•) Sei $x \in [0,1]$ bel. und

$$f : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\overline{k(x,t)}}{|k(x,t)|} & , \text{falls } k(x,t) \neq 0 \\ 0 & , \text{falls } k(x,t) = 0 \end{cases} \in L^1$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel.

Nach Kusolitsch Satz 7.30 können wir eine Treppenfunktion $t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ finden mit $\|t\|_\infty \leq \|f\|_\infty = 1$ und $\|f - t\|_1 < \varepsilon$, wobei die $A_i \in \mathfrak{S}$

Mit dem Approximationssatz wie in IO/2 bzw. wie in Blümlinger Satz 2.5.1 können wir dyadische Würfel ($[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[$) $W_1, \dots, W_m$ finden mit $s = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{W_j}$ und $\|t - s\|_1 < \varepsilon$, wobei nach Konstruktion sicher $\|s\|_\infty = \|t\|_\infty$ bleibt.

So eine Funktion $\mathbb{1}_W$ mit einem Dyadischen Würfel W kann man, wenn man sich den Beweis von Blümlinger Satz 2.5.1 anschaut, approximieren durch eine Funktion $\mathbb{1}_W * \eta_\delta$ wobei $*$ die Faltung ist und $(\eta_\delta)_{\delta \in \mathbb{R}^+_0}$ ein Mollifier und δ hinreichend klein gewählt werden muss. Dem Beweis entnimmt man $0 \leq \mathbb{1}_W * \eta_\delta \leq 1$ womit wir also eine Funktion $g \in C_c^\infty$ erhalten mit $\|s - g\|_1 < \varepsilon$ und $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$

Also erhalten wir:

$$\int_0^1 |k(x,t)| \, dt - \int_0^1 k(x,t) g(t) \, dt = \int_0^1 k(x,t)(f(t) - g(t)) \, dt \leq \|k(x,\cdot)\|_\infty \|f - g\|_1 \leq$$

$$\leq \|k(x,\cdot)\|_\infty \left(\|f - t\|_1 + \|t - s\|_1 + \|s - g\|_1 \right) \leq 3 \|k(x,\cdot)\|_\infty \varepsilon$$

also $\int_0^1 |k(x,t)| \, dt - 3\|k(x,\cdot)\|_\infty \varepsilon \leq \int_0^1 k(x,t) g(t) \, dt = K_g(x) \leq |K_g(x)|$