Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 9

Übungstermin: 27.5.2020 20. Mai 2020

Aufgabe 41:
Beweisen Sie, dass die k-Schritt BDF-Verfahren aus Aufgabe 37 für $k = 1, \dots 6$ die Wurzelbedingung erfüllen und dass die Verfahren für $k = 7, \dots, 10$ die Wurzelbedingung nicht erfüllen.

Hinweis: Die Koeffizienten der k-Schritt BDF-Verfahren können Sie mit einem Computeralgebrasystem ausrechnen. Die Verfahren haben die Form

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} y_{\ell+1-j} = h f_{\ell+1}, \quad \alpha_{k-j} = h L_j'(t_{\ell+1}), \quad L_j(t) := \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k} \frac{t - t_{\ell+1-m}}{t_{\ell+1-j} - t_{\ell+1-m}} \tag{1}$$

Zusatzinformation: Man kann zeigen, dass alle BDF-Verfahren für $k \geq 7$ nicht die Wurzelbedingung erfüllen.

Aufgabe 42:
Verallgemeinern Sie den Beweis von Theorem 5.35 des Skriptes für den allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$. Dazu müssen Sie im wesentlichen folgendes zeigen:

a) Mit den angepassten Definitionen aus dem Skript gilt

$$E_{\ell+1} = \left(A_\rho^\top \otimes I \right) E_\ell + F_\ell, \tag{2}$$

wobei $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und $A \otimes B$ das Kroneckerprodukt zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist, d.h.

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} A_{11}B & \dots & A_{1k}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1}B & \dots & A_{kk}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kn \times kn}. \tag{3}$$

b) Aus der Wurzelbedingung folgt

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| \left(A_\rho^\top \otimes I \right)^k \right\|_\infty < \infty. \tag{4}$$

Sie müssen auch erklären können, warum dies die beiden wesentlichen Änderungen zum skalaren Fall sind!

Aufgabe 43:
Gegeben seien zwei Adams-Bashford Verfahren mit k bzw. $k{+}1$-Schritten und gleicher Gitterweite h. Wie in Definition 5.9. des Skriptes sei $y_{\ell+1}$ die Lösung des k-Schritt Verfahrens und $\tilde{y}_{\ell+1}$ die Lösung

des $k+1$-Schritt Verfahrens bei jeweils exakten Anfangswerten. Leiten Sie einen berechenbaren Fehlerschätzer μ für den Konsistenzfehler $\tau_\ell(h)$ des ersten Verfahrens her. Es sollte gelten

$$\tau_\ell(h) = \mu + \mathcal{O}(h^{k+3}).$$

Benutzen Sie dazu inbesondere die Entwicklung des Abschneidefehlers aus dem Beweis von Theorem 5.15 und vollziehen Sie die Konstruktion des Fehlerschätzers in Abschnitt 2.6 bzw. Abschnitt 2.7 nach.

Aufgabe 44:
Wenden Sie verschiedene lineare Mehrschrittverfahren auf das Anfangswertproblem zur Wärmeleitungsgleichung aus Aufgabe 29 an. Verwenden Sie dazu:
a) Das Adams-Bashforth Verfahren mit $k = 3$.
b) Die Adams-Moulton Verfahren mit $k = 2, 3$.
c) Das BDF Verfahren

$$y_{\ell+1} - \frac{48}{25}y_\ell + \frac{36}{25}y_{\ell-1} - \frac{16}{25}y_{\ell-2} + \frac{3}{25}y_{\ell-3} = h\frac{12}{25}f\left(t_{\ell+1}, y_{\ell+1}\right).$$

Optimieren Sie jeweils die Schrittweite h, d.h. wählen Sie h so groß wie möglich, wobei $\|U(t)\|_\infty$ aber noch in der Zeit fallen sollte. Was beobachten Sie?

Hinweis: Für die impliziten Verfahren benötigen Sie keine Netwon Iteration, sondern können die auftretenden Gleichungen explizit lösen. Beachten Sie dabei Aufgabe 29c.

Aufgabe 45:
Zeigen Sie, dass das Stabilitätsgebiet eines expliziten, linearen Mehrschrittverfahrens beschränkt und das Verfahren dadurch nicht A-stabil ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Beträge der Nullstellen von $\xi \mapsto \rho(\xi) - z\sigma(\xi)$ kleiner eins sind und finden Sie eine Abschätzung die gleichmäßig in z ist. Konstruieren Sie daraus einen Widerspruch.