A 2.8.18 Es seien U_1, U_2, und T Unterräume eines Vektorraumes V. Ferner sei $V = U_1 \oplus U_2$. Zeige:

(a) Aus $T \subset U_1$ oder $T \subset U_2$ folgt $T = (T \cap U_1) \oplus (T \cap U_2)$.

(b) Aus $U_1 \subset T$ oder $U_2 \subset T$ folgt $T = (T \cap U_1) \oplus (T \cap U_2)$.

(c) Andernfalls kann die Aussage wahr oder falsch sein. Belege dies durch je ein Beispiel.

Hinweis: Die Summe $(T \cap U_1) + (T \cap U_2)$ ist in jedem Fall direkt.

Beweis (Hinweis): $(T \cap U_1) \cap (T \cap U_2) = T \cap (U_1 \cap U_2)$. Nun ist, wegen $U_1 \oplus U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Also $T \cap (U_1 \cap U_2) = T \cap \{0\} = \{0\}$. $\square$

Beweis (a): oBdA. Sei $T \subset U_1$, so folgt $T \cap U_1 = T$. Weiters $T \subset U_1 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow T \cap U_2 = \{0\}$. Also $T = T \oplus \{0\} = (T \cap U_2) \oplus (T \cap U_2)$. $\square$

Beweis (b): oBdA. Sei $U_1 \subset T$, so folgt $T \cap U_1 = U_1$. Sei $x \in T$ beliebig, so folgt aus $T \subset V$ und $U_1 \oplus U_2$, dass $\exists! u_1 \in U_1 \, \exists! u_2 \in U_2 : x = u_1 + u_2$. Weil $T \cap U_1 = U_1$, muss $u_1 \in T$. Weil $x \in T$ und $x = u_1 + u_2$, muss $x - u_1 = u_2 \in T$, da T UR ist. Weil dazu noch $u_2 \in U_2$ (und $u_2 \in T$), folgt $u_2 \in T \cap U_2$. Daher gilt tatsächlich $T = (T \cap U_1) + (T \cap U_2)$. $\square$

Wenn $T \not\subset U_1 \not\subset T \wedge T \not\subset U_2 \not\subset T$, so ist die Aussage

- falsch, wenn:

$U_1 = [\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \}]$, $U_2 = [\{ \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \}]$,

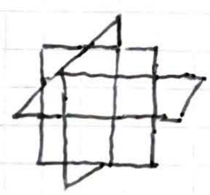
$T = [\{ \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \}]$;

- wahr, wenn:

$U_1 = [\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \}]$, $U_2 = [\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \}]$,

$T = [\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \}]$;

Das beschreibt die Ebenen



A 3.2.1: Welche der folgenden Abbildungen $f: K^{3\times 1} \to K^{2\times 1}$ sind linear? Bestimme für eine lineare Abbildung f auch Basen von $\ker f$ und $f(K^{3\times 1})$.

(a) $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1^2 + x_2^2, 0)^T$ für $K = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2$.

(b) $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1, \bar{x}_2)^T$ für $K = \mathbb{C}$.

(c) $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (0, x_1 + x_2 + x_3)^T$ für beliebiges K.

(f) $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1, x_1)^T$ für beliebiges K.

In (a) ist f für $\mathbb{R}$ nicht linear und für $\mathbb{Z}_2$ doch linear.

Basis von $\ker f$: $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$;

Basis von $f(K^{3\times 1})$: $\{(1,0)\}$;

Beweis: $f(x) + f(y) = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2, 0) = (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2, 0) \neq ((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2, 0) = f(x+y)$.

$c \cdot f(x) = c \cdot (x_1^2 + x_2^2, 0) = (c \cdot (x_1^2 + x_2^2), 0) \neq ((cx_1)^2 + (cx_2)^2, 0) = f(cx)$.

Im $\mathbb{Z}_2$ wird jedoch „$\neq$" zu „$=$", weil Quadrate redundant sind. $\square$

In (b) ist f linear.

Basis von $\ker f$: $\{(0,0,1)\}$

Basis von $f(K^{3\times 1})$: $\{(1,0), (0,1)\}$

Beweis: $f(x) + f(y) = (x_1, \bar{x}_2) + (y_1, \bar{y}_2) = (x_1 + y_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2) = (x_1 + y_1, \overline{x_2 + y_2}) = f(x+y)$.

$c \cdot f(x) = c \cdot (x_1, \overline{x_2}) = (cx_1, c\overline{x_2}) = (cx_1, \overline{cx_2}) =$
$f(cx)$. $\square$

In (c) ist f linear.
Basis von $\ker f$: $\{(1,-1,0), (1,0,-1)\}$;
Basis von $f(K^{3\times 1})$: $\{(1,1)\}$;

Beweis: $f(x) + f(y) = (0, x_1 + x_2 + x_3) + (0,$
$y_1 + y_2 + y_3) = (0, (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3))$
$= f(x+y)$.
$c \cdot f(x) = c \cdot (0, x_1 + x_2 + x_3) = (c \cdot 0, c \cdot (x_1 + x_2 + x_3))$
$= (0, cx_1 + cx_2 + cx_3) = f(c \cdot x)$. $\square$

In (f) ist f linear.
Basis von $\ker f$: $\{(0,1,0), (0,0,1)\}$;
Basis von $f(K^{3\times 1})$: $\{(1,1)\}$;

Beweis: $f(x) + f(y) = (x_1, x_1) + (y_1, y_1) = (x_1 + y_1,$
$x_1 + y_1) = f(x+y)$,
$c \cdot f(x) = c \cdot (x_1, x_1) = (c \cdot x_1, c \cdot x_1) = f(c \cdot x)$. $\square$

A 3.2.2 Sei V ein Verktorraum, wobei $\dim V < \infty$ nicht vorausgesetzt wird. Beweise: Eine Abbildung $f \in L(V,V)$ ist genau dann eine Projektion, falls f idempotent ist, d.h. $f \circ f = f$.

Anleitung: < siehe Zettel >.

Zu A 3.2.3: $f: V \to V$ ist genau dann eine Projektion, wenn es Unterräume U_1 und U_2 gibt, sodass erstens $V = U_1 \oplus U_2$ ist und zweitens $\forall u_1 \in U_1 \, \forall u_2 \in U_2$: $f(u_1 + u_2) = u_1$ gilt.

Beweis: „$\Leftarrow$": Es gilt $f(x) \in f(V)$. $x - f(x) \in \ker f$, weil $\mathcal{O} = f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x)$.

Weil $(x - f(x)) + f(x) = x \in V$, folgt $\ker f + f(V) = V$.

Sei $y \in \ker f, f(V)$. Wenn $y = f(v)$, so folgt $f(y) = f(f(v)) = f(v) = y$. Weil $y \in \ker f$, gilt $\mathcal{O} = f(y) = y$. Aus $y \in f(V)$ folgt also $f(y) \in f(V)$.

Daher gilt $\ker f \cap f(V) = \{\mathcal{O}\}$.

Also ist $\ker f \oplus f(V) = V$.

Seien $u_1 \in f(V)$, $u_2 \in \ker f$, und $x \in V$ mit $f(x) = u_1$.

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(f(x)) + \mathcal{O} = f(x) = u_1.$$

„$\Rightarrow$": $f: V \to V: u_1 + u_2 \mapsto u_1$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$, sowie $U_1 \oplus U_2 = V$. Trivialerweise $f = f \circ f$. $\square$

A 3.2.7 In einem Vektorraum V seien U_1 und U_2 Komplemente eines Unterraumes T. Ferner sei $p_i : V \to V$: die Projektion auf U_i in Richtung T für $i \in \{1, 2\}$. Zeige: $U_1 = U_2$ gilt genau dann, wenn $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

Beweis: „$\Rightarrow$": Weil $V = T \oplus U_1 = T \oplus U_2$ und $U_1 = U_2$: $\forall x \in V \, \exists! u \in U_1, U_2 \, \exists! t \in T : u + t = x$. Wegen $p_1 : V \to V : x \mapsto u$ und $p_2 : V \to V : x \mapsto u$, gilt

$$p_1(p_2(x)) = p_1(u) = u = p_2(u) = p_2(p_1(x)).$$

„$\Leftarrow$" Seien $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$. oBdA. ist $U_1 \subseteq U_2$ zu zeigen. Sei $u_1 \in U_1$ beliebig fest.
Weil $V = T \oplus U_1 = T \oplus U_2$, folgt dass $\exists t \in T \, \exists u_2 \in U_2 : u_1 = t + u_2$, sowie $u_2 = u_1 - t$. Also

$$p_1(p_2(u_1)) = p_1(p_2(u_2 + t)) = p_1(u_2) = p_1(u_1 - t) = u_1,$$
$$p_2(p_1(u_1)) = p_2(u_1) = p_2(u_2 - t) = u_2,$$

also $u_1 = u_2 \Rightarrow u_1 \in U_2$.
Gemeinsam mit „$\supseteq$" folgt $U_1 = U_2$. $\square$

A 3.3.1 Jede der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ bestimmt eine lineare Abbildung:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Untersuche für jede Matrix alleine anhand ihrer Spalten, ob die zugehörige lineare Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Hinweis: Wende Satz 3.2.5 auf die Spalten der Matrix an. Diese sind die Bilder der Vektoren der kanonischen Basis.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ wird zu $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Das sind die Bilder der kanonischen Basis $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Die Menge $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ist weder l.u., noch ein ES im Bild-Raum. Insofern ist die, durch die Matrix bestimmte, lineare Abbildung weder injektiv, noch surjektiv (und nicht bijektiv).

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Diese Vektoren sind l.a. und kein ES im Bildraum, also weder injektiv, noch surjektiv.

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. l.u. $\wedge$ ES $\Rightarrow$ bijektiv.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. l.u. $\wedge \neg$ ES $\Rightarrow$ injektiv.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ l.u. $\wedge$ ES $\Rightarrow$ bijektiv

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ l.a. $\wedge$

ES $\Rightarrow$ surjektiv

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ ist Basis } \Rightarrow \text{ bijektiv.}$$

A 3.3.2 Sei E kanonische Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Bestimme die zu f gehörige Matrix für jene Abbildung $f \in L(\mathbb{R}^{3\times 1}, \mathbb{R}^{3\times 1})$, welche leistet:

(γ) $(1,2,3)^T \mapsto (3,1,1)^T$, $(2,3,4)^T \mapsto (-3,2,0)^T$, $(2,4,5)^T \mapsto (2,4,0)^T$.

(ε) $(1,2,3)^T \mapsto (0,0,1)^T$, $(2,3,4)^T \mapsto (-1,2,3)^T$, $(2,4,5)^T \mapsto (1,-2,2)^T$.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \hline 3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ \hline 3 & -9 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 9 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -9 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -11 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & -1 \\ -6 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 3 & -1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

A 3.3.10 Im Vektorraum $\mathbb{R}^{4\times 1}$ seien komplemenäre Unterräume $U_1 = [\{a_1, b_1\}]$ und $U_2 = [\{a_2, b_2\}]$ gegeben mit

(8) $a_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

Ferner sei $p_2 : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ die Projektion auf U_2 in Richtung U_1.

(a) Bestimme mit Hilfe des Fortsetzungssatzes jene Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, welche die Projektion p_2 beschreibt.

(b) Gib für einen beliebigen Vektor $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ die Zerlegung in der Form $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U_1$ und $v_2 \in U_2$ an.

(a)
$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

+   − + −   +(−1) − ×(−1)

$$\mapsto \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Big\}$$ beschreibt Projektion

(6) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(v_2 + v_3 + v_4) \\ -v_4 \\ v_2 + v_3 + v_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = u_2$

↑

beschreibt Projektion nach U_2

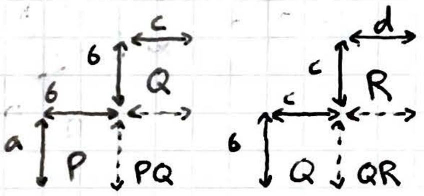
Weil $U_1 \oplus U_2 = V$, isoliert die Projektion die Komponent-Summanden von $u_2 \in U_2$. Jene von $u_1 \in U_2$ können durch $v - u_2 = u_1$ bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} - u_2 = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \\ v_2 - v_4 \\ v_2 + 2v_3 + v_4 \\ 2v_4 \end{bmatrix}.$$

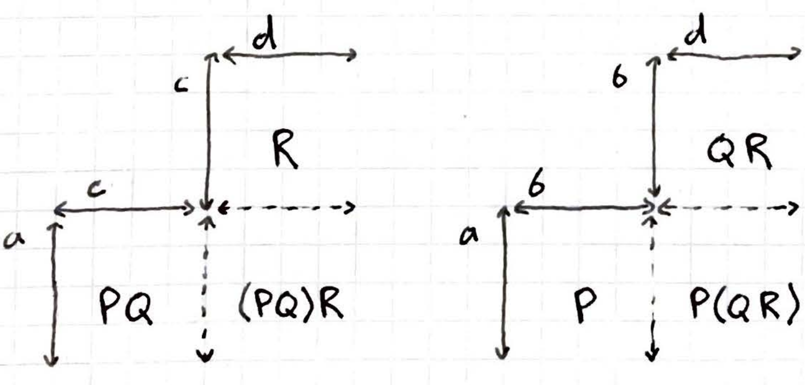
Aufgabe 3.3.x: Sei K Körper, und seien P, Q, R Matrizen mit Einträgen in K, sodass die Produkte PQ und QR definiert sind. (Was heißt das? siehe 3.3.9).

Zeigen Sie: Dann ist erstens auch $(PQ)R$ und $P(QR)$ definiert, und zweitens $(PQ)R = P(QR)$.

Beweis: Seien P, Q, R Matrizen und die Produkte PQ, QR definiert. Somit müsste $P \in K^{a \times b}$, $Q \in K^{b \times c}$, und $R \in K^{c \times d}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Gemeinsam mit (3.8) folgt daraus, dass $PQ \in K^{a \times c}$ und $QR \in K^{b \times d}$:



Folglich, sind dadurch auch $(PQ)R, P(QR) \in K^{a \times d}$ definiert:



Laut Satz 3.3.11, können durch die Matrizen P, Q, R die linearen Abbildungen f_P, f_Q, f_R festgelegt werden, wobei die Produktmatrizen PQ, QR die zusammengesetzten Abbildungen $f_P \circ f_Q$ und $f_Q \circ f_R$ beschreiben. Weil diese in unserem Fall definiert sind, gilt $f_P \circ f_Q = f_{PQ}$ und $f_Q \circ f_R =$

f_{QR}. Weil auch $(PQ)R$ und $P(QR)$ definiert sind, können wir Satz 3.3.11 abermals für $f_{PQ} \circ f_R = f_{(PQ)R}$ und $f_P \circ f_{QR} = f_{P(QR)}$ anwenden. Daraus folgt

$$f_{(PQ)R} = f_{PQ} \circ f_R = (f_P \circ f_Q) \circ f_R = f_P \circ (f_P \circ f_Q) = f_P \circ f_{PQ} = f_{P(QR)},$$

also $(PQ)R = P(QR)$. $\square$