ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020
BLATT 4 (22. 10. 2020), SKRIPTUM BIS SATZ 4.2

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

(spätere Korrekturen in blau)

1. Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit C^∞-Rand und 1_Ω ihre Indikatorfunktion. Zeigen Sie

$$\langle \Delta 1_\Omega, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist.

2. Zeigen Sie, dass

$$F = \frac{1}{\sigma_n}\frac{x}{|x|^n}$$

eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(u) = \operatorname{div} u$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, wobei σ_n die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist. Achtung: obwohl F eigentlich eine vektorwertige Distribution in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^n$ ist, wird das nicht gebraucht um die Behauptung

$$\langle \operatorname{div} F, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

zu zeigen, da $\operatorname{div} F = \frac{1}{\sigma_n}\sum_i \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

3. Gegeben $v \in C^2(\mathbb{R})$, sei $u(x,t) = v(x/\sqrt{t})$ für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie:

$$u_t = u_{xx} \Longleftrightarrow v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung v und damit u.

(ii) Wählen sie die Konstanten in u so, dass

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = 0 \text{ für } x < 0, \qquad \lim_{t\to 0+} u(t,x) = 1 \text{ für } x > 0.$$

(iii) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Funktion $f(x,t) = ((\partial_x u(.,t)) * \varphi)(x)$ (Faltung in der x-Variablen) folgendes Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung löst:

$$f_t - f_{xx} = 0$$
$$\lim_{t\to 0+} f(t,x) = \varphi(x)$$

4. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(x,y) = (8\pi)^{-1}(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

ist eine Fundamentallösung von Δ^2 mit Pol in $(0,0)$ im $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_i x_j x_j}.$$

5. Bestimmen Sie die formal adjungierten Operatoren von

(i) $L\phi \;=\; a(x,y)\phi_x + b(x,y)\phi_y + c(x,y)\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\,,$

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

(ii) $L\phi \;=\; x^2\phi'' + \phi' - 3x^2\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,,$
(iii) $L\phi \;=\; \Delta\phi + v(x)\cdot\nabla\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,,$
mit $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

6. Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von ∂^α in $\mathbb{R}^n$ mit Träger in

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ \forall i = 1 \dots n\},$$

wobei alle $\alpha_i > 0$ sind.

7. Bestimmen Sie Fundamentallösungen mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$ folgender Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}$:
(i) $L(u) = u'$
(ii) $L(u) = u''$
(iii) $L(u) = u' - au$ $(a \neq 0)$ (*Hinweis:* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung u_{hom} der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ und verwenden Sie einen Ansatz der Form $U_0(x) = C_1 u_{hom}(x)$ für $x < 0$, $U_0(x) = C_2 u_{hom}(x)$ für $x > 0$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).