Prüfung Differentialgleichungen A 30. 4.. 2007

Kennummer:	Familienname:
Matrikelnummer:	Vorname:

1:	Summe:
2:	
3:	Note:
4:	

Bemerkungen:

1) **Bitte keine zusätzlichen Blätter abgeben! Diese würden beim Korrigieren nicht berücksichtigt werden.**

2) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

3) Bei jedem der vier Beispiele können 10 Punkte erreicht werden.

4) Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden.

5) Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein. Besser zu viel als zuwenig hinschreiben.

1. (10 Punkte) Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.

ii) Klassifizieren und skizzieren Sie alle für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ auftretenden Phasenporträts.

2. (10 Punkte) Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 \end{aligned} \quad .$$

i) Zeigen Sie, dass es sich um ein Hamiltonsches System handelt und bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(x, y)$.

ii) Bestimmen Sie die Ruhelagen und untersuchen Sie Ihre Stabilität.

iii) Klassifizieren Sie die Typen aller auftretenden Orbits und zeichnen Sie das das Phasenporträt.

3. (10 Punkte) Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - y - x^3 \\ \dot{y} & = & x + y - y^3 \end{array}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Untersuchen und skizzieren Sie die durch $\dot{x} = 0$ bzw. $\dot{y} = 0$ definierten Nullinien. Zeigen Sie, dass die DG nur eine Ruhelage besitzt.

ii) Klassifizieren Sie den Typ der Ruhelage mittels Linearisierung. Skizzieren Sie das Phasenporträt der Linearisierung.

iii) Zeigen Sie, dass die Lösungen der DG für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ für $t \in [0, \infty)$ existieren.

iv) Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Poincaré-Bendixson, dass die Differentialgleichung einen periodischen Orbit besitzt.

v) Skizzieren Sie ein plausibles Phasenporträt der Differentialgleichung.

4. Betrachtet wird die partielle Differentialgleichung

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

i) Bestimmen Sie eine explizite Lösung des Cauchyproblems

$$u(x, 0) = -x, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit der Charakteristikenmethode. Skizzieren Sie die Charakteristiken in der (x, t)-Ebene und untersuchen Sie für welche $t \in \mathbb{R}$ eine eindeutige glatte Lösung existiert.

ii) Skizzieren Sie (ohne detailierte Rechnung) das qualitative Aussehen der Lösung des Cauchyproblems

$$u(x, 0) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$$

zu den Zeitpunkten $t = -10$, $t = -1$, $t = 1$ und $t = 10$.