Prüfung Differentialgleichungen 1 (Melenk) 28.5.2021

Matrikelnr.:	Familienname:
Platznr.:	Vorname:

1:	2:	3:	4:	5:	Summe:

Bemerkungen:

0) Dauer: 120min
1) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

2) **Taschenrechner mit einzeiligem Display (keine Graphik) sind erlaubt.**

3) Insgesamt können 20 Punkte erreicht werden.

4) Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein. Besser zu viel als zu wenig hinschreiben.

1. (5 Punkte) Betrachten Sie das System

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Geben Sie ein Fundamentalsystem für das homogene System an.
   b) Geben Sie eine Partikulärlösung für das inhomogene System an.

---

2. (3 Punkte) Geben Sie eine (nichttriviale) Funktion F mit $F(t, y(t)) = 0$, falls y die Differentialgleichung

$$(5t^2y - 6y^4) + (4t^3y - 14ty^3)y' = 0$$

   löst. *Hinweis:* integrierender Faktor von der Form $\varphi(t, y) = t^\alpha y^\beta$.

---

3. (4 Punkte) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) = f(x), \qquad 1 \leq x \leq 2,$$
$$y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

   a) Konstruieren Sie ein Fundamentalsystem für das homogene System.
   b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion.
   c) Geben Sie die Lösung für $f(x) = 2x$ an.

---

4. (4 Punkte) Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y^2 - x^3 \\ (x^2 - 1)y \end{pmatrix}$$

   a) Geben Sie die Ruhelagen an.
   b) Für welche Ruhelagen macht das Prinzip der linearisierten Stabilität eine Aussage? Welche Aussage macht es?
   c) Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ mittels einer geeignet gewählten Ljapunovfunktion.

---

5. (4 Punkte)
   a) Beweisen Sie oder widerlegen Sie, dass $y'(t) = \sqrt{|t+1|}|\sin y(t)| + |t^2 + t + \cos t|$ mit $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ eine globale (d.h. auf $(0, \infty)$ existierende) Lösung hat.
   b) Zeigen Sie, dass für das Anfangswertproblem $y' = \cos y + y^2 - y^3$, $y(0) = 0$ auf $(0, \infty)$ eine Lösung existiert.
      Hinweis: Zeigen Sie $0 \leq y(t) \leq y_{max} < \infty$ für ein geeignetes y_{max}.
