Übungen zu Analysis 3, 11. Übung 13. 1. 2020 (letzte Übung)

89. Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ ax - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwachen Abelitungen.

Zeigen Sie: Für $u(\mathbf{x}) = \log|\mathbf{x}|$ und $v_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^2}$ ist v_i die schwache Ableitung $D^i u$ in $\mathbb{R}^n$.

90. Sind $u, v \in W^{1.2}(\Omega)$, so ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $D_i(uv) = D_i uv + uD_i v$.

91. Verschwindet für eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die schwache Ableitung der Ordnung n, so ist f ein Polynom der Ordnung $n-1$ f.ü.

Hinw.: Zeigen Sie, dass jede Testfunktion als Summe der n-ten Ableitung einer Testfunktion und einer Linearkombination der Funktionen $\psi_0^{(l)}$, $l < n$, ψ_0 wie im Beweis von 6.1.4 dargestellt werden kann und berechnen Sie $\int x^k \xi^{(l)}(x)\, dx$ für Testfunktionen ξ und $k \leq l$.

92. Zeigen Sie, dass aus der Existenz der schwachen Ableitung der Ordnung 2 i.A. für $n \geq 2$ nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1 folgt.

Hinw.: Betrachten Sie eine Funktion $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Zeigen Sie, dass für $n = 1$ aus der Existenz einer schwachen k-ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen l-ter Ordnung für $l < k$ folgt.

93. Zeigen Sie, dass $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ genau dann in $W^{m,p}(\Omega)$ liegt, wenn die Abbildungen $\varphi \mapsto \int_\Omega f D^\alpha \varphi \, d\lambda^n$ für $|\alpha| \leq m$ stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der L^q-Norm nach $\mathbb{R}$ ist.

Hinw.: Verwenden Sie dass der Dualraum von L^p der L^q ist, d..h jede beschränkte lineare Abbildung von einem dichten Teilraum von L^p nach $\mathbb{C}$ ist von der Form $\varphi \mapsto \int \varphi g$ mit $g \in L^q$.

94. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Dichtepunkt* einer messbaren Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$, wenn x Lebesguepunkt der Funktion $\mathbb{1}_{E \cup \{x\}}$ ist.

Zeigen Sie: Ist jeder Punkt $x \in [0,1]^n$ ein Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^n(E) \geq 1$.

Gibt es eine messbare Teilmenge E von $\mathbb{R}$ für die $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge der Dichtepunkte von E ist?

95. Ist X ein Fixpunktraum und Y ein Retrakt von X, so ist Y ein Fixpunktraum.

96. Zeigen Sie (Satz v. Perron-Frobenius): Jede $n \times n$- Matrix $A = (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} \geq 0$ für $1 \leq i, j \leq n$ hat einen Eigenwert $\lambda \geq 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$.

    Hinw.: Betrachten Sie die Abbildung $\zeta: \ x \to \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax$ auf dem Simplex $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

97. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 &= x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{4} &= x_2 \end{aligned}$$

    eine Lösung besitzt.

98. Zeigen Sie dass es eine eindeutige Lösung u der Gleichung

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x)$$

    in $C[-1,1]$ gibt.