11. Gg.: d Pseudometrik auf X Menge,

$U_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$;

Zz.: $\mathcal{B} := \{U_r(x) : x \in X, r > 0\}$ topologische Basis

Ww.: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ Basis, wenn

- $\forall O \in \mathcal{T} \, \exists (B_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I : O = \bigcup_{i \in I} B_i$
- oder: 1, $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$ ✓

  2, $\forall U, V \in \mathcal{B} \, \forall x \in U \cap V \, \exists W \in \mathcal{B}$:

  $x \in W \subseteq U \cap V$

Seien also $U, V \in \mathcal{B}$, dann $\exists x, y \in X \, \exists r, s > 0$:
$U = U_r(x)$, $V = U_s(y)$. Sei $z \in U, V$, dann

- $d(x, z) < r$,
- $d(y, z) < s$.

Sei $t := \min(r - d(x,z), s - d(y,z)) \cdot 1/2$, dann
zeige, dass $W := U_t(z) \subseteq U_r(x) \cap U_s(y) = U \cap V$:

oBdA. $t = (r - d(x,z)) \cdot 1/2$
Sei $w \in U_t(z)$, dann $d(z, w) < t$

$\Rightarrow d(z,w) + d(x,z)/2 < r/2$
$\Rightarrow 2\,d(z,w) + d(x,z) < r$
$\Rightarrow d(x, w) \leq \underline{d(x,z) + d(z,w)} < r$

Andererseits, $r - d(x,z) \leq s - d(y,z)$

$\Rightarrow s + \cancel{d(x,z)} \geq r + d(y,z) > 2d(z,w) + \cancel{d(x,z)} + d(y,z)$

92. Zz.: $\overline{E} = ((E^c)^\circ)^c$

$\Leftrightarrow \overline{E}^c = (E^c)^\circ$

$= \{x \in E^c : \exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq E^c\}$

$$\overset{?}{=} \{x \in X : \exists U \subseteq X : (\exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq U) \wedge \underbrace{U \cap E = \emptyset}_{U \subseteq E^c}\}$$

$\overset{!}{=} \overline{E}^c$, wobei

$$\overline{E} = \{x \in X : \exists U \subseteq X : (\exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq U) \Rightarrow U \cap E = \emptyset\}.$$

Was ist ?

trivial !

Zz.: $\partial E = (E^\circ \cup (E^c)^\circ)^c$

$= (E^\circ)^c \cap ((E^c)^\circ)^c = (E^\circ)^c \cap \overline{E} = \overline{E} \setminus E^\circ$.

93. Ges.: $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum

Zz.: $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \subseteq B : A^\circ \subseteq B^\circ, \overline{A} \subseteq \overline{B}$

- $A^\circ = \{ x \in A : \exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq A \}$

  $x \in A^\circ \Rightarrow x \in K \subseteq A \subseteq B \Rightarrow x \in B^\circ$

- $\overline{A} = \{ x \in X : \forall U \subseteq X : (\exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq U)$
  $\Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \}$

$\Rightarrow \emptyset \neq U \cap A \subseteq U \cap B \neq \emptyset$

Zz.: $\forall (A_i)_{i \in I} \in X^I, I := \{1, \dots, n\}$:

1, $\bigcap_{i \in I} A_i^\circ = (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ$

„$\subseteq$". $x \in \bigcap_{i \in I} A_i^\circ \Rightarrow \forall i \in I \; \exists K_i \in \mathcal{T} : x \in K_i \subseteq A_i$

$\overset{\#I < \infty}{\Rightarrow} x \in \underbrace{\bigcap_{i \in I} U_i}_{\in \mathcal{T}} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

„$\supseteq$". $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ = \{ x \in \bigcap_{i \in I} A_i : \exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \}$

$\Rightarrow \exists K \in \mathcal{T} : \forall i \in I : x \in K \subseteq A_i$

$\Rightarrow \forall i \in I \; \exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq A_i$

2, $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$

„$\subseteq$". Sei $x \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \{ x \in X :$

$\exists i \in I : \forall U \subseteq X : (\exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq U) \Rightarrow U \cap A_i \neq \emptyset \}$

$\Rightarrow x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} =$

$$\{x \in X : \forall U \subseteq X : (\exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq U) \Rightarrow \underbrace{U \cap \bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset}\}$$

$$\exists i \in I : U \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} (U \cap A_i) \neq \emptyset$$

„$\supseteq$" Sei nun $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ und angenommen,

$\nexists i \in I : \forall U \subseteq X : (\exists K \in \mathcal{T} : x \in K \subseteq U) \Rightarrow U \cap A_i \neq \emptyset$, d.h.

$\forall i \in I : \exists U_i \subseteq X : (\exists K_i \in \mathcal{T} : x \in K_i \subseteq U_i) \wedge U_i \cap A_i = \emptyset$,

$$\overset{\#I < \infty}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcap_{i \in I} U_i}_{\in \mathcal{T}} \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \quad \lightning$$

Gilt „=" auch für $\#I = \infty$?

Nein, betrachte

1, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-1/n, 1/n\}$ ist nicht abgeschlossen,

2, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-1/n, 1/n) = \{0\}$ ist nicht offen,

94. Gg.: X Menge, $A \mapsto \overline{A}$ Abbildung auf $\mathcal{P}(X)$,

1, $\emptyset = \overline{\emptyset}$,

2, $\forall A \subseteq X: \overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

3, $\forall A \subseteq X: A \subseteq \overline{A}$,

4, $\forall A, B \subseteq X: \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Zz.: $\mathcal{T} := \{A^c : \overline{A} = A \subseteq X\}$ Topologie auf X

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

- $\emptyset^c = X \overset{1.}{\Rightarrow} X \in \mathcal{T}$

- $X^c = \emptyset$, $X \subseteq \overline{X} \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow \overline{X} \subseteq X \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$

(ii) $\forall U, V \in \mathcal{T}: U \cap V \in \mathcal{T}$.

Seien $U, V \in \mathcal{T}$, dann $\overline{U^c} = U^c$, $\overline{V^c} = V^c \subseteq X$,

$$\overline{(U \cap V)^c} = \overline{U^c \cup V^c} \overset{4.}{=} \overline{U^c} \cup \overline{V^c} = U^c \cup V^c = (U \cap V)^c.$$

(iii) $\forall (O_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I: \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Sei $(O_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$, dann gilt $\forall i \in I: O_i^c = \overline{O_i^c} \subseteq X$,

„$\subseteq$“ $\Leftarrow$ 3.

„$\supseteq$“: Sei $x \in \overline{(\bigcup_{i \in I} O_i)^c}$, dann gilt $\forall U_x$ Umgebung von x:

$\bigcap_{i \in I} O_i^c \cap U_x \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall i \in I: O_i^c \cap U_x \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{O_i^c} = O_i^c \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} O_i^c = (\bigcup_{i \in I} O_i)^c$.

95. Def.: Produkttopologie auf $X \times Y$, mit (X, Υ), (Y, Υ') topologische Räume wird von der topologischen Basis $(B_i \times C_j)_{(i,j) \in I \times J}$, mit $(B_i)_{i \in I}$, $(C_j)_{j \in J}$ Basis von Υ bzw. Υ', erzeugt.

Gg.: (X, Υ) top. R.

Zz.: (X, Υ) Hausdorfraum $\Leftrightarrow$
$D := \{(x,x) : x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$

(X, Υ) Hausdorfraum
$:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X,\ x \neq y : \exists U_x, U_y \subseteq X,\ U_x \cap U_y = \emptyset :$
U_x, U_y Umgebung von x bzw. y

„$\Rightarrow$": $\exists (B_i)_{i \in I}, (C_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{B}$ Basis von Υ,

$$U_x = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad U_y = \bigcup_{j \in J} C_j$$

$\Rightarrow$ $U_x \times U_y \in \Upsilon \times \Upsilon$
$\Rightarrow$ $U_x \times U_y$ offen
$\Rightarrow$ $\bigcup_{\substack{U_x, U_y \\ \text{Umgebungen von} \\ x \neq y,\ \in X}} (U_x \times U_y)$ offen und $\overset{!}{=} D^c$, weil

$\nexists x, y \in X,\ x \neq y : U_x \cap U_y \neq \emptyset$

„$\Leftarrow$": analog

96. Zz: $(X, \mathcal{T})$ Hausdorfraum $\Leftrightarrow \underbrace{\bigcap_{\substack{U \text{ abgeschlossene} \\ \text{Umgebung von } x}} U}_{=: S_x} = \{x\}$

$(X, \mathcal{T})$ Hausdorfraum $:\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in X,\ x \neq y : \exists U_x, U_y \subseteq X,\ U_x \cap U_y = \emptyset :$

U_x, U_y Umgebungen von x bzw. y

„$\Rightarrow$": Sei $x \in X$, und angenommen, $\exists y \in S_x : y \neq x$,

dann gilt für U_x, U_y Umgebungen, dass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Also $y \notin U_x$, also $y \notin S_x$ ↯

„$\Leftarrow$": Sei nun $S_x = \{x\}$ für $x \in X$ und $x \neq y \in X$.

Angenommen, $\forall U_x, U_y$ Umgebungen von x bzw. y:

$U_x \cap U_y \neq \emptyset$.

$\Rightarrow S_{x,y} = S_x \cap S_y \neq \emptyset \Rightarrow x = y$ ↯

97. Ges.: $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $\forall x \in X : \{x\}^c \in \mathcal{T}$, $(X, \mathcal{T})$ kein Hausdorffraum

d.h. $\exists x, y \in X,\ x \neq y : \forall U_x, U_y$ Umgebungen von x bzw. y:

$$U_x \cap U_y \neq \emptyset.$$

Sei $\mathcal{T} := \{M \subseteq \mathbb{N} : \# M^c < \infty\} \cup \{\emptyset\}$, $X := \mathbb{N}$.

(i) $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{T}$ ✓

(ii) Sei $(O_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$, dann $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$, weil

$$\# \left(\bigcup_{i \in I} O_i\right)^c = \# \bigcap_{i \in I} O_i^c \leq \# O_i^c < \infty, \text{ für } i \in I.$$

(iii) Seien $U, V \in \mathcal{T}$, dann $U \cap V \in \mathcal{T}$, weil

$$\# (U \cap V)^c = \# (U^c \cup V^c) \leq \# U^c + \# V^c < \infty.$$

- $\forall x \in X : \{x\}^c \in \mathcal{T}$, weil $\# (\{x\}^c)^c = 1 < \infty$

- Seien $x, y \in \mathbb{N}$, oBdA. $x < y$, und U_x, U_y Umgebungen von x bzw. y, dann

$\exists K_x, K_y \in \mathcal{T} : x \in K_x \subseteq U_x,\ y \in K_y \subseteq U_y$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Seien } S_x := K_x \cap [x, \infty) \\ \phantom{\text{Seien }} S_y := K_y \cap [y, \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \# S_x, \# S_y = \infty.$$

Wäre $S_x \cap S_y = \emptyset$, dann $\infty = \# S_x^c \leq \# K_x^c$ $\lightning$.

$\Rightarrow U_x \cap U_y \neq \emptyset.$

98. Gg.: $f: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$

(a) Gg.: $f(X) \subseteq Z \subseteq Y$

Zz.: f stetig $\Leftrightarrow$ $g: (X, \mathcal{T}) \to Z \subseteq (Y, \mathcal{T}')$ stetig,
$(Z, \mathcal{T}_Z)$ Relativtopologie

„$\Rightarrow$": Sei $g(x) \in Z$ und $U \subseteq Z \subseteq Y$ Umgebung von $g(x)$.
$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow}$ $g^{-1}(U)$ Umgebung von x.

„$\Leftarrow$": Def.: Seien $f_i: (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig,
$\bigcap_{i \in I} (Y_i, \mathcal{T}_i)$ initiale Topologie

Def.: Relativtopologie / Spurtopologie $Z \subseteq Y$, wird durch
$\iota: Z \to Y$ Kanonische Einbettung induziert.

Sei $O \in \mathcal{T}'$ offen, so auch $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{T}_Z$.
Schließlich, weil $f(X) \subseteq Z$, ebenfalls $f^{-1}(O) = g^{-1}(\iota^{-1}(O))$.

(b) Gg.: f stetig, $Z \subseteq X$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ Relativtopologie

Zz.: $f|_Z: (Z, \mathcal{T}_Z) \to (Y, \mathcal{T}')$ stetig

Sei $O \in \mathcal{T}'$ offen, so auch $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$. Weil
$\forall A \subseteq Z: A \in \mathcal{T}_Z \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{T}: A = \iota^{-1}(B) = B \cap Z$,

$$\Rightarrow A := f|_Z^{-1}(O) = \underbrace{f^{-1}(O)}_{=: B} \cap Z.$$

99. Gg.: $\mathcal{U}$ Ultrafilter auf $X \neq \emptyset$, $A \subseteq X$

Zz.: $A \in \mathcal{U} \,\dot\vee\, A^c \in \mathcal{U}$

Es kann nicht $A, A^c \in \mathcal{U}$, weil sonst $\underbrace{A \cap A^c}_{\emptyset} \in \mathcal{U}$ ↯

Angenommen, $A \notin \mathcal{U}$, dann gilt $\forall T \subseteq A: T \notin \mathcal{U}$.
Angenommen, $A^c \notin \mathcal{U}$, dann gilt $\forall T \subseteq A^c: T \in \mathcal{U}$.

Sei $\mathcal{U}' := \mathcal{U} \cup \{A\} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{S}$, wobei

$\mathcal{O} := \{O \subseteq X : A \subseteq O\}$,

$\mathcal{S} := \{\bigcap_{i=1}^{n} F_i : n \in \mathbb{N}, (F_i)_{i=1}^{n} \in (\mathcal{O} \cup \mathcal{U})^n\}$

$\mathcal{U}'$ ist ein echter Oberfilter von $\mathcal{U}$:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{U}'$. Es müsste $\emptyset \in S$, also oBdA.
$\exists F_1, F_2 \in \mathcal{U} \cup \{A\} : F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

- 1.Fall. $F_1, F_2 \in \mathcal{U}$. $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$
- 2.Fall $F_1 \in \mathcal{U}$, $F_2 \supseteq A$. $F_1 \cap F_2 \supseteq F_1 \cap A \neq \emptyset$, weil sonst $B \subseteq A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$ ↯
- 3.Fall $F_1 \supseteq A$, $F_2 \in \mathcal{U}$. ✓
- 4.Fall $F_1, F_2 \supseteq A$. $F_1 \cap F_2 \supseteq A \neq \emptyset$

(ii) $\forall M, N \in \mathcal{U}' : M \cap N \in \mathcal{U}'$. ✓

(iii) $\forall M \in \mathcal{U}' : M \subseteq N \Rightarrow N \in \mathcal{U}'$. ✓

100. Def.: $\mathcal{F}$ „freier" Filter auf X $:\Leftrightarrow \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$

Def.: $\# X = \infty$, $\mathcal{K} := \{ T \subseteq X : \# T^c < \infty \}$ „Kofiniter" Filter.

Zz.: $\mathcal{K}$ Kofiniter Filter auf X, $\# X = \infty$, ist ein Filter. ✓

Zz.: $\mathcal{F}$ freier Filter auf $X \Leftrightarrow \mathcal{F} \supseteq \mathcal{K}$

„$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{K}$, dann $\exists K \in \mathcal{K} : K \notin \mathcal{F}$, und $\exists n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X : K = \{x_1, \dots, x_n\}^c$.

Nun $\exists i \in \{1, \dots, n\} : \forall F \in \mathcal{F} : x_i \in F$, sonst $\exists F \in \mathcal{F} : x_1, \dots, x_n \notin F$, also $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq F^c$.

$\Leftrightarrow K \supseteq F \in \mathcal{F} \Rightarrow K \in \mathcal{F}$ ↯

$\Rightarrow x_i \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

„$\Leftarrow$": Seien $F_x := \{x\}^c$, dann $\# F_x^c = 1 < \infty$, also $F_x \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$, für $x \in X$.

Allerdings, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq \bigcap_{x \in X} F_x = \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \right)^c = X^c = \emptyset$.