Allgemeine Bemerkungen zur Aufgabe 208

In dieser Aufgabe gab es zwei Schwierigkeiten: Neben dem eigentlichen mathematischen Problem, die richtigen zyklischen Gruppen zu finden, gab es die Frage, wie man die Lösung in verständlicher Weise präsentiert. Alle Lösungen, die ich gesehen habe, litten an einer (für mich) nur schwer durchschaubaren Notation. Ich versuche hier, einige Hinweise zu geben, wie man die Konstruktion verständlicher präsentieren kann.

Zunächst drei Hinweise für alle jene, die diese Aufgabe gelöst haben, oder die sich zumindest mit einer Lösung beschäftigt haben. (Für die anderen werden die Hinweise nicht verständlich sein.)

1. Es scheint mir sinnvoll, die Konstruktion zunächst nur für p-Gruppen (für eine feste Primzahl p) durchzuführen, also für Gruppen, wo die Ordnung jedes Elements und somit auch die Kardinalität der gesamten Gruppe eine Potenz der Primzahl p ist. Danach sollte es leicht sein, die Lösungen, die man für verschiedene Primzahlen erhalten hat, zusammenzusetzen. (Durch Multiplikation.)

2. Beim Zusammensetzen der Lösungen muss man die zyklischen Gruppen, die man für die einzelnen Primzahlen p bekommen hat, „rechtsbündig“ anschreiben; das heißt: die jeweils höchsten Potenzen, die man im Produkt üblicherweise am Ende, also rechts schreibt, müssen untereinander stehen. Auch beim Finden der Potenzen beginnt man mit der höchsten Potenz.

   Da wir Folgen aber gerne von links nach rechts lesen, legt dies nahe, nicht eine aufsteigende Teilerkette $m_1|m_2|\dots|m_k$ zu suchen, sondern eine absteigende Kette: $m_k|m_{k-1}|\cdots|m_1$. Dann kann man die Gruppen nämlich „linksbündig“ anschreiben. Das vereinfacht die Formel (geringfügig).

3. Für verschiedene Primzahlen p, p' bekommt man aufsteigende (oder absteigende) Folgen von verschiedener Länge k_p, $k_{p'}$. Man kann diese Folgen gleich lang machen, indem man die kürzere Folge mit 0-Werten erweitert. Das ändert nichts an der Mathematik (weil ein Produkt $G \times C_{p^0}$ zu G isomorph ist), aber kann die Notation vereinfachen.

   Um nicht darüber Buch führen zu müssen, welche Primzahl die längste Folge benötigt, ergänzen wir alle Folgen zu formal unendlichen Folgen, die aber nur endlich viele positive Werte haben.

Lösungsskizze, Aufgabe 208

Als ersten Schritt formulieren und beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 1. *Sei p Primzahl, $k \in \mathbb{N}$, und sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung p^k. Dann gibt es eine absteigende Folge $m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots$ von natürlichen Zahlen, die fast alle gleich 0 sind, sodass $G \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_{p^{m_i}}$ gilt.*

(Insbesondere bilden die Kardinalitäten $(p^{m_j} : j \in \mathbb{N})$ dann eine schwach absteigende Teilerkette, denn $p^{m_{j+1}}$ ist Teiler von p^{m_j}.)

(Anmerkung: Statt $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_{p^{m_i}}$ kann man auch $\prod_{i \in \mathbb{N}} C_{p^{m_i}}$ schreiben, weil nur endlich viele Faktoren $\neq \{0\}$ sind.)

Beweisskizze. Das folgt direkt aus dem Hauptsatz für endlich erzeugte Gruppen. Offenbar kommen keine Faktoren der Form C_{q^e} mit $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$, $e > 0$ in Frage. Sei also $G = \bigoplus_n C_{p^n}^{e_{p,n}}$, und sei $S := \sum_n e_{p,n}$. Jeden Summanden (Faktor) $C_{p^n}^{e_{p,n}}$ können wir als Summe (oder Produkt) von zyklischen Gruppen schreiben, somit können wir G als Summe (oder Produkt) von S Summanden (Faktoren) schreiben, jeder davon eine zyklische Gruppe. (Wie? Hier wird ein allgemeines Assoziativgesetz für Produkte verwendet, und zwar?)

Wenn wir die Faktoren der Größe nach (absteigend) ordnen, erhalten wir die ersten S Werte einer absteigenden Folge $(m_i : i \in \mathbb{N})$. Die anderen setzen wir auf 0. □

Satz 2. *Sei G endliche abelsche Gruppe der Ordnung $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p}$.*
Dann gilt:

1. *G ist direkte Summe aller ihrer p-Anteile ($p \in \mathbb{P}$), also $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$.*
   (Für fast alle p ist A_p einelementig.)

2. *A_p lässt sich in der Form $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_{p^{m(p,n)}}$ schreiben, wobei die Folge $(m(p,0), m(p,1), \ldots)$ schwach monoton fallend ist und mit 0 endet.*

   In der folgenden Tabelle versuchen wir die Lesbarkeit dadurch zu erhöhen, dass wir $m(2,0)$ und $m(2,1)$ durch A bzw. A' ersetzen, ebenso $m(3,0)$ und $m(3,1)$ durch B bzw. B'. Man beachte, dass in jeder Zeile ein Produkt mit zwar unendlich vielen Faktoren steht, dass aber in jeder Zeile fast alle Faktoren trivial sind; weiters sind in fast allen Zeilen *alle* Faktoren trivial.

   In der letzten Zeile steht an jeder Stelle das Produkt der Gruppen in der darüber stehenden Spalte. Zum Beispiel gilt $C_{2^A} \times C_{3^B} \times \cdots \simeq C_{2^A \cdot 3^B \cdot \ldots}$.

$$
\begin{array}{ccccc}
C_{2^A} & \times & C_{2^{A'}} & \times & \cdots \\
C_{3^B} & \times & C_{3^{B'}} & \times & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
C_{2^A \cdot 3^B \cdot \ldots} & \times & C_{2^{A'} \cdot 3^{B'} \cdot \ldots} & \times & \cdots
\end{array}
$$

3. *Sei $m(*,k) := \prod_{p \in \mathbb{P}} m(p,k)$ für alle k.*
   Dann ist $G \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} C_{m(*,k)}$, und in der Folge der Werte $m(*,k)$ ist jedes Element durch seinen Nachfolger teilbar: $m(*,k+1) | m(*,k)$.

Beweis. Der erste Punkt ist Satz 3.4.4.6.
Der zweite Punkt ist unser Lemma.
Der dritte Punkt ergibt sich (wie?) aus 3.4.4.1 (siehe Hinweis zu Aufgabe 208). □