Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Numerische Mathematik - Kreuzlübung 6

Übungstermin: 12.11.2019 6. November 2019

Hinweis: Die Anmeldung zu den Kleingruppen findet am 11.11. ab 10.00 Uhr im Büro DA 04 M02 (FH Turm A, 4. Stock) durch Ao.Univ.Prof. Ewa Weinmüller statt. Bitte bilden Sie vorher 6er Gruppen und schicken eine VertreterIn mit den Matrikelnummern der TeilnehmerInnen zur Anmeldung. Einzelanmeldungen sind ab 13:00 Uhr auch noch über das TISS-System möglich.

Aufgabe 31:
Verwenden Sie die Richardson-Extrapolation zur Berechnung von $f(0)$, $g(0)$ mit

$$f(h) = \frac{\tan(h)}{h}, \quad g(h) = \frac{\ln(h+1)}{h}$$

für $h > 0$. Überprüfen Sie numerisch, ob die theoretischen Konvergenzaussagen aus Satz 3.44 zutreffen. Verwenden Sie dazu $q = 1$, $h_k = 2^{-k}$ für $k = 1, \dots, 14$ und $n = 0, \dots, 5$.

Hinweis: Sie dürfen die Taylorentwicklungen um 0 von $\tan(x)$ und $\ln(x+1)$

$$\tan(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U_{2l+1} x^{2l+1}}{(2l+1)!}, \quad \ln(x+1) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} x^l}{l}$$

für gewisse $U_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$ verwenden.

Aufgabe 32:
Konstruieren Sie eine interpolatorische Quadraturformel maximaler Ordnung auf dem Intervall $[a, b]$ für gegebene reelle $a < b$ mit den Quadraturpunkten $x_0 = a$, $x_1 \in (a, b)$ und $x_2 = b$. Welche Ordnung hat diese Quadraturformel?

Hinweis: Definieren Sie die Quadraturformel zunächst auf einem Standardintervall.

Aufgabe 33:
Geben Sie auf dem Intervall $[a, b]$ eine Restglieddarstellung für den Fehler $Q(f) - Q_2(f)$ an, wobei Q_2 die Simpson-Regel ist.

Aufgabe 34:
Sei $Q_n(f)$ die Interpolationsquadratur auf dem Intervall $[0, 1]$ zu den Stützstellen $x_j = j/n$ für $j = 0, \dots, n$. Zeigen Sie: $Q_n(f)$ hat die Ordnung $n + 2$, wenn n gerade ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Newton-Basispolynome.

Aufgabe 35:
Sei $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$ eine Interpolationsquadratur der Ordnung $L \geq n + 1$ auf dem Intervall

$[0,h]$, $h>0$, zu den paarweise verschiedenen Quadraturknoten $x_0,\dots,x_n \in [0,h]$. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C^L([0,h])$ gilt

$$\left| Q_n(f) - \int_0^h f(x)dx \right| \le \frac{h^{L+1}}{L!} \sup_{x\in[0,h]} |f^{(L)}(x)|. \tag{1}$$

Hinweis: Fügen Sie für $L > n+1$ der Quadraturformel künstliche Quadraturknoten hinzu.

Aufgabe 36:
Mit wievielen Funktionsauswertungen kann das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-s} berechnet werden?

a) Mit Hilfe der summierten Trapezregel?

b) Mit Hilfe der summierten Simpson-Regel?

Vergleichen Sie die Ergebnisse für $s=4$ und $s=8$.