3.7.3 Satz Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$, wobei $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, so treffen folgende Aussagen zu.

(i) $\lim_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$.

(ii) Ist $\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty.$$

(iii) Ist $y_n \geq C$ für alle $n \geq k$ mit einem $C > 0$ und einem $k\in\mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty.$$

(iv) Ist $x_n \leq y_n$ für alle $n \geq k$ mit einem $k\in\mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

(v) Sind alle bis auf endlich viele, also alle ab einem Index $k\in\mathbb{N}$, y_n positiv (negativ), so ist $\lim_{n\to\infty} = +\infty$ $(-\infty)$ äquivalent zu $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = 0$.

(vi) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (fallend). Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist diese Folge konvergent gegen eine reelle Zahl. Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so konvergiert sie gegen $+\infty$ $(-\infty)$.

Analoge Aussagen gelten im Fall $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Beweis.

(i) $\lim_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$ folgt unmittelbar aus $x_n > M \Leftrightarrow -x_n < -M$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $+\infty$ laut Voraussetzung, also gilt laut (3.12), dass „$\forall M > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : x_n > M$ für alle $n \geq N$". $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strebt also wegen (3.13), „$\forall M < 0\ \exists N \in \mathbb{N} : x_n < M$ für alle $n \geq N$", nach $-\infty$, weil ja in unserem Fall $-x_n < -M < 0$.

(ii) Sei C eine untere Schranke von $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Diese gibt es, weil $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ laut Voraussetzung nach unten beschränkt ist. Zu $M > 0$ wähle N so groß, dass $x_n > M - C$ für alle $n \geq N$. Weil $x_n \to \infty$, muss (3.12) für beliebig große M, also auch für $M - C$ (womöglich sogar mit $C < 0$) gelten. Es gibt daher ein solches N, das (3.12) erfüllt. Dann folgt für $n \geq \max(N, k)$

$$x_n + y_n > (M - C) + C = M,$$

also $(x_n + y_n) \to +\infty$. $x_n > M - C$ und $y_n > C$, also steht „zufälligerweise" genau das da, was wir brauchen, (3.12).

(iii) Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $N \geq k$ und $x_n > \frac{M}{C}$ für alle $n \geq N$. Laut Voraussetzung ist $y_n \geq C$, $\forall n \geq k$ mit $C > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n > \frac{M}{C}$ für alle $n \geq N \geq k$. Dann folgt für $n \geq N$ auch

$$x_n y_n > \frac{M}{C} \cdot C = M,$$

und infolge $x_n y_n \to +\infty$. Weil $n \geq N \geq k$, gilt erst recht $n \geq k$. Daher $x_n > \frac{M}{C} \wedge y_n \geq C \Rightarrow x_n y_n > M$ und „zufälligerweise" bekommen wir (3.12).

(iv) Aus $x_n > M$ und $x_n \leq y_n$ folgt sicherlich auch $y_n > M$.
$M < x_n \leq y_n \Rightarrow M < y_n$, also gilt (3.12) für y_n.

(v) Seien alle y_n mit $n \geq k$ positiv. OK. Wir nehmen zuerst an, dass $\frac{1}{y_n} \to 0$. „$\Leftarrow$". Zu vorgegebenem M wähle $N \geq k$ so groß, dass für $n \geq N$ gilt $\frac{1}{y_n} < \frac{1}{M}$. Weil $\frac{1}{y_n} \to 0$, muss es nach (3.3) ein $N \in \mathbb{N}$, ab dem $d(1/y_n, 0) < \epsilon$ mit $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein. Hier ist $\epsilon := 1/M$. Es folgt $y_n > M$. Kehrwert wurde gebildet und Relationszeichen umgekehrt und schon steht das da, (3.12), was wir haben wollen.
Gilt umgekehrt $y_n \to +\infty$, und ist $\epsilon > 0$, so wähle N so groß, dass für $n \geq N$ gilt $y_n > \frac{1}{\epsilon}$. ϵ kann beliebig klein sein, aber für alle $n \geq N$ muss y_n immer größer sein können, wegen $y_n \to +\infty$. Daraus folgt $\left|\frac{1}{y_n}\right| = \frac{1}{y_n} < \epsilon$. Wieder Kehrwert bilden und Relationszeichen umkehren. Schon steht $\left|\frac{1}{y_n}\right| = d(1/y_n, 0) < \epsilon$ da. Die Äquivalenz im Falle $y_n < 0$ für $n \geq k$ sieht man genauso.
$y_n < 1/\epsilon \Leftrightarrow 1/y_n > \epsilon \Leftrightarrow -1/y_n < -\epsilon < \epsilon \Leftrightarrow$
$|-1/y_n| = \left|\frac{1}{y_n}\right| = d(1/y_n, 0) < \epsilon$.

(vi) Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so folgt die Aussage aus Satz 3.4.2. „Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$." Im Fall der Unbeschränktheit gibt es eben wegen dieser zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $y_N > M$. OK. Wegen der Monotonie folgt dann auch $y_n > M$ für alle $n \geq N$. $M < y_N < y_{N+1} < \ldots$, und das passt in (3.12) hinein. $\square$