1. Übung zur Komplexen Analysis

1. Berechnen Sie:
$$\sqrt[3]{1-i},\ \sqrt[n]{-1},\ \sqrt[n]{i} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$
(mit Skizze!)

Lösung: Es sei $z = a+ib$. Berechne r und φ in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ via $r = \sqrt{a^2+b^2}$ und $\varphi = \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$ für $b \geq 0$ bzw. $\varphi = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right)$ für $b < 0$. Dann sind die n Lösungen z_k, $k = 0, \dots, n-1$, von $\sqrt[n]{z}$ gegeben als
$$z_k = \sqrt[n]{r}\exp\left(\frac{i\varphi}{n} + k\frac{2\pi i}{n}\right).$$
Damit gilt für $\sqrt[3]{1-i}$: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ und
$$z_k = \sqrt[6]{2}\exp\left(-\frac{i\pi}{12} + k\frac{2\pi i}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$
Für $\sqrt[n]{-1}$ gilt: $r = 1$, $\varphi = -\pi$ und
$$z_k = \exp\left(-\frac{i\pi}{n} + k\frac{2\pi i}{n}\right) = \exp\left((2k-1)\frac{i\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$
Für $\sqrt[n]{i}$ gilt: $r = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und
$$z_k = \exp\left(-\frac{i\pi}{2n} + k\frac{2\pi i}{n}\right) = \exp\left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\frac{i\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Stellen Sie graphisch dar:
$\{z \in \mathbb{C} : |z-(1-3i)| \leq 2\}$; $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z-i)(1+i)) > 0\}$;
$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z+3|\}$; $\{z \in \mathbb{C} : |z| + |z+i| = 2\}$.

Lösung: Es sei $z = a+ib$.

(1) Offensichtlich handelt es sich hierbei um die geschlossene Kreisscheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt $1-3i$

(2) $\mathrm{Im}((z-i)(1+i)) = \mathrm{Im}(z - iz - i + 1) = \mathrm{Im}(a+ib+ia-b-i+1) = a+b-1 > 0$ bzw. $a+b > 1$. D.h. es handelt sich um die offene Menge oberhalb der Gerade $y = -x+1$.

(3) $|z-1| < |z+3| \iff \sqrt{(a-1)^2+b^2} < \sqrt{(a+3)^2+b^2} \iff a > -1$. D.h. es handelt sich um die offene Menge $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1\}$.

(4) $|z| + |z+i| = 2 \iff \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+(b+1)^2} = 2$. Quadrieren, ausmultiplizieren, etc. (die Schritte könnt ihr sicherlich selbst ausführen) liefert: $8a^2 + 4(b+1)^2 = 2$. Dies ist eine Ellipse mit Mittelpunkt $-i/2$ mit den Scheitelpunkten $\pm\frac{1}{\sqrt{8}} - i\frac{1}{2}$ und $i(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Sei $|z-1| = 1$. Man zeige:

$$\arg(z-1) = 2\arg z = \frac{2}{3}\arg(z^2 - z)$$

Lösung: Es sei $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus $|z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 1$, dass $a^2 + b^2 = 2a$.
Zuerst sei $b \geq 0$. Da $\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 1$, gilt

$$\arg(z-1) = \arccos\left(\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2}}\right) = \arccos(a-1).$$

Andererseits gilt

$$2\arg(z) = 2\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 2\arccos\sqrt{\frac{a}{2}} = \arccos(a-1),$$

wobei der letzte Schritt einfach die Anwendung des Additionstheorem für den Arkuskosinus ist. ($\arccos(x) + \arccos(y) = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ für $x + y \geq 0$).
Der Fall $b < 0$ folgt analog, womit die erste Gleichung gezeigt ist.

Um die zweite Gleichung zu zeigen verwenden wir die Gleichung $\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y)$ die für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt und ebenfalls mit den Additionstheoremen hergeleitet werden kann (dies sei dem Leser überlassen). Damit gilt

$$\frac{2}{3}\arg(z^2 - z) = \frac{2}{3}\arg(z(z-1)) = \frac{2}{3}\big(\arg(z) + \arg(z-1)\big) = \frac{2}{3}(3\arg(z)) = 2\arg(z).$$

4. $\mathbb{R}[x]$ bezeichne den Ring aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Durch

$$P_1(x) \sim P_2(x) \iff P_1(x) - P_2(x) \text{ ist durch } x^2 + 1 \text{ ohne Rest teilbar}$$

wird auf $\mathbb{R}[x]$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Die Menge der dadurch festgelegten Äquivalenzklassen bildet mit den in der üblichen Weise definierten Operationen $+$ und $\cdot$ den Quotientenring $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ und $\mathbb{C}$ an. (Dieses Modell von $\mathbb{C}$ stammt von Cauchy.)

Lösung: Es sei $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Dann gibt es eindeutige $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg r \leq 1$, sodass $p(x) = q(x)(x^2+1) + r(x)$. D.h. wir können mit Polynomen $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg r \leq 1$ als Repräsentanten der Äquivalenzklassen des Quotientenrings $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ verwenden.

Wir definieren die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{C}, \quad [a + bx] \mapsto a + ib.$$

Wir zeigen Injektivität: Es sei $[a+bx], [c+dx] \in \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$. Dann gilt

$$\phi([a+bx]) = \phi([c+dx]) \iff a + ib = c + id \iff a + bx = c + dx \iff [a+bx] = [c+dx].$$

Wir zeigen Surjektivität: Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\phi([a + bx]) = a + ib = z$. Damit ist ϕ bijektiv.
Wir zeigen, dass ϕ ein Körperhomomorphismus ist. Es gilt

$$\phi([a + bx]) + \phi([c + dx]) = a + ib + c + id = (a + c) + (b + d)i = \phi([(a + c) + (b + d)x])$$

sowie

$$\begin{aligned}\phi([a + bx] \cdot [c + dx]) &= \phi([ac + (ad + bc)x + bdx^2]) = \phi([(ac - db) + (ad + bc)x]) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) = (a + ib) \cdot (c + id) = \phi([a + bx]) \cdot \phi([c + dx]).\end{aligned}$$

Da ϕ bijektiv ist gilt insgesamt, dass es ein Körperisomorphismus ist.

5. Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar?

$$\begin{aligned} f(z) &= (\bar{z})^2 \\ f(z) &= \log\sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \tfrac{y}{x} \\ f(z) &= \sin^2(x + y) + i\cos^2(x + y) \end{aligned}$$

Hier ist $z = x + i\,y$.

Lösung: Wir prüfen nach wo die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt sind.

(1) $f(z) = (\bar{z})^2 = x^2 - y^2 - 2ixy =: u(x, y) + iv(x, y)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

und damit, dass die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen nur in $x = y = 0$ erfüllt sind.

(2) $f(z) = \log\sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x} =: u(x, y) + iv(x, y)$. Die Funktion ist also überall definiert ausgenommen der reellen Achse. Dann gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

und damit, dass die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen auf dem gesamten Definitionsbereich erfüllt sind.

(3) $f(z) = \sin^2(x + y) + i\cos^2(x + y) =: u(x, y) + iv(x, y)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin(x + y)\cos(x + y), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2\cos(x + y)\sin(x + y)$$

und damit, dass die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in jenen Punkten $z = x + iy$ erfüllt sind in denen $\sin(x + y)\cos(x + y) = -\sin(x + y)\cos(x + y)$ gilt. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $x + y = \pi k$ oder $x + y = \pi k + \frac{\pi}{2}$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

6. Zeigen Sie: Eine holomorphe Funktion ist auf einem zusammenhängenden Definitionsbereich durch ihren Imaginärteil bis auf Addition einer (reellen) Konstanten eindeutig festgelegt.

   Lösung: Es seien $f_1(x,y) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$ und $f_2(x,y) = u_2(x,y) + i(v_1(x,y) + C_2)$. Wir definieren $g(x,y) := f_1(x,y) - f_2(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y) - iC_2 := u(x,y) + iv(x,y)$. Mit den Cauchy-Riemann DGLs gilt nun:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

   Daraus folgt, dass $u(x,y)$ ebenfalls eine Konstante ist und insbesondere, dass $u_2(x,y) = u_1(x,y) + C_1$ gilt.

7. Bestimmen Sie zu $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sodass u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllen:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^y \cos x$$

   Lösung: Aufgrund der Cauchy-Riemann DGLs muss gelten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^{-y}\cos(x) + e^y \sin(x) = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + e^{-y}\sin(x) + e^y\cos(x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

   Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion von $\frac{\partial v}{\partial y}$ bzgl. der Variable y

$$\int 2x + e^{-y}\cos(x) + e^y\sin(x)\, dy = 2xy - e^{-y}\cos(x) + e^y \sin(x) + C(x).$$

   Nun leiten wir dies nach x ab:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int 2x + e^{-y}\cos(x) + e^y\sin(x)\, dy = 2y + e^{-y}\sin(x) + e^y\cos(x) + C'(x).$$

   Wir vergleichen diesen Ausdruck mit $\frac{\partial v}{\partial x}$ und stellen fest, dass $C'(x) = 0$ bzw. $C(x)$ konstant ist. D.h. $v(x,y) = 2xy - e^{-y}\cos(x) + e^y\sin(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

8. Zeigen Sie: Ist f holomorph auf einem Gebiet G und gilt $|f| = \text{const.}$, dann ist f konstant auf G.

   Lösung: Es sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Da $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} = C$ bzw. $C^2 = u^2 + v^2$ folgt sofort durch ableiten nach x bzw. nach y sofort

$$0 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad 0 = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

   Durch Einsetzen der Cauchy-Riemann DGLs erhalten wir

$$0 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{und} \quad 0 = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wir quadrieren die Gleichungen und addieren sie zusammen:

$$0 = u^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + v^2\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + u^2\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + v^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 = (u^2+v^2)\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big).$$

D.h. entweder $u^2 + v^2 = 0$, woraus $f = 0$ folgt, oder $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, woraus $u = const.$ folgt. Die analoge Rechnung mit v statt u liefert, dass entweder $f = 0$ ist oder $v = const.$ ist. Insgesamt erhalten wir also, dass $f = const.$ ist.