Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 01 – Ein Trennungssatz von Hahn-Banach"
"Lecture 02 – Konsequenzen des HB Trennungssatzes"

---

02 / 1: Sei X ein normierter Raum, M ein linearer Teilraum von X, und $f : M \to \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $F : X \to \mathbb{C}$ mit $\|F\| = \|f\|$. Im allgemeinen muss diese nicht eindeutig sein.

Finde ein Beispiel von X, M, f wie oben, wo es tatsächlich mehrere normerhaltende Fortsetzungen gibt.

Hinweis. Man erinnere sich was $(\ell^1)'$ ist.

02 / 2:* Ein normierter Raum Y heißt strikt konvex, wenn gilt

$$x, y \in Y, \|x\| = \|y\| = 1, \ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Sei nun X ein normierter Raum, M ein linearer Teilraum von X, und $f : M \to \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional. Zeige: Ist X' strikt konvex, so hat f genau eine normerhaltende Fortsetzung.

02 / 3: Betrachte den Raum $L^2(-1,1)$ (der L^2-Raum bezüglich dem Lebesgue Maß auf $(-1,1)$), und die beiden konvexen Teilmengen

$$A := \{f \in L^2(-1,1) \colon \ f \text{ stetig}, f(0) = 0\}, \quad B := \{f \in L^2(-1,1) \colon \ f \text{ stetig}, f(0) = 1\}.$$

Existiert $\phi \in L^2(-1,1)'$ mit $\forall a \in A, b \in B.\ \phi(a) < \phi(b)$? Falls ja, finde ein solches Funktional. Falls nein, zeige dass es keines gibt.