1 (5P): Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f(s)\,ds$ für den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\quad \gamma(t) = (t^2, t^3)^t$ und das Vektorfeld $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^2 + y^2, axy - y^2)$.

Für welche Werte des Parameters a ist f wegunabhängig in $\mathbb{R}^2$?

Lsg.: Der Weg γ ist stetig differenzierbar und f ist stetig, also gilt nach Satz 11.2.4:

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \int_0^1 f\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t^4 + t^6, at^5 - t^6)\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt =$$
$$\int_0^1 2t^5 + 2t^7 + 3at^7 - 3t^8\,dt = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}a$$

Notwendig für Wegunabhängigkeit ist (11.22), also $\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \frac{\partial}{x}(axy-y^2)$ d.h. $2y = ay$, also $a = 2$. Da jeder rektifizierbare Weg in $\mathbb{R}^2$ in einem geeigneten Rechteck liegt folgt aus Satz 11.2.24, dass für $a = 2$ das Wegintegral tatsächlich wegunabhängig ist.

2 (5P). Für $0 < a$ bezeichne $\mathcal{T}_a$ die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen $\delta_x : f \mapsto f(x)$, $x \in [0,a]$ auf dem Raum $C[0,a]$ der stetigen Funktionen auf $[0,a]$.

Zeigen Sie, dass für $a, b > 0$ die topologischen Räume $(C[0,a], \mathcal{T}_a)$ und $(C[0,b], \mathcal{T}_b)$ homöomorph sind.

Lsg.: Durch $(\phi f)(x) := f(\frac{a}{b}x)$ wird eine Bijektion ϕ von $C[0,a]$ auf $C[0,b]$ gegeben (mit Umkehrabbildung $(\phi^{-1}g)(x) := g(\frac{b}{a}x)$). $\phi(f) \in C[0,b]$, denn $x \mapsto (\phi \circ f)(x)$ ist als Zusammensetzung der stetigen Funktionen f und $x \mapsto \frac{a}{b}x$ stetig.

ϕ ist nach Satz (12.5.1) genau dann stetig, wenn für alle $x \in [0,b]$ die Abbildung $\delta_x \circ \phi : (C([0,a], \mathcal{T}_a) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto (\delta_x \circ \phi)(f)$ stetig ist. Es gilt

$$(\delta_x \circ \phi)(f) = \delta_x(\phi(f)) = (\phi(f))(x) = f\left(\frac{a}{b}x\right) = \delta_{\frac{a}{b}x}(f).$$

Da die Abbildung $f \mapsto \delta_{\frac{a}{b}x}(f)$ nach Definition der Initialtopologie für alle $x \in [0,b]$ stetig von $(C[0,a], \mathcal{T}_a)$ nach $\mathbb{R}$ ist, ist ϕ also stetig.

Analog sieht man die Stetigkeit der Umkehrabbildung ϕ^{-1}.