Satz 3.2.4 Sei $f \in L(V, W)$. Dann gilt:

(a) Das Bild $f(U)$ jedes Unterraumes $U \subset V$ ist ein Unterraum von W.

(b) Das Urbild $f^{-1}(T)$ jedes Unterraumes $T \subset W$ ist ein Unterraum von V.

(c) $f([(m_i)_{i\in I}]) = [(f(m_i))_{i\in I}]$ für alle Familien $(m_i)_{i\in I}$ in V.

(d) Ist f injektiv, so liegt mit $g: f(V) \to V: f(x) \mapsto x$ eine lineare Abbildung vor.

Beweis. (a) Wir wenden das Unterraumkriterium 2.3.2 an: Es gilt $f(o) \in f(U)$. Jeder Unterraum enthält o. Wählen wir $x', y' \in f(U)$ beliebig, so gibt es Vektoren $x, y \in U$ mit $x' = f(x)$, $y' = f(y)$. $f(U) := \{f(x) : x \in U\}$. Für alle $c \in K$ folgt $x + cy \in U$, was $x' + cy' = f(x) + cf(y) = f(x + cy) \in f(U)$ ergibt. Ersteres gilt laut Unterraumkriterium 2.3.2 und die letzte Gleichheit folgt aus der Linearität.

(b) Wir wenden wieder das Unterraumkriterium an: Es gilt $o \in f^{-1}(T)$. $o_W \in T$ und $f(o_V) = o_W$. Für alle $x, y \in f^{-1}(T)$ und alle $c \in K$ ist $f(x + cy) = f(x) + cf(y) \in T$, also $x + cy \in f^{-1}(T)$. Die Gleichheit folgt aus der Linearität von f, die Inklusion aus dem Unterraumkriterium und daraus, dass T einer ist. $f^{-1}(T) = \{x : f(x) \in T\}$.

(c) Sei $w \in W$. ... Dann ist $w \in f([(m_i)_{i\in I}])$ äquivalent zur Existenz einer Linearkombination

$$w \overset{(1)}{=} f\left(\sum_{i\in I} x_i m_i\right) \overset{(2)}{=} \sum_{i\in I} x_i f(m_i) \text{ mit } x_i \in K$$

was aber andererseits zu $w \in [(f(m_i))_{i\in I}]$ gleichwertig ist.
(1) $\Leftrightarrow$ $f([(m_i)_{i\in I}]) = \{ f(\sum_{i\in I} x_i m_i) : x_i \in K \}$ und
(2) $\Leftrightarrow$ Die Summe (bzw. I) ist „endlich" und f ist linear. Weiters $[(f(m_i))_{i\in I}] = \{ \sum_{i\in I} x_i f(m_i) : x_i \in K \}$.
Beide Inklusionen „$\subseteq$", „$\supseteq$" sind gezeigt.
(d) Die Injektivität von f stellt sicher, dass es für jeden Vektor $x' \in f(V)$ genau ein $x \in V$ mit $f(x) = x'$ gibt. „Für jeden", weil $f(V) = \{ f(x) : x \in V \}$ und die Injektivität liefert bloß noch die Eindeutigkeit. Daher ist g wohldefiniert. ... Nach (a) ist die Definitionsmenge von g ein Vektorraum. ... Unterraum, also auch Vektorraum. Die Linearität von g folgt nun aus Satz 3.2.2: Für alle $x, y \in V$ und alle $c \in K$ gilt

$$g(f(x) + c f(y)) \overset{(1)}{=} g(f(x + cy)) \overset{(2)}{=} x + cy \overset{(2)}{=} g(f(x)) + c g(f(y)).$$

(1) $\Leftrightarrow$ f ist linear. (2) $\Leftrightarrow$ $V \xrightarrow{f} W \supseteq f(V) \xrightarrow{g} V$.
g ist nun linear, weil $f(x), f(y)$ aus der Definitionsmenge von g sind. $\square$