Ergebnisse und Zeit für Einsichtnahme in Kürze auf `http://asc.tuwien.ac.at/~blue`

1 (10P): Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n} z^n$$

konvergent bzw. absolut konvergent?

Lösung:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z| \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ und $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \to_{n\to\infty} 1$. Es gilt $1 < \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} < \frac{n+2}{n+1} \to 1$ Mit Einschlusssatz folgt $\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \to 1$. Für $|z| < 1$ folgt mit dem Quotientenkriterium $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z| < 1$ die absolute Konvergenz und für $|z| > 1$ $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z| > 1$ die Divergenz.

Für $z = 1$ ist $\sum \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$, damit divergiert unsere Reihe für $z = 1$.

Für $|z| = 1, z \neq 1$ gilt

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|\frac{z^{N+1} - z}{z-1}\right| \leq \left|\frac{2}{z-1}\right|,$$

und $\frac{\sqrt{n+1}}{n}$ ist wegen (alle Terme positiv)

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} > \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n^2} > \frac{n+2}{(n+1)^2} \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > n^3 + 2n^2$$

eine monotone Nullfolge. Nach dem Dirichletkriterium ist die Reihe somit konvergent aber nicht absolut konvergent da $\sum \frac{1}{n}$ divergente Minorante für $\sum |a_n|$ ist.

2 (10P): Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$M_n := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{n}\right\} \qquad \text{und } M := \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n.$$

Bestimmen Sie $c(M_n), c(M)$ und untersuchen Sie, welche der Mengen M_n, $c(M_n), M, c(M)$ kompakt sind.

Lösung: $M_n = K_{1/\sqrt{n}}(0) \backslash U_{1/\sqrt{n}}(0)$ ist als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. ($U_{1/\sqrt{n}}(0)$ ist offen (Vorl.) damit ist das Komplement abgeschlossen, $K_{1/\sqrt{n}}(0)$ ist abgeschl. (Vorl.). Somit $c(M_n) = M_n$.

$(0, 0, 0)$ ist Häufungspunkt von M da $M_n \subset U_\rho(0)$ für $1/\sqrt{n} < \rho$. Also gilt $M \cup \{(0, 0, 0)\} \subseteq c(M)$.

$(M \cup \{(0, 0, 0)\})^\complement = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \neq 1/k \, \forall k \in \mathbb{N}, \; \mathbf{x} \neq (0, 0, 0)\} = \cup_{l=0}^{\infty} O_l$ mit $O_0 = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| > 1\}, O_l = \{\mathbf{x} : 1/\sqrt{l} > \|\mathbf{x}\| > 1/\sqrt{l+1}\}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. O_0 ist als Komplement der abgeschlossenen Menge $K_1(0)$ offen. O_l ist als Durchschnitt von $U_{1/\sqrt{l}}$ mit dem Komplement der abgeschlossenen Menge $K_{1/\sqrt{l+1}}$ Durchschnitt zweier offener Mengen und damit offen. Somit ist $\cup_{l=0}^{\infty} O_l$ als Vereinigung offener Mengen offen und ihr Komplement $M \cup \{(0, 0, 0)\}$ ist abgeschlossen.

(Alternativ kann man auch die Mengen $A_n := K_{1/n}(0) \cup_{l \le n} M_l$ betrachten, die als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Also ist $\cap_{l\in\mathbb{N}} A_l = M \cup \{(0, 0, 0)\}$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Da $M \cup \{(0, 0, 0)\}$ abgeschlossen ist enthält diese Menge alle ihre Häufungspunkte, insbes. alle Häufungspunkte von M. Es folgt $c(M) \subset M \cup \{(0, 0, 0)\}$. Zusammen mit $M \cup \{(0, 0, 0)\} \subseteq c(M)$ (siehe oben) folgt $M \cup \{(0, 0, 0) = c(M)$.

Im $\mathbb{R}^3$ sind genau die abgeschlossenen bechränkten Mengen kompakt (Vorl.). Alle betrachteten Mengen sind Teilmengen von $K_1(0)$, ihre Elemente haben also von $(0, 0, 0)$ Abstand $\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| \le 1$. M und M_n sind damit beschränkte Mengen. Also sind $M_n, c(M_n), c(M)$ kompakt, nicht aber M, da M nicht abgeschl. ist.
