Übungen zu Analysis 3, 7. Übung 25. 11. 2019

55. Zeigen Sie: Die Hausdorffdimension der Vereinigung von abzählbar vielen Mengen ist gleich dem Supremum der Hausdorffdimensionen dieser Mengen.

56. Bestimmen Sie das Flächenmaß des Ellipsoides

$$a^2x^2 + a^2y^2 + c^2z^2 = 1, \qquad c > a > 0.$$

(Bemerkung: Die Flächenformel für das allgemeine Ellipsoid $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \quad a,b,c > 0$ führt auf "elliptische Integrale" die nicht elementar dargestellt werden können.)

57. Zeigen Sie, dass auf $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0, y > 0\}$ durch $\phi(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$ ein Diffeomorphismus von Q auf $\phi(Q) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b > 0\}$ gegeben ist. Berechnen Sie mithilfe dieser Koordinatentransformation das Integral

$$\int_\Omega x^2 + y^2 \, dx \, dy$$

für $\Omega = \{(x,y) \in Q : \; 1 < xy < 3, 5 < x^2 - y^2 < 9\}$.

58. Bestimmen Sie das Flächenmaß der durch

$$z(x,y) = (1 - x^2 - y^2), \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

definierten Fläche.

59. Seien r, z C^1-Funktionen, $r > 0$, dann wird durch

$$\phi : (a,b) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \; \phi(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, z(t))$$

falls diese Funktion injektiv ist eine um die z-Achse rotationssymmetrische 2-dimensionale Fläche F im $\mathbb{R}^3$ definiert. Zeigen Sie

$$\mathcal{H}^2(F) = 2\pi \int_{(a,b)} r(t) \sqrt{\dot{r}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \, dt.$$

60. Berechnen Sie

$$\int_A \exp\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right) d\lambda^2(x_1,x_2), \qquad A = \{(x_1,x_2) : \; x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, \; x_2 + 1 \leq x_1 \leq x_2 + 2\}$$

und

$$\int_B \sin x_1 \, d\lambda^2(x_1,x_2), \qquad B = \{(x_1,x_2) : \; x_1 x_2 \geq 0, \; x_1^2 + x_2^2 \leq \pi\}.$$

Der Schwerpunkt eines Objektes $A \subset \mathbb{R}^3$ mit Dichtefunktion $\rho(\mathbf{x})$ ist durch

$$\left(\int_A \rho(\mathbf{x}) \, d\lambda^3(\mathbf{x})\right)^{-1} \int_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rho(\mathbf{x}) \, d\lambda^3(\mathbf{x})$$

gegeben.

---

61. Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel ($\rho(\mathbf{x}) = 1$, $A = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, \; x_3 \geq 0\}$) mit Radius R mithilfe von Zylinderkoordianten.

62. Berechnen Sie den Schwerpunkt der inhomogenen Halbkugel ($\rho(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$, $A = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, \; x_3 \geq 0\}$) mit Radius R mithilfe von Kugelkoordinaten.