2. Übung zur Komplexen Analysis

1. Berechnen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen:

$$\sum \left(\frac{\log n}{n}\right)^n i^n z^n, \quad \sum \frac{n!}{\log n^n} z^{2n}, \quad \sum \frac{n!}{n^{n-1}} (z-3i)^n$$

2. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum \frac{z^n}{n}$ für $z = 1$ divergiert, aber für alle $z \neq 1$ mit $|z| = 1$ konvergiert.

   Hinweis: Schätzen Sie $(1-z)\sum_{n=k}^{m} \frac{z^n}{n}$ ab.

3. (i) Berechnen Sie $\int_\gamma z\cos(z^2)\,dz$, wenn
      (1) γ die Verbindungsstrecke von i und $-i+2$ ist.
      (2) γ die Punkte 0 und $1+i$ entlang der Kurve $y = x^2$ verbindet.

   (ii) Berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ längs der Streckenzge $0 \to 1 \to 1+i$, $0 \to i \to 1+i$, $0 \to 1+i$.

4. Es sei $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ und } \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1\}$. Konstruieren Sie einen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma([a,b]) = \partial G$ und berechnen Sie $\int_\gamma \operatorname{Im} z\,dz$ und $\int_\gamma \operatorname{Re} z\,dz$. Berechnen und interpretieren Sie $\int_\gamma \bar{z}\,dz$.
   Hinweis: Verwenden Sie die *Leibnizsche Sektorformel*:

   Es sei F ein Flächenstück in der Ebene, das von einer einfach geschlossenen Jordankurve mit stückweise stetig differenzierbarer Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]$, berandet wird. Dann gilt für den Flächeninhalt $I(F)$ von F:

$$I(F) = \frac{1}{2}\left|\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))dt\right|.$$

5. Berechnen Sie $\int\limits_\gamma \frac{1}{(z-w)^2}dw$ mit $\gamma(t) = a + r\,e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$, $z \notin \operatorname{Bild}(\gamma)$, indem Sie den Integranden in eine Potenzreihe entwickeln.

6. Berechnen Sie für $b \in \mathbb{C}$:

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{1}{z^2+b^2}\,dz$$

   mit $r > |b|$ durch Partialbruchzerlegung und Anwendung der Cauchyschen Integralformel.

7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $r, c > 0$. Für die ganze Funktion f gelte $|f(z)| \leq c\,|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Man zeige, dass dann f eine Polynom höchstens n-ten Grades ist.

8. Sei f eine ganze nichtkonstante Funktion. Man beweise, dass die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.