A 3.4.4 Löse einige der Aufgaben aus A 3.3.2 auf folgende Weise: Bestimme zuerst die Koordinatenmatrix $\langle E^*, f(E)\rangle$ jener linearen Abbildung g, welche die drei Angabevektoren in die kanonische Basis E überführt, sodann die Koordinatenmatrix $\langle E^*, h(E)\rangle$ jener linearen Abbildung h, welche die kanonische Basis in die gegebenen Bildvektoren überführt, und verwende schlussendlich diese beiden Matrizen, um die Koordinatenmatrix $\langle E^*, (h\circ g)(E)\rangle$ zu berechnen.

$$\begin{array}{ccccccc}
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \mapsto &
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \mapsto &
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hline -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] & \mapsto &
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \langle E^*, g(E)\rangle \end{matrix} \\
-2,\ -2 & & +2,\ \times(-1) & & -2,\ + & &
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \langle E^*, h(E)\rangle \end{matrix}, \text{ also ist}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrix} \\ \text{von } h}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrix} \\ \text{von } g}} = \left.\begin{bmatrix} -11 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right\} \langle E^*, (h\circ g)(E)\rangle$$

A 3.5.4 Es seien V ein Vektorraum und $f \in L(V,V)$ eine nilpotente Abbildung, d.h. für mindestens ein $k \in \mathbb{N}^\times$ ist f^k die Nullabbildung. Dabei sind die Potenzen von f rekursiv durch $f^0 := id_V$ und $f^m := f \circ f^{m-1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erklärt. Gleiches gilt sinngemäß für Matrizen aus $K^{n \times n}$.

(a) Zeige: Wird zusätzlich $\dim V = n < \infty$ vorausgesetzt, so gilt $\operatorname{def} f \geq n/k$.

(b) Gib zwei Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ an, die nilpotente lineare Abbildungen $\mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$ bestimmen (nilpotente Matrizen). Als Zusatzbedingung seien $A_1 \neq (0)$, $A_1^2 = (0)$ bzw. $A_2^2 \neq (0)$ aufgestellt.

Beweis (a): $\operatorname{rg} f = \dim f(V)$; $\operatorname{def} f = \dim \ker f$;
Laut Voraussetzung und der Definition von ker, gilt

$$f^k(V) = 0 \Rightarrow \dim f^k(V) = 0 = \dim V - \operatorname{def} f^k$$

Sei nun $W := f^m(V)$ ein Unterraum von V, so gilt

$$\dim W = \dim \ker f|_W + \dim f(W) \wedge \dim \ker f|_W \leq \dim \ker f$$
$$\Rightarrow \dim W \leq \dim \ker f + \dim f(W)$$
$$\Rightarrow \dim f^m(V) \leq \dim \ker f + \dim f^{m+1}(V) \qquad (1)$$
$$\Rightarrow \dim f^m(V) - \dim \ker f \leq \dim f^{m+1}(V). \qquad (2)$$

Weiters gilt also

$$\operatorname{def} f = \dim V - \dim f(V) \overset{(1)}{\geq} \dim V - (\operatorname{def} f + \dim f^2(V)).$$

Wir induzieren

IV: $m \cdot \operatorname{def} f \geq n - \dim f^m(V)$

IA: $\operatorname{def} f \geq n - \dim f(V) \Rightarrow \operatorname{def} f + \operatorname{rg} f \geq \dim V = n$

IS: $m \cdot \operatorname{def} f \geq n - \dim f^m(V) \Leftrightarrow$

$$(m+1) \operatorname{def} f \geq n - \dim f^m(V) + \operatorname{def} f \Leftrightarrow$$

$$(m+1) \operatorname{def} f \geq n - (\dim f^m(V) + \operatorname{def} f) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$(m+1) \operatorname{def} f \geq n - f^{m+1}(V).$$

$$\Rightarrow k \cdot \operatorname{def} f \geq n - \underbrace{f^k(V)}_{0} = n \Rightarrow \operatorname{def} f \geq n/k.$$ □

Die Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sind nihilpotent:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_1^2 = A_2^2 = \mathcal{O};$$

A 3.5.5 Durch die folgenden Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ sind lineare Abbildungen f_i aus $L(\mathbb{R}^{5\times 1}, \mathbb{R}^{5\times 1})$ festgelegt. Welche davon sind Involutionen, Projektionen ($f_i \circ f_i = f_i$) bzw. nilpotente Abbildungen?

(a) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$, (b) $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B}$, (c) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{C}$, (d) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{D}$

$A^2 = A \Rightarrow$ A ist eine Projektion;

$B^2 = \mathcal{O} \Rightarrow$ B ist nihilpotent;

$C^2 = E \Rightarrow$ C ist involut;

$D^2 = D \Rightarrow$ D ist eine Projektion;

A 3.5.8 Es seien V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und (b_1, b_2) Basis von V.

(a) Bestimme alle (und nicht nur einige) Abbildungen $f \in L(V,V)$, welche die Menge $\{b_1, b_2, -b_1, -b_2\}$ bijektiv auf sich abbilden. Lege die gesuchten Abbildungen durch ihre Koordinatenmatrix $\langle B^*, f(B)\rangle$ fest.

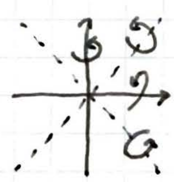
(b) Veranschauliche die Ergebnisse aus (a) in einem zweidimensionalen Unterraum von V_0.

(c) Bilden die Abbildungen aus (a) eine Untergruppe von $GL(V)$?

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline b_1 & -b_2 & -b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline -b_1 & b_2 & b_1 & -b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline -b_1 & -b_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline b_2 & b_1 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline -b_2 & b_1 & b_2 & -b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline b_2 & b_1 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 & -b_2 \\ \hline -b_2 & -b_1 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

Veranschaulichung im $\mathbb{R}$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:



Untergruppen-Kriterium: $\neq \emptyset$ ✓;
Inverse existieren, wegen Bijektivität;
Bild- und Wertemenge sind gleich, also Verknüpfungen abgeschlossen.

A 3.5.11 Es seien V ein 4-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, B eine Basis von V und $f \in L(V,V)$ gegeben durch seine Koordinatenmatrix

$$\langle B^*, f(B) \rangle = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Zeige:

(a) Für alle $x \in V \setminus \{0\}$ ist $U_x := [\{x, f(x)\}]$ zweidimensional.

(b) $\{U_x \setminus \{0\} \mid x \in V \setminus \{0\}\}$ ist eine Partition von $V \setminus \{0\}$.

Hinweis: Betrachte $f \circ f$.

Beweis (a): U_x ist zweidimensional, weil $\{x, f(x)\}$ l.u.:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \langle B^*, f(B) \rangle$$

Wären $\{x, f(x)\}$ l.a., so

$\exists a, b \in \mathbb{R}: x \cdot a + f(x) \cdot b = 0$

$\Rightarrow x \cdot \underbrace{a/-b}_{=:c} = f(x)$

Betrachte die erste Spalte:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow c = 0 \\ \Rightarrow \lightning \end{array}$$

Andere Spalten folgen analog.

$\square$

Beweis (b): $P := \{U_x \setminus \{0\} : x \in V \setminus \{0\}\} \subseteq \mathcal{P}(V \setminus \{0\})$, weil $\forall x \in V \setminus \{0\}: U_x \setminus \{0\} \subseteq V \setminus \{0\}$.

(i) $\emptyset \notin P$, weil $x, f(x) \neq 0$

(ii) $\bigcup_{x \in V \setminus \{x\}} U_x \setminus \{0\} = \left(\bigcup_{x \in V \setminus \{x\}} U_x\right) \setminus \{0\} = V \setminus \{0\}$, weil

$\forall x \in V \setminus \{0\} : x \in U_x.$

(iii) Man merkt, dass $(f \circ f)(x) = -x$, also, Elemente werden von der ersten, in die zweite Spalte und umgekehrt abgebildet.

Wir zeigen, dass $U_x \cap U_y = \emptyset \Rightarrow U_x = U_y$.

Fall 1: $y \in U_x$:

$y \in [\{x, f(x)\}]$, dann $f(y) \in [\{x, f(x)\}]$, weil

$f(y) = f(ax + b f(x)) = a f(x) + b f(f(x)) = a f(x) - bx.$

Fall 2: $y \notin U_x$:

Wäre $f(y) \in [\{x, f(x)\}]$, dann $a \cdot x + b \cdot f(x) \Rightarrow y =$

$-f(ax + b f(x)) = -a f(x) - b f(f(x)) = -a f(x) + bx.$

also doch $y \in U_x$ ↯. $\square$

Also $\{y, f(y)\} \subseteq [x, f(x)] \Rightarrow [y, f(y)] \subseteq [[x, f(x)]] = [x, f(x)]$

und „$\supseteq$" folgt analog.

Wenn $y, f(y) \notin [x, f(x)] \Rightarrow [x, f(x)] \cap [y, f(y)] \setminus \{0\} = \emptyset.$

A 3.6.3 Es seien V ein Vektorraum und $f \in L(V,V)$ eine nilpotente Abbildung, also $f^k = 0 \cdot id_V$ für ein $k \in \mathbb{N}^\times$.

(a) Zeige: Die Abbildung $g := id_V - f$ ist bijektiv und $g^{-1} = id_V + f + f^2 + \dots + f^{k-1}$.

(b) Übersetze (a) in eine Aussage über Matrizen und bestimme damit die Inverse zu einer der folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{5\times 5}$

$$(\gamma)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beweis (a): $g(g^{-1}(x) = id_V(g^{-1}(x)) - f(g^{-1}(x)) = id_V(x) + f(x) + f^2(x) + \dots + f^{k-1}(x) - (f(x) + f^2(x) + \dots + f^k(x)) = id_V(x) = x.$

$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(id_V(x) - f(x)) = id_V(id_V(x) - f(x)) + f(id_V(x) - f(x)) + \dots + f^{k-1}(id_V(x) - f(x)) = id_V(id_V(x)) - id_V(f(x)) + f(id_V(x)) - f(f(x)) + \dots + f^{k-1}(id_V(x)) - f^{k-1}(f(x)) = x - f^k(x) = x.$ $\square$

$g = id_V - f \Rightarrow f = id_V - g;$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \emptyset \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Anhang: g ist linear.

Beweis: $g(x+y) = (\mathrm{id}_V - f)(x+y) = x+y - f(x) - f(y)$
$= \mathrm{id}(x) - f(x) + \mathrm{id}(y) - f(y) = g(x) + g(y)$.
$g(cx) = (\mathrm{id}_V - f)(cx) = cx - f(cx) = c\,(\mathrm{id}(x) - f(x))$
$= c \cdot g(x)$. $\square$

A 3.6.9 Fortsetzung von A 3.3.10. Sei $f_1 : \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}^{4\times1}$ die Spiegelung an U_1 in Richtung U_2, d.h., $f_1(x_1) = x_1$ für alle $x_1 \in U_1$ und $f_1(x_2) = -x_2$ für alle $x_2 \in U_2$. In gleicher Weise sei $f_2 : \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}^{4\times1}$ als die Spiegelung an U_2 in Richtung U_1 erklärt.

(a) Zeige, dass $f_2 = -f_1$ erfüllt ist. Bestimme die Koordinatenmatrizen $\langle E^*, f_1(E)\rangle$ und $\langle E^*, f_2(E)\rangle$.

(b) Zeige, dass die Abbildung $p_1 := \frac{1}{2}(f_1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{4\times1}})$ die Projektion auf U_1 in Richtung U_2 ist, und berechne die Koordinatenmatrix $\langle E^*, p_1(E)\rangle$.

Beweis: $\forall u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2 : f_1(u_1) = u_1,\ f_1(u_2) = -u_2,$
$f_2(u_2) = u_2,\ f_2(u_1) = -u_1.$

Sei $v \in V$ beliebig, so gilt

$$f_2(v) = f_2(u_1 + u_2) = f_2(u_1) + f_2(u_2) = -u_1 + u_2,$$
$$-f_1(v) = -f_1(u_1 + u_2) = -f_1(u_1) - f_1(u_2) = -u_1 + u_2.$$

$$\underset{+\quad +}{\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]} \mapsto \underset{-}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]} \mapsto \underset{-\quad \times(-1)}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]} \mapsto \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \langle E^*, f_1(E)\rangle$$

$\langle E^*, f_1(E)\rangle$ folgt analog.

Beweis: $p_1(v) = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}_v)(v) = \frac{1}{2}(f_1(v) + \mathrm{id}_v(v)) =$

$$\frac{1}{2}\left(f_1(v_1+v_2)+v_1+v_2\right)=\frac{1}{2}\left(f_1(v_1)+f_1(v_2)+v_1+v_2\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(v_1-v_2+v_1+v_2\right)=v_1$$

$$\underset{+\;\;+}{\left[\begin{array}{cccc} 1&1&0&-1\\ 0&1&-1&-1\\ 0&-1&0&1\\ 0&0&1&1\\ \hline 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]} \mapsto \underset{-}{\left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&0&1\\ 0&1&1&1\\ \hline 1&1&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]} \mapsto \underset{\substack{-\\ \times(-1)}}{\left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ \hline 1&1&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]} \mapsto \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ \hline 1&1&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&-1&-1&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right] \mapsto \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ \hline 1&1&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&-1&0&-1\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]}_{\langle E^*,\, p_1(E)\rangle} .$$