Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Numerische Mathematik - Kreuzlübung 5

Übungstermin: 5.11.2019 30. Oktober 2019

Hinweis: Die Anmeldung zu den Kleingruppen findet am 11.11. ab 10.00 Uhr im Büro DA 04 M02 (FH Turm A, 4. Stock) durch Ao.Univ.Prof. Ewa Weinmüller statt. Bitte bilden Sie vorher 6er Gruppen und schicken eine VertreterIn mit den Matrikelnummern der TeilnehmerInnen zur Anmeldung. Einzelanmeldungen sind ab 13:00 Uhr auch noch über das TISS-System möglich.

Aufgabe 25:
Sei Δ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Zeigen Sie, dass
a) $\dim\left(\mathbb{S}^1(\Delta)\right) = n + 1$ und dass
b) $\dim\left(\mathbb{S}^k(\Delta)\right) = n + k$ für $k \geq 2$.
Hinweis : Für $s \in \mathbb{S}^k(\Delta)$ gilt $s' \in \mathbb{S}^{k-1}(\Delta)$.

Aufgabe 26:
Sei

$$B_0(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1a}$$

und

$$B_{k+1}(x) := \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} B_k(\xi) d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1b}$$

a) Berechnen Sie B_0, B_1 und B_2 und stellen Sie die Funktionen grafisch dar.
b) Zeigen Sie per Induktion über k: $B_k \in \mathbb{S}^k(\Delta_k)$ für $k = 0, \ldots$ mit der Zerlegung $\Delta_k := \{-\frac{k+1}{2} + j : j = 0, \ldots, k+1\}$, B_k ist nicht-negativ und $B_k(x) = 0$ für $|x| > (k+1)/2$.
Hinweis: Aus (1b) folgt

$$B'_{k+1}(x) = B_k\left(x + \frac{1}{2}\right) - B_k\left(x - \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

Aufgabe 27:
a) Zeigen Sie induktiv, dass für $k = 0, \ldots$ die Funktionen

$$\tilde{B}_{k,j}(x) := B_k\left(x + \frac{k-1}{2} - j\right), \qquad j = 0, \ldots, k, \tag{3}$$

auf $x \in [0, 1]$ linear unabhängig sind. B_k sind dabei die Splines aus der vorigen Aufgabe.
b) Zeigen Sie, dass für das äquidistante Gitter $\Delta = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ die Funktionen

$$B_{3,j} : x \mapsto B_3\left(nx - j\right), \qquad j = -1, \ldots, n+1, \quad x \in [0, 1], \tag{4}$$

mit dem Spline B_3 aus Aufg.26 eine Basis von $\mathbb{S}^3(\Delta)$ bilden.

Aufgabe 28:
Sei $\Delta = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1)$ und

$$s(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} \alpha_j B_{3,j}(x), \qquad x \in [0,1],$$

aus $\mathbb{S}^3(\Delta)$ Lösung der Interpolationsaufgabe

$$s(x_j) = y_j, \quad j = 0, \dots, n, \qquad s'(0) = y_0', \quad s'(1) = y_n'.$$

a) Verwenden Sie

$$B_3(0) = \frac{2}{3}, \quad B_3(\pm 1) = \frac{1}{6}, \quad B_3'(0) = 0, \quad B_3'(\pm 1) = \mp \frac{1}{2},$$

um ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten α_j herzuleiten.
b) Lösen sie das lineare Gleichungssstem für $n = 2$ und $y_j := f(x_j)$, $j = 0, 1, 2$, $y_0' = f'(0)$ und $y_2' = f'(1)$ mit $f(x) := 2x^3 - x^2 + 4$. Skizzieren oder plotten Sie den interpolierenden Spline s und die Funktion f im Intervall $[-1.5, 2.5]$

Aufgabe 29:
Algorithmus 1 beschreibt den Grundalgorithmus der FFT.

Algorithm 1 FFT

Input: $f \in \mathbb{C}^N$ mit $N = 2^p$

$n = N/2$
Initialisiere Hilfsvektoren $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbb{C}^n$
$\omega_N^0 = 1$
for $j = 0, \dots n-1$ **do**
  $f_j^{(1)} = f_j + f_{j+n}$
  $f_j^{(2)} = (f_j - f_{j+n})\, \omega_N^j$
  $\omega_N^{j+1} = \exp(-2\pi i/N)\omega_N^j$
end for
if $N = 2$ **then**
  Setze $c := (f^{(1)}, f^{(2)})^\top \in \mathbb{C}^2$
else
  Berechne (rekursiv) $c^{(1)} = \mathrm{FFT}(f^{(1)})$
  Berechne (rekursiv) $c^{(2)} = \mathrm{FFT}(f^{(2)})$
  Setze $c = \left(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, c_1^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{n-1}^{(1)}, c_{n-1}^{(2)}\right)^\top \in \mathbb{C}^N$
end if

Output: $c = \mathrm{DFT}_N f$

Sei m_p die Anzahl der Multiplikationen und a_p die Anzahl der Additionen für $N = 2^p$. Zeigen Sie:

$$m_p \le p\, 2^p, \qquad a_p \le p\, 2^p, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt ein Gesamtaufwand von etwa $N \log(N)$ komplexen Additionen bzw. Multiplikationen.

Aufgabe 30:

a) Sei $f \in C([0,\pi))$, $N \in \mathbb{N}$ und $x_j := \frac{2j+1}{2N}\pi$ für $j = 0, \dots, N-1$. Gesucht ist eine interpolierende Funktion der Form

$$T_N(x) := \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(kx) \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

sodass $T_N(x_j) = f(x_j)$ für alle $j = 0, \dots, N-1$. Dies entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$D_N \mathbf{a} = \mathbf{f}, \qquad D_N = \left(d_{j,k}^{(N)}\right)_{j,k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

mit $\mathbf{a} := (a_0, \dots, a_{N-1})^T, \mathbf{f} := (f(x_0), \dots, f(x_{N-1}))^T \in \mathbb{R}^N$ und $d_{j,k}^{(N)} := \cos(kx_j)$. Lösen Sie dieses lineare Gleichungssystem, d.h. berechnen Sie D_N^{-1}.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Einträge von $D_N^T D_N$. Dabei helfen die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} 2\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta), \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

b) Verwenden Sie die Lösung des trigonometrischen Interpolationsproblems aus Satz 3.34 des Vorlesungsskriptes, um für $N = 2^p$ mit einem $p \in \mathbb{N}$ einen Algorithmus mit Aufwand $\mathcal{O}(N\log(N))$ zur Berechnung der Koeffizienten $a_0, \dots, a_{N-1}$ zu konstruieren. Verwenden Sie dafür eine geeignete Fortsetzung von f auf $[\pi, 2\pi]$.