Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 05 – Schwache Topologien"
"Lecture 06 – Beispiele schwacher Topologien"

---

06 / 1: Man betrachte den Banachraum $L^\infty(0,1)$, und erinnere sich dass $L^\infty(0,1) = L^1(0,1)'$. Damit haben wir auf $L^\infty(0,1)$ drei in natürlicher Weise gegebene Topologien: die Normtopologie, die w-Topologie, und die w^*-Topologie.

(a) Der Funktionenraum $C([0,1])$ ist ein Teilraum von $L^\infty(0,1)$. In welcher(n) der obigen Topologien ist er abgeschlossen, und in welcher(n) nicht ?

(b) Zeige, dass die w^*-Topologie verschieden von der w-Topologie ist.

(c) Ein Banachraum heißt *reflexiv*, wenn die kanonische Abbildung $\iota : X \to X''$ surjektiv ist. Zeige, dass $L^1(0,1)$ nicht reflexiv ist.

06 / 2:* Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Da die kanonische Einbettung $\iota : X \to X''$ den Raum X isometrisch und bijektiv auf $\iota(X)$ abbildet, ist sie ein Homöomorphismus von $(X, \|.\|_X)$ auf $(\iota(X), \|.\|_{X''}|_{\iota(X)})$.

Zeige auf zwei Arten, dass ι auch ein Homöomorphismus von $(X, \sigma(X, X'))$ auf $(\iota(X), \sigma(X'', X')|_{\iota(X)})$ ist (hier schreiben wir $\sigma(X'', X')$ für $\sigma(X'', \iota_1(X'))$ wobei $\iota_1 : X' \to X'''$ die kanonische Einbettung ist). Nämlich: (1) betrachte explizit Nullumgebungsbasen der entsprechenden Topologien; (2) argumentiere mittels der Transitivitätseigenschaft initialer Topologien.
