1.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, (a_n) eine Folge von reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\sum_n a_n X_n$ genau dann fast sicher konvergiert, wenn die Reihe $\sum_n a_n^2$ konvergiert.

2. X sei standardnormalverteilt.

   (a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(e^{tX})$ für $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Wenden Sie die Markov-Ungleichung auf e^{tX} an, um eine obere Schranke für $\mathbb{P}(X \geq x)$ $(x > 0)$ zu erhalten. Was ist die kleinste Schranke, die man so erhält?

3. Ein fairer Würfel wird wiederholt geworfen, X_n sei die Augenzahl beim n-ten Wurf. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

   und

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}$$

   (überzeugen Sie sich auch, dass diese Grenzwerte mit Wahrscheinlichkeit 1 existieren).

4. In einem Spiel kann auf die Ausgänge $1, \ldots, m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ gezogen werden. Wird i gezogen, weren die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, alle anderen Einsätze verfallen. Eine Spielerin teilt ihr Kapital K (mit Anfangswert K_0) in jeder Runde so auf, dass sie Kq_i auf i setzt, wobei $q_1, \ldots, q_n$ Zahlen mit $q_i > 0$ und $\sum_i q_i = 1$ sind.

   (a) Zeigen Sie: für das Kapital K_n der Spielerin nach n Runden gilt

$$K_n = K_0 m^n \prod_{j=1}^n q_{X_j},$$

   wobei (X_j) eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_j = i) = p_i$$

   ist.

   (b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log K_n}{n}.$$

   (c) Für welche Wahl von $q_1, \ldots, q_n$ ist dieser Grenzwert maximal?

5. Für welche Werte von $p \in \mathbb{R}$ gibt es ein signiertes Maß μ auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ mit $\mu(\{x\}) = x^p(-1)^x$?

6. Auf $([0,1], \mathfrak{B})$ ist durch

$$\mu([0,x]) = F(x) = x^2 - x^3,\ 0 \leq x \leq 1$$

eine signierte Maßfunktion gegeben. Bestimmen Sie eine Hahn- und die Jordanzerlegung von μ (betrachten Sie F').

7. Für welche (reellen) Werte von p gibt es eine signierte Maßfunktion auf $([0,1], \mathfrak{B})$ mit

$$\mu([0,x]) = x^p \sin(1/x)[x > 0]?$$