18 / 1: Betrachte den Operator T der für $f \in L^1(0,1)$ definiert ist als

$$Tf := \Big(\int_0^1 f(t)t^n\,dt\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Die Zahlen $\int_0^1 f(t)t^n\,dt$ heißen auch die Momente von f. Zeige, dass T zu $\mathcal{B}(L^1(0,1), C_0(\mathbb{N}_0))$ gehört, und bestimme $T' \in \mathcal{B}(\ell^1(\mathbb{N}_0), L^\infty(0,1))$.

Sei $f \in L^1(0,1)$

$\forall n\in\mathbb{N}_0\ \forall t\in[0,1]: |f(t)t^n| \le |f(t)|$ und $\int_0^1 |f(t)|\,dt < \infty$, also gilt nach dem Lemma von Fatou (Kusolitsch Folgerung 9.32)

$$\limsup_n \Big|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\Big| \le \limsup_n \int_0^1 |f(t)t^n|\,dt \le \int_0^1 \limsup_n |f(t)t^n|\,dt = 0,$$

weil $\lim_{n\to\infty} t^n = 0$ λ-f.ü. und λ-f.ü.: $|f(t)|<\infty$

Also verschwindet Tf im Unendlichen

Stetigkeit ist klar, denn für $\delta < 1$ ist $|n-m|<\delta \Rightarrow n=m \Rightarrow |Tf(n) - Tf(m)| = 0 < \varepsilon$

Also bildet T wirklich nach $C_0(\mathbb{N}_0)$ ab.

Die Linearität von T folgt aus der Linearität des Integrals

Für bel. $n\in\mathbb{N}_0$ ist $\quad \Big|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\Big| \le \int_0^1 |f(t)|\,t^n\,dt \le \|f\|_1 \|t^n\|_\infty = \|f\|_1$

$\|T\| = \sup\{\|Tf\|_\infty : f\in L^1(0,1), \|f\|_1 \le 1\} \le \sup\{\|f\|_1 : f\in L^1(0,1), \|f\|_1 \le 1\} = 1$

also ist $T \in \mathcal{B}(L^1(0,1), C_0(\mathbb{N}_0))$

Sei nun $f\in L^1(0,1)$ bel. und $g \in C_0(\mathbb{N}_0)' \cong \ell^1(\mathbb{N}_0)$ bel. Wie in Beispiel 2.3.3. ausgeführt: $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0): \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in C_0(\mathbb{N}_0): \quad g((x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n a_n$

$$\langle Tf, g\rangle = g(Tf) = g\Big(\Big(\int_0^1 f(t)t^n\,dt\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_0^1 f(t)t^n\,dt\, a_n = \int_0^1 f(t)\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t^n a_n\Big)dt \doteq \langle f, T'g\rangle$$

wobei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_0^1 f(t)t^n a_n\,dt = \int_{\mathbb{N}_0}\int_{[0,1]} f(t)t^n a_n\,d\lambda\,d\zeta = \int_{[0,1]}\int_{\mathbb{N}_0} f(t)t^n a_n\,d\lambda\,d\zeta$ nach dem Satz von Fubini (vgl. Kusolitsch Satz 10.24), da $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\int_0^1 |f(t)t^n a_n|\,dt \le \|f\|_{L^1}\|a\|_1 < \infty$

Also $T': \ell^1(\mathbb{N}_0) \to L^\infty(0,1): (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \Big([0,1]\to\mathbb{C}: t\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} t^n a_n\Big)$, wobei

$\|\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t^n a_n\|_\infty \le \|\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |t^n||a_n|\|_\infty \le \|\sum_{n\in\mathbb{N}_0}|a_n|\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}|a_n| < \infty$, $T'(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich in $L^\infty(0,1)$

18 / 2: Seien X, Y kompakte Hausdorff Räume, sei $\tau : Y \to X$ stetig, und $A \in \mathcal{B}(C(X), C(Y))$ der Operator $Af := f \circ \tau$. Zeige, dass sein Konjugierter $A' \in \mathcal{B}(M(Y), M(X))$ gegeben ist durch

$$(A'\mu)(\Delta) = \mu(\tau^{-1}(\Delta)), \quad \mu \in M(Y), \Delta \subseteq X \text{ Borelmenge.}$$

•) Da X, Y kompakt und Hausdorff sind gilt jedenfalls $C_0(X) = C(X)$ und $C_0(Y) = C(Y)$

Nach dem Darstellungssatz von Riesz-Markov (Satz 2.3.9) ist $C(X) = C_0(X) \cong M_{reg}(X)$

Sei $f \in C(X)$ bel. und $g \in C(Y)'$ bel. mit $\mu \in M_{reg}(Y): \forall h \in C(Y): g(h) = \int_Y h \, d\mu$

Nun ist mit dem Transformationssatz (vgl. Kusolitsch Satz 9.62)

$\langle Af, g \rangle = g(Af) = g(f \circ \tau) = \int_Y f \circ \tau \, d\mu = \int_{\tau^{-1}(X)} f \circ \tau \, d\mu = \int_X f \, d\mu\tau^{-1}$

und es ist $\mu\tau^{-1} \in M(X)$ (vgl. Kusolitsch Satz 8.7)

und $\nu: C(X) \to \mathbb{C}: f \mapsto \int_X f \, d\mu\tau^{-1} \in C(X)'$, also $A'g \cong \nu$ und wir schreiben

$\langle f, A'g \rangle = \int_X f \, d\mu\tau^{-1}$

•) A' linear: $A'(\mu + \nu) = (\mu + \nu) \circ \tau^{-1} = \mu \circ \tau^{-1} + \nu \circ \tau^{-1}$

•) A' beschr.: $\|A'\mu\| = \|\mu \circ \tau^{-1}\| = |\mu \circ \tau^{-1}|(X) =$

$= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(\tau^{-1}(A_j))| : \forall k \in \mathbb{N}: A_k \in \sigma(\tau_X), \dot{\bigcup_{j \in \mathbb{N}}} A_j = X \right\} =$

$= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(B_j)| : \forall k \in \mathbb{N}: A_k \in \sigma(\tau_X), \tau(A_k) = B_k \; ; \dot{\bigcup_{j \in \mathbb{N}}} A_j = X \right\} \leq |\mu|(Y) =$

$= \|\mu\|$

statt μ steht $|\mu|$

•) Sei $D \in \sigma(\tau_X)$ bel., da τ stetig und daher messbar ist, ist $\tau^{-1}(D) \in \sigma(\tau_Y)$

Da μ regulär ist gibt es für $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. ein kompaktes $K \subseteq \tau^{-1}(D)$ mit $\mu(K) \geq \mu(\tau^{-1}(D)) - \varepsilon$

nun folgt $K \subseteq \tau^{-1}(\tau(K)) \subseteq \tau^{-1}(D)$ und da τ stetig ist, wissen wir
weil $\tau(K) \subseteq D$

$\tau(K)$ ist kompakt und $\mu(\tau^{-1}(D)) - \varepsilon \leq \mu(K) \leq \mu(\tau^{-1}(\tau(K))) \leq \mu(\tau^{-1}(D))$

also $\mu \circ \tau$ regulär von unten

•) Sei wieder $D \in \sigma(\tau_X)$ bel. Da μ regulär ist $\exists U \in \tau_Y: \tau^{-1}(D) \subseteq U$ und $\mu(U) \leq \mu(\tau^{-1}(D)) + \varepsilon$

für bel. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nun ist $U^c \subseteq Y$ abgeschlossen und da Y kompakt und Hausdorff ist

also kompakt. also $\tau(U^c)^c \subseteq X$ offen und $U^c \subseteq \tau^{-1}(\tau(U^c))$

$\Rightarrow \tau^{-1}(\tau(U^c)^c) = (\tau^{-1}(\tau(U^c)))^c \subseteq U^{cc} = U$, weiters wegen $U^c \subseteq \tau^{-1}(D)^c$ ist

$\tau(U^c) \subseteq D^c$ also $\tau^{-1}(\tau(U^c)) \subseteq \tau^{-1}(D)^c \Rightarrow \tau^{-1}(D) \subseteq \tau^{-1}(\tau(U^c)^c)$

$$\mu(\tau^{-1}(D)) \leq \mu\left(\tau^{-1}(\tau(U^c)^c)\right) \leq \mu(U) \leq \mu(\tau^{-1}(D)) + \varepsilon$$

also Regularität von oben.

19 / 1: Betrachte den Shift-Operator S am $\ell^2(\mathbb{N})$, das ist

$$S : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \to & \ell^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) & \mapsto & (0, x_1, x_2, \ldots) \end{cases}$$

(a) Zeige dass S isometrisch ist, bestimme $\operatorname{ran} S$ und zeige dass $\operatorname{ran} S$ abgeschlossen ist, und zeige $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}(S^n) = \{0\}$.

(b) Bestimme die Hilbertraumadjungierte S^* von S, und bestimme $\ker(S^*)$, $\operatorname{ran}(S^*)$, und $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}([S^*]^n)$.

a) „isometrisch": Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ bel. $\|S((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2$

„ran S": $\operatorname{ran} S = \{ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid y_1 = 0 \wedge \forall n > 1 : y_n = x_{n-1} \text{ mit } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\} =$

$= \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid y_1 = 0\}$

„ran S abg.": $\operatorname{ran} S^{\perp} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{ran} S : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n} = 0\} =$

$= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall n > 1 : x_n = 0\}$

Und offensichtlich ist $(\operatorname{ran} S^{\perp})^{\perp} = \operatorname{ran} S$ und nach Korollar 3.2.4, da ja $\operatorname{ran} S$ ein linearer TR von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist: $\overline{\operatorname{ran} S} = (\operatorname{ran} S^{\perp})^{\perp} = \operatorname{ran} S$, also $\operatorname{ran} S$ abg.

„$\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}(S^n) = \{0\}$" $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}(S^n) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{ran}(S^n)\} =$

$= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N} : x_k = 0\} = \{0\}$

$(0, x_1, x_2, \ldots)$
$(y_1, y_2, y_3, \ldots)$

b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ bel.

$\langle S(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_{n+1}} \overset{!}{=} \langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, S^*(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$

$S^* : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) : (y_1, y_2, \ldots) \mapsto (y_2, y_3, \ldots)$

Nach Prop. 6.6.2 gilt

$\ker S^* = (\operatorname{ran} S)^{\perp} = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall k \in \mathbb{N} : (k > 1 \Rightarrow y_k = 0)\}$

$\operatorname{ran} S^* = \ell^2(\mathbb{N})$ $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ bel. $y_1 := 0; y_k := x_{k-1}$ und $S^*((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran}((S^*)^n) = \ell^2(\mathbb{N})$

20 / 1: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, und betrachte den Operator auf $\ell^2(\mathbb{N})$ der durch die Matrix

$$A := (a_{i+j-1})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \\ a_3 & \cdots & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Explizite agiert A also als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei (der Einfachheit halber) weiters vorausgesetzt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Zeige, dass A kompakt ist.

Hinweis. Approximiere A mit Operatoren die endlichdimensionales Bild haben.

•) Wir wollen zuerst zeigen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\|A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{k+n-1} x_k\Big|^2 \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{k+n-1}|^2 \overset{\text{weil } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mon. fallend ist}}{\leq} \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k||a_n| =$$

$$= \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 \, \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1^2 < \infty$$

•) $\forall \ell\in\mathbb{N}: A_\ell : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall k>\ell : y_k = 0\} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n\in\{1,\dots,\ell\}: y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}x_k$ und $\forall n\in\mathbb{N}: (n>\ell \Rightarrow y_n = 0)$

„Linearität der A_ℓ": $A_\ell((x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}(x_k + \lambda y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}x_k + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}y_k$

$\rightsquigarrow A_\ell((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \lambda A_\ell((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$

„Beschränktheit der A_ℓ":

$$\|A_\ell(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\ell}\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1}x_k\Big|^2 \leq \sum_{n=1}^{\ell}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+n-1}||x_k|\Big)^2 \leq \sum_{n=1}^{\ell}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+n-1}|^2\Big)\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2$$

und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+n-1}|^2$ ist konvergent, da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+n-1}|$ konvergent ist, also $(|a_{k+n-1}|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\forall x\in[0,1]: x^2 \leq x$

Es ist also $A_\ell \in L_b(\ell^2(\mathbb{N}))$ und $\dim(\operatorname{ran} A_\ell) = \ell$ (mit der kanonischen Basis), nach Prop. 6.5.4 (i) ist also A_ℓ kompakt.

•) $$\|A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - A_\ell(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \sum_{n=\ell+1}^{\infty}\Big|\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{k+n-1}x_k\Big|^2 \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 \sum_{n=\ell+1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{k+n-1}|^2 \leq$$

$$\leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 \sum_{n=\ell+1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k||a_n| = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 \, \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \sum_{n=\ell+1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{\ell\to\infty} 0$$

Also existiert für festes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ der Grenzwert $\lim_{\ell\to\infty} A_\ell(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nach einem Korollar 4.2.3 des Satzes von Banach-Steinhaus ist damit A linear und beschränkt

•) Mit der gleichen Ungleichungskette wie im vorigen Punkt sehen wir

$\|(A-A_\ell)(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 \leq \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=\ell+1}^{\infty} |a_n|\Big)^{\frac{1}{2}} \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2$ also $\|A - A_\ell\| \xrightarrow{\ell\to\infty} 0$

damit erhalten wir $A_\ell \xrightarrow{\|\cdot\|} A$ und da nach Prop. 6.5.4 (iii) die Menge der kompakten Operatoren in $L_b(\ell^2(\mathbb{N}))$ abg. ist, gilt auch A kompakt

21 / 1: Sei $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformation. Bestimme $\sigma(U)$ und $\sigma_p(U)$.

Hinweis. Man erinnere sich, dass U auf dem dichten Teilraum $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gegeben ist durch

$$(Uf)(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-it\zeta)\, d\lambda(t).$$

Verwende den Spektralabbildungssatz und betrachte Funktionen der Bauart $p(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ mit einem Polynom $p(t)$.

•) $U(e^{-\frac{t^2}{2}})(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{t^2}{2}) \exp(-it\zeta)\, d\lambda(t) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{t^2}{2}) \cos(\zeta t)\, d\lambda(t) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{t^2}{2}) \sin(\zeta t)\, d\lambda(t)$

Von Blümlinger Beispiel 2.1.10 wissen wir bereits $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{t^2}{2}) \cos(\zeta t)\, d\lambda(t) = \exp(-\frac{\zeta^2}{2})$

Das zweite Integral existiert und da $\exp(-\frac{t^2}{2})\sin(\zeta t)$ eine ungerade Funktion ist ergibt sich 0

Also: $U(e^{-\frac{t^2}{2}})(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \Leftrightarrow U(e^{-\frac{t^2}{2}})(\zeta) - 1 \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}} = 0$, es ist also jedenfalls

$1 \in \sigma_p(U) \subseteq \sigma(U)$

•) $\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2}} = -t e^{-\frac{t^2}{2}}$ und von Blümlinger Prop. 3.2.2. wissen wir

$U(-te^{-\frac{t^2}{2}})(\zeta) = U(\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2}})(\zeta) = i\zeta\, U(e^{-\frac{t^2}{2}})(\zeta) = i\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2}} = (-i)(-\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2}})$, also ist sicher

auch $-i \in \sigma_p(U) \subseteq \sigma(U)$

•) $\frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{d}{dt}(-te^{-\frac{t^2}{2}}) = -e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}$

$U(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}) + U(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}) = U(-e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}})(\zeta) = U(\frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}}) = -\zeta^2 e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$

$\shortparallel$

$-\frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + U(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}) = -\zeta^2 e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \Leftrightarrow U(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}) = (-1)(-\frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + \zeta^2 e^{-\frac{\zeta^2}{2}})$

also: $-1 \in \sigma_p(U) \subseteq \sigma(U)$

•) $\frac{d^3}{dt^3} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{d}{dt}(-e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}) = te^{-\frac{t^2}{2}} + 2te^{-\frac{t^2}{2}} - t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$

$U(3te^{-\frac{t^2}{2}} - t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}) = U(\frac{d^3}{dt^3} e^{-\frac{t^2}{2}}) = i^3 \zeta^3 e^{-\frac{\zeta^2}{2}} = -i\zeta^3 e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$

$\shortparallel$

$\frac{3}{2}U(te^{-\frac{t^2}{2}}) + U(\frac{3}{2}te^{-\frac{t^2}{2}} - t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}) = -\frac{3}{2}i\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + U(\frac{3}{2}te^{-\frac{t^2}{2}} - t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U(\frac{3}{2}te^{-\frac{t^2}{2}} - t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}) = i(\frac{3}{2}\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2}} - \zeta^3 e^{-\frac{\zeta^2}{2}})$, also ist $i \in \sigma_p(U) \subseteq \sigma(U)$

Wir haben also $\{\pm 1, \pm i\} \subseteq \sigma_p(U) \subseteq \sigma(U)$

•) Von Blümlinger Satz 3.3.2. wissen wir bereits, dass $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ eine surjektive Isometrie ist. Nach Prop. 6.6.7 ist daher U unitär. Nach Prop. 6.6.8: $\{\pm 1, \pm i\} \subseteq \sigma_p(U) \subseteq \sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

•) Wir betrachten den Schwartzraum $S := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : \sup\{|x^n f^{(m)}(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \infty\}$

Von Blümlinger Prop. 3.3.1 wissen wir bereits $S \subseteq L^2(\mathbb{R})$ und $T := U|_S$ ist

ein Automorphismus. Weiters ist $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S$ und nach Blümlinger Satz 2.5.1 ist

$C_c^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ und daher ist auch S dicht in $L^2(\mathbb{R})$. Da auch $S \subseteq L^1(\mathbb{R})$ können wir T explizit wie im Hinweis anschreiben. Führen wir den Operator $Rf(x) = f(-x)$ ein so können wir $T^{-1} = RT = TR$ schreiben (vgl. Blümlinger Formel (3.16))

Nun ist $Rf = RT^{-1}Tf = RRTTf = T^2 f$ also $T^2 = R$ und $T^4 = R^2 = I$

Da S dicht ist in $L^2(\mathbb{R})$ gilt nun auch $U^4 = I$

·) Mit dem Spektralabbildungssatz ist $1 = \sigma(I) = \sigma(U^4) = (\sigma(U))^4$

also $\{\pm 1, \pm i\} \subseteq \sigma_p(U) \subseteq \sigma(U) = \{\pm 1, \pm i\}$

·) Zu guter Letzt sei noch nachgerechnet:

$\forall k \in \mathbb{N} : \exists\, t_0 \in \mathbb{R} \cdot \forall\, |t| > |t_0| : |t^k| < e^{\frac{t^2}{4}}$

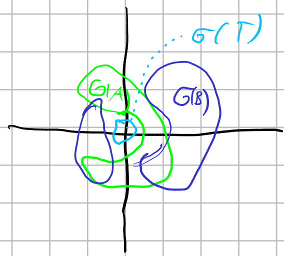
$$\int_{\mathbb{R}} |t^k| e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \int_{-t_0}^{t_0} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{-t_0} |t^k| e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{t_0}^{\infty} |t^k| e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq$$

$$\leq \int_{-t_0}^{t_0} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 2\int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4}} dt < \infty$$

und

$$TRf(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(-t) e^{-it\xi} dt \left| \begin{matrix} s = -t \\ ds = -dt \end{matrix} \right| = -\int_{\infty}^{-\infty} f(s) e^{is\xi} ds = \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{it\xi} ds = RTf$$

22 / 1: Sei X ein Banachraum, $A, T \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in \rho(A)$, und setze $B := A + T$. Wir wissen (Neumannsche Reihe): Ist $\|T\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Unter der Voraussetzung dass $AT = TA$, zeige die stärkere Aussage: Ist $r(T) < r(A^{-1})^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Warum ist diese Aussage eigentlich stärker als die obige?



•) Zuallererst zur Angabe: Da $0 \in \varrho(A)$, also $0 \notin \sigma(A)$, nach Satz 6.4.14: $\sigma(A) \neq \emptyset$, folgt mit Lemma 6.4.8

$\sigma(A^{-1}) = \{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A) \} \neq \emptyset$, also ist $r(A^{-1})^{-1} = (\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A^{-1})\})^{-1}$ sinnvoll.

•) Als nächstes erkennen wir:

$$A^{-1}T = A^{-1}TAA^{-1} \overset{AT=TA}{=} A^{-1}ATA^{-1} = TA^{-1} \quad \text{und damit}$$

$$r(A^{-1}T) \overset{\text{Satz } 6.4.14}{=} \lim_{n\to\infty} \|(A^{-1}T)^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{A^{-1}T = TA^{-1}}{=} \lim_{n\to\infty} \|(A^{-1})^n T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \|(A^{-1})^n\|^{\frac{1}{n}} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Satz } 6.4.14}{=} r(A^{-1}) r(T)$$

Nach Voraussetzung gilt $r(T) < (r(A^{-1}))^{-1} \Rightarrow r(A^{-1}) r(T) < 1$, daher auch $r(A^{-1}T) \leq r(A^{-1}) r(T) < 1$, es ist also $-1 \in \varrho(A^{-1}T)$ und damit existiert

$(A^{-1}T - (-I))^{-1} = (I + A^{-1}T)^{-1}$ und deshalb auch

$(I + A^{-1}T)^{-1} A^{-1} = (A(I + A^{-1}T))^{-1} = (A + T)^{-1} = B^{-1}$, also $0 \in \varrho(B)$

•) Warum ist diese Aussage stärker?

$\|T\| < \|A^{-1}\|^{-1} \Rightarrow \|T\| \|A^{-1}\| < 1$ und von Lemma 6.4.10 wissen wir bereits

$\sigma(T) \subseteq K_{\|T\|}(0)$, also $r(T) \leq \|T\|$ sowie $r(A^{-1}) \leq \|A^{-1}\|$ also

$r(A^{-1}) r(T) \leq \|A^{-1}\| \|T\| < 1 \Rightarrow r(T) < (r(A^{-1}))^{-1}$

Umgekehrt:

$X = \mathbb{C}^2$ mit $\|\cdot\|_\infty$; Zeilensummennorm; $A = id$; $\|A^{-1}\| = r(A^{-1}) = 1$

$$T := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad r(T) = \tfrac{1}{2} < 1 = (r(A^{-1}))^{-1}$$

$$\|T\| = \tfrac{3}{2} > 1 = \|A^{-1}\|^{-1}$$

22 / 2:*Sei $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ die Menge aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$, und

$$d_H(M,N) := \max\Big\{ \sup_{x\in M}\inf_{y\in N}|x-y|, \sup_{y\in N}\inf_{x\in M}|x-y|\Big\}, \quad M,N\in\mathcal{K}(\mathbb{C}).$$

Es gilt dass d_H eine Metrik ist, die *Hausdorff-Metrik*.

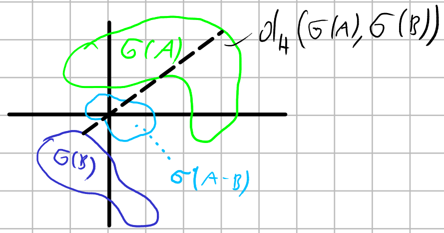
Sei nun X ein Banachraum. Zeige:

(a) Sind $A,B\in\mathcal{B}(X)$ mit $AB=BA$, dann ist $d_H\big(\sigma(A),\sigma(B)\big)\le r(A-B)$.

(b) Ist $\mathcal{C}$ eine kommutative Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$, so ist die Funktion

$$\Sigma : \begin{cases} (\mathcal{C}, \|.\|_{\mathcal{B}(X)}) & \to \quad (\mathcal{K}(\mathbb{C}), d_H) \\ A & \mapsto \quad \sigma(A) \end{cases}$$

stetig.



a) •) Aus Lemma 6.4.10 wissen wir bereits, dass $\sigma(A), \sigma(B)$ kompakt sind also der Ausdruck $d_H(\sigma(A),\sigma(B))$ sinnvoll ist.

•) Sei o.B.d.A. $d_H(\sigma(A),\sigma(B)) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \inf_{\mu\in\sigma(B)} |\lambda-\mu| = \sup\{\min\{|\lambda-\mu| : \mu\in\sigma(B)\} : \lambda\in\sigma(A)\}$

Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ bel. und $\lambda\in\sigma(A)$ mit $|\lambda-\gamma| = \min\{|\lambda-\mu| : \mu\in\sigma(B)\}$ und $d_H(\sigma(A),\sigma(B)) \le |\lambda-\gamma| + \varepsilon$

also $d_H(\sigma(A),\sigma(B)) - \varepsilon \le |\lambda-\gamma|$

Weiters ist $r(A-B) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|(A-B)^n\|^{\frac{1}{n}}$ wähle also $2m+1\in 2\mathbb{N}+1$: $\|(A-B)^{2m+1}\|^{\frac{1}{2m+1}} - \varepsilon \le r(A-B)$

also $\|(A-B)^{2m+1}\|^{\frac{1}{2m+1}} \le r(A-B)+\varepsilon$

z.z.: $|\lambda-\gamma| \le \|(A-B)^{2m+1}\|^{\frac{1}{2m+1}} \Leftrightarrow |\lambda-\gamma|^{2m+1} \le \|(A-B)^{2m+1}\|$

$$\|(A-B)^{2m+1}\| = \Big\|\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}A^k(-B)^{2m+1-k}\Big\| =$$

$$= \Big\|\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}A^{2k+1}B^{2(m-k)} - \sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}A^{2k}B^{2(m-k)+1}\Big\| =$$

$$= \Big\|\sum_{k=0}^{m}\Big(\binom{2m+1}{2k+1}A^{2k+1}B^{2(m-k)} - \binom{2m+1}{2k}A^{2k}B^{2(m-k)+1}\Big)\Big\| =$$

$$= \|$$

•) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ bel.

$$r(\lambda A) = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda A)^n\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|\, r(A)$$

$$\|(A+B)^n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|A^k\| \|B^{n-k}\|$$

$$r(A+B) \overset{\text{Satz 6.4.14}}{=} \lim_{n\to\infty} \|(A+B)^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{AB=BA}{=} \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}\right\|^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\overset{(*)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \left(\left\|\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}\right\|^{\frac{1}{n}} + \|A^n\|^{\frac{1}{n}} + \|B^n\|^{\frac{1}{n}} \right) = r(A) + r(B) + \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}\right\|^{\frac{1}{n}}$$

wobei $(*)$ wegen der Dreiecksungleichung und

$\|A\|^n + \|B\|^n \leq (\|A\| + \|B\|)^n$ gilt, was für $n=1$ klar ist und wegen

$$(\|A\|+\|B\|)^{n+1} \geq (\|A\|^n + \|B\|^n)(\|A\|+\|B\|) = \|A\|^{n+1} + \|A\|^n\|B\| + \|B\|^n\|A\| + \|B\|^{n+1} \geq$$

$\geq \|A\|^{n+1} + \|B\|^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, damit also auch

$$\left(\|A\|^{\frac{1}{n}} + \|B\|^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \|A\| + \|B\| \Leftrightarrow \|A\|^{\frac{1}{n}} + \|B\|^{\frac{1}{n}} \geq (\|A\| + \|B\|)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}\right\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} A^k B^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k B^{n-k}\right\|^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} A^{k+1} B^{n-k-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\right.$$