# Serie 1

Besprechung: Donnerstag, 11.3.20

**1.1.** Geben Sie bei den folgenden 4 Differentialgleichungen die Ordnung an und ob sie linear (oder nichtlinear) sind.

$$y'(t) + y(t)\sin(t) = 1, \qquad y''(t) = t\sin(y(t))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0, \qquad \mathbf{y}'(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t)$$

wobei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{2\times 2})$.

**1.2.** Überführen Sie die folgenden skalaren Gleichungen 2. Ordnung in Systeme 1. Ordnung:

**a)** $y''(t) + t\sin(y'(t)) = y(t)$

**b)** $y''(t) = -y(t)\cos t$

Ist das Umschreiben in ein System 1. Ordnung eindeutig?

**1.3.** Betrachten Sie die *autonome*, explizite Differentialgleichung $y^{(k)}(t) = f(y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t))$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls $y$ eine Lösung der ODE ist, dann ist auch $t \mapsto y(t - t_0)$ eine Lösung.

**1.4.** Sei $\mathbf{A} \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{d\times d})$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) = 0 \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie: Die Menge aller Lösungen (genauer: zu gegebenem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Menge der $C^1(I;\mathbb{R}^d)$-Funktionen, die die Differentialgleichung erfüllen) ist ein Vektorraum.

**1.5.** Sei $\varepsilon > 0$. Betrachten Sie die "skalierte" Lotka-Volterra Gleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) &= -\varepsilon y(t) + x(t)y(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Funktion $(x, y) \mapsto \Phi(x, y) := x + y - \varepsilon \ln x - \ln y$ ist eine Erhaltungsgröße, d.h. für Lösungen $t \mapsto (x(t), y(t))$ der Lotka-Volterra-Gleichung gilt, daß $t \mapsto \Phi(x(t), y(t))$ konstant ist.

**1.6.** Das "mathematische Pendel" wird beschrieben durch die ODE

$$\varphi''(t) + \omega^2 \sin\varphi(t) = 0, \qquad \omega^2 = \frac{g}{\ell},$$

wobei $g$ die Erdbeschleunigung und $\ell$ die Fadenlänge des Pendels ist. Die Funktion $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ beschreibt die Auslenkung des Pendels.

**a)** Schreiben Sie die ODE in ein System 1. Ordnung um. Hat Ihre neue Variable eine physikalische Bedeutung?

**b)** Geben Sie eine Erhaltungsgröße an. Begründen Sie, warum es sich um solche handelt.

**1.7.** Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschreibt eine Ellipse in der Ebene. Zeichnen Sie die Ellipse. Bestimmen Sie einen Tangentialvektor, einen Normalvektor und die Gleichung der Tangente an die Ellipse in einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0)$ der Ellipse. Machen Sie dies auf zwei Arten:

**a)** durch Auflösen der Gleichung nach $x$ oder $y$.

**b)** unter Verwendung der Parametrisierung

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$