Serie 5

Thema: exakte Differentialgleichungen—integrierende Faktoren

Sei

$$q(t,y) + p(t,y)y' = 0$$

gegeben. Eine Funktion $0 \neq \varphi = \varphi(t,y)$ heißt *integrierender Faktor*, falls die Differentialgleichung

$$\varphi q + \varphi p y' = 0$$

eine exakte Differentialgleichung ist. Die Bedingung an φ ist dann

$$\partial_y(\varphi q) \stackrel{!}{=} \partial_t(\varphi p).$$

Praktisch ist das Auffinden einer Funktion φ nicht einfach, denn diese Gleichung ist sogar eine partielle Differentialgleichung für φ. Oft hilft ein geschickter Ansatz (Bsp.: $\varphi = \varphi(t)$ oder $\varphi = \varphi(y)$).

Aufgaben

$$(1 - t^2 y) + t^2(y - t)y' = 0 \qquad \varphi = \varphi(t) \tag{1}$$

$$(t^4 \ln t - 2ty^3) + 3t^2 y^2 y' = 0 \qquad \varphi = \varphi(t) \tag{2}$$

$$2ty^2 - 3y^3 + (7 - 3ty^2)y' = 0 \qquad \varphi = \varphi(y) \tag{3}$$

$$(3y^2 - t) + (2y^3 - 6ty)y' = 0 \qquad \varphi = \varphi(t + t^2) \tag{4}$$

$$(t^2 + y^2 + 1) - 2tyy' = 0 \qquad \varphi = \varphi(y^2 - t^2) \tag{5}$$

$$t(1 - y) + (t^2 + y)y' = 0 \qquad \varphi = \varphi(t^2 + y^2). \tag{6}$$

Lösungen

$$ty^2 - 2t^2y - 2 = Ct, \qquad \varphi(t) = 1/t^2 \tag{1}$$

$$y^3 + t^3(\ln t - 1) = Ct^2, \qquad \varphi(t) = t^{-4} \tag{2}$$

$$t^2 - \frac{7}{y^2} - 3ty = C, \qquad \varphi(y) = y^{-2} \tag{3}$$

$$(t + y^2)^2 C = (t - y^2), \qquad \varphi(t + y^2) = (t + y^2)^{-3} \tag{4}$$

$$(1 + y^2 - t^2) = Ct, \qquad \varphi(y^2 - t^2) = (1 + y^2 - t^2)^{-2} \tag{5}$$

$$y - 1 = C\sqrt{t^2 + y^2}, \qquad \varphi(t^2 + y^2) = (t^2 + y^2)^{-3/2} \tag{6}$$