10.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. X_n sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\limsup X_n$ deterministisch ist. Genauer gilt

$$\limsup_n X_n = \inf\{c : \sum_n \mathbb{P}(X_n > c) < \infty\}.$$

2. Süßer die Glockenkurven nie klingen...

   Woher der Name "Glockenkurve" für die Dichte einer Normalverteilung kommt, ist leicht zu erkennen, wenn man den Graphen aufzeichnet. Etwas deutlicher wird es mit der gemeinsamen Dichte von zwei unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen: erzeugen Sie ein möglichst weihnachtliches Bild des Graphen der Funktion

$$z = ce^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 \leq r^2$$

   mit geeigneten $c, r > 0$.

3. Glockenkurven continued: $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$ seien unabhängig. Dann ist $Z = X + Y \sim N(0, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

4. Im vorigen Beispiel sind $U_1 = X/\sigma_X$ und $U_2 = Y/\sigma_Y$ unabhängig standardnormalverteilt. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $Z = \sigma_X U_1 + \sigma_Y U_2$ und $W = sigma_Y U_1 - \sigma_X U_2$.

5. Die diskrete Faltung: X und Y seien unabhängig und diskret verteilt mit $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ und $p_Y(x) = \mathbb{P}(Y = x)$. Zeigen Sie

$$p_{X+Y}(z) = p_X * p_Y(z) = \sum_x p_X(x)p_Y(z - x).$$

6. X und Y seien unabhängig Poisson-verteilt: $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$. Zeigen Sie: $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.

7. Weißt do, wieviel' Sternlein stehen: wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der Himmel eindimensional ist (das haben viele Himmel so an sich), genauer die positive reelle Achse $[0, \infty[$. und dass die Sterne am Himmel punktförmig sind. Die Sterne sind am Himmel zufällig verteilt, und diese Verteilung soll folgende Eigenschaften haben (wir bezeichnen die Anzahl der Sterne im Intervall $[0, t[$ mit $N(t)$):

   - Unabhängigkeit der Zuwächse/Nachwirkungsfreiheit: für $0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ unabhängig.
   - Homogenität/Translationsinvarianz: $N(s+t) - N(s)$ hat dieselbe Verteilung wie $N(t)$ (die Verteilung der Anzahl der Sterne in einem Intervall hängt nur von der Länge des Intervalls ab).

- Proportionalität im Kleinen: $\mathbb{P}(N(t) > 0) = \lambda t + o(t)$ mit einer Konstanten $\lambda > 0$.
- Koinzidenzfreiheit: $\mathbb{P}(N(t) > 1) = o(t)$.

Zeigen Sie: $N(t) \sim P(\lambda t)$ (dazu können Sie der Reihe nach Differentialgleichungen für $p_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ aufstellen oder etwas wahrscheinlichkeitstheoretischer $N(t)$ als Summe der Zufallsvariablen $X_{nk} = N(kt/n) - N((k-1)t/n)$ darstellen und zeigen, dass die Summe der Variablen $Y_{nk} = \min(X_{nk}, 1)$ mit einer Wahrscheinlichkeit davon abweicht, die für $n \to \infty$ gegen 0 geht.