4.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2019

1. μ und ν seien Maße auf dem Ring $\mathfrak{R}$. Zeigen Sie
   (a) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$,
   (b) $\mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*+\nu^*}$.

2. Welche der folgenden Funktionen sind äußere Maße?
   (a) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$
   (b) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für card}(A) <= \aleph_0, \\ \infty & \text{für card}(A) > \aleph_0 \end{cases}.$
   (c) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| < \infty, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$
   (d) $\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{|A|+10} & \text{falls } |A| < \infty, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

   Bestimmen Sie zu den äußeren Maßen jeweils die Systeme der messbaren Mengen.

3. Auf dem Semiring
$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$$
   über $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ ist durch $\mu(\emptyset) = \mu(\{1,2\}) = 0$, $\mu(\{3,4\}) = 2$, $\mu(\{5\}) = 1$ ein Maß definiert. Bestimmen Sie seine Fortsetzung auf den erzeugten Ring, das erzeugte äußere Maß μ^* und das System der μ^*-messbaren Mengen.

4. $\mathfrak{C}$ sei ein beliebiges Mengensystem mit $\emptyset \in \mathfrak{C}$, $f : \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion mit $f(\emptyset) = 0$.

   Zeigen Sie, dass
$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathfrak{C}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\}$$
   eine äußere Maßfunktion ist.

5. $(\mu_i^*, i \in I)$ sei eine Familie von äußeren Maßen. Zeigen Sie, dass
$$\mu^* = \sup_{i \in I} \mu_i^*$$
   ebenfalls ein äußeres Maß ist.

6. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0, 0 < \alpha \le 1$ setzen wir
$$d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\},$$
$$\mu^*_{\alpha,\epsilon}(A) = \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} d(B_n)^\alpha : B_n \subseteq \mathbb{R}, d(B_n) < \epsilon, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\}.$$

$$\mu_\alpha^*(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mu_{\alpha,\epsilon}^*(A) = \sup_{\epsilon > 0} \mu_{\alpha,\epsilon}^*(A).$$

Zeigen Sie, dass dadurch äußere Maße definiert sind, und dass für $\alpha < \beta$ aus $\mu_\alpha^*(A) < \infty$ $\mu_\beta^*(A) = 0$ folgt. Die zugehörigen Maße μ_α heißen die α-dimensionalen Hausdorffmaße. Sie sind für $\alpha < 1$ nicht sigmaendlich.

7. Ω_1 und Ω_2 seien zwei nichtleere Mengen und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Funktion.

   (a) Zeigen Sie für $A \subseteq \Omega_2$: $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(\Omega_1)$.

   (b) μ_2^* sei ein äußeres Maß über Ω_2. Zeigen Sie, dass durch

   $$\mu_1^*(A) = \mu_2^*(f(A))$$

   ein äußeres Maß über Ω_1 definiert wird, und dass $f^{-1}(A)$ μ_1^*-messbar ist, wenn A μ_2^*-messbar ist.