Kapitel 6

Randwertprobleme

Bisher wurden Lösungen von DG durch die Angabe von Anfangswerten bestimmt. Eine andere Möglichkeit, eine Lösung einer gewöhnlichen DG zu spezifizieren, besteht darin, an zwei Stellen Bedingungen an die Lösung der DG zu stellen. Dabei wird meist $t \in [t_1, t_2]$ betrachtet und es werden Bedingungen an $x(t_1)$ und $x(t_2)$ gestellt. Aufgaben dieser Art heißen **Randwertprobleme** (RWP). Randwertprobleme können auch auf unbeschränkten Intervallen $[t_1, \infty)$, $(-\infty, t_2]$ oder $(-\infty, \infty)$ gestellt werden.
In diesem Kapitel werden RWP auf endlichen Intervallen für lineare Differentialgleichungen untersucht, wobei der Schwerpunkt auf linearen skalaren DG zweiter Ordnung liegt. Ein wesentlicher Unterschied zu Anfangswertproblemen besteht darin, dass die Existenz von Lösungen von RWP nicht in der Allgemeinheit wie bei Anfangswertproblemen gesichert ist.

6.1 Randwertprobleme für lineare Systeme 1. Ordnung

Für ein n-dimensionales System von DG 1. Ordnung benötigt man n Bedingungen um eine eindeutige Lösung zu spezifizieren.

Definition 6.1 *Für $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ und zwei reellen $n \times n$ Matrizen R_1, R_2 sowie $\rho \in \mathbb{R}^n$ heißt*

$$x'(t) = A(t)x + b(t), \qquad R_1 x(t_1) + R_2 x(t_2) = \rho \tag{6.1}$$

lineares Randwertproblem. *Das RWP ist* **inhomogen** *für $b \neq 0$ und $\rho \neq 0$,* **homogen** *für $b = 0$ und $\rho = 0$ und* **halbhomogen** *sonst.*

Unter Verwendung der Fundamentalmatrix kann die Lösbarkeit dieses linearen RWP vollständig charakterisiert werden.

Satz 6.1 *Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix der DG $x' = A(t)x$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Das RWP (6.1) ist für alle stetigen Funktionen $b : I \to \mathbb{R}^n$ und für alle $\rho \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.*
2. *Die $n \times n$ Matrix*
$$B := R_1Y(t_1) + R_2y(t_2)$$
ist regulär.
3. *Das homogene RWP (6.1) hat nur die triviale Lösung $x(t) = 0$.*

Beweis: Sei $x_p(t)$ eine Partikulärlösung, die z.B. mittels Variation der Konstanten gefunden werden kann. Die allgemeine Lösung ist dann

$$x(t) = Y(t)c + x_p(t), \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Einsetzen in die Randbedingung ergibt

$$R_1(Y(t_1)c + x_p(t_1)) + R_2(Y(t_2)c + x_p(t_2)) = \rho$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$Bc = \rho - R_1x_p(t_1) - R_2x_p(t_2)$$

für c mit der Matrix

$$B := R_1Y(t_1) + R_2Y(t_2).$$

Dieses lineare Gleichungssytem ist genau dann für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn B regulär ist. □

Anmerkung: Im Fall $Rang(B) < n$, existieren Inhomogenitaäten $b(t)$ und Randwerte $\rho \in \mathbb{R}^n$, so dass das RWP (6.1) keine Lösung hat.

6.2 Randwertprobleme für lineare DG 2. Ordnung

RWP für lineare DG 2. Ordnung treten in vielen Anwendungen auf und haben eine relativ einfache mathematische Struktur. Bei Randwertproblemen hat die unabhängige Variable sehr oft die Bedeutung einer räumlichen Variable, daher wird sie im folgenden mit $x \in [a, b]$ bezeichnet.

Definition 6.2 *Sei $I = [a, b]$ und $a_2, a_1, a_0, f \in C(I, \mathbb{R})$. Es gelte $a_2(x) \neq 0$ für $x \in I$. Für Lösungen der DG*

$$Lu := a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x), \qquad x \in [a, b] \tag{6.2}$$

nennt man die Randbedingung

1. $u(a) = \rho_1$, $u(b) = \rho_2$ **Dirichlet Randbedingung**,
2. $u'(a) = \rho_1$, $u'(b) = \rho_2$ **Neumann Randbedingung**,
3. $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \rho_1$, $\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \rho_2$ **gemischte Randbedingung**,
4. $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$ **periodische Randbedingung**.

Dabei ist $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ und $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$, $i = 1, 2$.
Im Fall $f = 0$ und $\rho_1 = \rho_2 = 0$ spricht man von einem **homogenen** *RWP, für $f \neq 0$ und $(\rho_1, \rho_2) \neq (0, 0)$ ist das RWP* **inhomogen**, *sonst* **halbhomogen**.

Anmerkung: 1) Die gemischte Randbedingung enthält die Dirichlet- und Neumann Randbedingung als Spezialfall, alle drei werden im folgenden vereineitlicht als

$$R_1 u = \rho_1, \quad R_2 u = \rho_2$$

abgekürzt.
2) Periodische Randbedingungen sind dann sinnvoll, wenn die Funktionen a_0, a_1, a_2 und f periodisch mit Periode $b - a$ sind und die Lösung ebenfalls periodisch mit Periode $b - a$ sein soll.
3) Ein inhomogenes RWP $Lu = f$, $R_1 u = \rho_1$, $R_2 u = \rho_2$ kann auf ein halbhomogenes RWP $L\tilde{u} = \tilde{f}$, $R_1 u = 0$, $R_2 u = 0$ reduziert werden. Sei $v \in C^2(I, \mathbb{R})$ mit $R_1 v = \rho_1$ und $R_2 v = \rho_2$. So eine Funktion v kann meist einfach gefunden werden. Man setzt $u = v + \tilde{u}$. Dann löst u genau dann das inhomogene RWP, wenn $\tilde{u}$ das halbhomogene RWP mit $\tilde{f} := f - Lv$ löst. Daher genügt es für theoretische Überlegungen den halbhomogenen Fall zu untersuchen.

Beispiel 6.1 Auf einen horizontalen Stab, dessen Enden sich bei $x = a$ und $x = b$ befinden, wirke an der Stelle $x \in [a, b]$ das Biegemoment $f(x)$. Die Auslenkung des Balkens aus der Horizontalen sei $u(x)$. Für kleine Auslenkungen gilt die Differentialgleichung

$$u''(x) = f(x).$$

1) Wird der Stab an seinem linken Ende fest horizontal eingespannt, so erhält man die Randbedingungen

$$u(a) = u'(a) = 0,$$

die einem Anfangswertproblem entsprechen. Dieses ist eindeutig lösbar.

2) Falls der Stab an beiden Enden auf gleicher Höhe unterstützt wird, gelten die Dirichlet Randbedingungen

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0.$$

Dieses RWP ist eindeutig lösbar (siehe unten).

3) Wenn sich die Enden des Balken vertikal bewegen können dabei aber waagrecht eingespannt sind, erhält man Neumann Randbedingungen

$$u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0.$$

Das RWP mit homogenen Neumann Randbedingungen ist nie eindeutig lösbar, da mit $u(x)$ auch $u(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist. Weiters ist die Bedingung

$$0 = u'(b) - u'(a) = \int_a^b u''(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

notwendig für die Lösbarkeit des RWP (siehe unten). $\diamond$

Satz 6.2 *Mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen von Definition 6.2 seien u_1, u_2 ein Fundamentalsystem für die DG $Lu = 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *Das inhomogene RWP*
$$Lu = f, \quad R_1 u = \rho_1,\ R_2 u = \rho_2$$
ist für alle $f \in C(I, \mathbb{R})$ und $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ lösbar.

2. *Die Matrix*
$$\begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix}$$
ist regulär, d.h. es gilt
$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{6.3}$$

3. *Das homogene Randwertproblem hat nur die triviale Lösung $u(x) = 0$.*

Falls eine (und somit alle) der Bedingungen 1)-3) erfüllt sind, ist die Lösung des inhomogenen RWPs eindeutig bestimmt. Die Bedingung (6.3) ist unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems.

Beweis: Sei u_p eine Lösung der DG $Lu = f$. So eine Lösung kann z.B. mittels Variation der Konstanten bestimmt werden. Dann ist

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + u_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der DG $Lu = f$. Die Randbedingungen $R_i u = \rho_i$, $i = 1, 2$ sind erfüllt, wenn gilt

$$c_1 R_i u_1 + c_2 R_i u_2 + R_i u_p = \rho_i, \quad i = 1, 2.$$

Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem für c_1, c_2.

$$\begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 - R_1 u_p \\ \rho_2 - R_2 u_p \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann für jedes $f \in C(I, \mathbb{R})$ und alle $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar, wenn Matrix des Gleichungssystems regulär ist, d.h. wenn die Bedingung 2) erfüllt ist. Die Äquivalenz von 2) und 3) folgt unmittelbar.

Für zwei beliebige Fundamentalsysteme u_1, u_2 und v_1, v_2 existiert eine reguläre 2×2 Matrix C mit

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\det \begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det C \det \begin{pmatrix} R_1v_1 & R_1v_2 \\ R_2v_1 & R_2v_2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist die Bedingung (6.3) unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems. $\square$

Beispiel 6.2 Für das Balkenproblem

$$u''(x) = f(x)$$

ist $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$ ein Fundamentalsystem.
Für Dirichlet Randbedingungen $R_1u = u(a)$ und $R_2u = u(b)$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = b - a \neq 0.$$

Daher ist das RWP für alle $f \in C(I, \mathbb{R})$ und $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.
Für Neumann Randbedingungen $R_1u = u'(a)$ und $R_2u = u'(b)$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Wegen

$$R_2u_p - R_1u_p = \int_a^b f(x)dx$$

ist das das Neumann RWP genau dann lösbar, falls die Kompatibilitätsbedingung

$$\rho_2 - \rho_1 = \int_a^b f(x)dx$$

erfüllt ist. Die Lösung ist nie eindeutig, da sie nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. $\diamond$

Es ist naheliegend Randwertprobleme

$$Lu = f$$

als lineare Gleichung auf Funktionenräumen zu studieren. Dazu müssen der Definitions- und Bildbereich von L angegeben werden, wobei insbeondere die Randbedingungen in der Wahl des Definitionsbereichs von L berücksichtigt werden. Naheliegend ist die Definition

$$D(L) := \{u \in C^2(I, \mathbb{R}) : \ R_1u = 0,\ R_2u = 0\}.$$

Dann ist $L : D(L) \to C(I, \mathbb{R})$ ein linearer Differentialoperator, der allerdings einen Funktionenraum in einen anderen Funktionenraum abbildet. Es ist meist zweckmäßiger L als einen unbeschränkten Operator

$$L : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$$

mit dem in $L^2(a,b)$ dichten Definitionsbereich $D(L)$ zu definieren.

Nach Satz 6.2 sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Das inhomogene Problem $Lu = f$ ist für beliebige Inhomogenität lösbar.
2. Das homogene RWP $L(u) = 0$ hat nur die triviale Lösung, d.h. $Kern\, L = \{0\}$.

Dies erinnert an das folgende Resultat der Linearen Algebra.

Satz 6.3 *In einem n-dimensionalen Vektorraum V gilt für eine lineare Abbildung $L : V \to V$ genau eine der beiden Aussagen*

1. *Zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es einen Vektor $u \in V$, sodass $Au = v$, d.h. L ist surjektiv.*
2. *$\dim(Kern\, L) > 0$, d.h. L hat nichttrivialen Kern und ist nicht injektiv.*

Die Sätze 6.2 und 6.3 sind Spezialfälle der Fredholmschen Alternative (siehe Funktionalanalysis).

Beispiel 6.3 Für das RWP

$$Lu := u'' - u = 0, \quad u(0) = 0,\ u(b) = 0$$

mit $b > 0$ ist $u_1 = e^x,\ u_2 = e^{-x}$ ein Fundamentalsystem. Die Bedingung (6.3) hat daher die Form

$$\det \begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^0 & e^0 \\ e^b & e^{-b} \end{pmatrix} = e^{-b} - e^b = e^b(e^{-2b} - 1) \neq 0$$

für alle $b > 0$. Das entsprechende inhomogene RWP ist daher immer eindeutig lösbar. $\diamond$

Die Lösbarkeit von RWP kann auch von der Länge des Intervalls, auf dem die DG gestellt ist, abhängen.

Beispiel 6.4 Für das RWP

$$Lu := u'' + u = 0, \quad u(0) = 0,\ u(b) = 0$$

mit $b > 0$ ist $u_1 = \cos x,\ u_2 = \sin x$ ein Fundamentalsystem. Die Bedingung (6.3) hat daher die Form

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} = \sin b \neq 0,$$

was für $b \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. In diesem Fall ist das RWP $Lu = f$, $u(0) = \rho_1$, $u(b) = \rho_2$ immer eindeutig lösbar.
Im Fall $b = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ ist $u(x) = \sin x$ eine nichttriviale Lösung des homogenen RWP. Das halbhomogene RWP $Lu = 0$, $u(0) = 0$, $u(b) = 1$ hat in diesem Fall keine Lösung, da für

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

aus der ersten Randbedingung folgt $c_1 = 0$ und die zweite Randbedingung dann für kein $c_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann. $\diamond$

Wiederholung: lineare Gleichungen und Skalarprodukt

Seien U, V Vektorräume, auf denen ein **Skalarprodukt** definiert ist. Für lineare Abbildungen

$$L : U \to V$$

kann dann die Lösbarkeit einer linearen Gleichung

$$Lx = b$$

mit $x \in U$ und $b \in V$ unter Verwendung von Begriffen, die auf dem Skalarprodukt aufbauen, charakterisiert werden. Im Fall $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ mit dem kanonischen Skalarprodukt gilt folgendes.

Satz 6.4 *Sei A eine $m \times n$ Matrix, der eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entspricht. Der transponierten Matrix A^T entspricht die* **adjungierte Abbildung** *$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, d.h. es gilt*

$$Ax \cdot y = x \cdot A^T y, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Weiters gilt

$$\mathit{Kern}\, A \perp \mathit{Bild}\, A^T, \qquad \mathit{Bild}\, A \perp \mathit{Kern}\, A^T$$

und

$$\mathbb{R}^n = \mathit{Kern}\, A \oplus \mathit{Bild}\, A^T, \qquad \mathbb{R}^m = \mathit{Bild}\, A \oplus \mathit{Kern}\, A^T.$$

Als unmittelbare Folgerung erhält man folgende Charakterisierung der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen.

Satz 6.5 *Für eine $m \times n$ Matrix A und $b \in \mathbb{R}^m$ ist die Gleichung $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn gilt $b \cdot y = 0$ für alle $y \in Kern\, A^T$.*
Für eine symmetrische Matrix A ist die Gleichung $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn gilt $b \cdot y = 0$ für alle $y \in Kern\, A$.

Randwertprobleme und Skalarprodukt

Für $I = [a, b]$ und $q, f \in C(I, \mathbb{R})$ betrachten wir das halbhomogene RWP

$$Lu := u'' + q(x)u = f, \quad u(a) = u(b) = 0. \tag{6.4}$$

Im folgenden verwenden wir das L^2 Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

Weiters sei

$$D(L) := \{u \in \mathbb{C}^2(I, \mathbb{R}) : \ u(a) = 0, u(b) = 0\}.$$

der Definitionsbereich von L.

Satz 6.6 *Für das RWP (6.4) gilt. Der Operator L ist symmetrisch, d.h.*

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$$

für alle $u, v \in D(L)$.

Beweis: Für $u, v \in D(L)$ folgt mittels zweimaliger partieller Integration

$$\int_a^b u''vdx = u'v|_a^b - \int_a^b u'v'dx = -\int_a^b u'v'dx = -uv'|_a^b + \int_a^b uv''dx = \int_a^b uv''dx,$$

da die Randterme wegen der Randbedingungen immer wegfallen. Daher gilt

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b (u''v + quv)dx = \int_a^b (uv'' + quv)dx = \langle u, Lv\rangle.$$

□

In Analogie zum Matrixfall erhalten wir das folgende Resultat.

Satz 6.7 *Das RWP (6.4) ist genau dann lösbar, wenn gilt*

$$\langle f, v\rangle = 0$$

für alle $v \in Kern\, L$.

Anmerkung: Aufgrund von Satz 6.2 ist dieses Resultat nur im Fall $Kern\, L \neq \{0\}$ interessant. Der folgende Beweis zeigt auch, dass dann gilt $dim(Kern\, L) = 1$.

Beweis: Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem der DG $u'' + q(x)u = 0$ mit $u_1 \in Kern\, L$, d.h. $u_1(a) = u_1(b) = 0$. Die Wronski-Determinante ist konstant, daher gilt

$$W[u_1, u_2](x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) = w \neq 0.$$

Daraus folgt unmittelbar $u_2(a) \neq 0$, $u_2(b) \neq 0$ und $dim(Kern\, L) = 1$.
Mittels Variation der Konstanten bestimmt man eine Partikulärlösung der Form

$$u_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x).$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Die Lösung

$$c_1' = \frac{-u_2 f}{w}, \quad c_2 = \frac{u_1 f}{w}$$

dieses linearen Gleichungssystems erhält man am schnellsten mittels der Cramerschen Regel. Integration ergibt

$$c_1(x) = -\int_a^x \frac{u_2 f}{w} ds, \quad c_2(x) = \int_a^x \frac{u_1 f}{w} ds.$$

Daher ist die allgemeine Lösung der DG gegeben durch

$$u(x) = -\int_a^x \frac{u_2 f}{w} ds\ u_1(x) + \int_a^x \frac{u_1 f}{w} ds\ u_2(x) + s_1 u_1(x) + s_2 u_2(x).$$

mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Randbedingung $u(a) = 0$ folgt $s_2 = 0$. Somit gilt

$$u(b) = \int_a^b \frac{u_1 f}{w} ds\ u_2(b).$$

Wegen $u_2(b) \neq 0$ ist die Randbedingung $u(b) = 0$ genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\int_a^b u_1 f dx = 0.$$

Da u_1 den $Kern\, L$ aufspannt, ist der Satz bewiesen. Die Konstante s_1 bleibt unbestimmt, da $Kern\, L$ nichttrivial ist. □

6.3 Greensche Funktion

Wir betrachten das lineare Randwertproblem

$$Lu := a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x), \quad x \in [a,b], \quad R_1u = 0, \; R_2u = 0. \tag{6.5}$$

Dabei seien a_2, a_1, a_0 und f stetig auf $[a,b]$ und $a_2(x) \neq 0$. Falls eine Inverse L^{-1} existiert ist die Lösung des RWP $Lu = f$ durch $u = L^{-1}f$ gegeben. Im Zusammenhang mit Differentialoperatoren ist dies nicht immer möglich. Um die Gleichung

$$Lu = f$$

zu lösen, genügt es aber eine Rechts-Inverse R von L zu finden, für die gilt

$$LR = id,$$

da dann

$$u := Rf$$

eine Lösung von $Lu = f$ ist. Eindeutigkeit folgt, falls $KernL = \{0\}$ gilt.

Wir werden zeigen, dass die Rechts-Inverse von L als Integraloperator

$$Rf(x) := \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

beschrieben werden kann. Der Kern $G(x,s)$ ist die Greensche Funktion des RWPs. Falls eine Greensche Funktion existiert, ist die Lösung des RWP $Lu = f$ durch

$$u(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

gegeben. Die Funktion $G(x,s)$ muss als Funktion von x die Randbedingungen erfüllen. Weiters benötigt man Bedingungen an die Funktion G und ihre Ableitungen bezüglich x, die sicherstellen, dass G eine Rechts-Inverse ist.

Anmerkung: Greensche Funktionen spielen auch in der Theorie von RWP für partielle Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

Definition 6.3 *Eine Funktion $G : D := [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ ist die* **Greensche Funktion** *des RWPs (6.5), wenn gilt:*

1. *$G(x,s)$ ist stetig auf D.*
2. *Auf $D_1 := \{(x,s) : a \leq x < s \leq b\}$ und $D_2 := \{(x,s) : a \leq s < x \leq b\}$ existieren die Ableitungen $G'(x,s) := G_x(x,s)$ und $G''(x,s) := G_{xx}(x,s)$ und sind stetig bis zum Rand. Als Funktion von x löst $G(x,s)$ für $x \neq s$ die homogene Differentialgleichung $LG(x,s) = 0$.*
3. *G erfüllt als Funktion von x die Randbedingungen, d.h. $R_1G(x,s) = 0$ und $R_2G(x,s) = 0$.*
4. *Für*
$$G_1'(x,x) := \underbrace{\lim_{(\xi,s)\to(x,x)}}_{in\ D_1} G'(\xi,s) \quad \text{und} \quad G_2'(x,x) := \underbrace{\lim_{(\xi,s)\to(x,x)}}_{in\ D_2} G'(\xi,s)$$
gilt die Sprungbedingung
$$G_2'(x,x) - G_1'(x,x) = \frac{1}{a_2(x)},$$
d.h. die erste Ableitung $G'(x,s)$ hat an der Diagonalen $x = s$ einen Sprung der Höhe $1/a_2(x)$.

Wir werden zeigen, dass diese Bedingungen die Greensche Funktion eindeutig festlegen.

Satz 6.8 *Sei $G(x,s)$ die Greensche Funktion für das RWP (6.5). Dann ist für stetiges f*
$$u(x) := \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$
eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des RWP.

Beweis: Es ist günstig das Integrationsintervall $[a,b]$ in $[a,x]$ und $[x,b]$ zu teilen. Es gilt
$$u(x) := \int_a^x G(x,s)f(s)ds + \int_x^b G(x,s)f(s)ds.$$
Aus Eigenschaft 2 der Greenschen Funktion folgt, dass u differenzierbar ist. Differenzieren

nach x ergibt

$$u'(x) := \int_a^x G'(x,s)f(s)ds + G(x,x)f(x) + \int_x^b G'(x,s)f(s)ds - G(x,x)f(x)$$

und weiter

$$u'(x) := \int_a^x G'(x,s)f(s)ds + \int_x^b G'(x,s)f(s)ds = \int_a^b G'(x,s)f(s)ds.$$

Aus Eigenschaft 2 der Greenschen Funktion folgt, dass u' differenzierbar ist. Nochmaliges Differenzieren nach x ergibt

$$u''(x) := \int_a^x G''(x,s)f(s)ds + G_2'(x,x)f(x) + \int_x^b G''(x,s)f(s)ds - G_1'(x,x)f(x).$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass beim ersten Integral $(x,s) \in D_2$ gilt, was auf den Randterm $G_2'(x,x)f(x)$ führt. Beim zweiten Integral gilt $(x,s) \in D_1$ und man erhält den Randterm $-G_1'(x,x)f(x)$. Aus Eigenschaft 4 der Greenschen Funktion folgt

$$u''(x) := \int_a^b G''(x,s)f(s)ds + \frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

Aus Eigenschaft 2 der Greenschen Funktion und der Stetigkeit von a_2 und f folgt die Stetigkeit von u''. Einsetzen von u, u' und u'' in die DG ergibt unter Verwendung von $LG(x,s) = 0$

$$Lu = f(x).$$

Daher ist u Lösung der inhomogenen DG. Aus Eigenschaft 3 der Greenschen Funktion folgt

$$R_i u = \int_a^b R_i G(x,s)f(s)ds = 0, \quad i = 1,2.$$

Daher löst u das RWP. □

Beispiel 6.5 Gesucht ist die Greensche Funktion des RWP

$$Lu := -u'' = f, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0.$$

Hier gilt $a_2 = -1$. Dieses negative Vorzeichen des u'' Terms wird oft verwendet, da dann die Eigenwerte des Operators L positiv sind. Die Lösung $u_1(x) = x$ der homogenen DG erfüllt die linke Randbedingung, die Lösung $u_2(x) = 1 - x$ der homogenen DG erfüllt die rechte Randbedingung. Für $x < s$ muss G daher ein Vielfaches von u_1 sein, für $s < x$ muss G daher ein Vielfaches von u_2 sein. Tatsächlich gilt

$$G(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \le x \le s \le 1 \\ s(1-x), & 0 \le s \le x \le 1. \end{cases}$$

Die Eigenschaften 1 - 3 der Greenschen Funktion sind offensichtlich erfüllt. Aus

$$G_1'(x,x) - G_2'(x,x) = (1-x) - (-x) = 1$$

folgt, dass die Sprungbedingung 4 ebenfalls erfüllt ist. ◇

Für die Existenz und Eindeutigkeit der Greenschen Funktion gilt der folgende Satz, dessen Beweis auch zeigt wie die Greensche Funktion berechnet werden kann.

Satz 6.9 *Das RWP (6.5) habe für $f = 0$ nur die triviale Lösung. Dann existiert genau eine Greensche Funktion $G(x,s)$ des RWPs. Explizit ist $G(x,s)$ durch die Formel (6.6) gegeben.*

Beweis: Sei u_1 und u_2 ein Fundamentalsystem der DG $Lu = 0$, für das gilt

$$R_1 u_1 = 0, \quad R_2 u_2 = 0,$$

d.h. u_1 erfüllt die Randbedingung bei $x = a$ und u_2 erfüllt die RB bei $x = b$. Man kann leicht zeigen (Übungsaufgabe), dass unter den Voraussetzungen des Satzes so ein Fundamentalsystem immer existiert und bis auf Multiplikation mit Skalaren eindeutig ist. Da $G(x,s)$ als Funktion von x die RB und die homogene DG erfüllen muss, hat $G(x,s)$ notwendigerweise die Form

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)u_1(x), & a \le x \le s \le b \\ c_2(s)u_2(x), & a \le s \le x \le b. \end{cases}$$

mit unbekannten Funktionen $c_1(s)$, $c_2(s)$, $s \in [a,b]$. Stetigkeit von G an der Diagonalen ergibt die Gleichung

$$c_1(x)u_1(x) = c_2(x)u_2(x).$$

Die Sprungbedingung ergibt

$$G_2'(x,x) - G_1'(x,x) = c_2(x)u_2'(x) - c_1(x)u_1'(x) = \frac{1}{a_2(x)}.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ -u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{pmatrix}$$

hat die eindeutige Lösung $c_1 = \frac{u_2}{a_2 W}$, $c_2 = \frac{u_1}{a_2 W}$ mit der Wronskideterminante $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$ Die Funktionen c_1, c_2 sind stetig auf $[a,b]$. Dadurch ist G eindeutig bestimmt und es gilt

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{u_2(s)u_1(x)}{a_2(s)W(s)}, & a \le x \le s \le b \\ \frac{u_1(s)u_2(x)}{a_2(s)W(s)}, & a \le s \le x \le b. \end{cases} \tag{6.6}$$

□

Anmerkung: Ein besseres Verständnis der Greenschen Funktion liefert die Theorie der Distributionen oder verallgemeinerten Funktionen. Ein wichtiges Beispiel einer Distribution ist die Dirac'sche δ-Funktion. Darunter versteht man das lineare Funktional, das jeder Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihren Wert bei $s = 0$ zuordent, d.h.

$$\langle \delta, f \rangle := f(0).$$

Dies wird oft formal als

$$\int \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

geschrieben, wobei diese Beziehung für keine echte Funktion δ gelten kann, daher der Name verallgemeinerte Funktion. Die im Beweis von Satz 6.8 durchgeführten Rechnungen zeigen, dass unter Verwendung eines auf Distributionen verallgemeinerten Ableitungsbegriffs gilt

$$LG(x, s) = \delta(x - s).$$

Daher gilt

$$Lu(x) = L \int_a^b G(x, s) f(s) ds = \int_a^b LG(x, s) f(s) ds = \int_a^b \delta(x - s) f(s) ds = f(x).$$

Man kann daher $G(x, s)$ als die Lösung des RWP interpretieren, die einer im Punkt $x = s$ konzentrierten Inhomogenität f der Stärke eins entspricht. Dies entspricht in Anwendungen z.B. einer nur im Punkt $x = s$ wirkenden Punktkraft oder Punktladung der Stärke eins. So kann die Greensche Funktion $G(x, s)$ in Bsp.6.5 als die Auslenkung einer eingespannten Saite unter einer im Punkt $x = s$ wirkenden Punktkraft der Stärke eins interpretiert werden kann. In der Darstellung der Lösung des RWP $Lu = f$

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds$$

werden die Beiträge der Inhomogenität f and den Stellen $x = s$ zur Lösung $u(x)$ gemäß dem Superpositionsprinzip "aufsummiert" bzw. integriert.

Solche Ideen und Methoden spielen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

6.4 Eigenwertprobleme und Separationsansatz

In den Eigenwerten und Eigenvektoren einer $n \times n$ Matrix A sind wesentliche Informationen über das lineares Gleichungssystemen

$$Ax = b$$

bzw. über die entsprechende lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto A$$

enthalten. Ähnliches gilt auch für lineare Randwertprobleme.

Definition 6.4 *Sei $x \in I = [a, b]$ und $a_0, a_1, a_2 \in C(I, \mathbb{R})$. Für einen linearen Differentialoperator*

$$Lu := a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u$$

mit homogenen Randbedingungen $R_1 u = 0$, $R_2 u = 0$ versteht man unter dem **Eigenwertproblem** *(EWP) die Aufgabe $\lambda \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $u \in C^2(I, \mathbb{C})$, $u \neq 0$ zu finden, sodass gilt*

$$Lu = \lambda u, \quad R_1 u = 0, \; R_2 u = 0. \tag{6.7}$$

Die Zahl λ nennt man **Eigenwert** *von L, die Funktion u nennt man* **Eigenfunktion** *zum Eigenwert λ.*

Die Eigenwerte sind genau die Werte $\lambda \in \mathbb{C}$, für die das RWP eine nichttriviale Lösung hat. Mit u ist auch cu, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ Eigenfunktion. Daher ist der Eigenraum

$$E(\lambda) = \{u : \; u \text{ ist Eigenfunktion zum Eigenwert } \lambda\}$$

ein Unterraum von $C^2(I, \mathbb{C})$. Aus Satz 6.2 erhält man unmittelbar die folgende Charakterisierung von Eigenwerten.

Satz 6.10 *Sei $u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda)$ ein Fundamentalsystem der DG*

$$a_2 u'' + a_1 u' + (a_0 - \lambda) u = 0.$$

Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert des EWP (6.7), wenn gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1(., \lambda) & R_1 u_2(., \lambda) \\ R_2 u_1(., \lambda) & R_2 u_2(., \lambda) \end{pmatrix} = 0. \tag{6.8}$$

Da $u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda)$ analytisch von λ abhängen, sind die Eigenwerte die Nullstellen einer analytischen Funktion. Die Gleichung 6.8 kann als Verallgemeinerung des charakteristischen Polynoms für die Eigenwerte von Matrizen angesehen werden.

Eigenwertproblem und Exponentialansatz

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen enthalten nicht nur Information über den linearen Differentialoperator L, sie liefern auch spezielle Lösungen von zeitabhängigen linearen partiellen DG der Form

$$u_t = Lu \tag{6.9}$$

oder

$$u_{tt} = Lu. \tag{6.10}$$

Eine Lösung ist eine Funktion $u(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$ und $x \in I$, für die alle in der DG auftretenden Ableitungen existieren und die beim Einsetzen in die DG diese identisch erfüllt. Zusätzlich sollen die Randbedingungen $R_1u(.,t) = 0$ und $R_2u(.,t) = 0$ erfüllt sein.

Um eindeutige Lösungen zu erhalten, die für $t \geq 0$ definiert sein sollen, muss man **Anfangswerte** vorgeben. Im Fall der Gleichung (6.9), die bezüglich t erster Ordnung ist, kann man

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in I \tag{6.11}$$

vorgeben.
Für die Gleichung (6.10), die bezüglich t zweiter Ordnung ist, kann man

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in I \tag{6.12}$$

vorgeben.

Beispiel 6.6

Für $Lu = u_{xx}$ ist

$$u_t = u_{xx} \tag{6.13}$$

die **Wärmeleitungsgleichung** , die die Diffusion der Temperatur in einem eindimensionalen Medium beschreibt.

Für $Lu = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$ ist

$$u_t = \Delta u \tag{6.14}$$

die Wärmeleitungsgleichung in zwei Raumdimensionen.

$\diamond$

Beispiel 6.7

Für $Lu = u_{xx}$ ist

$$u_{tt} = u_{xx}. \tag{6.15}$$

die **Wellengleichung**. Die Wellengleichung mit Dirichlet Randbedingungen $u(a,t) = 0$ und $u(b,t) = 0$ beschreibt die Schwingungen einer bei $x = a$ und $x = b$ eingespannten Saite.

Für $Lu = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$ ist

$$u_{tt} = \Delta u \tag{6.16}$$

die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen, die z.B. die Schwingungen einer Membran beschreibt. $\diamond$

Im Fall der Gleichung (6.9) führt der Exponentialansatz

$$u(x,t) = e^{\lambda t} v(x) \tag{6.17}$$

auf

$$\lambda e^{\lambda t} v(x) = e^{\lambda t} Lv(x)$$

und somit auf das EWP

$$Lv = \lambda v.$$

Im zweiten Fall führt der Exponentialansatz

$$u(x,t) = e^{\mu t} v(x) \tag{6.18}$$

auf das EWP

$$Lv = \mu^2 v.$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von L ergeben daher die speziellen Lösungen (6.17) bzw. (6.18) der partiellen DG. In beiden Fällen entscheidet der Realteil von λ bzw. von μ über das zeitliche Verhalten dieser speziellen Lösungen. Für $Re\lambda < 0$ klingt die Lösung für $t \to \infty$ exponentiell ab, für $Re\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ oszilliert die Lösung als Funktion von t und für $Re\lambda > 0$ wächst die Lösung exponentiell in t. Falls λ oder μ gleich $\alpha + \beta i$ ist mit $\beta \neq 0$ und $v = v_1 + iv_2$ erhält man durch Zerlegen der komplexen Lösung u in Real- und Imaginärteil reelle Lösungen.

Separationsansatz

Für viele lineare partielle Differentialgleichungen erhält man EWP der Form (6.7) durch einen sogenannten **Separationsansatz**. Für lineare partielle DG der Form (6.9) oder (6.10) sucht man dabei Lösungen der Form

$$u(x,t) = w(t)v(x).$$

Einsetzen in die Gleichung (6.9) ergibt

$$\dot{w}v = wLv.$$

Divison dieser Gleichung durch vw ergibt

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{Lv}{v}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von t während die rechte Seite der Gleichung nur von x abhängt. Da x und t voneinander unabhängig variieren können, kann diese Gleichung nur dann erfült sein, wenn eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\frac{\dot{w}}{w} = \lambda, \qquad \frac{Lv}{v} = \lambda.$$

Daraus folgt

$$\dot{w} = \lambda w, \qquad Lv = \lambda v.$$

Daher gilt $w(t) = e^{\lambda t}$ und $v(x)$ ist Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ, wobei w und v jeweils noch mit einer Konstante multipliziert werden können.

Bei der Gleichung (6.10) führt der Separationsansatz auf

$$\ddot{w}v = wLv.$$

Divison dieser Gleichung durch vw ergibt

$$\frac{\ddot{w}}{w} = \frac{Lv}{v}.$$

Wie zuvor folgt, dass diese Gleichung nur dann erfült sein kann, wenn eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\frac{\ddot{w}}{w} = \lambda, \qquad \frac{Lv}{v} = \lambda.$$

Daraus folgt

$$\ddot{w} = \lambda w, \qquad Lv = \lambda v$$

daher muss $v(x)$ Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ sein. Wenn man μ durch $\mu^2 = \lambda$ definiert, folgt wieder $w(t) = e^{\pm\mu t}$.
In konkreten Realisierungen dieser Situation, z.B. für $Lu = u_{xx}$, gilt für die EW oft $\lambda = -\omega^2 < 0$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, daher folgt $\mu = \pm i\omega$. Aufspalten von $w(t) = e^{i\omega t}$ in Real- und Imaginärteil führt in diesem Fall auf reelle Lösungen der Form

$$u(x,t) = \cos(\omega t)v(x), \qquad u(x,t) = \sin(\omega t)v(x),$$

d.h. die Lösungen beschreiben zeitliche Schwingungen eines festen Profiles $v(x)$.

Superpositionsprinzip

Für die linearen partiellen DG (6.9) und (6.10) mit homogenen Randbedingungen gilt:

1. Für eine Lösung u ist auch cu, $c \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ eine Lösung.

2. Für Lösungen $u_1, \ldots, u_n$ ist jede Linearkombination

$$u = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, \quad c_i \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C}),\ i = 1, \ldots, n$$

   eine Lösung.

3. Seien $u_1, u_2, u_3, \ldots$ abzählbar unendlich viele Lösungen. Dann ist

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,t) \tag{6.19}$$

   $c_k \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$ ebenfalls eine Lösung, falls es die Konvergenzeigenschaften dieser Funktionenreihe erlauben, das Ausführen der in der DG auftretenden Ableitungen mit der Summation zu vertauschen.

Daher kann man versuchen, allgemeinere Lösungen solcher partieller DG durch Reihenentwicklungen der Form (6.19) zu erhalten. Insbesondere kann man versuchen, die Konstanten c_k, $k \in \mathbb{N}$ so zu bestimmen, dass die Funktion (6.19) die Anfangsbedingungen (6.11) bzw. (6.12) erfüllt.

Beispiel 6.8 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in [0, \pi],\ t \geq 0$$

mit mit den Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(\pi) = 0$. Der Anfangswert von u ist vorgegeben, d.h. es soll gelten $u(x,0) = f(x)$ mit einer gegeben Funktion $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$.

Zunächst untersuchen wir das EWP

$$u_{xx} = \lambda u, \qquad u(0) = 0,\ u(\pi) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser DG ist

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda.$$

Man unterscheidet drei Fälle:

1. Fall: $\lambda > 0$, d.h. $\lambda = \omega^2$ mit $\omega > 0$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $\mu_1 = -\omega$, $\mu_2 = \omega$. Daher ist $u_1 = e^{-\omega x}$, $u_2 = e^{\omega x}$ ein Fundamentalsystem. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\pi\omega} & e^{\pi\omega} \end{pmatrix} = e^{\pi\omega} - e^{-\pi\omega} = 2\sinh(\pi\omega) \neq 0$$

existiert in diesem Fall keine nichttriviale Lösung des RWP. Daher gibt es keine positiven EW.

2. Fall: $\lambda = 0$. Die allgemeine Lösung der DG ist $u(x) = c_1 + c_2 x$. Aus den RB folgt $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$. Daher ist $\lambda = 0$ kein EW.

3. Fall: $\lambda < 0$, d.h. $\lambda = -\omega^2$ mit $\omega > 0$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $\mu_1 = \omega i$, $\mu_2 = -\omega i$. Daher ist $u_1 = \cos(\omega x)$, $u_2 = \sin(\omega x)$ ein Fundamentalsystem. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\pi\omega) & \sin(\pi\omega) \end{pmatrix} = \sin(\pi\omega)$$

existiert eine nichttriviale Lösung des RWP genau für $\omega = k$, $k \in \mathbb{N}$.

Daher existieren abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\lambda_k = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$, die entsprechenden Eigenfunktionen sind $u_k = \sin kx$.

Aus der Theorie der Fourierreihen ist bekannt:

1. Die Eigenfunktionen $\sin kx$ sind bezüglich des $L^2[0,\pi]$ Skalarprodukts paarweise orthogonal, da gilt
$$\int_0^\pi \sin kx \sin lx dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{\pi}{2}, & k = l. \end{cases}$$

2. Eine Funktion $f \in L^2[0,\pi]$ - genauer ihre ungerade Fortsetzung auf $[-\pi,\pi]$ - kann in eine Sinus-Fourierreihe
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$$
entwickelt werden, wobei die Fourierkoeffizienten c_k durch
$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx$$
gegeben sind. Die Fourierreihe konvergiert in L^2 gegen f.

3. Für $f \in C([0,\pi],\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ und stückweise stetiger Ableitung f' konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $f(x)$. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[0,\pi]$.

Für die allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung erhält man daher die Reihenentwicklung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin kx. \tag{6.20}$$

Die Anfangsbedingung $u(x,0) = f$ ist genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten c_k die Fourierkoeffizienten von f sind. Die Lösung (6.20) ist zunächst nur eine formale Lösung, d.h. sie löst die DG, wenn man die Summation mit den Ableitungen vertauscht. Für $t > 0$ klingen die Terme $c_k e^{-k^2 t}$ für $k \to \infty$ sehr schnell ab. Daher kann man zeigen, dass gilt i) $u \in C^\infty([0,\pi] \times (0,\infty), \mathbb{R})$ für $f \in L^2[0,\pi]$, ii) u ist die Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung.

Aus der Darstellung (6.20) folgt auch, dass gilt $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$. Dabei klingen die einzelnen Fourieranteile der Lösung wie $e^{-k^2 t}$ ab. Daher klingen die hochfrequenten Anteile der Lösung extrem schnell ab. $\diamond$

Beispiel 6.9 In zwei Raumdimensionen ist der **Laplaceoperator** durch

$$Lu := u_{xx} + u_{yy}$$

definiert. Unter den Eigenwerten des Laplaceoperators (mit geeigneten Randbedingungen) versteht man die Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche die DG

$$Lu = \lambda u$$

nichttriviale Lösungen $u(x,y)$ hat. Die Funktion $u(x,y)$ heißt dann Eigenfunktion zum Eigenwert λ.

Der Separationsansatz

$$u(x,y) = v(x)w(y)$$

führt auf

$$v_{xx}w + vw_{yy} = \lambda vw.$$

Division durch vw ergibt

$$\frac{v_{xx}}{v} + \frac{w_{yy}}{w} = \lambda.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn gilt

$$v_{xx} = sv, \qquad w_{yy} = tw, \qquad s + t = \lambda$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Falls die Gleichung auf einem Quadrat $B := [0,\pi] \times [0,\pi]$ mit homogenen Dirichlet Randbedingungen

$$u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = 0,\ x \in [0,\pi] \qquad u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0,\ y \in [0,\pi]$$

gelöst werden soll, folgt aus den Randbedingungen

$$v(0) = 0, v(\pi) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad w(0) = 0, w(\pi) = 0,$$

dass genau für

$$s_k = -k^2, \quad t_l = -l^2, \quad k, l \in \mathbb{N}$$

nichttriviale Lösungen

$$v_k(x) = \sin kx, \quad w_l(y) = \sin ly$$

existieren. Daher hat der Laplaceoperator auf dem Quadrat $[0,\pi] \times [0,\pi]$ die Eigenwerte

$$\lambda_{k,l} := -(k^2 + l^2), \quad k, l \in \mathbb{N}$$

mit den Eigenfunktionen

$$u_{k,l} = \sin kx \sin ly.$$

Die Eigenwerte sind daher genau die ganzen Zahlen, die sich als Summe der (negativen) Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen lassen.

Der kleinste Eigenwert $-2 = \lambda_{1,1}$ ist einfach. Der zweite Eigenwert $-5 = \lambda_{1,2} = \lambda_{2,1}$ ist ein doppelter EW, da er zwei linear unabhängigen Eigenfunktionen besitzt. Der Eigenwert

$$-65 = \lambda_{1,8} = \lambda_{8,1} = \lambda_{4,7} = \lambda_{7,4}$$

hat die Vielfachheit vier.

Die Vielfachheit eines Eigenwerts λ hängt daher davon ab, auf wieviele Arten $-\lambda$ als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen dargestellt werden kann. Solche Fragestellungen und naheliegende Verallgemeinerungen führen auf interessante Probleme der Zahlentheorie! ◇

6.5 Sturm-Liouville Eigenwertprobleme

Separationsansätze bei Randwertproblemen für partielle DG führen meist auf EWP mit zusätzlicher Struktur, nämlich auf die im folgenden beschriebenen Sturm-Liouville Eigenwertprobleme.

Definition 6.5 *Sei $I = [a, b]$, $p \in C^1(I, \mathbb{R})$ und $q, r \in C(I, \mathbb{R})$. Unter einem* **Sturm-Liouville Eigenwertproblem** *(SLEWP) versteht man das Eigenwertproblem*

$$Lu := -(pu')' + qu = \lambda ru. \tag{6.21}$$

Im Fall $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ für $x \in I$ ist das SLEWP **regulär** *und man stellt die Randbedingungen*

$$R_1 u := \alpha_1 u(a) + \beta_1 p(a) u'(a) = 0, \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$$
$$R_2 u := \alpha_2 u(b) + \beta_1 p(b) u'(b) = 0, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Falls das Intervall unbeschränkt ist oder eine der Funktionen p, r Nullstellen hat spricht man von einem **singulären** *SLEWP.*

Im folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften von regulären SLEWP untersucht. Wir werden zeigen, dass die Eigenwerte und die Eigenfunktionen eines regulären SLEWP reell sind und dass sie ganz ähnliche Eigenschaften wie in Beispiel 6.8 haben, d.h. dass gilt:

1. Es existieren unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ mit $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.
2. Alle EW sind einfach.
3. Die Eigenfunktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sind paarweise orthogonal und spannen den Raum $L^2[a,b]$ auf.

Separationsansätze für den Laplaceoperator in Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten, Zylinderkoordinaten, etc. führen auf singuläre SLEWP. Diese spielen daher in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle. Für singuläre SLEWP gelten ähnliche Resultate, die allerdings einen höheren technischen Aufwand erfordern. So ist z.B. für $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$ bzw. auf unbeschränkten Intervallen die Charakterisierung von sinnvollen Randbedingungen zunächst unklar.

Beispiel 6.10 In Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ hat das EWP

$$-\Delta u = \lambda u$$

für den (negativen) Laplaceoperator die Form

$$-\frac{1}{r}(ru_r)_r - \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \lambda u.$$

Der Separationsansatz

$$u(r,\varphi) = v(r)w(\varphi)$$

führt auf

$$-\frac{1}{r}(rv_r)_r w - v\frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi} = \lambda vw.$$

Dabei muss w eine 2π periodische Funktion sein. Multiplikation mit $\frac{r^2}{vw}$ ergibt

$$-r\frac{(rv_r)_r}{v} - \frac{w_{\varphi\varphi}}{w} = \lambda r^2.$$

Dies ist nur möglich, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$-w_{\varphi\varphi} = cw.$$

$$-r(rv_r)_r + cv = \lambda r^2 v.$$

Wegen der der geforderten 2π-Periodizität von w hat diese DG für w genau die Lösungen

$$c_k = k^2, \quad w_k = a_k \sin k\varphi + b_k \cos k\varphi, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für v erhält man das SLEWP

$$-(rv_r)_r + \frac{k^2}{r}v = \lambda rv \tag{6.22}$$

mit $p(r) = r$, $q(r) = k^2/r$ und der Gewichtsfunktion $\tilde{r}(r) = r$. Bei $r = 0$ ist dieses SLEWP singulär, da $p(0) = 0$ gilt und q einen Pol bei $r = 0$ hat. ◇

Ausführen der Ableitung in Gleichung (6.22) und Multiplikation mit r ergibt die DG

$$r^2 v'' + r v' + (\lambda r^2 - k^2) v = 0$$

Durch Umbenennen und Skalieren der unabhängigen Variable

$$r = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$$

und Umbenennen von v zu y erhält man die **Besselsche Differentialgleichung**

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2) y = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.23}$$

Ihre Lösungen sind die **Besselfunktionen**, ein wichtiges Beispiel für die sogenannten **speziellen Funktionen der mathematischen Physik**. Weitere durch Separationsansätze gewonnene DG, die wichtige spezielle Funktionen definieren, sind:

1. **Legendresche Differentialgleichung**

$$((1 - x^2) y')' + n(n+1) y = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{6.24}$$

2. **Laguerresche Differentialgleichung**

$$x y'' + (1 - x) y' + n y = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{6.25}$$

3. **Hermitesche Differentialgleichung**

$$y'' - 2x y' + n y = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.26}$$

Satz 6.11 *Ein reguläres Sturm-Liouville Differentialoperator L ist symmetrisch bezüglich des $L^2[a, b]$ Skalarprodukts, d.h. es gilt*

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$$

für alle $u, v \in C^2(I, \mathbb{C})$, welche die homogenen Randbedingungen erfüllen.

Beweis: Man muss mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx$$

arbeiten, da die Eigenwerte und Eigenfunktionen zunächst auch komplex sein könnten. Erst aus der Symmetrie wird folgen, dass die Eigenwerte und Eigenfunktionen reell sind.

Da p, q reell sind, gilt

$$Lu\bar{v} - u\overline{Lv} = -(pu')'\bar{v} + qu\bar{v} + u(p\bar{v}')' - uq\bar{v} =$$

$$= -pu''\bar{v} - p'u'\bar{v} + up\bar{v}'' + up'\bar{v}' = (p(-u'\bar{v} + u\bar{v}'))'.$$

Daraus folgt

$$\int_a^b (Lu\bar{v} - u\overline{Lv})dx = p(-u'\bar{v} + u\bar{v}')|_a^b.$$

Aus den homogenen Randbedingungen folgt

$$p(-u'\bar{v} + u\bar{v}') = 0 \quad \text{für } x = a,\ x = b.$$

Für Dirichlet oder Neumann RB ist dies offensichtlich. Für gemischte RB gilt bei $x = a$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 p(a)u'(a) = 0, \quad \alpha_1 \bar{v}(a) + \beta_1 p(a)\bar{v}'(a) = 0$$

mit $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$. Aus

$$p(a)u'(a) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}u(a), \quad p(a)v'(a) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}v(a)$$

folgt durch Einsetzen das Verschwinden des Randterms bei $x = a$ (und analog bei $x = b$). Damit ist der Satz bewiesen. □

Die Wronski Determinante von zwei Lösungen einer Sturm-Liouville DG hat folgende spezielle Eigenschaft.

Lemma 6.1 *Es seien u_1, u_2 zwei beliebige Lösungen einer DG $Lu = 0$ in Sturm-Liouville Form. Dann gilt*

$$p(x)W(x) = p(x)[u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)v_2(x)]$$

ist konstant in $[a, b]$.

Beweis: Man rechnet nach, dass gilt $(p(x)W(x))' = 0$. □

Aus der Symmetrie von L folgt, dass die Eigenwerte und Eigenfunktionen reell sind. Es gilt

Satz 6.12 *Für reguläre SLEWP gilt:*

1. *Die Eigenwerte sind reell und einfach.*
2. *Die Eigenfunktionen sind reell.*
3. *Eigenfunktionen u, v zu verschiedenen EW sind r-orthogonal, d.h.*

$$\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx = 0.$$

Beweis: ad 1) Es gelte $Lu = \lambda ru$. Da r reell ist gilt

$$\lambda\langle ru, u\rangle = \langle Lu, u\rangle = \langle u, Lu\rangle = \langle u, \lambda ru\rangle = \bar{\lambda}\langle ru, u\rangle.$$

Wegen $\langle ru, u\rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \bar{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.
Angenommen der EW λ ist nicht einfach. Dann gibt es zwei l.u. Eigenfunktionen u, v mit

$$Lu = \lambda ru, \quad Lv = \lambda rv,$$

d.h. u, v sind l.u. Lösungen der homogenen linearen DG zweiter Ordnung.

$$-(p(x)y')' + (q(x) - \lambda r(x))y = 0.$$

Nach Lemma 6.1 gilt für die Wronski Determinante $w = (uv' - u'v)$

$$p(x)w(x) = const.$$

Aus den Randbedingungen

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 p(a)u'(a) = 0$$
$$\alpha_1 v(a) + \beta_1 p(a)v'(a) = 0$$

und $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ folgt $p(a)w(a) = 0$. Wegen $p(a) \neq 0$ folgt $w(a) = 0$. Aus $w(a) = 0$ folgt $w(x) = 0$ für $x \in I$ und auch, dass u und v linear abhängig sind. Widerspruch.

ad 2) Sei u eine komplexwertige Eigenfunktion zum EW $\lambda \in \mathbb{R}$. Da p, q, r reell sind sind dann $u_1 := Re\, u$ und $u_2 := Im\, u$ zwei reelle Eigenfunktionen. Aus 1) folgt, dass diese beiden Eigenfunktionen linear abhängig sein müssen, d.h. es existiert $s \in \mathbb{R}$ mit $u_2 = su_1$. Daraus folgt

$$u = u_1 + isu_1 = (1 + is)u_1,$$

d.h. u ist ein konstantes Vielfaches der reellen Eigenfunktion u_1. Daher sind Eigenfunktionen - bis auf Multiplikation mit einer komplexen Zahl - reell.

ad 3) Es seien u und v reelle Eigenfunktionen zu den reellen EW λ und μ mit $\lambda \neq \mu$. Dann gilt

$$\lambda\langle ru, v\rangle = \langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = \langle u, \mu rv\rangle = \mu\langle ru, v\rangle$$

und weiter

$$(\lambda - \mu)\langle ru, v\rangle = 0.$$

Daher sind u und v r-orthogonal. □

Im weiteren spielt die Greensche Funktion eines Sturm Liouville Problems eine wichtige Rolle.

Satz 6.13 *Es sei L ein regulärer Sturm-Liouville Differentialoperator mit der Eigenschaft, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist. Dann existiert die Greensche Funktion $G(x, s)$ von L. Es gilt*

1. *$G(x, s)$ ist symmetrisch, d.h.*

$$G(x, s) = G(s, x), \quad (x, s) \in [a, b] \times [a, b].$$

2. *Sei u_1, u_2 Lösungen von $Lu = 0$, die $R_1u_1 = 0$ bzw. $R_2u_2 = 0$ erfüllen. Dann gilt*

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{K}u_2(s)u_1(x), & a \leq x \leq s \leq b \\ \frac{1}{K}u_1(s)u_2(x), & a \leq s \leq x \leq b. \end{cases} \tag{6.27}$$

mit der Konstanten $K := -p(x)[u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)]$.

Beweis: Die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert von L ist, ist äquivalent zu der Bedingung, dass das homogene RWP $Lu = 0$ nur die triviale Lösung hat. Daher sind die Voraussetzungen von Satz 6.8 erfüllt. Die Darstellung (6.6) mit $a_2 = -p$ und Lemma 6.1 ergibt die behauptete Formel für $G(x, s)$, aus der auch die Symmetrie folgt. □

Anmerkung: Die Symmetrie von G folgt allgemeiner aus der Symmetrie von L, da $G(x, s)$ der Integralkern der Inversen von L ist. Dies sieht man folgendermaßen. Es seien u und v Lösungen der RWP

$$Lu = f \quad \text{und} \quad Lv = g$$

mit beliebigen reellen Funktionen $f, g \in C[a, b]$. Dann gilt

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds \quad \text{und} \quad v(x) = \int_a^b G(x, s)g(s)ds.$$

Weiters gilt (unter Verwendung der Integrationsvariable x im L^2 Skalarprodukt)

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b [f(x)\int_a^b G(x,s)g(s)ds\,]\,dx = \int_a^b\int_a^b G(x,s)f(x)g(s)d(x,s)$$

und (unter Verwendung der Integrationsvariable s im L^2 Skalarprodukt)

$$\langle u, Lv\rangle = \int_a^b [\int_a^b G(s,x)f(x)dx\,g(s)\,]\,ds = \int_a^b\int_a^b G(s,x)f(x)g(s)d(x,s).$$

Die Gleichheit der iterierten Integrale mit den zweidimensionalen Integralen gilt wegen der Stetigkeit alle auftretenden Funktionen. Aus

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$$

folgt

$$\int_a^b\int_a^b G(x,s)f(x)g(s)d(x,s) = \int_a^b\int_a^b G(s,x)f(x)g(s)d(x,s).$$

Da die Funktionen f und g beliebig waren, muss gelten

$$G(x,s) = G(s,x).$$

Die folgenden zwei Sätze enthalten die wichtigsten Aussagen über SLEWP.

Satz 6.14 **[Existenz- und Oszillationssatz]**

Für reguläre Sturm-Liouville Eigenwertprobleme gilt:

1. *Es existieren abzählbar unendlich viele Eigenwerte* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

   und Eigenfunktionen u_n, $n \in \mathbb{N}_0$.
2. *Die Eigenwerte sind einfach.*
3. *Die Eigenfunktion* u_n, $n \in \mathbb{N}_0$ *hat* n *Nullstellen in* (a,b). *Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von* u_n *liegt eine Nullstelle von* u_{n+1}.

Aus dem Satz folgt auch, dass i) die Eigenwerte nach unten beschränkt sind und ii) nur endlich viele Eigenwerte negativ sein können. Falls alle Eigenwerte positiv sind, sagt man der Operator L ist positiv (definit), was äquivalent zu $\langle Lu, u\rangle > 0$ ist.

Die Eigenfunktionen u_n, $n \in \mathbb{N}_0$ können bezüglich des mit der Funktion $r(x)$ gewichteten L^2-Skalarprodukts normiert werden, sodass gilt

$$\int_a^b r(x)u_n^2(x)dx = 1.$$

Ganz analog zu den Sinus-Fourierreihen in Beispiel 6.8 bilden die Eigenfunktionen eines SLEWP ein vollständiges Orthogonalsystem.

Satz 6.15 **[Entwicklungssatz]**

Für reguläre Sturm-Liouville Eigenwertprobleme gilt:

1. *Die normierten Eigenfunktionen u_n, $n \in \mathbb{N}_0$ bilden bezüglich des mit der Funktion $r(x)$ gewichteten L^2-Skalarprodukts ein Orthonormalsystem, d.h.*

$$\int_a^b r(x)u_m(x)u_n(x)dx = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

2. *Jede Funktion $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ mit $R_1 u = 0$ und $R_2 u = 0$ lässt sich in eine punktweise konvergente Fourierreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x)$$

entwickeln. Dabei sind die Fourierkoeffizienten durch

$$c_n := \int_a^b r(x)f(x)u_n(x)dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmässig.

3. *Die Funktionen $u_0, u_1, u_2, \dots$ bilden eine vollständige Orthonormalbasis des (mit r gewichteten) Hilbertraums $L^2[a, b]$, d.h. für $f \in L^2[a, b]$ konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ in der (mit r gewichteten) L^2-Norm gegen f.*

Anmerkung: 1) Für singuläre SLWEP gelten ganz ähnliche Resultate. Das Spektrum von L kann dann aber auch kontinuierliche Anteile besitzen. Die Entwicklung nach Eigenfunktionen enthält dann Integralanteile.

2) Die mit $r(x) > 0$ gewichtete L^2-Norm ist äquivalent zur üblichen (ungewichteten) L^2-Norm. Daher bilden die Eigenfunktionen auch bezüglich der üblichen L^2-Norm eine Basis des L^2.