Kapitel 8

Ljapunov-Funktionen und Stabilität

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad t \geq t_0, \tag{8.1}$$

wobei $t_0 \geq 0$ und $x_0 \in G$ sind. Lösungen sind in diesem Kapitel nicht notwendig eindeutig. Ist $x(t)$ eine nichtfortsetzbare Lösung, so sei ihr Existenzintervall mit $J(x)$ bezeichnet, sowie $J_+(x) = J(x) \cap [t_0, \infty)$.

Wir haben bereits in Kapitel 5 die Bedeutung von Funktionen $V(x)$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi(t) = V(x(t))$ für jede Lösung $x(t)$ von (8.1) fallend ist, kennengelernt. Dieses Kapitel dient der Vertiefung der Theorie der Ljapunov-Funktionen.

8.1 Ljapunov-Funktionen

In diesem Abschnitt sollen einige grundsätzliche Eigenschaften und Beispiele für solche Funktionen V diskutiert werden. Wir beginnen mit der

Definition 8.1.1. *Sei $V : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$ stetig. V heißt* **Ljapunov-Funktion** *für* (8.1)*, falls die Funktion*

$$\varphi(t) = V(t, x(t)), \quad t \in J_+(x), \tag{8.2}$$

fallend ist, für jede Lösung $x(t)$ von (8.1)*.*

Da man die Lösungen von (8.1) im Allgemeinen nicht kennt, ist es praktisch unmöglich direkt zu zeigen, dass ein V eine Ljapunov-Funktion ist – das liegt auch daran, dass V in Definition 8.1.1 nur als stetig vorausgesetzt wurde. Ist hingegen V aus $C^1(\mathbb{R}_+ \times G)$, dann ist es auch die in (8.2) definierte Funktion φ und

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme,*
Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_8, © Springer Basel AG 2010

die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}\dot\varphi(t) &= (\partial_t V)(t,x(t)) + (\nabla_x V(t,x(t))|\dot x(t)) \\ &= (\partial_t V)(t,x(t)) + (\nabla_x V(t,x(t))|f(t,x(t))).\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Beziehung hängt wie V und f nur von t und x ab, es ist daher sinnvoll, die folgende Funktion zu definieren

$$\dot V(t,x) = (\partial_t V)(t,x) + (\nabla_x V(t,x)|f(t,x)), \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G. \tag{8.3}$$

$\dot V$ heißt **orbitale Ableitung** von V längs Lösungen von (8.1). Es ist klar, dass $V \in C^1$ genau dann eine Ljapunov-Funktion für (8.1) ist, wenn $\dot V(t,x) \le 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in G$ gilt. Man beachte, dass diese Charakterisierung nicht mehr die Kenntnis der Lösungen von (8.1) voraussetzt, sondern nur von den Funktionen V und f Gebrauch macht.

Da man in Anwendungen nicht immer mit C^1-Ljapunov-Funktionen auskommt, ist es zweckmäßig den Begriff der orbitalen Ableitung allgemeiner zu halten.

Ist $V : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$ stetig, so definieren wir

$$\dot V(t,x) = \limsup_{h\to 0_+} \frac{1}{h}[V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)], \quad t \ge 0,\ x \in G; \tag{8.3'}$$

$\dot V(t,x)$ heißt wieder **orbitale Ableitung** von V längs (8.1). Wie zuvor hängt $\dot V$ nur von V und f ab (sowie von t und x), verwendet also ebenfalls nicht die Lösungen von (8.1). Leider ist es in dieser Allgemeinheit nicht mehr richtig, dass $\dot V(t,x) \le 0$ auf $\mathbb{R}_+ \times G$ äquivalent dazu ist, dass V eine Ljapunov-Funktion für (8.1) ist. Schränkt man sich aber auf Funktionen V ein, die lokal Lipschitz in x sind, so ist die Situation besser, denn es gilt das

Lemma 8.1.2. *Sei $V : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz in x.*
Dann sind äquivalent:

1. *V ist eine Ljapunov-Funktion für* (8.1)*;*
2. *Es gilt $\dot V(t,x) \le 0$ für alle $t \ge 0$, $x \in G$.*

Ist dies der Fall, und $x(t)$ eine Lösung von (8.1)*, so erfüllt $\varphi(t) := V(t,x(t))$ die Gleichung*

$$D^+\varphi(t) = \dot V(t,x(t)) \tag{8.4}$$

für alle $t \in J_+(x)$.

Beweis. Mit Lemma 6.4.1 genügt es, die Relation (8.4) zu zeigen. Dazu sei eine Lösung $x(t)$ von (8.1) sowie ein $t \in J_+(x)$ fixiert. Wähle $U = [t, t+\delta) \times B_\delta(x(t)) \subset \mathbb{R}_+ \times G$ derart, dass

$$|V(s,x) - V(s,y)| \le L|x-y|$$

für alle $s \in [t, t+\delta)$, $x, y \in B_\delta(x(t))$ gilt und sei $h_0 > 0$ so gewählt, dass $h_0 < \delta$ und $x[t, t+h_0] \subset B_\delta(x(t))$ sowie $h_0|f(t, x(t))| < \delta$ erfüllt sind. Nun gilt für $h \le h_0$

$$\begin{aligned}\varphi(t+h) - \varphi(t) &= V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))\\ &= V(t+h, x(t) + hf(t, x(t))) - V(t, x(t)) + R(h)\end{aligned}$$

mit

$$R(h) = V(t+h, x(t+h)) - V(t+h, x(t) + hf(t, x(t))).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}|R(h)| &\le L|x(t+h) - x(t) - hf(t, x(t))|\\ &= L\left|\int_t^{t+h} (\dot{x}(s) - \dot{x}(t))\ ds\right| = o(h),\end{aligned}$$

da $x(t)$ eine C^1-Lösung ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Der Zusammenhang mit Invarianz von Mengen wird im folgenden Korollar deutlich.

Korollar 8.1.3. *Sei V eine autonome Ljapunov-Funktion für* (8.1)*. Dann sind die Mengen $D = V^{-1}((-\infty, \alpha]) \subset G$ positiv invariant für* (8.1)*.*

Beweis. Ist $t_0 \ge 0$, $x_0 \in D$, also $V(x_0) \le \alpha$, so gilt auch $V(x(t)) \le V(x_0) \le \alpha$ für alle $t \ge t_0$, da $\varphi(t) = V(x(t))$ in t fallend ist. □

Eine Ljapunov-Funktion gibt daher im Gegensatz zu Satz 7.2.1 nicht nur eine positiv invariante Menge, sondern eine ganze Familie derer! Auch sei bemerkt, dass *alle* in D startenden Lösungen in D bleiben, D ist also nicht nur schwach positiv invariant, sondern positiv invariant!

Wir betrachten nun einige einfache Beispiele für Ljapunov-Funktionen.

Beispiele.

1. $V(x) = \frac{1}{2}|x|_2^2$; $\quad \dot{V}(x) = (\nabla V(x)|f(t, x)) = (x|f(t, x))$.
   V ist genau dann eine Ljapunov-Funktion, wenn $(x|f(t, x)) \le 0$ für alle $t \ge 0$, $x \in G$ gilt.
2. $V(x) = x_i$; $\quad \dot{V}(x) = (\nabla V(x)|f(t, x)) = (e_i|f(t, x)) = f_i(t, x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.
   V ist genau dann eine Ljapunov-Funktion, wenn $f_i(t, x) \le 0$ für alle $t \ge 0$, $x \in G$, $i \in \{1, \dots, n\}$.
3. Die folgenden Funktionen lassen wir dem Leser zur Übung:

$$V(x) = |x|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\ ; \qquad V(x) = |x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$V(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i\ ; \qquad V(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

4. *Gradientensysteme.* Es sei $\phi \in C^1(G)$, $f(x) = -\nabla\phi(x)$ und V gegeben durch $V(x) = \phi(x)$. Dann erhält man für die orbitale Ableitung $\dot{V}(x) = (\nabla\phi(x)| - \nabla\phi(x)) = -|\nabla\phi(x)|_2^2 \leq 0$.

5. *Hamilton-Systeme.* Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Das $2n$-dimensionale System

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p H(q,p), \quad q(0) = q_0, \\ \dot{p} &= -\partial_q H(q,p), \quad p(0) = p_0, \end{aligned}$$

heißt **Hamilton-System**, und spielt in der *Hamiltonschen Mechanik* die zentrale Rolle. Um den Bezug zu früheren Beispielen herzustellen, betrachten wir die Gleichung für die Bewegung eines Teilchens in einem Potentialfeld, also $m\ddot{x} = -\nabla\phi(x)$. Setzt man $q = x$, $p = m\dot{x}$ und $H(p,q) = p^2/2m + \phi(q)$, so erhält man die entsprechende Hamiltonsche Formulierung des Problems.

Sei nun $(q(t), p(t))$ eine Lösung des Hamilton Systems. Dann gilt für $\varphi(t) := H(q(t), p(t))$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= (\partial_q H(q,p)|\dot{q}) + (\partial_p H(q,p)|\dot{p}) \\ &= (\partial_q H(q,p)|\partial_p H(q,p)) + (\partial_p H(q,p)| - \partial_q H(q,p)) = 0, \end{aligned}$$

also ist die Hamilton Funktion H ein erstes Integral, insbesondere eine Ljapunov-Funktion. In der Hamiltonschen Mechanik ist H die Energie des Systems.

6. Allgemeiner ist jedes erste Integral eines Systems $\dot{x} = f(x)$ eine Ljapunov-Funktion.

Um einen direkten Bezug zwischen dem Prinzip der linearisierten Stabilität und Ljapunov-Funktionen herzustellen, betrachten wir die **Ljapunov-Gleichung** für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A^{\mathsf{T}} Q + QA = -I. \tag{8.5}$$

Sei nämlich die Gleichung $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil. Dann gibt es Konstanten $\omega > 0$ und $M \geq 1$, sodass $|e^{At}| \leq Me^{-\omega t}$ für $t \geq 0$ gilt. Damit können wir

$$Q := \int_0^\infty e^{A^{\mathsf{T}} t} e^{At} dt$$

definieren und das Integral konvergiert absolut. Nun ist Q symmetrisch, und es ist

$$(Qx|x) = \int_0^\infty |e^{At}x|^2 dt > 0, \qquad \text{für alle } \ x \neq 0,$$

also ist Q positiv definit und definiert daher mittels $|x|_Q := \sqrt{(Qx|x)}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir berechnen

$$A^{\mathsf{T}} Q + QA = \int_0^\infty \frac{d}{dt}[e^{A^{\mathsf{T}} t} e^{At}] dt = -I,$$

d.h. Q ist eine Lösung der Ljapunov-Gleichung.

Umgekehrt sei Q eine symmetrische, positiv definite Lösung der Ljapunov-Gleichung. Dann gibt es positive Konstanten c_1, c_2 mit

$$c_1|x|_2^2 \leq (Qx|x) \leq c_2|x|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ist nun $x(t)$ die Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit Anfangswert x_0, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Qx(t)|x(t)) &= (Q\dot{x}(t)|x(t)) + (Qx(t)|\dot{x}(t)) \\ &= ([A^{\mathsf{T}}Q + QA]x(t)|x(t)) = -|x(t)|_2^2 \leq -c_2^{-1}(Qx(t)|x(t)), \quad t > 0,\end{aligned}$$

d.h. die Funktion $V(x) = (Qx|x)$ ist eine strikte Ljapunov-Funktion für $\dot{x} = Ax$, also ist $\varphi(t) = V(x(t))$ strikt fallend entlang nichtkonstanter Lösungen von $\dot{x} = Ax$. Mehr noch, es folgt dann nämlich

$$|x(t)|_2^2 \leq (1/c_1)(Qx(t)|x(t)) \leq (1/c_1)e^{-t/c_2}(Qx_0|x_0) \leq (c_2/c_1)e^{-t/c_2}|x_0|_2^2,$$

für $t > 0$, d.h. die Gleichung $\dot{x} = Ax$ ist asymptotisch stabil. Wir formulieren dieses Resultat wie folgt.

Satz 8.1.4. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Gleichung $\dot{x} = Ax$ ist asymptotisch stabil.*
2. *Die Ljapunov-Gleichung $A^{\mathsf{T}}Q + QA = -I$ besitzt eine symmetrische positiv definite Lösung.*

Ist dies der Fall, dann gilt mit einer Konstanten $\gamma > 0$

$$[Ax, x]_Q \leq -\gamma|x|_Q, \quad x \neq 0,$$

und die Kugeln $\bar{B}_r(0)$ bzgl. der Norm $|x|_Q = \sqrt{(Qx|x)}$ sind positiv invariant. Dabei bezeichnet $[\cdot,\cdot]$ die Klammer aus Abschnitt 6.4.

Das Vektorfeld Ax zeigt also bzgl. der Kugeln $B_r(0)$ in der Norm $|\cdot|_Q$ strikt nach innen. Diese Eigenschaft bleibt auch für gestörte Vektorfelder $f(x) = Ax + g(x)$ erhalten, sofern $g(x) = o(|x|)$ und $r > 0$ hinreichend klein ist.

8.2 Stabilität

Wir betrachten die DGL

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{8.6}$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Dabei lassen wir auch hier Nichteindeutigkeit der Lösungen zu. Das Existenzintervall einer nichtfortsetzbaren Lösung $x(t)$ von (8.6) bezeichnen wir mit $J(x)$ und es sei $J_+(x) = J(x) \cap [t_0, \infty)$.

Es sei ferner $x_*(t)$ eine ausgezeichnete Lösung mit Anfangswert $x_*(t_0) = x_{0*}$, die auf $\mathbb{R}_+$ existiert und als bekannt angenommen wird. Durch die Transformation

$$y(t) = x(t) - x_*(t)$$

geht $x_*(t)$ in die triviale Lösung $y_*(t) \equiv 0$ von

$$\dot{y} = f(t, y + x_*(t)) - f(t, x_*(t)) = g(t, y)$$

über; daher können wir im folgenden stets

$$f(t, 0) = 0 \tag{8.7}$$

annehmen, sodass die ausgezeichnete Lösung die triviale Lösung $x_*(t) \equiv 0$ ist.

Definition 8.2.1. *Sei $t_0 \geq 0$ fixiert. Die triviale Lösung $x_*(t) \equiv 0$ von (8.6) heißt*

1. **stabil**, *falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ gibt, sodass jede Lösung $x(t)$ von (8.6) $|x(t)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in J_+(x)$ erfüllt, sofern ihr Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \bar{B}_\delta(0) \subset G$ erfüllt.*
2. **instabil**, *falls sie nicht stabil ist.*
3. **attraktiv**, *falls es eine Kugel $\bar{B}_{\delta_0}(0) \subset G$ gibt, sodass jede nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \bar{B}_{\delta_0}(0)$ global nach rechts existiert und $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$ erfüllt.*
4. **asymptotisch stabil**, *falls sie stabil und attraktiv ist.*

Bemerkungen 8.2.2.

1. Sind die Lösungen von (8.6) eindeutig bestimmt, so stimmen diese Definitionen mit denen in Abschnitt 5.1 überein.
2. Ist $x_*(t) \equiv 0$ stabil, so existiert jede nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ mit Anfangswert $x_0 \in \bar{B}_\delta(0) \subset G$ global nach rechts. Dies folgt direkt aus dem Fortsetzungssatz.
3. Ist die triviale Lösung stabil, dann auch eindeutig. Das ist direkte Konsequenz der Definition. Stabilität einer Lösung bedeutet deren stetige Abhängigkeit vom Anfangswert auf **ganz** $[t_0, \infty)$.
4. Ist die triviale Lösung instabil, dann kann es in jeder Kugel $\bar{B}_\delta(0)$ einen Anfangswert x_0 geben, sodass eine nichtfortsetzbare Lösung mit diesem Anfangswert nicht global nach rechts existiert.
5. Weder folgt aus Stabilität die Attraktivität, noch umgekehrt, wie wir schon in Kapitel 5 gesehen haben.

In manchen Situationen ist es wünschenswert, eine Gleichmäßigkeit bzgl. der Anfangszeit t_0 zu haben. Dies führt auf die folgende Begriffsbildungen, die analog zu Definition 8.2.1 sind.

Definition 8.2.3. *Die triviale Lösung $x_*(t) \equiv 0$ heißt*

1. **uniform stabil**, *falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ unabhängig von $t_0 \geq 0$ gibt, sodass jede Lösung $x(t)$ von (8.6) $|x(t)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in J_+(x)$ erfüllt, sofern ihr Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \bar{B}_\delta(0) \subset G$ erfüllt.*

2. **uniform attraktiv**, *falls es ein $\delta_0 > 0$ gibt, sodass jede nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \bar{B}_{\delta_0}(0)$ global nach rechts existiert, und $x(t) \to 0$ für $t - t_0 \to \infty$ gleichmäßig in $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \bar{B}_{\delta_0}(0)$ erfüllt.*

3. **uniform asymptotisch stabil**, *falls sie uniform stabil und uniform attraktiv ist.*

Bemerkung. Offenbar sind *uniform stabil*, *uniform attraktiv* und *uniform asymptotisch stabil* stärkere Begriffe als *stabil*, *attraktiv* und *asymptotisch stabil*. Ist allerdings f τ-periodisch in t oder sogar autonom, so impliziert *stabil* schon *uniform stabil*. Hingegen ist selbst im autonomen Fall *uniform attraktiv* stärker als *attraktiv*, da *uniform attraktiv* eine Gleichmäßigkeit bzgl. x_0 enthält, *attraktiv* jedoch nicht; vgl. Bsp. 2 in Abschnitt 9.2. Sind hingegen die Lösungen eindeutig, ist f τ-periodisch oder autonom, so impliziert asymptotisch stabil auch uniform asymptotisch stabil; vgl. Übung 8.7.

Zur Illustration dieser Konzepte betrachten wir nochmals das lineare System

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{8.8}$$

wobei $A \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n\times n})$ und $b \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ sind. Ist $x_*(t)$ irgendeine Lösung von (8.8) und $x(t)$ eine weitere, so erfüllt $y(t) = x(t) - x_*(t)$ die homogene Gleichung

$$\dot{y} = A(t)y.$$

Hat $x_*(t)$ daher eine der eben eingeführten Stabilitätseigenschaften bzgl. (8.8), so hat die triviale Lösung der homogenen Gleichung

$$\dot{x} = A(t)x \tag{8.9}$$

diese ebenfalls, und umgekehrt. Es ist daher sinnvoll zu sagen, dass (8.9) (bzw. (8.8)) diese Eigenschaft hat.

Die Lösungen von (8.9) sind durch

$$x(t; t_0, x_0) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 \tag{8.10}$$

gegeben, wobei $X(t)$ ein Fundamentalsystem von (8.9) ist, d.h. eine globale Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{X} = A(t)X, \;\; t \in \mathbb{R}_+. \tag{8.11}$$

Nun gilt der

Satz 8.2.4. *Sei $X(t)$ ein Fundamentalsystem für* (8.9) *Dann gelten:*

1. (8.9) *ist stabil* $\Longleftrightarrow |X(t)| \leq C$ *für* $t \geq 0$.
2. (8.9) *ist attraktiv* $\Longleftrightarrow$ (8.9) *ist asymptotisch stabil* $\Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} |X(t)| = 0$.
3. (8.9) *ist uniform stabil* $\Longleftrightarrow |X(t)X^{-1}(s)| \leq C$ *für* $s \leq t,\ s,t \geq 0$.
4. (8.9) *ist uniform attraktiv* $\Longleftrightarrow |X(t+s)X^{-1}(s)| \to 0$ *für* $t \to \infty$ *gleichmäßig in* $s \geq 0$.
5. (8.9) *ist uniform asymptotisch stabil* $\Longleftrightarrow$ *es gibt ein* $\alpha > 0$ *mit* $|X(t)X^{-1}(s)| \leq Ce^{-\alpha(t-s)}$ *für* $s \leq t,\ s,t \geq 0$.

Beweis. 1. und 2. hatten wir schon Abschnitt 5.3 gezeigt. 3., 4. und 5. beweist man ähnlich (vgl. Übung 8.1). □

8.3 Ljapunovs direkte Methode

Es sei $f : \mathbb{R}_+ \times B_r(0) \to \mathbb{R}^n$ stetig und gelte $f(t,0) \equiv 0$. Wir wollen nun die Verwendung von Ljapunov-Funktionen aufzeigen, um Stabilitätseigenschaften der trivialen Lösung $x_*(t) \equiv 0$ von (8.6) zu erhalten. Es sei also $V : \mathbb{R}_+ \times B_r(0) \to \mathbb{R}^n$ eine Ljapunov-Funktion, genauer sei V stetig, lokal Lipschitz in x und es gelte

$$\dot{V}(t,x) = \limsup_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\ [V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)] \leq 0$$

für alle $t \geq 0$, $x \in B_r(0)$.

Das Wesentliche an der **direkten Methode** von Ljapunov sind Invarianzsätze der folgenden Art.

Lemma 8.3.1. *Sei $G \subset B_r(0)$ ein Gebiet, V eine Ljapunov-Funktion für* (8.6) *und $\alpha \in \mathbb{R}$. Außerdem gelte*

1. $V(t_0, x_0) < \alpha$ *für ein* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times G$;
2. $V(t,x) \geq \alpha$ *auf* $\mathbb{R}_+ \times \partial G$.

Dann existiert jede nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ von (8.6) *mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ global nach rechts, und es gilt $x(t) \in G$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis. Sei $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ und $\varphi(t) = V(t, x(t)),\ t \geq t_0$. Dann ist $\varphi(t)$ monoton fallend auf dem Existenzintervall $J_+(x)$ von $x(t)$, also erhält man $\varphi(t) < \alpha$ für alle $t \in J_+(x)$, denn $\varphi(t_0) < \alpha$. Wäre nun $x(t_1) \notin G$ für ein $t_1 > t_0$, so gäbe es ein kleinstes $t_2 \geq t_0$ mit $x(t_2) \in \partial G$. Dann folgt aber aus 2.

$$\varphi(t_2) = V(t_2, x(t_2)) \geq \alpha > \varphi(t_2),$$

also ein Widerspruch. Die Lösung bleibt also in G, ist somit beschränkt, und existiert nach dem Fortsetzungssatz global nach rechts. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir benötigen als nächstes die

Definition 8.3.2. *Sei* $W : \mathbb{R}_+ \times B_r(0) \to \mathbb{R}_+$ *gegeben mit* $W(t,0) \equiv 0$.

1. W *heißt* **positiv definit**, *falls es eine stetige, streng wachsende Funktion* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *mit* $\psi(0) = 0$ *gibt, so, dass gilt*

$$W(t,x) \geq \psi(|x|), \qquad \textit{für alle } t \geq 0,\ x \in B_r(0).$$

2. W *heißt* **negativ definit**, *falls* $-W$ *positiv definit ist.*

Für den Spezialfall $W(t,x) = (Ax|x)$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, gilt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn die dazugehörige quadratische Form positiv definit im Sinne von Definition 8.3.2 ist. (vgl. Übung 8.2).

Der Hauptsatz der direkten Methode von Ljapunov ist der

Satz 8.3.3. *Sei* $V : \mathbb{R}_+ \times B_r(0) \to \mathbb{R}$ *stetig, lokal Lipschitz in* x, *eine Ljapunov-Funktion für* (8.6) *mit* $V(t,0) \equiv 0$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Ist* V *positiv definit, so ist* $x_* = 0$ *stabil für* (8.6).
2. *Ist* V *positiv definit und gilt* $\lim_{x\to 0} V(t,x) = 0$ *gleichmäßig auf* $\mathbb{R}_+$, *so ist* $x_* = 0$ *uniform stabil für* (8.6).
3. *Ist* V *positiv definit,* $\dot{V}$ *negativ definit und ist* f *beschränkt auf* $\mathbb{R}_+ \times B_r(0)$, *so ist* $x_* = 0$ *asymptotisch stabil für* (8.6).
4. *Ist* V *positiv definit,* $\dot{V}$ *negativ definit und gilt* $\lim_{x\to 0} V(t,x) = 0$ *gleichmäßig auf* $\mathbb{R}_+$, *so ist* $x_* = 0$ *uniform asymptotisch stabil für* (8.6).

Beweis. Zu 1.*:* Es ist $V(t,x) \geq \psi(|x|)$ auf $\mathbb{R}_+ \times B_r(0)$, also gilt für ein $\varepsilon \in (0,r)$ die Ungleichung $V(t,x) \geq \psi(\varepsilon) = \alpha$ auf $\mathbb{R}_+ \times \partial B_\varepsilon(0)$. Da nun $V(t,0) \equiv 0$ und V stetig ist, existiert zu jedem $t_0 \geq 0$ ein $\delta = \delta(t_0,\varepsilon)$, mit $V(t_0,x_0) < \alpha$, für alle $|x_0| \leq \delta$. Lemma 8.3.1 impliziert dann $x(t) \in G := B_\varepsilon(0)$ für alle $t \geq t_0$, für jede nichtfortsetzbare Lösung von (8.6) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$. Also ist $x_* \equiv 0$ stabil.

Zu 2.*:* Gilt außerdem $\lim_{x\to 0} V(t,x) = 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+$, so lässt sich $\delta = \delta(\varepsilon)$ im Beweisschritt 1 unabhängig von t_0 wählen. Daher ist $x_* = 0$ dann sogar uniform stabil.

Zu 3.*:* Es genügt zu zeigen, dass $x_* = 0$ attraktiv ist, denn die Stabilität folgt schon aus 1. Nach Voraussetzung gilt $\dot{V}(t,x) \leq -\chi(|x|)$, wobei χ stetig und streng wachsend ist. Es sei nun o.B.d.A. $\chi = \psi$, da $\min\{\psi(s),\chi(s)\}$ wieder stetig und streng wachsend ist und $-\chi(s) \leq -\min\{\psi(s),\chi(s)\}$, sowie $\psi(s) \geq \min\{\psi(s),\chi(s)\}$ gilt. Sei $t_0 \geq 0$ fixiert und wähle $\delta_0 = \delta(t_0, r/2)$ aus 1.; dann ist $V(t_0,x_0) < \alpha = \psi(r/2)$ für alle $|x_0| \leq \delta_0$. Für eine beliebige nichtfortsetzbare Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ gilt nun mit $\varphi(t) = V(t,x(t))$

$$D^+\varphi(t) = \dot{V}(t,x(t)) \leq -\psi(|x(t)|), \quad t \geq t_0,$$

also nach Übung 6.7

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} \psi(|x(s)|)\, ds, \quad t \geq t_0.$$

Nun ist $\varphi(t_0) < \alpha$ und $\varphi(t) = V(t, x(t)) \geq \psi(|x(t)|)$, daher erfüllt $\rho(t) = \psi(|x(t)|)$ die Integralungleichung

$$\rho(t) + \int_{t_0}^{t} \rho(s)\, ds < \alpha, \quad t \geq t_0, \tag{8.12}$$

also ist $\int_{t_0}^{\infty} \rho(s)\, ds \leq \alpha < \infty$, da $\rho \geq 0$ ist. Nach Voraussetzung ist f beschränkt, folglich ist $x(t)$ global Lipschitz in t und wegen der Stabilität von $x_* = 0$ daher $\rho(t)$ gleichmäßig stetig. Daraus erhält man $\rho(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und schließlich $|x(t)| = \psi^{-1}(\rho(t)) \to 0$ für $t \to \infty$, da $\psi^{-1}(s)$ ebenfalls stetig und streng wachsend ist.

Zu 4.: Gilt außerdem $\lim_{x\to 0} V(t, x) = 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+$, so ist $\delta_0 = \delta(r/2)$ nach Beweisschritt 2 unabhängig von t_0. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben; wir haben zu zeigen, dass es ein $T = T(\varepsilon)$ gibt mit

$$|x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t \geq t_0 + T,\ |x_0| \leq \delta_0;$$

daraus folgt die uniforme Attraktivität und mit 2. die uniforme asymptotische Stabilität. Setze

$$\kappa(s) = \sup_{\substack{t\in\mathbb{R}_+ \\ |x|<s}} V(t, x) + \psi(s), \quad 0 < s < r.$$

$\kappa(s)$ ist streng wachsend und es gilt $\kappa(s) \to 0$ für $s \to 0$, da $\lim_{x\to 0} V(t, x) = 0$ gleichmäßig für $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Ferner haben wir

$$\sigma(t) := \psi \circ \kappa^{-1}(V(t, x(t))) \leq \psi \circ \kappa^{-1}(\kappa(|x(t)|)) = \psi(|x(t)|) = \rho(t),$$

und daher mit (8.12)

$$\sigma(t) + \int_{t_0}^{t} \sigma(s)\, ds < \alpha, \quad t \geq t_0. \tag{8.13}$$

Beachte, dass mit $\varphi(t) = V(t, x(t))$ auch $\sigma(t)$ fallend ist. Setze $\eta = \psi \circ \kappa^{-1} \circ \psi(\varepsilon)$ und $T \geq \frac{\alpha}{\eta}$. Wäre nun $\sigma(t_0 + T) \geq \eta$, dann auch $\sigma(s) \geq \eta$ für alle $s \leq t_0 + T$, da σ fällt, also ergibt sich mit (8.13)

$$\alpha > \eta + \eta T \geq \eta + \alpha,$$

das heißt ein Widerspruch, da $\eta > 0$ ist. Folglich ist $\sigma(t_0 + T) < \eta$ und daher $\sigma(t) < \eta$ für alle $t \geq t_0 + T$, woraus folgt

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \psi^{-1}(\psi(|x(t)|)) \leq \psi^{-1}(V(t, x(t))) = (\psi^{-1} \circ \kappa \circ \psi^{-1})(\sigma(t)) \\ &\leq (\psi^{-1} \circ \kappa \circ \psi^{-1})(\eta) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist $x_* = 0$ uniform attraktiv. $\square$

8.4 Limesmengen und das Invarianzprinzip

In diesem und den folgenden Abschnitten schränken wir uns auf autonome Funktionen $f(t,x) \equiv f(x)$ und entsprechend auf autonome Ljapunov-Funktionen ein, und wollen für diesen einfacheren Fall das asymptotische Verhalten der Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \tag{8.14}$$

untersuchen. Dabei sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir lassen auch hier Nichteindeutigkeit der Lösungen zu.

Sei zunächst $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige stetige Funktion. Dann nennt man $\gamma_+(x) := x(\mathbb{R}_+)$ **Bahn** oder **Orbit** der Funktion x. Die Menge

$$\omega_+(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{ es gibt eine Folge } t_k \to \infty \text{ mit } x(t_k) \to y\}$$

heißt (positive) **Limesmenge** von x. Offensichtlich gilt $\overline{\gamma_+(x)} = \gamma_+(x) \cup \omega_+(x)$. Des Weiteren ist $\omega_+(x)$ abgeschlossen. Denn ist $(y_k) \subset \omega_+(x)$, $y_k \to y$, so wähle zu $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in \mathbb{R}_+$, $t_k \geq k$, mit $|y_k - x(t_k)| \leq 1/k$. Dann folgt

$$|y - x(t_k)| \leq |y - y_k| + |y_k - x(t_k)| \leq |y - y_k| + 1/k \to 0$$

für $k \to \infty$, also ist auch $y \in \omega_+(x)$. Mit Bolzano–Weierstraß ist die Limesmenge $\omega_+(x)$ genau dann nichtleer, wenn $\underline{\lim}_{t\to\infty} |x(t)| < \infty$ ist.

Proposition 8.4.1. *Sei $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ stetig, und sei $\gamma_+(x)$ beschränkt. Dann ist $\omega_+(x)$ nichtleer, kompakt, zusammenhängend, und es gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \omega_+(x)) = 0.$$

Beweis. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß existiert eine konvergente Folge $x(t_k) \to y$, mit $t_k \to \infty$, für $k \to \infty$. Daher ist $\omega_+(x)$ nichtleer. $\omega_+(x)$ ist abgeschlossen, und $\omega_+(x) \subset \overline{\gamma_+(x)}$ beschränkt, also kompakt.

Angenommen es gibt eine Folge $t_k \to \infty$ mit $\operatorname{dist}(x(t_k), \omega_+(x)) \geq \varepsilon_0 > 0$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert wieder nach Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge $x(t_{k_l}) \to y \in \omega_+(x)$ für $l \to \infty$, was im Widerspruch zu $\varepsilon_0 > 0$ steht.

Wir zeigen schließlich, dass $\omega_+(x)$ zusammenhängend ist. Wäre dies falsch, so gäbe es kompakte disjunkte $\omega_1,\ \omega_2$ mit $\omega_+(x_0) = \omega_1 \cup \omega_2$, die beide nichtleer sind. Wähle $y_1 \in \omega_1,\ y_2 \in \omega_2$ sowie Folgen $(t_k),\ (s_k) \to \infty$ mit $t_k < s_k < t_{k+1}$, sodass $x(t_k) \to y_1$ und $x(s_k) \to y_2$ gilt. Da $\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(\omega_1, \omega_2) > 0$ ist, existiert zu jedem k ein $r_k \in (t_k, s_k)$ mit $\operatorname{dist}(x(r_k), \omega_i) \geq \varepsilon_0/3 > 0,\ i = 1, 2$. Da $(x(r_k))$ beschränkt ist, gibt es folglich eine konvergente Teilfolge $x(r_{k_l}) \to v \in \omega^+(x) = \omega_1 \cup \omega_2$, im Widerspruch zu $\operatorname{dist}(x(r_k), \omega_i) \geq \varepsilon_0/3 > 0,\ i = 1, 2$. □

Hier interessieren wir uns natürlich für Funktionen $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, die Lösungen einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ sind. Die Limesmenge gibt Aufschluss über das asymptotische Verhalten einer Lösung.

Beispiel.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - (x^2 + y^2 - 1)x, \\ \dot{y} = -x - (x^2 + y^2 - 1)y, \end{cases} \quad \text{oder in Polarkoordinaten} \quad \begin{cases} \dot{r} = -r(r^2 - 1), \\ \dot{\varphi} = -1. \end{cases}$$

$(0,0)$ ist ein Equilibrium dieses Systems und für $r = 1$ haben wir ein periodisches Orbit. Gilt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, so ist $\omega_+(x_0, y_0) = \partial B_1(0)$, denn es ist $\dot{r} > 0$ für $r < 1$ und $\dot{r} < 0$ für $r > 1$.

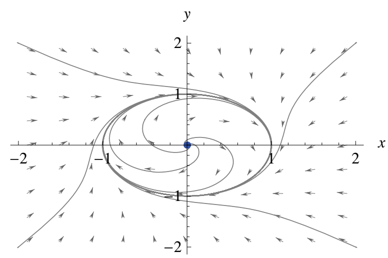

Abbildung 8.1: Der Grenzzyklus im Beispiel

Limesmengen beschränkter Lösungen von (8.14) haben eine außerordentlich wichtige Eigenschaft.

Proposition 8.4.2. *Sei* $x : \mathbb{R}_+ \to G$ *eine beschränkte Lösung von* (8.14) *und sei* $\omega_+(x) \subset G$. *Dann besteht* $\omega_+(x)$ *aus* globalen *Lösungen von* (8.14)*, also Lösungen auf* $\mathbb{R}$*, d.h.* $\omega_+(x)$ *ist* **schwach invariant** *für* (8.14). *Insbesondere sind kompakte Limesmengen positiv und negativ invariant, wenn die Lösungen von* (8.14) *eindeutig sind.*

Beweis. Sei $y \in \omega_+(x)$ gegeben. Wähle eine wachsende Folge $t_k \to \infty$ mit $x(t_k) \to y$. Wir fixieren ein beliebiges kompaktes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, und wählen ein k_0 mit $t_{k_0} + a \geq 0$. Dann sind die Funktionen $y_k(s) := x(t_k + s)$ für $k \geq k_0$ auf $[a,b]$ wohldefiniert und Lösungen von $\dot{x} = f(x)$. Sie sind beschränkt, und haben beschränkte Ableitungen auf $[a,b]$, da f stetig und $\overline{\gamma_+(x)} \subset G$ kompakt ist; sie sind daher gleichgradig stetig. Der Satz von Arzéla-Ascoli liefert eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{k_m} \to z$. Die Funktion z ist wieder eine Lösung, ihr Anfangswert ist $z(0) = y$, und für jedes $s \in [a,b]$ gilt $z(s) \leftarrow y_{k_m}(s) = x(t_{k_m} + s)$ für $m \to \infty$, woraus $z(s) \in \omega_+(x)$ für alle $s \in [a,b]$ folgt. Nun ist $\omega_+(x)$ kompakt, also lässt sich z nach links und nach rechts zu einer globalen Lösung $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $z(\mathbb{R}) \subset \omega_+(x)$ fortsetzen. $\square$

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist der folgende Satz, der etwas über die Lage der Limesmengen in Gegenwart einer Ljapunov-Funktion aussagt. Um den Satz formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der maximalen schwach-invarianten Teilmenge: Sei $D \subset G$ beliebig. Wir betrachten dann die Menge aller vollständigen Orbits in D, also der Lösungen $x(t)$ von (8.14) auf $\mathbb{R}$, die in D liegen, also $\gamma(x) = x(\mathbb{R}) \subset D$ erfüllen. Die **maximale schwach-invariante Teilmenge** M_D von D ist definiert als die Vereinigung all dieser Orbits.

Satz 8.4.3 (Invarianzprinzip von La Salle). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V : G \to \mathbb{R}$ sei eine Ljapunov-Funktion für $\dot{x} = f(x)$ und V sei lokal Lipschitz. Ferner sei $\mathcal{M} = \{x \in G : \dot{V}(x) = 0\}$, und M sei die maximale schwach-invariante Teilmenge von $\mathcal{M}$. Sei x eine globale Lösung nach rechts, sodass $\overline{\gamma_+(x)} \subset G$ kompakt ist. Dann gilt $\omega_+(x) \subset M$, also insbesondere $\operatorname{dist}(x(t), M) \to 0$ für $t \to \infty$.*

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass V auf $\omega_+(x)$ konstant ist. Die Funktion $\varphi(t) = V(x(t))$ ist nach Voraussetzung monoton fallend, also existiert wegen der Kompaktheit von $\overline{\gamma_+(x)}$ der Grenzwert $\varphi(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varphi(t)$. Sind nun $y, z \in \omega_+(x)$, so gilt $x(t_k) \to y$, $x(s_k) \to z$, folglich $\varphi(t_k) \to \varphi(\infty) = V(y)$ aber auch $\varphi(s_k) \to \varphi(\infty) = V(z)$, da V stetig ist. Es folgt $V(y) = V(z)$, d.h. V ist auf $\omega_+(x)$ konstant.

Wäre nun $\dot{V}(y) < 0$ für ein $y \in \omega_+(x)$, so würde für jede Lösung $x(t)$ mit Anfangswert $x(0) = y$ gelten $V(x(t)) < V(y)$ für $t > 0$. Da nun nach Proposition 8.4.2 durch jeden Punkt in $\omega_+(x) \subset G$ eine Lösung in $\omega_+(x)$ verläuft, ergäbe dies einen Widerspruch zur Konstanz von V auf $\omega_+(x)$. Folglich gilt $\omega_+(x) \subset \mathcal{M}$ und da $\omega_+(x)$ schwach invariant ist, auch $\omega_+(x) \subset M$, aufgrund der Maximalität von M. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes führen wir noch einige Begriffe ein.

Definition 8.4.4. *Ein $x_0 \in G$ wird von $M \subset G$ angezogen, falls $x(t) \to M$ für $t \to \infty$ für jede Lösung von (8.14) gilt. Die Menge*

$$A^+(M) = \{x_0 \in G : x(t) \to M,\ t \to \infty,\ \text{für jede Lösung von } (8.14)\}$$

heißt **Anziehungsbereich** *(oder auch Attraktivitätsbereich) von M. Schließlich heißt die Menge M* **Attraktor** *(oder attraktiv), falls $A^+(M)$ eine Umgebung von M ist. Gilt sogar $A^+(M) = G$, so heißt M* **globaler Attraktor** *für (8.1).*

Man beachte, dass $A^+(M)$ stets invariant ist. Es gilt $\omega_+(x) \subset \overline{M}$ für alle $x_0 \in A^+(M)$, und jede Lösung von (8.14). Der globale Attraktor im Beispiel bzgl. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist der Einheitskreis $\partial B_1(0)$. Als Folgerung zu Satz 8.4.3 erhalten wir folgendes Resultat über den globalen Attraktor von (8.14).

Korollar 8.4.5. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V : G \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz eine Ljapunov-Funktion für $\dot{x} = f(x)$, und sei $\mathcal{M} = \{x \in G : \dot{V}(x) = 0\}$, sowie M die maximale schwach-invariante Teilmenge von $\mathcal{M}$. Sei G positiv invariant, und jede Lösung sei nach rechts beschränkt. Dann ist M der globale Attraktor in G.*

8.5 Mathematische Genetik

Wir betrachten eine (große) Population von diploiden Organismen, die sich geschlechtlich gemäß den Mendelschen Gesetzen fortpflanzen. Es bezeichnen $i = 1, \ldots, n$ eine (haploide) Chromosomenbesetzung mit Genen, die möglich sind, x_{ij}

die Anzahl der Zygoten, die den i-ten und den j-ten Satz im Zellkern tragen und x_i die Anzahl der Gameten mit Satz i. Identifiziert man ein Zygotum mit den entsprechenden zwei Gameten, so gilt die Beziehung

$$x_i = 2x_{ii} + \sum_{j \neq i} x_{ij} + \sum_{j \neq i} x_{ji}.$$

Nimmt man Symmetrie in x_{ij} an, so gilt daher

$$x_i = 2 \sum_j x_{ij}, \quad x := \sum_i x_i = 2 \sum_{i,j} x_{ij},$$

x ist die Gesamtanzahl der Gameten. Biologisch interessant sind die Häufigkeiten

$$p_{ij} = 2\frac{x_{ij}}{x}, \quad p_i = \frac{x_i}{x},$$

und es sind die p_i, für die wir eine Differentialgleichung herleiten möchten.

Bezeichnet m_{ij} die Fitness der (i,j)-Zygoten, so gilt unter Ausschließung von Mutation und Rekombination, also bei reiner Selektion

$$\dot{x}_{ij} = m_{ij} x_{ij}.$$

Da $[x_{ij}]_{i,j}$ symmetrisch ist, kann man auch $M := [m_{ij}]_{i,j}$ als symmetrisch annehmen. Für die Ableitung von p_i gilt

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{x_i}{x}\right) &= \frac{\dot{x}_i}{x} - \frac{\dot{x}}{x}\, p_i \\
&= 2\sum_j \frac{\dot{x}_{ij}}{x} - 2\sum_{k,j} \dot{x}_{kj} \frac{p_i}{x} = \sum_j m_{ij} p_{ij} - p_i \sum_{k,j} m_{kj} p_{kj}.
\end{aligned}$$

Um die p_{ij} durch die p_i ausdrücken zu können, macht man nun die

Hardy-Weinberg Annahme: $\quad p_{ij} = p_i p_j \quad$ für alle i, j.

Biologisch wird diese Annahme meist als Zufallspaarung gedeutet. Sie ist nicht unumstritten, wir werden ihr aber folgen.

Die Hardy-Weinberg Annahme impliziert nun die Gleichung

$$\dot{p}_i = p_i \sum_j m_{ij} p_j - p_i \sum_{k,j} p_k m_{kj} p_j.$$

Mit $p = [p_i]_i$ und $P = \mathrm{diag}(p_i)$, so erhält man die *Fisher-Wright-Haldane-Gleichung*

$$(FWH) \qquad \dot{p} = PMp - W(p)p = f(p),$$

wobei $W(p) = (p|Mp)$ gesetzt wurde. Setzt man $\mathsf{e} = [1, \ldots, 1]^{\mathsf{T}}$, so ist $p = P\mathsf{e}$ und man erhält die äquivalente Form

$$(FWH) \qquad \dot{p} = P(Mp - W(p)\mathsf{e}) = f(p).$$

Wir wollen nun die bisher erarbeiteten Methoden auf (FWH) anwenden. Zunächst ist $\mathbb{R}^n_+$ invariant, wie auch $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ und jeder Teilrand von $\mathbb{R}^n_+$ von der Form $\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p_{i_1} = \cdots = p_{i_k} = 0\}$ und auch $\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p_{i_1} = \cdots = p_{i_k} = 0,\ p_j > 0,\ j \neq i_1, \ldots, i_k\}$, denn $p_i = 0$ impliziert $f_i(p) = 0$.

Biologisch interessant ist vor allem das Standardsimplex $\mathbb{D} = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : (p|\mathsf{e}) = 1\}$, da p eine Wahrscheinlichkeitsverteilung repräsentieren soll. Wir untersuchen daher die Invarianz von $\mathbb{D}$. Dazu sei $p(t)$ eine Lösung in $\mathbb{R}^n_+$ auf dem maximalen Intervall $J(p)$ mit $p(0) = p_0 \in \mathbb{D}$. Wir setzen $\varphi(t) = (p(t)|\mathsf{e})$ und $h(t) = W(p(t))$. Es ist dann wegen (FWH)

$$\dot{\varphi}(t) = h(t)(1 - \varphi(t)),\ t \in J,$$

folglich $\varphi(t) \equiv 1$, wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieser DGL und da $\varphi(0) = 1$ ist. Daher ist $\mathbb{D}$ positiv invariant und ebenso $\mathbb{D}^\circ = \{p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ : (p|\mathsf{e}) = 1\}$.

Sei $V(p) = -W(p)$. Wir zeigen, dass V eine Ljapunov-Funktion auf $\mathbb{D}$ für (FHW) ist. Dazu sei $q = Mp$; mit $p = P\mathsf{e}$ und $W(p) = (Mp, p) = (q|p) = (Pq|\mathsf{e})$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= -(\nabla W(p)|f(p)) = -2(Mp|PMp) + 2W(p)(Mp, p)\\
&= -2(Pq|q) + 2(Pq|\mathsf{e})^2\\
&\leq -2(Pq|q) + 2(Pq|q)(P\mathsf{e}|\mathsf{e})\\
&= -2(Pq|q) + 2(Pq|q) = 0,
\end{aligned}$$

da P positiv semidefinit ist. Ferner ist $\dot{V} = 0$ dann und nur dann, wenn $P^{1/2}q$ und $P^{1/2}\mathsf{e}$ linear abhängig sind, also wenn α, β existieren mit $\alpha P^{1/2}q + \beta P^{1/2}\mathsf{e} = 0$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Daraus folgt $\alpha PMp + \beta p = 0$, also $\alpha \neq 0$, da $p \neq 0$ ist und schließlich $PMp = \lambda p,\ (p|\mathsf{e}) = 1$, d.h. $\lambda = (Mp|p) = W(p)$. Folglich gilt $\dot{V} = 0$ genau dann, wenn $p \in \mathcal{E} = \{p \in \mathbb{D} : f(p) = 0\}$, d.h. es ist $\mathcal{M} = \mathcal{E}$. In der Literatur heißt diese Aussage *Fundamentaltheorem von Fisher*.

Aus Satz 8.4.3 folgt nun $p(t) \to \mathcal{E}$, $t \to \infty$ für alle $p_0 \in \mathbb{D}$. Ferner gilt sogar $p(t) \to p_\infty \in \mathcal{E}$, falls $\mathcal{E} \cap W^{-1}(\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ diskret ist, wie Satz 5.5.6 zeigt.

8.6 Gradientenartige Systeme

Wir betrachten das autonome System

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in G, \tag{8.15}$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Nichteindeutigkeit von Lösungen ist also zugelassen.

Definition 8.6.1. *Die autonome DGL* (8.15) *heißt* **gradientenartig***, falls es eine strikte Ljapunov-Funktion für* (8.15) *gibt, also eine stetige Funktion* $V : G \to \mathbb{R}$ *mit der Eigenschaft, dass* $\varphi(t) = V(x(t))$ *entlang jeder nichtkonstanten Lösung* $x(t)$ *von* (8.15) *streng fällt.*

Selbstverständlich ist jedes Gradientensystem

$$\dot{x} = -\nabla\phi(x) \tag{8.16}$$

mit $\phi \in C^1(G;\mathbb{R})$ gradientenartig, denn $V(x) = \phi(x)$ ergibt $\dot{V}(x) = -|\nabla\phi(x)|_2^2$. Allerdings haben wir bereits in Kapitel 5 Beispiele von gradientenartigen Systemen kennengelernt, die keine Gradientensysteme sind: Das gedämpfte Pendel und das Volterra–Lotka-Modell mit Sättigung.

Wir können nun den Satz 5.5.6 hinsichtlich der Regularität von f und V verallgemeinern, und gleichzeitig einen einfacheren Beweis angeben.

Satz 8.6.2 (Konvergenzsatz). *Sei* (8.15) *gradientenartig und bezeichne* $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$ *die Equilibriumsmenge von* (8.15). *Sei* $K \subset G$ *kompakt und sei* $x(t)$ *eine beschränkte Lösung von* (8.15) *auf* $\mathbb{R}_+$ *mit* $\gamma_+(x) \subset K$. *Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \mathcal{E}) = 0.$$

Ist außerdem $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha)$ *diskret für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$, *so gilt sogar*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty,$$

für ein $x_\infty \in \mathcal{E}$. *Es gibt keine nichttrivialen periodischen Lösungen.*

Beweis. Da nach Voraussetzung $K \supset \gamma_+(x)$ und K eine kompakte Teilmenge von G ist, ist die Limesmenge $\omega_+(x)$ der Lösung nichtleer, kompakt, zusammenhängend, und es gilt $\omega_+(x) \subset K \subset G$. Da $\varphi(t) = V(x(t))$ fallend ist, existiert $\varphi_\infty = \lim_{t\to\infty} \varphi(t)$, also ist V auf $\omega_+(x)$ konstant.

Da nach Proposition 8.4.2 durch jeden Punkt von $\omega_+(x)$ eine Lösung verläuft, und V längs nicht konstanten Lösungen streng fällt, kann $\omega_+(x)$ nur aus Equilibria bestehen, d.h. $\omega_+(x) \subset \mathcal{E}$. Damit ist

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \mathcal{E}) \le \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \omega_+(x)) = 0,$$

also die erste Behauptung bewiesen. Ist nun $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\varphi_\infty)$ diskret, so ist $\omega_+(x) \subset \mathcal{E} \cap V^{-1}(\varphi_\infty)$ einpunktig, da $\omega_+(x)$ nach Proposition 8.4.1 zusammenhängend ist. Dies zeigt die zweite Behauptung. Gäbe es schließlich eine nichtkonstante τ-periodische Lösung $x(t)$, so würde sich der Widerspruch $V(x(0)) = V(x(\tau)) < V(x(0))$ ergeben, also ist auch die letzte Behauptung bewiesen. $\square$

In Satz 5.5.4 hatten wir gesehen, dass Equilibria x_*, die strikte Minima einer Ljapunov-Funktion V sind, stabil, und sogar asymptotisch stabil sind, falls x_* zusätzlich isoliert in $\mathcal{E}$ und V eine strikte Ljapunov-Funktion ist. Ist hingegen x_* kein Minimum und die Ljapunov-Funktion strikt, dann ist x_* instabil.

Satz 8.6.3 (Cetaev-Krasovskij). *Sei* $V : G \to \mathbb{R}$ *stetig,* $x_* \in G$ *ein isoliertes Equilibrium von* (8.15), *und sei* $V(x_*) = 0$. *Es existiere ein* $r_0 > 0$, *sodass*

$$V^{-1}((-\infty, 0)) \cap B_r(x_*) \neq \emptyset, \quad \text{für jedes } r \in (0, r_0).$$

gilt und V *eine strikte Ljapunov-Funktion auf* $V^{-1}((-\infty,0)) \cap B_{r_0}(x_*)$ *ist. Dann ist* x_* *für* (8.15) *instabil.*

Beweis. Setze $G_0 = V^{-1}((-\infty,0))$ und $G_\varepsilon = G_0 \cap \bar{B}_\varepsilon(x_*)$. Angenommen, x_* wäre stabil. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $x(t) \in \bar{B}_\varepsilon(x_*)$ für alle $t \geq 0$ und jede Lösung $x(t)$ von (8.15) gilt, sofern der Anfangswert $x_0 \in \bar{B}_\delta(x_*)$ erfüllt. Daher ist $x(t)$ beschränkt, also $\omega_+(x)$ nichtleer. Fixiere ein $\varepsilon \in (0, r_0)$, sodass $\bar{B}_\varepsilon(x_*) \cap \mathcal{E} = \{x_*\}$ ist und sei o.B.d.A. $\delta < \varepsilon$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $x_0 \in G_\delta$, folglich erfüllt die Funktion $\varphi(t) := V(x(t))$ die Bedingung $\varphi(0) < 0$. Da V eine Ljapunov-Funktion in G_{r_0} ist, gilt $\varphi(t) \leq \varphi(0) < 0$ für alle $t \geq 0$. Also bleibt die Lösung $x(t)$ für alle $t \geq 0$ in G_ε. Da V außerdem eine strikte Ljapunov-Funktion in G_{r_0} ist, gilt $\omega_+(x) \subset \mathcal{E} = f^{-1}(0)$. Daher gibt es ein weiteres Equilibrium $x_\infty \in \bar{B}_\varepsilon(x_*) \cap V^{-1}((-\infty, \varphi(0)))$, also $x_\infty \neq x_*$, ein Widerspruch. □

8.7 Chemische Reaktionssysteme

In diesem Abschnitt wollen wir allgemeine Reaktionssysteme mit sog. *Massenwirkungskinetik* betrachten. Dazu seien n Substanzen A_i gegeben, mit Konzentrationen c_i, die wir zu einem Vektor c zusammenfassen. Zwischen diesen Spezies mögen nun m Reaktionen stattfinden, diese werden mit dem Index j versehen. Die j-te Reaktion lässt sich durch ein Schema der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_{ij}^{+} A_i \underset{k_j^-}{\overset{k_j^+}{\rightleftharpoons}} \sum_{i=1}^{n} \nu_{ij}^{-} A_i, \quad j = 1, \ldots, m,$$

beschreiben. Die Konstanten $k_j^{\pm}$ sind die Geschwindigkeitskonstanten der Hin- bzw. der Rückreaktion; sind beide positiv, so ist die Reaktion reversibel, ist $k_j^+ > 0$ aber $k_j^- = 0$, dann heißt die Reaktion irreversibel. Man beachte, dass wir aufgrund der Symmetrie im Reaktionsschema $k_j^+ > 0$ annehmen können. Die Zahlen $\nu_{ij}^{\pm}$ heißen *stöchiometrische Koeffizienten* der Reaktion. Dies sind natürliche Zahlen oder 0, ν_{ij}^+ gibt an wieviele Mol an A_i bei der Hinreaktion verbraucht werden, ν_{ij}^- wieviele Mol entstehen. Eine Substanz A_k heißt *Produkt* in der j-ten Reaktion, falls $\nu_{kj}^- > 0$ ist, A_k heißt in dieser Reaktion *Edukt*, falls $\nu_{kj}^+ > 0$ ist. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, fordern wir $\nu_{ij}^+ \nu_{ij}^- = 0$, d.h. ein A_i darf in einer Reaktion nicht gleichzeitig als Edukt und Produkt auftreten. Der Vektor ν_j mit den Einträgen $\nu_{ij} = \nu_{ij}^+ - \nu_{ij}^-$ heißt *Stöchiometrie* der j-ten Reaktion.

Die Reaktionsrate $r_j(c)$ der j-ten Reaktion unter der Annahme von Massenwirkungskinetik wird nun analog zur Gleichgewichtsreaktion modelliert, sie lautet dann

$$r_j(c) = -k_j^+ \Pi_{i=1}^n c_i^{\nu_{ij}^+} + k_j^- \Pi_{i=1}^n c_i^{\nu_{ij}^-}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

oder in Kurzform

$$r_j(c) = -k_j^+ c^{\nu_j^+} + k_j^- c^{\nu_j^-}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Befindet sich die j-te Reaktion im Gleichgewicht, so gilt das Massenwirkungsgesetz

$$\frac{\Pi_{i=1}^n c_i^{\nu_{ij}^+}}{\Pi_{i=1}^n c_i^{\nu_{ij}^-}} = \frac{k_j^-}{k_j^+} =: K_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

oder in Kurzform

$$c^{\nu_j} = K_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Das die Kinetik beschreibende Differentialgleichungssystem ergibt sich nun zu

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^m \nu_{ij} r_j(c_1, \ldots, c_n), \quad c_i(0) = c_{i0},\ i = 1, \ldots, n,$$

oder in Vektorschreibweise

$$\dot{c} = \sum_{j=1}^m \nu_j r_j(c), \quad c(0) = c_0. \tag{8.17}$$

Fasst man die Reaktionsraten $r_j(c)$ zu einem Vektor $r(c)$ zusammen und definiert die $n \times m$-Matrix N durch die Einträge ν_{ij}, so kann man (8.17) noch kompakter als

$$\dot{c} = Nr(c), \quad c(0) = c_0, \tag{8.18}$$

formulieren. Reaktionen, die der Massenwirkungskinetik genügen, nennt man in der Chemie *Elementarreaktionen*, im Gegensatz zu sog. *Bruttokinetiken*, die aus Vereinfachungen resultieren. Die Reaktionsraten $k_j^\pm$ sind i.Allg. noch temperaturabhängig, hier haben wir uns auf den *isothermen, homogenen Fall* beschränkt, d.h. es wird angenommen, dass die Temperatur stets konstant ist, und dass die Substanzen ideal durchmischt sind. Andernfalls müsste man auch eine Temperaturbilanz mitführen und Transportwiderstände wie Diffusion berücksichtigen.

Außerdem haben wir in diesem Abschnitt angenommen, dass das betrachtete Reaktionssystem isoliert ist, also keine Substanzen zu- oder abgeführt werden. Man spricht dann von einem abgeschlossenen System oder *Batch-System*. In offenen Systemen müssen Zu- und Abströme ebenfalls modelliert werden. Zum Beispiel hat man im Falle konstanter Zuströme und entsprechender paritätischer Abströme auf der rechten Seite von (8.18) einen Term der Form $(c^f - c)/\tau$ zu addieren, wobei $\tau > 0$ Verweilzeit des Reaktors genannt wird, bzw. $\gamma = 1/\tau$ Durchflussrate. Dabei ist die i-te Komponente $c_i^f \geq 0$ von c^f die Konzentration der Substanz A_i im Zustrom, dem *Feedstrom*.

Da die Funktionen r_j Polynome in c sind, ergibt der Satz von Picard und Lindelöf die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (8.17). Wir überprüfen als nächstes die Positivitätsbedingung. Dazu sei $c_k = 0$, sowie $c_i \geq 0$ für alle anderen i. Ist A_k Edukt in der j-ten Reaktion, so folgt $r_j(c) = k_j^- c^{\nu_j^-} \geq 0$ sowie $\nu_{kj} > 0$. Ist A_k hingegen Produkt, dann ist $r_j(c) \leq 0$ und $\nu_{kj} < 0$. Es folgt in beiden Fällen $\nu_{kj} r_j(c) \geq 0$, für alle j, also $\dot{c}_k \geq 0$. Damit ist das Positivitätskriterium erfüllt, und folglich gilt $c_i(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und $i = 1, \ldots, n$, sofern die Anfangswerte c_{i0} sämtlich nichtnegativ sind. Es ist aber auch $\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ positiv invariant; dies sieht man folgendermaßen. Mit

$$h_k(c) = \sum_{\nu^+_{kj} > 0} \nu^+_{kj} k^-_j c^{\nu^-_j} + \sum_{\nu^-_{kj} > 0} \nu^-_{kj} k^+_j c^{\nu^+_j} \geq 0,$$

und

$$g_k(c) = \sum_{\nu^+_{kj} > 0} \nu^+_{kj} k^+_j c^{\nu^+_j - e_k} + \sum_{\nu^-_{kj} > 0} \nu^-_{kj} k^-_j c^{\nu^-_j - e_k} \geq 0,$$

folgt

$$\dot{c}_k = -c_k g_k(c) + h_k(c) \geq -\omega c_k,$$

da $h_k(c) \geq 0$ und $\omega = \max_{t \in [0,a]} g_k(c(t)) < \infty$ ist. Es folgt $c_k(t) \geq e^{-\omega t} c_{0k}$, also $c_k(t) > 0$ für alle $t \in [0, a]$ sofern $c_{0k} > 0$ ist. Dabei ist $0 < a < t_+(c_0)$ beliebig.

Sei $S = R(N) = \operatorname{span}\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$; dieser Teilraum des $\mathbb{R}^n$ heißt *stöchiometrischer Teilraum* des Reaktionssystems. Aus (8.17) folgt nun $\dot{c}(t) \in S$ für alle t, also

$$c(t) \in c_0 + S, \quad t \in J,$$

wobei J das maximale Existenzintervall einer Lösung bezeichne. Der affine Teilraum $c_0 + S$ heißt die zum Anfangswert c_0 gehörige *Kompatibilitätsklasse* des Reaktionssystems, diese ist daher invariant für (8.17). Die Dimension von S sei im Folgenden mit s bezeichnet, es ist natürlich $s \leq m$ und $s \leq n$, aber sogar $s < n$.

Dies sieht man folgendermaßen. Es sei $\beta_i > 0$ die Molmasse der Substanz A_i, β der Vektor mit den Einträgen β_i. Bei chemischen Reaktionen bleibt die Gesamtmasse erhalten. Dies bedeutet

$$(\nu_j|\beta) = \sum_{i=1}^{n} \nu_{ij} \beta_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

also ist $\beta \in R(N)^\perp$, insbesondere ist $s < n$. Ferner haben wir

$$\frac{d}{dt}(\beta|c) = (\beta|\dot{c}) = (\beta|Nr(c)) = 0,$$

also ist $(\beta|c(t)) \equiv (\beta|c_0)$. Daraus folgt mit Hilfe der Positivität der $c_i(t)$ und $\beta_i > 0$, dass alle $c_i(t)$ beschränkt bleiben, womit Lösungen für alle positive Zeiten existieren. Daher erzeugt (8.17) einen Halbfluss auf $\mathbb{R}^n_+$ und auf $\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$.

Wir fixieren eine Basis $\{e_1, \ldots, e_{n-s}\}$ von $R(N)^\perp$ und fassen diese Vektoren in der $n \times (n-s)$-Matrix E^T zusammen. Es gilt also $EN = 0$, d.h. $\ker E = R(N)$. Da man $e_1 = \beta$ wählen kann und alle $\beta_i > 0$ sind, kann man annehmen, dass E nur positive Einträge hat; evtl. addiere man zu den e_j geeignete Vielfache von $e_1 = \beta$. Durch Anwendung von E auf (8.17) erhält man $Ec(t) = Ec_0 =: u_0$ für alle $t \geq 0$, wir haben also $n - s$ Erhaltungssätze.

Die Equilibria von (8.17) sind die Lösungen des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems

$$Nr(c) = 0. \tag{8.19}$$

Da die Kompatibilitätsklassen $(c_0 + S) \cap \mathbb{R}^n_+$ abgeschlossen, beschränkt, konvex und positiv invariant sind, impliziert Satz 7.3.5 die Existenz mindestens eines Equilibriums in jeder dieser Kompatibilitätsklassen, allerdings müssen diese nicht eindeutig sein. *Echte Equilibria* sind nun solche, in denen jede einzelne Reaktion im Gleichgewicht ist, also Lösungen c_* von $r(c) = 0$. Diese können auch auf dem Rand von $\mathbb{R}^n_+$ liegen, wir interessieren uns hier nur für solche im Inneren von $\mathbb{R}^n_+$, die also $c_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ erfüllen; diese werden im Folgenden *positive echte Equilibria* genannt

Ist nun c_* ein positives echtes Equilibrium, so folgt $c_*^{\nu_j} = K_j$ für alle j, insbesondere gilt $\log K_j = (\nu_j | \log c_*)$, wobei $\log c$ den Vektor mit den Komponenten $\log(c_i)$ bezeichnet. Dies ist ein lineares Gleichungssystem für $\log c_*$, das nicht immer lösbar ist. Nummeriert man die ν_j so, dass die ersten s Vektoren linear unabhängig sind, dann erhält man die Verträglichkeitsbedingungen

$$\nu_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{jk} \nu_k, \quad \Pi_{k=1}^{s} K_k^{\alpha_{jk}} = K_j, \quad j = s+1, \ldots, m. \tag{8.20}$$

Ist $s = m < n$, so gibt es stets ein solches c_*, sofern alle $K_j > 0$ sind, und dann ist auch $c_{*i} > 0$ für alle i. Sind nun alle Reaktionen reversibel, gilt also $K_j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$, und sind die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, so existiert ein positives echtes Equilibrium.

Hierbei werden also irreversible Reaktionen ausgeschlossen. Wir nehmen im Folgenden an, dass ein solches positives echtes Equilibrium c_* existiert.

Sei jetzt $\bar{c}$ ein weiteres positives echtes Equilibrium in der gleichen Kompatibilitätsklasse; dann folgt $E(c_* - \bar{c}) = 0$, also $c_* - \bar{c} \in R(N)$, und $(\nu_j | \log c_* - \log \bar{c}) = 0$ für alle j, also $\log c_* - \log \bar{c} \in R(N)^\perp$. Dies impliziert

$$0 = (c_* - \bar{c} | \log c_* - \log \bar{c}) = \sum_{i=1}^{n} (c_{*i} - \bar{c}_i)(\log c_{*i} - \log \bar{c}_i),$$

also $c_{*i} = \bar{c}_i$ für alle i, da log streng wachsend ist. Dies zeigt, dass es in jeder Kompatibilitätsklasse höchstens ein positives echtes Equilibrium geben kann.

Nun definieren wir die Funktion

$$\Phi(c) := \sum_{i=1}^{n} [c_i \log(c_i / c_{*i}) - (c_i - c_{*i})], \quad c_i > 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Es ist $\partial_k \Phi(c) = \log[c_k / c_{*k}]$, und $\Phi''(c) = \mathrm{diag}(1/c_k)$, folglich ist $c = c_*$ das einzige Minimum von Φ, und es ist strikt. Mit $K_j = c_*^{\nu_j}$ erhält man für eine Lösung $c(t)$, die den Rand von $\mathbb{R}^n_+$ nicht trifft,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(c) = (\Phi'(c)|\dot{c}) &= \sum_{j=1}^{m}(\nu_j|\log[c/c_*])r_j(c)\\ &= \sum_{j=1}^{m}(\nu_j|\log[c/c_*])k_j^+(K_j c^{\nu_j^-} - c^{\nu_j^+})\\ &= \sum_{j=1}^{m} k_j^+ c_*^{\nu_j^+}[(c/c_*)^{\nu_j^-} - (c/c_*)^{\nu_j^+}]\log(c/c_*)^{\nu_j}\\ &= -\sum_{j=1}^{m} k_j^+ c^{\nu_j^-} c_*^{\nu_j}[(c/c_*)^{\nu_j} - 1]\log(c/c_*)^{\nu_j} \le 0,\end{aligned}$$

da log streng wachsend ist. Ferner impliziert $\dot{\Phi}(c) = 0$ aus diesem Grund $(c/c_*)^{\nu_j} = 1$, also $c^{\nu_j} = K_j$ für alle j, d.h. c ist ein weiteres echtes Equilibrium. Daher ist

$$\{c \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ :\ \dot{\Phi}(c) = 0\} \subset \{c \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ :\ c^{\nu_j} = K_j,\ j = 1,\dots,m\} =: \mathcal{E}.$$

Die positiv invariante Menge $(c_0+S)\cap\mathbb{R}^n_+$ ist beschränkt und abgeschlossen, also ist die Limesmenge $\omega_+(c_0) \subset (c_0+S)\cap\mathbb{R}^n_+$ nichtleer, kompakt und zusammenhängend. Es gibt nun zwei Möglichkeiten. Die erste ist $\omega_+(c_0) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$, diese wollen wir hier nicht weiter diskutieren. Die zweite Möglichkeit ist $\omega_+(c_0)\cap\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\emptyset \neq \omega_+(c_0)\cap\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \subset \{c \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ :\ \dot{\Phi}(c) = 0\} \subset \mathcal{E},$$

also gibt es mindestens ein positives echtes Equilibrium $\bar{c}$ in der Kompatibilitätsklasse $c_0 + S$. Dieses ist eindeutig bestimmt, also $\omega_+(c_0) = \{\bar{c}\}$, da $\omega_+(c_0)$ zusammenhängend ist.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 8.7.1.

1. *Das System* (8.17) *besitzt zu jedem Anfangswert* $c_0 \in \mathbb{R}^n_+$ *genau eine globale Lösung für* $t \ge 0$. *Diese erfüllt* $c(t) \in \mathbb{R}^n_+ \cap (c_0 + S)$, *wobei* $S = R(N)$ *den stöchiometrischen Teilraum des Reaktionssystems bezeichnet. Ist* $c_0 \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, *dann gilt auch* $c(t) \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ *für alle* $t > 0$.

2. *In jeder Kompatibilitätsklasse* $\mathbb{R}^n_+ \cap (c_0 + S)$ *gibt es mindestens ein Equilibrium.*

3. *Das System* (8.17) *besitzt genau dann ein positives echtes Equilibrium* c_*, *wenn* $K_j > 0$ *für alle* $j = 1,\dots,m$ *gilt, und die Verträglichkeitsbedingungen* (8.20) *erfüllt sind.*

4. *Es existiere ein positives echtes Equilibrium* c_*, *also eine Lösung von* $r(c) = 0$ *mit* $c_{*i} > 0$ *für alle* i. *Dann gilt die Alternative:*

(a) $\omega_+(c_0) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$, *d.h.* $c(t)$ *konvergiert gegen* $\partial\mathbb{R}^n_+$ *für* $t \to \infty$;

(b) *Es gibt genau ein positives echtes Equilibrium* $\bar{c} \in c_0 + S$, *und* $c(t)$ *konvergiert für* $t \to \infty$ *gegen* $\bar{c}$.

Es gibt keine nichttrivialen periodischen Lösungen.

Existiert ein solches c_* nicht, dann ist die Dynamik des Systems (8.17) wesentlich komplizierter.

8.8 Die Methode von Lojasiewicz

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, und sei V eine differenzierbare, strikte Ljapunov-Funktion für $\dot{x} = f(x)$. Wir hatten in Abschnitt 8.6 Konvergenz beschränkter Lösungen bewiesen, sofern die Equilibriumsmenge $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$ in jeder Niveaumenge von V diskret ist. Diese Annahme ist wesentlich, wie in den folgenden Beispielen gezeigt wird.

Beispiel 1. Sei $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+y)(1-\sqrt{x^2+y^2}), \\ \dot{y} &= (y-x)(1-\sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned} \tag{8.21}$$

In Polarkoordinaten liest sich (8.21) als

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r(r-1), \\ \dot{\theta} &= r-1. \end{aligned}$$

Daher ist die Menge der Equilibria $\mathcal{E}$ von (8.21) in G durch den Einheitskreis gegeben, also nicht diskret. Die Lösungen lassen sich explizit angeben zu

$$r(t) = \frac{r_0}{r_0 + (1-r_0)e^{-t}}, \quad \theta(t) = \theta_0 + \log(r_0 + (1-r_0)e^{-t}), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Daher gilt $r(t) \to 1$ und $\theta(t) \to \theta_0 + \log(r_0)$ für $t \to \infty$, d.h. alle Lösungen sind konvergent. Man sieht ferner leicht, dass $V(x,y) = V(r) = (r-1)^2$ eine strikte Ljapunov-Funktion in G ist, denn es gilt

$$\dot{V}(r) = (\nabla V(x,y)|f(x,y)) = -2r(r-1)^2, \quad (x,y) \in G.$$

Beispiel 2. Sei wieder $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(\sqrt{x^2+y^2}-1)^3 - y(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2, \\ \dot{y} &= -y(\sqrt{x^2+y^2}-1)^3 + x(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2. \end{aligned} \tag{8.22}$$

In Polarkoordinaten wird (8.22) zu

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r(r-1)^3, \\ \dot{\theta} &= (r-1)^2. \end{aligned}$$

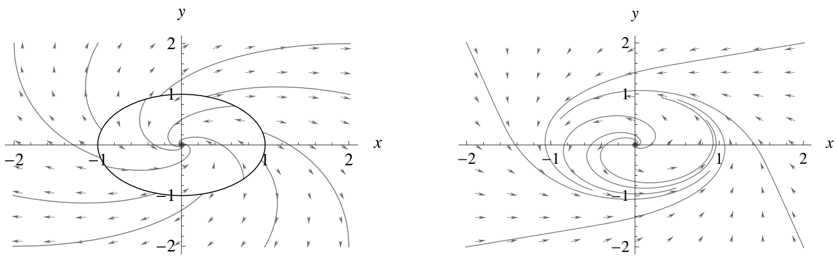

Abbildung 8.2: Phasenportraits zu den Beispielen

Auch in diesem Beispiel ist die Menge der Equilibria $\mathcal{E}$ in G durch den Einheitskreis gegeben, also nicht diskret. Man überzeugt sich leicht, dass $V(x,y) := (r-1)^2$ auch hier eine strikte Ljapunov-Funktion ist, denn es gilt

$$\dot{V}(r) = (\nabla V(x,y)|f(x,y)) = -2r(r-1)^4 < 0, \quad r \neq 1.$$

Insbesondere gilt auch hier $r(t) \to 1$ für $t \to \infty$. Mittels Separation der Variablen erhält man

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{1}{r(r-1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r-1},$$

folglich $\theta(r) = c_0 - \ln(|r-1|/r)$. Damit spiralen die Lösungen für $t \to \infty$, also für $r \to 1$ gegen den Einheitskreis. In diesem Beispiel konvergieren die Lösungen also nicht.

Welche zusätzlichen Eigenschaften sind in solchen Situationen für Konvergenz der Lösungen entscheidend? Dazu definieren wir

$$\alpha(x,y) := \frac{(\nabla V(x,y)|f(x,y))}{|\nabla V(x,y)|_2 |f(x,y)|_2}, \quad (x,y) \in G.$$

Eine einfache Rechnung ergibt $\alpha_1(x,y) = -1/\sqrt{2}$ für Beispiel 1, und $\alpha_2(x,y) = -|r-1|/\sqrt{1+(r-1)^2}$ in Beispiel 2. Man sieht, dass $\alpha_2 \to 0$ für $r \to 1$ gilt, wohingegen $\alpha_1 = -1/\sqrt{2}$, also strikt negativ, insbesondere in der Nähe von $\mathcal{E}$ ist.

Da die Limesmengen der Lösungen ohnehin Teilmengen von $\mathcal{E}$ sind, kommt es nur auf eine Umgebung von $\mathcal{E}$ an. Daher ist es plausibel, die folgende Bedingung zu fordern:

Es gibt eine Umgebung $U \subset G$ von $\mathcal{E}$, sodass es zu jeder kompakten Teilmenge K von U eine Konstante $c(K) > 0$ gibt, mit

$$(W) \quad (\nabla V(x)|f(x)) \leq -c(K)|\nabla V(x)|_2 |f(x)|_2, \quad \text{für alle } x \in K.$$

Man beachte, dass Gradientensysteme diese Bedingung stets erfüllen, und zwar auf ganz G mit Konstante $c = c(G) = 1$.

Sei jetzt $x(t)$ eine globale beschränkte nichtkonstante Lösung von $\dot{x} = f(x)$, und sei $K := \overline{x(\mathbb{R}_+)} \subset G$. Dann gibt es aufgrund von $\omega_+(x) \subset \mathcal{E}$ ein $t_1 \geq 0$ mit $\overline{x([t_1, \infty))} \subset U$, also können wir o.B.d.A. $t_1 = 0$ annehmen. Sei $a \in \omega_+(x)$ beliebig fixiert. V ist auf $\omega_+(x)$ konstant, also $V(y) = V(a)$ auf $\omega_+(x)$, und $V(x(t)) > V(a)$ für alle $t \geq 0$, da V eine strikte Ljapunov-Funktion ist. Sei $\theta \in (0, 1]$ fixiert und setze $\Psi(t) = (V(x(t)) - V(a))^\theta$; man beachte, dass Ψ wohldefiniert ist. Dann erhalten wir mit (W)

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\Psi(t) &= -\theta(V(x(t)) - V(a))^{\theta-1}\frac{d}{dt}V(x(t)) = -\theta\frac{(\nabla V(x(t))|f(x(t))}{(V(x(t)) - V(a))^{1-\theta}} \\
&\geq \theta c(K)|f(x(t))|_2\frac{|\nabla V(x(t))|_2}{(V(x(t)) - V(a))^{1-\theta}} \\
&\geq \theta c(K)|\dot{x}(t)|_2 m,
\end{aligned}$$

sofern wir wüssten, dass

$$\frac{|\nabla V(x(t))|_2}{(V(x(t)) - V(a))^{1-\theta}} \geq m > 0$$

gilt. Nehmen wir an dem sei so. Dann ergibt Integration über $\mathbb{R}_+$

$$\theta c(K)m\int_0^N |\dot{x}(t)|_2 dt \leq -\int_0^N \dot{\Psi}(s)ds = \Psi(0) - \Psi(N) \to \Psi(0) < \infty,$$

also ist $|\dot{x}(\cdot)|_2 \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Das impliziert nun für $t > \bar{t} \geq 0$

$$|x(t) - x(\bar{t})|_2 \leq \int_{\bar{t}}^t |\dot{x}(s)|_2 ds \to 0, \quad \text{für } t, \bar{t} \to \infty,$$

also existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t) =: x_\infty$ und $x_\infty \in \mathcal{E}$.

Diese Argumentationskette ist die *Methode von Lojasiewicz.* Sie beruht in zentraler Weise auf der

Lojasiewicz-Ungleichung. *Sei $V : G \to \mathbb{R}$ aus C^1. Wir sagen, dass für V die* Lojasiewicz-Ungleichung *gilt, wenn es zu jedem kritischen Punkt $a \in G$ von V Konstanten $\theta_a \in (0, 1/2]$, $m_a > 0$ und $\delta_a > 0$ gibt, derart, dass*

$$m_a|V(x) - V(a)|^{1-\theta_a} \leq |\nabla V(x)|_2, \quad \textit{für alle } x \in B_{\delta_a}(a) \subset G,$$

erfüllt ist.

Lojasiewicz selbst hat gezeigt, dass diese Ungleichung gilt, wenn V in G reell analytisch ist. In regulären Punkten von V ist sie trivialerweise erfüllt.

Um den Beweis mit Hilfe der Lojasiewicz-Ungleichung abzuschließen, überdecken wir die kompakte Menge $\omega_+(x) \subset \mathcal{E}$, durch endlich viele Kugeln $B_{\delta_i}(a_i)$ mit $a_i \in \omega_+(x)$, sodass die Lojasiewicz-Ungleichung in diesen Kugeln mit Konstanten

$m_i > 0$ und $\theta_i \in (0, 1/2]$ gilt. Setzt man dann $U_0 = \bigcup_i B_{\delta_i}(a_i)$, $\theta = \min \theta_i$, und $m = \min m_i$, so gilt die Lojasiewicz-Ungleichung auf U_0 und beliebigem $a \in \omega_+(x)$, denn V ist auf $\omega_+(x)$ konstant. Die Lösung $x(t)$ bleibt nach endlicher Zeit in $U \cap U_0$, also o.B.d.A. für alle $t \geq 0$, und damit ist der obige Beweis vollständig. Wir fassen zusammen:

Satz 8.8.1. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $V \in C^1(G; \mathbb{R})$ eine strikte Ljapunov-Funktion für $\dot{x} = f(x)$, und sei $\mathcal{E} = f^{-1}(0) \subset G$ die Equilibriumsmenge. Es gelte die Bedingung (W) und die Lojasiewicz-Ungleichung in einer Umgebung $U \subset G$ von $\mathcal{E}$. Dann konvergiert jede globale beschränkte Lösung $x(t)$ mit $\overline{x(\mathbb{R}_+)} \subset G$ gegen ein Equilibrium.*

Als Anwendung betrachten wir ein Teilchen im Potentialfeld mit Dämpfung.

Beispiel. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus C^2 und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei aus C^1, mit $g(0) = 0$. Ferner existiere ein $\gamma > 0$, sodass

$$(g(y)|y) \geq \gamma |y|_2^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Das Problem

$$\begin{aligned} \ddot{u} + g(\dot{u}) + \nabla \phi(u) &= 0, \\ u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) &= u_1, \end{aligned} \tag{8.23}$$

ist mit $x = [u, \dot{u}]^{\mathsf{T}}$ äquivalent zum System $\dot{x} = f(x)$, wobei

$$f(x) = [\dot{u}, -g(\dot{u}) - \nabla \phi(u)]^{\mathsf{T}} = [x_2, -g(x_2) - \nabla \phi(x_1)]^{\mathsf{T}}$$

ist. Die Equilibriumsmenge $\mathcal{E}$ dieses Systems besteht aus Paaren der Form $(x_1, 0)$, wobei x_1 kritischer Punkt von ϕ ist. Als Ljapunov-Funktion betrachten wir zunächst die Energie

$$V_0(x) = \frac{1}{2}|x_2|_2^2 + \phi(x_1).$$

Diese ist eine strikte Ljapunov-Funktion falls $(g(y)|y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ ist. Man beachte, dass jede Lösung von (8.23) nach rechts beschränkt ist, sofern ϕ koerziv ist, also $\phi(u) \to \infty$ für $|u|_2 \to \infty$ gilt, und nur $(g(y)|y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ ist. Die Funktion V_0 bringt die Lösungen in die Nähe der Equilibriumsmenge. Sie ist allerdings nicht gut genug, um die Lojasiewicz-Technik anwenden zu können. Daher betrachten wir die modifizierte Energie

$$V(x) = \frac{1}{2}|x_2|_2^2 + \phi(x_1) + \varepsilon(\nabla \phi(x_1)|x_2);$$

dabei wird $\varepsilon > 0$ später gewählt. Es ist

$$|f(x)|_2 \leq |x_2|_2 + |g(x_2)|_2 + |\nabla \phi(x_1)|_2 \leq c(x_2)(|x_2|_2 + |\nabla \phi(x_1)|_2),$$

wobei wir $c = c(x_2) = 1 + |g(x_2)|_2/|x_2|_2$ gesetzt haben. Als nächstes ist

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \nabla \phi(x_1) + \varepsilon \nabla^2 \phi(x_1) x_2 \\ x_2 + \varepsilon \nabla \phi(x_1) \end{bmatrix},$$

also

$$|\nabla V(x)|_2 \leq (1+\varepsilon)|\nabla\phi(x_1)|_2 + (1+\varepsilon m(x_1))|x_2|_2,$$

mit $m = m(x_1) := |\nabla^2\phi(x_1)|_2$. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
-(\nabla V(x)|f(x)) &= -(\nabla\phi(x_1) + \varepsilon\nabla^2\phi(x_1)x_2|x_2) + (g(x_2) + \nabla\phi(x_1)|x_2 + \varepsilon\nabla\phi(x_1)) \\
&= (g(x_2)|x_2) + \varepsilon|\nabla\phi(x_1)|_2^2 + \varepsilon(g(x_2)|\nabla\phi(x_1)) - \varepsilon(\nabla^2\phi(x_1)x_2|x_2) \\
&\geq \gamma|x_2|_2^2 + \varepsilon|\nabla\phi(x_1)|_2^2 - \varepsilon c(x_2)|x_2|_2|\nabla\phi(x_1)|_2 - \varepsilon m(x_1)|x_2|_2^2,
\end{aligned}$$

wobei wir $(g(y)|y) \geq \gamma|y|_2^2$ verwendet haben. Die Youngsche Ungleichung ergibt daher

$$-(\nabla V(x)|f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi(x_1)|_2^2 + (\gamma - \frac{\varepsilon c(x_2)^2}{2} - \varepsilon m(x_1))|x_2|_2^2.$$

Für $|x_1|_2 \leq R$ und $|x_2|_2 \leq R$ folgt somit

$$-(\nabla V(x)|f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}(|\nabla\phi(x_1)|_2^2 + |x_2|_2^2),$$

sofern $0 < \varepsilon = \varepsilon(R, c, m, \gamma) \leq 1$ hinreichend klein gewählt wird. Andererseits haben wir

$$|\nabla V(x)|_2|f(x)|_2 \leq C[|x_2|_2^2 + |\nabla\phi(x_1)|_2^2],$$

mit einer hinreichend großen Konstanten $C = C(R)$. Daher ist die Winkelbedingung erfüllt, sofern x beschränkt ist. Dies kann man aber stets annehmen, da wir die Winkelbedingung nur auf kompakten Teilmengen einer Umgebung der Equilibriumsmenge benötigen.

Um die Lojasiewicz-Ungleichung für V zu zeigen, nehmen wir an, sie sei für ϕ erfüllt. Sei $a \in \mathcal{E}$, also insbesondere $\nabla V(a) = 0$ und sei $x \in B_\delta(a)$, mit $\delta > 0$ so klein, dass $|x_2|_2 \leq 1$ und $|\nabla\phi(x_1)|_2 \leq 1$ ist. Dann gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
(V(x) - V(a))^{1-\theta} &\leq C[|x_2|_2^{2(1-\theta)} + |\nabla\phi(x_1)|_2^{2(1-\theta)} + |\phi(x_1) - \phi(a_1)|^{1-\theta}] \\
&\leq C[|x_2|_2 + |\nabla\phi(x_1)|_2] \leq C|\nabla V(x)|_2,
\end{aligned}$$

da $2(1-\theta) \geq 1$ ist. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 8.8.1 erfüllt, und wir erhalten das folgende Korollar.

Korollar 8.8.2. *Sei $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ derart, dass ϕ die Lojasiewicz-Ungleichung erfüllt, $g \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $g(0) = 0$, genüge der Bedingung*

$$(g(y)|y) > 0,\ y \neq 0, \quad (g(y)|y) \geq \gamma|y|_2^2,\ y \in B_\rho(0),$$

mit $\gamma, \rho > 0$. Dann konvergiert jede beschränkte Lösung von (8.23) *gegen einen kritischen Punkt von ϕ.*

Zum Abschluss notieren wir ein weiteres Beispiel.

Beispiel 3. Es sei $g(y) = y$, und $\phi(u) = \frac{1}{2k}(|u|_2^2 - 1)^k$ mit $k \geq 2$. Hier ist $\mathcal{E} = \{0\} \cup \partial B_1(0)$. Da ϕ als Polynom reell analytisch ist, gilt die Lojasiewicz-Ungleichung für ϕ. Es gilt $(g(y)|y) = |y|_2^2$ und offenbar ist ϕ koerziv. Also konvergiert nach Korollar 8.8.2 jede Lösung $u(t)$ gegen ein Equilibrium.

Übungen

1. Führen Sie den Beweis von Satz 8.2.4 aus.

2. Sei $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig wachsend, $\psi(0) = 0$ und $\psi(s) > 0$ für $s > 0$. Konstruieren Sie eine Funktion $\psi_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig, streng wachsend, $\psi_0(0) = 0$ und $\psi(s) \geq \psi_0(s)$ für $s > 0$.

3. Sei $W(x) = (Ax|x)$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass die Matrix A genau dann positiv definit ist, wenn die dazugehörige quadratische Form $W(x)$ positiv definit im Sinne von Definition 8.3.2 ist.

4. Die Funktionen $V_1(x) = |x|_\infty$, $V_2(x) = \max\{x_k : k = 1, \ldots, n\}$, $V_3(x) = |x|_1$ sind nicht differenzierbar. Berechnen Sie $\dot{V}_j(x)$. Vergleichen Sie das Ergebnis für V_3 mit dem für die differenzierbare Funktion $V_4(x) = \sum_j x_j$.

5. Zeigen Sie, dass positiv definite Lösungen der Ljapunov-Gleichung $A^{\mathsf{T}}Q + QA = -I$ eindeutig bestimmt sind.

6. Es sei das lineare System $\dot{x} = A(t)x$ gegeben. Sei $A(t)$ von der Form $A(t) = D(t)+B(t)$ mit stetigen Funktionen $D, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $D(t)$ diagonal, negativ semidefinit und $B(t)$ schiefsymmetrisch, also $B(t) = -B(t)^{\mathsf{T}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ seien. Konstruieren Sie eine Ljapunov-Funktion für das System, und untersuchen Sie seine Stabilitätseigenschaften.

7. Sei $f(t, x)$ τ-periodisch in t, lokal Lipschitz in x, und sei das System $\dot{x} = f(t, x)$ mit $f(t, 0) \equiv 0$ gegeben. Zeigen Sie für die triviale Lösung, dass dann *stabil* bereits *uniform stabil*, und *asymptotisch stabil* schon *uniform asymptotisch stabil* implizieren.

8. Untersuchen Sie die Fisher-Wright-Haldane-Gleichung aus Abschnitt 8.5 für die Fitnessmatrizen

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

und skizzieren Sie die zugehörigen Phasenportraits im Standardsimplex.

9. Sei $V : (-a, a) \to \mathbb{R}$ aus C^1, und $V(0) = V'(0) = 0$.

(i) Zeigen Sie die Lojasiewicz-Ungleichung für V in 0, sofern V eine analytische Fortsetzung auf eine Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{C}$ besitzt, und dass dann $\theta = 1/m$ mit $m = \min\{k \in \mathbb{N} : V^{(k)}(0) \neq 0\}$ gewählt werden kann.

(ii) Geben Sie Funktionen $V \in C^\infty(-a, a)$ an, die die Lojasiewicz-Ungleichung nicht erfüllen.

10. Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus C^2, $V(0) = \nabla V(0) = 0$ und sei $\nabla^2 V(0)$ nicht singulär. Zeigen Sie, dass V die Lojasiewicz-Ungleichung in einer Kugel $B_r(0)$ mit $\theta = 1/2$ erfüllt.