3. Übungstest Analysis 2

28.5.2010

Gruppe A 1. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1,1,1)$ durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 - 2xy + z^2 \\ -2x + y^2 + z^3 \end{pmatrix}$$

implizit eindeutige Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ definiert werden, die

$$F(x,y(x),z(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen.

Berechnen Sie die Ableitungen $y'(1)$ und $z'(1)$.

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen, Satz 10.2.4, ist für die eindeutige Existenz von $y(x)$ und $z(x)$ lokal um $(1,1,1)$ Folgendes zu zeigen:

(a) $F(1,1,1) = 0$. Klar durch Einsetzen.

(b) $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Wähle $D = \mathbb{R}^3$.

(c) $F \in C^1$. Klar, weil F ein Polynom ist.

(d) Die Untermatrix $dF_2(x,y,z)$ von $dF(x,y,z)$, die die Ableitungen nach y und z beinhaltet, ist an $(1,1,1)$ invertierbar. Es gilt

$$dF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y & -2x & 2z \\ -2 & 2y & 3z^2. \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$dF_2(1,1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

und $\det dF_2(1,1,1) = -10 \neq 0$. Damit folgt die Behauptung.

Es folgt also die eindeutige Existenz der Lösung $(x, y(x), z(z))$ lokal um $(1,1,1)$.

Zur Berechnung der Ableitungen $y'(1)$ und $z'(1)$ verwenden wir Punkt (iii) des Hauptsatzes. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x}(1) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1) \end{pmatrix} = -dF_2(1,1,1)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = -\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{1}{5}, \end{pmatrix}$$

also $y'(1) = \frac{7}{10}$ und $z'(1) = \frac{1}{5}$.

2. Bestimmen Sie die lokalen Maxima und die lokalen Minima der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 7y.$$

Der Definitionsbereich ist offen und die Funktion als Polynom stetig differenzierbar, daher müssen alle lokalen Extrema auch Nullstellen der Ableitung sein. Differenzieren liefert

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y & x+4y+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in x und y; die eindeutige Lösung lautet $x_* = 1$, $y_* = -2$. Da f auch zweimal stetig differenzierbar ist, bilden wir die Hesse-Matrix und erhalten

$$d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$d^2f(x,y)$ ist konstant und für jedes (x,y) positiv definit (zum Beispiel nach dem Hauptminorenkriterium: die Hauptminoren sind 2 und 7), daher ist (x_*, y_*) ein lokales Minimum.

Ein alternatives Argument verläuft wie folgt: Wir ergänzen f auf vollständige Quadrate. Es gilt

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 7y = (x + y/2)^2 + \frac{7}{4}(y+2)^2 - 7.$$

Es folgt, dass $(x_*, y_*) = (1, -2)$ das eindeutige globale Minimum ist.

Gruppe B 1. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1,1,0)$ durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^3 + 2z \\ 2x - 2y + z^3 \end{pmatrix}$$

implizit eindeutige Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ definiert werden, die

$$F(x, y(x), z(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen.

Berechnen Sie die Ableitungen $y'(1)$ und $z'(1)$.

Die Argumentation für den ersten Teil folgt genau der in Gruppe A. Für die Ableitungen ergibt sich $y'(1) = 1$, $z'(1) = 1/2$.

2. Bestimmen Sie die lokalen Maxima und die lokalen Minima der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2y + 3.$$

Lösung: $(x_*, y_*) = (-2, 1)$, lokales Minimum.