1. Gg.: $\mathcal{B}_2$ σ-Alge. über $\mathbb{R}$, mit Borelmengen,

$f: (\Omega, \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_2)$

zz.: $G^- := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \mathbb{R} : \omega_2 < f(\omega_1)\}$,

$G^+ := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \mathbb{R} : \omega_2 > f(\omega_1)\}$,

$G^0 := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \mathbb{R} : \omega_2 = f(\omega_1)\}$,

sind $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ - messbar.

d.h. $G \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \mathfrak{D}_\sigma(\underbrace{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}_{\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{B}_1,\, A_2 \in \mathcal{B}_2\}})$

- Betrachte die Projektion $P_2 : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_2 \end{cases}$,

  Sie ist messbar:

Sei $T \in \mathcal{B}_2$, dann $P_2^{-1}(T) = \underbrace{\Omega}_{\in \mathcal{B}_1} \times \underbrace{T}_{\in \mathcal{B}_2} \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$

- Analog, ist $P_1 : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) \to \omega_1 \end{cases}$ messbar

- $\varphi : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) \mapsto f(\omega_1) - \omega_2 \end{cases}$ ist als Zusammensetzung auch messbar

- $\left.\begin{array}{l} G^- = \varphi^{-1}(]0, \infty[) \\ G^+ = \varphi^{-1}(]-\infty, 0[) \\ G^0 = \varphi^{-1}(\{0\}) \end{array}\right\} \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$

2. Zz.: $\{(x,x) : x \in A\} =: A^2 \in \mathcal{B}^2 \Leftrightarrow$
$A \in \mathcal{B}$

„$\Rightarrow$": Betrachte $id = (id_1, id_2) : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$,
also $f(x) = (x,x)$.

$\Rightarrow A = f^{-1}(A^2)$

$A^2 \in \mathcal{B}^2 \Rightarrow A \in \mathcal{B}$

„$\Leftarrow$": Ww.: $P_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_i \quad , \quad i = 1,2$
messbar

$\Rightarrow P_1^{-1}(A) = A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}^2$
$P_2^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A \in \mathcal{B}^2$

$\Rightarrow D := \{(x,x) : x \in [\inf A, \sup A]\}$
abgeschlossen

Lemma 2.58 $\Rightarrow D \in \mathcal{B}$

$A^2 = A \times A = P_1^{-1}(A) \cap P_2^{-1}(A) \cap D \in \mathcal{B}^2$

3. Ug.: μ, ν Maße auf $\mathfrak{S}$ σ-Alge., $\mu \equiv \nu$ $:\Leftrightarrow$

$\forall A \in \mathfrak{S}: \mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$

Zz.: μ σ-endl. $\Rightarrow \exists \nu$ endl. Maß: $\mu \equiv \nu$

Def. 3.9. μ σ-endl. $:\Leftrightarrow$

$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Upsilon^{\mathbb{N}}: \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \forall n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) < \infty$

Sei also $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche Folge und

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}: \sum_{n=1}^{\infty} w_n = 1$.

Sei $\nu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n \frac{\mu(A \cap V_n)}{\mu(V_n)}$, dann

(i) $\forall A \in \mathfrak{S}: \nu(A) \geq 0$ ✓

(ii) $\nu(\emptyset) = 0$ ✓

(iii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$ disjunkt, dann

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} w_k \frac{\mu(A_n \cap V_k)}{\mu(V_k)}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k \frac{\mu(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap V_k)}{\mu(V_k)} = \nu(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

Ww.: $\forall A \in \mathfrak{S}: \mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$

4. Geg.: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, $\mu(A) = |A|$

(a) Ges.: Wann Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall ?

Def. 4.8. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ fast überall $:\Leftrightarrow$
$\exists A \subseteq \Omega, \mu(A) = 0 : f_n \to f$ punktweise auf A^c,
$\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ messbar, ran $f_n \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow$ Es muss $f_n \to f$ punktweise auf ganz $\mathbb{N}$

(b) Ges.: —"— fast gleichmäßig ?

Def. 4.11. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ fast gleichmäßig $:\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \subseteq \Omega, \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon : f_n \to f$ gleichmäßig auf A^c

$\Rightarrow$ Es muss $f_n \to f$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{N}$

(c) Ges.: Wann Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Maß ?

Def. 4.11. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ im Maß $:\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$.

$\Rightarrow$ Es muss $f_n \to f$ punktweise, sonst nicht.

5. „Alles von 4.", $\mu(A) = \sum_{\omega \in A} 2^{-\omega}$

(a) fast überall: 4.

(b) fast überall gleichmäßig: 4. oder

Satz 4.11: Egorov. μ ist endl. $\Rightarrow$ (μ-f.ü. $\Rightarrow$ μ-f.ü. glm.)

Zusätzlich, muss aber $\forall n \in \mathbb{N}$: ran $f_n \subseteq \mathbb{R}$

(c) im Maß: 4., weil

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} \sum_{|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon} \frac{1}{2^x} = 0$$

„$\Rightarrow$": Ang. $\exists \varepsilon > 0$: —"— $\neq 0$

$$\Rightarrow \exists x : \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon > 0$$

„$\Leftarrow$": Ang. $\exists x : \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

$$\Rightarrow \sum_{|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon} \frac{1}{2^x} \geq \frac{1}{2^x} \neq 0$$

6. Ges.: Wie konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$?

(a) Geg.: $f_n(\omega) = \cos(n\omega)$

- $\neg$ fast überall,
- $\neg$ fast überall gleichmäßig,
- $\neg$ fast gleichmäßig:

Weil $f_n \not\to f$ punktweise irgendwo.

- $\neg$ im Maß:

Weil sonst $\exists f$ funktion: $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) = 0 .$$

Gleichzeitig gilt aber wenn der „Σ"-sätze

$(f_{n+1} - f_{n-1})(\omega) = -2\sin(n\omega)\sin(\omega)$.

↯, weil λ dann für $n \geq n_0$ größer als δ wird.

(b) Geg.: $f_n(\omega) = \frac{\cos(n\omega)}{n}$

- fast überall
- fast überall gleichmäßig
- fast gleichmäßig
- im Maß

$\Bigg\}$ $f_n \to 0_f$ gleichm.

(c) Geg.: $f_n(\omega) = \cos^n(\omega)$

- alles außer fast überall gleichmäßig

weil $f_n \to f: \begin{cases} 1, & 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ gleichm. auf $[\varepsilon, 1], \varepsilon > 0$

(d) Geg.: $f_n(\omega) = \cos^n(n\omega)$

- garnichts konvergiert

Fall 1: $\omega \in \mathbb{Q}\pi$.

$\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}: \omega = \frac{p}{q} \cdot \pi$

Ww.: $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}, q | n: \cos^n(n\omega) = 1$

Betrachte

$$\cos^{n+1}((n+1)\omega) = \cos^{n+1}\left(n\frac{p}{q}\pi + \frac{p}{q}\pi\right) \overset{\text{„}\Sigma\text{"-Sätze}}{=} \cos(p/q \cdot \pi)^{n+1} \to 0$$

Fall 2: $\omega \notin \mathbb{Q}\pi \Rightarrow \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\pi$

Ww.: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \exists \infty$ viele $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow |nx\pi - m\pi| \leq \frac{\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos|nx\pi - m\pi|}_{\cos(nx\pi - m\pi)} \geq \cos(\pi/n),$$ weil cos ist monoton fallend auf $[0, \pi]$

$$= \cos(nx\pi)\cos(\cancel{-}m\pi) - \cancel{\sin(nx\pi)\sin(-m\pi)}$$

$$\Rightarrow \cos^n(n\omega) \geq \cos^n(\pi/n) \xrightarrow[\longrightarrow\ -1]{+1} \text{ für eine geeignete TF}$$ $\Big\}$ mit $e^{\ln(\cdot)}$ und L'Hospital

7. (a) Gg.: $f_n \to f$ fast überall, $g \in C^0(\mathbb{R})$

Zz.: $g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall

Ww.: $\exists A \subseteq \mathbb{R}: \mu(A) = 0,\ f_n \to f$ punktweise in A^c

$\Rightarrow \forall x \in A^c: \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Ww.: g stetig $\Rightarrow$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0:$

$|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \delta$

(b) Ges.: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \to f$ im Maß, g stetig:

$g \circ f_n \not\to f$ im Maß.

Sei $f_n(x) := x + 1/n$, $\mu(A) := |A|$, $g(x) := x^2$.

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |1/n| \to 0$

$\Rightarrow f_n \to f$ im Maß

Ww.: $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0:$

$|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| = |x^2 + 2x/n + 1/n^2 - x^2|$

$\geq |x/n| > \varepsilon$

$\Rightarrow \mu$ nie $= 0 \Rightarrow f_n \not\to f$ im Maß

(c) Gg.: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \to f$ im Maß, g gleichmäßig stetig

Zz.: $g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß.

Ww.: g gleichmäßig Konvergent $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x, y: \underbrace{|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon}_{|g(x) - g(y)| > \varepsilon \Rightarrow |x - y| > \delta}$

Ww.: $\forall \delta > 0: \lim\limits_{n \to \infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim\limits_{n \to \infty} \mu(\underbrace{\{x : |(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| > \varepsilon\}}_{\subseteq \text{ von oben}}) = 0$

(d) Zz.: μ endl. $\Rightarrow$ (c), wobei g bloß stetig