2.7.7 Satz. Setzt man $P = \{a \in \mathbb{Q} : \operatorname{sgn}(a) = 1\}$, so ist $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, P \rangle$ ist ein angeordneter Körper.

- Dabei ist $[(0,1)]_\sim$ das neutrale Element bzgl. $+$,
- $[(1,1)]_\sim$ das neutrale Element bezüglich $\cdot$,
- Zu $[(x,n)]_\sim \in \mathbb{Q}$ ist $[(-x,n)]_\sim$ das additive Inverse und
- zu $[(x,n)]_\sim \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist $[(\operatorname{sgn}(x)n, |x|]_\sim$ das multiplikative Inverse.
- Außerdem gilt $[(x,n)]_\sim \leq [(y,m)]_\sim \Leftrightarrow xm \leq ny$. (2.8)
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind in $\mathbb{Q}$ eigebettet durch $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : x \mapsto [(x,1)]_\sim$. Diese Einbettung erhält Addition, Multiplikation und Ordnung.
- Schließlich hat $\mathbb{Q}$ die Eigenschaft, dass die Teilmenge $\phi(\mathbb{N})$ von $\mathbb{Q}$ keine obere Schranke hat.

Beweis. Die Gültigkeit der Rechenregeln wie Kommutativität und Assoziativität ergibt sich aus den entsprechenden Regeln für $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. $\forall q \in \mathbb{Q} : \exists (x,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : [(x,n)]_\sim = q$.
Das Distributivgesetz gilt, da für $[(x,n)]_\sim, [(y,m)]_\sim, [(z,k)]_\sim \in \mathbb{Q}$

$$([(x,n)]_\sim + [(y,m)]_\sim) \cdot [(z,k)]_\sim = [(xm+yn, mn)]_\sim \cdot [(z,k)]_\sim =$$
$$[((xm+yn)z, kmn)]_\sim = [(xzkm + yzkn, (km)(kn))]_\sim =$$
$$[(x,n)]_\sim \cdot [(z,k)]_\sim + [(y,m)]_\sim \cdot [(z,k)]_\sim$$

Bei den Gleichheiten 1 und 2, werden nur die Definitionen für $+$ und $\cdot$ auf Äquivalenzklassen verwendet. Gleichheit 3 funktioniert, weil $(xm+yn)z \cdot (km)(kn) = (xzkm + yzkn) \cdot kmn$ und somit $\sim$ zwischen den Representanten der Äquivalenzklassen per Definitionem gilt. Bei Gleichheit 4 wird der Zwischenschritt $[(xz, kn)]_\sim + [(yz, km)]_\sim$ ausgelassen.

Für $a = [(x,n)]_\sim \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a + [(0,1)]_\sim = [(x+0, n \cdot 1)]_\sim = a,$$
$$a \cdot [(1,1)]_\sim = [(x \cdot 1, n \cdot 1)]_\sim = a,$$

... per Definitionem. Weiters hat man für $b := [(-x,n)]_\sim$

$$a + b = [(xn - xn, nn)]_\sim = [(0, nn)]_\sim = [(0,1)]_\sim = 0.$$

Gleichheit 3 funktioniert, weil $0 \cdot 1 = 0 \cdot nn$. Sei nun $a \neq 0$, also $(x,n) \neq (0,1)$ oder äquivalent $x \neq 0$. Mit $c := [(\operatorname{sgn}(x)n, |x|)]_\sim$ folgt $ac = [(\operatorname{sgn}(x)xn, n|x|)]_\sim = [(1,1)]_\sim$.
Die Gleichheit 2 gilt, weil $\operatorname{sgn}(x)xn \cdot 1 = 1 \cdot n|x|$ durch 2.2.12 Lemma (i) gilt.
Wegen $\operatorname{sgn}([(-x,n)]_\sim) = \operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}([x,n]_\sim)$ und, weil $\operatorname{sgn}([x,n]_\sim) = 0$ genau dann, wenn $[(x,n)]_\sim = [(0,1)]_\sim$, gilt für jedes $a \in \mathbb{Q}$

$$a \in P \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a) = 1,$$
$$a \in \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a) = 0,$$
$$a \in -P \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a) = -1,$$

womit $\mathbb{Q} = P \,\dot\cup\, \{0\} \,\dot\cup\, -P$. Die ersten beiden Aussagen folgen aus $\operatorname{sgn} : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : (x,n) \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ und $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$. Die 3 Implikationen zeigen, dass P, $\{0\}$, und $-P$

disjunkt sind. Aus $\operatorname{sgn}([(x,n)]_\sim + [(y,m)]_\sim) = \operatorname{sgn}(xm + yn)$ und $\operatorname{sgn}([(x,n)]_\sim \cdot [(y,m)]_\sim) = \operatorname{sgn}(xy)$ erhalten wir, dass $a, b \in P$ die Tatsache $a + b, a \cdot b \in P$ nach sich zieht. Die erste Aussage überspringt $[(x,n)]_\sim + [(y,m)]_\sim = [(xm + yn, nm)]_\sim$, aber verwendet die Definition von $\operatorname{sgn}(a)$ für $a \in \mathbb{Q}$. Die zweite Aussage überspringt $[(x,n)]_\sim \cdot [(y,m)]_\sim = [(xy, nm)]_\sim$, aber —"—. Die „Tatsache" erhalten wir, weil die Funktion sgn allen $a \in \mathbb{Q}$ zu genau einer der Mengen P, $\{0\}$, oder $-P$ zuweist. Somit ist $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper, und wir haben damit eine Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{Q}$. Man braucht nur 2.2.1 Definition und das daraus folgende 2.2.3 Lemma (iv) zu betrachten. (2.8) folgt aus

$$[(y,m)]_\sim - [(x,n)]_\sim = [(yn - xm, mn)]_\sim \in \{0\} \cup P \Leftrightarrow$$
$$\operatorname{sgn}(yn - xm) \geq 0 \Leftrightarrow xm \leq yn.$$

Das additive Inverse von $[(x,n)]_\sim$ ist, wie vorhin gezeigt, $[(-x,n)]_\sim$. Die erste Implikation folgt aus der Definition von sgn mit P, $\{0\}$, und $-P$ und die zweite, weil $yn - xm \geq 0 \Leftrightarrow xm \leq yn$. Betrachte die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. OK. Diese ist injektiv, denn $(x,1) \sim (y,1)$ gilt genau dann, wenn $x = y$. ... $\Leftrightarrow x \cdot 1 = y \cdot 1$. Injektivität ist gefordert, weil die Struktur sonst verloren ginge; Surjektivität ist irrelevant. Dass ϕ die algebraischen Operationen erhält, rechnet man leicht nach. $x + y \leftrightarrow (x,1) + (y,1) = (x \cdot 1 + y \cdot 1, 1 \cdot 1) = (x + y, 1)$ und $xy \leftrightarrow (x,1)(y,1) = (xy, 1 \cdot 1) = (xy, 1)$. Die Verträglichkeit mit der Ordnung gilt, da wegen (2.8)

$x \leq y \Leftrightarrow x \cdot 1 \leq y \cdot 1 \Leftrightarrow [(x,1)]_\sim \leq [(y,1)]_\sim \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$.

IdFg. $x' := x$, $y' := y$, $m' = n' := 1$. Zudem beachte man die Definition von ϕ. Wegen der Injektivität gilt damit auch $x < y$ genau dann, wenn $\phi(x) < \phi(y)$. ... weil $< \; = \; \leq \setminus \Delta$ und die Kontraposition der Injektivität gilt.

Angenommen $[(x,n)]_\sim$ ist eine obere Schranke von $\phi(\mathbb{N})$, also $mn \leq x$ für alle $m \in \mathbb{N}$. ... weil wegen (2.8) $[(m,1)]_\sim \leq [(x,n)]_\sim \Leftrightarrow mn \leq 1 \cdot x$. Außerdem Widerspruch-Beweis! Das ist aber offensichtlich falsch, wenn $x \leq 1$ und man zum Beispiel $m = 2$ setzt. Weil $n \in \mathbb{N}$ via 2.7.1 Definition, also mindestens $mn = 2 \cdot 1 \nleq x \geq 1$, führt Fall 1 zu einem Widerspruch. Ist $x > 1$, so erhält man mit $m = x^2$ den Widerspruch $x \leq xn \leq 1$. $x \in \mathbb{Z}$, aber $x^2 > 0$, also $x^2 \in \mathbb{N}$ und $m = x^2$ funktioniert (ups, außerdem ist $x > 0$). $mn = x^2 n \leq x \Leftrightarrow xn \leq 1$ und $x \leq xn$, weil $1 \geq n \in \mathbb{N}$ und die Transitivität von $\leq$ impliziert $x \leq 1 \Leftrightarrow \neg(x > 1)$. Fall 2 führt also auch zu einem Widerspruch. $\square$