Birkhäuser

Jan W. Prüss · Mathias Wilke

Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme

Birkhäuser

Jan W. Prüss
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
06099 Halle (Saale)
Deutschland
jan.pruess@mathematik.uni-halle.de

Mathias Wilke
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
06099 Halle (Saale)
Deutschland
mathias.wilke@mathematik.uni-halle.de

ISBN 978-3-0348-0001-3 e-ISBN 978-3-0348-0002-0
DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer Basel ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

www.birkhauser-science.com

Prolog

Seit der Formulierung der Grundgesetze der klassischen Mechanik durch Newton im 17. Jahrhundert bilden gewöhnliche Differentialgleichungen ein exzellentes Werkzeug in der mathematischen Modellierung physikalischer Prozesse. Heute findet dieser Typ von Gleichungen in allen Naturwissenschaften – einschließlich der Life Sciences – in ständig wachsendem Maße Anwendung. Daher gehört ein Kurs über die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen unabdingbar zur Grundausbildung von Mathematikern, Physikern und Ingenieuren, und sollte auch im Studium der Life Sciences und der Wirtschaftswissenschaften präsent sein.

Natürlich gibt es in der deutschsprachigen Literatur diverse sehr etablierte Lehrbücher, sodass der Leser dieses Buches sich fragen wird, warum noch eines. Um diese Frage zu beantworten, sollte man zur Kenntnis nehmen, dass sich die Schwerpunkte der Theorie mit den Jahren verschoben haben, nicht zuletzt durch die enormen Fortschritte in der Numerik und Computertechnologie, speziell durch die Entwicklung moderner Computeralgebrasysteme. So erscheint es uns heute nicht mehr angebracht zu sein, in einem Kurs über gewöhnliche Differentialgleichungen viel Zeit mit expliziten Lösungen, mit klassischen Integrationsmethoden, Potenzreihenentwicklungen, etc. zu verbringen. Hierzu verweisen wir auf die klassische Literatur zu gewöhnlichen Differentialgleichungen und auf die zu speziellen Funktionen.

Vielmehr sollte das Verständnis des *qualitativen Verhaltens* der Lösungen im Vordergrund stehen. Computeralgebrasysteme sind zur Visualisierung von Lösungen ein sehr gutes, zeitgemäßes Werkzeug, und sollten daher unbedingt in solchen Kursen zur Illustration eingesetzt werden. Wir sehen heute den Schwerpunkt von Modulen zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen in den Aspekten *Nichtlinearität* und *Dynamik*. Studierende der Mathematik und der Physik sollten frühzeitig mit dem Begriff der Stabilität vertraut gemacht werden, und elementare Techniken aus diesem Bereich kennenlernen. Deshalb werden auch Randwertprobleme – mit Ausnahme periodischer Randbedingungen, die in dynamischen Systemen natürlicherweise durch periodisches Verhalten der Lösungen auftreten, – in diesem Buch nicht betrachtet, denn sie spielen für die Dynamik eine untergeordnete Rolle, und können viel effektiver im Rahmen von Veranstaltungen über Funktionalanalysis oder über partielle Differentialgleichungen behandelt werden.

Ein weiterer Aspekt, der uns dazu bewogen hat, dieses Lehrbuch zu verfassen, resultiert aus der Neuorganisation der Studiengänge im Rahmen der Modularisierung für die Bachelor- und Masterprogramme. Dies erfordert eine Straffung der bisherigen Lehrveranstaltungen und somit auch eine Neu-Orientierung hinsichtlich der zu vermittelnden Lernziele und Lerninhalte. Durch die größere Praxisorientierung dieser Studiengänge muss auch der Aspekt der *Modellierung* stärkere Berücksichtigung finden.

Dieses Lehrbuch trägt diesen Entwicklungen Rechnung. Es ist aus Vorlesungen entstanden, die der erstgenannte Autor an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg und an anderen Universitäten über gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme gehalten hat. Das Buch ist in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil *Gewöhnliche Differentialgleichungen* hat einen Umfang von 2 SWS Vorlesung + 1 SWS Übung, und ist in Halle im 3. Semester in die Analysis III integriert. Der zweite Teil *Dynamische Systeme* wird in Halle im 5. Semester als Bachelor-Vertiefungsmodul ebenfalls mit dem Umfang 2+1 SWS angeboten. Interessierte Studenten können daran ihre Bachelor-Arbeit anschließen. Natürlich ist es auch möglich, das gesamte Buch als Grundlage für ein 4+2-Modul im dritten oder im vierten Semester des Bachelor-Studiums zu nehmen. Der zweite Teil kann alternativ als Text für ein Seminar über Dynamische Systeme verwendet werden.

Für den ersten Teil werden nur die Grundvorlesungen in Analysis und moderate Kenntnisse der linearen Algebra vorausgesetzt, das wichtigste Hilfsmittel ist das *Kontraktionsprinzip von Banach*. Daher ist dieser Kurs auch für Physiker, Ingenieure, sowie für Studenten der Life Sciences und der Wirtschaftswissenschaften mit den entsprechenden Vorkenntnissen zugänglich. Aus didaktischen Gründen werden hier zwei Beispiele, nämlich das Pendel und das Volterra–Lotka System, jeweils mit oder ohne Dämpfung, in verschiedenen Zusammenhängen wiederholt diskutiert. Dies soll aufzeigen, was die einzelnen Sätze leisten, und dass nur aus ihrem Zusammenspiel ein vollständiges Bild der Dynamik eines Modells entsteht. Der zweite Teil wendet sich hauptsächlich an Studenten der Mathematik und Physik, da hier ein etwas tiefergehendes Verständnis der Analysis benötigt wird. Mathematisch sind hier das *Kompaktheitskriterium von Arzéla-Ascoli* und der *Satz über implizite Funktionen* in Banachräumen zentral. Auf weitere funktionalanalytische Methoden wird hier dem Kenntnisstand der anvisierten Leser- bzw. Hörerschaft entsprechend nicht zurückgegriffen. In diesem Teil werden anspruchsvollere Anwendungen zu den jeweiligen Themen diskutiert.

Der Aufbau dieses Lehrbuchs ist folgendermaßen. In Teil I wird mit einer Einführung in die Thematik begonnen, in der grundlegende Begriffsbildungen eingeführt und Problemstellungen erläutert werden – die bereits in den Teil II hineinragen –, und es werden viele Beispiele angegeben, die zeigen sollen, dass gewöhnliche Differentialgleichungen omnipräsent und für die Modellierung von konkreten dynamischen Systemen unerlässlich sind. Wir betonen bereits in der Einführung geometrische Aspekte, um Studenten auf die Herausforderungen, welche die Analysis eines konkreten Systems bietet, vorzubereiten, aber auch um die Schönheit der Theorie zu illustrieren. Kapitel 2 befasst sich mit Existenz und Eindeutigkeit, der Satz von Picard und Lindelöf steht im Vordergrund. Differential- und Integral-Ungleichungen – wie das Lemma von Gronwall – werden schon hier entwickelt, um Methoden zum Beweis globaler Existenz zur Verfügung zu haben. Danach behandeln wir die Theorie linearer Systeme, ohne auf die Jordan-Zerlegung von Matrizen zurückzugreifen, da diese heute nicht mehr generell in Modulen zur linearen Algebra gelehrt wird. Um das *invariante Denken* zu schulen, verwenden wir die Spektralzerlegung linearer Operatoren, die bereitgestellt wird. In Kapitel 4 geht es um stetige und differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von Daten und Parametern. Dieses Thema ist leider unbeliebt, aber von großer Bedeutung, nicht nur für die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, sondern auch in anderen Bereichen der Mathematik, speziell in der Differentialgeometrie und für die Theorie der Charakteristiken im Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. In diesem Buch beweisen wir die entsprechenden Resultate und arbeiten auch wichtige Anwendungen aus. Das letzte Kapitel des ersten Teils ist der elementaren Stabilitätstheorie gewidmet. Es werden beide Teile des Prinzips der linearisierten Stabilität, das in Anwendungen von großer Bedeutung ist, im Detail bewiesen, und die sehr leistungsfähige Methode von Ljapunov wird in einfachen Fällen ausgeführt. Der erste Teil endet mit einer vollständigen Analysis eines aktuellen dreidimensionalen Virenmodells.

Teil II ist für die Vertiefung von Teil I, also die qualitative Theorie dynamischer Systeme auf der Basis gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgesehen. Kapitel 6 dient einer Ergänzung des ersten Teils: Es enthält den Existenzsatz von Peano, die Konstruktion nichtfortsetzbarer Lösungen, und den allgemeinen Satz über stetige Abhängigkeit. Das Thema Eindeutigkeit wird vertieft behandelt, und wir zeigen, wie verallgemeinerte Differentialungleichungen in konkreten Anwendungen Eindeutigkeit – und damit Wohlgestelltheit – ergeben. Ist man gewillt, nur mit rechten Seiten aus C^1 zu arbeiten, so kann man ohne Weiteres auf dieses Kapitel verzichten. Kapitel 7 befasst sich mit invarianten Mengen, einem zentralen Konzept in der Theorie dynamischer Systeme. Wir erhalten als Anwendung Exponentiallösungen positiv homogener Gleichungen, den Satz von Perron und Frobenius, und stellen den Zusammenhang mit vektorwertigen Differentialungleichungen her. Letztere tragen erheblich zum Verständnis des qualitativen Verhaltens quasimonotoner Systeme bei, die ein Sub- und ein Superequilibrium besitzen. Diese Resultate werden dann zur vollständigen Analysis eines Mehrklassen-Epidemiemodells verwendet. In Kapitel 8 stehen nochmals Stabilität und Ljapunov-Funktionen im Mittelpunkt. Es werden die Sätze von Ljapunov über Stabilität, von La Salle über Limesmengen, sowie der Hauptsatz über gradientenartige Systeme bewiesen, und auf Probleme der mathematischen Genetik und der chemischen Kinetik angewandt. Im letzten Abschnitt des Kapitels behandeln wir die Lojasiewicz-Technik, und zeigen ihre Bedeutung anhand von Systemen zweiter Ordnung mit Dämpfung in der Mechanik. Die Theorie von Poincaré-Bendixson und die Index-Theorie für zweidimensionale autonome Systeme stehen im Zentrum von Kapitel 9. Sie werden auf die Lienard-Gleichung – inklusive der van-der-Pol-Gleichung – angewandt, sowie auf Modelle für biochemische Oszillatoren, die neueren Datums sind.

Kapitel 10 enthält die Konstruktion der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeiten an hyperbolischen Equilibria, und Beweise des erweiterten Prinzips der linearisierten Stabilität an einer Mannigfaltigkeit normal stabiler bzw. normal hyperbolischer Equilibria. Es werden Anwendungen auf Diffusionswellen, inklusive der Konstruktion von Wellenfronten für die Fisher-Gleichung, und auf Probleme der klassischen Mechanik gegeben. Die Floquet-Theorie periodischer Gleichungen ist Schwerpunkt von Kapitel 11. Dazu wird der Funktionalkalkül für lineare Operatoren in $\mathbb{C}^n$ hergeleitet und zur Konstruktion der Floquet-Zerlegung verwendet. Mittels der Floquet-Multiplikatoren wird das Prinzip der linearisierten Stabilität für periodische Lösungen hergeleitet, und die Abhängigkeit periodischer Lösungen von Parametern mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen studiert. Kapitel 11 kann übersprungen werden, es wird später nur in Abschnitt 12.5 zur Stabilitätsanalyse bei Hopf-Verzweigung verwendet. Die grundlegenden Sätze der Verzweigungstheorie, also die Sattel-Knoten-, die Pitchfork-, und die Hopf-Verzweigung sowie ihre Bedeutung für Stabilität, sind Gegenstand von Kapitel 12. Diese Resultate werden anhand Hamiltonscher Systeme und eines Problems aus der Reaktionstechnik illustriert. Das letzte Kapitel befasst sich schließlich mit Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten, auf die man durch Anwendungen, wie Zwangsbedingungen in der Mechanik, instantane Reaktionen in der chemischen Kinetik, und generell durch Probleme mit stark unterschiedlichen Zeitskalen geführt wird. Als Anwendung der Invarianzmethoden aus Kapitel 7 zeigen wir Wohlgestelltheit für Gleichungen auf C^1-Mannigfaltigkeiten, betrachten danach Linearisierung an Equilibria, leiten die invariante Form der Gleichung für Geodätische her, und diskutieren den Zusammenhang mit Zwangskräften in der Mechanik. Zum Abschluss des Kapitels geben wir eine Analysis des Zweikörperproblems, die historisch zu den großen Erfolgen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zählt.

Die meisten in diesem Buch bewiesenen Resultate werden durch – zum Teil neue – Anwendungen erläutert. Mit diesen soll gezeigt werden, wie man mit gewöhnlichen Differentialgleichungen konkrete Systeme modellieren und (manchmal) erfolgreich analysieren kann. Jeder Abschnitt enthält Übungsaufgaben, die der Student nach Studium der entsprechenden vorhergehenden Abschnitte in der Lage sein sollte zu lösen. Die Diagramme und Schemata – insbesondere die Phasenportraits – sind überwiegend mit dem Computeralgebrasystem *Mathematica* generiert worden. Für letztere wurde u.a. das Shareware-Package *DiffEqsPackages* verwendet, das man sich von der *Wolfram Research* Homepage herunterladen kann. Der Epilog enthält Kommentare zur Literatur, sowie Anregungen und Hinweise für weitergehende Studien.

Die angegebene Literatur ist zwangsläufig subjektiv ausgewählt und kann aufgrund der Historie und der Größe des Gebiets per se nicht vollständig sein. Der erste Teil des Literaturverzeichnisses enthält daher Lehrbücher und Monographien zur Thematik zum weiteren Studium, während der zweite Teil Beiträge angibt, aus denen Resultate entnommen wurden, oder die zum weiteren Studium konkreter Probleme anregen sollen.

Wir möchten uns vor allem bei Prof. Dr. G. Simonett und Dr. R. Zacher für ihre wertvollen Hinweise und Kommentare bedanken, sowie bei den Doktoranden S. Pabst und S. Meyer für ihren Einsatz beim Korrekturlesen. Unser Dank geht außerdem an Prof. Dr. H. Amann und an den Birkhäuser-Verlag, insbesondere an Dr. Th. Hempfling und Mitarbeiter.

Jan Prüss und Mathias Wilke Halle, im April 2010

Inhaltsverzeichnis

Notationen

In diesem Buch werden Standardnotationen verwendet. So bezeichnen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ wie üblich die natürlichen, reellen und komplexen Zahlen, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. $\mathbb{K}^n$ ist der Vektorraum der n-dimensionalen Spaltenvektoren, $\mathbb{K}^{m\times n}$ der Raum der $m\times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Die Einheitsmatrix wird mit I bezeichnet, und ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ so schreiben wir häufig $\lambda - A$ anstelle von $\lambda I - A$. Wie üblich bedeuten $\det A$ die Determinante und $\operatorname{sp} A$ die Spur von A, sowie $N(A)$ den Kern und $R(A)$ das Bild von A. A^{T} bezeichnet die transponierte Matrix zu A und $A^* := \bar{A}^{\mathsf{T}}$ ihre Adjungierte. Wir verwenden elementare Aussagen der linearen Algebra wie den Dimensionssatz für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$\dim N(A) + \dim R(A) = n$$

ohne Kommentar. Eine Projektion P in $\mathbb{K}^n$ erfüllt $P^2 = P$, und induziert mittels $x = Px + (x - Px)$ die Zerlegung $\mathbb{K}^n = R(P) \oplus N(P)$ von $\mathbb{K}^n$ in eine direkte Summe; gilt $P = P^*$ so heißt P orthogonal. Ist V ein Teilraum eines Vektorraums X, so bezeichnet $W = X \ominus V$ ein direktes Komplement von V in X, also $X = V \oplus W$. Der Aufspann einer Teilmenge A eines Vektorraums wird wie üblich mit $\operatorname{span} A$ benannt.

Das Skalarprodukt in $\mathbb{K}^n$ wird mit $(\cdot|\cdot)$ bezeichnet. $|\cdot|$ bedeutet sowohl den Betrag reeller oder komplexer Zahlen, als auch eine nicht näher spezifizierte Norm auf $\mathbb{K}^n$. Für $1 \le p < \infty$ ist $|x|_p = (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p}$ die l_p-Norm auf $\mathbb{K}^n$, und $|x|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1,\ldots,n\}$ die l_∞-Norm.

Mit $B_r(x_0)$ bzw. $\bar{B}_r(x_0)$ werden die offene bzw. abgeschlossene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}^n$ bzgl. einer Norm bezeichnet. Ist $D \subset \mathbb{K}^n$, so bedeuten $\bar{D}$, ∂D, $\operatorname{int} D$ den Abschluss, den Rand bzw. das Innere von D. Der Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{K}^n$ zu einer Menge $D \subset \mathbb{K}^n$ wird mit $\operatorname{dist}(x, D)$ bezeichnet.

Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so bedeutet $C^k(J;\mathbb{R}^n)$ den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktion $u : J \to \mathbb{R}^n$, und wir setzen $C(J;\mathbb{R}^n) := C^0(J;\mathbb{R}^n)$; schließlich bezeichnet $C^\omega((a,b);\mathbb{R}^n)$ den Raum der auf (a,b) reell analytischen Funktionen. Analog sind die Räume $C^k(G;\mathbb{R}^n)$ für eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^m$ erklärt.

Alle weiteren Notationen werden im Text erläutert.