Serie 7

"Besprechung": Donnerstag, 7.5

7.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet, $f \in C^1(G;\mathbb{R}^d)$. Sei $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ eine Lösung der autonomen ODE $y' = f(y)$ mit $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty \in G$. Zeigen Sie: y_∞ ist eine Ruhelage der ODE.

7.2. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} x' &= -x(x-a)(x-b) - y \\ y' &= \sigma x - \gamma y \end{aligned}$$

wobei $0 < a < b$ und σ, $\gamma > 0$.

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems. Skizzieren Sie das Phasenportrait, d.h. deuten Sie durch Pfeile das Richtungsfeld (das ist das Vektoreld $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ der autonomen ODE $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$) an.

b) Ist die Ruhelage $(0,0)$ asymptotisch stabil?

c) Geben Sie die Differentialgleichung an, die von der Ableitung der Lösung nach σ erfüllt wird.

7.3. Versuchen Sie, die Lösung des AWP

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

für kleine ε anzunähern. Bestimmen Sie hierzu Funktionen $t \mapsto y_0(t)$ und $t \mapsto y_1(t)$, so daß $y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + O(\varepsilon^2)$ ist.

7.4. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^2 + x \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $h(x,y) := y^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^3$ eine Erhaltungsgröße ist. Benutzen Sie diese Information, um das Phaseportrait zu skizzieren. Was können Sie über die Stabilität der beiden Ruhelagen sagen?

7.5. Eine (skalare) ODE der Form

$$p(t,y)y' + q(t,y) = 0 \tag{1}$$

heißt *exakt*, falls es eine Funktion F gibt, so daß

$$\frac{\partial}{\partial y}F(t,y) = p(t,y), \qquad \frac{\partial}{\partial t}F(t,y) = q(t,y).$$

a) Zeigen Sie: Falls $p(t_0, y_0) \neq 0$, dann kann das AWP

$$p(t,y)y' + q(t,y) = 0, \qquad y(t_0) = y_0$$

für eine exakte ODE durch Lösen der impliziten Gleichung $F(t, y(t)) = c$ für geeignetes c gelöst werden.

b) Lösen Sie das AWP

$$(4bty + 3t + 5)y' + 3t^2 + 8at + 2by^2 + 3y = 0, \qquad y(t_0) = y_0.$$

7.6. Wir sagen, daß für eine ODEs der Form (1) die Funktion μ ein *integrierender Faktor* ist, falls die (äquivalente) ODE

$$\mu(t,y)p(t,y)y' + \mu(t,y)q(t,y) = 0$$

exakt ist. Lösen Sie die ODE

$$ty' + 3t - 2y = 0$$

indem Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(t, y) = \mu(t)$ suchen.

Bemerkung: auf der Vorlesungshomepage gibt es ein Extrablatt zum Üben (freiwillig!) mit einer Liste von exakten ODEs und ODEs, die mithilfe eines integrierenden Faktors gelöst werden können (samt Lösungen).

7.7. Betrachten Sie das skalare autonome System $y' = f(y)$ (mit $f \in C^1$), welches die Ruhelage y_0 habe. Zeigen Sie:

a) Falls es $\delta > 0$ gibt, so daß $f(y) < 0$ für $y \in (y_0, y_0 + \delta)$ *und* $f(y) > 0$ für $y \in (y_0 - \delta, y_0)$, dann ist $y \equiv y_0$ asymptotisch stabil.

b) Falls es $\delta > 0$ gibt, so daß $f(y) > 0$ für $y \in (y_0, y_0 + \delta)$ *und* $f(y) < 0$ für $y \in (y_0 - \delta, y_0)$, dann ist $y \equiv y_0$ instabil.