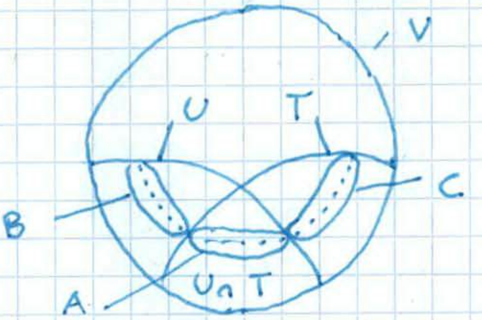
Satz 2.8.9 (Dimensionssatz) Es seien U und T endlichdimensionale Unterräume eines Vektorraumes V. Dann gilt

$$\dim(U \cap T) + \dim(U + T) = \dim U + \dim T.$$

Beweis. Es gibt eine Basis A des Unterraumes $U \cap T$. $U \cap T$ ist, laut Satz 2.3.8, ein Unterraum und hat daher, laut Satz 2.5.6, eine Basis. Wir können A durch l.u. Mengen Mengen $B \subset U \setminus T$ bzw. $C \subset T \setminus U$ zu Basen von U bzw. T verlängern. ... laut Basisergänzungssatz 2.5.8., weil $U \cap T$ ein UR von U bzw. T ist.



Nach dem Beweis von Satz 2.8.7 haben wir

$$U = (U \cap T) \oplus [B],\ T = (U \cap T) \oplus [C],\ U + T = [A \cup B \cup C]..$$

Erstere beiden Gleichheiten folgen tatsächlich aus jenem Beweis. Weil $[A \cup B] = U$, $[A \cup C] = T$, folgt letzteres aus

$$\sum_{m \in A\cup B} x_m m + \sum_{m \in A \cup C} x_m m = \sum_{m \in A} x'_m m + \sum_{m \in B} x_m m + \sum_{m \in C} x_m m.$$

Jede Linearkombination von $A \cup B \cup C$ mit Wert $\mathcal{O}$ können wir auf die Form $\mathcal{O} = a + b + c$ bringen, wobei a eine Linearkombination von A ist usw. ...

Dann folgt $-c = a + b \in U$, was $c \in U \cap [C] = U \cap T \cap [C] = \{\mathcal{O}\}$ ergibt. $-c, c \in U$ und $c \in [C]$ laut Definition von c. Weil $A \cup C$ Basis von T ist, gilt $[C] \subset T \Rightarrow c \in T$, also $U \cap [C] \subset U \cap T \cap [C]$ und $U \supset U \cap T \Rightarrow U \cap [C] \supset U \cap T \cap [C]$. $(U \cap T) \oplus [C]$, laut oben, also gilt auch letztere Gleichheit. Analog folgt $b = \mathcal{O}$ und damit schließlich $a = \mathcal{O}$. $b = \mathcal{O}$ folgt tatsächlich analog. Dann $a + b + c = a + \mathcal{O} + \mathcal{O} = \mathcal{O}$. Da jede der Mengen A, B, C l.u. ist, liegt insgesamt eine triviale Linearkombination von $A \cup B \cup C$ vor. Laut Satz 2.4.5, sind a, b, c trivial, also auch $a + b + c = \mathcal{O}$, weil a, b, c beliebig waren. Nach Satz 2.4.5 ist $A \cup B \cup C$ l.u., also nicht nur ein Erzeugendensystem sondern sogar eine Basis von $U + T$. Letzteres steht oben bei "...", "...", "...". Aus

$$\dim(U \cap T) + \dim(U + T) = \#A + (\#A + \#B + \#C),$$
$$\dim U + \dim T = (\#A + \#B) + (\#A + \#C)$$

ergibt sich nun die Gültigkeit des Dimensionssatzes. A ist eine Basis von $U \cap T$ und A, B, C sind, laut Konstruktion disjunkt (siehe Zeichnung oben), und $A \dot\cup B \dot\cup C$ ja jetzt offiziell eine Basis von $U + T$. $A \dot\cup B$ und $A \dot\cup C$ sind, laut Konstruktion, Basen von U bzw. T. $\square$