4 $\quad y' = 1 + y^2 \qquad y(0) = 1$

a) TDV: $F(y) = \int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \arctan y$

$$G(t) = t + C$$

$$y = \tan(t + C)$$

$$y(0) = \tan(C) = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow y = \tan\left(\frac{\pi}{6} + t\right)$$

$$\Rightarrow y \in C^1[0, \tfrac{\pi}{3}), \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{3}} y(t) = \infty$$

$$\Rightarrow T^+ = \frac{\pi}{3}$$

b) $\quad y' = e^{-t^2} + y^2, \quad y(0) = 1$

$e^{-t^2} + y^2$ löpschitzstetig in y $\Rightarrow$ eind. Lsg $\hat{y}$ ext.

$$\forall\, t \in (0, T^+): |\hat{y}(t)| = \left|1 + \int_0^t e^{-t^2} + \hat{y}^2(t)\, dt\right| \leq \left|1 + \int_0^t 1 + \hat{y}^2(t)\, dt\right|$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{6} + t\right) < \infty$$

5. $A^T = -A$, $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lok. Lip., $f(0) = 0$

$y^* \equiv 0$, $y' = Ay + f(y)$

a) $V(x) := \frac{|x|}{2} \Rightarrow \nabla V = x$

$A^T = -A \Rightarrow \forall x: (x, Ax) = -(Ax, x) \Rightarrow xAx = 0 \; \forall x$

$\Rightarrow \forall x: \quad \nabla V(x)(Ax + f(x)) = x f(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ V ist Lj., 0 striktes Minimum $\Rightarrow$ 0 stabil

b) V ist strikte Ljap., 0 striktes ~~Ruhelage~~ Minimum,

$x f(x) < 0 \; \forall x \in B_1 \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \neq 0$ auf $B_1 \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ 0 isolierte Ruhelage und s

$\Rightarrow$ 0 asympt. stabil

c) $V := -\frac{|x|}{2}$ erfüllt $\nabla V \cdot f < 0 \quad \forall x \in B_1 \setminus \{0\}$

und $V(0) = 0$

$\Rightarrow$ V strikte Ljf, $\forall \varepsilon > 0$: $V^{-1}(-\infty, 0) \cap B_\varepsilon(0) \neq 0$,

$V(0) = 0$, 0 isolierte Ruhelage

$\Rightarrow$ 0 instabil

Zusatz: $D(y \mapsto \overset{=:F}{Ay + f(y)})_{|y} = A + Df(y)$

$DF(0) = A + Df(0) =: \Xi$

Sei x EV von Ξ

$\Rightarrow \Xi x = Ax + f(x) - \|x\|_\infty \varepsilon(x)$

$\Rightarrow x \Xi x = x f(x) - \|x\|_\infty x \varepsilon(x) < 0$ für $\|x\|_\infty$ hinr. klein

$\Rightarrow$ b überträgt sich, c ebenso