Lineare Algebra und Geometrie 1 (WS 2018/19 - Pinsker)

Prüfung am 31.1.2019

Name: Matrikelnummer:

Nickname:

Übungsgruppe (falls zutreffend) (Zeit / Gruppenleiter):

Ihre Antworten - bitte W (wahr) oder F (falsch) eintragen!

Aufgabe	Antwort A	Antwort B	Antwort C
1	*W*	*W*	*F*
2	*W*	*W*	*W*
3	*W*	*F*	*W*
4	*W*	*F*	*W*
5	*F*	*W*	*F*
6	*W*	*W*	*F*
7	*W*	*F*	*F*
8	*F*	*F*	*F*
9	*F*	*W*	*F*
10	*F*	*F*	*W*
11	*F*	*F*	*W*
12	*F*	*F*	*F*
13	*W*	*F*	*W*
14	*W*	*W*	*W*
15	*F*	*F*	*W*

Erklärungen zum Prüfungsmodus:

- Bitte wählen Sie einen beliebigen Nickname - die Ergebnisse werden als für alle einsehbare Liste unter den Nicknamen veröffentlicht.
- Es sind 15 Aufgaben zu lösen, und jede Aufgabe besteht aus drei Teilfragen (A,B,C), welche jeweils mit WAHR (W) oder FALSCH (F) zu beantworten sind.
- **WICHTIG:** WAHR (W) bedeutet, daß die jeweilige Behauptung für ALLE $X, f, K, \ldots$ aus der gegebenen Annahme folgt. Das heißt, daß die Behauptung notwendig ist (und nicht nur möglich).
- Sie bekommen die bei einer Aufgabe angegebene Punktezahl (diesmal immer 4), wenn Sie **ALLE** drei Teilfragen der Aufgabe richtig beantworten.
- Wenn Sie mindestens eine Teilfrage einer Aufgabe falsch beantworten, so bekommen Sie 0 Punkte.
- In allen anderen Fällen (also Aufgabe entweder gar nicht oder korrekt, aber unvollständig gelöst) bekommen Sie 1 Punkt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Y ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem unendlichen Körper, und sei S eine nichtleere linear unabhängige Teilmenge von Y.

(A) S läßt sich zu einem unendlichen Erzeugendensystem von Y erweitern.

(B) S ist endlich.

(C) Es existiert eine endliche Basis $B \subseteq S$ von Y.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$.

(A) Wenn X eine 5-elementige linear unabhängige Teilmenge besitzt, so hat X mindestens 19 Elemente.

(B) Wenn X unendlich ist, so hat X eine unendliche linear unabhängige Teilmenge.

(C) Wenn X mindestens 19 Elemente hat, so hat X eine 5-elementige linear unabhängige Teilmenge.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein unendlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_3$, und sei S ein Erzeugendensystem von X. Sei weiters $f\colon S \to (\mathbb{Z}_3)^3$ eine Funktion.

(A) f hat höchstens endlich viele paarweise verschiedene Fortsetzungen zu einer linearen Abbildung von X nach $(\mathbb{Z}_3)^3$.

(B) f läßt sich zu einer linearen Abbildung von X nach $(\mathbb{Z}_3)^3$ fortsetzen.

(C) Wenn g, h zwei lineare Fortsetzungen von f auf X sind, so gilt $g = h$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei f eine lineare Abbildung von einem Vektorraum V nach V, und sei B eine Basis des Kernes von f. Seien weiters $b, c \in V \setminus [B]$ verschieden.

(A) Wenn $\{b, c\}$ linear abhängig ist, so gilt $f(b) \neq f(c)$.

(B) Wenn $\{b, c\}$ linear unabhängig ist, so gilt $f(b) \neq f(c)$.

(C) Wenn $\{b, c\} \cup B$ linear unabhängig ist, so gilt $f(b) \neq f(c)$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei W ein Vektorraum über einem Körper K. Auf der Potenzmenge 2^W (= Menge aller Teilmengen) von W definieren wir eine binäre Relation R, indem wir für Teilmengen M, M' von W folgendes festlegen:

$$R(M, M') :\leftrightarrow \ [M] \subseteq [M'].$$

(A) R ist eine Halbordnung.

(B) $\exists M \in 2^W \ \forall M' \in 2^W \ (R(M, M'))$.

(C) R ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei W ein Vektorraum, und M ein Unterraum von W mit $M \neq W$. Auf W definieren wir eine binäre Relation R, indem wir für $u, v \in W$ folgendes festlegen:

$$R(u, v) :\leftrightarrow \ u - v \in M \ .$$

(A) $\exists u, v \in W (\neg R(u, v))$.

(B) R ist eine Äquivalenzrelation.

(C) R ist eine Halbordnung.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K der Charakteristik 3, und sei $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von V. Sei weiters $f \in L(V, K^2)$ so, daß

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \end{pmatrix}, \quad f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(A) f ist surjektiv.

(B) f ist injektiv.

(C) Der Rang von f beträgt 1.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Es gelten die Bedingungen von Aufgabe 7.

(A) Der Kern von f hat ein eindimensionales Komplement in V.

(B) $f(b_1 + b_2)$ ist ein Element des von $f(b_3)$ erzeugten Unterraumes von K^2.

(C) Der Defekt von f beträgt 2.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben seine folgende Matrizen des $\mathbb{Q}^{3\times 2}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A) Es existiert eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ sodaß $B = A \cdot C$.

(B) Die beiden Matrizen sind äquivalent.

(C) Es existiert eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ sodaß $B = C \cdot A$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Sei f jene Abbildung von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^3$, welche durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Seien e_1, e_2, e_3 die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{Q}^3$, und sei

$$e'_1 := e_1,\ e'_2 := e_2,\ e'_3 := e_1 + e_2 + e_3.$$

(A) Der Vektor aus $\mathbb{Q}^3$ mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich (e'_1, e'_2, e'_3) ist im Bild von f enthalten.

(B) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, koordinatisiert nach (e_1, e_2, e_3), ist gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(C) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, koordinatisiert nach (e'_1, e'_2, e'_3), ist gleich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei R ein 3-dimensionaler Vektorraum, und seien $c, d \in R$ linear unabhängig. Sei W ein Komplement von $[\{c, d\}]$ in R, und sei U ein Komplement von W in R.

(A) $c \in [U]$ oder $d \in [U]$.

(B) $[\{c, d\}] = [U]$.

(C) $[\{c, d\}] \cap [U]$ ist ein Unterraum der Dimension mindestens 1.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Es seien folgende Matrixen über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(A) Die durch die Zeilen von A gegebenen Linearformen von $(\mathbb{Z}_2)^4$ sind Elemente des Annullatorraumes von $\{t\}$.

(B) Der Lösungsraum des durch A definierten homogenen linearen Gleichungssystems ist eindimensional.

(C) t ist ein Element des Bildes der durch A definierten linearen Abbildung.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum, $u \in V$, und seien $b_1, b_2, \ldots \in V$ verschiedene Vektoren, welche eine Basis eines Komplementes von $[\{u\}]$ in V bilden. Wir definieren $c_0 := u$, und

$$c_i := b_i - c_{i-1}$$

für alle $i \geq 1$.

(A) $\{c_1, c_2, \ldots\}$ ist eine Basis eines Komplementes von $[\{u\}]$.

(B) $\{c_0, c_1, \ldots\}$ ist linear abhängig.

(C) $\{c_0, c_1, \ldots\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Sei R ein unendlichdimensionaler Vektorraum, und $Y \subseteq R$ ein Erzeugendensystem. Sei weiters $M \subseteq R$ endlich. Die Menge

$$T := \{S \subseteq Y \mid [S] \supseteq M\}$$

ist durch die Inklusion $\subseteq$ halbgeordnet.

(A) T enthält eine linear unabhängige Menge.

(B) T enthält eine endliche linear unabhängige Menge.

(C) T enthält eine endliche Menge.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Sei V jener Unterrraum des $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, welcher von den Funktionen

$$g_j\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x^j$$

(wobei $j \geq 0$) aufgespannt wird. Sei $\xi\colon V \to \mathbb{Q}$ durch

$$\xi(a_0 g_0 + a_1 x + \cdots + a_n g_n) := a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n$$

(wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$) gegeben.

(A) ξ ist in der Hülle der Linearformen $g_0^*, g_1^*, \ldots$ enthalten.

(B) ξ ist im Annullatorraum der Menge $\{g_0, g_1, \ldots\}$ enthalten.

(C) Die Linearformen $g_0^*, g_1^*, \ldots$ sind linear unabhängig.