Übungen zu Analysis 3, 2. Übung 21. 10. 2019

Zeigen Sie mit genauer Begründung aller nichtelementaren Rechenschritte:

10. $\int_0^\infty e^{-x} \cos \sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

11. $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}, \quad p, q > 0$ und zeigen Sie damit $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$

12. $\int_0^1 \frac{1-t}{1-at^3}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)}$ für $|a| < 1$ und zeigen Sie damit $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

13. Berechnen Sie
$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{(1+x^2)x}\, dx$$
indem Sie für $\lambda > -1$ die Funktion
$$F(\lambda) := \int_0^\infty \frac{\arctan(\lambda x)}{(1+x^2)x}\, dx$$
differenzieren.

14. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist $M \times M$ mit der Maximumsmetrik $d_m((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2))$ ein metrischer Raum und für eine Vervollständigung $(\tilde{M}, \tilde{d})$ von M ist $\tilde{M} \times \tilde{M}$ mit der Maximumsmetrik eine Vervollständigung von $M \times M$.

15. Durch $\sup |f(x)| + \sup |f'(x)|$ wird auf $C^1[0,1]$ (in $[0,1]$ stetig differenzierbar, mit einseitigen Ableitungen bei $0, 1$) eine Norm definiert. Ist $C^1[0,1]$ mit dieser Norm vollständig?

16. Zeigen Sie, dass für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\operatorname{supp}(f * g)$ keine Teilmenge von $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ sein muss.

17. Berechnen Sie die Faltung $f * g$ der Funktionen
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
für $\alpha, \beta > 0$.

18. Berechnen Sie die Faltung $f * g$ der Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - 3x & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$