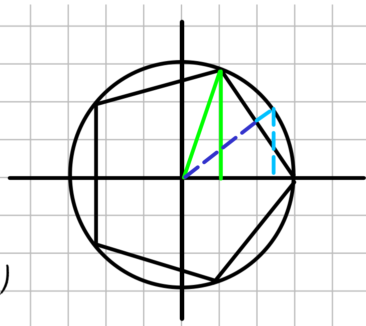
**UE 349** ▶ **Übungsaufgabe 5.3.4.5.** (B) Gegeben sei das Polynom $f(x) = x^4+x^3+x^2+x^1+1 = \frac{x^5-1}{x-1}$. ◀ **UE 349**

(1) Zerlegen Sie $f$ in seine irreduziblen Faktoren über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

(2) Finden Sie Wurzelausdrücke für die reellen Zahlen $\cos\frac{k\pi}{5}$, $k=1,2,3,4$.



1) $x^5 = 1 \Leftrightarrow x \in \{ e^{i\frac{2\pi}{5}k} \mid k \in \{0,\dots,4\}\}$, es ist aber $x=1$ keine Nullstelle, also $f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{e^{i\frac{2\pi}{5}k} \mid k\in\{1,\dots,4\}\}$

•) über $\mathbb{C}$: $f(x) = (x-e^{i\frac{2\pi}{5}})(x-e^{-i\frac{2\pi}{5}})(x-e^{i\frac{4\pi}{5}})(x-e^{-i\frac{4\pi}{5}})$

Die Irreduzibilität der Faktoren folgt, wegen $\operatorname{grad}(pq) = \operatorname{grad}(p)+\operatorname{grad}(q)$ und weil Polynome vom Grad 0 Einheiten sind

•) über $\mathbb{R}$: $f(x) = (x^2 - x(e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}})+1)(x^2-2x\cos(\frac{4\pi}{5})+1) =$

$= (x^2 - 2x\cos(\frac{2\pi}{5})+1)(x^2-2x\cos(\frac{4\pi}{5})+1)$

Die Irreduzibilität der Faktoren erhalten wir aus Prop. 5.3.3.7, weil jeder Faktor keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.

•) über $\mathbb{Q}$: Sei $f = pq$ mit $p,q \in \mathbb{Q}[x]\setminus\mathbb{Q}[x]^*$, also $\operatorname{grad} q, \operatorname{grad} p > 0$, weiters ist $\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q > 1$, weil sonst hätte $f$ eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ ↯, wegen $\operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q = \operatorname{grad} f = 4$ ist also $\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} q = 2$. Für $f(x)=0 \Rightarrow x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ also gilt das auch für $p$ und $q$, wieder mit Prop. 5337 folgt $p,q$ irreduzibel auch über $\mathbb{R}$, da aber eine Darstellung als Produkt irreduzibler Elemente eindeutig ist müssen $p,q$ schon wie jene Faktoren im Punkt „über $\mathbb{R}$" ausschauen, also $p,q \in \mathbb{R}[x]\setminus\mathbb{Q}[x]$ ↯

2) Wir multiplizieren den entsprechenden Term von (1) aus

$$\sum_{i=0}^{4} x^i = x^4 - 2\left(\cos(\tfrac{2\pi}{5})+\cos(\tfrac{4\pi}{5})\right)x^3 + \left(2+4\cos(\tfrac{2\pi}{5})\cos(\tfrac{4\pi}{5})\right)x^2 - 2\left(\cos(\tfrac{2\pi}{5})+\cos(\tfrac{4\pi}{5})\right)x + 1$$

also

$$\cos(\tfrac{2\pi}{5}) + \cos(\tfrac{4\pi}{5}) = -\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{2\pi}{5})\cos(\tfrac{4\pi}{5}) = -\tfrac{1}{4}$$

damit ergibt sich $\left(\cos(\frac{4\pi}{5})\right)^2 + \frac{1}{2}\cos(\frac{4\pi}{5}) - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})$

Da der Kosinus in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ negativ ist gilt $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})$ und daher $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$

Weiters wissen wir $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = \cos(\pi)\cos(\frac{\pi}{5}) + \sin(\pi)\sin(\frac{\pi}{5}) = -\cos(\frac{\pi}{5}) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

und genauso erhalten wir $\cos(\frac{3\pi}{5}) = -\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$

**Satz 6.1.2.1.** *Für $K \leq E \leq L$ (als Körper oder auch als Schiefkörper/Divisionsringe) gilt*

$$[L : K] = [L : E] \cdot [E : K].$$

**UE 354 ▶ Übungsaufgabe 6.1.2.2.** (W) Beweisen Sie den Gradsatz, indem Sie zeigen: Ist die Familie $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von $E$ über $K$, die Familie $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von $L$ über $E$, so ist die Familie $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von $L$ über $K$. (Achtung: Ihre Argumentation muss auch für unendliches $I$ und $J$ gelten.) **◀ UE 354**

Sei also $(a_i)_{i\in I}$ Basis von $E$ über $K$ und $(b_j)_{j\in J}$ Basis von $L$ über $E$, $a_i \in E$, $b_j \in L$

•) Sei $\sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} \, a_i b_j = 0$, wobei $\lambda_{ij} \in K$, $\forall^\infty (i,j) \in I\times J : \lambda_{ij} = 0$

$\sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} a_i b_j = \sum_{j\in J} \underbrace{\Big(\sum_{i\in I} \lambda_{ij} a_i\Big)} b_j = 0$ und da $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von $L$ über $E$ ist gilt

$\forall j \in J : \sum_{i\in I} \lambda_{ij} a_i = 0$ und weil $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von $E$ über $K$ ist gilt $\forall i \in I \, \forall j \in J : \lambda_{ij} = 0$

Damit ist $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ sicher eine l.u. Familie in $L$ über $K$

•) Sei nun $x \in L$ bel., dann gibt es $\mu_0, \dots, \mu_n \in E : x = \sum_{k=0}^{n} \mu_k b_{j_k}$ und für jedes

$k \in \mathbb{N} : \exists \lambda_0^{(k)}, \dots, \lambda_{m_k}^{(k)} \in K : \mu_k = \sum_{l=0}^{m_k} \lambda_0^{(k)} a_{i_l}$

also $x = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m_k} \lambda_0^{(k)} a_{i_l} b_{j_k}$, also ist $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ein Erzeugendensystem von $L:K$

Insgesamt ist also $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von $L:K$ mit $|J|\cdot|I|$ Elementen

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$,
2. $\sqrt{3}+i$

über $\mathbb{Q}$ an.

1) $\left(x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right)\left(x^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2\right) = x^4-10x^2+1 = \left(x^2-(5+\sqrt{24})\right)\left(x^2-(5-\sqrt{24})\right) =$

$= \left(x+\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)\left(x+\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)\left(x-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)\left(x-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right) =: m(x)$

Das Produkt in der zweiten Zeile ist die eindeutige Zerlegung des Polynoms über $\mathbb{R}$, da alle Nullstellen des Polynoms $m(x)=0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ erfüllen hat eine Faktorisierung über $\mathbb{Q}$ mit $m=pq$ entweder die Form $\operatorname{grad}(p)=4 \wedge \operatorname{grad}(q)=1$, dann ist $q$ eine Einheit oder $\operatorname{grad}(p)=\operatorname{grad}(q)=2$. In dem Fall ist stets $p$ Produkt zweier Faktoren aus der Zerlegung über $\mathbb{R}$ und $q$ entsprechend Produkt der beiden verbleibenden Faktoren, so erhält man allerdings keine Polynome über $\mathbb{Q}$

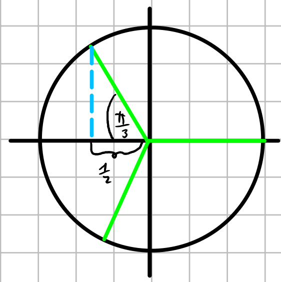
2) $\left(x^2-(\sqrt{3}+i)^2\right)\left(x^2-(\sqrt{3}-i)^2\right) = x^4-4x^2+16 = \left(x-(\sqrt{3}-i)\right)\left(x+(\sqrt{3}-i)\right)\left(x-(\sqrt{3}+i)\right)\left(x+(\sqrt{3}+i)\right) =$

$= \left((x-\sqrt{3})+i\right)\left((x-\sqrt{3})-i\right)\left((x+\sqrt{3})+i\right)\left((x+\sqrt{3})-i\right) = \left((x-\sqrt{3})^2+1\right)\left((x+\sqrt{3})^2+1\right) =: m(x)$

Der letzte Term ist die eindeutige Faktorisierung des Polynoms in irreduzible Elemente über $\mathbb{R}$, daher ist $m$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel.

**UE 363 ▶ Übungsaufgabe 6.1.4.4.** (F) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $x^3 - 2$. Man bestimme den Grad des Körpers $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ (des Zerfällungskörpers, siehe 6.2.1) über $\mathbb{Q}$. ◀ **UE 363**

•) $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\beta = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\gamma = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$




$$x^3 - 2 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) =$$
$$= (x-\alpha)\left(x^2 - x(\beta+\gamma) + \beta\gamma\right) =$$
$$= (x-\sqrt[3]{2})\left(x^2 - x\left(\sqrt[3]{2}\, 2\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right) + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right) =$$
$$= (x-\sqrt[3]{2})\left(x^2 + \sqrt[3]{2}\, x + \sqrt[3]{4}\right) =: m(x)$$

So haben wir die eindeutige Zerlegung des Polynoms über $\mathbb{R}$ gefunden und man sieht, das Polynom ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Wir wollen zuerst $\mathbb{Q}(\alpha)$ betrachten und erhalten $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = \operatorname{grad}(m) = 3$, da $\alpha \in \mathbb{R}$ ist auch $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$

Das Polynom $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha^2 = (x-\beta)(x-\gamma)$ ist irreduzibel über $\mathbb{R}$, da wir die Zerlegung über $\mathbb{C}$ kennen und damit ist $f$ auch irreduzibel über $\mathbb{Q}(\alpha)$ (vgl. UE 359 (3))

Somit ist $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\alpha)] = \operatorname{grad}(f) = 2$

Mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ ist auch $\frac{\beta}{\alpha} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ und damit auch $\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = \gamma \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

also ist $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$ und nach Satz 6.1.2.1.

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\alpha)]\,[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$$

Weitere prominente Beispiele in diesem Zusammenhang sind die regelmäßigen $n$-Ecke (auf dem Einheitskreis). Elementare Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sind bis $n = 6$ möglich, nicht jedoch für $n = 7$, dann wieder für $n = 8, 10, 12$ etc. Gauß konnte beweisen,

**UE 372 ► Übungsaufgabe 6.1.6.11.** (D) Versuchen Sie wenigsten gewisse der oben aufgestellten Behauptungen im Zusammenhang mit dem regelmäßigen $n$-Eck zu beweisen. **◄ UE 372**

·) Es ist zu zeigen, dass die siebente primitive Einheitswurzel $\zeta_7$ nicht konstruierbar ist.

$\zeta_7$ ist Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^7 - 1 = (x-1)\sum_{i=0}^{6} x^i$, wobei wir $m(x) := \sum_{i=0}^{6} x^i$

Wir betrachten $m(x+1) = x^6 + 7x^5 + 21x^4 + 35x^3 + 35x^2 + 21x + 7$

7 teilt alle Koeffizienten dieses Polynoms außer jenen von $x^6$, $7^2 = 49 \nmid 7$

Nach dem Eisensteinschen Kriterium (Prop. 5.3.2.7) ist daher $m(x+1)$ irreduzibel und damit gilt das auch für $m(x)$. Nach Satz 6.1.3.4 ist daher $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}] = \text{grad}(m(x)) = 6$

und $\nexists\, n \in \mathbb{N} : 6 = 2^n$, daher ist nach Lemma 6.1.6.7 ist daher $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ keine Quadratwurzelerweiterung von $\mathbb{Q}$, nach Satz 6.1.6.8 folglich $\zeta_7$ nicht konstruierbar.

**UE 382** ▶ **Übungsaufgabe 6.2.6.5.** (B) Sei $L := \mathbb{Q}(x)$ der Körper der gebrochen rationalen ◀ **UE 382**
Funktionen über $\mathbb{Q}$.

(1) Berechnen Sie $[L : K]$ für $K := \mathbb{Q}(x^3) \leq L$, indem Sie das Minimalpolynom von $x$ über $K$ finden.

(2) Wie Teil 1, nur mit $K := \mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})$.

(3) Zeigen Sie: $[L : K]$ ist endlich für jeden Körper $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}(x) \setminus \mathbb{Q}$.

1) $r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{3i}}{\sum_{j=0}^{m} \beta_j x^{3j}} \in \mathbb{Q}(x^3)$ , $\forall i \in \{1, \dots, n\}: \alpha_i \in \mathbb{Q}$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}: \beta_j \in \mathbb{Q}$

$m_x(y) = y^3 - x^3$, es ist grad $m_x = 3$, nach Prop. 5.3.3.7 reicht es also zu zeigen, dass $m_x$ keine Nullstelle in $K$ hat

$m_x(y) = 0 \Leftrightarrow y^3 - x^3 = 0 \Leftrightarrow y^3 = x^3 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow y = x \notin \mathbb{Q}(x^3)$

Also $[L:K] = \text{grad}(m_x) = 3$

2) $m_x(y) := y^2 - (x + \frac{1}{x})y + 1 = y^2 - xy - \frac{y}{x} + 1 = (y - x)(y - \frac{1}{x})$

Wir haben $m_x$ über $\mathbb{Q}(x)$ eindeutig in irreduzible Elemente zerlegt

wir müssen noch zeigen, dass diese Zerlegung keine in $\mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})$ ist

3) Sei $\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j}$ ist Nullstelle von $m_\alpha(y) = \alpha \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$

und damit $[L:K] \leq \text{grad}(m_\alpha) < \infty$