A 2.5.2 Sei $(m_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes V. Beweise: Dieses ist genau dann eine Basis von V, falls sich mindestens ein Vektor $x \in V$ eindeutig als Linearkombination der Form $x = \sum_{i\in I} x_i m_i$ darstellen lässt.

Beweis: Wir zeigen also

$$(m_i)_{i\in I} \text{ ist eine Basis} \Leftrightarrow \exists x \in V : x = \sum_{i\in I} x_i m_i \text{ eindeutig},$$

wobei $(m_i)_{i\in I}$ immer ein Erzeugendensystem sei.

„$\Rightarrow$": Ist trivial, da dies direkt aus der Definition einer Basis folgt.

„$\Leftarrow$": Wir zeigen also nur noch, dass $(m_i)_{i\in I}$ l.u. ist, d.h. $\mathcal{O}$ lässt sich bloß als „triviale" Linearkombination darstellen.

Er lässt sich überhaupt darstellen, weil

$$\mathcal{O} = x - x = \sum_{i\in I} x_i m_i - \underbrace{\sum_{i\in I} x_i m_i} = \sum_{i\in I} \underbrace{(x_i - x_i)}_{0} m_i$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von $x = \sum_{i\in I} x_i m_i$, kann man nichts Anderes abziehen, um $\mathcal{O}$ zu erhalten.

Dass er sich nur so darstellen lässt, beweisen wir mittels Widerspruch. (Wenn oben $A \Leftrightarrow B$ steht, so zeigen wir $B \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$.) Angenommen, $(m_i)_{i\in I}$ sei l.a., also keine Basis, also ließe sich $\mathcal{O}$ auch nicht trivial darstellen:

$$\mathcal{O} = \sum_{i\in I} y_i m_i \text{ mit } \exists i \in I : y_i \neq 0.$$

Das hieße aber in weiterer Folge, dass

$$x = x + \mathcal{O} = \sum_{i\in I} x_i m_i + \sum_{i\in I} y_i m_i = \sum_{i\in I} (x_i + y_i) m_i ,$$

und weil $\exists i \in I : y_i \neq 0$, muss das zu dem $\lightning$ führen, dass sich x auch als

$$x = \sum_{i\in I} (x_i + y_i) m_i$$

darstellen ließe mit $\exists i \in I : x_i + y_i \neq x_i$. Also ließe sich x nicht mehr eindeutig darstellen! $\square$

A 2.6.2

(a) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper $K = GF(q)$ mit $n < \infty$. Zeige, dass die Anzahl der Vektoren von V gleich q^n ist.

(b) Die Menge aller möglichen rein schwarz-weißen Bilder auf einem rechteckigen Computerbildschirm lässt sich gemäß A 2.2.2 (b) als Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ auffassen, wenn wir jedes angezeigte Bild mit der Teilmenge der weißen Bildpunkte identifizieren. Bestimme die Dimension und die Anzahl der Elemente dieses Vektorraumes etwa für einen Bildschirm mit 1024×768 Punkten.

Beweis (a): Die Anzahl der n-Tupel in der Menge $GF(q)^n$ ist q^n. Um zu zeigen, dass V dieselbe Mächtigkeit, wie $GF(q)^n$ hat, finden wir eine Bijektion

$$\phi : GF(q)^n \to q^n.$$

Sei dazu $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis V.
Wir bilden die n-Tupel auf deren LK ab:

$$\phi : (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k b_k ,$$

wobei $a_1, \dots, a_n \in GF(q)$ beliebig sind.
ϕ ist injektiv, da jedem Tupel bei einer festen Basis 6bβ eine LK zugeordnet wird. ϕ ist surjektiv, weil sich alle Vektoren in V als LK von Basisverkoren schreiben lassen. (Jede Basis ist ein ES.)

$\square$

(6) $\dim V = 1024 \cdot 768$ und weil $\mathbb{Z}_2 = GF(2)$, muss $2^{1024 \cdot 768}$ die Anzahl der möglichen Elemente dieses Vektorraums sein.

A 2.6.5 Nach A 2.2.3 ist jeder Körper L ein Vektorraum über jedem seiner Unterkörper K. Die Dimension dieses Vektorraumes wird mit $[L : K]$ bezeichnet und auch der Grad von L über K genannt.

Beweise:

(a) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ (vgl. A 1.10.2) und $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

(b) Sind $K \subset L \subset M$ Unterkörper eines Körper M, ist $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine Basis von M über L und $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ eine Basis von L über K, so ist die Familie (d_{ij}) mit $d_{ij} := b_i \cdot c_j$ eine Basis von M über K zur Indexmenge $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$. Daraus folgt $[M : K] = [M : L] \cdot [L \cdot K]$.

Beweis (a): Laut Definition 2.6.5, heißt „die Anzahl der Elemente einer Basis von V die Dimension von V".

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Daher bildet die Menge $\{1 + 0 \cdot \sqrt{2}, 0 + 1 \cdot \sqrt{2}\}$ eine mögliche Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; weil

- sich alle $a + b\sqrt{2}$ als LK von diesen Elementen darstellen lässt ($\Rightarrow$ ES), und
- sich keines dieser Elemente als LK der anderen darstellen lässt ($\Rightarrow$ l.u.).

Diese Basis enthält 2 Elemente.

$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.

—"— $\{1 + 0i, 0 + 1i\}$ —"— $\mathbb{C}$, weil —"—. $\square$

Beweis (b): Die Familie $(d)_{ij}$ ist

- Ein EZ, weil sich jedes Element von K^M als LK von $(b_1, \dots, b_n) \subset L^M$ und $(c_1, \dots, c_m) \subset K^L$ bilden lässt:

$$\sum_{i\in I} x_i b_i \cdot \sum_{j\in J} y_j c_j = \sum_{i\in I, j\in J} (x_i y_j)(b_i c_j) = \sum_{i\in I, j\in J} z_{ij} d_{ij},$$

wenn $I := \{1, \dots, n\}$, $J := \{1, \dots, m\}$, und $z_{ij} := x_i y_i$. Es gilt hierbei, weil $z_{ij} \in K$, $x_i \in L$, und $y_i \in K$, dass $\forall i \in I : x_i \notin K \Rightarrow x_i := 1$, weil dann nur noch y_j betrachtet werden müss.

- l.u., weil (c_i) und (b_j) l.u. sind:

$$\mathcal{O} = \sum_{i\in I, j\in J} z_{ij} d_{ij} = \sum_{i\in I, j\in J} (x_i b_i)(y_j c_j) = \sum_{i\in I} x_i b_i \cdot \sum_{j\in J} y_j c_j.$$

Angenommen, $\exists (i,j) \in I \times J : x_i \neq 0 \neq y_j$. Weil eben (c_i) und (b_j) l.u. sind, kann bei keiner der zwei rechten LK der $\mathcal{O}$ herauskommen. Daher würde die Gleichung nicht aufgehen.

Jedes feste b_i kann mit m verschiedenen c_j multipliziert werden (oder umgekehrt), um ein eindeutiges d_{ij} zu bekommen. Also

$$\#(b_i) \cdot \#(c_j) = n \cdot m = \#(d_{ij}).$$

Der Rest folgt aus Definition 2.6.5 (siehe oben). $\square$

2.6.9: Der Hausdorffsche Maximalkettensatz ist, in seiner einfachsten Form, die folgende Aussage:
In jeder halbgeordneten Menge existiert eine (inklusions)-maximale Kette.
Ausführlich:
Ist $(P, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, dann existiert eine Teilmengen $T \subseteq P$, sodass $(T, \leq)$ eine Kette (also totalgeordnet) ist und T bezüglich $\subseteq$ maximal unter allen Teilmengen mit diese Eigenschaft ist (es gibt also keine Kette $T' \subseteq P$ mit $T \subset T'$ [hier echte Inklusion], bzw. jede Kette $(T', \leq)$ mit $T \subseteq T' \subseteq P$, muß zwangsläufig $T' = T$ erfüllen).

Aufgabe: Nehmen Sie die Gültigkeit des Hausdorffschen Maximalkettensatzes an. Zeigen Sie, dass daraus die Gültigkeit des Lemmas von Zorn folgt.

Zusatz für Interessierte: tatsächlich sind beide Aussagen äquivalent; man kann also auch mit Hilfe des Zornschen Lemmas des Hausdorffschen Maximalkettensatz beweisen. Wie? Welche geordnete Menge muss man betrachten? [Das ist nicht Teil der Aufgabe]

Beweis: Sei $(P, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, dann ist m genau dann maximal, wenn $\nexists x \in P \setminus \{m\}: m \leq x$.

oBdA. sei $P \neq \emptyset$. (LvZ gilt nicht für $\emptyset$.)

Betrachte nun eine beliebige (inklusions) maximale Kette T, wobei $T \subseteq P$. Ist diese Kette einelementig, d.h.

$$\nexists T' \subsetneq T : T' \neq \emptyset, \tag{*}$$

so ist ihr Element „automatisch" maximal (und minimal). Ist dem jedoch nicht so, gilt also oberes (*) nicht. Betrachte die „nächst-kleinere" Teilmenge von T, T', d.h.

$$\nexists T'' \subsetneq T : T' \subsetneq T''.$$

Weil die Ketten T und T' totalgeordnet sind und aufgrund der speziellen Wahl von T', muss für das größte Element von T (ein maximales Element in P), nennen wir es m, gelten, dass $m \in T \setminus T'$, wobei $|T \setminus T'| = 1$.
Für m gilt tatsächlich $\nexists x \in P \setminus \{m\} : m \leq x$, weil sonst $x, m \in T \setminus T'$ und T' somit nicht die nächst-kleinere Teilmenge von T gewesen wäre. $\square$

2.6.10: Vgl. Aufgabe 2.6.4:

Wir betrachten die folgenden beiden Aussagen für einen Vektorraum V:

(A) $(\exists U_0 \subseteq V \, \exists U_1 \subseteq V : (U_0, U_1)$ ist aufsteigende Unterraumkette$) \wedge \neg(\exists U_0 \subseteq V \, \exists U_1 \subseteq V \, \exists U_2 \subseteq V : (U_0, U_1, U_2)$ ist aufsteigende Unterraumkette$)$

(B) $(\exists U_0 \subseteq V \, \exists U_1 \subseteq V : (U_0, U_1)$ ist aufsteigende Unterraumkette $\wedge \neg(\exists U_2 \subseteq V : (U_0, U_1, U_2)$ ist aufsteigende Unterraumkette$))$

(a) Welche der beiden Aussagen ist in 2.6.4 (b) gemeint?

(b) Reformulieren Sie (A) und (B) in Worten.

(c) Sind (A) und (B) äquivalent? Wenn nicht, dann geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

(a) In 2.6.4 (b) ist die Aussage (B) gemeint. Die Begründung folgt aus der Ausformulierung ...

(b) In (A) betrachten wir 2 für sich genommene Aussagen (beachte die Klammer-Setzung):
„Es gibt zwei Unterräume $U_0, U_1 \in V$, die eine UK bilden. Für alle U_0, U_1, U_2 gilt, dass diese mit (U_0, U_1, U_2) keine UK bilben."
(B) ist allerdings eine lange Wurscht von Aussage:
„Es gibt zwei —"— bilden, und diese mit allen $U_2 \in V$, keine UK bilden."

(c) $A \Rightarrow B$, aber $\neg(B \Rightarrow A)$.

Wir betrachten folgendes Gegenbeispiel:

Seien $V := \mathbb{R}^3$, $U_1 := \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, $U_2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

$(\exists U_2, \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^3) \wedge \neg(\exists U_1, U_2, \mathbb{R}^3 \subseteq V :$
$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \mathbb{R}^3)$,

folgt aus A, aber

$\exists U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^3 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \neg(\exists \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^3 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$
$\subseteq \tilde{U})$.

folgt aus B.

2.6.11: Sei V ein Vektorraum über K und $U \leq V$ ein Unterraum mit $\dim(V) = \dim(U) = n$. Beweisen Sie $U = V$.

(Hinweis: Dafür reicht Satz 2.5.7. Wenn Sie die Sätze 2.6.6 und/oder 2.6.7 verwenden wollen, dann müssen Sie diese Sätze auch beweisen.)

Beweis: Sei B eine Basis von U. Es gilt also $B \subset U \subset V$, also $B \subset U$. B bleibt ja dennoch l.u.. Zudem hat B laut Definition 2.6.5 genau $\dim U$ Elemente. Weil $\dim U = \dim V$, hat sie auch $\dim V$ Elemente. Laut Satz 2.6.6, ist B also auch eine Basis von V. Laut Definition eines ES, vgl. 2.5.1, gilt also

$$U = [B] = V. \qquad \square$$

A 2.7.1 Bestimme durch elementare Umformungen einer Matrix auf Stufenform eine Basis des von den gegebenen Vektoren aufgespannten Unterraumes U von $K^{3\times 1}$:

(α) $K = \mathbb{R}$: $(1,2,3)^T$, $(1,2,4)^T$, $(1,2,5)^T$, $(9,8,7)^T$.

(β) $K = \mathbb{C}$: $(i,1,1)^T$, $(i,1,2)^T$, $(-i,-1,5)^T$, $(-1,i,i)^T$.

(γ) $K = \mathbb{Z}_7$: $(\bar{4},\bar{5},\bar{6})^T$, $(\bar{1},\bar{3},\bar{5})^T$, $(\bar{3},\bar{2},\bar{1})^T$, $(\bar{6},\bar{4},\bar{2})^T$.

(α)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -10 \\ 3 & 1 & 2 & -20 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

-1 $\quad -1 \quad -9 \qquad\qquad -2 \quad /-10 \qquad\qquad -2$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$-3 \quad -2$

(β)

$$\begin{pmatrix} i & i & -i & -1 \\ 1 & 1 & -1 & i \\ 1 & 2 & 5 & i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$-1 \quad +1 \quad -i \qquad\qquad -1 \quad -6 \quad \cdot(-i)$

(γ)

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{6} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

$+3 \quad +4 \quad +1$

A 2.7.2 Gegeben seien der Unterraum U aus A 2.7.1 und ein Vektor $x \in K^{3\times 1}$ mit

(α) $x = (1, 3, 5)^T$,

(β) $x = (0, 1, 0)^T$,

(γ) $x = (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0})^T$, ...

Untersuche, ob x dem Unterraum U angehört, und stelle x gegebenenfalls als Linearkombination einer Basis von U dar.

(α) x gehört dem Unterraum an.

$$x = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(β) x gehört nicht dem UR an. Es müsste

$$x = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Wenn aber $c_1 = i$ und $c_2 = 0$, geht's ned!

(γ) x gehört nicht dem UR an. Es müsste

$$x = z \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{3} \\ \bar{5} \end{pmatrix}, \text{ mit } z \in \mathbb{Z}_7.$$

Wenn aber $z = \bar{2}$, geht's a ned!