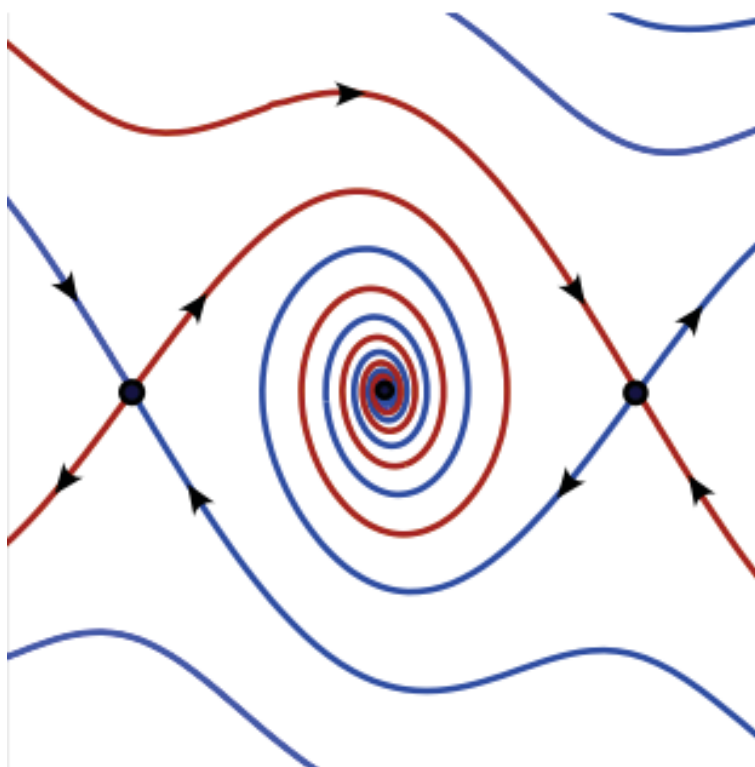

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1



P. SZMOLYAN

WIEN, 2015

“Data aequatione quocunque fluentes quantitae involvente fluxions invenire et vice versa.”
(Isaac Newton)
Frei übersetzt: “Man soll Differentialgleichungen lösen.”

Vorwort

Differentialgleichungen haben in der Mathematik und in vielen ihrer Anwendungen eine zentrale Bedeutung. Historisch betrachtet standen Versuche der Beschreibung physikalischer und geometrischer Probleme - vor allem von Problemen aus der Mechanik - am Anfang der Entwicklung der Mathematik zu ihrer heutigen Form. Die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung war dabei untrennbar mit der Verwendung und Untersuchung von Differentialgleichungen verbunden. Es ist daher natürlich, dass zwischen dem Gebiet Differentialgleichungen viele Querverbindungen zu anderen Gebieten der Analysis aber auch zu anderen Gebieten der Mathematik bestehen. Dabei sind vor allem Algebra, Geometrie, Topologie und die numerische Mathematik zu nennen.

Anwendungen von Differentialgleichungen finden sich in allen Bereichen der quantitativen Wissenschaften, vor allem in Naturwissenschaften und Technik, in den Wirtschaftswissenschaften und immer mehr auch in den Life-Sciences.

Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und vermittelt einige Grundbegriffe aus der Theorie partieller Differentialgleichungen. Damit soll eine Grundlage für das Verwenden von Differentialgleichungen in Anwendungen und für die Beschäftigung mit weiterführenden Fragen aus der Theorie von Differentialgleichungen gelegt werden. Dabei werden viele wichtige Methoden und Konzepte der Analysis und der Linearen Algebra - oft auch kombiniert - verwendet. Somit werden diese Methoden und Konzepte einerseits praktisch eingesetzt und andererseits vor dem Hintergrund ihres gemeinsamen Ursprungs besser verstanden.

Peter Szmolyan

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung und Grundlagen | 2 |
| 1.1 | Bezeichnungen und Begriffsbildungen | 2 |
| 1.2 | Richtungsfeld, Kurven, Vektorfelder | 11 |
| 2 | Elementar integrierbare Differentialgleichungen | 21 |
| 2.1 | Lineare skalare DG 1. Ordnung | 21 |
| 2.2 | Separable Differentialgleichungen | 24 |
| 2.3 | Exakte Differentialgleichungen | 27 |
| 2.4 | Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten | 33 |
| 3 | Existenz und Eindeutigkeit | 42 |
| 3.1 | Lipschitz-Eigenschaft und Eindeutigkeit | 43 |
| 3.2 | Existenz von Lösungen | 46 |
| 3.3 | Fortsetzbarkeit, maximales Existenzintervall und globale Existenz | 51 |
| 3.4 | Stetige Abhängigkeit | 55 |
| 3.5 | Differentialgleichungen höherer Ordnung | 58 |
| 3.6 | Differentialungleichungen, Unter- und Oberlösungen | 59 |
| 4 | Lineare Systeme | 61 |
| 4.1 | Homogene Systeme | 61 |
| 4.2 | Systeme mit konstanten Koeffizienten | 68 |
| 4.3 | Inhomogene Systeme | 72 |
| 4.4 | Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung | 73 |
| 5 | Stabilität | 83 |
| 5.1 | Stabilitätskonzepte | 85 |
| 5.2 | Klassifikation ebener autonomer linearer Systeme | 87 |
| 5.3 | Stabilität linearer Systeme | 90 |
| 5.4 | Linearisierung und Stabilität | 92 |
| 5.5 | Hyperbolische Ruhelagen | 96 |
| 6 | Randwertprobleme | 99 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Randwertprobleme für lineare Systeme 1. Ordnung | 99 |
| 6.2 | Randwertprobleme für lineare DG 2. Ordnung | 100 |
| 6.3 | Greensche Funktion | 109 |
| 6.4 | Eigenwertprobleme und Separationsansatz | 113 |
| 6.5 | Sturm-Liouville Eigenwertprobleme | 121 |

Kapitel 1

Einleitung und Grundlagen

1.1 Bezeichnungen und Begriffsbildungen

Eines der wesentlichen Hilfsmittel bei der mathematischen Beschreibung physikalischer und vieler anderer Vorgänge ist die Beschreibung der Kenngrößen des Systems, die den Zustand des Systems beschreiben, als Funktionen von Ort und Zeit. Die Zustandsvariable und die unabhängigen Variablen werden oft als kontinuierlich angenommen. Die Ortsvariable ist $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ und die Zeitvariable ist $t \in \mathbb{R}$. Der Zustand des Systems wird durch eine Variable $u \in \mathbb{R}^d$ beschrieben. Dabei ist $d \geq 1$ die Dimension der Zustandsvariable. Somit wird der Zustand des Systems als Funktion $u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \mapsto u(t)$ oder $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $x \mapsto u(x)$ oder $u : I \times D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ beschrieben. Die Funktion u wird dabei zunächst mindestens als stetig und sehr oft als k -mal stetig differenzierbar mit $k \geq 1$ angenommen. Dies erlaubt die Beschreibung bzw. Modellierung des zugrundeliegenden Systems mittels Differentialgleichungen, die funktionale Zusammenhänge zwischen den Werten der Funktion u und einigen ihrer Ableitungen beschreiben.

Beispiel 1.1 einige Zustandsgrößen:

1. Position und Geschwindigkeit eines Massenpunktes
2. Temperatur, Dichte, Druck und Geschwindigkeit eines Gases
3. Konzentration einer Substanz
4. Gesamtmasse einer Population (als Maß für die Größe der Population),
5. Vermögen (einer Person, eines Staates)

Geben Sie jeweils d an.

◇

Notation für Ableitungen

Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion einer Variable $x \in I$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die erste Ableitung wird mit $\frac{du}{dx}$ oder u' bezeichnet, die Ableitung an der Stelle x ist $\frac{du}{dx}(x)$ bzw. oder $u'(x)$.

Höhere Ableitungen der Ordnung $k \geq 2$ werden mit $\frac{d^k u}{dx^k}$ bezeichnet. Für höhere Ableitungen niedriger Ordnung schreibt man auch u'' , u''' , etc.

Beispiel 1.2 $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$, $u''(x) = -\sin x$ ◇

Während die Variable x oft einer räumlichen Variable entspricht wird die unabhängige Variable t oft für die Zeit benützt. In diesem Fall schreibt man auch \dot{u} für die erste Ableitung $\frac{du}{dt}$ und \ddot{u} für die zweite Ableitung, etc.

Sei $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion in mehreren Variablen $x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Die partielle Ableitung von u nach x_i , $i = 1, \dots, n$ wird mit $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ oder u_{x_i} bezeichnet.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung $k \geq 2$ werden mit

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_n^{k_n}}$$

mit $k_1 + \dots + k_n = k$ bezeichnet. Anstelle von $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ wird auch $u_{x_i x_j}$ geschrieben, etc. Im Fall einer differenzierbaren Abbildung $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist die Funktional- oder Jacobimatrix die $m \times n$ Matrix

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, m \ j=1, \dots, n},$$

die als $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder du geschrieben wird.

Stetigkeit aller partiellen Ableitungen erster Ordnung in einer Umgebung eines Punktes $x \in D$ impliziert die Differenzierbarkeit von u an der Stelle x , d.h.

$$u(x+h) = u(x) + du(x)h + r(h)$$

mit einem Fehlerterm $r(h)$, für den $\lim_{h \rightarrow 0} \|r(h)\| / \|h\| = 0$ gilt.

Im Fall $n = 2$ oder $n = 3$ werden oft die Variablen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ benützt. Falls auch die Zeit auftritt wird diese mit t bezeichnet.

Beispiel 1.3 $u(x, t) = \cos(x - 2t)$, $u_x(x, t) = -\sin(x - 2t)$, $u_t(x, t) = 2 \sin(x - 2t)$, $u_{xt} = 2 \cos(x - 2t)$ ◇

Differentialgleichungen

Definition 1.1 **Differentialgleichungen (DG)** sind Gleichungen in denen eine Funktion, einige ihrer Ableitungen sowie (möglicherweise) unabhängige Variablen auftreten. Falls die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängt spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung (GDG)**. Falls die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und partielle Ableitungen nach mehr als einer Variablen auftreten spricht man von einer **partiellen Differentialgleichung (PDG)**. Eine **Lösung** einer DG ist eine hinreichend oft differenzierbare Funktion, die beim Einsetzen in die DG diese identisch erfüllt. Unter der **Ordnung** einer DG versteht man die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung. Im Fall einer skalaren Funktion handelt es sich um eine **skalare Differentialgleichung**, im Fall einer vektorwertigen Funktion handelt es sich um ein **System von Differentialgleichungen**.

Eine Differentialgleichung heißt **lineare Differentialgleichung**, wenn die Funktion und ihre Ableitungen in der Gleichung nur linear auftreten, d.h. nur mit Funktionen der unabhängigen Variablen multipliziert und addiert werden. Andernfalls ist die Differentialgleichung **nichtlinear**.

Die abhängigen und die unabhängigen Variablen, der Typ, die Ordnung und die Linearität einer DG sind meistens einfach zu erkennen.

Beispiel 1.4

$$x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} - 5x \frac{dy}{dx} + 7y = 0 \quad \text{lineare gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung für } y(x)$$

$$\dot{y} + t^3 y = e^{-t} \quad \text{lineare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für } y(t)$$

$$\dot{y} + ty^3 = e^{-t} \quad \text{nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für } y(t)$$

$$y'' + 9y = 0 \quad \text{lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für } y(x)$$

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \quad \text{nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für } x(t)$$

$$\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y) \quad \text{System gewöhnlicher DG 1. Ordnung für } (x(t), y(t))$$

$$u_t + 2u_x = 0 \quad \text{lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für } u(t, x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für } u(x, y, z)$$

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{nichtlineare partielle DG 1. Ordnung für } u(t, x)$$

$$u_t + uu_x = u_{xxx} \quad \text{nichtlineare partielle DG 3. Ordnung für } u(t, x)$$

Jede der Funktionen $\sin(x - 2t)$, $2 \cos 3x + 5 \sin 3x$, $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ und $\frac{x}{t}$ löst eine der obigen DG. Welche? ◇

Anmerkung: Die Theorie gewöhnlicher DG ist einfacher als die Theorie partieller DG. Lineare DG sind einfacher als nichtlineare. DG niedriger Ordnung sind einfacher als DG hoher Ordnung. Skalare DG sind einfacher als Systeme von DG.

Im folgenden werden zunächst nur gewöhnliche DG behandelt, die ab jetzt kurz als DG bezeichnet werden. Dabei wird die unabhängige Variable in der Regel mit $t \in \mathbb{R}$ und die gesuchte Lösung mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Definition 1.2 *Eine reelle explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung hat die Form*

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Dabei variiert t in einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und x in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : I \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine gegebene Funktion. Eine Lösung der DG ist eine auf einem Intervall $J \subseteq I$ definierte differenzierbare Funktion $x : J \rightarrow B$, welche die DG für alle $t \in J$ erfüllt, wenn man sie und ihre Ableitung in die DG einsetzt. Im Fall $n = 1$ ist die DG skalar, für $n \geq 2$ handelt es sich um ein n -dimensionales System von DG.

Anmerkung: Falls x und f Werte in \mathbb{C}^n annehmen handelt es sich um eine **komplexe Differentialgleichung**. In diesem Fall ist auch $t \in \mathbb{C}$ zugelassen.

Beispiel 1.5

- a) $x' = t^2 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, explizite skalare DG 1. Ordnung.
 b) zweidimensionales lineares System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + tx_2 \\ x_2' &= -tx_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$x'(t) = A(t)x \quad \text{mit} \quad A(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 3 \end{pmatrix}.$$

◇

Große Teile der Theorie gewöhnlicher DG werden für explizite Systeme 1. Ordnung entwickelt. Dies ist dadurch begründet, dass - wie im folgenden ausgeführt wird - die meisten anderen Typen von gewöhnlichen DG auf diesen Standardtyp zurückgeführt werden können.

Die **allgemeine (implizite) DG 1. Ordnung** hat die Form

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0.$$

mit einer geeigneten Funktion F . Falls diese Gleichung nach x' aufgelöst werden kann, erhält man eine äquivalente explizite DG.

Beispiel 1.6

$(x + t)x' - tx = 0$ implizite DG 1. Ordnung. Für $t + x \neq 0$ kann die DG explizit als $x' = \frac{tx}{t+x}$ geschrieben werden \diamond

Die **allgemeine (implizite) DG n -ter Ordnung**, $n \geq 1$, hat die Form

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

mit einer geeigneten Funktion F . Die gesuchte Lösung wird hier mit y bezeichnet, wobei y skalar oder vektorwertig sein kann. Eine explizite DG n -ter-Ordnung hat die Form

$$y^{(n)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

mit einer geeigneten Funktion G .

Explizite DG höherer Ordnung können immer äquivalent als explizite Systeme 1. Ordnung geschrieben werden. Der Einfachheit halber sei y skalar. Man setzt

$$x_1 := y, \quad x_2 := y', \quad x_3 := y'', \quad \dots \quad x_n := y^{(n-1)}$$

und erhält das n -dimensionale äquivalente System von DG 1. Ordnung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= G(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Resultate für DG höherer Ordnung lassen sich daher meist einfach aus den entsprechenden Resultaten für Systeme 1. Ordnung ableiten.

Beispiel 1.7 Die skalare DG 3. Ordnung

$$y''' + cy' + y(1 - y) = 0$$

mit $c \in \mathbb{R}$ kann unter Verwendung von $x_1 := y$, $x_2 := y'$ und $x_3 := y''$ als dreidimensionales System erster Ordnung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -cx_2 + (x_1 - 1)x_1 \end{aligned}$$

mit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ geschrieben werden. ◇

Ein wichtiger Sonderfall der expliziten DG 1. Ordnung sind solche, bei denen - wie in Bsp. 1.7 - die rechte Seite nicht von der unabhängigen Variable abhängt.

Definition 1.3 *Eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung der Form*

$$x' = f(x)$$

heißt autonom.

Lemma 1.1

[**Translationsinvarianz autonomer DG**]

Sei $x(t)$, $t \in (a, b)$ eine Lösung der autonomen DG $x' = f(x)$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Dann ist Funktion $x_\tau(t) := x(t + \tau)$, $t \in (a - \tau, b - \tau)$ ebenfalls Lösung der DG.

Beweis:

$$x'_\tau(t) = x'(t + \tau) = f(x(t + \tau)) = f(x_\tau(t)).$$

□

Wie bei algebraischen Gleichungen sind auch bei DG lineare Probleme einfacher als nichtlineare. Lineare DG werden oft bei einfachen Modellierungen benützt und sind auch ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung nichtlinearer DG.

Definition 1.4 *Eine lineare DG 1. Ordnung ist eine DG der Form*

$$x'(t) = A(t)x + b(t)$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, einer $n \times n$ -Matrixfunktion $A(t)$ und einer vektorwertigen Funktion $b(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Im Fall $n = 1$ ist die DG skalar, für $n \geq 2$ handelt es sich um ein System von DG.

*Im Fall einer konstanten Matrix A spricht man von einem System von DG mit **konstanten Koeffizienten**.*

*Die Funktion $b(t)$ heißt **Inhomogenität** der DG. Im Fall $b(t) \equiv 0$ nennt man die DG **homogen**.*

Anmerkung: Diese Bezeichnungen sind analog zur Sprechweise bei linearen Gleichungssystemen $Ax = b$. Die rechte Seite b ist die Inhomogenität. Im Fall $b = 0$ ist die Gleichung homogen.

Definition 1.5 Eine skalare lineare DG n -ter Ordnung ist eine DG der Form

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

mit $y(t) \in \mathbb{R}$, **Koeffizientenfunktionen** $a_i(t) \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ und einer **Inhomogenität** $b(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Falls die Koeffizienten nicht von t abhängen handelt es sich um eine DG mit **konstanten Koeffizienten**. Im Fall $b(t) \equiv 0$ nennt man die DG **homogen**.

Anmerkung: a) Im Fall $a_n(t) \neq 0$ kann die DG explizit geschrieben werden und kann daher auch als äquivalentes n -dimensionales System 1. Ordnung geschrieben werden. Meist ist aber das direkte Arbeiten mit der skalaren linearen DG höherer Ordnung effizienter.

b) Bei linearen DG werden oft komplexe Lösungen und komplexe Koeffizientenfunktionen zugelassen, d.h. $x(t) \in \mathbb{C}^n$ bzw. $y(t) \in \mathbb{C}$ und $A(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bzw. $a_i(t) \in \mathbb{C}$ etc.

Typischerweise hat eine DG nicht nur eine Lösung sondern viele Lösungen. Lösungen treten meist als Scharen von Lösungen auf, die von Integrationskonstanten oder anderen Parametern abhängen. Daher stellt sich die Frage, durch welche Bedingungen eine Lösung eindeutig festgelegt wird? Dazu einige einfache Beispiele.

Beispiel 1.8 Die DG

$$x' = f(t)$$

hat die Familie von Lösungen

$$x(t) = F(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

wobei $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist, d.h. $F'(t) = f(t)$. Die Konstante c wird durch die Forderung $x(t_0) = x_0$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ als $c = x_0 - F(t_0)$ eindeutig bestimmt. Konkret erhält man auch

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds.$$

◇

Beispiel 1.9 Die DG

$$x' = ax$$

hat genau die Familie von Exponentialfunktionen

$$x(t) = ce^{at}, \quad c \in \mathbb{R}$$

als Lösungen, die für $t \in \mathbb{R}$ existieren.

Beweis: Offensichtlich ist jede dieser Funktionen Lösung. Es bleibt noch zu zeigen, dass alle Lösungen der DG von dieser Form sind. Sei $\varphi(t)$ eine Lösung, d.h. $\varphi' = a\varphi$. Aus der Rechnung

$$(e^{-at}\varphi(t))' = -ae^{-at}\varphi + e^{-at}\varphi' = -ae^{-at}\varphi + ae^{-at}\varphi = 0$$

folgt

$$e^{-at}\varphi(t) = c,$$

woraus $\varphi(t) = ce^{at}$ folgt.

Die Konstante c ist der Wert von $x(0)$. Wenn man $x(t_0) = x_0$ vorgibt, legt dies c als $c = x_0e^{-at_0}$ fest. \diamond

Beispiel 1.10 Die DG

$$y^{(n)}(t) = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}$$

mit Integrationskonstanten $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n-1$. Dies folgt sofort durch n -maliges Integrieren nach t . Dabei gilt $y^{(k)}(0) = k!c_k$ für $k = 0, \dots, n-1$. Umgekehrt legt die Forderung

$$y(t_0) = a_1, \quad y'(t_0) = a_2, \quad \dots, y^{(n-1)}(t_0) = a_n$$

mit $a \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung eindeutig fest. \diamond

Anmerkung: An diesen Beispielen sieht man, dass das explizite Lösen von einfachen gewöhnlichen DG eng mit dem Durchführen von Integrationen verbunden ist. Das Lösen von DG nennt man daher auch oft die Integration von DG.

Diese Beispiele legen nahe, dass bei einer skalaren DG 1. Ordnung durch Vorgabe des Wertes der Lösung an einer Stelle t_0 eine eindeutige Lösung der DG festgelegt wird. Später wird bewiesen, dass diese Vermutung auch für Systeme von DG 1. Ordnung richtig ist.

Definition 1.6 Gegeben sei eine DG 1. Ordnung $x' = f(t, x)$, $t \in I$, $x \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $t_0 \in I$, $x_0 \in B$. Die DG zusammen mit der Bedingung $x(t_0) = x_0$ nennt man **Anfangswertproblem (AWP)**. Der Wert x_0 ist der **Anfangswert**, der Wert t_0 ist der **Anfangszeitpunkt**.

Durch Umschreiben einer skalaren DG n -ter Ordnung in ein n -dimensionales System 1. Ordnung wird klar, dass das Anfangswertproblem bei einer skalaren DG n -ter Ordnung darin besteht, die Werte von $y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ an einer Stelle $t_0 \in I$ vorzugeben.

Eine andere Möglichkeit bestimmte Lösungen einer gewöhnlichen DG zu spezifizieren besteht darin, an zwei Stellen Bedingungen an die Lösung der DG zu stellen. Dabei wird meist $t \in [t_0, t_1]$ betrachtet und es werden Bedingungen an $x(t_0)$ und $x(t_1)$ gestellt. Aufgaben dieser Art heißen **Randwertprobleme** (RWP).

Beispiel 1.11 Für ein n -dimensionales System von DG 1. Ordnung $x' = f(t, x)$ kann ein RWP z.B. die Form

$$R_0 x(t_0) + R_1 x(t_1) = b$$

mit $n \times n$ Matrizen R_0, R_1 und $b \in \mathbb{R}^n$ haben. Der Fall $R_0 = I$ und $R_1 = 0$ entspricht dabei dem AWP. \diamond

Beispiel 1.12 Für eine skalare DG 2. Ordnung $y'' = f(t, y, y')$, $t \in [t_0, t_1]$ werden sehr oft die Werte von y an den Randpunkten vorgegeben $y(t_0) = y_0$ und $y(t_1) = y_1$ mit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. \diamond

Die Randbedingungen können auch Bedingungen an Ableitungen der Lösung enthalten. Randwertprobleme sind schwieriger als Anfangswertprobleme. Daher werden zunächst nur Anfangswertprobleme betrachtet.

Fragestellungen

Durch die Theorie von DG ziehen sich verschiedene allgemeine Fragen, die sowohl vom mathematischen Standpunkt als auch aus Sicht der Anwendungen von DG von zentraler Bedeutung sind.

1. Existieren Lösungen?
2. Ist die Lösung eindeutig oder gibt es mehrere Lösungen?
3. Existiert die Lösung eines Anfangswertproblems lokal oder global? Darunter versteht man die folgende Frage. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ das Intervall in dem die unabhängige Variable variiert. Unter einer lokalen Lösung versteht man eine Lösung, die nur auf einem - möglicherweise kleinen - Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$ definiert ist. Eine globale Lösung ist hingegen auf ganz I definiert, dies ist vor allem im Fall $I = \mathbb{R}$ interessant.
4. Wie hängt die Lösung von den Daten ab? Unter den Daten versteht man z.B. im Fall eines AWP $x' = f(t, x)$ den Anfangswert x_0 und den Anfangszeitpunkt t_0 . Falls die DG von zusätzlichen Parametern abhängt werden auch diese zu den Daten des Problems gezählt. Etwas allgemeiner betrachtet sind die Funktion $f(t, x)$ und die Anfangsdaten die Daten des Problems.

Im Fall von DG, die bei der Modellierungen realer Prozesse auftreten, ist die stetige Abhängigkeit der Lösungen von Daten eine natürliche Forderung. Dies bedeutet

vereinfacht gesprochen, dass kleine Änderungen in den Daten kleine Änderungen der Lösungen bewirken.

5. Wie berechnet man Lösungen? In einfachen Fällen können Lösungen analytisch, d.h. formelmäßig, gefunden werden. Dies ist aber eher die Ausnahme, meistens können Lösungen nur näherungsweise berechnet werden. Dabei werden numerischen Methoden bzw. Störungsmethoden verwendet.
6. Wie verhalten sich die Lösungen qualitativ? Dabei wird das Verhalten der Lösungen untersucht, ohne die Lösungen explizit zu kennen. Typische Fragen sind: Sind die Lösungen beschränkt? Sind die Lösungen positiv? Werden Lösungen unbeschränkt? Sind die Lösungen periodisch? Wie verhalten sich die Lösungen für $t \rightarrow \infty$? Konvergieren die Lösungen für $t \rightarrow \infty$? Wie ändert sich das Verhalten der Lösungen bei Variation von Parametern?

1.2 Richtungsfeld, Kurven, Vektorfelder

Explizite DG 1. Ordnung haben eine einfache geometrische Interpretation.

Richtungsfeld

Zunächst wird der skalare Fall betrachtet. Sei

$$x' = f(t, x), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad x \in B \subseteq \mathbb{R}$$

eine skalare explizite DG 1. Ordnung. Für eine Lösung $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Graph

$$\{(t, x(t)), t \in J\} \subset \mathbb{R}^2$$

eine Kurve im \mathbb{R}^2 . Da $x(t)$ differenzierbar ist der Anstieg der Tangente an den Graph im Punkt $(t, x(t))$ gleich $x'(t)$ und daher aufgrund der DG gleich $f(t, x(t))$.

Anders ausgedrückt gilt: $\{(t, x(t)), t \in J\}$ ist eine differenzierbare Kurve im \mathbb{R}^2 , die im Punkt $(t, x(t))$ den Tangentialvektor $(1, x'(t))$ bzw. $(1, f(t, x(t)))$ hat. In jedem Punkt $(t, x) \in I \times B$ ist der Tangentialvektor an eine durch diesen Punkt verlaufende Lösung gleich $(1, f(x))$, siehe Abb. 1.1. Lösen der DG bedeutet Kurven zu finden, die in jedem auf der Kurve liegenden Punkt (t, x) den Tangentialvektor $(1, f(x))$ haben.

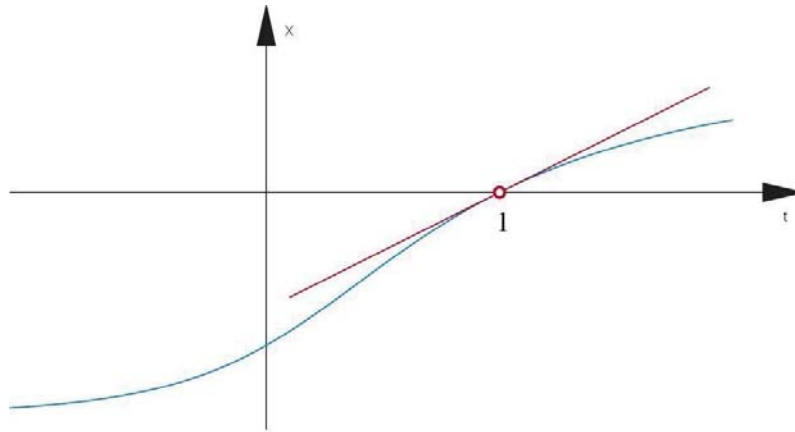


Abbildung 1.1: Lösung des AWP $x' = (1 - x^2)/(1 + t^2)$, $x(1) = 0$ mit Tangente im Punkt $(1, 0)$

Definition 1.7 Ein Zahlentripel $(t, x, k) \in \mathbb{R}^3$, bei dem man die Zahl k als den Anstieg einer Geraden durch den Punkt (t, x) interpretiert, nennt man **Linienelement**. Für eine skalare DG $x' = f(t, x)$, $t \in I$, $x \in B$ nennt man die Gesamtheit aller Linienelemente $(t, x, f(t, x))$, $(t, x) \in I \times B$ das **Richtungsfeld** der DG.

Ein Richtungsfeld kann veranschaulicht werden, indem man durch hinreichend viele Punkte der (t, x) -Ebene ein kleines Geradenstück mit Anstieg $f(t, x)$ zeichnet, siehe Abb. 1.2. Dadurch bekommt man meist eine gute Vorstellung vom Verlauf der Lösungskurven

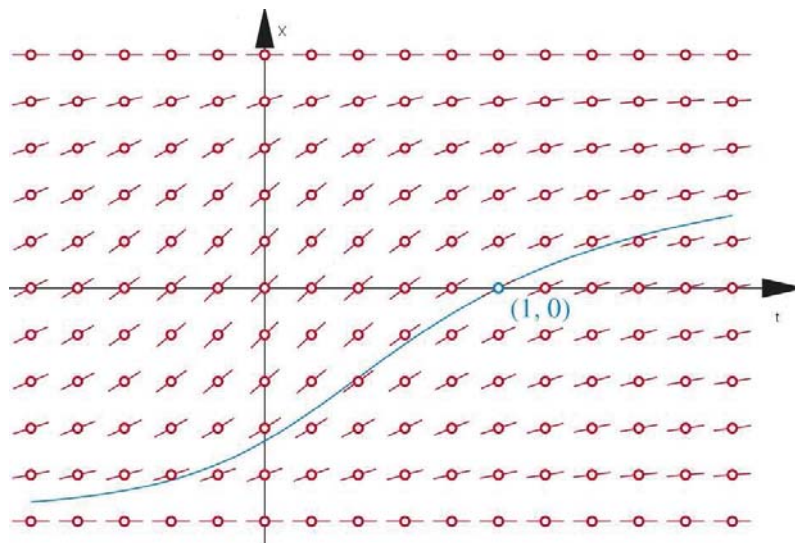


Abbildung 1.2: Richtungsfeld der DG $x' = (1 - x^2)/(1 + t^2)$ und Lösung des AWP $x(1) = 0$

der DG. Das Zeichnen eines Richtungsfeldes erfolgt am Einfachsten unter Verwendung von mathematischer Software wie *Mathematica* und *Maple*. Beim Anfertigen von Handzeichnungen ist es manchmal nützlich einige der durch die Gleichung

$$f(t, x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

definierten **Isoklinen** zu zeichnen. Isoklinen sind Kurven in der (t, x) -Ebene entlang denen das Richtungsfeld einen konstanten Anstieg hat.

Wiederholung: Kurven und Tangenten

Auch bei Systemen von DG 1. Ordnung werden Lösungen geometrisch als Kurven interpretiert. Die wichtigsten dafür relevanten Begriffsbildungen werden im folgenden zusammengefasst.

Definition 1.8 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, heißt **Parameterdarstellung einer Kurve oder Weg**. Das Bild der Abbildung $\{c(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ ist die **Kurve**. Im Fall $I = [t_0, t_1]$ heißt $c(t_0)$ der **Anfangspunkt** der Kurve, $c(t_1)$ ist der **Endpunkt** der Kurve. Die Parameterdarstellung legt eine **Orientierung** der Kurve, das ist die Richtung in der die Kurve durchlaufen wird, fest.

Anmerkung: Eine Kurve kann durch verschiedene Parameterdarstellungen beschrieben werden. Geometrische Eigenschaften der Kurve müssen unabhängig von der Wahl einer konkreten Parameterdarstellung sein. Dies ist der Grund für die Unterscheidung zwischen Parameterdarstellung einer Kurve und der Kurve als geometrischem Objekt. In der Praxis ist man bei dieser Unterscheidung allerdings oft nicht so genau.

Beispiel 1.13 Die Abbildung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (e^{at} \cos bt, e^{at} \sin bt), \quad a, b \in \mathbb{R}$ parametrisiert für $a, b \neq 0$ eine logarithmische Spirale, siehe Abb. 1.3. Wie hängt die Orientierung dieser Kurve von a und b ab? Welche Kurven erhält man im Fall $a = 0$ oder $b = 0$? ◇

Definition 1.9 Eine Kurve heißt **regulär**, wenn sie eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $c'(t) \neq 0, t \in I$ besitzt. Der Vektor $c'(t)$ ist der **Tangentialvektor** an die Kurve im Punkt $c(t)$. Eine Parameterdarstellung der **Tangente** an die Kurve im Punkt $c(t)$ ist $x(s) = c(t) + c'(t)s, s \in \mathbb{R}$.

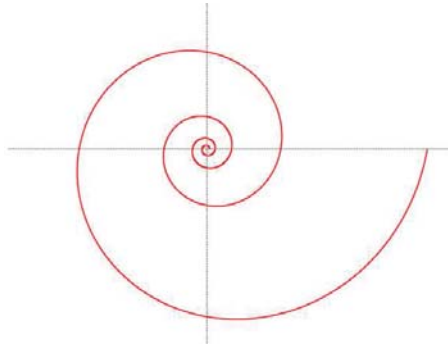


Abbildung 1.3: Logarithmische Spirale

Anmerkung: Falls $x(t) \in \mathbb{R}^n$ als die Position eines sich bewegenden Punktes zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ aufgefasst wird, ist $v(t) := x'(t)$ dessen **Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt t . Falls $x(t)$ zweimal differenzierbar ist, ist $a(t) := v'(t) = x''(t)$ die **Beschleunigung** zum Zeitpunkt t .

Kurven können auch durch Gleichungen beschrieben werden.

Beispiel 1.14 Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschreibt den Kreis mit Radius $r > 0$ in der (x, y) -Ebene. Die Gleichung kann nach x bzw. nach y aufgelöst werden

$$x_{\pm}(y) = \pm\sqrt{r^2 - y^2}, \quad y \in [-r, r] \quad \text{bzw.} \quad y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r],$$

wobei jede der Funktionen $x_{\pm}(y)$ und $y_{\pm}(x)$ einen Halbkreis beschreibt. Alternativ dazu kann der Kreis durch

$$(x, y) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

parametrisiert werden. ◇

In der Regel ist zu erwarten, dass eine skalare Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

eine Kurve von Lösungen besitzt. Der **Satz über implizite Funktionen** gibt Bedingungen an, die dies zumindest lokal sicherstellen: 1) f sei einmal stetig partiell differenzierbar, 2) $f(x_0, y_0) = 0$ und 3) $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann kann die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal, d.h. in einer Umgebung von (x_0, y_0) , nach $y = h(x)$ aufgelöst werden. Im Fall $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ kann lokal nach $x = g(y)$ aufgelöst werden. An - sogenannten singulären - Punkten (x_0, y_0) mit

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

kann die Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = 0$ eine kompliziertere Struktur haben. An solchen Punkten können z.B. Spitzen und Doppelpunkte auftreten.

Beispiel 1.15 Die Gleichung

$$y^2 - a^2 x^3 = 0$$

definiert die Neil'sche Parabel, die bei $(0, 0)$ einen singulären Punkt hat, siehe Abb. 1.4. Man kann die Gleichung nach y auflösen

$$y_{\pm}(x) = \pm a\sqrt{x^3}, \quad x \geq 0$$

Bei $(0, 0)$ hat die Neil'sche Parabel eine Spitze, da $\lim_{x \rightarrow 0+} y'_{\pm}(x) = 0$ gilt.

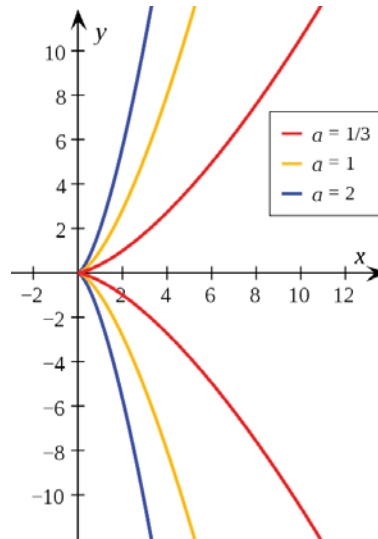


Abbildung 1.4: Neil'sche Parabel

Eine Parameterdarstellung der Neil'schen Parabel ist

$$x = t^2, \quad y = at^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

An der Spitze ist diese nicht regulär, da $(x'(t), y'(t)) = (2t, 3at^2)$ bei $t = 0$ verschwindet. \diamond

Beispiel 1.16 Die kubische Gleichung

$$x^2(x + 1) - y^2 = 0$$

beschreibt eine Kurve mit einem Doppelpunkt bei $(0, 0)$, siehe Abb. 1.5. Dies folgt aus der expliziten Auflösung

$$y_{\pm}(x) = \pm x\sqrt{x + 1}, \quad x \geq -1.$$

Die Funktionen $y_+(x)$ und $y_-(x)$ sind bei $x = 0$ differenzierbar und es gilt $y'_{\pm}(0) = \pm 1$, was den Anstiegen der beiden Zweige im Doppelpunkt entspricht.

Diese Kurve hat die reguläre Parameterdarstellung

$$x = t^2 - 1, \quad y = t(t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

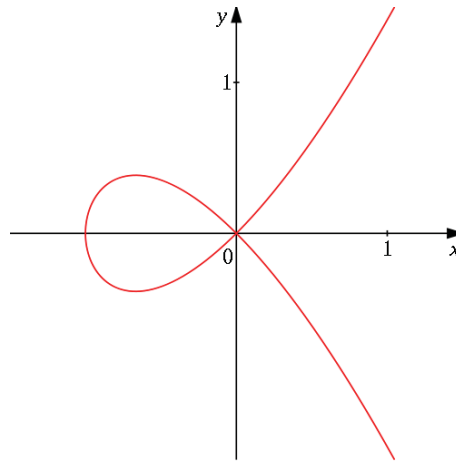


Abbildung 1.5: kubische Kurve mit Doppelpunkt

Dem Doppelpunkt entspricht dabei $t = -1$ und $t = 1$. ◇

Anmerkung: Die Parametrisierung einer Kurve kann Punkte enthalten, die nicht regulär sind, obwohl die entsprechende Kurve regulär ist. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Parameterdarstellung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, t^3)$ der ersten Mediane, die (warum?) regulär ist.

Im \mathbb{R}^n benötigt man $(n - 1)$ Gleichungen, um eine Kurve als Lösungsmenge eines Gleichungssystems zu beschreiben. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ die Gleichung $f(x) = 0$ in einer Umgebung einer Stelle a nach $(n - 1)$ der Variablen (x_1, \dots, x_n) aufgelöst werden falls gilt: 1) f ist stetig differenzierbar, 2) $f(a) = 0$ und 3) die $(n - 1) \times n$ Matrix $df(a)$ hat Rang $n - 1$. In diesem Fall definiert die Gleichung $f(x) = 0$ zumindest lokal eine Kurve.

Wiederholung: Niveaumengen, Maxima und Minima

Für $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist $N_c(f) := \{x \in B : f(x) = c\}$ die **Niveaumenge** von f zum Niveau c . Im Fall $n = 2$ spricht man auch von Niveaulinien bzw Höhenlinien. Im weiteren sei f zweimal stetig differenzierbar.

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass in einer Umgebung eines Punktes p mit $\nabla f(p) \neq 0$ die Niveaumengen von f im Fall $n = 2$ glatte Kurven, im Fall $n = 3$ glatte Flächen und im Fall $n > 3$ glatte (Hyper)flächen sind. Punkte mit $\nabla f = 0$ heißen **kritische Punkte** von f . Falls die Hessematrix

$$H(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$$

an einem kritischen Punkt p positiv bzw. negativ definit ist, besitzt f an der Stelle p ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum.

Für $c \approx f(p)$ sind die Niveaumengen $N_c(f)$ im Fall eines Minimums für $c > f(p)$ und im Fall eines Maximums für $c < f(p)$ in einer Umgebung von p geschlossene Flächen. Im Fall $n = 2$ sind diese Niveaulinien näherungsweise Ellipsen, für $n = 3$ sind die Niveauflächen näherungsweise Ellipsoide.

Falls $H(p)$ an einem kritischen Punkt regulär und indefinit ist handelt es sich um einen Sattelpunkt. In diesem Fall sind die Niveaumengen $N_c(f)$ für $c \approx f(p)$ in einer Umgebung von f nicht geschlossen. Im Fall $n = 2$ sind diese Niveaulinien lokal näherungsweise Hyperbeln, für $n = 3$ sind die Niveauflächen näherungsweise Hyperboloide.

Beispiel 1.17 In Abb. 1.6 sind der Graph und die Niveaulinien einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

mit zwei lokalen Maxima, einem lokalem Minimum und zwei Sattelpunkten dargestellt. Versuchen Sie so eine Funktion $f(x, y)$ explizit anzugeben. \diamond

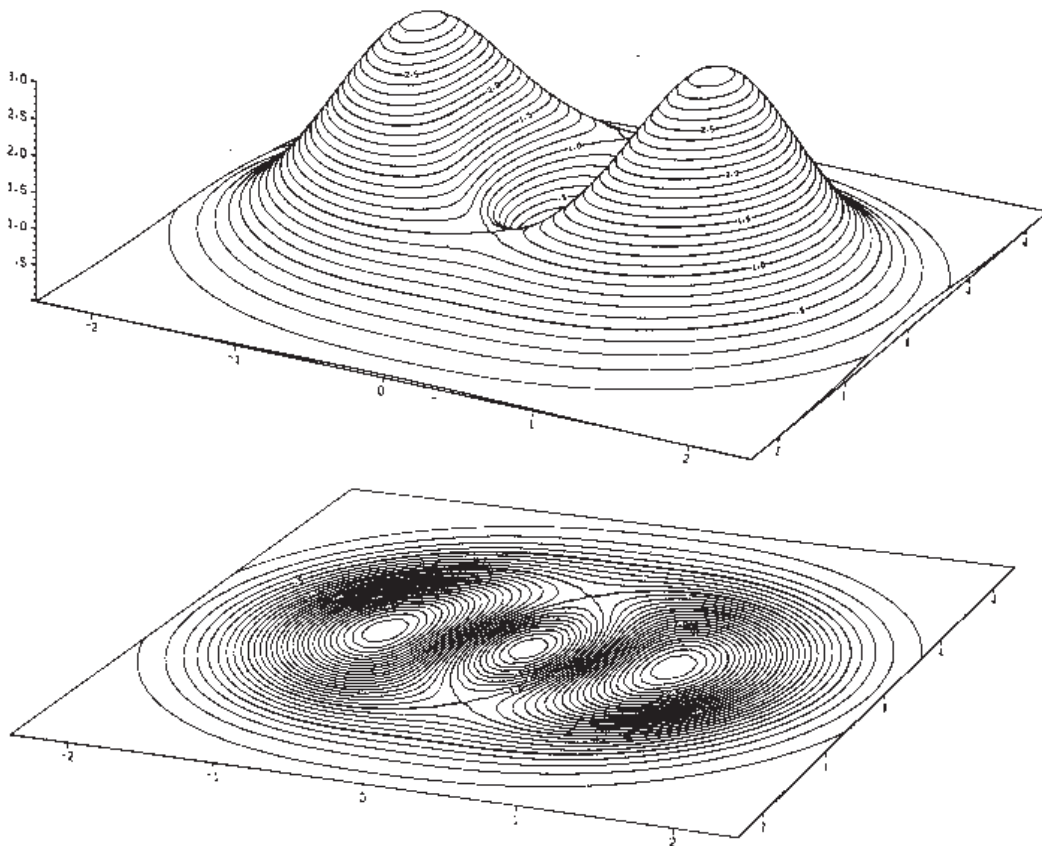


Abbildung 1.6: Graph und Niveaulinien

Vektorfelder, Integralkurven, Lösungskurven

Definition 1.10 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und I ein Intervall. Eine Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld** auf B . Eine Funktion $f : I \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **zeitabhängiges Vektorfeld**.

Ein Vektorfeld kann veranschaulicht werden, indem man sich in jedem Punkt $x \in B$ den zugehörigen Vektor $f(x)$ angeheftet denkt, siehe Abb. 1.7.

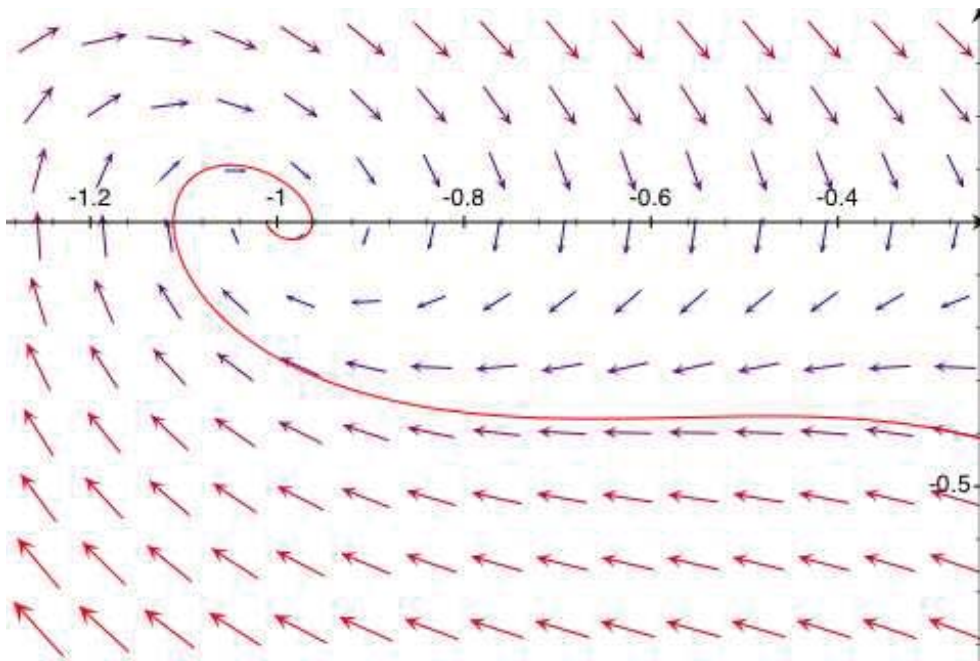


Abbildung 1.7: Vektorfeld und Integralkurve

Einer Lösung $x(t), t \in I$ der DG $x' = f(x)$ entspricht eine Kurve, die in jedem auf der Kurve liegenden Punkt x den Tangentialvektor $f(x)$ hat. Man sagt, die Lösungen der DG sind die **Integralkurven** des Vektorfeldes.

Für eine Lösung $x(t), t \in I$ der zeitabhängigen DG $x' = f(t, x)$ ist die **Lösungskurve** der Graph $\{(t, x(t)), t \in I\}$ der Lösung. Der Tangentialvektor im Punkt (t, x) einer Lösungskurve ist $(1, f(t, x))$.

Natürlich kann man auch im autonomen Fall Lösungskurven im \mathbb{R}^{n+1} betrachten. Unter der Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto x$ werden Lösungskurven einer autonomen DG auf Integralkurven abgebildet.

Beispiel 1.18 Das AWP $u' = v, v' = -u, u(0) = 1, v(0) = 0$ hat die Lösung $u(t) = \cos t, v(t) = -\sin t$. In Abbildung 1.8 sind in (b) die Lösungskurve und in (c) die Integralkurve $u^2 + v^2 = 1$ dargestellt. \diamond

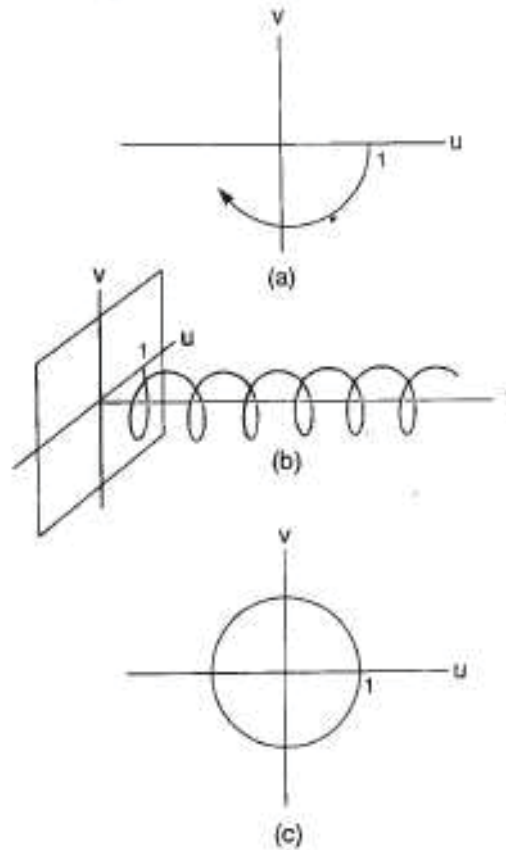


Abbildung 1.8: Lösungskurve und Integralkurve der DG $u' = v, v' = -u$

Anmerkung: Eine nichtautonome DG $x' = f(t, x)$, $t \in I$, $x \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ kann immer äquivalent als eine autonome DG auf $I \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ geschrieben werden.

$$\begin{aligned}\tau' &= 1 \\ x' &= f(\tau, x)\end{aligned}$$

Die Integralkurven dieses erweiterten autonomen Systems sind genau die Lösungskurven der nichtautonomen DG $x' = f(t, x)$.

Anmerkung: Bei der Untersuchung von DG sind geeignete durch Gleichungen definierte ebene Kurven oft ein nützliches Hilfsmittel. So sind im Fall einer expliziten DG 1. Ordnung $x' = f(t, x)$ die **Isoklinen** die Lösungskurven der Gleichung $f(t, x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ in der (t, x) -Ebene.

Im Fall zweidimensionaler autonomer Systeme

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

spielen die durch $f(x, y) = 0$ bzw. $g(x, y) = 0$ definierten **Nulllinien** bei der qualitativen Untersuchung der Lösungen oft eine wichtige Rolle. Auf der Nulllinie $f(x, y) = 0$ ist

das Vektorfeld vertikal, auf der Nulllinie $g(x, y) = 0$ ist das Vektorfeld horizontal. Die Vorzeichenverteilung von f und g legt fest, wo x bzw. y wächst oder fällt.

Erhaltungsgrößen

Sei $h : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x' = f(x)$, $x \in B$ eine autonome DG. Für eine Lösung $x(t)$ der DG gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}h(x(t)) = \nabla h(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla h(x(t)) \cdot f(x(t)).$$

Falls $\nabla h(x) \cdot f(x) = 0$ für alle $x \in B$ gilt, ist die Funktion h längs der Lösungen der DG konstant.

Definition 1.11 *Eine stetig differenzierbare Funktion $h : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine **Erhaltungsgröße** der DG $x' = f(x)$, $x \in B$, falls gilt*

$$\nabla h(x) \cdot f(x) = 0, \quad \forall x \in B$$

Sei h eine Erhaltungsgröße für die DG $x' = f(x)$. Die Lösung des AWP $x(0) = a \in B$ liegt in diesem Fall zur Gänze in der Niveaumeng $N_c(h)$ mit $c = h(a)$. Im Fall $n = 2$ sind die Integralkurven der DG daher Teilmengen der Niveaulinien der Funktion h . Somit ist in diesem Fall das Bestimmen der Integralkurven der DG im wesentlichen auf die Untersuchung der Niveaulinien der Erhaltungsgröße h zurückgeführt.

Beispiel 1.19 Für $k \in \mathbb{R}$ hat die DG

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= kx \end{aligned}$$

die Erhaltungsgröße $h(x, y) = y^2 - kx^2$. In den Fällen a) $k < 0$, b) $k = 0$ und c) $k > 0$ liegen die Integralkurven daher auf a) Ellipsen, b) Geraden und c) Hyperbeln. \diamond

Kapitel 2

Elementar integrierbare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden Methoden zum expliziten Lösen einiger Klassen von DG behandelt. Bei diesen Methoden wird das Lösen einer DG auf die Berechnung von Stammfunktionen bzw. von bestimmten Integralen zurückgeführt. Man sagt, die DG ist bis auf Integration gelöst. Die Gesamtheit aller Lösungen einer DG nennt die **allgemeine Lösung** der DG. Diese hängt meist von freien Integrationskonstanten ab, die an Anfangsbedingungen oder Randbedingungen angepasst werden können.

2.1 Lineare skalare DG 1. Ordnung

Eine explizite lineare DG 1. Ordnung hat die Form

$$x'(t) = a(t)x + b(t) \quad (2.1)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktionen $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Daher besitzt $a(t)$ eine Stammfunktion $A(t) := \int a(t)dt$.

Satz 2.1 Die allgemeine Lösung der DG (2.1) ist

$$x(t) = e^{A(t)} \left(c + \int e^{-A(t)} b(t) dt \right), \quad t \in I$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Funktion $x_h(t) := e^{A(t)}$ löst die homogene DG $x' = a(t)x$. Die im Satz angegebene Funktion $x(t)$ löst die inhomogene DG $x' = a(t)x + b(t)$.

Es bleibt zu zeigen, dass alle Lösungen diese Form haben. Sei $x(t)$ eine Lösung der DG (2.1). Für die Funktion $y(t) := e^{-A(t)}x(t)$ gilt

$$y'(t) = -a(t)e^{-A(t)}x(t) + e^{-A(t)}x'(t) = -a(t)e^{-A(t)}x(t) + e^{-A(t)}(a(t)x(t) + b(t)).$$

Somit gilt

$$y'(t) = e^{-A(t)}b(t)$$

woraus

$$y(t) = \int e^{-A(t)}b(t)dt + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen. Die auftretenden Integrale existieren wegen der Stetigkeit der Funktionen $a(t)$, $b(t)$. \square

Anmerkung: Die Funktion $ce^{A(t)}$, $c \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung der homogenen DG $x' = a(t)x$. Die Funktion $e^{A(t)} \int e^{-A(t)}b(t)dt$ ist eine Lösung (Partikulärlösung) der inhomogenen DG $x' = a(t)x + b(t)$.

Beispiel 2.1 Gesucht ist die Lösung des AWP

$$x' = -tx + t, \quad x(0) = 3$$

Mit $a(t) = -t$ ist $A(t) := \int a(t)dt = -t^2/2$. Daher ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(c + \int e^{\frac{t^2}{2}} t dt \right) = ce^{-\frac{t^2}{2}} + 1.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $c = 2$. \diamond

Manche nichtlineare DG können durch geeignete Transformationen auf lineare DG zurückgeführt werden.

Bernoulli-Differentialgleichung

Eine skalare DG der Form

$$x' = p(t)x + q(t)x^\alpha \tag{2.2}$$

mit $\alpha \neq 0, 1$ heißt Bernoulli-Differentialgleichung. Die Funktionen $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Mittels der Substitution

$$y := x^{1-\alpha}$$

erhält man daraus die lineare DG

$$y' = (1 - \alpha)p(t)y + (1 - \alpha)q(t)$$

für $y(t)$.

Beispiel 2.2 Es gelte $\beta \neq 0, -1$. Die Bernoulli-Differentialgleichung

$$x' = -x + x^{1+\beta}$$

wird mittels der Substitution

$$y = x^{-\beta}$$

zu

$$y' = \beta y - \beta.$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen DG mit konstanten Koeffizienten ist

$$y(t) = ce^{\beta t} + 1, \quad c \in \mathbb{R}$$

woraus

$$x(t) = (1 + ce^{\beta t})^{-\frac{1}{\beta}}$$

folgt. Für $c < 0$ existiert diese Lösung nur solange $1 + ce^{\beta t} > 0$ gilt. \diamond

Riccati-Differentialgleichung

Eine Riccati-Differentialgleichung ist eine skalare DG der Form

$$x' + g(t)x + h(t)x^2 = r(t) \tag{2.3}$$

mit auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten stetigen Funktionen g , h und r . Im allgemeinen lassen sich die Lösungen nicht in geschlossener Form angeben. Kennt man jedoch eine Lösung, so sind die übrigen explizit berechenbar. Es gilt, die Differenz zweier Lösungen einer Riccati-Differentialgleichung ist Lösung einer Bernoulli-Differentialgleichung, die in eine lineare DG transformiert werden kann.

Es seien $x(t)$ und $\varphi(t)$ zwei Lösungen und $u(t) := x(t) - \varphi(t)$. Dann gilt

$$u' + g(t)u + h(t)u(u + 2\varphi) = 0$$

bzw.

$$u' + [g(t) + 2h(t)\varphi(t)]u + h(t)u^2 = 0.$$

Diese Bernoulli-Differentialgleichung wird mittels der Transformation $u = z^{-1}$ in die lineare DG

$$z' = [g(t) + 2h(t)\varphi(t)]z + h(t)$$

übergeführt. Falls eine Lösung $\varphi(t)$ der Riccati-Differentialgleichung bekannt ist, erhält man alle Lösungen in der Form

$$x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{z(t)}.$$

Beispiel 2.3 Die Riccati-Differentialgleichung

$$x' = t^2 - x^2 + 1$$

hat die Lösung $x(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Man setzt $x(t) = t + 1/z(t)$ und erhält

$$z' = 2tz + 1.$$

Diese lineare DG hat die allgemeine Lösung

$$z(t) = e^{t^2} \left(c + \int_0^t e^{-s^2} ds \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Daher ist

$$x(t) = t + \frac{e^{-t^2}}{c + \int_0^t e^{-s^2} ds}$$

die allgemeine Lösung der DG.

Zusatzaufgabe: Zeichnen Sie das Richtungsfeld und die Lösungskurven. Welche Bedeutung hat die Konstante c ? Welche Lösungen existieren für $t \in \mathbb{R}$? Welche Lösungen haben Polstellen als Singularitäten? Wie verhalten sich die Lösungen für $t \rightarrow \pm\infty$? \diamond

2.2 Separable Differentialgleichungen

Definition 2.1 Eine skalare DG der Form

$$x' = f(x)g(t)$$

mit Funktionen $f : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **separable Differentialgleichung**. .

Unter Verwendung der Schreibweise

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$$

kann die DG für $f(x) \neq 0$ als

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

geschrieben werden. In dieser Gleichung hängt die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von t ab, was die Bezeichnungen separable DG oder DG mit getrennten Variablen erklärt.

Anmerkung: 1) Die Funktionen f und g werden meist als zumindest stetig angenommen.

2) Jede skalare autonome DG $x' = f(x)$ ist separabel.

Sei $x(t)$ Lösung mit $f(x(t)) \neq 0$. Integration der Gleichung

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = g(t)$$

nach t ergibt unter Verwendung der Stammfunktionen

$$H(x) := \int \frac{dx}{f(x)}, \quad G(t) := \int g(t)dt$$

die Gleichung

$$H(x(t)) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung ist eine implizite Beschreibung der Lösung $x(t)$. Falls H invertierbar ist erhält man die explizite Darstellung

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Formal schreibt man die DG als

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

und integriert die linke Seite nach x und die rechte Seite nach t . Dies ergibt die implizite Darstellung

$$H(x) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

der Lösungen.

Im Fall eines Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$ mit $f(x_0) \neq 0$ ist die Konstante c durch $c = H(x_0) - G(t_0)$ bestimmt. Praktisch arbeitet man bei AWP meist mit bestimmten Integralen und berechnet $x(t)$ aus der Gleichung

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^t g(t)dt. \quad (2.4)$$

Im Fall $f(x_0) \neq 0$ kann diese Gleichung lokal um (t_0, x_0) nach x aufgelöst werden. Daher gilt

Satz 2.2 *Es seien f und g stetig. Es gelte $f(x_0) \neq 0$. Dann hat das AWP $x' = f(x)g(t)$, $x(t_0) = x_0$ in einer Umgebung von t_0 eine eindeutige Lösung, die durch Auflösen der Gleichung (2.4) nach x erhalten werden kann.*

Die eindeutige Lösung $x(t)$ des AWP existiert solange $f(x(t)) \neq 0$ gilt.

Anmerkung: Falls x_0 eine Nullstelle von $f(x)$ ist, ist $x(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$ eine konstante Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$.

Sei x_0 die einzige Nullstelle von f in einem Intervall (a, b) . Dann hängt die Eindeutigkeit der Lösung $x(t) = x_0$ von der Divergenz der uneigentlichen Integrale

$$\int_a^{x_0} \frac{dx}{f(x)} \quad \text{bzw.} \quad \int_{x_0}^b \frac{dx}{f(x)}$$

ab. Man kann zeigen, dass die konstante Lösung $x(t) = x_0$ eindeutig ist, falls diese Integrale divergieren (siehe [Walter]). Falls f stetig differenzierbar ist, gilt dies an allen Nullstellen von f . Vergleiche auch die folgenden Beispiele.

Beispiel 2.4 Das AWP

$$x' = x^2, \quad x(0) = x_0$$

ist zu lösen. Separation ergibt

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2} = \int_0^t dt$$

und

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t.$$

Auflösen ergibt die Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Für $x_0 > 0$ existiert die Lösung auf $(-\infty, 1/x_0)$ und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1/x_0} x(t) = \infty.$$

Im Fall $x_0 < 0$ existiert die Lösung auf $(1/x_0, \infty)$ und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow 1/x_0} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Im Fall $x_0 = 0$ ist die eindeutige Lösung $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. ◇

Beispiel 2.5 Das für $x \geq 0$ definierte AWP

$$x' = \sqrt{x}, \quad x(0) = x_0 \geq 0$$

kann mittels Separation gelöst werden. Aus

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^t dt$$

erhält man die Lösung

$$x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2} \right)^2, \quad t \in [-2\sqrt{x_0}, \infty).$$

Im Fall $x_0 = 0$ ist die Lösung des AWP nicht eindeutig, denn $x(t) = 0$ und $x(t) = t^2/4$ sind beides Lösungen des AWP. Zusätzlich sind für $\tau > 0$ auch die Funktionen

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \tau \\ \frac{(t-\tau)^2}{4} & t \geq \tau \end{cases}$$

Lösungen des AWP $x(0) = 0$. ◇

Anmerkung: Das letzte Beispiel zeigt, dass eindeutige Lösbarkeit von AWP für DG der Form $x' = f(t, x)$ nur unter Zusatzbedingungen an das Vektorfeld f zu erwarten ist. In der Praxis spielen Phänomene wie in Bsp. 2.2 allerdings kaum eine Rolle, da wir zeigen werden, dass z.B. für stetig differenzierbares f das AWP immer eindeutig lösbar ist.

Differentialgleichung mit homogenen Variablen

Definition 2.2 Eine skalare DG der Form

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

heißt **Differentialgleichung mit homogenen Variablen**.

Durch die Substitution $x(t) = ty(t)$ wird eine Differentialgleichung mit homogenen Variablen in eine separable DG transformiert. Aus

$$x' = y + ty' = f\left(\frac{ty}{t}\right) = f(y)$$

folgt

$$y' = \frac{f(y) - y}{t}.$$

Insbesondere entspricht einer Nullstelle y_0 von $f(y) - y$ die Lösung $y(t) = y_0$ bzw. $x(t) = ty_0$.

2.3 Exakte Differentialgleichungen

Kurven in der (x, y) Ebene können durch Differentialgleichungen der Form

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0 \tag{2.5}$$

mit $a, b : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben werden. Die folgenden Erklärungen zeigen, dass die Gleichung (2.5) eine besonders symmetrische Schreibweise für Differentialgleichungen ist, bei der die Variablen x, y und ihre Differentiale dx bzw. dy gleichberechtigt auftreten.

1. Die Teile der gesuchten Kurven, für die $b(x, y) \neq 0$ gilt, können als Graphen $y = y(x)$ beschrieben werden, wobei gilt

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{a(x, y(x))}{b(x, y(x))}.$$

2. Die Teile der gesuchten Kurven, für die $a(x, y) \neq 0$ gilt, können als Graphen $x = x(y)$ beschrieben werden, wobei gilt

$$x'(y) = \frac{dx}{dy}(y) = -\frac{b(x(y), y)}{a(x(y), y)}.$$

3. Falls die gesuchte Kurve durch $(x(t), y(t))$, $t \in I$ parametrisiert wird, muss gelten

$$a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t) = 0, \quad t \in I.$$

Eine Möglichkeit diese Gleichung zu erfüllen besteht darin, dass x und y Lösungen der DG

$$\begin{aligned} x' &= b(x, y) \\ y' &= -a(x, y) \end{aligned}$$

sind.

Beispiel 2.6 Die DG

$$2x dx + dy = 0$$

bedeutet

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

woraus $y = -x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ folgt. ◇

Beispiel 2.7 Die Funktion $h : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Sei $(x(t), y(t))$, $t \in I$ eine Parametrisierung einer Niveaulinie von h . Wir haben bereits gezeigt, dass dann gilt

$$h_x(x(t), y(t))x'(t) + h_y(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

bzw.

$$dh := h_x(x, y)dx + h_y(x, y)dy = 0. \quad \text{◇}$$

Beispiel 2.8 Die Integralkurven der DG

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

sind identisch mit den durch die DG

$$g(x, y)dx - f(x, y)dy = 0$$

definierten Kurven. Für $f(x, y) \neq 0$ folgt dies formal durch Division der y Gleichung durch die x Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

und Kürzen von dt . Begründet ist dies dadurch, dass für eine Lösung $(x(t), y(t))$, $t \in I$ mit $f(x(t), y(t)) \neq 0$ die Funktion $t \mapsto x(t)$ invertierbar ist. Die Umkehrfunktion $x \mapsto t(x)$ ist differenzierbar mit

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{f(x, y(t(x)))}.$$

Für $y(x) := y(t(x))$ gilt dann nach der Kettenregel

$$\frac{dy}{dx}(x) = y'(t(x)) \frac{dt}{dx}(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}.$$

Im Fall $g(x, y) \neq 0$ kann man analog die x Gleichung durch die y Gleichung dividieren. Eine Stelle (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $g(x_0, y_0) = 0$ ist eine konstante Lösung beider DG. \diamond

Definition 2.3 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Eine Differentialgleichung der Form $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$, $(x, y) \in B$ heißt **exakt**, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$a(x, y) = F_x(x, y), \quad b(x, y) = F_y(x, y), \quad (x, y) \in B.$$

So eine Funktion F nennt man **Stammfunktion** des Vektorfeldes $(a(x, y), b(x, y))$. Man sagt auch, das Vektorfeld $(a(x, y), b(x, y))$ ist ein **Gradientenfeld**.

Aus den obigen Überlegungen folgt unmittelbar

Satz 2.3 Für eine exakte DG $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$, $(x, y) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Stammfunktion $F(x, y)$ gilt:

1. Die Funktion F ist längs der Lösungen der DG konstant.
2. Im Fall $(a(x, y), b(x, y)) \neq (0, 0)$ in B geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in B$ genau eine Lösung der DG, die man durch Lösen der Gleichung $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ erhält.

Beweis: Die DG hat die Form $dF = F_x dx + F_y dy = 0$ woraus 1) folgt.

O.B.d.A. gelte $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann die Gleichung

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) =: c$$

in einer Umgebung von (x_0, y_0) eindeutig nach $y = y(x)$ aufgelöst werden. Differenzieren der Gleichung

$$F(x, y(x)) = c$$

nach x ergibt

$$F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = a(x, y(x)) + b(x, y(x))y'(x) = 0.$$

was gleichbedeutend mit $adx + bdy = 0$ ist. □

Beispiel 2.9 Die DG

$$(2x + y)dx + xdy = 0$$

ist exakt mit Stammfunktion $F(x, y) = x^2 + xy$. Daher liegen die Lösungskurven der DG auf den durch

$$x^2 + xy = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

definierten Kurven. Für $c \neq 0$ erhält man die Lösungen

$$y(x) = \frac{c}{x} - x, \quad x \neq 0.$$

Für $c = 0$ erhält man die durch $y = -x$ bzw. $x = 0$ definierten Kurven. Diese beiden Kurven schneiden sich im Punkt $(0, 0)$, den man als konstante Lösung der DG ansehen kann. Nach den am Anfang dieses Abschnitts angestellten Überlegungen sind diese Lösungskurven genau die Integralkurven der linearen DG mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -2x - y. \end{aligned}$$

◇

Falls ein stetig differenzierbares Vektorfeld $(a(x, y), b(x, y))$, $(x, y) \in B$ ein Gradientenfeld ist, muss die **Integrabilitätsbedingung**

$$a_y(x, y) = b_x(x, y), \quad (x, y) \in B \tag{2.6}$$

gelten, d.h. die Integrabilitätsbedingung ist notwendig für die Existenz einer Stammfunktion. Unter weiteren Voraussetzungen an den Bereich B ist die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion. Es gilt (siehe Analysis 2):

Satz 2.4 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Für ein auf B definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld $(a(x, y), b(x, y))$ ist die Integrabilitätsbedingung (2.6) notwendig und hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion.

Anmerkung: Ein Gebiet ist eine zusammenhängende offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Ein Gebiet ist einfach zusammenhängend, wenn zwei beliebige stetige Kurven mit gleichem Anfang- und Endpunkt homotop sind, d.h. wenn die Kurven stetig ineinander übergeführt werden können. Anschaulich bedeutet dies im \mathbb{R}^2 , dass das Gebiet keine “Löcher” hat (siehe Analysis 2).

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3 kann die Stammfunktion F als Kurvenintegral

$$F(x, y) = \int_C a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

berechnet werden, wobei C eine (beliebige) in B verlaufende Kurve ist, die einen festen Punkt $(x_0, y_0) \in B$ mit dem Punkt $(x, y) \in B$ verbindet. Die Integrabilitätsbedingung und die Voraussetzungen an B garantieren die Wegunabhängigkeit dieses Kurvenintegrals.

Beispiel 2.10 Die DG

$$(3x^2y^2 - 2x)dx + (2x^3y + 1)dy = 0$$

ist auf \mathbb{R}^2 wegen

$$a_y = 6x^2y = b_x$$

exakt mit Stammfunktion $F(x, y) = x^3y^2 - x^2 + y$. ◇

Integrierender Faktor

Falls eine DG $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ nicht exakt ist, kann man versuchen einen **integrierenden Faktor** zu finden. Darunter versteht man eine nirgends verschwindende stetig differenzierbare Funktion $m(x, y)$ mit der Eigenschaft, dass die mit m multiplizierte, äquivalente DG

$$m(x, y)a(x, y)dx + m(x, y)b(x, y)dy = 0$$

exakt ist. Die Integrabilitätsbedingung für die modifizierte DG lautet

$$(ma)_y = (mb)_x$$

was die partielle DG

$$am_y - bm_x = (b_x - a_y)m$$

für die gesuchte Funktion $m(x, y)$ ergibt. Diese ist i.a. nicht explizit lösbar.

Gelegentlich funktionieren die Ansätze

1.

$$m = m(x),$$

2.

$$m = m(y),$$

3.

$$m = x^\alpha y^\beta$$

mit geeigneten Konstanten α und β .

Der Ansatz 1) führt auf

$$m_x = \frac{a_y - b_x}{b}m.$$

Falls der Faktor $(a_y - b_x)/b$ nur von x abhängt, kann $m(x)$ als Lösung einer linearen homogenen gewöhnlichen DG berechnet werden.

Der Ansatz 2) führt auf

$$m_y = \frac{b_x - a_y}{a}m.$$

Falls der Faktor $(b_x - a_y)/a$ nur von y abhängt, kann $m(y)$ als Lösung einer linearen homogenen gewöhnlichen DG berechnet werden.

Der Ansatz 3) kann versucht werden, wenn a und b Polynome in x und y sind.

Beispiel 2.11 Die DG

$$(x + y^2 + 1)dx + 2ydy = 0$$

ist wegen

$$a_y = 2y \neq 0 = b_x$$

nicht exakt. Die Suche nach einem integrierenden Faktor der Form $m(x)$ führt auf

$$m_x = \frac{a_y - b_x}{b}m = \frac{2y - 0}{2y}m = m$$

woraus

$$m(x) = e^x$$

folgt. Die DG

$$e^x(x + y^2 + 1)dx + 2ye^x dy = 0$$

ist exakt mit Stammfunktion

$$F(x, y) = e^x(x + y^2).$$

Die Lösungskurven sind daher implizit durch die Gleichung

$$e^x(x + y^2) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

gegeben. Versuchen Sie diese Kurven zu analysieren und zu zeichnen! \diamond

2.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Skalare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine homogene skalare lineare DG n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2.7)$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ oder $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$. Der **Exponentialansatz**

$$y(t) = e^{\lambda t} \quad (2.8)$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ führt auf

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0.$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2.4 *Das Polynom*

$$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

ist das charakteristische Polynom der DG (2.7).

Somit gilt

Satz 2.5 *Die Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$ ist genau dann eine Lösung der DG (2.7), wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der DG ist.*

Falls das charakteristische Polynom n verschiedene Nullstellen $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$ besitzt, erhält man n verschiedene - später werden wir sagen n linear unabhängige - Lösungen

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \dots, \quad y_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

der DG. Dabei kann man $t \in \mathbb{R}$ aber auch $t \in \mathbb{C}$ zulassen.

Im Fall mehrfacher Nullstellen werden weitere Lösungen benötigt.

Satz 2.6 Falls eine Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms die Vielfachheit $m > 1$ hat, sind die Funktionen

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = t e^{\lambda t}, \dots, \quad y_m(t) = t^{(m-1)} e^{\lambda t}$$

m verschiedene Lösungen der DG (2.7).

Beweis: Das charakteristische Polynom habe k verschieden Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_k . Dann gilt

$$p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

Daher kann die DG als

$$a_n \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 \right)^{m_1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2 \right)^{m_2} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k \right)^{m_k} y = 0$$

geschrieben werden, wobei es auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt. Somit genügt es zu zeigen, dass für eine m -fache Nullstelle λ gilt

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda \right)^m (t^j e^{\lambda t}) = 0, \quad 0 \leq j \leq m - 1.$$

Es gilt

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda \right) (e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = 0$$

und

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda \right) (t^j e^{\lambda t}) = \frac{d}{dt} (t^j e^{\lambda t}) - \lambda t^j e^{\lambda t} = j t^{j-1} e^{\lambda t}.$$

Daher gilt für $0 \leq j \leq m - 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \lambda \right)^m (t^j e^{\lambda t}) &= \\ \left(\frac{d}{dt} - \lambda \right)^{m-1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda \right) (t^j e^{\lambda t}) &= j \left(\frac{d}{dt} - \lambda \right)^{m-1} (t^{j-1} e^{\lambda t}) = \dots = j! \left(\frac{d}{dt} - \lambda \right)^{m-j} (e^{\lambda t}) = 0. \end{aligned}$$

□

Falls das charakteristische Polynom eine komplexe Nullstelle $\lambda = \alpha + i\beta$ besitzt, ist

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

eine komplexwertige Lösung. Falls die Koeffizienten der DG reell sind, ist man an reellen Lösungen interessiert. Aufspalten der DG in ihren Real- und Imaginärteil unter Verwendung der Linearität zeigt, dass in diesem Fall

$$\Re(e^{\lambda t}) = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{und} \quad \Im(e^{\lambda t}) = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

zwei verschiedene reelle Lösungen der DG sind, die dem Paar $\alpha \pm i\beta$ konjugiert komplexer Nullstellen entsprechen. Falls die komplexe Nullstelle die Vielfachheit m hat, sind die Funktionen

$$t^j e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{und} \quad t^j e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

$2m$ verschiedene reelle Lösungen der DG.

Da das Polynom $p(\lambda)$ - nach Vielfachheiten gezählt - genau n Nullstellen hat, erhält man auch im Fall mehrfacher Nullstellen n verschiedene Lösungen y_1, \dots, y_n der DG. Später wird gezeigt, dass die allgemeine Lösung der DG die Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ bzw. $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$ hat.

Anmerkung: Das Verhalten einer Lösungen $y(t) = t^j e^{\lambda t}$ für $t \rightarrow \infty$ wird vor allem durch den Realteil von λ bestimmt. Im Fall $\Re \lambda < 0$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, für $\Re \lambda > 0$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$. Für $\Im \lambda \neq 0$ oszilliert die Lösung, im Fall $\Im \lambda = 0$ ist die Lösung monoton. Im Fall $\lambda = 0$ ist die Lösung konstant bzw. polynomial in t .

Systeme mit konstanten Koeffizienten

Ein lineares System von DG 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$x' = Ax \tag{2.9}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ oder $x \in \mathbb{C}^n$ und einer reellen oder komplexen $n \times n$ Matrix A . Einsetzen des Exponentialansatzes $x(t) = e^{\lambda t} v$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ oder $v \in \mathbb{C}^n$ in die DG ergibt

$$\lambda e^{\lambda t} v = A(e^{\lambda t} v) = e^{\lambda t} Av.$$

Daher gilt

Satz 2.7 Die Funktion $x(t) = e^{\lambda t}v$ ist genau dann eine Lösung der DG (2.9), wenn gilt

$$Av = \lambda v,$$

d.h. λ ist Eigenwert der Matrix A mit Eigenvektor v .

Anmerkung: Aufgrund dieses Resultats ist das Eigenwertproblem der linearen Algebra von großer Bedeutung für DG.

Aus der linearen Algebra ist folgendes bekannt.

Satz 2.8 Für eine $n \times n$ Matrix A gilt:

1. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

2. Zu jedem Eigenwert existiert mindestens ein Eigenvektor.

3. Falls die Matrix n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besitzt, bilden die dazugehörigen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n eine Basis des \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n und die Matrix ist diagonalisierbar.

4. Die Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist.

5. Falls Eigenwerte mit unterschiedlicher algebraischer und geometrischer Vielfachheit auftreten, kann die Matrix auf Jordansche Normalform transformiert werden.

Anmerkung: Im Fall komplexer Eigenwerte liegen die entsprechenden Eigenvektoren in \mathbb{C}^n . Im Fall einer reellen Matrix mit reellen Eigenwerten sind auch alle Eigenvektoren reell und man kann in \mathbb{R}^n arbeiten.

Eine typische $n \times n$ Matrix A hat n verschiedene Eigenwerte und ist daher diagonalisierbar. Daher beschränken wir uns vorerst auf den Fall diagonalisierbarer Matrizen A mit n - nicht notwendig verschiedenen - Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und dazugehörigen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n . Aufgrund der obigen Überlegungen hat die DG (2.9) in diesem Fall n verschiedene - genauer gesagt linear unabhängige - Lösungen

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}v_1, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}v_2, \dots, \quad x_n(t) = e^{\lambda_n t}v_n.$$

Wegen der Linearität der DG (2.9) ist jede Linearkombination dieser Lösungen ebenfalls eine Lösung. Daher kann man versuchen die Lösung eines Anfangswertproblems $x(0) = a$ als Linearkombination dieser Lösungen darzustellen. Um Eindeutigkeitsaussagen zu erhalten benutzen wir im folgenden die Diagonalisierbarkeit der Matrix A .

Sei V die reguläre $n \times n$ Matrix mit Spalten v_1, \dots, v_n und D die Diagonalmatrix mit $d_{kk} = \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$AV = VD$$

bzw.

$$V^{-1}AV = D.$$

Die Koordinatentransformation

$$x = Vy$$

ergibt

$$Vy' = x' = Ax = AVy.$$

Daher gilt

$$y' = V^{-1}AVy = Dy.$$

In den y Koordinaten lautet die DG

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ y_2' &= \lambda_2 y_2 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ y_n' &= \lambda_n y_n \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser n entkoppelten skalaren Differentialgleichungen ist

$$y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Durch Rücktransformation $x(t) = Vy(t)$ folgt

Satz 2.9 Die $n \times n$ Matrix A sei diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit dazugehörigen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n . Dann sind die Funktionen

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, \quad x_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n$$

n linear unabhängige Lösungen der DG

$$x' = Ax.$$

Die allgemeine Lösung der DG ist

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Das AWP $x(0) = a$ hat die eindeutige Lösung

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t),$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Koordinaten des Anfangswertes a bezüglich der Basis v_1, \dots, v_n sind, die durch Lösen des (eindeutig lösbaren) linearen Gleichungssystems

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = a$$

berechnet werden können.

Beispiel 2.12 Das AWP

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -3x_1 - 4x_2 \end{aligned}$$

$x(0) = (2, 2)^T$ ist zu lösen. Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

sind $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (1, -1)^T$ und $\lambda_2 = -3$, $v_2 = (1, -3)^T$. Die allgemeine Lösung der DG ist

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Das AWP führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $c_1 = 4$ und $c_2 = -2$. Die Lösung des AWP ist

$$x(t) = 4e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Integralkurven dieser DG sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Alle Lösungen konvergieren für $t \rightarrow \infty$ gegen die Ruhelage im Ursprung. Man spricht von einem stabilen Knoten.

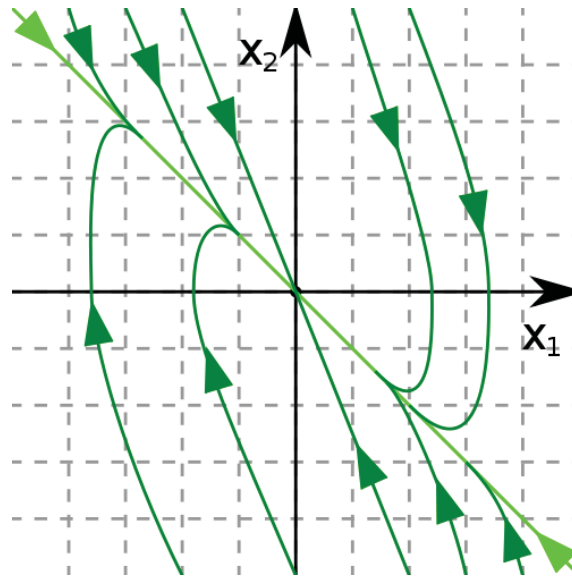


Abbildung 2.1: Stabiler Knoten

◇

Im folgenden sei A eine reelle $n \times n$ Matrix. Ein reeller Eigenwert λ hat in diesem Fall reelle Eigenvektoren $v \in \mathbb{R}^n$. Daher gilt in diesem Fall $e^{\lambda t}v \in \mathbb{R}^n$. Im Fall eines komplexen Eigenwertes $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ ist der Eigenvektor $v = a + ib$ auch komplex mit $a, b \in \mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ebenfalls Eigenwert mit Eigenvektor $\bar{v} = a - ib$. Die Funktionen $z(t) = e^{\lambda t}v$ und $\bar{z} = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$ sind Lösungen der DG mit Werten in \mathbb{C}^n . Zwei reelle Lösungen erhält man durch Zerlegen von z in Real- und Imaginärteil.

Lemma 2.1 Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix und $z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}^n$ eine Lösung der DG $z' = Az$. Dann sind $x(t)$ und $y(t)$ reelle Lösungen der DG $x' = Ax$.

Beweis: Aus

$$x' + iy' = z' = Az = A(x + iy) = Ax + iAy$$

folgt

$$x' = Ax \quad \text{und} \quad y' = Ay.$$



Der komplexen Lösung

$$z(t) = e^{\lambda t} v = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (a + ib)$$

entsprechen daher die beiden reellen Lösungen

$$x(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t a - \sin \beta t b) \quad \text{und} \quad y(t) = e^{\alpha t} (\sin \beta t a + \cos \beta t b).$$

Beispiel 2.13 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind $\alpha \pm i\beta$ mit Eigenvektoren $(1, \pm i)^T$, d.h. $a = (1, 0)^T$ und $b = (0, 1)^T$. Daher ist die allgemeine reelle Lösung der DG $x' = Ax$ gleich

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Im Fall $\alpha = 0$ sind die Integralkurven Kreise, die für $\beta > 0$ im Uhrzeigersinn und für $\beta < 0$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Begründen Sie diese Aussagen! Für $\alpha \neq 0$ sind die Integralkurven logarithmische Spiralen, die für $t \rightarrow \infty$ im Fall $\alpha < 0$ zum Ursprung und im Fall $\alpha > 0$ weg vom Ursprung spiralen. Im Fall $\alpha < 0$ spricht man von einer stabilen Spirale und im Fall $\alpha > 0$ von einer instabilen Spirale. In Abbildung 2.2 sind die Integralkurven einer stabilen Spirale für $\alpha < 0$ und $\beta > 0$ dargestellt. \diamond

Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit konjugiert komplexen Eigenwerten $\lambda = \alpha \pm i\beta$ und Eigenvektoren $a \pm ib$, $a, b \in \mathbb{R}^2$. Aus

$$Aa + iAb = A(a + ib) = (\alpha + i\beta)(a + ib) = \alpha a - \beta b + i(\beta a + \alpha b)$$

folgt

$$Aa = \alpha a - \beta b \quad \text{und} \quad Ab = \beta a + \alpha b.$$

Daher gilt für die 2×2 Matrix $T = (a, b)$

$$AT = T \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

bzw.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Anwenden der Koordinatentransformation

$$x = Ty \tag{2.10}$$

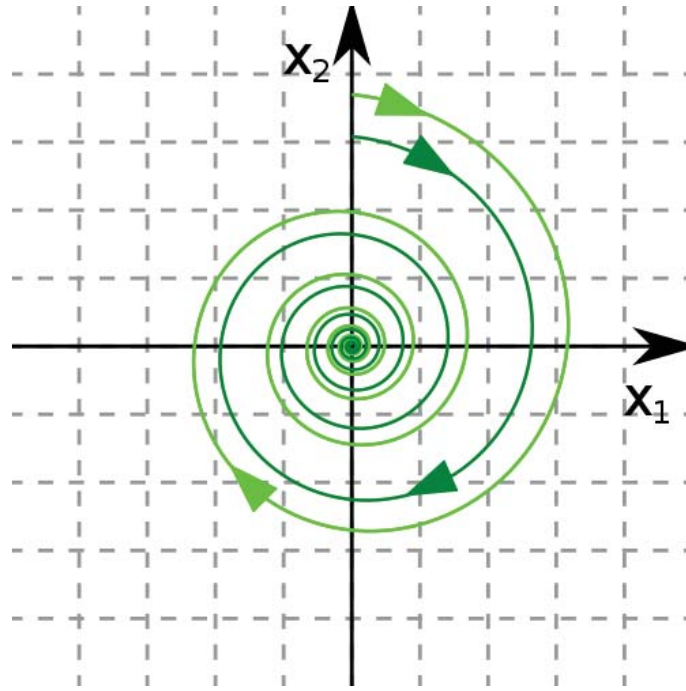


Abbildung 2.2: Stabile Spirale

auf die DG $x' = Ax$ ergibt

$$Ty' = x' = Ax = ATy.$$

Daher gilt

$$y' = T^{-1}ATy$$

In den y Koordinaten hat die DG daher die Form von Beispiel 2.4

$$y' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} y.$$

Die Integralkurven des Systems in y -Koordinaten werden durch die Koordinatentransformation (2.10) in die Integralkurven der DG $x' = Ax$ abgebildet. Aus den Kreisen des y -Systems, die im Fall $\alpha = 0$ auftreten, werden daher Ellipsen des x -Systems. Begründen Sie diesen Sachverhalt! Die für $\alpha \neq 0$ auftretenden logarithmischen Spiralen des y -Systems werden zu verzerrten Spiralen des x -Systems.

Anmerkung: Im Fall einer reellen $n \times n$ Matrix A mit komplexen Eigenwerten $\lambda = \alpha \pm i\beta$ und Eigenvektoren $a \pm ib$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ hat man genau die oben beschriebene Situation auf dem durch die Vektoren a, b aufgespannten zweidimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^n .

Kapitel 3

Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Kapitel wird die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

untersucht. Dabei sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$.

Ein klassisches Resultat ist der Existenzsatz von Peano, der besagt, dass aus der Stetigkeit von f die Existenz einer Lösung des AWP (3.1) folgt. Für Details und den Beweis wird auf die Literatur verwiesen. Allerdings zeigen die Beispiele im Kapitel 2, dass die Stetigkeit von f nicht ausreicht, um die Eindeutigkeit der Lösung zu garantieren.

Für die Eindeutigkeit der Lösung ist die Lipschitz-Eigenschaft von f bezüglich x von zentraler Bedeutung. Ein Hauptresultat ist der Existenzsatz von Picard-Lindelöf, der die Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen Lösung des AWP (3.1), die auf einem Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ mit $\delta > 0$ existiert, garantiert. Danach wird die Fortsetzbarkeit dieser lokalen Lösung zu einer maximalen bzw. globalen Lösung untersucht.

Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise bei gewöhnlichen und - in noch stärkerem Maß bei - partiellen DG beruhen auf Abschätzungen (Ungleichungen), mit deren Hilfe Lösungen bzw. Approximationen von Lösungen kontrolliert werden. Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist das Umschreiben von DG in äquivalente Integralgleichungen.

Satz 3.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in I$. Dann gilt, eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lösung des AWP (3.1), wenn $x(t)$ eine stetige Lösung der Integralgleichung*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I \quad (3.2)$$

ist.

Beweis: Durch Integration der DG (3.1) über das Intervall (t_0, t) folgt, dass jede Lösung der DG die Integralgleichung (3.2) erfüllt.

Sei umgekehrt $x(t)$ eine stetige Lösung der Integralgleichung (3.2). Dann erfüllt $x(t)$ die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Da $x(t)$ und $f(t, x(t))$ stetig sind, folgt aus der Integralgleichung (3.2), dass $x(t)$ stetig differenzierbar ist. Differenzieren der Integralgleichung (3.2) nach t zeigt, dass $x(t)$ Lösung der DG ist. \square

Notation: Im folgenden bedeutet $|\cdot|$ sowohl den Betrag einer reellen oder komplexen Zahl, als auch eine nicht näher spezifizierte Norm auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n . Für $1 \leq p < \infty$ ist $|x|_p = (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p}$ die l_p -Norm auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n , und $|x|_\infty = \max\{|x_j|, j = 1, \dots, n\}$ die l_∞ -Norm.

Mit $B_r(a)$ bzw. $\bar{B}_r(a)$ werden die offene bzw. abgeschlossene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt a bezüglich einer Norm im \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n bezeichnet.

Für eine Matrix A bedeutet $|A|$ die der Norm $|\cdot|$ entsprechende Abbildungsnorm, für die gilt $|Ax| \leq |A||x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. \mathbb{C}^n .

3.1 Lipschitz-Eigenschaft und Eindeutigkeit

Definition 3.1

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Lipschitz** bezüglich x , wenn eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \text{für alle } (t, x), (t, y) \in G.$$

Die Konstante L heißt **Lipschitz-Konstante**.

Eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **lokal Lipschitz** bezüglich x , wenn zu jedem Punkt $a \in G$ eine Kugel $\bar{B}_r(a)$ und eine Konstante $L = L(a) > 0$ existieren, so dass gilt

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \text{für alle } (t, x), (t, y) \in \bar{B}_r(a) \cap G.$$

Anmerkung: 1) Auf unbeschränkten Bereichen sind selbst sehr reguläre, d.h. ein- oder mehrmals stetig differenzierbare, Funktionen oftmals nicht global Lipschitz aber lokal Lipschitz. Dies sieht man z.B. an der auf \mathbb{R} definierten Funktion $f(x) = x^2$. Die Abschätzung

$$|x^2 - y^2| = |y + x||y - x| \leq 2 \max\{|x|, |y|\}|y - x|$$

zeigt, dass f auf jeder kompakten Menge Lipschitz ist.

2) Die Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x impliziert Beschränktheit der ersten Ableitungen der Funktion f nach x .

Als Umkehrung der obigen Bemerkung 2) liefert der folgende Satz ein hinreichendes

Kriterium für die Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x , das bei den meisten DG anwendbar ist.

Satz 3.2 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich x stetig differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz bezüglich x .

Beweis: Da G offen ist, existiert für $a \in G$ ein $r > 0$ mit $\bar{B}_r(a) \subset G$. Auf der kompakten Menge $\bar{B}_r(a)$ sind die partiellen Ableitungen von f nach x beschränkt. Daher existiert $L = L(a) > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L, \quad \text{für } (t, x) \in \bar{B}_r(a).$$

Die Kugel $\bar{B}_r(a)$ ist konvex, daher liegt für $(t, x), (t, y) \in \bar{B}_r(a)$ die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten (t, x) und (t, y) in $\bar{B}_r(a)$. Sei

$$(t, \varphi(s)) := (t, x + s(y - x)), \quad s \in [0, 1]$$

eine Parametrisierung dieser Verbindungsstrecke. Dann gilt

$$f(t, y) - f(t, x) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(t, \varphi(s)) ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(s))(y - x) ds.$$

Daher gilt

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(s)) \right| |y - x| ds \leq L |y - x|.$$

□

Aus dem Beweis folgt unmittelbar

Satz 3.3 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ bei festem t konvex bezüglich x . Die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und bezüglich x stetig differenzierbar auf G . Falls gilt $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L$ für $(t, x) \in G$, so ist f Lipschitz bezüglich x mit Lipschitz-Konstante L .

Die Beschränktheitsvoraussetzung in diesem Satz ist immer erfüllt, wenn f auf einer kompakten Menge K mit $G \subset K$ bezüglich x stetig differenzierbar ist.

Beispiel 3.1 1) Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist Lipschitz auf \mathbb{R} mit Lipschitzkonstante $L = 1 = \max_{x \in \mathbb{R}} |\cos x| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$.

2) Die Funktion $f(t, x) = t \sin x$ ist lokal Lipschitz bezüglich x auf \mathbb{R}^2 und Lipschitz bezüglich x auf $I \times \mathbb{R}$ falls $I \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

3) Die Funktion $f(t, x) = x \sin(xt)$ ist lokal Lipschitz bezüglich x auf \mathbb{R}^2 und Lipschitz bezüglich x auf $G \subset \mathbb{R}^2$, falls G beschränkt ist.

◇

Weiters gilt

Satz 3.4 Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt. Falls $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz bezüglich x ist, so ist f Lipschitz bezüglich x .

Beweis: Übungsaufgabe

□

Im weiteren benötigen wir mehrmals die folgende Ungleichung, um Abschätzungen für Lösungen von DG zu erhalten.

Lemma 3.1

[Lemma von Gronwall]

Es seien $x, a : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $a(t) \geq 0, t \in [t_0, t_1]$. Für $K \in \mathbb{R}$ gelte

$$x(t) \leq K + \int_{t_0}^t a(s)x(s)ds.$$

Dann gilt für $t \in [t_0, t_1]$

$$x(t) \leq Ke^{A(t)} \quad \text{mit} \quad A(t) := \int_{t_0}^t a(s)ds.$$

Beweis: Es sei

$$y(t) := K + \int_{t_0}^t a(s)x(s)ds.$$

Dann ist $y(t)$ stetig differenzierbar. Nach Voraussetzung gilt $x(t) \leq y(t)$. Daraus folgt

$$y'(t) = a(t)x(t) \leq a(t)y(t)$$

und $y(t_0) = K$. Für $z(t) := y(t)e^{-A(t)}$ gilt

$$z'(t) = y'(t)e^{-A(t)} - y(t)e^{-A(t)}a(t) = e^{-A(t)}(y'(t) - a(t)y(t)) \leq 0.$$

Durch Integration von $z'(t) \leq 0$ folgt $z(t) \leq z(t_0) = K$ woraus $y(t) \leq Ke^{A(t)}$ folgt, womit das Lemma bewiesen ist. □

Anmerkung: Hier wurde das Lemma von Gronwall in seiner einfachsten Form formuliert. Es gibt allgemeinere Versionen dieses Lemmas, die in der Theorie von DG eine

wichtige Rolle spielen. So kann z.B. in den Voraussetzungen die Konstante K durch eine stetige Funktion $k(t)$ ersetzt werden. Welche Abschätzung für $x(t)$ erhält man in diesem Fall?

Unter Verwendung des Lemmas von Gronwall, ist es einfach zu zeigen, dass aus der Lipschitz-Eigenschaft von f bezüglich x die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt.

Satz 3.5

[Eindeutigkeit von Lösungen des AWP]

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz bezüglich x . Dann hat das AWP (3.1) höchstens eine Lösung.

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen es existieren zwei verschiedene Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ des AWP (3.1), die beide auf einem Intervall $I = [t_0, t_1]$ existieren. Aus Satz 3.1 folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I \\ y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$|y(t) - x(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, x(s))| ds \leq \int_{t_0}^t L |y(s) - x(s)| ds,$$

wobei $L > 0$ die Lipschitzkonstante von f ist. Daher gilt für die stetige Funktion $z(t) := |y(t) - x(t)|$

$$z(t) \leq L \int_{t_0}^t z(s) ds, \quad t \in I.$$

Aus dem Lemma von Gronwall mit $K = 0$ und $a(t) = L$ folgt $z(t) \leq 0e^{Lt} = 0, t \in I$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass $x(t)$ und $y(t)$ zwei verschiedene Lösungen des AWP sind. \square

3.2 Existenz von Lösungen

Vorbemerkungen

Die Existenz einer Lösung einer nicht explizit lösbaren Gleichung

$$F(x) = 0$$

kann auf verschiedene Arten gezeigt werden. Dabei kann die Unbekannte x ein Punkt im \mathbb{R}^n sein. Falls es sich um eine DG handelt, ist die Unbekannte x eine Funktion, die dann oft abstrakt als Punkt in einem geeigneten Funktionenraum aufgefasst wird.

Eine Möglichkeit, um Existenzaussagen zu gewinnen, ist die Konstruktion einer Folge x_n , $n \in \mathbb{N}$ von Näherungslösungen, d.h. für $r_n := F(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n| = 0$. Darauf aufbauend muss gezeigt werden, dass die Folge (oder zumindest eine Teilfolge) konvergiert, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$ und dass der Grenzwert eine Lösung ist, d.h. $F(x_*) = 0$.

Bei nichtlinearen Problemen ist es oft vorteilhaft, die Nullstellenaufgabe $F(x) = 0$ als ein äquivalentes Fixpunktproblem zu schreiben. Im Fall $F : V \rightarrow V$ mit einem geeigneten normierten Raum V ist das Lösen der Gleichung $F(x) = 0$ äquivalent zum Finden von Fixpunkten der Abbildung $T(x) := x + F(x)$ oder $T(x) := x + LF(x)$ mit einer geeigneten linearen Abbildung L . Ein Fixpunkt von T ist dabei ein Punkt x_* mit $T(x_*) = x_*$. Die Existenz von Fixpunkten kann mit topologischen und funktionalanalytischen Methoden untersucht werden. Exemplarisch seien die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder erwähnt.

Ein sehr wichtiges und oft einsetzbares einfaches Resultat ist der Fixpunktsatz (Kontraktionssatz) von Banach, der insbesondere bei DG sehr oft verwendet wird.

Satz 3.6

[Fixpunktsatz von Banach]

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Konstante $K \in (0, 1)$, sodass

$$d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y), \quad \text{für alle } x, y \in M.$$

Dann gilt:

1. T besitzt genau einen Fixpunkt $x_* \in M$.
2. Für jeden Startwert $x_0 \in M$ gilt für die durch $x_{n+1} = T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*.$$

3. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_*, x_n) \leq \frac{K^n}{1 - K} d(x_0, x_1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Anmerkung: Eine Abbildung $T : M \rightarrow M$ ist genau dann eine Kontraktion, wenn sie Lipschitz mit Lipschitz-Konstante $K \in (0, 1)$ ist.

Notation: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so bedeutet $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ den Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir setzen $C(I, \mathbb{R}^n) := C^0(I, \mathbb{R}^n)$.

Picard-Iteration

Der Ausgangspunkt des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für das AWP (3.1) ist die Äquivalenz des AWP zur Integralgleichung (3.2)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I.$$

Die rechte Seite der Integralgleichung kann als Abbildung $P : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden, wobei gilt

$$P(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I.$$

Die Fixpunkte der Abbildung P entsprechen genau den Lösungen des AWP. Falls man zeigen kann, dass die Abbildung P genau einen Fixpunkt hat, ist die eindeutige Lösbarkeit des AWP bewiesen.

Diese Idee ist der Ausgangspunkt der sogenannten Picard-Iteration. Ausgehend von der Funktion $x_0(t) := x_0$ definiert die Iteration $x_{n+1} = P(x_n)$ eine Funktionenfolge $x_n \in C(I)$. Falls diese gegen einen Fixpunkt $x_* \in C(I)$ konvergiert, ist x_* Lösung des AWP.

Beispiel 3.2 Für das AWP $x' = x$, $x(0) = 1$ ergibt die Picard-Iteration

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 1, \\ x_1(t) &= 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t, \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \\ &\vdots \\ x_k(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \cdots + \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Daher ist $x_k(t)$ das Taylorpolynom vom Grad k der exakten Lösung $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ und die Picard-Iteration konvergiert gegen die Lösung. \diamond

Anmerkung: Die Picard-Iteration ist ein konstruktives Verfahren, d.h. im Fall der Konvergenz können die Näherungslösungen x_n - im Prinzip - berechnet werden.

Damit kann man nun folgendes Resultat beweisen.

Satz 3.7**[Existenzsatz von Picard-Lindelöf]**

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich x und $(t_0, x_0) \in G$. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $x \in C^1(J_\delta, \mathbb{R}^n)$ mit $J_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, sodass $(t, x(t)) \in G$ für $t \in J_\delta$ und $x = x(t)$ löst das AWP (3.1) im Interall J_δ .

Beweis: Wir konstruieren einen vollständigen metrischen Raum M , auf dem die Picard-Iteration eine Kontraktion ist.

Da G offen ist, existiert $\alpha > 0$, $r > 0$ und $L > 0$, sodass f auf dem Bereich $R := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}_r(x_0) \subset G$ Lipschitz bezüglich x mit Lipschitz-Konstante L ist. Sei

$$m := \max_{(t,x) \in R} |f(t, x)|.$$

Wähle $\delta > 0$ mit

$$\delta < \min\left(\alpha, \frac{r}{m}, \frac{1}{L}\right).$$

Für $J := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definieren wir die Menge

$$M := \{x \in C(J, \mathbb{R}^n) : x(t) \in \bar{B}_r(x_0), x(t_0) = x_0, t \in J\}.$$

Mit der Metrik

$$d(x, y) := \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

ist M ein vollständiger metrischer Raum.

Im folgenden wird für die durch

$$P(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in J$$

definierte Abbildung gezeigt, dass gilt:

1. $P : M \rightarrow M$,
2. P ist eine Kontraktion.

ad 1) Aus der Stetigkeit von x folgt die Stetigkeit von $P(x)$. Sei $x \in M$. Aus der Abschätzung

$$|P(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq |t - t_0| m \leq \delta m \leq r$$

folgt $P(x) \in M$.

ad 2) Für $x, y \in M$ und $t \in J$ gilt

$$\begin{aligned} |P(x)(t) - P(y)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t Ld(x, y) ds \right| \leq \delta Ld(x, y). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$d(P(x), P(y)) \leq \delta Ld(x, y).$$

Aufgrund der Definition von δ gilt $\delta L < 1$, daher ist $P : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Aus dem Fixpunktsatz von Banach folgt die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes in M , der die gesuchte Lösung ist. \square

Anmerkung: 1) Die Konstante δ , welche die Größe des Intervalls J_δ festlegt, auf dem Satz 3.7 die Existenz einer Lösung garantiert, hängt von den Konstanten r , m und L , genauer von r/m und $1/L$ ab.

2) Man kann unter Verwendung der durch

$$\tilde{d}(x, y) := \max_{t \in J} e^{-\beta|t-t_0|} |x(t) - y(t)|$$

auf M definierten gewichteten Metrik \tilde{d} zeigen, dass für geeignetes $\beta > 0$ die Bedingung $\delta < 1/L$ nicht notwendig ist, damit $P : M \rightarrow M$ eine Kontraktion ist.

Folgerung: Aus Satz 3.7 folgt unmittelbar, dass für stetiges und nach x stetig differenzierbares $f(t, x)$ das AWP (3.1) lokal eindeutig lösbar ist. Dieses Resultat garantiert die eindeutige Lösbarkeit der meisten in Anwendungen auftretenden AWP für gewöhnliche DG.

Als Spezialfall betrachten wir im folgenden das AWP für lineare Systeme 1. Ordnung.

Satz 3.8 Sei $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Das AWP $x(t_0) = x_0$ für die Differentialgleichung

$$x'(t) = A(t)x + b(t)$$

mit $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ hat eine eindeutige lokale Lösung.

Beweis: Die Funktion $f(t, x) := A(t)x + b(t)$ ist stetig auf $G := I \times \mathbb{R}^n$. Aus

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |A(t)x - A(t)y| = |A(t)(x - y)| \leq |A(t)||x - y|$$

folgt die Lipschitz-Eigenschaft von f bezüglich x mit $L := \max_{t \in I} |A(t)|$. Damit folgt die Existenz einer lokalen Lösung des AWP aus Satz 3.7. \square

3.3 Fortsetzbarkeit, maximales Existenzintervall und globale Existenz

Im folgenden wird gezeigt, dass lokale Lösungen von AWP auf größere bzw. maximale Zeitintervalle fortgesetzt werden können. Man spricht von globaler Existenz in vorwärts (rückwärts) Zeit, falls die Lösung eines AWP für alle $t \geq t_0$ ($t \leq t_0$) existiert. Unter globaler Existenz versteht man die Existenz der Lösung eines AWP für $t \in \mathbb{R}$. Diese Fragen sind vor allem für AWP auf Bereichen der Form $G = \mathbb{R} \times B$ mit einer offenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und insbesondere im autonomen Fall

$$x' = f(x), \quad x \in B \subseteq \mathbb{R}^n$$

von Interesse.

Die Beispiele in Kapitel 2 belegen, dass Lösungen von AWP im allgemeinen nicht nur lokal existieren. Einfache Beispiele zeigen aber auch, dass man nicht immer globale Existenz erwarten kann. So hat das AWP $x' = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ die Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t},$$

die nur auf $[-\infty, 1/x_0)$ existiert.

Fortsetzung einer Lösung

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz bezüglich x . Für $(t_0, x_0) \in G$ garantiert Satz 3.7 die Existenz einer Lösung $x_0(t)$ des AWP (3.1) auf einem - möglicherweise kleinen - Intervall $J_0 = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$. Es sei $t_1 := t_0 + \delta_0$ und $x_1 := x_0(t_1)$. Wegen Satz 3.7 gilt $(t_1, x_1) \in G$ und das AWP $x(t_1) = x_1$ besitzt eine eindeutige Lösung $x_1(t)$ in einem Intervall $J_1 := [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$ mit einem $\delta_1 > 0$. Auf $J_0 \cap J_1$ gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösungen $x_0(t) = x_1(t)$. Daher ist

$$x_+(t) := \begin{cases} x_0(t), & t \in [t_0, t_1] \\ x_1(t), & t \in [t_1, t_1 + \delta_1] \end{cases}$$

eine auf $[t_0, t_1 + \delta_1] = [t_0, t_0 + \delta_0 + \delta_1]$ definierte Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$. Man nennt $x_+(t)$ eine Fortsetzung der lokalen Lösung $x(t)$ nach rechts, eine Fortsetzung $x_-(t)$ nach links wird analog definiert.

Diese Konstruktion kann beliebig fortgesetzt werden. Falls die Fortsetzung x_+ nach rechts auf $[t_0, \tau]$ definiert ist, stimmen alle Fortsetzungen, die auch für $t > \tau$ definiert, sind auf $[t_0, \tau]$ mit x_+ überein. Daher existiert eine eindeutige Lösung des AWP auf einem Intervall $[t_0, t_0 + \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \dots)$. Falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$ divergiert, existiert die Lösung

global in Vorwärtszeit.

Die beim Fortsetzen von Lösungen auftretenden Konstanten δ_k können allerdings beliebig klein werden, wenn sich die Punkte $(t_k, x_+(t_k))$ dem Rand von G nähern bzw. wenn $|f(t_k, x_+(t_k))|$ oder die in einer Umgebung von $(t_k, x_+(t_k))$ gültige lokale Lipschitzkonstante L_k unbeschränkt werden. Dies kann dazu führen, dass die Fortsetzung nur auf einem endlichen Intervall existiert. Dieses Intervall muss natürlich offen sein, da man sonst weiter fortsetzen könnte.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 3.2 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich x und $(t_0, x_0) \in G$. Die Zahlen $t_{\pm}(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ seien durch

$$t_+(t_0, x_0) := \sup\{\tau > t_0 : \text{es existiert eine Fortsetzung } x_+ \text{ von (3.1) auf } [t_0, \tau]\},$$

$$t_-(t_0, x_0) := \inf\{\tau < t_0 : \text{es existiert eine Fortsetzung } x_- \text{ von (3.1) auf } [\tau, t_0]\}$$

definiert. Das Intervall (t_-, t_+) heißt das **maximale Existenzintervall** der Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$.

Die **maximale Lösung** $x(t)$ des AWP ist für $t \in [t_0, t_+)$ durch $x(t) = x_+(t)$ definiert, wobei x_+ die Fortsetzung der Lösung auf das Intervall $[t_0, t]$ ist, und für $t \in (t_-, t_0]$ durch $x(t) = x_-(t)$ definiert, wobei x_- die Fortsetzung der Lösung auf das Intervall $[t, t_0]$ ist.

Im Fall $t_+ = \infty$ existiert die maximale Lösung $x(t)$ in vorwärts Zeit global, für $t_- = -\infty$ existiert die maximale Lösung in rückwärts Zeit global. Ein maximales Existenzintervall $(-\infty, \infty)$ bedeutet globale Existenz.

Für das Verhalten der Lösung des AWP im Fall $t_+ < \infty$ gilt das folgende Resultat.

Satz 3.9 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich x und $(t_0, x_0) \in G$. Sei (t_-, t_+) das maximale Existenzintervall und $t_+ < \infty$. Dann verläßt die maximale Lösung in Vorwärtszeit jede kompakte Menge $K \subset G$, d.h. es existiert $t^* \in [t_0, t_+)$ mit $(t^*, x(t^*)) \notin K$.

Im Fall $t_- > -\infty$ gilt ein analoges Resultat.

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt. Sei $K \subset G$ kompakt. Angenommen es gilt $(t, x(t)) \in K$ für $t \in [t_0, t_+)$. Sei $m := \max_{(t,x) \in K} |f(t, x)|$. Dann gilt $|x'(t)| \leq m$, daher ist $x(t)$ auf $[t_0, t_+)$ Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante m . Daher existiert

$$\lim_{t \rightarrow t_+} x(t) =: x^+$$

mit $(t_+, x^+) \in K$. Somit kann die Lösung $x(t)$ stetig auf das Intervall $[t_0, t_+]$ fortgesetzt werden. Aus der Integraldarstellung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

die für $t \in [t_0, t_+]$ gilt, folgt, dass $x(t)$ an der Stelle $t = t_+$ einseitig differenzierbar ist und dort die DG $x' = f(t, x)$ erfüllt. Im Punkt $(t_+, x^+) \in K \subset G$ sind die Voraussetzungen des Satzes 3.7 erfüllt, daher kann die Lösung $x(t)$ über den Zeitpunkt t_+ hinaus fortgesetzt werden. Dies steht im Widerspruch zur Definition von t_+ . \square

Anmerkung:

1) Die Aussage von Satz 3.9 bedeutet, dass im Fall $t_+ < \infty$ die maximale Lösung für $t \rightarrow t_+$ dem Rand von G beliebig nahe kommt oder dass $|x(t)|$ für $t \rightarrow t_+$ unbeschränkt wird.

2) Im Fall $G = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$, wobei $\alpha = -\infty$ und $\beta = \infty$ erlaubt sind, kann der Fall $t_+ < \beta$ nur eintreten, wenn blow-up eintritt, d.h. wenn $|x(t)|$ für $t \rightarrow t_+$ unbeschränkt wird.

3) Globale Existenz in vorwärts bzw. rückwärts Zeit für die Lösungen einer autonomen DG $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ kann nachgewiesen werden, indem man zeigt, dass gilt $|x(t)| < \infty$ für alle $t \in [0, \infty)$ bzw. $t \in (-\infty, 0]$.

Beispiel 3.3 Gegeben sei ein Räuber-Beute System mit Sättigung der Form

$$\begin{aligned} x' &= x - ax^2 - xy \\ y' &= -by + xy \end{aligned}$$

mit $a, b > 0$.

Es erscheint plausibel, dass die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$ global in vorwärts Zeit existiert. Warum ist dies plausibel? Im folgenden wird die Richtigkeit dieser Vermutung bewiesen.

Das polynomiale Vektorfeld erfüllt die Voraussetzungen des lokalen Existenzsatzes auf \mathbb{R}^2 , daher existiert ein maximales Existenzintervall (t_-, t_+) . Wir müssen zeigen $t_+ = \infty$. Die x -Achse und die y -Achse sind invariant, da aus $x(0) = 0$ folgt $x(t) = 0$ und aus $y(0) = 0$ folgt $y(t) = 0$. Aus der Voraussetzung $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$ folgt $x(t) \geq 0$ und $y(t) \geq 0$ für $t \in (t_-, t_+)$.

Angenommen es gilt $t_+ < \infty$. Dann gilt für $t \in [0, t_+)$

$$x' \leq x$$

woraus

$$x(t) \leq x_0 e^{t_+} =: C < \infty$$

folgt. Daher gilt

$$y' \leq Cy$$

woraus

$$y(t) \leq y_0 e^{Ct}.$$

Daher tritt kein blow-up auf und $t_+ < \infty$ ist nicht möglich. \diamond

Für Systeme linearer Differentialgleichungen gilt im Fall stetiger Koeffizientenfunktionen immer globale Existenz.

Satz 3.10

[Globale Existenz für lineare Systeme]

Sei $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dabei ist $\alpha = -\infty$ und $\beta = \infty$ zugelassen. Für $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ existiert die eindeutige Lösung des AWP

$$x'(t) = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

auf dem ganzen Intervall I .

Beweis: Aus Satz 3.8 folgt die Existenz einer lokalen Lösung. Die Funktion $f(t, x) := A(t)x + b(t)$ ist lokal Lipschitz bezüglich x . Daher existiert ein maximales Existenzintervall (t_-, t_+) . Angenommen, es gilt $t_+ < \beta$. Für die Lösung $x(t)$ gilt

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s)ds = x_0 + B(t) + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds$$

mit $B(t) := \int_{t_0}^t b(s)ds$. Auf $[t_0, t_+]$ gilt wegen der Stetigkeit der Funktionen $A(t)$ und $b(t)$

$$|A(t)| \leq L, \quad |B(t)| \leq K$$

mit Konstanten $L, K \geq 0$. Daher gilt

$$|x(t)| \leq |x_0| + K + L \int_{t_0}^t |x(s)|ds$$

für $t \in [t_0, t_+)$. Aus dem Lemma von Gronwall folgt die Abschätzung

$$|x(t)| \leq (|x_0| + K)e^{L(t-t_0)}$$

Daher ist $x(t)$ für $t \rightarrow t_+$ beschränkt und t_+ kann nicht der Randpunkt des maximalen Existenzintervalls sein. \square

3.4 Stetige Abhängigkeit

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.7 hat das AWP (3.1) eine eindeutige Lösung, die auf einem maximalen Existenzintervall existiert. Die Lösung hängt natürlich vom Anfangswert x_0 , vom Anfangszeitpunkt t_0 und allgemeiner vom Vektorfeld $f(t, x)$ ab. Es stellt sich die Frage, wie sich die Lösung bei Änderung dieser Größen verhält? Insbesondere stellt sich die praktisch wichtige Frage, ob die Lösung von diesen Größen stetig abhängt.

Satz 3.11

[Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten]

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich x und $(t_0, x_0) \in G$. Die Lösung $x(t)$ des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ existiere (zumindest) für $t \in I = [t_0, t_1]$. Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodass gilt:

1. Für $|x_0 - y_0| < \delta$ existiert die Lösung des AWP $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ (zumindest) für $t \in I$.

2. Es gilt

$$\max_{t \in I} |x(t) - y(t)| < \varepsilon.$$

Beweis: Da G offen ist, existiert $\alpha > 0$ mit

$$K := \{(t, y) : t \in I, |x(t) - y| \leq \alpha\} \subset G.$$

Auf der kompakten Menge K ist f Lipschitz bezüglich x mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Sei $\delta < \alpha$ und $|x_0 - y_0| < \delta$. Dann gilt

$$|x(t) - y(t)| \leq \delta + L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds,$$

für alle $t \in I$, für die $|x(t) - y(t)| \leq \alpha$ gilt. Aus dem Lemma von Gronwall folgt für diese t , dass gilt

$$|x(t) - y(t)| \leq \delta e^{L(t-t_0)}. \quad (3.3)$$

Falls man daher

$$\delta \leq \alpha e^{L(t_0-t_1)}$$

wählt, folgt $|x(t) - y(t)| \leq \alpha$ für $t \in I$. Daher gilt $(t, y(t)) \in K$ für $t \in I$, womit auch die Behauptung 1) bewiesen ist. Die Behauptung 2) folgt unmittelbar, indem man

$$\delta < \varepsilon e^{L(t_0-t_1)}$$

wählt. □

Anmerkung:

1) Sei $x(t, x_0)$ die Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$. Dann besagt der obige Satz, dass $x(t, x_0)$ stetig vom Anfangswert x_0 abhängt.

2) Die dem Beweis zugrundeliegende Abschätzung (3.3) ist für große Werte von L bzw. $t - t_0$ sehr schlecht und in vielen Fällen zu pessimistisch. An der skalaren DG $x' = ax$, $a \in \mathbb{R}$ mit der globalen Lipschitz-Konstante $L = |a|$ sieht man aber, dass die Abschätzung - ohne weitere Voraussetzungen - nicht verbessert werden kann. Bei diesem Beispiele gilt für $t_0 = 0$

$$|x(t) - y(t)| = e^{at}|x_0 - y_0|,$$

d.h. im Fall $a > 0$ gilt die Abschätzung (3.3) mit dem Gleichheitszeichen, während im Fall $a < 0$ das exponentielle Abklingen von $|x(t) - y(t)|$ durch die in t exponentiell wachsende Abschätzung (3.3) nicht richtig wiedergegeben wird.

Stetige Abhängigkeit von Anfangswert, Anfangszeitpunkt und Vektorfeld

Wenn die Abhängigkeit der Lösung eines AWP $x(t) = x_0$ von Anfangswert, Anfangszeitpunkt und Vektorfeld betont werden soll, wird die Lösung als Funktion $x(t, t_0, x_0, f)$ aufgefasst. Bezüglich der Stetigkeit dieser Funktion gilt folgendes.

Es sei $x(t)$ Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ mit maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) und $y(t)$ Lösung des AWP $y' = g(t, y)$, $y(\tau_0) = y_0$. Dabei seien f, g stetig und lokal Lipschitz bezüglich x bzw. y . Für ein beliebiges Intervall $I = [a, b] \subset (t_-, t_+)$ mit $t_0 \in (a, b)$ kann man zeigen, dass für hinreichend kleine $\delta > 0$ aus den Bedingungen

$$|x_0 - y_0| \leq \delta, \quad |t_0 - \tau_0| \leq \delta, \quad |f - g| \leq \delta$$

folgt, dass die Lösung des AWP $y' = g(t, y)$, $y(\tau_0) = y_0$ zumindest für $t \in I$ existiert und dass gilt

$$|x(t) - y(t)| \leq \delta C e^{L|t-t_0|}, \quad t \in I$$

mit einer Konstante $C > 0$. Dabei ist

$$|f - g| := \max_{(t,x) \in K} |f(t, x) - g(t, x)|$$

mit einer geeigneten kompakten Umgebung K der Lösungskurve $\{(t, x(t)), t \in I\}$ und L eine Lipschitzkonstante für f bezüglich x auf K . Daraus folgt wie zuvor, dass die Lösung von Anfangswert, Anfangszeitpunkt und Vektorfeld stetig abhängt. Für mehr Details wird auf die Literatur verwiesen.

Stetige Abhängigkeit von Parametern

Die meisten in Anwendungen auftretenden DG enthalten Parameter. Diese entsprechen entweder Naturkonstanten, wie z.B. die Lichtgeschwindigkeit c oder die Gravitationskonstante g , oder Systemparameter, deren Werte ein konkretes System innerhalb einer Klasse von Systemen spezifizieren, wie z.B. die Länge L eines Pendels oder die Wachstumsrate r einer Population. Daher betrachtet man oft DG

$$x' = f(t, x, \mu)$$

die zusätzlich von einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}^m$ abhängen. In diesem Fall hängt die Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$ auch von μ ab, d.h. $x(t) = x(t, t_0, x_0, \mu)$. Diese Parameterabhängigkeit der Lösungen ist natürlich ein Spezialfall der Abhängigkeit der Lösungen vom Vektorfeld. Falls das Vektorfeld f in der Maximumsnorm stetig von μ abhängt, folgt aus der stetigen Abhängigkeit der Lösungen vom Vektorfeld die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Parameter μ .

Differenzierbare Abhängigkeit

Als Ausblick wird noch ein weiterführendes Resultat ohne Beweis erwähnt. Falls das Vektorfeld differenzierbar von t , x und μ abhängt, hängt auch die Lösung des AWP differenzierbar von Anfangszeitpunkt, Anfangswert und Parametern ab. Genauer gilt

Satz 3.12

[Differenzierbare Abhängigkeit]

Das Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei k -mal stetig differenzierbar, $k \geq 1$. Dann ist die Lösung $x(t, t_0, x_0, \mu)$ des AWP $x' = f(t, x, \mu)$, $x(t_0) = x_0$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion.

Dieser Satz wird zunächst für autonome DG

$$x' = f(x)$$

ohne Parameter bewiesen. Der zeit- und parameterabhängige Fall

$$x' = f(t, x, \mu)$$

wird auf den autonomen Fall zurückgeführt, indem man schreibt

$$\begin{aligned} t' &= 1 \\ x' &= f(t, x, \mu) \\ \mu' &= 0. \end{aligned}$$

Dieses autonome Vektorfeld auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist k -mal stetig differenzierbar, wenn $f(t, x, \mu)$ eine C^k -Funktion ist.

3.5 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Durch das Umformulieren von AWP für explizites DG höherer Ordnung in AWP für Systeme 1. Ordnung erhält man Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für solche DG. Genauer gilt

Satz 3.13 Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion $g(t, x)$ sei lokal Lipschitz bezüglich x . Sei $(t_0, a) \in G$. Dann hat das AWP

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

$$y(t_0) = a_1, \quad y'(t_0) = a_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = a_n$$

eine eindeutige Lösung $y(t, t_0, a)$, die auf einem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) existiert.

Beweis: Mit

$$x_1 := y, \quad x_2 := y', \quad x_3 := y'', \quad \dots, \quad x_n := y^{(n-1)}$$

ist das AWP für y äquivalent zum AWP $x(t_0) = a$ für das folgende System von DG 1. Ordnung

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= g(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzungen an g folgt die Behauptung des Satzes aus den entsprechenden Resultaten für Systeme 1. Ordnung. \square

Für explizite lineare DG höherer Ordnung gilt

Satz 3.14 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Es gelte $a_k \in C(I, \mathbb{R})$, $k = 0, \dots, n$, $f \in C(I, \mathbb{R})$ und $a_n(t) \neq 0$, $t \in I$. Sei $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das AWP

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

$$y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_n$$

eine eindeutige Lösung $y(t, t_0, c)$, die auf I existiert.

Beweis: Die Aussage des Satzes folgt nach Umschreiben der DG in ein lineares System 1. Ordnung aus Satz 3.10. \square

3.6 Differentialungleichungen, Unter- und Oberlösungen

In einer Raumdimension können Differentialungleichungen benutzt werden, um Lösungen eines AWP nach unten bzw. nach oben durch geeignete Vergleichsfunktionen abzuschätzen. Damit können z.B. maximale Existenzintervalle abgeschätzt werden oder das qualitative Verhalten von Lösungen untersucht werden.

Definition 3.3

[Unter- und Oberlösungen]

Sei $x(t)$ die Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$ für die DG

$$x' = f(t, x), \quad (t, x) \in I \times \mathbb{R}$$

auf dem Intervall $t \in [t_0, t_1]$. Die Funktion f sei stetig und lokal Lipschitz bezüglich x .

Eine C^1 Funktion $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **strikte Unterlösung** bezüglich der Lösung $x(t)$ falls gilt

$$u'(t) < f(t, u(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad \text{und} \quad u(t_0) < x(t_0).$$

Eine C^1 Funktion $o : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **strikte Oberlösung** bezüglich der Lösung $x(t)$ falls gilt

$$o'(t) > f(t, o(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad \text{und} \quad o(t_0) > x(t_0).$$

Eine C^1 Funktion $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Unterlösung** bezüglich der Lösung $x(t)$ falls gilt

$$u'(t) \leq f(t, u(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad \text{und} \quad u(t_0) \leq x(t_0).$$

Eine C^1 Funktion $o : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Oberlösung** bezüglich der Lösung $x(t)$ falls gilt

$$o'(t) \geq f(t, o(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad \text{und} \quad o(t_0) \geq x(t_0).$$

Wenig überraschend liegen Unterlösungen unterhalb von Lösungen, und Oberlösungen oberhalb von Lösungen.

Satz 3.15 Sei $u(t)$ eine strikte Unterlösung bezüglich der Lösung $x(t)$. Dann gilt

$$u(t) < x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Sei $o(t)$ eine strikte Oberlösung bezüglich der Lösung $x(t)$. Dann gilt

$$o(t) > x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Beweis: Übungsbeispiel, Literatur □

Satz 3.16 Sei $u(t)$ eine Unterlösung bezüglich der Lösung $x(t)$. Dann gilt

$$u(t) \leq x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Sei $o(t)$ eine Oberlösung bezüglich der Lösung $x(t)$. Dann gilt

$$o(t) \geq x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Beweis: Übungsbeispiel, Literatur □

Anmerkung: Auf Intervallen $[t_1, t_0]$ mit $t_1 < t_0$ gelten analoge Begriffe und Resultate, wobei in der Definition der Unter- und Oberlösungen alle $<$ und $>$ (bzw. \leq und \geq) Zeichen umgedreht werden.

Praktisch werden Unter- bzw. Oberlösungen oft konstruiert, indem man statt der DG $x' = f(t, x)$ geeignete Funktionen $g(t, x) < f(t, x)$ bzw. $f(t, x) < h(t, x)$ einführt und dann $x(t)$ mit Lösungen von $u' = g(t, u)$ bzw. $o' = h(t, o)$ vergleicht. Dazu sollten natürlich die DG für u bzw. o lösbar oder zumindest “einfacher” als die ursprüngliche DG für x sein.

Kapitel 4

Lineare Systeme

In diesem Kapitel werden lineare Systeme

$$x'(t) = A(t)x + b(t) \quad (4.1)$$

mit $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ genauer untersucht. Das Hauptinteresse gilt dabei der durch die Linearität der DG bedingten Struktur der Lösungen sowie der Beschreibung der allgemeinen Lösung. Aus Satz 3.10 folgt für $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Existenz einer eindeutigen Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$ auf dem Intervall I .

Im folgenden wird vor allem der reelle Fall betrachtet, alle Resultate gelten aber auch im Fall $x \in \mathbb{C}^n$ und $A \in C(I, \mathbb{C}^{n \times n})$ und $b \in C(I, \mathbb{C}^n)$.

4.1 Homogene Systeme

Dem Fall $b = 0$ entspricht die homogene DG

$$x'(t) = A(t)x. \quad (4.2)$$

Lösungen werden im folgenden auch als Elemente des Vektorraumes $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ aufgefasst.

Wiederholung: Funktionen $y^1, \dots, y^m \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ sind linear unabhängig, wenn gilt

$$s_1 y^1(t) + \dots + s_m y^m(t) = 0, \text{ für alle } t \in I \Rightarrow s_1 = \dots = s_m = 0.$$

Wenn die Vektoren $y^1(t), \dots, y^m(t) \in \mathbb{R}^n$ für $t = t_0 \in I$ linear unabhängig sind, so sind die Funktionen y^1, \dots, y^m linear unabhängig. Daraus folgt allerdings nicht die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $y^1(t), \dots, y^m(t)$ für $t \neq t_0$.

Für homogene lineare DG gilt das Superpositionsprinzip:

Satz 4.1**[Superpositionsprinzip]**

Es seien x, y Lösungen der DG (4.2). Dann ist jede Linearkombination $\alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung. Daher ist

$$\mathcal{L} := \{x \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : x' = A(t)x\}$$

ein linearer Vektorraum, genauer ein Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Rechnung

$$(\alpha x + \beta y)' = \alpha x' + \beta y' = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y).$$

□

Es stellt sich die Frage nach der Dimension von \mathcal{L} . Zur Beantwortung dieser Frage führen wir die folgende Notation ein. Für festes $t_0 \in I$ und $a \in \mathbb{R}^n$ sei $x(t, a)$ die Lösung des AWP $x(t_0) = a$. Als Element von \mathcal{L} wird diese Lösung mit $x(., a)$ bezeichnet.

Satz 4.2**[Struktur des Lösungsraums]**

Es gilt:

1. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}, \quad a \mapsto x(., a)$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

2. Der Vektorraum \mathcal{L} hat die Dimension n .

Beweis: 1) Es ist zu zeigen, dass die Abbildung i) φ linear und ii) bijektiv ist.

i) Die Funktion $\varphi(\alpha a + \beta b)$ ist die eindeutige Lösung des AWP $x(t_0) = \alpha a + \beta b$. Wegen der Linearität der DG ist die Funktion $\alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b)$ eine Lösung dieses AWP. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des AWP folgt

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b),$$

daher ist φ linear.

ii) Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des AWP ist die lineare Abbildung φ injektiv. Die lineare Abbildung φ ist surjektiv, denn für $x \in \mathcal{L}$ ist $a := x(t_0)$ der passende Anfangswert mit $\varphi(a) = x$.

2) Als isomorphe Vektorräume haben \mathcal{L} und \mathbb{R}^n beide die Dimension n .

□

Anmerkung: Die Isomorphie der Vektorräume \mathcal{L} und \mathbb{R}^n hat viele Konsequenzen. Insbesondere folgt daraus, dass φ linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^n auf linear unabhängige Lösungen der DG (4.2) abbildet. Umgekehrt werden linear unabhängige Lösungen der DG (4.2) durch φ^{-1} mit beliebigem $t_0 \in I$ auf linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^n abgebildet.

Folgerungen: Aus Satz 4.2 und der obigen Bemerkung folgt, dass gilt:

1. Funktionen $y^1, \dots, y^n \in \mathcal{L}$ sind genau dann eine Basis von \mathcal{L} , wenn sie linear unabhängig in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ sind. Dies gilt genau dann, wenn die Vektoren $y^1(t), \dots, y^n(t)$ an einer Stelle $t_0 \in I$ linear unabhängig sind. In diesem Fall sind die Vektoren $y^1(t), \dots, y^n(t)$ an jeder Stelle $t \in I$ linear unabhängig.
Zum besseren Verständnis wird die letzte Aussage nochmals (indirekt) bewiesen: Angenommen die Vektoren $y^1(\tau), \dots, y^n(\tau)$ seien für ein $\tau \in I$ linear abhängig. Dann existiert $(s_1, \dots, s_n) \neq (0, \dots, 0)$ mit

$$s_1 y^1(\tau) + \dots + s_n y^n(\tau) = 0.$$

Die Funktion

$$x(t) := s_1 y^1(t) + \dots + s_n y^n(t) = 0$$

ist Lösung des AWP $x(\tau) = 0$. Die eindeutige Lösung dieses AWP ist aber $x(t) = 0$, $t \in I$. Daher sind die Funktionen y^1, \dots, y^n linear abhängig, daher sind auch die Vektoren $y^1(\tau), \dots, y^n(\tau)$ linear abhängig. Widerspruch!

2. Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Dann sind die Funktionen

$$y^1 := \varphi(b_1), \dots, y^n := \varphi(b_n)$$

eine Basis von \mathcal{L} . Daher existieren (viele) Basen von \mathcal{L} .

In Matrixschreibweise lassen sich viele Resultate über lineare Systeme von DG übersichtlich ausdrücken.

Definition 4.1 Eine Basis $\{y^1, \dots, y^n\}$ von \mathcal{L} heisst **Fundamentalsystem (FS)** der DG (4.2). Lösungen $\{y^1, \dots, y^n\}$ der DG (4.2) fasst man zu einer **Lösungsmatrix**

$$Y(t) := (y^1(t), \dots, y^n(t))$$

mit Spalten y^1, \dots, y^n zusammen.

Ist $\{y^1, \dots, y^n\}$ ein Fundamentalsystem, so nennt man $Y(t)$ eine **Fundamentalmatrix (FM)**. Eine Fundamentalmatrix mit $Y(t_0) = I_{n \times n}$ nennt man **Hauptfundamentalmatrix (HFM)** bezüglich $t_0 \in I$, in diesem Fall nennt man $\{y^1, \dots, y^n\}$ ein **Hauptfundamentalsystem (HFS)**.

Folgerungen: Aus diesen Begriffsbildungen und Satz 4.2 folgt:

1. Eine Lösungsmatrix $Y(t)$ ist eine Lösung der Matrixdifferentialgleichung

$$X' = A(t)X, \quad X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n}).$$

2. Sei $Y(t)$ Lösungsmatrix und $c \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $x(t) := Y(t)c$ eine Lösung der DG (4.2).
3. Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix. Dann ist die allgemeine Lösung der DG (4.2) gegeben durch $x(t) = Y(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$.
4. Eine Fundamentalmatrix $Y(t)$ ist für $t \in I$ regulär, daher existiert die inverse Matrix $Y^{-1}(t)$.
5. Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix. Dann gilt: eine Matrixfunktion $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ist dann und nur dann Fundamentalmatrix, wenn eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit $X(t) = Y(t)B$ für alle $t \in I$.
6. Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix. Dann ist die Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$ gegeben durch $x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0$. Beim praktischen Rechnen setzt man $x(t) = Y(t)c$ und bestimmt c als die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $Y(t_0)c = x_0$.
7. Sei $Y(t)$ eine Hauptfundamentalmatrix bezüglich t_0 . Dann ist die Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$ gegeben durch $x(t) = Y(t)x_0$.
8. Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix und $t_0 \in I$. Dann ist $X(t) := Y(t)Y^{-1}(t_0)$ Hauptfundamentalmatrix bezüglich t_0 .

Definition 4.2 Sei $Y(t)$ eine Lösungsmatrix. Dann heißt

$$W(t) := \det Y(t), \quad t \in I$$

die **Wronski-Determinante** von $Y(t)$.

Für die Wronski-Determinante gilt

Satz 4.3

[Satz von Liouville]

Die Wronski-Determinante erfüllt die skalare DG

$$W'(t) = \operatorname{spur} A(t) W(t), \quad t \in I.$$

Daher gilt für $t_0, t \in I$

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{spur} A(s) ds}.$$

Dabei ist $\operatorname{spur} A := a_{11} + \dots + a_{nn}$ die Spur der Matrix A . Die Wronski-Determinante ist daher entweder identisch gleich Null oder im gesamten Intervall I von Null verschieden. Aus diesem Resultat folgt (nochmals), dass eine Lösungsmatrix genau dann eine Fundamentalmatrix ist, wenn ihre Spalten an einer Stelle $t_0 \in I$ linear unabhängig ist. **Beweis:** Sei $Y(t)$ eine Lösungsmatrix und $W(t) := \det Y(t)$ die Wronski-Determinante. Sei $\tau \in I$ und $Z(t)$ die HFM bez. τ . Die Matrix $\tilde{Y}(t) := Z(t)Y(\tau)$ ist eine Lösungsmatrix mit $\tilde{Y}(\tau) = Y(\tau)$. Daher gilt $\tilde{Y}(t) = Y(t)$ für $t \in I$, d.h.

$$Y(t) = Z(t)Y(\tau), \quad t \in I.$$

Daraus folgt

$$W(t) = \det Y(t) = \det Z(t) \det Y(\tau) = \det Z(t) W(\tau)$$

und

$$\frac{d}{dt} W(t) = W(\tau) \frac{d}{dt} (\det Z(t)).$$

Da $\det Z = \det(z_1, \dots, z_n)$ bezüglich jeder der Spalten z_1, \dots, z_n linear ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\det Z(t)) &= \frac{d}{dt} (\det(z_1(t), \dots, z_n(t))) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \det(z_1(t), \dots, z_n(t))}{\partial z_j} \frac{d}{dt} z_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(z_1, \dots, \frac{d}{dt} z_j(t), \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n \det(z_1, \dots, A(t)z_j(t), \dots, z_n). \end{aligned}$$

Auswertung bei $t = \tau$ ergibt

$$\frac{d}{dt} Z(\tau) = \sum_{j=1}^n \det(e_1, \dots, A(\tau)e_j(\tau), \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n a_{jj}(\tau) = \operatorname{spur} A(\tau).$$

Daher gilt

$$\frac{dW}{dt}(\tau) = \operatorname{spur} A(\tau) W(\tau).$$

Da τ beliebig war, gilt

$$W'(t) = \operatorname{spur} A(t) W(t), \quad t \in I.$$

□

Anmerkung: Die Wronski-Determinante ist das Volumen des von den Spalten der Lösungsmatrix aufgespannten Parallelepipeds. Für eine Fundamentalmatrix ist dieses Volumen für alle $t \in I$ ungleich Null.

Für lineare DG mit $\operatorname{spur} A(t) = 0$, $t \in I$ ist dieses Volumen konstant, die DG ist volumenserhaltend. Falls gilt $\operatorname{spur} A(t) < 0$, $t \in I$ wird Volumen kontrahiert.

Die explizite Berechnung von FM ist nur in Spezialfällen möglich. Vor allem im Fall $n = 2$ ist gelegentlich die folgende Methode nützlich.

Reduktionsverfahren von d'Alembert

Falls eine Lösung der DG (4.2) bekannt ist, kann die Berechnung weiterer l.u. Lösungen auf das Lösen eines $(n - 1)$ -dimensionalen Systems zurückgeführt werden.

Sei $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ eine Lösung der DG $x' = A(t)x$. Es gelte $u_1(t) \neq 0$, $t \in I$. Setze

$$x(t) = \Phi(t)u(t) + z(t)$$

mit $z(t) = (0, z_2(t), \dots, z_n(t))^T$ und $\Phi \in C^1(I, \mathbb{R})$. Einsetzen in die DG ergibt

$$x' = \Phi' u + \Phi u' + z' = \Phi A u + A z$$

Da $u(t)$ eine Lösung ist, gilt

$$z' = A z - \Phi' u.$$

Die erste Gleichung dieses Systems von DG lautet

$$0 = \sum_{j=2}^n a_{1j} z_j - \Phi' u_1.$$

Daraus folgt

$$\Phi' = \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j} z_j}{u_1}.$$

Einsetzen in die restlichen Gleichungen ergibt

$$z'_i = \sum_{j=2}^n \left(a_{ij} - \frac{a_{1j} u_i}{u_1} \right) z_j, \quad i = 2, \dots, n.$$

Dieses $(n - 1)$ -dimensionale lineare System habe ein FS z^1, \dots, z^{n-1} . Diese Lösungen werden als $z^i(t) = (0, z_2^i(t), \dots, z_n^i(t))^T$, $i = 1, \dots, n - 1$ geschrieben. Für $i = 1, \dots, n - 1$ berechnet man die Funktion

$$\Phi_i := \int \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j} z_j^i}{u_1}$$

und die Lösung

$$y^i := \Phi_i u + z^i.$$

Dann sind die Lösungen u, y^1, \dots, y^{n-1} ein FS der DG $x' = A(t)x$, falls sie linear unabhängig sind, was im folgenden bewiesen wird. Angenommen es gilt

$$su + s_1 y^1 + \dots + s_{n-1} y^{n-1} = 0. \quad (4.3)$$

Aus der ersten Komponente dieser Gleichung folgt

$$s + s_1 \Phi_1 + \dots + s_{n-1} \Phi_{n-1} = 0.$$

Durch Multiplikation dieser skalaren Gleichung mit dem Vektor u erhält man

$$su + s_1 \Phi_1 u + \dots + s_{n-1} \Phi_{n-1} u = 0.$$

Subtraktion dieser Gleichung von der Gleichung (4.3) ergibt

$$s_1 z^1 + \dots + s_{n-1} z^{n-1} = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von z^1, \dots, z^{n-1} folgt $s_i = 0$, $i = 1, \dots, n - 1$. Wegen der Gleichung (4.3) gilt daher auch $s = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der Lösungen u, y^1, \dots, y^{n-1} bewiesen.

Beispiel 4.1 Die DG

$$x' = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} x, \quad t > 0$$

hat die Lösung $u(t) = (t^2, -t)^T$. Das Reduktionsverfahren von d'Alembert besteht im Bestimmen der Funktionen $\Phi(t)$ und $z_2(t)$ im Ansatz

$$x(t) = \Phi(t)u(t) + (0, z_2(t))^T.$$

Für z_2 erhält man die DG

$$z_2' = \left(\frac{2}{t} - \frac{(-1)(-t)}{t^2} \right) z_2 = \frac{1}{t} z_2$$

mit der Lösung $z_2(t) = t$. Aus

$$\Phi' = \frac{(-1)(t)}{t^2} = -\frac{1}{t}$$

folgt $\Phi(t) = -\ln t$. Daher ist

$$y(t) = -\ln t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t + t \ln t \end{pmatrix}$$

eine von u linear unabhängige Lösung und

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t \ln t \end{pmatrix}$$

ist eine Fundamentalmatrix. ◇

4.2 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Für die DG

$$x' = Ax \tag{4.4}$$

mit einer $n \times n$ Matrix A kann ein Fundamentalsystem immer mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion angegeben werden, deren Definition und grundlegende Eigenschaften im folgenden zusammengefasst werden.

Matrixexponentialfunktion

Sei A eine reelle (oder komplexe) $n \times n$ Matrix. Dann ist für $t \in \mathbb{R}$ die Matrixexponentialfunktion durch

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

definiert. Diese Reihe konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$, die Konvergenz ist gleichmäßig für $|t| \leq r$.

Es seien A, B kommutierende $n \times n$ Matrizen, d.h. $AB = BA$, dann gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Daraus folgen für e^{At} die Eigenschaften

1. $e^{A(s+t)} = e^{At} e^{As}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
2. e^{At} ist regulär und $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.
3. Die Abbildung $t \mapsto e^{At}$ ist differenzierbar und $(e^{At})' = A e^{At}$.

Daraus folgt

Satz 4.4 Die Matrixexponentialfunktion e^{At} ist eine Fundamentalmatrix für die DG (4.4). Die Hauptfundamentalmatrix bezüglich $t_0 \in \mathbb{R}$ ist $e^{A(t-t_0)}$.

Die explizite Berechnung von e^{At} erfolgt unter Verwendung der Jordanschen Normalform der Matrix A . Es gelte

$$A = TJT^{-1},$$

wobei die Matrix J die Jordanscher Normalform der Matrix A ist. Dann gilt

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(TJT^{-1})^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{TJ^k T^{-1} t^k}{k!} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} T^{-1} = Te^{Jt}T^{-1}.$$

Daher genügt es, e^{Jt} zu berechnen. Mit $Te^{Jt}T^{-1}$ ist auch Te^{Jt} eine Fundamentalmatrix. Daher ist die Berechnung von T^{-1} nicht unbedingt notwendig.

Im Fall einer diagonalisierbaren Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und einer Eigenbasis v_1, \dots, v_n gilt

$$e^{Jt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

und die Funktionen $e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, e^{\lambda_n t}v_n$ bilden ein Fundamentalsystem, was bereits in Abschnitt 2.4 gezeigt wurde.

Falls A nicht diagonalisierbar ist, hat J die Form

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & J_m \end{pmatrix}$$

mit Jordanblöcken J_i , $i = 1, \dots, m$ der Dimension $r_i \times r_i$ zum Eigenwert λ_i . Dabei gilt $r_1 + \dots + r_m = n$. In der Matrix T stehen in den Spalten, die dem Block J_i entsprechen, ein Eigenvektor v_i und Hauptvektoren $h_1^i, \dots, h_{r_i-1}^i$ zum Eigenwert λ_i .

Ein Jordanblock J_i hat die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & e^{J_m t} \end{pmatrix}$$

genügt es, e^{Jt} für einen $r \times r$ Jordanblock

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

zu berechnen.

Satz 4.5 Für einen $r \times r$ Jordanblock J mit Eigenwert λ gilt

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Es gilt

$$J = \lambda I + N$$

mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Matrizen I und N kommutieren gilt

$$e^{Jt} = e^{\lambda It + Nt} = e^{\lambda It} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt}.$$

Die Matrix N ist nilpotent, da für die Potenzen N^k , $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \quad N^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$N^k = 0, \quad \text{für alle } k \geq r.$$

Aus der Definition der Matrixexponentialfunktion folgt

$$e^{Nt} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Beispiel 4.2 Es sei A eine 3×3 Matrix mit Jordanscher Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A = TJT^{-1}$$

mit $T = (v, h_1, h_2)$, wobei v ein Eigenvektor von A und h_1, h_2 die dazugehörigen Hauptvektoren sind. Nach Satz 4.5 gilt

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Fundamentalmatrix für $x' = Ax$ ist $X(t) := Te^{Jt}$. Daher sind die Funktionen

$$x^1(t) := e^{\lambda t}v, \quad x^2(t) := e^{\lambda t}(tv + h_1), \quad x^3(t) := e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2}v + th_1 + h_2\right)$$

ein Fundamentalsystem.

Im Fall $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$ konvergieren alle Lösungen gegen den Ursprung. Die Annäherung an den Ursprung erfolgt dabei tangential zu dem von v aufgespannten Unterraum, da in jeder Lösung diese Richtung für große Werte von t dominiert. ◇

4.3 Inhomogene Systeme

Für inhomogene lineare DG gilt

Satz 4.6 [Allgemeine Lösung inhomogener linearer Systeme]

Die allgemeine Lösung der DG (4.1) ist

$$x_p + \mathcal{L},$$

wobei \mathcal{L} der Lösungsraum der homogenen DG ist und x_p eine Partikulärlösung ist.

Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix $Y(t)$. Dann ist die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = Y(t)c + x_p(t), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

gegeben.

Beweis: Sei x_p Partikulärlösung und $y \in \mathcal{L}$. Dann ist $x_p + y$ eine Lösung der DG (4.1), da gilt

$$x' = x_p' + y' = Ax_p + b + Ay = A(x_p + y) + b = Ax + b.$$

Seien umgekehrt x und x_p Lösungen der inhomogenen DG (4.1). Setze $y := x - x_p$. Dann gilt

$$y' = x' - x_p' = Ax + b - Ax_p - b = A(x - x_p) = Ay.$$

Daher gilt $y \in \mathcal{L}$ und $x = y + x_p$. □

Zur Berechnung der allgemeinen Lösung benötigt man daher eine Partikulärlösung. Falls eine Fundamentalmatrix bekannt ist, kann eine Partikulärlösung mittels Variation der Konstanten berechnet werden.

Variation der Konstanten

Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix. Zur Berechnung einer Partikulärlösung macht man den Ansatz

$$x_p(t) = Y(t)c(t)$$

mit einer unbekannten Funktion $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Einsetzen in die DG (4.1) ergibt

$$x_p' = Y'c + Yc' = AYc + Yc' = AYc + b.$$

Daher ist x_p Lösung der inhomogenen DG, falls gilt

$$c'(t) = Y^{-1}(t)b(t).$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$c(t) = \int Y^{-1}(t)b(t)dt.$$

Somit ist für $t_0 \in I$

$$x_p(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s)ds$$

eine Partikulärlösung mit $x_p(t_0) = 0$.

In Verbindung mit Satz 4.6 folgt daraus

Satz 4.7

[Variation der Konstanten]

Das AWP $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ hat die eindeutige Lösung

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s)ds,$$

wobei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist.

Anmerkung: Für ein System mit konstanten Koeffizienten und einer konstanten Inhomogenität $b \in \mathbb{R}^n$

$$x' = Ax + b$$

ist jede Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax + b = 0$ eine Partikulärlösung – genauer eine Ruhelage – der DG. Falls A regulär ist, erhält man

$$x_p = -A^{-1}b.$$

Die Substitution $x = x_p + y$ transformiert die DG in die homogene DG

$$y' = Ay.$$

4.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine skalare lineare DG n -ter Ordnung hat die Form

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_i \in C(I, \mathbb{R})$, $i = 0, \dots, n$ und einer Inhomogenität $b \in C(I, \mathbb{R})$. Es gelte $a_n(t) \neq 0$, $t \in I$. Abgekürzt schreiben wir diese DG als

$$Ly = f$$

mit dem **linearen Differentialoperator**

$$L : C^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$$

$$Ly := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

Nach Satz 3.14 hat für $c \in \mathbb{R}^n$ das AWP

$$y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2, \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_n$$

eine eindeutige Lösung $y(t, t_0, c)$, die auf I existiert.

Mittels der Substitution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

wird die DG n -ter Ordnung in eine n -dimensionales System 1. Ordnung transformiert. Daher kann man alle Resultate, die in diesem Kapitel für Systeme hergeleitet wurden, auf lineare DG höherer Ordnung übertragen oder nochmals ganz analog herleiten.

Zusammenfassend erhält man:

1. Es gilt das **Superpositionsprinzip**: seien y_1, \dots, y_k Lösungen der homogenen DG $Ly = 0$. Dann ist $y := s_1 y_1 + \dots + s_k y_k$ mit $s \in \mathbb{R}^k$ ebenfalls eine Lösung der homogenen DG.
2. Die Lösungsmenge der homogenen DG $\mathcal{L} := \{y \in C^n(I, \mathbb{R}) : Ly = 0\}$ ist ein linearer Raum, genauer ein n -dimensionaler Unterraum von $C^n(I, \mathbb{R})$.
3. Eine Basis y_1, \dots, y_n von \mathcal{L} ist eine **Fundamentalsystem**.
4. Lösungen y_1, \dots, y_n der homogenen DG sind genau dann ein Fundamentalsystem, wenn sie in $C^n(I, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.
5. Für Funktionen $y_1, \dots, y_n \in C^n(I, \mathbb{R})$ definiert man die **Wronski-Determinante**

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

die kurz als $W(t)$ bezeichnet wird.

6. Lösungen y_1, \dots, y_n der homogenen DG bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn ihre Wronski-Determinante an einer Stelle $t_0 \in I$ nicht verschwindet. In diesem Fall gilt $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

7. Der **Satz von Liouville** für Lösungen einer skalaren lineare DG hat die Form

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}.$$

8. Wenn eine Lösung $v(t)$ der homogenen DG mit $v(t) \neq 0$, $t \in I$ bekannt ist, kann mittels **d'Alembert Reduktion** die Berechnung weiterer l.u. Lösungen auf das Lösen einer skalaren DG der Ordnung $n - 1$ zurückgeführt werden. Dazu setzt man

$$y(t) = v(t)\varphi(t)$$

und bestimmt φ so, dass y eine Lösung der DG ist. Einsetzen in die DG ergibt eine lineare DG, in der nur $\varphi', \dots, \varphi^{(n)}$ auftreten. Man setzt

$$\psi := \varphi'$$

und erhält eine lineare DG der Ordnung $n - 1$ für ψ . Nachdem ψ berechnet wurde, kann φ durch Integration bestimmt werden. Diese Methode ist vor allem im Fall $n = 2$ gelegentlich nützlich.

9. Die **allgemeine Lösung** der inhomogenen DG ist

$$y_p + \mathcal{L},$$

wobei y_p eine beliebige **Partikulärlösung** ist. Falls y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem bilden, ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y = s_1 y_1 + \dots + s_n y_n + y_p,$$

mit $s \in \mathbb{R}^n$.

10. Wenn ein Fundamentalsystem bekannt ist, kann eine Partikulärlösung mittels **Variation der Konstanten** berechnet werden (siehe unten für den Fall $n = 2$).

Anmerkung: Aus dem Verschwinden der Wronski-Determinante beliebiger Funktionen kann man nicht auf ihre lineare Abhängigkeit schließen. Dazu ein Beispiel:

Die Funktionen $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t|t|$ sind in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig. Für die Wronski-Determinante gilt aber

$$W(y_1, y_2)(t) = t^2 2|t| - t|t| 2t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Als Elemente von $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bzw. von $C^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ sind y_1 und y_2 natürlich linear abhängig.

Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Im Fall einer linearen DG n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0(t) y = 0$$

liefert der Exponentialansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ bzw. $y(t) = t^m e^{\lambda t}$ immer ein Fundamentalsystem, siehe Abschnitt 2.4. Das charakteristische Polynom der skalaren DG ist

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

Das charakteristische Polynom habe k verschieden Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_k . Dann sind die Funktionen

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = t e^{\lambda_1 t}, \quad \dots \quad y_{m_1} = t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \quad y_{m_1+1} = e^{\lambda_2 t}, \quad y_{m_1+2} = t e^{\lambda_2 t}, \dots$$

$$y_{m_1+m_2} = t^{m_2-1} e^{\lambda_2 t}, \quad \dots \quad y_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} = e^{\lambda_k t}, \quad \dots \quad y_{m_1+\dots+m_k} = t^{m_k-1} e^{\lambda_k t}$$

ein Fundamentalsystem. Die lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen kann durch Berechnung ihrer Wronski-Determinante nachgewiesen werden.

Anmerkung: Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$ der skalaren DG ist genau das charakteristische Polynom der Matrix A , die man erhält, wenn die skalare DG in eine System 1. Ordnung $x' = Ax$ transformiert.

Variation der Konstanten

Wir betrachten die DG

$$a_2(t) y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = b(t).$$

Sei $y_1(t), y_2(t)$ ein Fundamentalsystem. Als System in der Variable $x := (y, y')^T$ hat die DG die Form

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b/a_2 \end{pmatrix}.$$

Dem Ansatz

$$y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t).$$

entspricht in der Systemschreibweise der Ansatz

$$x_p = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

wobei alle Größen Funktionen von t sind. Variation der Konstanten für Systeme 1. Ordnung ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/a_2 \end{pmatrix}$$

für c_1', c_2' . Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, weil die Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems regulär ist, da y_1, y_2 ein Fundamentalsystem ist. Durch Integration erhält man die gesuchten Funktionen c_1, c_2 und somit eine Partikulärlösung y_p . Für skalare DG der Ordnung $n > 2$ geht man analog vor.

Beispiel 4.3 Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{1+t}y' = 1, \quad t > -1.$$

Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Eine Lösung ist $y_1(t) = 1$. Da x in der Differentialgleichung nicht auftritt, setzen wir zur Konstruktion einer weiteren Lösung

$$z = y'.$$

Dieser Trick, der immer funktioniert, wenn y in der Differentialgleichung nicht auftritt, führt auf eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für z :

$$z' + \frac{1}{1+t}z = 0,$$

mit der Lösung

$$z = e^{-\ln(1+t)} = \frac{1}{1+t}.$$

Durch Integration erhält man die Lösung

$$y_2(t) = \ln(1+t)$$

der homogenen Differentialgleichung. Durch Berechnen der Wronski-Determinante kann man leicht nachweisen, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind und somit ein Fundamentalsystem bilden. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y(t) = c_1 + c_2 \ln(1+t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Eine Partikulärlösung bestimmen wir mittels Variation der Konstanten.

$$y_p(t) = c_1(t) + c_2(t) \ln(1+t).$$

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln(1+t) \\ 0 & \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und weiter auf

$$c_2'(t) = 1 + t, \quad c_1'(t) = -\ln(1+t)(1+t).$$

Durch Integration erhält man

$$c_2(t) = t + \frac{t^2}{2}, \quad c_1(t) = \frac{1}{2}(1+t)^2\left(\frac{1}{2} - \ln(1+t)\right).$$

Es folgt

$$y_p(t) = \frac{1}{2}(1+t)^2\left(\frac{1}{2} - \ln(1+t)\right) + \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\ln(1+t).$$

◇

Beispiel 4.4 Gegeben ist die Gleichung vom Eulerschen Typ

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^3, \quad t > 0.$$

Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung des homogenen Problems. In diesem Fall führt der „naheliegende“ Ansatz

$$y(t) = t^\alpha$$

ans Ziel. Durch Einsetzen in die Gleichung erhält man

$$\alpha(\alpha - 1)t^\alpha - 2\alpha t^\alpha + 2t^\alpha = (\alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2)t^\alpha = 0.$$

Die Funktion t^α ist genau dann eine Lösung der homogenen DG, wenn gilt

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t^2$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t^2.$$

Eine Partikulärlösung bestimmen wir mittels Variation der Konstanten:

$$y_p(t) = c_1(t)t + c_2(t)t^2.$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t c_1' + t^2 c_2' &= 0 \\ c_1' + 2t c_2' &= t \end{aligned}$$

woraus folgt

$$c_2' = 1, \quad c_1' = -t$$

und

$$c_2 = t, \quad c_1 = -\frac{t^2}{2}.$$

Damit erhalten wir die Partikulärlösung

$$y_p(t) = -\frac{t^3}{2} + t^3 = \frac{t^3}{2}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \frac{t^3}{2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: In diesem Beispiel hätte man die Partikulärlösung auch mit dem naheliegenden polynomialen Ansatz

$$y_p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

bestimmen können. ◇

Ansatzmethode für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für eine lineare DG n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$Ly = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0(t)y = b(t)$$

kann für spezielle Inhomogenitäten eine Partikulärlösung effizient mit der Ansatzmethode berechnet werden. Wie üblich bezeichnet $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom der DG.

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ und $r(t)$ ein Polynom. Sei $y(t) := r(t)e^{\mu t}$. Dann gilt

$$Ly = q(t)e^{\mu t}$$

mit einem Polynom q , dessen Grad kleiner gleich dem Grad von r ist. Umgekehrt kann man bei gegebenem q versuchen, ein Polynom r so zu bestimmen, dass die obige Gleichung gilt.

Funktionen der Form $r(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom r nennt man auch Quasipolynome. Für $\mu = 0$ erhält man Polynome. Für $\mu = \alpha + i\beta$ erhält man durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil Funktionen der Form $r(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$ und $r(t)e^{\alpha t} \sin \beta t$. Die Ansatzmethode funktioniert genau bei Inhomogenitäten dieser Form.

Falls μ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der DG ist, muss der Grad von r größer als der Grad von q gewählt werden. Genauer gilt

Satz 4.8 *Es sei $q(t)$ ein Polynom vom Grad l und $\mu \in \mathbb{C}$. Dann hat die DG mit konstanten Koeffizienten $Ly = q(t)e^{\mu t}$ im Fall $p(\mu) \neq 0$ eine Partikulärlösung $y_p(t) = r(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom r vom Grad l .*

Falls μ eine Nullstelle von p der Ordnung m ist hat die DG eine Partikulärlösung $y_p(t) = t^m r(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom r vom Grad l .

Anmerkung: Im Fall $p(\mu) = 0$ spricht man von **Resonanz**.

Beweis: Wir beweisen den Satz nur in zwei einfachen Spezialfällen. Wir betrachten nur den Fall $q(t) = q \in \mathbb{C}$.

Es gelte $p(\mu) \neq 0$. Der Ansatz $y_p = ce^{\mu t}$ führt auf

$$Ly_p = p(\mu)ce^{\mu t} = qe^{\mu t}.$$

Daher gibt

$$c = \frac{q}{p(\mu)}$$

die gesuchte Lösung.

Es gelte $p(\mu) = 0$ und $p'(\mu) \neq 0$. Der Ansatz $y_p = cte^{\mu t}$ führt auf

$$Ly_p = ctp(\mu)e^{\mu t} + cp'(\mu)e^{\mu t} = qe^{\mu t}.$$

Wegen $p(\mu) = 0$ gibt

$$c = \frac{q}{p'(\mu)}$$

die gesuchte Lösung.

Um den Satz allgemein zu beweisen, kann man z.B. die durch L induzierte lineare Abbildung auf Vektorräumen von Quasipolynomen analysieren, siehe Arnold (2001). \square

Beispiel 4.5 a) Bei der DG

$$y'' + y = 7e^{-3t}$$

gilt $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, $\mu = -3$, $p(-3) = 10$. Daher ist

$$y_p = \frac{7}{10}e^{-3t}$$

eine Partikulärlösung.

b) Bei der DG

$$y'' + y = (3t^2 + 1)e^{-3t}$$

tritt keine Resonanz auf. Einsetzen des Ansatzes

$$y_p = (at^2 + bt + c)e^{-3t}$$

in die DG und Koeffizientenvergleich nach Potenzen von t ergibt ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für a, b, c . \diamond

Beispiel 4.6 Gegeben ist die DG

$$y'' - 4y' + 3y = \sin 2t.$$

Wegen $\sin 2t = \Im e^{2it}$ gilt $y = \Im z$, wobei z eine komplexe Lösung der DG

$$z'' - 4z' + 3z = e^{2it}$$

ist. Hier gilt $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, $\mu = 2i$ und $p(2i) = -1 - 8i \neq 0$. Daher ist

$$z_p = -\frac{1}{1+8i}e^{2it} = -\frac{1-8i}{65}(\cos 2t + i \sin 2t)$$

eine komplexe Partikulärlösung. Somit ist

$$y_p = \Im z_p = \frac{1}{65}(8 \cos 2t - \sin 2t)$$

eine reelle Partikulärlösung.

Alternativ könnte man auch den reellen Ansatz

$$y_p = A \cos 2t + B \sin 2t$$

machen und A, B durch Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich bestimmen. \diamond

Beispiel 4.7 Die DG

$$y'' + y = \cos \omega t$$

beschreibt einen periodisch angetriebenen harmonischen Oszillator. Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$ gilt $\mu = i\omega$. Für $\omega \neq \pm 1$ tritt keine Resonanz auf und man erhält die Partikulärlösung

$$y_p(t) = \frac{1}{1-\omega^2} \cos \omega t.$$

Im Resonanzfall $\omega = 1$ bzw. $\mu = i$ gilt $p'(i) = 2i \neq 0$, daher ist

$$z_p(t) = \frac{1}{2i} t e^{it} = \frac{t}{2i} (\cos t + i \sin t)$$

eine komplexe Partikulärlösung. Somit ist

$$y_p(t) = \Re z_p(t) = \frac{t}{2} \sin t$$

eine reelle Partikulärlösung. Diese Lösung schwingt mit der Frequenz der homogenen Lösung, hat jedoch eine mit t linear wachsende Amplitude. Der Grund dafür ist, dass das System mit einer zu einer Eigenschwingung resonanten Frequenz angeregt wird. In der allgemeinen Lösung

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{t}{2} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dominiert für große Werte von t die Partikulärlösung. ◇

Anmerkung: Die durch solche (und andere) Resonanzen entstehenden Schwingungen großer Amplitude sind in technischen Systemen meist unerwünscht.

Kapitel 5

Stabilität

Eine intuitive Vorstellung vom Konzept der Stabilität vermitteln die in Abb. 5.1 dargestellten Situationen. Eine Kugel rollt unter dem Einfluss von Gravitation und Reibung auf einer Bahn vorgegebener Geometrie. Die dargestellten Positionen sind Ruhelagen des

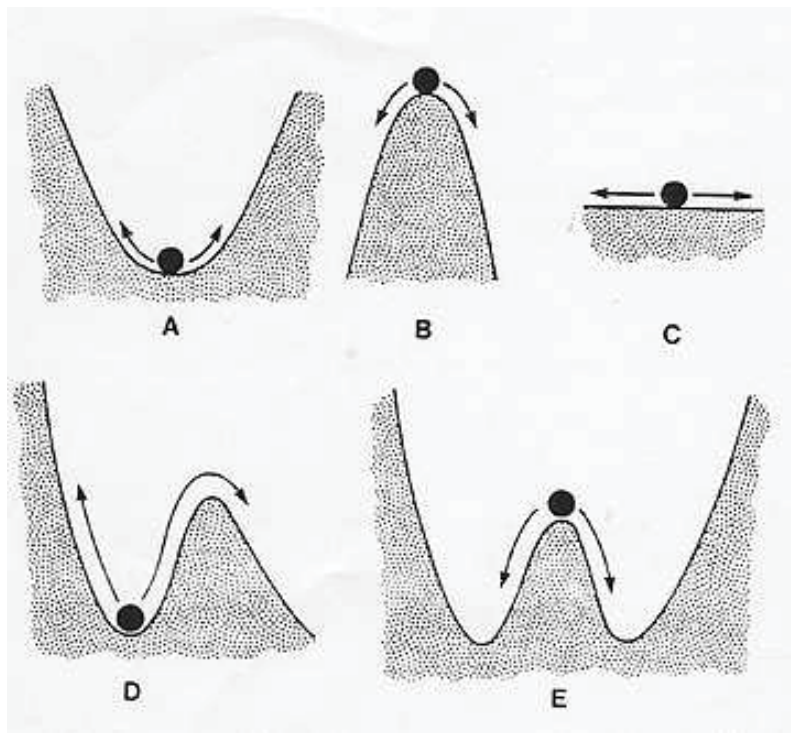


Abbildung 5.1: stabile und instabile Ruhelagen

Systems, die auf unterschiedliche Art stabil bzw. instabil sind. Unter Stabilität versteht man die Frage, welchen Effekt eine Störung der Position bzw. Geschwindigkeit der Kugel auf das Verhalten der Kugel hat? Dabei stellt sich vor allem auch die Frage nach dem asymptotischen Verhalten für $t \rightarrow \infty$. Macht es einen Unterschied, ob die Störung klein oder groß ist? Was ändert sich, wenn man den Einfluss der Reibung nicht berücksichtigt?

Beispiel 5.1 Ein einfaches mathematisches Modell dieser (und vieler anderer) Situation(en) ist die DG

$$\ddot{x} = -V'(x) - r\dot{x},$$

welche die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Position $x(t)$ unter dem Einfluss eines Potentials $V(x)$ und eines Reibungsterms $r\dot{x}$ beschreibt. Dabei ist $r > 0$ der Reibungskoeffizient, $r = 0$ entspricht dem reibungslosen Fall. Als System geschrieben hat die DG die Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -V'(x) - rp\end{aligned}$$

Die durch $p = 0$ und $V'(x) = 0$ definierten Ruhelagen des Systems entsprechen den kritischen Punkten - insbesondere den Minima und Maxima - von V . Es stellt sich die Frage, wie die Stabilität dieser Ruhelagen mathematisch definiert und untersucht werden kann? \diamond

In diesem Kapitel wird die Stabilität von Lösungen des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5.1}$$

untersucht. Dabei interessiert man sich für das Verhalten von Lösungen für $t \in [t_0, \infty)$, daher sei $f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich x , und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für festes $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in G$ wird die Lösung des AWP mit $x(t, x_0)$ bezeichnet. Sei $x(t, x_0)$ eine Lösung, die für alle $t \geq t_0$ existiert. Bei der Frage der Stabilität geht es um das Verhalten von Lösungen, deren Anfangswerte kleinen Abstand von x_0 haben, für alle $t \geq 0$. Die Frage ist, ob aus $|x_0 - a|$ klein folgt:

1. $|x(t, x_0) - x(t, a)|$ klein für alle $t \geq t_0$

oder

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - x(t, a)| = 0$.

Auf endlichen Intervallen $[t_0, t_1]$ gilt die Eigenschaft 1) wegen der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten, siehe Satz 3.11. Die diesem Satz zugrundeliegende Abschätzung (3.3) wird aber für $t_1 \rightarrow \infty$ beliebig schlecht. Daher sind auf unbeschränkten Zeitintervallen weitere Untersuchungen notwendig.

Wichtige Typen von Lösungen, deren Stabilität untersucht werden kann, sind Ruhelagen und periodische Lösungen. Dies gilt insbesondere im Fall autonomer DG $x' = f(x)$.

Anmerkung: Vom Standpunkt der Anwendungen aus werden oft nur stabile Lösungen als relevant betrachtet, da aufgrund von unvermeidbaren Störungen des Systems nur stabile Lösungen “beobachtbar” bzw. “realisierbar” sind.

5.1 Stabilitätskonzepte

Definition 5.1 Sei $x(t, x_0)$ eine Lösung des AWP (5.1), die für alle $t \geq t_0$ existiert. Die Lösung $x(t, x_0)$ heißt:

1. **stabil** (Ljapunov stabil), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $|x_0 - a| \leq \delta$ folgt: $x(t, a)$ existiert für $t \geq t_0$ und $|x(t, x_0) - x(t, a)| \leq \varepsilon$ für alle $t \geq t_0$.
2. **instabil**, wenn $x(t, x_0)$ nicht stabil ist.
3. **anziehend** (attraktiv), wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $|x_0 - a| \leq \delta$ folgt: $x(t, a)$ existiert für $t \geq t_0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - x(t, a)| = 0$.
4. **asymptotisch stabil**, wenn $x(t, x_0)$ stabil und anziehend ist.

Beispiel 5.2 Die Ruhelage der DG

$$x' = ax$$

ist für $a < 0$ asymptotisch stabil, für $a = 0$ stabil und für $a > 0$ instabil. Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen und der Lösungsformel $x(t, x_0) = x_0 e^{at}$. Tatsächlich ist jede Lösung dieser DG für $a < 0$ asymptotisch stabil, für $a = 0$ stabil und für $a > 0$ instabil. \diamond

Beispiel 5.3 Die Stabilität der Ruhelagen einer skalaren autonomen DG

$$x' = f(x)$$

wird durch die Vorzeichenverteilung von $f(x)$ bestimmt. Genauer gilt:

1. die Ruhelage x_0 ist asymptotisch stabil, wenn in einem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f(x) < 0$ für $x > x_0$.
2. die Ruhelage x_0 ist instabil, wenn in einem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) < 0$ für $x < x_0$ oder $f(x) > 0$ für $x > x_0$.

Dies folgt unmittelbar aus dem Monotonieverhalten der Lösungen $x(t)$ in den angegebenen Intervallen.

a) Die Ruhelage $x = 0$ der DG $x' = x^2$ ist instabil, da für beliebig kleine Anfangswerte $x_0 > 0$ die Lösung $x(t, x_0)$ jedes Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ verläßt.

b) Die Ruhelage $x = 0$ der DG $x' = -x^3$ ist asymptotisch stabil.

c) Für die DG $x' = -x^3 + x^4$ ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil, die Ruhelage $x = 1$ ist instabil. \diamond

Beispiel 5.4 Für die in Abb. 5.1 dargestellten Ruhelagen gilt:

im Fall von Reibung ist A) asymptotisch stabil, B) instabil, C) stabil aber nicht asymptotisch stabil, D) asymptotisch stabil, E) instabil;

im reibungslosen Fall ist A) stabil, B) instabil, C) instabil, D) stabil, E) instabil.

Wodurch entstehen diese Unterschiede? \diamond

Beispiel 5.5 In Beispiel 5.2 ist die Ruhelage $x = 0$ für $\alpha < 0$ asymptotisch stabil, für $\alpha = 0$ stabil und für $\alpha > 0$ instabil. \diamond

Anmerkung: Die Begriffe “stabil” und “anziehend” sind unabhängig, d.h. aus “stabil” folgt nicht “anziehend”, und aus “anziehend” folgt nicht “stabil”.

Die erste Aussage folgt bereits aus dem trivialen Bsp. $x' = 0$. Ein Beispiel für die zweite Aussage wird im folgenden gegeben.

Beispiel 5.6 Ein ebenes autonomes System $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ wird in Polarkoordinaten durch die entkoppelten DG

$$\begin{aligned} r' &= r(1 - r) \\ \varphi' &= 1 - \cos \varphi \end{aligned}$$

beschrieben. Die r -Gleichung hat die asymptotisch stabile Ruhelage $r = 1$ und die instabile Ruhelage $r = 0$. Genauer gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t, r_0) = 1$$

für alle $r_0 > 0$.

Es genügt $\varphi \in [0, 2\pi]$ zu betrachten, wobei 0 und 2π denselben Punkten im \mathbb{R}^2 entsprechen. Wegen $1 - \cos \varphi > 0$ für $\varphi \in (0, 2\pi)$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \varphi_0) = 2\pi$$

für alle $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$.

Im x System gilt daher

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = (1, 0)^T$$

für alle Anfangswerte $x_0 \neq 0$. Die Ruhelage $(1, 0)$ ist daher anziehend. Die Ruhelage $(1, 0)$ ist aber nicht stabil, da auf dem Kreis $r = 1$ beliebig nahe an $(1, 0)$ Anfangswerte (mit φ klein und positiv) liegen, sodass die Lösungen des AWP zuerst im Uhrzeigersinn den Kreis $r = 1$ durchlaufen, bevor sie für $t \rightarrow \infty$ gegen $(1, 0)$ konvergieren. \diamond

5.2 Klassifikation ebener autonomer linearer Systeme

Sei A eine reelle 2×2 Matrix. Die DG

$$x' = Ax$$

hat die triviale Ruhelage $x = 0$. Aufgrund der Resultate in Abschnitt 4.2 wird die Stabilität der Ruhelage und das Verhalten aller Lösungen durch die Eigenwertstruktur von A bestimmt. Für das charakteristische Polynom gilt

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - s\lambda + d$$

mit $s := \text{Spur } A$ und $d := \det A$. Daher gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - d}.$$

Nach dem Vorzeichen der Diskriminante unterscheidet man drei Fälle:

1. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ für $\frac{s^2}{4} - d > 0$,
2. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$ für $\frac{s^2}{4} - d = 0$,
3. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ für $\frac{s^2}{4} - d < 0$.

Wenn zwei Eigenvektoren existieren, ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die von v_1 und v_2 aufgespannten Unterräume sind invariant.

Nach den unterschiedlichen Vorzeichen der Eigenwerte bzw. ihres Realteils ergeben sich jeweils einige Unterfälle.

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $s^2 - 4d > 0$

1a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, für $s < 0$ und $d > 0$, $x = 0$ ist asymptotisch stabil,

Bezeichnung: **stabiler Knoten**

1b) $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$, für $s < 0$ und $d = 0$, $x = 0$ ist stabil,

eindimensionaler Unterraum von Ruhelagen in Richtung v_2 , anziehend in Richtung v_1 .

1c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, für $d < 0$, $x = 0$ ist instabil,

Bezeichnung: **Sattelpunkt**

1d) $0 = \lambda_1 < \lambda_2$, für $s > 0$ und $d = 0$, $x = 0$ ist instabil,

eindimensionaler Unterraum von Ruhelagen in Richtung v_1 , abstoßend in Richtung v_2 .

1e) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, für $s > 0$ und $d > 0$, $x = 0$ ist instabil,

Bezeichnung: **instabiler Knoten**

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, $s^2 - 4d = 0$

Hier wird zwischen zwei unterschiedliche Jordanstrukturen

$$i) \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad ii) \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

unterschieden, wobei die Unterscheidung zwischen diesen Fällen nicht mittels $\text{spur } A$ und $\det A$ möglich ist. Es tritt “typischerweise” der Fall $ii)$ auf, da im Fall eines doppelten Eigenwerts “typischerweise” ein 2×2 Jordanblock existiert.

2a) $\lambda < 0$, für $s < 0$, $x = 0$ ist asymptotisch stabil,

Bezeichnung: $i)$ **stabiler Stern**, $ii)$ **entarteter stabiler Knoten**

2b) $\lambda = 0$, $s = 0$, $d = 0$, $i)$ $x = 0$ ist stabil, $ii)$ $x = 0$ ist instabil,

sehr degeneriert: $i)$ nur Ruhelagen, $ii)$ eindimensionaler Unterraum von Ruhelagen in Richtung v_1 und linearer Fluss parallel dazu.

2c) $\lambda > 0$, für $s > 0$, $x = 0$ ist instabil,

Bezeichnung: für $i)$ **instabiler Stern**, für $ii)$ **entarteter instabiler Knoten**

3. Fall: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha = s/2$, $\beta \neq 0$, $s^2 - 4d < 0$

3a) $\alpha < 0$, für $s < 0$, $x = 0$ ist asymptotisch stabil,

Bezeichnung: **stabiler Strudel (Spirale)**

3b) $\alpha = 0$, für $s = 0$, $x = 0$ ist stabil,

Bezeichnung: **Zentrum**

3c) $\alpha > 0$, für $s > 0$, $x = 0$ ist instabil

Bezeichnung: **instabiler Strudel (Spirale)**

In Abbildung 5.2 sind die jeweiligen Phasenporträts in den entsprechenden Bereichen der Spur-Determinante Ebene dargestellt.

Zusammenfassend gilt:

1. Die Ruhelage $x = 0$ ist genau dann stabil, wenn gilt 1) $s \leq 0$, $d \geq 0$ und $(s, d) \neq (0, 0)$ oder 2) $(s, d) = (0, 0)$ im Fall $i)$, d.h. $A = 0$.
2. Die Ruhelage $x = 0$ ist asymptotisch stabil genau dann, wenn gilt $s < 0$, $d < 0$. Die entsprechenden Fälle 1a), 2a), 3a) werden alle als **Senken** bezeichnet.

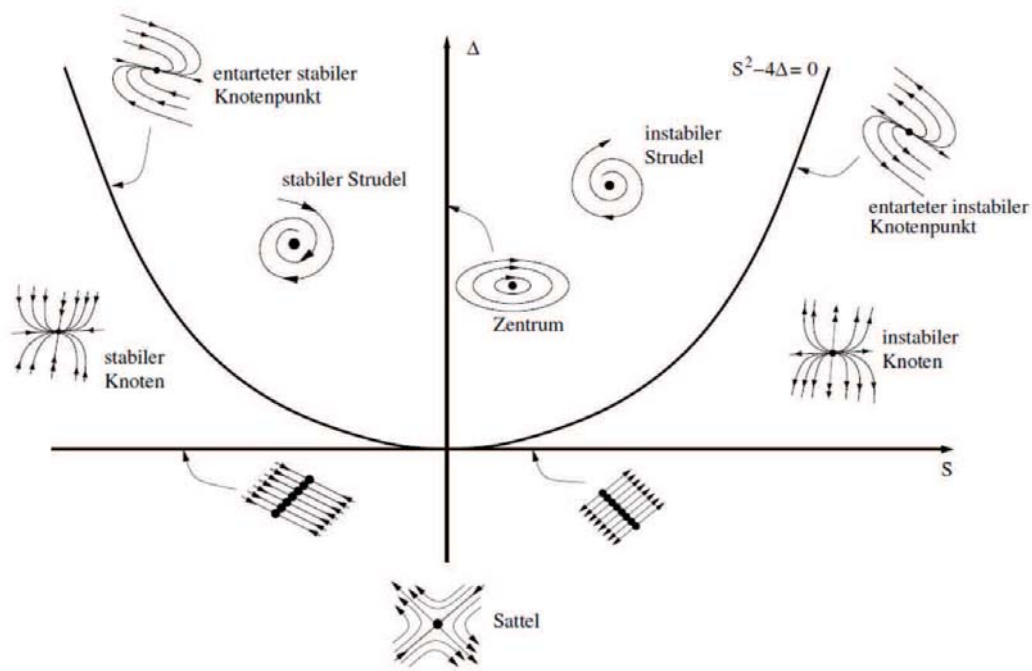


Abbildung 5.2: Klassifikation in der Spur-Determinanten Ebene

3. Die Ruhelage $x = 0$ ist abstoßend genau dann, wenn gilt $s > 0$, $d > 0$. Die entsprechenden Fälle 1e), 2c), 3c) werden alle als **Quellen** bezeichnet.
4. Beim Überschreiten der Achse $d = 0$ wechselt ein reeller Eigenwert sein Vorzeichen, was einem Übergang von Sattel zu Knoten entspricht.
5. Beim Überschreiten der Achse $s = 0$ bei $d > 0$ wechselt der Realteil der Eigenwerte sein Vorzeichen, was einem Übergang von einem stabilen Strudel zu einem instabilen Strudel entspricht.

Anmerkung: 1) Sattelpunkte, Quellen und Senken sind **strukturell stabil**, d.h. sie ändern ihren Typ bei einer kleinen Störung der Matrix A nicht.

2) Die Fälle 1b), 1d), 2b) und 3b) sind **nicht strukturell stabil**, da sich bei Störung der Matrix A die Stabilität der Ruhelage $x = 0$ ändern kann.

3) Die Punkte in Abbildung 5.2, die den nicht strukturell stabilen Fällen entsprechen, nennt man **Verzweigungspunkte**. Verzweigungspunkte sind die s -Achse und der Teil der d -Achse mit $d > 0$. Die gesamte Abbildung 5.2 ist das entsprechende **Verzweigungsdiagramm**.

5.3 Stabilität linearer Systeme

In diesem Abschnitt wird die Stabilität linearer Systeme

$$x'(t) = A(t)x + b(t) \quad (5.2)$$

mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ untersucht. Für diese DG existieren alle Lösungen global, daher ist es sinnvoll ihre Stabilität zu untersuchen. Seien $x(t)$ und $\bar{x}(t)$ zwei Lösungen der DG (5.2). Dann ist $y(t) := x(t) - \bar{x}(t)$ eine Lösung der homogenen DG. Stabilität bzw. asymptotische Stabilität der Lösung $x(t)$ bedeutet, dass $|y(t)|$ beliebig klein bleibt bzw. gegen Null konvergiert, wenn $|y(t_0)|$ hinreichend klein ist. Daraus folgt unmittelbar

Satz 5.1 *Alle Lösungen der DG (5.2) sind genau dann stabil bzw. asymptotisch stabil, wenn die Nulllösung der homogenen DG $x' = A(t)x$ stabil bzw. asymptotisch stabil ist.*

Daher sagt man, die DG (5.2) ist stabil, asymptotisch stabil oder instabil.

Satz 5.2 *Sei $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ eine Fundamentalmatrix der DG $x' = A(t)x$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *Die DG (5.2) ist genau dann stabil, wenn eine Konstante $K > 0$ existiert mit $|Y(t)| \leq K$ für alle $t \geq t_0$;*
2. *Die DG (5.2) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t)| = 0.$$

Beweis: ad 1) Angenommen die DG ist stabil, aber eine Spalte $y_i(t)$ von $Y(t)$ ist unbeschränkt auf $[t_0, \infty)$. Für δ klein ist $|\delta y_i(t_0)|$ beliebig klein, aber $|\delta y_i(t)|$ ist unbeschränkt auf $[t_0, \infty)$, was in Widerspruch zur Stabilität der DG steht.

Umgekehrt folgt aus $|Y(t)| \leq K$, dass für jede Lösung $x(t) = Y(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$ gilt $|x(t)| \leq K|c|$, $t \geq t_0$. Daraus folgt unmittelbar die Stabilität der Nulllösung und somit die Stabilität der DG.

ad 2) Angenommen die DG ist asymptotisch stabil. Dann gilt für jede Lösung $x(t)$ der DG $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Daher gilt dies insbesondere für jede Spalte von $Y(t)$. Daraus folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t)| = 0$.

Umgekehrt folgt aus $\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t)| = 0$ die Beschränktheit von $|Y(t)|$ auf $[t_0, \infty)$, woraus

die Stabilität folgt. Alle Lösungen der DG sind durch $x(t) = Y(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Aus $|x(t)| \leq |Y(t)||c|$ folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Daher ist die DG asymptotisch stabil. \square

Für Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$x' = Ax$$

wird Stabilität durch die Eigenwerte der Matrix A bestimmt.

Satz 5.3 Für die DG $x' = Ax$ mit einer $n \times n$ Matrix A gilt:

1. Die DG ist genau dann stabil, wenn für alle Eigenwerte von A gilt i) $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ und ii) Eigenwerte mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ sind halbeinfach, d.h. ihre algebraische Vielfachheit ist gleich ihrer geometrischen Vielfachheit.
2. Die DG ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte von A gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Beweis: Ein Fundamentalsystem der DG ist e^{At} . Der Satz folgt daher aus Satz 5.2 und den Resultaten über die Matrixexponentialfunktion in Abschnitt 4.2. Eigenwerte mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ müssen halbeinfach sein, da im Fall eines nichttrivialen Jordanblocks der Dimension $r > 1$ Lösungen existieren, die wie t^{r-1} wachsen (siehe Satz 4.5). \square

Falls alle Eigenwerte der Matrix A negativen Realteil haben, klingen alle Lösungen der DG $x' = Ax$ exponentiell ab.

Satz 5.4 Für alle Eigenwerte der Matrix A gelte $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha < 0$. Dann existiert eine Konstante $K > 0$, sodass gilt

$$|e^{At}| \leq K e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Beweis: Es sei J die Jordansche Normalform von A und T die entsprechende Transformationsmatrix mit $A = TJT^{-1}$. Wegen

$$|e^{At}| = |Te^{Jt}T^{-1}| \leq |T||e^{Jt}||T^{-1}|$$

genügt es die Abschätzung für e^{Jt} zu beweisen. Für alle Eigenwerte von A gilt $\operatorname{Re} \lambda + \alpha < 0$. Aus Satz 4.5 folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\alpha t} e^{Jt}| = 0.$$

Daher existiert eine Konstante $\tilde{K} > 0$ mit $|e^{\alpha t} e^{Jt}| \leq \tilde{K}$ für alle $t \geq 0$, d.h.

$$|e^{Jt}| \leq \tilde{K} e^{-\alpha t}.$$

Die Behauptung des Satzes folgt mit $K := |T||T^{-1}|\tilde{K}$. \square

Definition 5.2 Für die DG $x' = Ax$ mit einer $n \times n$ Matrix A sei

1. der **stabile Raum** E^s die Summe der (verallgemeinerten) Eigenräume aller Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re} \lambda < 0$,
2. der **Zentrums-Raum** E^c die Summe der (verallgemeinerten) Eigenräume aller Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$,
3. der **instabile Raum** E^u die Summe der (verallgemeinerten) Eigenräume aller Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Anmerkung: Die Notation folgt hier den englischen Begriffen stable space, center-space und unstable space.

Aus den Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion e^{At} und Satz 5.4 folgt

Satz 5.5 Für die DG $x' = Ax$ mit einer $n \times n$ Matrix A gilt:

1. Die Räume E^s , E^c und E^u sind invariant und

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

mit einer entsprechenden eindeutigen Zerlegung

$$x = x^s + x^c + x^u.$$

2. Es existieren $\alpha > 0$, $K > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m < \dim(E^c)$ so dass gilt

$$|x^s(t)| \leq K e^{-\alpha t} |x^s(0)|, \quad t \geq 0,$$

$$|x^c(t)| \leq K |t|^m |x^c(0)|, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$|x^u(t)| \leq K e^{\alpha t} |x^u(0)|, \quad t \leq 0.$$

5.4 Linearisierung und Stabilität

Linearisieren ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung des Verhaltens der Lösungen nichtlinearer DG. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie diese Methode zur Untersuchung der Stabilität von Ruhelagen verwendet wird.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Die autonome DG

$$x' = f(x) \quad (5.3)$$

habe die Ruhelage $x_0 \in G$, d.h. $f(x_0) = 0$. Die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität der Ruhelage soll untersucht werden. Um das Verhalten der Lösungen der DG in der Nähe von x_0 zu untersuchen, setzt man

$$x = x_0 + y$$

mit y in einer Umgebung des Ursprungs. Für y erhält man durch Einsetzen in die DG und Taylorentwicklung des Vektorfeldes f um die Stelle x_0 die DG

$$y' = x' = f(x_0 + y) = f(x_0) + df(x_0)y + r(y) = df(x_0)y + r(y). \quad (5.4)$$

Für den Fehlerterm $r(y)$ gilt $|r(y)| = o(|y|)$, d.h. $|r(y)|$ ist kleiner als $|y|$ für $y \rightarrow 0$. Vernachlässigen von $r(y)$ ergibt die lineare DG mit konstanten Koeffizienten

$$y' = df(x_0)y. \quad (5.5)$$

Definition 5.3 Die DG (5.5) ist die **Linearisierung** der DG (5.3) an der Ruhelage x_0 .

Das Verhalten der Lösungen der Linearisierung ist durch die Eigenwertstruktur der Matrix $df(x_0)$ bestimmt.

Anmerkung: Es erscheint plausibel, dass sich für y klein die Lösungen der DG (5.4) und (5.5) nur wenig unterscheiden bzw. sich qualitativ ähnlich verhalten. In vielen Situationen kann man beweisen, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Beispiel 5.7 Die DG

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_2 + x_1 - x_1^3 \end{aligned}$$

hat die Ruhelagen $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$ und $p_3 = (-1, 0)$. Es gilt

$$df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$df(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det df(p_1) = -1$ entspricht der Linearisierung an p_1 ein Sattelpunkt. Die Linearisierung an p_1 ist instabil.

Die Matrix

$$df(p_2) = df(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

hat Determinante 2 und Spur -1 , daher entspricht der Linearisierung an p_2 und p_3 eine stabile Spirale. Die Linearisierung an p_2 und p_3 ist asymptotisch stabil. \diamond

Es stellt sich die Frage, ob sich das Stabilitätsverhalten der Linearisierung auf die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Problems überträgt?

Satz 5.6

[Stabilität mittels Linearisierung]

Sei x_0 eine Ruhelage der DG $x' = f(x)$ mit einem C^1 -Vektorfeld f und $A := df(x_0)$. Dann gilt:

1. Falls für alle Eigenwerte von A gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$, ist die Ruhelage asymptotisch stabil.
2. Falls Eigenwerte von A existieren mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$, ist die Ruhelage instabil.
3. Falls Eigenwerte von A existieren mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$, kann man vom Verhalten der Linearisierung nicht auf das Verhalten der nichtlinearen DG schließen.

Beweis: ad 3) Die DG $x' = x^3$ hat die instabile Ruhelage x_0 mit Linearisierung $df(0) = 0$. Die DG $x' = -x^3$ hat die stabile Ruhelage x_0 mit Linearisierung $df(0) = 0$. Das unterschiedliche Verhalten dieser beiden DG wird durch nichtlineare Terme – hier durch die Terme dritter Ordnung – bestimmt, die durch die Linearisierung nicht erfasst werden.

ad 1) Die DG für $y := x - x_0$ lautet

$$y' = Ay + r(y).$$

O.B.d.A. sei $t_0 = 0$. Sei $y(t)$ die Lösung des AWP $y(0) = y_0$. Mittels Variation der Konstanten erhält man die folgende Darstellung dieser Lösung

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}r(u(s))ds. \quad (5.6)$$

Da alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, existieren nach Satz 5.4 Konstante $K > 0$, $\alpha > 0$, sodass gilt

$$|e^{At}| \leq Ke^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Zu zeigen ist, dass für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|y(t)| \leq \varepsilon$ für $t \geq 0$ falls $|y_0| \leq \delta$ und dass weiters $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ gilt.

Um aus der Darstellung (5.6) Abschätzungen für $y(t)$ herzuleiten, benötigen wir eine quantitative Beschreibung des Kleinwerdens von $r(y)$ für $y \rightarrow 0$. Da f einmal stetig differenzierbar ist, folgt: für jedes $\rho > 0$ existiert $\eta > 0$ mit

$$|r(y)| \leq \rho|y| \quad \text{für } |y| \leq \eta. \quad (5.7)$$

Zunächst nehmen wir an, dass gilt

$$|y(t)| \leq \eta, \quad t \in [0, T]. \quad (5.8)$$

Später wird gezeigt, dass diese Abschätzung – für $|y_0|$ hinreichend klein – tatsächlich für alle $T \geq 0$ gilt. Aus der Darstellung (5.6) folgt unter Verwendung der Abschätzung (5.7)

$$|y(t)| \leq Ke^{-\alpha t}|y_0| + K\rho \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|y(s)|ds.$$

Multiplikation dieser Ungleichung mit $e^{\alpha t}$ ergibt

$$e^{\alpha t}|y(t)| \leq K|y_0| + K\rho \int_0^t e^{\alpha s}|y(s)|ds.$$

Aus dem Lemma von Gronwall angewandt auf die Funktion $e^{\alpha t}|y(t)|$ folgt

$$e^{\alpha t}|y(t)| \leq K|y_0|e^{K\rho t}, \quad t \in [0, T],$$

d.h.

$$|y(t)| \leq K|y_0|e^{(K\rho-\alpha)t}, \quad t \in [0, T]. \quad (5.9)$$

Wähle $\rho > 0$, sodass gilt $K\rho - \alpha < 0$. Dann gilt

$$|y(t)| \leq K|y_0| \leq \min(\eta, \varepsilon), \quad t \in [0, T]$$

für $|y_0| \leq \delta$, falls

$$\delta \leq \min\left(\frac{\eta}{K}, \frac{\varepsilon}{K}\right)$$

gewählt wird. Da ρ und δ unabhängig von T sind, gilt diese Abschätzung für alle $T > 0$. Daher existiert die Lösung $y(t)$ für $t \geq 0$ und erfüllt $|y(t)| \leq \varepsilon$ für $t \geq 0$. Damit ist die Stabilität der Ruhelage bewiesen. Asymptotische Stabilität folgt aus der Abschätzung (5.9) und $K\rho - \alpha < 0$.

ad 2) Der Beweis der Instabilität ist ähnlich aber etwas komplizierter. Es sei E^u der instabile Raum, E^c der Zentrums-Raum und E^s der stabile Raum von A . Dies ergibt eine Zerlegung

$$y = y^u + y^c + y^s.$$

Mittels einer entsprechenden Zerlegung der Darstellung (5.6) kann unter Verwendung der Abschätzungen aus Satz 5.5 die Aussage 2) (und viel mehr) bewiesen werden. Für Details wird auf die Literatur bzw. die Vorlesung Differentialgleichungen 2 verwiesen. \square

Beispiel 5.8 Sei x_0 Ruhelage einer skalaren DG $x' = f(x)$ mit einer C^1 Funktion f . Dann ist die Ruhelage asymptotisch stabil, falls $f'(x_0) < 0$ gilt. Aus $f'(x_0) > 0$ folgt die Instabilität der Ruhelage. \diamond

Beispiel 5.9 Fortsetzung von Bsp. 5.7: Die Ruhelage p_1 ist instabil. Die Ruhelagen p_2, p_3 sind asymptotisch stabil. \diamond

5.5 Hyperbolische Ruhelagen

Definition 5.4 Sei f ein C^1 Vektorfeld auf $B \subset \mathbb{R}^n$. Eine Ruhelage x_0 heißt **hyperbolisch**, wenn für alle Eigenwerte λ von $A := df(x_0)$ gilt $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$.

Für die Linearisierung $y' = Ay$ an einer hyperbolischen Ruhelage gilt

$$E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n.$$

Im Fall einer hyperbolischen Ruhelage entscheidet die Linearisierung über die Stabilität. Eine hyperbolische Ruhelage ist genau dann asymptotisch stabil, wenn gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte der Linearisierung, sonst ist sie instabil.

Es stellt sich die Frage, ob eine nichtlineare DG $x' = f(x)$ in einer Umgebung einer Ruhelage durch eine nichtlineare Koordinatentransformation $y = h(x)$ in die Form $y' = Ay$, $A = df(x_0)$ gebracht werden kann. Der folgende Satz besagt, dass an hyperbolischen Ruhelagen so eine Transformation h existiert, die im allgemeinen aber nur stetig mit stetiger Inversen ist, d.h. h ist ein (lokaler) Homeomorphismus.

Satz 5.7 [Satz von Hartman-Grobman (1960)]

Sei x_0 eine Ruhelage der DG $x' = f(x)$ mit einem C^1 -Vektorfeld f und $A := df(x_0)$. Sei $x(t, a)$ die Lösung der DG mit dem Anfangswert $x(0, a) = a$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0 und eine Umgebung V von 0, so dass die DG $x' = f(x)$ in U zur Linearisierung $y' = Ay$ topologisch konjugiert ist, d.h. es existiert ein Homeomorphismus

$$h : U \rightarrow V$$

mit

$$h(x(t, a)) = e^{At} h(a)$$

für alle $a \in U$ solange $x(t, a) \in U$ gilt.

Im Beweis wird die Existenz der Transformation h als Fixpunkt einer geeigneten Kontraktion nachgewiesen, siehe z.B. Arnold (1988), Teschl (2012). Der Beweis zeigt auch, dass gilt $h(x) = x + o(|x|)$, d.h. h ist eine kleine Störung der Identität. Dies bestätigt nochmals die intuitive Vorstellung, dass die Linearisierung in einer (kleinen) Umgebung der Ruhelage das Verhalten der Lösungen gut approximiert. Unter bestimmten Bedingungen an die Eigenwerte von A , die gewisse Resonanzen ausschließen, kann man zeigen, dass h sogar ein Diffeomorphismus ist. Explizite Berechenbarkeit von $h(x)$ kann man natürlich nicht erwarten, da dies äquivalent zum expliziten Lösen der DG wäre.

Es stellt sich die Frage, ob eine nichtlineare DG $x' = f(x)$ an einer hyperbolischen Ruhelage ähnliche Objekte wie den stabile Raum E^s und den instabile Raum E^u der Linearisierung $y' = Ay$ besitzt.

Definition 5.5 Sei f ein C^1 Vektorfeld auf $B \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Ruhelage x_0 . Sei U eine Umgebung von x_0 . Dann heißt

$$W_{loc}^s(x_0) = \{a \in U : x(t, a) \in U \text{ für } t \geq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = x_0\}$$

die **lokale stabile Mannigfaltigkeit** von x_0 und

$$W_{loc}^u(x_0) = \{a \in U : x(t, a) \in U \text{ für } t \leq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, a) = x_0\}$$

die **lokale instabile Mannigfaltigkeit** von x_0 .

Beispiel 5.10 Die DG

$$x' = y$$

$$y' = x - x^2$$

hat die Ruhelagen $p_0 = (0, 0)$ und $p_1 = (1, 0)$. Für die Linearisierung ist p_0 ein Sattel und p_1 ein Zentrum. An p_0 gilt $E^s = \text{span}((1, -1)^T)$ und $E^u = \text{span}((1, 1)^T)$. Das nichtlineare System ist ein Hamiltonsches System mit der Erhaltungsgröße

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Integralkurven liegen in Niveaumengen von H . Die lokale stabile Mannigfaltigkeit und die lokale instabile Mannigfaltigkeit von p_0 liegen daher in der Niveaumenge $H(x, y) = 0$. Daraus folgt, dass gilt

$$W_{loc}^s(p_0) = \{(x, y), y = -x + O(x^2), |x| < \delta\}$$

$$W_{loc}^u(p_0) = \{(x, y), y = x + O(x^2), |x| < \delta\}$$

mit geeignetem $\delta > 0$. In diesem Beispiel ist $W_{loc}^s(p_0)$ eine glatte Kurve tangential zu E^s und $W_{loc}^u(p_0)$ eine glatte Kurve tangential zu E^u . \diamond

An allgemeinen hyperbolischen Ruhelagen ist die Situation ähnlich. Es gilt der folgende in der Theorie dynamischer Systeme wichtige Satz.

Satz 5.8 [Satz über stabile und instabile Mannigfaltigkeiten]

Sei x_0 eine hyperbolische Ruhelage der DG $x' = f(x)$, $x \in B \subset \mathbb{R}^n$ mit einem C^k -Vektorfeld f . Der stabile Raum E^s habe die Dimension n^s , der instabile Raum habe die Dimension $n^u = n - n^s$. Dann gilt

1. In einer geeigneten Umgebung U von x_0 existieren eindeutig bestimmte lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeiten $W_{loc}^s(x_0)$ und $W_{loc}^u(x_0)$.
2. $W_{loc}^s(x_0)$ ist eine n^s -dimensionale C^k Mannigfaltigkeit, die im Punkt x_0 tangential zu $x_0 + E^s$ ist. $W_{loc}^s(x_0)$ kann als Graph $x^u = h^s(x^s)$, $x^s \in U^s$ beschrieben werden. Dabei ist $U^s \subset E^s$ eine Umgebung des Ursprungs in E^s .
3. $W_{loc}^u(x_0)$ ist eine n^u -dimensionale C^k Mannigfaltigkeit, die im Punkt x_0 tangential zu $x_0 + E^u$ ist. $W_{loc}^u(x_0)$ kann als Graph $x^s = h^u(x^u)$, $x^u \in U^u$ beschrieben werden. Dabei ist $U^u \subset E^u$ eine Umgebung des Ursprungs in E^u .
4. Für $a \in W_{loc}^s(x_0)$ gilt $x(t, a) \in W_{loc}^s(x_0)$, $t \geq 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = x_0$ mit einer exponentiellen Rate.
5. Für $a \in W_{loc}^u(x_0)$ gilt $x(t, a) \in W_{loc}^u(x_0)$, $t \leq 0$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, a) = x_0$ mit einer exponentiellen Rate.
6. Für $a \notin W_{loc}^s(x_0)$ verlässt $x(t, a)$ in endlicher Vorwärtszeit die Umgebung U .
7. Für $a \notin W_{loc}^u(x_0)$ verlässt $x(t, a)$ in endlicher Rückwärtszeit die Umgebung U .

Für den Beweis wird auf die Literatur, siehe z.B. Teschl (2012), und die Vorlesung Differentialgleichungen 2 verwiesen. Dabei werden die im Satz auftretenden Funktionen h^s und h^u als Fixpunkte von passend konstruierten Kontraktionsabbildungen bestimmt.

Anmerkung: $W_{loc}^s(x_0)$ und $W_{loc}^u(x_0)$ sind Beispiele von invarianten Mannigfaltigkeiten, die in der Theorie dynamischer Systeme eine wichtige Rolle spielen.