12.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. Eine Umkehrung des zentralen Grenzwertsatzes: zeigen Sie, dass aus der Konvergenz in Verteilung von $(X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$ gegen die Standardnormalverteilung (wobei (X_n) eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen ist) folgt, dass $\mathbb{E}(X_n) = 0$ und $\mathbb{V}(X_n) = 1$ gilt (das hat natürlich mit der Differenzierbarkeit der charakteristischen Funktion zu tun; die erste Ableitung sollte kein Problem darstellen, für die zweite genügt es, den Grenzwert von $(2 - \phi(t) - \phi(-t))/t^2$ für $t \to 0$ zu betrachten).

2. Zeigen Sie: Wenn für ein $t \neq 0$ $\phi_X(t) = 1$ gilt, dann nimmt X mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Werte der Form $2n\pi/t$, $n \in \mathbb{Z}$ an. Gilt $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 1$ für zwei inkommensurable Werte t_1 und t_2 (d.h. t_1/t_2 ist irrational), dann gilt $X = 0$ fast sicher.

3. (a) F und G seien (Wahrscheinlichkeits-) Verteilungsfunktionen, d die Lévy-Prohorov-Metrik. Zeigen Sie für die verallgemeinerten Inversen
$$d(F^{-1}, G^{-1}) \leq d(F, G).$$
   (b) Zeigen Sie: $F_n \longrightarrow F$ genau dann, wenn es auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum Zufallsvariable $X_n \sim F_n$, $X \sim F$ gibt mit $X_n \to X$ fast sicher (Darstellungssatz von Skorohod).

4. Ein Würfel wird 100 mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen mehr als 375 beträgt.

5. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Augnzahlen größer als 200 ist, mindestens 0.9 ist?

6. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 100 Sechser zu erzielen, größer als 0.9 ist?

7. Ein anderer Weg, das vorige Beispiel zu lösen: die Anzahl der Versuche hat eine negative Binomialverteilung, und diese kann (als Summe von unabhängig geometrisch verteilten Zufallsvariablen) auch durch eine Normalverteilung approximiert werden.