3.9.11 Lemma (Cauchysches Konvergenzkriterium). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit reellen oder komplexen Summanden ist genau dann konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \text{ für alle } n > m \geq N. \qquad (3.14)$$

Beweis. Da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig metrische Räume sind, ist die Konvergenz der Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ mit der Tatsache gleichbedetend, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Das ist ja im Satz 3.5.8 (Cauchysches Konvergenzkriterium) gestanden. Wegen $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ ist das aber zu (3.14) äquivalent. $S_n - S_m = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$. Daher

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon. \qquad \square$$