Analysis 3, 11.Übung, 13.01.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 89. *This is an exercise*

Aufgabe 90. *Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & 0 < x < 1, \\ ax - 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ *schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwachen Ableitungen. Zeigen Sie: Für* $u(\boldsymbol{x}) = \log |\boldsymbol{x}|$ *und* $\nu_i(\boldsymbol{x}) = \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^2}$ *ist* ν_i *die schwache Ableitung* $D^i u$ *in* $\mathbb{R}^n$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 91. *Sind* $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, *so ist* $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ *mit* $D_i(uv) = D_i uv + uD_i v$

Lösung. Trivial!

Aufgabe 92. *Verschwindet für eine Funktion* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *die schwache Ableitung der Ordnung* n, *so ist* f *ein Polynom der Ordnung* $n - 1$ *fast überall.*
Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Testfunktion als Summe der n*-ten Ableitung einer Testfunktion und einer Linearkombination der Funktionen* $\Psi_0^{(l)}, l < n, \Psi_0$ *wie im Beweis von 6.1.4. dargestellt werden kann und berechnen Sie* $\int x^k \xi^{(l)}(x)dx$ *für Testfunktionen* ξ *und* $k \leq l$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 93. *Zeigen Sie, dass aus der Existenz der schwachen Ableitung der Ordnung 2 im Allgemeinen für* $n \geq 2$ *nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1 folgt.*
Hinweis: Betrachten Sie eine Funktion $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.
Zeigen Sie, dass für $n = 1$ *aus der Existenz einer schwachen* k*-ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen* l*-ter Ordnung für* $l < k$ *folgt.*

Lösung. Trivial!

Aufgabe 94. *Zeigen Sie, dass* $f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ *genau dann in* $W^{m,p}(\Omega)$ *liegt, wenn die Abbildungen* $\varphi \mapsto \int_\Omega f D^\alpha \varphi d\lambda^n$ *fpr* $|\alpha| \leq m$ *stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der* L^q*-Norm nach* $\mathbb{R}$ *ist.*
Hinweis: Verwenden Sie, dass der Dualraum von L^p *der* L^q *ist, das heißt jede beschränkte lineare Abbildung von einem dichten Teilraum des* L^p *nach* $\mathbb{C}$ *ist von der Form* $\varphi \mapsto \int \varphi g$ *mit* $g \in L^q$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 95. *Ein Punkt* $x \in \mathbb{R}^n$ *heißt Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge* E *von* $\mathbb{R}^n$, *wenn* x *Lebesguepunkt der Funktion* $\mathbb{1}_{E\cup\{x\}}$ *ist.*
Zeigen Sie: Ist jeder Punkt $x \in [0,1]^n$ *ein Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge* E *von* $\mathbb{R}^n$, *so gilt* $\lambda^n(E) \geq 1$.
Gibt es eine messbare Teilmenge E *von* $\mathbb{R}$, *für die* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *die Menge der Dichtepunkte von* E *ist?*

Lösung. Trivial!

Aufgabe 96. *Ist X ein Fixpunktraum und Y ein Retrakt von X, so ist Y ein Fixpunktraum.*

Lösung. Trivial!

Aufgabe 97. *Zeigen Sie (Satz von Perron-Frobenius): Jede $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} \geq 0$ für $1 \leq i, j \leq n$ hat einen Eigenwert $\lambda \geq 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$.*

Lösung. Trivial!

Aufgabe 98. *Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 &= x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{4} &= x_2 \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 99. *Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung u der Gleichung*

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x)$$

in $C[-1, 1]$ gibt.

Lösung. Trivial!