

Kapitel 1

Einführung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung – im Folgenden häufig kurz DGL genannt – hat die allgemeine Gestalt

$$h(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m)}) = 0, \quad t \in J, \quad (1.1)$$

wobei J ein Intervall ist, und die Funktion $h : J \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m+1\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dabei als gegeben vorausgesetzt wird. (1.1) ist hier in *impliziter* Form gegeben.

Der Parameter t ist in (1.1) die einzige *unabhängige Variable*. Dies ist das Merkmal gewöhnlicher Differentialgleichungen. In diesem Buch wird t oft als "Zeit" bezeichnet, auch wenn es dem in manchen Fällen nicht gerecht wird. Dabei ist $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ die Zeitableitung der Funktion $x = x(t)$.

Die *Ordnung* einer Differentialgleichung ist definiert durch die höchste darin nichttrivial enthaltene Ableitung. Die DGL (1.1) hat die Ordnung m , sofern $\partial_{x^{(m)}} h \neq 0$ ist. Eine Differentialgleichung erster Ordnung hat demnach die Form

$$h(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (1.2)$$

Löst man, falls dies möglich ist, (1.1) nach $x^{(m)}$ auf, so ist die Differentialgleichung m -ter Ordnung in *expliziter* Form gegeben:

$$x^{(m)} = g(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m-1)}). \quad (1.3)$$

Wir werden uns hier nur mit expliziten Differentialgleichungen beschäftigen, da diese in Anwendungen am häufigsten auftreten, und implizite Differentialgleichungen im Allgemeinen schwieriger zu lösen sind, jedoch oft mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen auf explizite Differentialgleichungen zurückgeführt werden können.

Gesucht sind Funktionen $x = x(t)$, welche (1.1) erfüllen. Somit kommen wir zu der folgenden Definition.

Definition 1.0.1. Eine Funktion $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von (1.1) in J , falls $x \in C^m(J; \mathbb{R}^n)$ ist, und $h(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t)) = 0$ für alle $t \in J$ gilt.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen enthalten viele Differentialgleichungen mehrere unabhängige Variable. Man nennt solche dann *partielle* Differentialgleichungen:

$$H(y, u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots, \nabla^m u) = 0, \quad y \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad U \text{ offen.}$$

Lösungen $u = u(y)$ sind hierbei Funktionen *mehrerer* Variablen. Es sei daran erinnert, dass $\nabla u(y)$ den *Gradienten* von $u(y)$, $\nabla^2 u(y)$ die Hesse-Matrix, etc. bezeichnen.

Wir werden uns in diesem Buch ausschließlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befassen.

1.1 Erste Beispiele

Die folgenden Beispiele sollen einen ersten Eindruck über das Auftreten gewöhnlicher Differentialgleichungen bei der Modellierung dynamischer Vorgänge vermitteln.

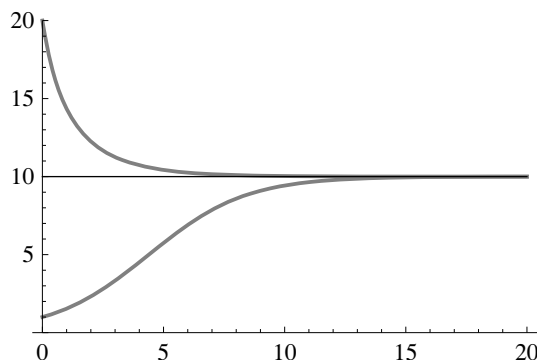
(a) Kapital- und Bevölkerungswachstum. Sei $x(t)$ das Kapital bzw. die Größe einer Population zur Zeit t . Dann bedeutet $\dot{x}(t)$ die zeitliche Änderung des Kapitals bzw. der Population, also

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) < 0 &\rightarrow \text{Abnahme,} \\ \dot{x}(t) = 0 &\rightarrow \text{keine Änderung,} \\ \dot{x}(t) > 0 &\rightarrow \text{Zunahme.} \end{aligned}$$

Das einfachste Modell zur Beschreibung von Wachstumsprozessen basiert auf der Annahme, dass die zeitliche Änderung der Population proportional zum aktuellen Bestand ist. Die dies beschreibende DGL ist $\dot{x} = \alpha x$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Proportionalitätsfaktor ist, die sogenannte *Wachstumsrate*.

Dieses Modell tritt auch in der chemischen Kinetik als sog. *Zerfallsreaktion* $A \rightarrow P$ auf. Dabei ist A die zerfallende Substanz, und P bedeutet ein oder mehrere Produkte des Zerfalls. $x(t)$ bezeichnet dabei die zur Zeit t vorhandene Masse an A , gemessen z.B. in Mol oder in Mol pro Liter. Der Parameter α heißt *Reaktionsgeschwindigkeitskonstante* und ist dann negativ.

Die Lösungen dieser Gleichung sind durch die Funktionen $x(t) = ce^{\alpha t}$ gegeben. Denn offenbar ist ein solches $x(t)$ eine Lösung, und ist $y(t)$ eine weitere, so folgt $\frac{d}{dt}[y(t)e^{-\alpha t}] = 0$, also ist $y(t)e^{-\alpha t} \equiv a$ konstant, d.h. $y(t) = ae^{\alpha t}$. Man bezeichnet $c \in \mathbb{K}$ als *Freiheitsgrad* oder auch als *Integrationskonstante* der Gleichung.

Abbildung 1.1: Logistisches Wachstum mit $\kappa = 10$ und $\alpha = 0.5$

Der Parameter c kann durch einen *Anfangswert* $x(t_0) = x_0$ explizit festgelegt werden. Sei zum Beispiel zur Zeit $t = 0$ die Bevölkerungsgröße gleich x_0 . Dann gilt:

$$x_0 = x(0) = ce^{\alpha \cdot 0} = c, \quad \text{also} \quad x(t) = x_0 e^{\alpha t}.$$

Umgekehrt kann man die Exponentialfunktion e^t als Lösung des *Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = x, \quad t \in \mathbb{R} \quad x(0) = 1,$$

definieren. Dies ist eine in der Theorie spezieller Funktionen häufig angewandte Methode zur Einführung neuer Funktionen.

In der Realität kann es exponentielles, d.h. unbeschränktes Wachstum nicht geben, da stets nur endliche Ressourcen vorhanden sind. Ein modifiziertes Wachstumsgesetz, das dem Rechnung trägt, ist das *logistische Wachstum*:

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x/\kappa), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind $\alpha > 0$ und $\kappa > 0$ ein weiterer Parameter, die sog. *Kapazität*. Die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems mit Anfangswert $x_0 > 0$ ist durch die Funktionen

$$x(t) = \frac{x_0 \kappa}{x_0 + e^{-\alpha t}(\kappa - x_0)}, \quad t \geq 0,$$

gegeben. Für $t \rightarrow \infty$ konvergieren diese Funktionen gegen den *Sättigungswert* $x(\infty) = \kappa$; vgl. Abb. 1.1. Logistisches Wachstum wird in vielen Disziplinen verwendet, um Sättigungsverhalten zu modellieren.

(b) Der harmonische Oszillator. Es sei mit Ausnahme der Gravitation jegliche äußere Kraft vernachlässigt. An der Masse m wirkt zum einen die Gewichtskraft $F_g = mg$ von m und zum anderen die Federkraft $F_f = -kx$; $k > 0$ ist dabei die Federkonstante. Da sich die Feder nach Anhängen der Masse m etwas gedehnt hat,

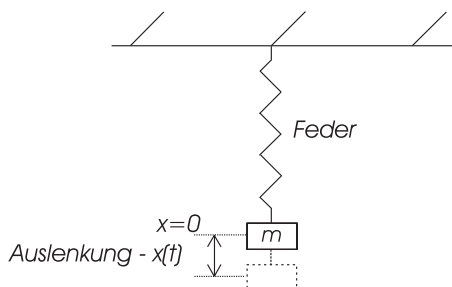


Abbildung 1.2: Harmonischer Oszillator

sagen wir um eine Länge x_0 , wirkt auf m eine betragsmäßig größere Federkraft, nämlich $\tilde{F}_f = k(x_0 + x)$. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt:

$$m\ddot{x} = F_g - \tilde{F}_f = mg - k(x_0 + x),$$

da die Federkraft \tilde{F}_f der Auslenkung entgegen wirkt; vgl. Abb. 1.2.

Zur Anfangsauslenkung x_0 ($x = 0$) halten sich die Gewichts- und die Federkraft die Waage, d.h. $mg = kx_0$ bzw. $x_0 = mg/k$. Setzen wir das in die obige Differentialgleichung ein, erhält man

$$m\ddot{x} = mg - k(mg/k + x) = -kx;$$

die Anfangsauslenkung x_0 spielt also gar keine Rolle. Daraus folgt

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.4)$$

ω^2 wird in der Physik *Kreisfrequenz* genannt. (1.4) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und heißt *Schwingungsgleichung*. Man sieht sofort, dass die Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ und alle ihre Linearkombinationen $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ Lösungen der Schwingungsgleichung sind. Die Konstanten a und b können durch Anfangswerte für z.B. $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = x_1$ eindeutig festgelegt werden. Man erhält so das Anfangswertproblem für die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1.$$

Die trigonometrischen Funktionen $\cos(\omega t)$ bzw. $\sin(\omega t)$ können als Lösung dieses Anfangswertproblems mit $x_0 = 1, x_1 = 0$ bzw. $x_0 = 0, x_1 = 1$, *definiert* werden.

(c) Der Schwingkreis. Die Schwingungsgleichung tritt auch in vielen anderen Anwendungen auf. Wir diskutieren hier kurz eine Anwendung in der Elektrotechnik, nämlich den *Schwingkreis*. Betrachten wir einen einfachen, geschlossenen Schaltkreis der lediglich aus einer Spule und einem Kondensator besteht.

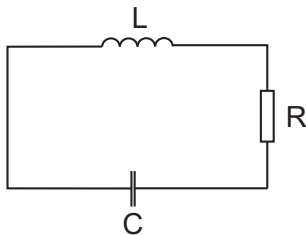


Abbildung 1.3: Schwingkreis

Die Kirchhoffsche Knotenregel zeigt dann, dass die Ströme I_C am Kondensator und I_L in der Spule gleich sind, und die Kirchhoffsche Maschenregel besagt, dass sich die Spannungen am Kondensator U_C und an der Spule U_L aufheben: $U_C + U_L = 0$. Hat der Kondensator die Kapazität C , die Spule die Induktivität L , so sind die Zusammenhänge zwischen U_j und $I := I_j$, $j = L, C$, durch die folgenden Gesetze gegeben:

$$C\dot{U}_C = I_C, \quad L\dot{I}_L = U_L.$$

Diese ergeben somit

$$LC\ddot{I} = LC\ddot{I}_L = C\dot{U}_L = -C\dot{U}_C = -I_C = -I,$$

sodass wir auf eine Schwingungsgleichung für I mit $\omega^2 = 1/LC$ geführt werden. Die Spannungen U_L und U_C genügen ebenfalls dieser Gleichung. Befindet sich zusätzlich ein in Reihe geschalteter Widerstand R im Stromkreis, vgl. Abb. 1.3, so gilt ebenfalls $I_R = I_L$, und die Maschenregel wird zu $U_C + U_L + U_R = 0$. Das Ohmsche Gesetz $U_R = RI_R$ führt dann auf die Schwingungsgleichung mit Dämpfung

$$LC\ddot{I} + RC\dot{I} + I = 0.$$

Hat der Widerstand eine nichtlineare Charakteristik $U_R = R(I_R)$, so folgt entsprechend die Gleichung:

$$LC\ddot{I} + CR'(I)\dot{I} + I = 0.$$

Ein sehr bekanntes Beispiel für diesen Fall ist der *van der Pol-Oszillator*

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

den wir in späteren Kapiteln behandeln werden.

(d) Das mathematische Pendel. Wie in (b) sei jede äußere Kraft mit Ausnahme der Gravitation vernachlässigt.

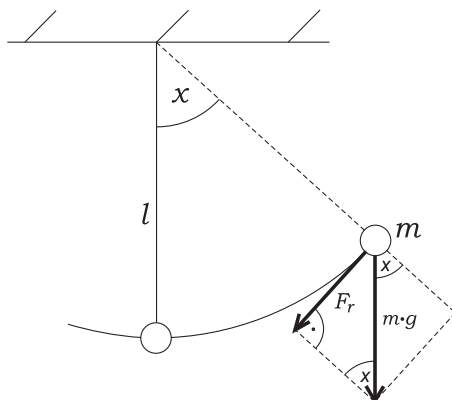


Abbildung 1.4: Das mathematische Pendel

Wir erhalten mit dem 2. Newtonschen Gesetz für die Auslenkung x die Gleichung

$$ml\ddot{x} = -F_r,$$

da die Rücktriebskraft F_r der Auslenkung entgegen wirkt. Anhand von Abb. 1.4 gilt damit

$$F_r = mg \sin x,$$

also schließlich

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Aus dem Satz von Taylor folgt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - O(x^7) \approx x, \quad \text{für kleine Auslenkungen } x,$$

das heißt näherungsweise gilt $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Wir werden durch diese Approximation also wieder auf die Schwingungsgleichung (1.4) geführt. Inwieweit diese Approximation gerechtfertigt ist, werden wir später sehen.

Definition 1.1.1. Eine Differentialgleichung (1.1) heißt **linear**, falls sie linear in allen abhängigen Variablen ist, also in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m)}$. Ansonsten heißt (1.1) **nicht-linear**.

Beispiele (a) und (b) sind somit linear, die von der Pol-Gleichung in (c), und (d) sind hingegen nichtlinear.

In vielen Anwendungen treten Differentialgleichungen in Form von Systemen von Gleichungen auf. Die folgenden Beispiele sollen einen ersten Eindruck dafür vermitteln.

(e) **Das Räuber-Beute-Modell (Volterra–Lotka 1924).** Sei $x(t)$ die Größe der Population der Beute und entsprechend $y(t)$ die Population der Räuber zur Zeit t . Das Volterra–Lotka-Modell für Räuber-Beute-Systeme lautet wie folgt.

$$(RB) \begin{cases} \dot{x} = ax - byx, \\ \dot{y} = -cy + dyx, \end{cases} \quad a, b, c, d > 0.$$

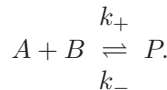
Die Terme ax bzw. $-cy$ repräsentieren wie in (a) Wachstum der Beute bzw. Reduktion der Räuber in Abwesenheit der jeweils anderen Art. Das Produkt xy repräsentiert die Interaktion der Spezies, die mit einer gewissen Häufigkeit zum Tod der Beute und zum Wachstum durch Nahrungsaufnahme der Räuberpopulation führt.

(f) **Das Epidemiemodell von Kermack–McKendrick.** Es repräsentiere $x(t)$ den gesunden Teil der Population einer Spezies, die *Suszeptiblen* (S), $y(t)$ den infizierten Teil, die *Infizierten* (I) und $z(t)$ den immunisierten Teil, *Recovered* (R), zur Zeit t . Die Epidemie sei nicht fatal, führe also nicht zu Todesfällen, und verlaufe schnell gegenüber den Geburts- und Sterbevorgängen in der Population. Das klassische SIR-Modell von Kermack und McKendrick für die Ausbreitung einer solchen Epidemie lautet folgendermaßen:

$$(SIR) \begin{cases} \dot{x} = -axy \\ \dot{y} = axy - by \\ \dot{z} = by \end{cases} \quad a, b > 0.$$

Summiert man $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ auf, so erhält man $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$, was äquivalent zum Erhaltungssatz $x + y + z = c$, mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, ist. Daher kann man das System (SIR) auf ein System für die zwei Unbekannten x und y reduzieren.

(g) **Chemische Kinetik.** Eine reiche Quelle für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die *chemische Kinetik*. Zerfallsreaktionen haben wir schon in Beispiel 1.1 (a) kennengelernt. Ein anderer sehr häufig auftretender Reaktionstyp ist die *Gleichgewichtsreaktion*



Beispiele für solche Reaktionen sind die Dissoziationen von Salzen in wässriger Lösung. Gleichgewichtsreaktionen sind typischerweise *reversibel*, also umkehrbar. Sie werden modelliert durch ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} \dot{c}_A &= -k_+ c_A c_B + k_- c_P, & c_A(0) &= c_A^0, \\ \dot{c}_B &= -k_+ c_A c_B + k_- c_P, & c_B(0) &= c_B^0, \\ \dot{c}_P &= k_+ c_A c_B - k_- c_P, & c_P(0) &= c_P^0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dabei bedeuten die Variablen c_L die Konzentration der Substanz $L = A, B, P$. Die Reaktion von rechts nach links wird durch den Term k_{-CP} als Zerfall modelliert, dies ist eine *Reaktion 1. Ordnung*. Auf der anderen Seite kommt es mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zur Bildung von P nur dann, wenn je ein Molekül A mit einem Molekül B zusammentrifft. Diese Wahrscheinlichkeit ist proportional zum Produkt $c_A c_B$, daher modelliert man die Reaktion von links nach rechts durch den quadratischen Term $k_+ c_A c_B$, man spricht dann von einer *Reaktion 2. Ordnung*.

Dieses System ist gekoppelt, zunächst erscheint keine der Gleichungen redundant zu sein. Durch Addition der ersten bzw. der zweiten Gleichung zur dritten findet man jedoch

$$\dot{c}_A + \dot{c}_P = \dot{c}_B + \dot{c}_P = 0,$$

also

$$c_A(t) + c_P(t) = \text{konstant} = c_A^0 + c_P^0, \quad c_B(t) + c_P(t) = \text{konstant} = c_B^0 + c_P^0.$$

Aus diesen zwei *Erhaltungssätzen* lassen sich z.B. c_A und c_B eliminieren, sodass lediglich eine Differentialgleichung verbleibt, hier die für c_P .

$$\dot{c}_P = k_+(c_A^0 + c_P^0 - c_P)(c_B^0 + c_P^0 - c_P) - k_{-CP} =: r(c_P).$$

Insbesondere im Teil II dieses Buches werden wir Anwendungen aus der chemischen Kinetik eingehender untersuchen.

1.2 Systeme von Differentialgleichungen

Wie bereits in den Beispielen (e)–(g) gesehen, treten häufig *Systeme* von Differentialgleichungen auf. Ein allgemeines System 1. Ordnung wird dargestellt durch:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Mit $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ und $f(t, x) = [f_1(t, x), \dots, f_n(t, x)]^T \in \mathbb{R}^n$ schreibt sich dieses System in Vektornotation als

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Das zugehörige *Anfangswertproblem* (AWP) ist durch

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0,$$

gegeben.

Durch eine geeignete Substitution kann man Differentialgleichungen höherer Ordnung auf ein System erster Ordnung reduzieren. Dazu sei eine explizite Differentialgleichung

$$y^{(m)} = g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(m-1)}) \quad (1.6)$$

m -ter Ordnung gegeben. Man setze

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad \text{es folgt} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(m-1)}) \end{bmatrix},$$

also

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(m-1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ g(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{bmatrix} =: f(t, x). \quad (1.7)$$

Wir haben so das System 1. Ordnung $\dot{x} = f(t, x)$ erhalten, welches äquivalent zu (1.6) ist.

Proposition 1.2.1. *Die Funktion $y \in C^m(J)$ löst (1.6) genau dann, wenn $x \in C^1(J; \mathbb{R}^m)$ das System (1.7) löst.*

Beweis. Es bleibt nur noch die entsprechenden Regularitäten der Lösungen zu beweisen. Sei zunächst $y \in C^m(J)$ eine Lösung von (1.6). Mit der oben eingeführten Substitution $x_j = y^{(j-1)}$ gilt $\dot{x}_j = y^{(j)} \in C^{(m-j)}(J)$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Daraus folgt $x_j \in C^1(J)$, also $x \in C^1(J; \mathbb{R}^m)$.

Hat man andererseits eine Lösung $x \in C^1(J; \mathbb{R}^m)$ des Systems (1.7) gegeben, so gilt $y^{(j)} = \dot{x}_j \in C(J)$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Diese Reduktion auf ein System 1. Ordnung kann ebenso auch für Systeme höherer Ordnung durchgeführt werden. Ist ein System m -ter Ordnung mit Dimension N gegeben, so hat das resultierende System 1. Ordnung die Dimension $n = mN$.

1.3 Fragestellungen der Theorie

Eine allgemeine Theorie für Differentialgleichungen wirft eine Reihe von Fragen auf, von denen wir jetzt einige kommentieren wollen.

1. Wie viele Lösungen einer Differentialgleichung gibt es?

Eine skalare Differentialgleichung m -ter Ordnung hat m Freiheitsgrade, also

m Integrationskonstanten. Sind diese nicht speziell bestimmbar, so gibt es beliebig viele Lösungen. Man spricht dabei von einer m -parametrischen Lösungsschar. Entsprechendes gilt für Systeme.

Eine Möglichkeit, diese Konstanten festzulegen, ist, sich zu einem festen Zeitpunkt t_0 Anfangswerte

$$\frac{d^i}{dt^i} x(t)|_{t=t_0} = x^{(i)}(t_0) = x_{0i}, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

vorzugeben. Ein System dieser Art nennt man ein *Anfangswertproblem*. Daher lautet das allgemeine Anfangswertproblem für ein System 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Eine zweite Möglichkeit, die Integrationskonstanten zu bestimmen, besteht darin, Randwerte festzulegen. Dies führt auf sogenannte *Randwertprobleme*:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ R_0 x(t_0) + R_1 x(t_1) = y, \end{cases} \quad t_0 < t < t_1.$$

Dabei sind t_0 und t_1 gegebene Zeitwerte und $R_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 0, 1$. In diesem Buch werden hauptsächlich Anfangswertprobleme untersucht.

2. Existieren Lösungen von (1.7) lokal oder global?

Diese Frage ist nicht immer leicht zu beantworten; vgl. Kapitel 2.

- Globale Existenz, wie zum Beispiel für

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Die (eindeutige) Lösung ist gegeben durch $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$, sie ist global und es gilt $x \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- Lokale Existenz, wie zum Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

In diesem Fall ist die Lösung $x(t)$ zum Anfangswert $x(0) = 0$ gegeben durch $x(t) = \tan(t)$, wie man durch eine Probe leicht nachweist. Diese Lösung existiert in $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und es gilt $\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} x(t) = \pm \infty$.

Man spricht von einem *blow up* der Lösung, d.h. sie explodiert in den Punkten $t_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2}$.

3. *Eindeutigkeit von Lösungen?*

Wir werden Beispiele kennenlernen, die eine Lösungsschar zu einem festen Anfangswert zulassen. Daher ist in solchen Fällen die Zukunft, also die Lösung zu einem späteren Zeitpunkt, nicht durch die Gegenwart, also den Anfangswert bestimmt. Man sagt dann, dass das System *nicht deterministisch* ist. Als Modelle für physikalische Prozesse sind solche Gleichungen nicht geeignet, da sie dem Prinzip des Determinismus widersprechen. Daher ist es sehr wichtig, Klassen von Gleichungen deren Lösungen eindeutig sind, anzugeben; vgl. Kapitel 2 und 6.

4. *Abhängigkeit der Lösungen von Daten*

Ebenso wichtig wie Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ist ihre Abhängigkeit von den Anfangswerten und Parametern, kurz Daten genannt. Soll ein Anfangswertproblem ein deterministisches physikalisches Modell beschreiben, so sollten kleine Änderungen der Daten nur zu kleinen Änderungen der Lösungen führen. Ist das der Fall, so sagt man, die Lösung hängt stetig von den Daten ab; in Kapitel 4 und 6 wird dies präzisiert. Ähnliches betrifft die Differenzierbarkeit der Lösungen nach den Daten.

5. *Wie berechnet man Lösungen von Differentialgleichungen?*

- Analytisch; vgl. Kapitel 1 für einige Beispiele.
- Numerisch; wichtiger Teil der Numerischen Mathematik.

6. *Qualitative Theorie*

Die qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Theorie dynamischer Systeme befassen sich mit Eigenschaften der Lösungen. So sind u.a. die folgenden Fragen von Interesse:

- Bleiben die Lösungen beschränkt oder explodieren sie?
- Bleiben die Lösungen in einer vorgegebenen Menge?
- Bleiben die Lösungen positiv?
- Zeigen die Lösungen periodisches Verhalten?
- Wie sieht ihre Asymptotik für große Zeiten aus?
- Konvergieren die Lösungen für $t \rightarrow \infty$?
- Wie ändert sich das qualitative Verhalten der Lösungen bei Änderung von Parametern?

Mit einigen dieser Fragen werden wir uns bereits im ersten Teil dieses Buchs beschäftigen, vor allem aber sind diese Gegenstand der Theorie im zweiten Teil.

1.4 Linienelement und Richtungsfeld

Bevor wir uns der analytischen Berechnung von Lösungen von Differentialgleichungen in einigen einfachen Fällen widmen, sollen hier noch zwei Begriffe, *Linienelement* und *Richtungsfeld*, erläutert werden.

Betrachten wir das skalare AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.8)$$

mit $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Angenommen $x(t)$ ist eine Lösung von (1.8). Wird x über die Zeit t parametrisiert, d.h. $\gamma : t \rightarrow [t, x(t)]^\top$, so hat der Tangentenvektor an die Lösungskurve folgende Gestalt:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ f(t, x(t)) \end{bmatrix}, \quad \text{für alle } (t, x(t)) \in J \times \mathbb{R}.$$

Es ist also klar, dass der Anstieg der Kurve γ in jedem Punktepaar $(t, x) \in J \times \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(t, x)$.

Das Zahlentripel (t, x, m) deutet man nun geometrisch wie folgt: $m = f(t, x)$ ist die Steigung der Tangente an γ in (t, x) . Dieses Tripel nennt man ein *Linienelement*. Anschaulich erhält man es, indem man im Punkt (t, x) ein kleines Geradenstück der Steigung m anträgt.

Die Gesamtheit aller Linienelemente zu ausgewählten Punkten $(t, x) \in J \times \mathbb{R}$ nennt man *Richtungsfeld* der Differentialgleichung aus (1.8). Es bietet einen Blick auf den möglichen Verlauf der Lösungskurve(n). Natürlich existieren nun auch Punkte (t, x) , in denen die Steigung überall gleich einem festen Wert c ist. Eine Bezeichnung für die Menge, die nur aus diesen Punkten besteht, liefert uns die folgende Definition.

Definition 1.4.1. Eine Funktion $f(t, x) = c = \text{const}$ heißt **Isokline** zur Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$.

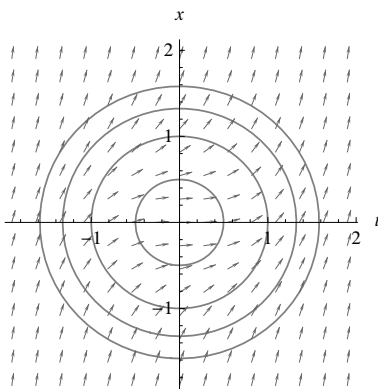
Beispiel.

$$\dot{x} = t^2 + x^2 = f(t, x).$$

Setze $\dot{x} = c = \text{const}$. Dann gilt

$$c = t^2 + x^2.$$

Die Isoklinen sind also Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius \sqrt{c} ; vgl. Abb. 1.5. In allen Punkten *auf* dem Kreis ist der Anstieg gleich c . Variiert man nun $c \in (0, \infty)$, so erhält man eine Isoklinenschar für die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$.

Abbildung 1.5: Richtungsfeld der Differentialgleichung $\dot{x} = t^2 + x^2$

1.5 Trennung der Variablen

Wir bezeichnen eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = h(t)g(x) \quad (1.9)$$

als *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

Es sei ein Anfangswert $x(t_0) = x_0$ gegeben.

Satz 1.5.1. Seien $h : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in (a, b)$, $G(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{g(s)} ds$, sofern $g(x_0) \neq 0$ und $H(t) := \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$. Dann gelten:

1. Ist $g(x_0) = 0$, so ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung auf (α, β) . Es kann jedoch weitere Lösungen geben (Nicht-Eindeutigkeit).
2. Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, sodass die eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$ auf $J_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ mit $x(t_0) = x_0$ durch

$$x(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in J_\delta,$$

gegeben ist.

Beweis. Zu 1.: Das ist trivial, da $0 = \frac{d}{dt}x_0 = h(t)g(x_0) = 0$ gilt. Vgl. auch Beispiel (c) weiter unten für Nicht-Eindeutigkeit.

Zu 2.: Angenommen $x = x(t)$ ist eine Lösung von (1.9) in (α, β) . Da die Funktionen g und h nach Voraussetzung stetig sind, ist auch die Komposition $g \circ x$ stetig. Daher existiert ein $\delta > 0$, mit $g(x(t)) \neq 0$ für alle $t \in J_\delta$. Aus (1.9) folgt somit $\frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = h(t)$, $t \in J_\delta$. Mit den obigen Definitionen für G und H und aus der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = \dot{x}(t)G'(x(t)) = \dot{x}(t)\frac{1}{g(x(t))} = h(t).$$

Damit gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$G(x(t)) - G(x(t_0)) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \quad \text{oder} \quad G(x(t)) = G(x(t_0)) + \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau.$$

Daraus folgt

$$G(x(t)) = H(t), \quad t \in J_\delta, \quad (1.10)$$

da $G(x(t_0)) = G(x_0) = 0$ ist.

Aufgrund von $G'(x(t)) = \frac{1}{g(x(t))} \neq 0$ für alle $t \in J_\delta$ ist die Funktion G streng monoton nahe bei x_0 . Dies stellt die Existenz der Umkehrfunktion G^{-1} zu G sicher, und (1.10) liefert

$$x(t) = G^{-1}(H(t)), \quad \text{für alle } t \in J_\delta. \quad (1.11)$$

Die Lösung $x = x(t)$ ist also durch die explizite Darstellung (1.11) eindeutig bestimmt.

Sei nun $x = x(t)$ durch (1.11) gegeben. Nach Voraussetzung sind g und h stetig, also sind die Funktionen G und H stetig differenzierbar. Dann liefert der Satz von der Umkehrfunktion $x = G^{-1}(H) \in C^1(J_\delta)$. Nun gilt

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(G^{-1}(H(t))) = \left(\frac{d}{dx}G^{-1}\right)(H(t))\dot{H}(t).$$

Nach der Regel für die Differentiation der Umkehrfunktion ergibt sich

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t)))}h(t) = g(G^{-1}(H(t)))h(t) = g(x(t))h(t),$$

also ist $x = x(t)$ definiert durch (1.11) tatsächlich die Lösung von (1.9) zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$. \square

Beispiele. (a)

$$\begin{cases} \dot{x} = (\cos t) \cos^2 x, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos^2 x, & G(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\cos^2 s} ds = \int_0^x \frac{1}{\cos^2 s} ds = \tan x, \\ h(t) &= \cos t, & H(t) &= \int_{t_0}^t \cos \tau d\tau = \int_0^t \cos \tau d\tau = \sin t, \end{aligned}$$

Nach Satz 1.5.1 existiert genau eine Lösung $x(t)$, denn es ist $g(x_0) = \cos^2(0) = 1$, und diese lautet:

$$x(t) = \arctan(\sin(t)).$$

In diesem Fall ist $x(t)$ die globale Lösung, da H und G^{-1} stetig auf \mathbb{R} sind.

(b) Theoretisch berechnet man die Lösung $x(t)$ wie in (a). Praktisch jedoch erspart man sich einige Schritte:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3t^2 x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Trenne die Variablen formal wie folgt:

$$\frac{dx}{x} = 3t^2 dt \quad (*).$$

Integriere die linke Seite bzgl. x , die rechte Seite bzgl. t und erhalte so $\log|x| = t^3 + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ein Freiheitsgrad ist. Daraus folgt $x(t) = \tilde{c}e^{t^3}$, mit $\tilde{c} := \pm e^c$. Zunächst gilt $\tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jedoch ist $x(t) \equiv 0$ auch eine Lösung der Differentialgleichung, welche bei Division durch x in $(*)$ verloren ging. Man sollte sich also vorsehen. Durch Umformungen wie in $(*)$ können leicht Lösungen verloren gehen!

Freilich spielt die triviale Lösung in unserem Anfangswertproblem keine Rolle, da ja $x(0) = 1$ gefordert wird, was letztere ganz offensichtlich nicht erfüllt. Es gilt ferner $1 = x(0) = \tilde{c}e^0 = \tilde{c}$. Damit ist die Lösung durch $x(t) = e^{t^3}$ gegeben.

(c) Eine Differentialgleichung mit $f(t, x) \equiv f(x)$ heißt *autonom*. Wir betrachten das autonome Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

also (1.9) mit $h(t) \equiv 1$ und $g(x) = 3x^{2/3}$. Wegen $g(0) = 0$ impliziert Satz 1.5.1, dass $x(t) \equiv 0$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = 3x^{2/3}$ ist.

Wir untersuchen, ob es weitere Lösungen dieses Anfangswertproblems gibt. Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$\int x^{-2/3} dx = \int 3 dt.$$

Daraus folgt $3x^{1/3} = 3(t+c)$, also gilt $x(t) = (t+c)^3$. Einsetzen des Anfangswertes ergibt $c = 0$, d.h. $x(t) = t^3$ ist neben $x(t) \equiv 0$ eine weitere Lösung.

Dies ist beileibe nicht die einzige weitere, es existiert hier sogar eine Schar von Lösungen zum Anfangswert $x(0) = 0$. Denn die Funktionen

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t \leq a, \\ 0, & t \in [a, b] \text{ mit } a \leq 0, b \geq 0, \\ (t-b)^3, & t \geq b, \end{cases}$$

erfüllen sämtlich die Differentialgleichung $\dot{x} = 3x^{2/3}$ und es gilt $x_{a,b}(0) = 0$. Wir nennen

$$x^*(t) = \begin{cases} t^3, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

die *Maximallösung* und dementsprechend

$$x_*(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ t^3, & t \leq 0 \end{cases}$$

die *Minimallösung* des Anfangswertproblems. Man beachte, dass die Funktion $g(x) = x^{2/3}$ zwar in $x = 0$ eine Nullstelle hat, aber $1/g(x)$ ist integrierbar in einer Umgebung von $x = 0$, besitzt also dort eine Stammfunktion, die außerdem streng monoton ist. Dies ist der mathematische Grund für die Nichteindeutigkeit in diesem Beispiel.

1.6 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \quad (1.12)$$

zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, wobei $a, b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig seien. Die Differentialgleichung (1.12) heißt *homogen* bzw. *inhomogen*, falls $b(t) \equiv 0$ bzw. $b(t) \not\equiv 0$ ist. Sei

$$A(t) := \int_{t_0}^t a(s) ds. \quad (*)$$

Angenommen $x(t)$ ist eine Lösung von (1.12) mit dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$. Wir setzen $u(t) := e^{-A(t)}x(t)$ und differenzieren nach t unter Verwendung von (1.12) und (*):

$$\dot{u}(t) = e^{-A(t)}\dot{x}(t) - \dot{A}(t)e^{-A(t)}x(t) = e^{-A(t)}(a(t)x(t) + b(t) - a(t)x(t)).$$

Daher gilt $\dot{u}(t) = b(t)e^{-A(t)}$. Da $b(\cdot)$ und $e^{-A(\cdot)}$ stetig sind, können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden, und erhalten

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Berechnen wir $u(t_0)$:

$$u(t_0) = e^{-A(t_0)}x(t_0) = x(t_0) = x_0 \text{ nach } (*).$$

Aus der Definition von $u(t)$ folgt nun

$$e^{-A(t)}x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau$$

und damit für die Lösung $x(t)$ die explizite Darstellung

$$x(t) = e^{A(t)}x_0 + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau. \quad (1.13)$$

Insbesondere ist die Lösung eindeutig bestimmt, und man verifiziert durch Nachrechnen, dass $x(t)$ definiert durch (1.13) tatsächlich eine Lösung von (1.12) ist, sogar auf dem ganzen Intervall (α, β) , also ist sie global. Gleichung (1.13) wird als *Formel der Variation der Konstanten* bezeichnet.

Dieser Name resultiert aus den folgenden Überlegungen. Sei $x_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{x}_h = a(t)x_h$ und $x_p(t)$ sei eine spezielle Lösung von (1.12). Dann löst $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ ebenfalls (1.12), denn

$$\dot{x} = \dot{x}_h + \dot{x}_p = a(t)x_h + a(t)x_p + b(t) = a(t)(x_h + x_p) + b(t) = a(t)x + b(t).$$

Aus $\dot{x}_h = a(t)x_h$, Satz 1.5.1 und (*) folgt

$$x_h(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} c = e^{A(t)}c. \quad (1.14)$$

Für die spezielle Lösung x_p wählen wir nun den Ansatz $x_p(t) = e^{A(t)}c(t)$. Wir setzen also in (1.14) $c = c(t)$ und *variieren* damit c . Wegen

$$\dot{x}_p(t) = e^{A(t)}\dot{c}(t) + e^{A(t)}a(t)c(t)$$

und

$$\dot{x}_p(t) = a(t)x_p + b(t) = e^{A(t)}a(t)c(t) + b(t)$$

gilt $\dot{c}(t) = e^{-A(t)}b(t)$, also

$$c(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau,$$

wobei wir $c(t_0) = 0$ gesetzt haben. Die Lösung x_p erhält damit die Darstellung

$$x_p(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau.$$

Daraus folgt mit (1.14)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{A(t)}c + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau,$$

die Darstellungsformel für die allgemeine Lösung von (1.12).

Wir fassen zusammen:

Proposition 1.6.1 (Superpositionsprinzip). *Man erhält alle Lösungen der Differentialgleichung (1.12), indem man zu der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung addiert. Die Lösung des Anfangswertproblems für (1.12) ist durch die Formel der Variation der Konstanten (1.13) gegeben.*

Beweis. Ist $\mathcal{L} \subset C^1((\alpha, \beta), \mathbb{R})$ der Lösungsraum der homogenen Gleichung und sind v und w beliebige Lösungen von (1.12), so gilt offensichtlich $v - w \in \mathcal{L}$. \square

Beispiel.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3t^2x + 2t^2, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

also $a(t) = 3t^2$ und $b(t) = 2t^2$. Mit $A(t) = \int_0^t 3s^2 ds = t^3$ erhalten wir aus (1.13) die eindeutige Lösung

$$x(t) = e^{t^3} \left(1 + 2 \int_0^t e^{-\tau^3} \tau^2 d\tau \right) = e^{t^3} \left(1 + \left[-\frac{2}{3} e^{-\tau^3} \right]_0^t \right) = \frac{5}{3} e^{t^3} - \frac{2}{3},$$

welche auf ganz \mathbb{R} existiert.

1.7 Die Phasenebene

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einer weiteren geometrischen Interpretation von Differentialgleichungen befassen, nämlich mit der Phasenebene für autonome zweidimensionale Systeme erster Ordnung. Betrachte ein zweidimensionales System der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

wobei die stetigen Funktionen f_i gegeben sind. Eine Lösung $(x(t), y(t))$, $t \in J = (a, b)$ beschreibt dann eine Kurve im \mathbb{R}^2 , der sog. *Phasenebene* des Systems (1.15). Der Tangentenvektor an diese Kurve ist im Punkt $(x(t), y(t))$ durch den Vektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (f_1(x(t), y(t)), f_2(x(t), y(t)))$, gegeben, also durch das Vektorfeld f . Dieser ist stets nichttrivial, mit Ausnahme der *stationären Punkte* des Systems, also der Lösungen des Gleichungssystems $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$. Solche Punkte werden auch *Gleichgewichte* oder *Equilibria* des Systems genannt. Equilibria sind die konstanten Lösungen des Systems.

Definition 1.7.1. Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \not\equiv 0$, heißt **erstes Integral** der Differentialgleichung (1.15), falls ϕ entlang der Lösungen von (1.15) konstant ist, d.h. für jede Lösung $(x(t), y(t))$ von (1.15) existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass $\phi(x(t), y(t)) \equiv c$ ist. Die Menge

$$\phi^{-1}(c) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(x, y) = c\}$$

heißt **Niveaumenge** der Funktion ϕ .

Nach Definition 1.7.1 liegt die *Bahn*, die *Trajektorie*, oder der *Orbit* $t \mapsto [x(t), y(t)]^T$ einer Lösung in einer Niveaumenge der Funktion ϕ . Dieser Sachverhalt liefert wertvolle Informationen über das Verhalten der Lösungen, auch wenn man diese nicht explizit kennt. Wir untersuchen nun einige Beispiele.

(a) Volterra–Lotka-Modell.

$$(VL) \begin{cases} \dot{x} = ax - byx, \\ \dot{y} = -dy + cxy, \end{cases} \quad a, b, c, d > 0.$$

Um die 4 Parameter a, b, c, d zu reduzieren, führt man eine *Skalierung* durch. Seien $x(t), y(t)$ Lösungen von (VL). Man setzt $u(s) = \alpha x(\gamma s)$, $v(s) = \beta y(\gamma s)$ und $t = \gamma s$. Differentiation von u und v liefert:

$$\begin{aligned} \dot{u}(s) &= \alpha \gamma \dot{x}(\gamma s) = \alpha \gamma (ax - byx)(\gamma s) \\ &= \alpha \gamma ax(\gamma s) - \alpha \gamma bx(\gamma s)y(\gamma s) = a\gamma u(s) - \frac{b\gamma}{\beta} u(s)v(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{v}(s) &= \beta \gamma \dot{y}(\gamma s) = \beta \gamma (-dy + cxy)(\gamma s) \\ &= -\beta \gamma dy(\gamma s) + \beta \gamma cx(\gamma s)y(\gamma s) = -d\gamma v(s) + \frac{c\gamma}{\alpha} u(s)v(s). \end{aligned}$$

Wählt man nun zum Beispiel $\gamma = \frac{1}{a}$, $\beta = b\gamma = \frac{b}{a}$, $\alpha = c\gamma = \frac{c}{a}$ und $\varepsilon = d\gamma = \frac{d}{a}$, so erhält man das *skalierte Volterra–Lotka-Modell*

$$(SVL) \begin{cases} \dot{u} = u - uv, \\ \dot{v} = -\varepsilon v + uv. \end{cases}$$

Dieses System enthält nur noch den Parameter $\varepsilon > 0$.

Sei nun $(u(t), v(t))$ eine Lösung dieses Problems in einem Zeitintervall $J = (t_0, t_1) \ni 0$, mit Anfangswert $u(0) = u_0 > 0$ und $v(0) = v_0 > 0$. Da u und v aus C^1 sind können wir annehmen, dass $u(t), v(t) > 0$ in J ist; ggf. verkleinere man J . Multipliziert man die Gleichung für u mit $(1 - \varepsilon/u)$, die für v mit $(1 - 1/v)$, so folgt

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right) \dot{u} = \left(\frac{1}{v} - 1\right) \dot{v}.$$

Die Kettenregel impliziert damit

$$\frac{d}{dt}[(u - \varepsilon \log u) + (v - \log v)] = 0, \quad t \in J,$$

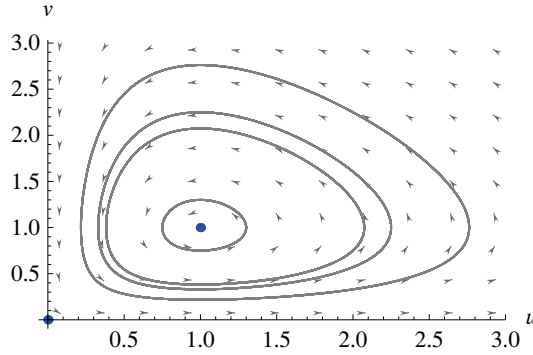
also ist die Funktion

$$\phi(u, v) = u + v - \varepsilon \log u - \log v$$

ein erstes Integral für das skalierte Volterra–Lotka-Modell; vgl. Abb. 1.6.

Es gilt weiter

$$\nabla \phi(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon/u \\ 1 - 1/v \end{bmatrix};$$

Abbildung 1.6: Phasenportrait von (SVL) mit $\varepsilon = 1$

daher besitzt ϕ einen *kritischen Punkt* in $u_* = \varepsilon$ und $v_* = 1$. Wegen $\varepsilon > 0$ ist

$$\nabla^2 \phi(u, v) = \begin{bmatrix} \varepsilon/u^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{bmatrix}$$

positiv definit, also ist ϕ strikt konvex und (u_*, v_*) ist ein globales Minimum in $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Das Paar (u_*, v_*) ist eine *stationäre* Lösung von (SVL), d.h. $\dot{u}(t) = \dot{v}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Da die Niveaumengen von ϕ geschlossene Kurven sind, bleiben alle anderen Lösungen mit Startwert $u_0, v_0 > 0$ positiv. Man beachte, dass sich die Lösungskurven nicht schneiden; dies folgt auch aus dem Eindeutigkeitssatz, den wir in Kapitel 2 beweisen. Wir werden später sehen, dass die nichtstationären Lösungen sogar *periodisch* in t sind, d.h. es gilt $u(t+\tau) = u(t)$ bzw. $v(t+\tau) = v(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei die Periode τ vom Anfangszustand abhängt.

(b) Kermack–McKendrick-Modell.

$$(KK) \begin{cases} \dot{x} = -cxy, \\ \dot{y} = cxy - dy, \end{cases} \quad c, d > 0.$$

Eine Skalierung ergibt hier das System

$$(SKK) \begin{cases} \dot{u} = -uv, \\ \dot{v} = uv - v, \end{cases}$$

und man verifiziert leicht, dass ein erstes Integral von (SKK) durch

$$\phi(u, v) = v + u - \ln u$$

gegeben ist. Sind $u(t)$, $v(t)$ Lösungen von (SKK), so ist ϕ entlang dieser konstant und wir können die Phasenbahnen nun explizit darstellen durch

$$v(u) = \ln u - u + c, \quad c = \text{const.}$$

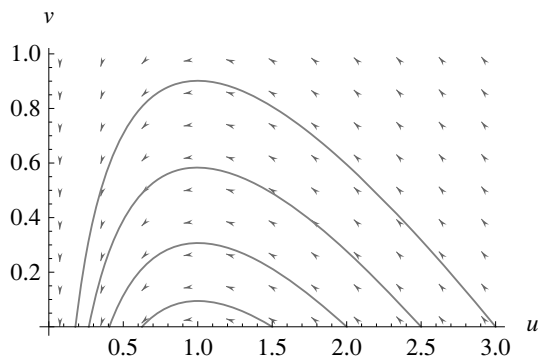


Abbildung 1.7: Phasenportrait von (SKK)

Die stationären Lösungen sind hier $u_* = \text{const}$, sowie $v_* = 0$, d.h. wir haben es hier mit einer ganzen Schar von stationären Lösungen zu tun. Es gilt nun

$$v'(u) > 0 \iff u < 1 \quad \text{und} \quad v'(u) < 0 \iff u > 1.$$

Daraus folgen Monotonie-Eigenschaften der Lösungen in Abhängigkeit vom Anfangswert u_0 :

(i) Sei $u_0 > 1$ und $v_0 > 0$. Dann ist $u(t)$ monoton fallend für alle $t > 0$, denn $u(t), v(t)$ bleiben immer positiv (vgl. Abb. 1.7) und es existiert ein $t_*(u_0, v_0)$ sodass $v(t)$ im Intervall $(0, t_*)$ monoton wachsend ist, und in (t_*, ∞) monoton fallend gegen Null.

(ii) Sei $0 < u_0 < 1$ und $v_0 > 0$. Dann ist wie in (i) $u(t)$ monoton fallend in $(0, \infty)$, wie auch $v(t)$, da $u(t) < 1$ und somit $\dot{v} = v(u - 1) < 0$ für alle $t > 0$ ist.

Der Wert $u_0 = 1$ ist damit ein *Schwellenwert* des Modells, ist $u_0 < 1$ so klingt die Epidemie schlicht ab. Ist hingegen $u_0 > 1$, so bricht sie zunächst aus, und klingt erst ab, nachdem der Anteil der Gesunden $u(t)$ kleiner als 1 geworden ist. Dieses Schwellwert-Verhalten ist typisch in Epidemiemodellen.

(c) Das mathematische Pendel. Wir transformieren die Gleichung für das mathematische Pendel $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ in ein System 1. Ordnung:

$$(P) \begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin u. \end{cases}$$

Ein erstes Integral für (P) erhält man, indem man die erste Gleichung mit $\omega^2 \sin u$, die zweite mit v multipliziert, und addiert. Die Kettenregel ergibt dann

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} v^2 + \omega^2 (1 - \cos u) \right] = 0,$$

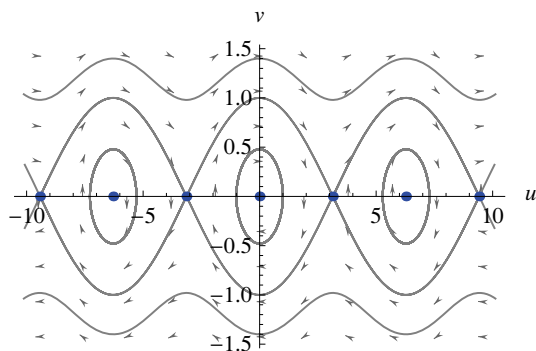


Abbildung 1.8: Phasenportrait von (P)

und somit ist

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos u)$$

ein erstes Integral für (P). ϕ wird *Energiefunktional* von (P) genannt, denn physikalisch entspricht der erste Term in ϕ der kinetischen Energie, da $v = \dot{x}$ die Geschwindigkeit bedeutet, und der zweite Term entspricht der potentiellen Energie des Pendels. Wegen

$$\nabla\phi(u, v) = \begin{bmatrix} \omega^2 \sin u \\ v \end{bmatrix},$$

sind die stationären Lösungen, also $v_* = 0$ und $u_* = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, genau die kritischen Punkte von ϕ . Eine Untersuchung der Hesse-Matrix

$$\nabla^2\phi(u, v) = \begin{bmatrix} \omega^2 \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt das folgende Resultat. Für $\cos u^* = 1$ ist (u_*, v_*) ein absolutes Minimum und für $\cos u^* = -1$ ist (u_*, v_*) ein Sattelpunkt des Energiefunktionals ϕ . Die äußeren unbeschränkten Kurven in Abb. 1.8 beschreiben den Fall des rotierenden Pendels. Die Niveaulinien mit Schnittpunkt in $u = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und $v = 0$ geben den Fall wieder, in dem sich das Pendel für $t \rightarrow \infty$ gegen die obere (instabile) Ruhelage bewegt, also $u(t) \rightarrow (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ für $t \rightarrow \infty$. Die inneren ellipsenförmigen Kurven stellen die periodischen Pendelbewegungen mit einem Ausschlag von $|x| < \pi$ dar.

(d) Das eindimensionale Teilchen im Potentialfeld. In Verallgemeinerung von (c) betrachten wir die Gleichung 2. Ordnung

$$(PF) \quad \ddot{x} + \phi'(x) = 0,$$

wobei $\phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *Potential* heißt. Ein berühmtes Beispiel in der Physik ist $\phi_{DW}(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2$, das aufgrund seiner Form häufig *Double-Well-Potential* genannt wird.

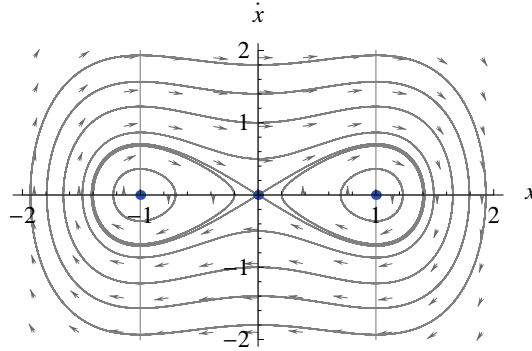


Abbildung 1.9: Phasenportrait von (PF) für ϕ_{DW}

Die Energie ist hier

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \phi(x),$$

also wieder kinetische plus potentielle Energie, denn längs einer Lösung gilt

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = (\ddot{x}(t) + \phi'(x(t)))\dot{x}(t) = 0.$$

Das zugehörige Phasendiagramm ist in Abbildung 1.9 dargestellt.

Übungen

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \log(t^2 + x^2),$$

und zeichnen Sie einige Lösungen ein. Wie sehen die Isoklinen aus?

2. Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und skizzieren Sie ihren Verlauf.

(a) $\dot{x} = t \sin(x)$;

(b) $\dot{x} = [2x(x - 1)]/[t(2 - x)]$.

3. (a) Führen Sie die Gleichung $\dot{x} = f(at + bx + c)$ durch eine geeignete Transformation auf eine Gleichung mit getrennten Variablen zurück.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = (t + x)^2$, $x(0) = 0$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $\dot{x} = (t + 3 - x)^2$;

4. (a) Transformieren Sie die Gleichung $\dot{x} = f(x/t)$, $t > 0$, in eine Gleichung mit getrennten Variablen.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $\dot{x} = \frac{x}{t}(\frac{x}{t} + 1)$.

5. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $\dot{x} + 3t^2x = 6t^5, \quad x(0) = 5;$

(b) $\dot{x} + t/(2x) = 3x/(2t), \quad x(1) = 1.$

6. Zeigen Sie, dass sich die *Bernoulli-Gleichung* $\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha$ für $\alpha \neq 0, 1$, a, b stetig, mittels einer Transformation der Form $u = x^p$ mit geeignetem p auf eine lineare Gleichung zurückführen lässt. Was ist mit den Fällen $\alpha = 0, 1$?

7. Die *Riccati-Gleichung* $\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 = \varphi(t)$ mit a, b, φ stetig kann unter Kenntnis einer speziellen Lösung $x_*(t)$ mit dem Ansatz $x(t) = y(t) + x_*(t)$ auf eine Bernoulli-Gleichung für $y(t)$ zurückgeführt werden. Lösen Sie auf diese Weise das Anfangswertproblem

$$\dot{x} - (1 - 2t)x + x^2 = 2t, \quad x(0) = 2.$$

8. Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, und eine Differentialgleichung 2. Ordnung durch

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

definiert.

(a) Schreiben Sie diese Gleichung als System 1. Ordnung;

(b) Geben Sie ein erstes Integral des Systems an.

9. Bestimmen Sie für die Gleichung 2. Ordnung $\ddot{x} + x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ ein erstes Integral und skizzieren Sie das Phasenportrait.

10. In einer Schale werden a Gramm Bakterien zu b Gramm einer Nährlösung gegeben. Die Bakterien vermehren sich proportional (mit Faktor α) zur vorhandenen Biomasse, d.i. die Menge an Bakterien, und zur vorhandenen Nährlösung. Letztere wird proportional zur Biomasse verbraucht (mit Faktor β). Wie lauten die Zeitfunktionen $x(t)$ der Biomasse und $y(t)$ der Nährlösung? Nach wie vielen Stunden ist die Hälfte der Nährlösung verbraucht, wenn $a = 0.5g$, $b = 5g$, sowie $\alpha = 1.2 \times 10^{-3}(gh)^{-1}$ und $\beta = 9 \times 10^{-2}h^{-1}$ sind?