Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Numerische Mathematik - Kreuzlübung 7

Übungstermin: 19.11.2019 14. November 2019

Erinnerung: Sie benötigen mindestens 24 bearbeitete (gekreuzte und anwesende/nachgebrachte) Aufgaben zum Bestehen des 1.Übungsteils.

Aufgabe 37:
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $Q(f) := \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$. Berechnen Sie die Gewichte der offenen und geschlossenen Newton-Cotes Formeln mit $n = 0, 1, 2$ zur numerischen Approximation von $Q(f)$. Verwenden Sie dazu eine interpolatorische Quadraturformel der Form $Q_n(f) := \int_0^1 \frac{p_f(x)}{\sqrt{x}} dx$, wobei $p_f \in \Pi_n$ das interpolierende Polynom zur Funktion f ist.

Aufgabe 38:
Sei $f \in C^s(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion, $n \in \mathbb{N}$, $N := 2n + 1$ und q_N das trigonometrische Interpolationspolynom der Form

$$q_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

von f. Die Stützstellen seien wie in Korollar 3.36 des Vorlesungsskriptes durch $t_j := 2\pi j/N$, $j = 0, \ldots, N-1$ gegeben. Weiter sei $Q(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ das exakte Integral und $Q_N(f) := Q(q_N)$ eine Quadraturformel.

a) Zeigen Sie, dass Q_N eine summierte Rechtecksregel ist.

b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C_s > 0$ gibt mit

$$|Q(f) - Q_N(f)| \leq C_s N^{-s} \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 + |f^{(s)}(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

d.h. die summierte Rechtecksregel konvergiert für 2π-periodische, glatte Funktionen schneller als jede Potenz N^s von N.

Hinweis zu b: Für Funktionen $f, g \in L^2([a,b])$ gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, d.h.

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right).$$

Aufgabe 39:
Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien Polynome p_n durch

$$p_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Polynome p_n paarweise orthogonal bezüeglich der Gewichtsfunktion $w(x) = \exp(-x)$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ sind.
b) Zeigen Sie, dass die Polynome p_n die Rekursion

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - 1, \quad p_{n+1}(x) = (x - 2n - 1)p_n(x) - n^2 p_{n-1}(x)$$

erfüllen.

Hinweis zu a): Sie dürfen voraussetzen, dass für $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+k} \binom{j+k}{k} \binom{n}{k} \binom{m}{j} = \delta_{m,n}$$

gilt.

Aufgabe 40:
Seien $p_n(x)$ die Polynome aus der vorigen Aufgabe.
a) Zeigen Sie, dass $p_{n+1}(x) = \det(T_{n+1}(x))$ mit der Matrix $T_{n+1}(x) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ gegeben durch

$$T_{n+1}(x) := \begin{pmatrix} x-1 & -1 & & \\ -1 & x-3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -n \\ & & -n & x-2n-1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von p_{n+1} genau die Eigenwerte von $-T_{n+1}(0)$ sind.

Aufgabe 41:
Sei $\hat{Q} := (0,1) \times (0,1)$ und $\hat{T}$ das offene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$. Sei weiters

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x, (1-x)y) \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung Ψ ein Diffeomorphismus zwischen $\hat{Q}$ und $\hat{T}$ ist.
b) Seien für $N, M \in \mathbb{N}$ zwei Quadraturformeln Q_N, Q_M der Ordnung N bzw. M auf dem Einheitsntervall gegeben. Konstruieren Sie daraus eine Quadraturformel $Q_{\hat{Q}}$ auf $\hat{Q}$. Welche Funktionen werden durch $Q_{\hat{Q}}$ exakt integriert?
c) Verwenden Sie die Abbildung Ψ und die Quadratur aus b) um eine Quadratur $Q_{\hat{T}}$ auf $\hat{T}$ zu konstruieren. Welche Funktionen werden durch $Q_{\hat{T}}$ exakt integriert?

Aufgabe 42:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.