4. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 11.01.2021

4

4.1 ROCKET SCIENCE

Letzte Woche haben wir gezeigt, dass die mit der Galileitransformation kompatible Lagrangefunktion $L(q, v, t) = mv^2/2$ ist. Unter Lorentztransformationen (in allen Bezugssystemen gibt es eine Maximalgeschwindigkeit) kommt man auf

$$L(q, v, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{4.1}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $-c \leqslant v \leqslant c$. Um nun bei der nächsten Party sagen zu können dass Sie Raketenwissenschaften studieren (und die Wartezeit bis dahin zu verkürzen):

a) Berechnen Sie den kanonischen Impuls p.

b) Zeigen Sie

$$H(q, p, t) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \tag{4.2}$$

Hinweis: Rechnen Sie auch rückwärts vom gegeben H weg. Entwickeln Sie H für großes c (oder kleines $1/c$) und finden Sie so die relativistische Energiekorrektur $\propto p^4$ zur kinetischen Energie.

c) Berechnen Sie die Poisson Klammer $\{H, L_z\}$. *Hinweis: Die Wurzel sollte Ihnen nun Sorgen machen. Wie bekommen Sie die Wurzel weg? Schauen Sie noch einmal über das Beispiel.*

4.2 3-ATOMIGES MOLEKÜL

Betrachten Sie Oszillationen eines 3 atomigen Moleküls in einer Dimension (fig. 4.1). Modellieren Sie das System mit durch Federn (Federkonstante k) verbundenen Massen (m_1, m_2) (siehe Skizze) und benutzen Sie die Auslenkungen aus der Ruhelage x_1, x_2 und x_3 als generalisierte Koordinaten.

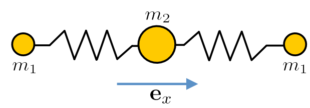

FIGURE 4.1: *Mechanisches Model eines 3 atomigen Molekäls in 1D*

a) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion $H(x_i, p_i)$ des Systems (hier einfach T+V) an und bestimmen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

b) Berechnen Sie die Fundamentalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems: Sie drücken zuerst die Impulse $p_i = m\dot{x}_i$ durch die Koordinaten aus und erhalten mit dem Ansatz $x_i = c_i e^{i\omega t}$ (Plenum/Folien) ein lineares Gleichungssystem mit einer 3×3 Koeffizienten Matrix (Durch $p_i = m\dot{x}_i$ reduziert sich das 6×6 System der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf 3×3). Welche der Eigenmoden (Eigenvektoren berechnen!) stellt eine Translation (oder ruhende Lösung) dar, welche eine gegenphasige Schwingung der äußeren Atome und wo schwingt das mittleres Atom gegenphasig zu den äußeren Atomen?

4.3 PHASENRAUMPORTRAIT DES TEILCHENS AUF EINER HÜGELLANDSCHAFT

Wir erinnern uns an das Teilchen in einer Hügellandschaft *1.3)*, mit Masse m, $x \in \mathbb{R}$ und

$$y = \cos(ax), \qquad \mathbf{F}_G = -mg\hat{e}_y. \tag{4.3}$$

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}) = T - V$ auf, berechnen den kanonischen Impuls p und führen eine Legendretransformation durch um den Hamiltonian $H(x, p)$ zu erhalten.

b) Entwickeln Sie die Hamiltonfunktion als $x_0 + x$ für kleine x an den Stellen $ax_0 = 0$, $ax_0 = \pi$, sowie $ax_0 = -\pi/2$ und $ax_0 = \pi/2$ (bis zur ersten nicht-trivialen Ordnung in x und p) und betrachten Sie auch den Grenzfall $p \to \infty$. Berechnen Sie für alle diese Fälle die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen; Sie können nun $m \equiv a \equiv g \equiv 1$ setzen.

c) Zeichnen Sie mit den erhaltenen Lösungen ein Phasenraumportrait. Nahe der Stellen $ax_0 = 0$, $ax_0 = \pi$, sowie $ax_0 = -\pi/2$ und $ax_0 = \pi/2$ sollten Sie den Zusammenhang zwischen der Trajektorie im Phasenraum, der Trajektorie im Ortsraum, und den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erklären können. *Hinweis: Sollten Sie hier Schwierigkeiten haben, finden Sie in vielen Lehrbüchern oder dem Internet diese Aufgabe für das Pendel gelöst.*

FIGURE 4.2: *Nicht das Phasenraumportraits eines Teilchens auf einer Hügellandschaft, sondern* Der Wanderer über dem Nebelmeer *(Caspar David Friedrich)*

4.4 SPASS MIT POISSON KLAMMERN

a) Zeigen Sie dass Poisson Klammern die Jacobi-Identität erfüllen.

b) Berechnen Sie $\{L_x, y\}$ und $\{L_y, p_z\}$. *Hinweis: Nicht zwingend notwendig, aber für ihr weiteres Studium hilfreich ist es, sich hier mit dem Levi-Civita-Symbol oder Epsilon-Tensor vertraut zu machen.*

c) Zeigen Sie $\{L_z, L_x\} = L_y$. Wenn zwei Komponenten des Drehimpulses $\mathbf{L}$ erhalten sind, ist es dann auch die dritte Komponente? *Hinweis: Vielleicht hilft Ihnen hier die Jacobi-Identität.*

d) Erinnern Sie sich an das Teilchen im Yukawa-Potential vom 2.Tutorium (2.4). Die Hamiltonfunktion dieses Systems in Kugelkoordinaten lautet:

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2(\theta)}\right) - \alpha Q^2 \frac{e^{-\beta m r}}{r}$$

Zeigen Sie explizit dass sowohl die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\phi} = p_\phi$ als auch $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2(\theta)$ erhalten sind, sprich $\{L_z, H\}=0$ und $\{L^2, H\}=0$.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
4.1 / 4.2 / 4.3 a) b) / 4.3 c) / 4.4 a) / 4.4 b) c) d)