Maß 1, Übung 1

March 2, 2020

1 Aufgabe 4

Lemma 1. *Wenn* $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \mathfrak{T}_i$ *ist ein Sigmaring über* Ω*, dann ist auch*

$$\mathfrak{T} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i \in \mathfrak{T}_i \right\}$$

ein Sigmaring.

Beweis. Wir wissen bereits aus dem Grill-Skriputm von Satz 2.4, dass die Aussage für den Fall $n = 2$ gültig ist. Nun können wir

$$\mathfrak{T} = \left\{ A_n \cap B_{n-1} \mid A_n \in \mathfrak{T}_n \land B_{n-1} \in \left\{ \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i \in \mathfrak{T}_i \right\} \right\}$$

schreiben und eralten mit Induktion sofort unsere Aussage. $\square$

2 Aufgabe 5

Lemma 2. *Wenn* $\mathfrak{S}$ *eine Sigmaalgebra über der Grundmenge* Ω *ist und* $C \subseteq \Omega$ *dann ist*

$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\}) = \{(A \cap C) \cup (B \cap C^C) \mid A, B \in \mathfrak{S}\}$$

Beweis. Zuerst definieren wir eine gute Menge

$$M := \{U \subseteq \Omega \mid \exists A, B \in \mathfrak{S} : U = (A \cap C) \cup (B \cap C^C)\}.$$

Wir wollen nun $M \supseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\})$ zeigen. Dafür wählen wir zuerst $U \in \mathfrak{S} \cup \{C\}$ beliebig. Nun gibt es ein $V \in \mathfrak{S} : U = V \cup C$ und es gilt

$$\begin{aligned}(\Omega \cap C) \cup (V \cap C^C) &= C \cup (V \cap C^C) = (C \cup V) \cap (C \cup C^C) \\ &= (C \cup V) \cap \Omega = U.\end{aligned}$$

Man erkennt also, dass $U \in M$ ist und damit $\mathfrak{S} \cup \{C\} \subseteq M$. Nun wollen wir noch zeigen, dass M eine σ-Algebra ist. Dafür sei zuerst bemerkt, dass $\Omega = (\Omega \cap C) \cup (\Omega \cap C^C) \in M$. Wählen wir als nächstes $U = (U_1 \cap C) \cup (U_2 \cap C^C) \in M$ beliegbig, wobei mit $U_1, U_2 \in \mathfrak{S}$ natürlich auch $U_1^C, U_2^C \in \mathfrak{S}$, so ist auch

$$\begin{aligned}U^C &= ((U_1 \cap C) \cup (U_2 \cap C^C))^C = (U_1^C \cup C^C) \cap (U_2^C \cup C) \\ &= (U_1^C \cap U_2^C) \cup (U_1^C \cap C) \cup (U_2^C \cap C^C) \cup (C \cap C^C) \\ &= (U_1^C \cap C) \cup (U_2^C \cap C^C) \in M.\end{aligned}$$

Wählen wir zuletzt noch eine Folge $\forall n \in \mathbb{N} : (U_n) \in M$, wobei $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = (U_{n_1} \cap C) \cup (U_{n_2} \cap C^C)$ mit $U_{n_1}, U_{n_2} \in \mathfrak{S}$, so ist

$$\begin{aligned}\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U_{n_1} \cap C) \cup (U_{n_2} \cap C^C)) \\ &= \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{n_1} \right) \cap C \right) \cup \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{n_2} \right) \cap C^C \right) \in M,\end{aligned}$$

weil natürlich $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n_1}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n_2} \in \mathfrak{S}$. Nun haben wir nachgewiesen, dass M eine σ-Algebra ist, also muss $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\}) \subseteq M$ gelten. Damit haben wir auch schon die erste Teilmengeninklusion unseres Lemmas, nämlich $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\}) \subseteq \{(A \cap C) \cup (B \cap C^C) \mid A, B \in \mathfrak{S}\}$, gezeigt.
Sind $A, B \in \mathfrak{S}$, dann ist die Menge $(A \cap C) \cup (B \cap C^C) \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\})$, weil $A, B, C \in \mathfrak{S} \cup \{C\}$ und damit auch $C^C \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\})$. Folglich gilt $M \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\})$. □

3 Aufgabe 6

Lemma 3. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Wenn $\mathfrak{R}$ ein Ring ist, dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \{A \subset \Omega \mid A \in \mathfrak{R} \vee A^C \in \mathfrak{R}\}$.

(b) Wenn $\mathfrak{R}$ ein σ-Ring ist, dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ eine σ-Algerba.

Beweis. Um (a) zu beweisen weist man nach, dass $M := \{A \subset \Omega \mid A \in \mathfrak{R} \vee A^C \in \mathfrak{R}\}$ eine Algebra ist.
Für den Beweis von (b) weist man dann nach, dass M eine σ-Algebra ist. □

4 Aufgabe 7

Lemma 4. *Wenn $(\mathfrak{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nichtfallende Folge von Ringen über derselben Grundmenge Ω ist, dann ist auch $\mathfrak{R} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{R}_n$ ein Ring. Die analoge Aussage für σ-Ringe gilt im Allgemeinen nicht.*

Beweis. Um den ersten Teil zu beweisen muss man einfach nachrechnen, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring ist.
Für den zweiten Teil definieren wir eine Folge von σ-Ringen $\mathfrak{R}_n := 2^{\{1,\ldots,n\}}$, wobei $\mathfrak{R} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{R}_n$ sein soll. Nun ist $\forall n \in \mathbb{N} : \{n\} \in \mathfrak{R}$, aber $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \notin \mathfrak{R}$, womit $\mathfrak{R}$ kein σ-Ring sein kann. □