Serie 3

"Besprechung": Donnerstag, 26.3

3.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ein Gebiet, $f \in C(G;\mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2. Argument. Sei $y \in C^1((a,b);\mathbb{R}^d)$ eine Lösung von $y' = f(t,y)$. Zeigen Sie: Falls es eine Folge $(t_n)_{n=0}^\infty$ mit $\lim_{n\to\infty}(t_n, y(t_n)) = (b, y_b) \in G$ gibt, so kann y über b hinaus fortgesetzt werden, d.h. es gibt ein $b' > b$ und ein $\widetilde{y} \in C^1((a,b'),\mathbb{R}^d)$ mit $\widetilde{y}' = f(t,\widetilde{y})$ auf (a,b') und $y = \widetilde{y}$ auf (a,b). *Hinweis:* Zeigen Sie $\lim_{t\to b-} y(t) = y_b$ mittels Widerspruch. Betrachten Sie hierzu Folgen $(\tau_n)_n$ mit $t_n \le \tau_n$ und $\|y(\tau_n) - y_b\|_{\mathbb{R}^d} = \varepsilon > 0$ sowie $\|y(t) - y_b\|_{\mathbb{R}^d} \le \varepsilon$ für $t \in [t_n, \tau_n]$. Verwenden Sie, daß f in einer Umgebung von (b, y_b) beschränkt ist.

3.2. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(J \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2. Argument. Es gelte zusätzlich für ein $\omega \ge 0$

$$(f(t,x),x)_2 \le \omega\|x\|_2^2 \qquad \forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}^d,$$

wobei $(\cdot,\cdot)_2$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet und $\|\cdot\|_2$ entsprechend die euklidische Norm. Zeigen Sie: Jede Lösung y von $y' = f(t,y)$ existiert bis an den rechten Rand von J. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto v(t) := \|y(t)\|_2^2$ und zeigen Sie $v'(t) \le 2\omega v(t)$.

3.3. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $J = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $t_0 \in J$. Eine Funktion $y_+ \in C^1(J;\mathbb{R})$ heißt *Oberlösung*, falls

$$y_+'(t) > f(t, y_+(t)) \qquad \forall t > t_0$$

(entsprechend wird eine *Unterlösung* definiert). Zeigen Sie: Falls $y_+ \in C^1(J;\mathbb{R})$ eine Oberlösung ist und $y \in C^1(J;\mathbb{R})$ eine Lösung der ODE $y' = f(t,y)$ ist, dann gilt: Falls $y(t_0) < y_+(t_0)$, dann gilt $y(t) < y_+(t)$ für alle $t \in (t_0, b)$.

3.4. In der Vorlesung wurde behauptet, daß die Lösung des AWP

$$y' = -2 + \sin\frac{1}{y} \qquad y(0) = 1, \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

bei $t \approx 0.7$ kollabiert. Zeigen Sie, daß tatsächlich ein Kollaps bei $t^* \le 1$ eintreten muß. *Hinweis:* Verwenden Sie $y_+(t) = 1 - (1-\varepsilon)t$ (für $\varepsilon > 0$ beliebig klein) als Oberlösung und überlegen Sie sich damit, daß die anderen Fälle nicht eintreten können.

3.5. Eine *skalare* ODE ist *separabel*, falls sie von der Form

$$y' = f(y)g(t)$$

ist. Betrachten Sie das AWP $y' = f(y)g(t)$ mit $y(t_0) = y_0$. Definieren Sie die Stammfunktionen F und G durch die Bedingungen

$$F'(y) = \frac{1}{f(y)}, \qquad G'(t) = g(t).$$

a) Zeigen Sie: Falls f und g stetig (bei y_0 und t_0) sind und $f(y_0) \ne 0$, dann ist das AWP (eindeutig) lösbar. Die Lösung ist charakterisiert durch

$$F(y(t)) - G(t) + c = 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt ist. Was ist c? Was passiert im Fall $f(y_0) = 0$?

b) Lösen Sie das AWP

$$y' = y^2, \qquad y(0) = y_0$$

c) Lösen Sie das AWP ("logistische ODE")

$$y' = y(1-y), \qquad y(0) = y_0$$

d)

$$y' = (\cos t)\cos^2 y, \qquad y(0) = 0$$

Bemerkung: auf der Vorlesungshomepage gibt es ein Extrablatt zum Üben (freiwillig!) mit einer Liste von separablen ODEs (samt Lösungen).