```
1. (a) (i) Vn EN 1 mn > 0
(ii) Yn & N Y (Ax) KEN & 21 M disjunkt:
Mn ( \( \sum A_K ) = n | \( \sum A_K \cap \) \( \sum 1, ..., n \( 3 \) \)
Ση | Aκη [1,..., η ] = Σ μη (Aκ).
(iii) VA = 2( : u(A) = lim un(A) = lim n | A n E1,..., n3 |
= lim = 1 \( \frac{1}{n} \) \[ \frac{1}{n} \] = 1.
(iv) Betrachte (EK3)KEN
lim n | [ Ek} n [1,..., n] = 1 #
n→00 KEN
                                # 0 = [ lim n 1 Ek3 n E1,..., n 3]
                                         KEN 1700
(6) (i) V
\mu_n(ZA_K) = \frac{1}{n}|ZA_K| = \frac{1}{2n}|A_K| = \frac{1}{2\mu_n(A_K)}
(iii) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |A| \in \{0, \infty\}
(IV) ...:
 lim n [ [ EK3] = 00 # 0 = [ lim n [ EK3].
N-200 KEN
                               KEN N >00
```

```
Z. ag: 26 o- Algebra, u endl. Inhalt auf 21,
2( ) ( \( \sigma\).
 Zz: u Kann zu Inhalt auf 2(2(2(0 EC3) = 2/8
 tortagesetzt werden.
 Ww: 218 = E(And) u (B(C): A, B & 213, also
 VM € 2(0 ] A, B ∈ 2( : M = (Anc) 0 (B \c).
 Wa'hle a (M) := a ((Anc) 6 (B(C)) !=
 M(Anc) + M(B) - M(Bnc), Bnc wobei
 M (Anc) = sup EM(E) : 2( ) E = Anc3, aber
 u(B) = u(B \cap B) = u(B).
 Wohldefiniert Seien A, A, B, B & 21, sodass
 (Anc) (BIC) = M = (Anc) (B1C).
 22: u(Anc) + u(B(C) = u(Anc) + u(B(C).
 Ww: D = C O C , also , o" =
   Anc = A'nc
   Bn C = B'n C = B\(BnC) = B'\(B'nC).
 Fortsetzung: Zz: VNE2(: a(N) = u(N).
 Ww : 3 Ã, B := N : (Ãnc) i (BIC) = N
 → ~(N)= ~(Anc) + ~(N) - ~(Bnc) = ~(N).
 Additivitàt : o Bol A. Betrachte 610 B den Induktionsanfang.
 Seien A, B E 26 disjunkt.
```

n(A)+n(B)= sup & u(E): 2(3E & A 3 + sup & u(E): 2(3E & B } Ww AnB = Ø TEE AUB JE, SA, E, SB E F E, UEZ. = sup & u(Ex) + u(Ez) : E = A = A i B 3 + sup & u(E1) + u(E2) : E S B S B i A 3 = sup { u(E1) + u(E2) : E = A i B 3 = u(A u B).

3. Gg: u endl. Maß auf R &- Ring. (a) Zz u beschränkt. Angenommen, u ist unbeschränkt, dh. VC ∈ R JA ∈ R: u(A) ≥ C. Sei Ao E R Geliebia und VIEN: A: = B: \ Z k= b Ak wobei Bi so sei, dass u(Bi) = Z k=0 u(Ax) +1. Also muss wegen der Subadditivität Viel $A_{i} = B_{i} \setminus \sum_{k=0}^{i-1} A_{k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{i} A_{k} = B_{i} \cup \sum_{k=0}^{i-1} A_{k} \geq B_{i}$ \Rightarrow $\mu(B_i) \leq \mu(\Sigma A_k)$ => M(A;) > M(B;) - M(\(\sum A_K) > 1. Also musste $\mu(\Sigma A;) = \Sigma \mu(A;) = \Sigma \Lambda = \infty$ ien ien ien ien (3) Zz u kann zum endl. Maß u auf der erzeugten a - Algebra 2(8 (R) = 2(8 fortgesetzt werden. Wegen Autgabe 6. und (a), tolat μ(D) = sup & μ(A) · A e R 3 < 00. WW: 210 = EA ESZ: AERVAGER3.

 $\tilde{\mu}(A) := \{ \mu(A), \text{ wenn } A \in \mathbb{R} \}$ Wähle also (12) - u(A°), sonst Wohldefiniert : V MaB: 22: 4 3 0 V Zz' ju d-additiv. ZZ: A E R E 26, B E 26 7 A B E R. BdA. B & R ⇒ B € R. AnB = AlB & R. Sei (An)noN E 26 disjonkt. oBdA. ∃ieN A; & R → A; E E R. Fall I : "3!" $\tilde{u}(\sum A_n) = \tilde{u}(\sum A_n \cup A_i) = \sum \tilde{u}(A_n) + \tilde{u}(A_i)$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}$ = Z in (An). Fall II : Bi, j & N, i # j : Ai, Aj & R = Ai, Aj & R. Ww. A; n A; = Ø = A; = A; $\Rightarrow A_i \cap A_j \in \mathbb{Z} A_i$ $\in \mathcal{U}_{\partial} \quad \in \mathbb{R}$ Additivitat Ww: A ⊆ B = ~ ~ (B) = ~ (A ∪ B \ A) = ~ (A) + ~ (B \ A) $\Rightarrow \ddot{a}(B|A) = \ddot{a}(B) - \ddot{a}(A).$

	3	pe	e	1	1	4,	B	6		2(d		di	Sic	ını	kt.	(מני	d		o E	Bdi	A .		B	4	(R						
	1	ũ (A)	+	i	(B)) :	- ,	ũ	(1	A)) .	+	ũ	(_	2)	-	û	(B	c .)	=								
	j	1 1	()	2)		(,	ũ	(1	3 8)	-	î	(A.))											j	ĭ (В	Ü	A)		
								,	ũ	(1	30	1	A.)	=	,						٥												
	-	50	ns	4		В	-		(F	3 0	+	1)	\ \	A	e					20	d \	R	,	1	Nei	1	•							
																		•																
																							i a											
																						1												
	1 2 1 2 1																																	
														7.			-					1					W. The							
					7																													
1						12																												
																																	3	
									5								2 4																2	
				31																														
-		-T																																

4. Seien An., An & R Ring mit u Inhalt, und Vi = 1,..., n: M(A;) < ∞, dann $\mu(\overset{n}{O}A;) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mu(\overset{n}{O}A;).$ $1 \leq i \leq 1$ $1 \leq i \leq 1$ n(AuB)= u(A)+u(B)+u(AnB)= 0.9. u(A v B v C) = u(A) + u(B) + u(C) (u(AnB) + u(BnC) + u(CnA)) + u(AnBnC)

```
5. u(ABB) = u(AB) + u(BA)
                 Al(AnB) Bl(BnA)
u(A) + u(B) - Zu(AnB).
M(A O B O C) = M((A O B)(C) + M(C)(A O B)) =
u(ABB) - Zu(Cn(ABB)) + u(C)
       M(Cn (AVB)) + M(Cn(BIA)) =
      m ((CAA)B) + m ((CAB)(A) =
     · u(CnA) + u(CnB) - Zu(AnBnC
    u(A) + u(B) + u(C) -
     Z (u (AnB) + u(BnC) + u (CnA)) +
     Gu(AnBnC).
\mu(\triangle A;) = \sum (-z)^{|x|-1}
                    u ( ( A; )
          I = E1, ... , 113
           I = Ø
```

)

6. Ga: R & - Ring Obex II, u Maß aut R. Zz' ~ (A) = sup Eu(B) B E R, B = A 3 MaB auf 21 (R). Ww: 21 (R) = EAGIL 'AERVAGER] Sei (An)nen e 21 eine disjunkte Folge. oBdA. BieN : A; € Rd = A; c € Rd Fall I . . 31" ũ (Σ Ax) = sup ξμ(B) · R ∋ B ⊆ Σ Ax i A; 3 = sup & u (B,) + u (B2) R = B = B, U B2 B₁ $\subseteq \sum A_k$, B₂ $\subseteq A_i 3 = k \in N \setminus E_i 3$ sup E M (B1) + M (B2) · R 3 B ⊆ ∑ A; 3 + Sup & M (B1) + M (B2) + R1 3 B & A; 3 KENIE3 = $\tilde{u}(\Sigma A_{\kappa}) + \tilde{u}(A_{i}) = \sum_{\kappa \in \mathbb{N}} \tilde{u}(A_{\kappa}).$ Fall II : Avalog zo Fall II aus 3.

) .

)

)