3. Übung zur Komplexen Analysis

1. Man zeige: $\int\limits_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist.

   Anleitung: Integrieren Sie e^{-z^2} über den Rand des Kreissegments, das gegeben ist durch die drei Randkurven $\gamma_1(t) = t$, $0 \le t \le R$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ und $-\gamma_3(t) = te^{i\frac{\pi}{4}}$, $0 \le t \le R$. Schätzen Sie das Integral über γ_2 ab. Sie dürfen dazu $\cos 2t \ge 1 - \frac{4t}{\pi}$ für $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ verwenden. Lassen Sie R gegen $+\infty$ streben.

2. Man zeige: Für $0 \le a < 1$ ist

$$\int_0^\infty e^{-(1-a^2)x^2}\cos(2ax^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+a^2)} \quad .$$

3. (a) Auf $\{z : |z| < R\}$ sei $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ gegeben. Sei $0 < \rho < R$ und $M_\rho(f) = \max\{|f(z)| : |z| = \rho\}$ und $r = \frac{\rho}{1+M_\rho(f)}$. Zeigen Sie, dass f keine Nullstelle in $\{z : |z| < r\}$ hat.

   Hinweis: Benutzen Sie $|a_n| \le \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}$, um $f(z) - 1$ abzuschätzen.

   (b) Mithilfe des vorigen Teiles gebe man einen Radius r für eine holomorphe Funktion $f \not\equiv 0$ auf $\{z : |z| < R\}$ an, sodass f auf $\{z : |z| < r\}$ keine Nullstellen außerhalb von 0 hat.

4. Sei z_0 eine Nullstelle der holomorphen Funktion f. Man zeige: Genau dann kann man aus f lokal bei z_0 die holomorphe k-te Wurzel ziehen (d.h. eine in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion h mit $h^k = f$ finden), wenn k die Ordnung der Nullstelle teilt.

5. Auf dem Gebiet G seien f, g holomorph. Es gelte $f \cdot g \equiv 0$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$ ist.

6. Es sei G ein beschränktes Gebiet und f und g seien holomorph auf G und stetig auf $G \cup \partial G$. Sind f und g nullstellenfrei in $G \cup \partial G$ und gilt $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \partial G$, dann ist $f(z) = cg(z)$ mit $|c| = 1$.

7. Es sei G ein beschränktes Gebiet und f holomorph auf G und stetig auf $G \cup \partial G$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von der Gebietstreue, dass die Maxima von

$$(\mathrm{Re} f)^4 + (\mathrm{Im} f)^4$$

   auf ∂G angenommen werden.

8. Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und geben Sie im Falle eines Pols dessen Ordnung an:

$$\frac{1}{1-e^z} \text{ bei } z_0 = 0,\ \frac{ze^{iz}}{(z^2+b^2)^2} \text{ bei } z_0 = ib\ (b > 0),\ (\sin z + \cos z - 1)^{-2} \text{ bei } z_0 = 0,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right) \text{ bei } z_0 = i,\ \frac{1}{z - \sin z} \text{ bei } z_0 = 0.$$