omega U(\lvert x-y\rvert)f(y)dy$ ist klassische Lösung(“Newton-Potential”)
$\subseteq \mathbb{R}^n$ offen	$\in C^1$	$\in C(\overline{\Omega})$	$\in C(\partial\Omega)$	$u \in C^2(\overline{\Omega})$ klassische Lsg. $\Rightarrow u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\cdot\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)ds(y) + \int_\Omega G(x,y)\cdot f(y)dy$ wobei G ... Greensche Funktion $G(x,y) = U_x(y) - h_x(y)$, $\Delta h_x = 0$, $h_x\rvert_{\partial\Omega} = U_x\rvert_{\partial\Omega}$
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}\times\{0\}$	0	$\in C(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$	klass. Lösung: $u(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\int_\mathbb{R}\frac{x_2\cdot g(\xi)}{(x_1-\xi)^2+x_2^2}d\xi$ (+ stetig FS auf $\mathbb{R}\times\{0\}$ zu g)
$B_R(0)$	-	0	$\in C(\partial B_R(0))$	$\exists!$ klass. Lösung: $u(x) = \frac{R^2-\lvert x\rvert^2}{R\cdot s_n}\int_{\partial B_R(0)}\frac{g(y)}{(x-y)^n}dy$ (+ stetig FS auf $\partial B_R(0)$ zu g)
beschr. Gebiet	-	$\in C(\Omega)$	$\in C(\partial\Omega)$	$u_1, u_2 \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen $\Rightarrow u_1 = u_2$

2 Elliptische-Gleichungen

$$Lu := -div(A(x)\nabla u) + b(x)\cdot\nabla u + c(x)u \quad = \quad f(x), \quad \Omega$$

Ω	$\partial\Omega$	A	b	c	f	$u\vert_{\partial\Omega}$	Resultate
beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega)$	$L^2(\Omega)$	0	schwache Formulierung: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$: $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u A \nabla v + (b\cdot\nabla u)v + cuv\ dx = \int_\Omega fv\ dx =: F(v)$
beschr. Gebiet	C^1	$C^1(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	$C(\Omega)$	$C(\Omega)$	$C(\Omega)$	0	u schw. Lsg. $\Rightarrow$ u klass. Lsg
beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega)$ $\geq c_0 \geq 0$	$L^2(\Omega)$	0	$(b=0 \wedge c_0=0) \vee (4\alpha c_0 \geq b_0^2)$, $b_0 = \lVert b\rVert_{L^\infty} \ \Rightarrow\ \exists!$ schw. Lsg $u \in H_0^1(\Omega)$ und $\lVert u\rVert_{H^1} \leq C\lVert f\rVert_{L^2}$
beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega)$ $\geq c_0 \geq 0$	$H^{-1}(\Omega)$	0	$(b=0 \wedge c_0=0) \vee (4\alpha c_0 \geq b_0^2)\ \Rightarrow\ \exists!$ schw. Lsg $u \in H_0^1(\Omega)$, Lösung von $a(u,v) =< f, v >_{H^{-1}} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega)$ $\geq c_0 \geq 0$	$L^2(\Omega)$	$= T(g)$ $g \in H^1(\Omega)$	$(b=0 \wedge c_0=0) \vee (4\alpha c_0 \geq b_0^2)\ \Rightarrow\ \exists!$ schw. Lsg $u \in H^1(\Omega)$, Lösung von: $a(u-g,v) = F(v) - a(g,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ und $\lVert u\rVert_{H^1} \leq C\lVert f\rVert_{L^2} + \lVert g\rVert_{H^1}$
beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	0	$L^\infty(\Omega)$ $\geq c_0 > 0$	$L^2(\Omega)$	$(A\nabla u)\cdot\nu = T(g)$ $g \in H^1(\Omega)$	$\exists!$ schw. Lsg $u \in H^1(\Omega)$, Lösung von $a(u,v) = \int_{\partial\Omega} gv\ ds + \int_\Omega fv\ dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$ und $\lVert u\rVert_{H^1} \leq \frac{1}{min\{\alpha,c_0\}}(\lVert f\rVert_{L^2} + C_2\lVert g\rVert_{H^1})$
beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	0	0	$L^2(\Omega)$	$(A\nabla u)\cdot\nu = T(g)$ $g \in H^1(\Omega)$	$\int_\Omega f dx = -\int_{\partial\Omega} g ds \Rightarrow \exists!$ schw. Lsg. $u \in H^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega u dx = 0$, Lsg von: $\int_\Omega \nabla u A \nabla v\ dx = \int_{\partial\Omega} gv\ ds + \int_\Omega fv\ dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$
beschr. Gebiet	C^1	$C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ symm. $\geq \alpha I \geq 0$	$C(\Omega)$	$C(\Omega)$	$C(\Omega)$	$= T(g)$ $g\vert_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$	$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ schw. Lsg. $\Leftrightarrow$ u klass. Lsg
beschr. Gebiet	C^{k+2}	$C^{k+1}(\Omega)$, symm. $\geq \alpha I \geq 0$	$C^k(\Omega)$	$C^k(\Omega)$	$H^k(\Omega)$	$= T(g)$ $g \in H^{k+2}(\Omega)$	schw. Lsg. $u \in H^{k+2}(\Omega)$

3 Parabolische-Gleichungen mit zeitinvarianten Koeffizienten und b=0

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - div(A(x)\nabla u) + c(x)u(x,t) &= f(x,t) \quad ,\Omega \times (0,\infty) \\ u(.,0) &= u_0(.) \quad ,\Omega \times \{0\} \\ u &= g \quad ,\partial\Omega \times (0,\infty) \end{aligned}$$

Allgemeine VS: $\partial\Omega \in C^1$, $Lu = -div(A\nabla u) + cu$

Ω	A	c	f	g	u_0	Resultate
$\mathbb{R}^n$	$= I$	0	0	0	$L^1(\mathbb{R}^n)$	(Wärmeleitungsgleichung) FL: $w(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lvert x\rvert^2}{4t}} \in C^1([0,\infty); \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ Lösung: $u(x,t) = (w * u_0)(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\lvert x-y\rvert^2}{4t}} u_0(y)\ dy$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^n))$
$\subseteq \mathbb{R}^n$ offen beschr.	$A, \nabla A \in L^\infty(\Omega)$ $\geq \alpha I \geq 0$, symm.	$L^\infty(\Omega)$ $c \geq 0$	0	0	$L^2(\Omega)$	$\exists$ ONS (v_k) von $L^2(\Omega)$ aus EVen von L zu den EWen $(\lambda_k) \subseteq \mathbb{R}^+, \lambda_k \nearrow$ sodass: $u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t}(u_0, v_k)_{L^2} v_k$ eind. Lsg. und: $u \in C(\mathbb{R}_0^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \quad \forall t > 0$, $u_t(t) + L(u(t)) = 0 \quad \forall t > 0$ f.ü. auf Ω, $\lVert u(t)\rVert_{L^2} \leq e^{-\lambda_1 t}\lVert u_0\rVert_{L^2}$
$\subseteq \mathbb{R}^n$ offen beschr.	$A, \nabla A \in L^\infty(\Omega)$ $\geq \alpha I \geq 0$, symm.	$L^\infty(\Omega)$ $c \geq 0$	$C(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$	0	$L^2(\Omega)$	$\exists!$ Lsg: $u(t) = e^{-Lt}u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s)\ ds \quad t \geq 0$ (Duhamel-Formel) und: $u \in C(\mathbb{R}_0^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L2(\Omega))$, $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \quad \forall t > 0$, $\lVert u(t)\rVert_{L^2} \leq e^{-\lambda_1 t}\lVert u_0\rVert_{L^2} + \frac{1}{\lambda_1} sup_{0<s<t}\lVert f(s)\rVert_{L^2}$
$\subseteq \mathbb{R}^n$ offen beschr.	$A, \nabla A \in L^\infty(\Omega)$ $\geq \alpha I \geq 0$, symm.	$L^\infty(\Omega)$ $c \geq 0$	$C(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$	$C(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$	$L^2(\Omega)$	Löse homogens ARWP für $w := u(\cdot,t) - g(\cdot,t)$
$\subseteq \mathbb{R}^n$ offen beschr.	$C^\infty(\overline{\Omega})$ $\geq \alpha I \geq 0$, symm.	$C^\infty(\overline{\Omega})$ $c \geq 0$	0	0	$L^2(\Omega)$	$\partial\Omega \in C^\infty$, u Lsg. $\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^+; C^\infty(\overline{\Omega}))$ gilt zus.: $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $L(u_0) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (=Kompatibilitätsbed.) $\Rightarrow u \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^+) \cap C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$ ... klass. Lsg.

4 Parabolische-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - div(A(x,t)\nabla u) + b(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)u &= f(x,t) \quad ,G := \Omega\times(0,T) \\ u(.,0) &= u_0(.) \quad ,\Omega\times\{0\} \\ u(x,t) &= g(x,t) \quad ,\partial\Omega\times(0,T) \end{aligned}$$

Allgemeine VS: $\partial\Omega \in C^1$, $A \geq \alpha\cdot I > 0$, A symmetrisch

Ω	A	b	c	f	g	u_0	Resultate
$\subseteq \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet	$L^\infty(G)$	$L^\infty(G)$	$L^\infty(G)$	$L^2((0,T);L^2(\Omega))$	0	$L^2(\Omega)$	∃! schw. Lsg. $u \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$, Lsg. von: $\int_0^T < u_t, v >_{H^{-1}} dt + \int_0^T a(u,v,t)\ dt = \int_0^T \int_\Omega fv\ dxdt$ $\forall v \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $a(u,v,t) := \int_\Omega \nabla u^T A\nabla v + (b\cdot\nabla u)v + cuv\ dx$
$\subseteq \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet	$L^\infty(G)$	$L^\infty(G)$	$L^\infty(G)$	$C(\overline{G})$	$C(\overline{G})$	$C(\overline{G})$	$u \in C^1(G)$, $u_{x_ix_j} \in C(G)$ $\quad\forall i,j \in 1,\ldots,n$ klass. Lsg. $\Rightarrow u$ eind., $sup_G\|u\| \leq max\{sup_\Omega\|u_0\|, sup_{\partial\Omega\times(0,T)}\|g\|\} + Csup_G\|f\|$

5 Hyperbolische-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - div(A(x)\nabla u) + c(x)u &= f(x,t) \quad ,G := \Omega \times (0,\infty) \\ u(.,0) &= u_0(.) \quad ,\Omega \times \{0\} \\ u_t(.,0) &= u_1(.) \quad ,\Omega \times \{0\} \\ u(x,t) &= g(x,t) \quad ,\partial\Omega \times (0,\infty) \end{aligned}$$

Allgemeine VS: $A(x) \geq \alpha \cdot I > 0$, $A(x)$ symmetrisch $\forall x \in \Omega$, $L(u) := -div(A(x)\nabla u) + c(x)u$, $D(x,t) := \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : x - ct \leq \xi \pm c\tau \leq x + ct\}$

Ω	$\partial\Omega$	A	c	f	g	u_0	u_1	Resultate
$\mathbb{R}$	-	c^2	0	0	-	$C^2(\mathbb{R})$	$C^2(\mathbb{R})$	(eindim. Wellengl.) Lsg.: $u_{hom}(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi$
$\mathbb{R}$	-	c^2	0	0	-	$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	$= \pm c u_0'$	$u(x,t) = u_0(x \pm ct)$ ist schw. Lsg., d.h. löst: $\int_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \cdot (\phi_{tt} - c^2\phi_{xx})dxdt = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$
$\mathbb{R}$	-	c^2	0	$L^1_{loc}(G)$	-	$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	$U_0(x,t) = \frac{1}{2c}H(ct - \|x\|)$ ist FL und daher: $u(x,t) = u_{hom}(x,t) + \frac{1}{2c}\int_{D(x,t)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ schw. Lsg.
$\mathbb{R}^+$	-	c^2	0	$L^1_{loc}(G)$	0	$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	Spiegelungsmethode: Lsg. des Systems auf $\Omega = \mathbb{R}$ (ohne RB, $u_0, u_1, f = 0$ auf $\mathbb{R}_0^-$): v $\Rightarrow$ Lösung: $u(x,t) = v(x,t) - v(-x,t)$
$\subseteq \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega)$ ≥ 0	$C([0,\infty];L^2(\Omega))$	0	$L^2(\Omega)$	$L^2(\Omega)$	$u(x,t) = cos(\sqrt{L}t)u_0(x) + \frac{sin(\sqrt{L}t)}{\sqrt{L}}u_1(x) + \int_0^t \frac{sin(\sqrt{L}(t-s))}{\sqrt{L}}f(x,s)ds \in C(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ ist schw. Lsg.
$\subseteq \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega)$ ≥ 0	$C([0,\infty];L^2(\Omega))$	0	$H^1_0(\Omega)$	$L^2(\Omega)$	schw. Lsg. $u(x,t) \in C^1(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ ist eindeutig und es gilt: $u(t) \in H^1_0(\Omega)\ \forall t > 0$
$\subseteq \mathbb{R}^n$ beschr. Gebiet	C^1	$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega)$ ≥ 0	$C([0,\infty];L^2(\Omega))$	0	$\in D(L)$	$H^1_0(\Omega)$	schw. Lsg. $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ ist eindeutig und es gilt: $u(t) \in D(L)\ \forall t > 0$, $u_{tt}(t) + L(u(t)) = f(t)$ gilt im $L^2(\Omega)$ -Sinne $\forall t > 0$ ($D(L) \subseteq H^1_0(\Omega)$ ... Definitionsbereich des ("schwachen")Differentialoperators L)