Satz 2.3.6 Sei $M = (m_i)_{i \in I}$ eine Familie in V. Dann ist die Hülle von M ein Unterraum des Vektorraumes V.

Beweis. Wir wenden das Unterraumkriterium 2.3.2 an: Es ist $\mathcal{O} \in [M] \neq \emptyset$, da sich der Nullvektor als $\mathcal{O} = \sum_{i \in I} 0 \cdot m_i$ schreiben lässt. Die „triviale" LK des NV ist immer möglich. Ferner seien Linearkombinationen

$$x = \sum_{i \in I} x_i m_i, \qquad y = \sum_{i \in I} y_i m_i$$

und ein Skalar $c \in K$ gegeben. Beliebig. Sei J die Menge aller Indizes j, für die $x_j \neq 0$ oder $y_j \neq 0$. Wir filtern jene Indizes heraus, die „wirklich" gebraucht werden. Für die Komplementärmenge gilt $x_j = y_j = 0$, laut De Morgan. Dann ist $x_i + cy_i = 0$ für alle $i \in I \setminus J$. ... weil eben vorher. Da J eine endliche Menge ist, folgt $x_i + cy_i = 0$ für fast alle $i \in I$. Die Mengen $J_x := \{j : x_j \neq 0\}$ und $J_y := \{j : y_j \neq 0\}$ sind endlich, also auch $J = J_x \cup J_y$. Somit ist $\sum_{i \in I} (x_i + cy_i) m_i$ eine Linearkombination von M und offensichtlich gilt

$$x + cy = \sum_{i \in I} x_i m_i + c \sum_{i \in I} y_i m_i = \sum_{i \in I} (x_i + cy_i) \cdot m_i .$$

Das c in die Summe ziehen, diese vereinigen und dann $m_i$ herausheben geht, weil I quasi endlich ist. Letztere Summe ist übrigens eine LK, weil $x_i, y_i$ beliebig waren, und $x_i + cy_i$ es somit auch ist (und sogar aus K ist). $\square$