3.10.1 Satz (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit reellen oder komplexen Summanden.

- Gibt es eine feste Zahl $q \in [0,1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \text{für alle } n \geq N, \tag{3.15}$$

oder gilt die äquivalente Bedingung, dass $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist mit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

- Gibt es dagegen eine Teilfolge[12] $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Diese Teilfolgenbedingung ist sicher dann erfüllt, wenn $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben nicht beschränkt ist oder wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Beweis. Dass (3.15) zur Beschränktheit von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ samt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ äquivalent ist, haben wir in Fakta 3.4.6, 4, bemerkt. Mehr oder weniger „$\limsup_{n\to\infty} x_n < \xi \Leftrightarrow \exists q < \xi : x_n \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.", nur, dass hier $\xi := 1$ und $x_n := \sqrt[n]{|a_n|}$ ist durch q beschränkt. Die Reihenfolge ist hier verkehrt.
Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ folgt $|a_n| \leq q^n$ für alle $n \geq N$. ... weil die Potenzfunktion monoton steigt. Da die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ konvergiert, zeigt das Majorantenkriterium aus Lemma 3.9.8, dass auch $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$, und damit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Letztere Summe konvergiert auch, weil

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} q^n \wedge \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N-1} q^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=1}^{N-1} q^n + \sum_{n=N}^{\infty} q^n.$$

Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben nicht beschränkt, so haben wir in Beispiel 3.7.6 eine Teilfolge konstruiert, die $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \geq k$, $k \in \mathbb{N}$, erfüllt. „Dazu wählt man $n(1) \in \mathbb{N}$ so, dass $x_{n(1)} \geq 1$; und definiert $n(k+1) \in \mathbb{N}$ rekursiv so, dass $n(k+1) > n(k)$ und $x_{n(k+1)} \geq k+1$." Hier ist eben $x_n := \sqrt[n]{|a_n|}$, also $x_{n(k)} \geq k$. Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so folgt aus Fakta 3.4.6, 5, und Lemma 3.3.1, (i), dass $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > 1$, $k \in \mathbb{N}$, für eine gewisse Teilfolge von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$. „Ähnlich gilt $\limsup_{n\to\infty} x_n > \xi$ genau dann, wenn es ein $q > \xi$ gibt, sodass $x_n \geq q$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ...". Es gilt also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > \xi := 1$, also gibt es ein $q > 1$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \geq q > 1$. Weil $n(k) \geq k$, gilt auch $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > 1$.
Gibt es eine Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \geq 1$, so folgt $|a_{n(k)}| \geq 1 \ldots = 1^{n(k)}$. Also kann $(|a_{n(k)}|)_{k\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein. $|a_{n(k)}| \geq 1 \Rightarrow a_{n(k)} \geq 1 \vee (-a_{n(k)} \geq 1 \Leftrightarrow a_{n(k)} \leq -1)$, also $a_{n(k)} \notin (-1, 1)$. Wegen Proposition 3.9.7 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. OK. $\square$