A 2.3.1 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^{n\times 1}$ sind Unterräume ?

(c) $\{(a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\}$.

(d) $\{(a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0\}$.

(f) $\{(a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n\}$.

Wähle ein Koordinatensystem in einer Ebene und veranschauliche diese Vektormengen für $n = 2$.

Hinweis zu (d): Jede Summe von $m \geq 1$ positiven reellen Zahlen ist positiv.

Satz 2.3.2 (Unterraumkriterium) Eine Teilmenge U von V ist genau dann ein Unterraum, falls U die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

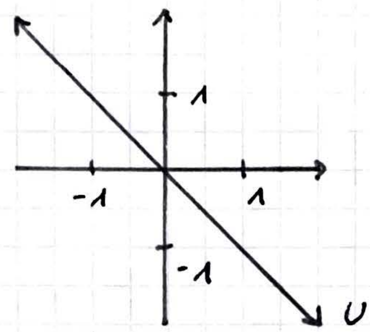
1. $U \neq \emptyset$

2. $a + xb \in U$ für alle $a, b \in U$ und alle $x \in K$.

In (c) liegt ein Unterraum vor.

Beweis: Seien $a := (a_1, \dots, a_n)$, $b := (b_1, \dots, b_n) \in U$, mit U als jenem Unterraum. $U \neq \emptyset$ ist trivial. Wir wissen, dass $\forall x \in K: x \cdot 0 = 0$, also $0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \Leftrightarrow 0 = 0 \cdot x = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x$, und daher $xb \in U$. Zuletzt ist $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 = 0 + 0 = 0 = \sum_{i=1}^{n} b_n$, also $\sum_{i=1}^{n} a_n + b_n = 0$ und somit gilt $\forall a, b \in U \, \forall x \in K: a + xb \in U$. $\square$

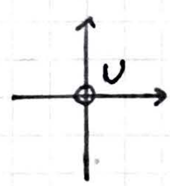
Anschauliche Zeichnung:



In (d) liegt ein Unterraum vor.

Beweis: Weil $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n : a_i = 0$, gilt $U = \{\Theta\}$, mit U als jenen Unterraum und Θ als Nullvektor. U ist ein trivialer Unterraum. $\square$

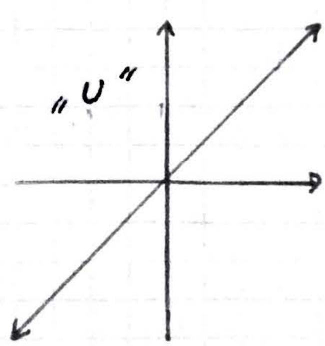
Anschauliche Zeichnung:



In (f) liegt kein Unterraum vor.

Beweis: Sei $a := (a_1, \dots, a_n) \in U$, mit U als jenen Unterraum. $\exists i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n$ und $\exists x \in K : x < 0$. Aus $a_i \leq a_{i+1}$ folgt aber, dass $a_i x \geq a_{i+1} x$, also $ax \notin U$. $\square$

Anschauliche Zeichnung



A 2.3.7 Beweise die folgende Variante des Unterraumkriteriums:
Eine Teilmenge U eines Vektorraumes V ist genau dann ein Unterraum, falls U die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:
(i) $0 \in U$. (ii) $a + b \in U$ für alle $a, b \in U$. (iii) $xa \in U$ für alle $a \in U$ und alle $x \in K$.

Beweis: Wir wollen zunächst vom konventionellem auf das aktuelle Unterraumkriterium schließen. Weil $U \neq \emptyset$, lassen sich $a, b \in U$ wählen mit $a = b$ und, weil $a + (-1)b = \mathcal{O}$ und $a + (-1)b \in U$, ist (i) erfüllt. Sei nun $a \neq b$, so gilt $a + 1 \cdot b \in U$ und daher auch (ii). Wählen wir $a = \mathcal{O}$, so folgt $\mathcal{O} + xb \in U$, und auch (iii).
Nun zur umgekehrten Implikation. $\mathcal{O} \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$. Wenn $xc \in U$ und $b = xc$, dann auch $a + xc \in U$. $\square$

Anhang: Es gilt auf jeden Fall $1_K \in K$, also auch $-1_K \in K$.

A 2.3.8 Es seien M und N Teilmengen eines Vektorraumes V. Zeige: $[M \cup [N]] = [M \cup N]$. Wie müssen M bzw. N speziell gewählt werden, um aus diesem Ergebnis die Gültigkeit von $[[N]] = [N]$ und $[M \cup \{0\}] = [M]$ ablesen zu können?

Beweis: Um auf $[M \cup [N]] \subseteq [M \cup N]$ zu kommen, kann man $M \cup [N] \subseteq [M \cup N]$ zeigen, weil $A \subseteq [B] \Rightarrow [A] \subseteq [[B]] = [B]$. Sei $v \in M$, so gilt $v \in [M] \subseteq [M \cup N]$. Außerdem gilt $v \in [N] \subseteq [M \cup N]$.
Um auf $[M \cup [N]] \supseteq [M \cup N]$ zu kommen, zeigen wir $M \cup [N] \supseteq M \cup N$. Das folgt aus $M \cup [N] \supseteq M \wedge M \cup [N] \supseteq N$, weil $M \supseteq M \wedge [N] \supseteq N$. $\square$

$$M = \emptyset \Rightarrow [\emptyset \cup [N]] = [\emptyset \cup N] \Leftrightarrow [[N]] = [N]$$

$$N = \emptyset \Rightarrow [M \cup [\emptyset]] = [M \cup \emptyset] \Leftrightarrow [M \cup \{0\}] = [M].$$

A 2.4.1 Untersuche, ob im Gegebenen Vektorraum V über K l.a. oder l.u. Mengen vorliegen:

(β) $V = \mathbb{Z}^{3\times 1}$, $K = \mathbb{Z}_5$: $\{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3})^T, (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2})^T, (\bar{3}, \bar{1}, \bar{4})^T\}$, $\{(\bar{0}, \bar{2}, \bar{4})^T, (\bar{3}, \bar{1}, \bar{3})^T, (\bar{4}, \bar{2}, \bar{1})^T\}$.

(γ) $V = \mathbb{C}^{2\times 1}$, $K = \mathbb{C}$: $\{(i, i-1)^T, (1, 1+i)^T\}$, $\{(1+i, -i)^T, (i, 1-i)^T\}$.

(δ) $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$: $\{1-i, 1+i\}$, $\{1-i, -1+i\}$.

(β) $\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{pmatrix} \cdot \bar{3} = \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{6} \\ \bar{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$ l.a.

Angenommen, $\exists x, y \in K: \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$, so gilt $\bar{0} \cdot x + \bar{3} \cdot y = \bar{4} \Rightarrow y = \bar{3}$, und $\bar{2} \cdot x + \bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{2}$ $\Rightarrow x = \bar{2}$, aber $\bar{4} \cdot x + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1} \Rightarrow x = \bar{3} \neq \bar{2}$! $\Rightarrow$ l.u.

(γ) $\begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix} \cdot i^3 = \begin{pmatrix} i^4 \\ i^4 - i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \Rightarrow$ l.a.

$\begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = i \cdot \frac{1}{1+i} \wedge z_2 = -\frac{1}{i} \cdot (1-i) =$ $-1/i + 1 = 1 - \frac{1}{i}$. Wenn nun $z_1 = z_2 \Leftrightarrow i \cdot \frac{1}{1+i} = 1 - \frac{1}{i} \Leftrightarrow$ $i = (1+i) - (1+i)/i = 1 + i - 1/i - 1 = i - 1/i$, was aber ein Widerspruch ist. $\Rightarrow$ l.u.

(δ) $(1-i) \cdot z = 1+i \Rightarrow z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{1-i} + i \cdot \frac{1}{1-i}$, also ist $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, weil $1-i$ das multiplikativ inverse zu $\frac{1}{1-i}$ ist und imaginär ist, und die Summe imaginärer Zahlen ebenfalls imaginär ist. $z \notin \mathbb{R} \Rightarrow \{1-i, 1+i\}$ ist l.u.

$(1-i) \cdot (-1) = -1 + i = i - 1$ und $-1 \in \mathbb{R}$ also ist $\{1-i, -1+i\}$ l.a.

A 2.4.7 Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimme drei linear abhängige Vektoren m_1, m_2, m_3 so, dass je zwei dieser Vektoren l. u. sind.

(b) Bestimme vier Vektoren m_1, m_2, m_3, m_4 so, dass je drei dieser Vektoren l. u. sind.

(a) Seien $m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $m_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$m_1 + m_2 = m_3$. $\nexists x : m_1 \cdot x = m_2$, $\nexists x : m_2 \cdot x = m_3$,
$\nexists x : m_3 \cdot x = m_1$, und $\nexists x : m_1 \cdot x = m_3$.

(b) Seien $m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $m_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $m_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $m_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das kann man graphisch verifizieren.

Dabei liegen m_1, m_2, m_3 auf 3 unterschiedlichen Koordinaten-Achsen und m_4 auf einer Raumdiagonale.

A 2.4.8 Sei V ein Vektorraum über K. Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder wenigstens „in eine Richtung" wahr?

(a) „Eine Menge $M \subset V$ ist l.u. genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von M l.u. ist."

(b) „Eine unendliche Menge $M \subset V$ ist l.u. genau dann, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine l.u. Menge $T \subset M$ mit $\# T = n$ gibt."

(c) „Eine endlich Menge M ist l.u. genau dann, wenn es für jedes $n \in \{0, 1, \dots, \# M\}$ eine l.u. Menge $T \subset M$ mit $\# T = n$ gibt."

Die Aussage in (a) ist wahr.

Beweis: Eine Menge $M \subset V$ mit $\forall i \in I : m_i \in M$ ist genau dann l.a., wenn

$$\exists j \in I : m_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} x_i m_i \in M \wedge \forall i \in I \setminus \{j\} : m_i \in M$$

Wir zeigen „$\Rightarrow$" durch Kontraposition. Sei dazu $M \supseteq T$ l.a., also $m_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} x_i m_i \in T \subseteq M$ und $\forall i \in I \setminus \{j\} : m_i \in T \subseteq M$, dann sind jene Elemente auch in $M \supseteq T$ und die Bedingung zur l.A von M ist erfüllt.

Wir zeigen „$\Leftarrow$" durch Kontraposition. Sei dazu M l.a., so existiert eine Linearkombination aus endlich vielen $m_i \in M$ für ein m_j. (Laut Definition sind fast alle, bis auf endlich viele $x_i = 0$, und $0 \cdot m_i$ fällt aus der Summe).
Wir konstruieren eine endliche Teilmenge $T \subseteq M$ aus jenen Elementen. Die Linearkombination lässt sich in T konstruieren,

also $\exists T \subseteq M : T$ l.a. $\Leftrightarrow \neg(\forall T \subseteq M : T$ l.u.$)$. $\square$

Die Aussage (b) ist falsch, aber richtig für „⇒".

Beweis: Die Richtung „⇒" lässt sich genauso begründen, wie „⇒" in (a). Dabei ist M eben unendlich (Spezialfall) und T, mit $\#T = n \in \mathbb{N}$, klarerweise endlich.

„⇐" lässt sich mit einem Beispiel widerlegen, bei dem M l.a. ist und $\forall n \in \mathbb{N} : \exists T \subseteq M : T$ l.u. $\wedge \#T = n$.
Betrachte die Menge $\{(1,0,\dots),(0,1,0,\dots),\dots\} \cup \{(1,1,0,\dots)\}$. Klarerweise ist sie l.a., weil $(1,0,\dots) + (0,1,0,\dots) = (1,1,0,\dots)$ und zudem lassen sich l.u. Teilmengen mit Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ finden. $\square$

Die Aussage (c) ist wahr.

Beweis: Die Richtung „⇒" lässt sich genauso begründen, wie „⇒" in (a). Dabei ist M eben endlich (Spezialfall) und T, mit $\#T = n \in \{0,1,\dots,\#M\}$, klarerweise endlich.

„⇐" lässt sich mit einem Spezialfall begründen, bei dem $\#T = \#M$. Weil $T \subseteq M$, folgt $T = M$, also ist M l.u. $\square$

A 2.5.3 Sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis eines Vektorraumes V über K. Untersuche, ob die folgenden Tripel l.a. oder l.u. sind: $(b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_1)$, $(b_1 - b_2, b_2 - b_3, b_3 - b_1)$, $(b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$.

Hinweis: Bei einem der Tripel sind die Fälle Char $K \neq 2$ und Char $K = 2$ zu unterscheiden.

$$\begin{aligned}
\text{I}&: (b_1 + b_2)\cdot x + (b_2 + b_3)\cdot y = (b_3 + b_1)\\
\text{II}&: (b_2 + b_3)\cdot x + (b_3 + b_1)\cdot y = (b_1 + b_2)\\
\text{III}&: (b_3 + b_1)\cdot x + (b_1 + b_2)\cdot y = (b_2 + b_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}&: b_1 x + b_2 x + b_2 y + b_3 y = b_3 + b_1\\
\text{II}&: b_2 x + b_3 x + b_3 y + b_1 y = b_1 + b_2\\
\text{III}&: b_3 x + b_1 x + b_1 y + b_2 y = b_2 + b_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}&: b_1 x + b_2 (x + y) + b_3 y = b_3 + b_1\\
\text{II}&: b_2 x + b_3 (x + y) + b_1 y = b_1 + b_2\\
\text{III}&\ \ b_3 x + b_1 (x + y) + b_2 y = b_2 + b_3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x = y = 1$, also liegt eine l.U., wenn Char $K \neq 2$ und eine l.A., wenn Char $K = 2$, weil dann $x + y = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{I}&: (b_1 - b_2) x + (b_2 - b_3) y = b_3 - b_1\\
\text{II}&: (b_2 - b_3) x + (b_3 - b_1) y = b_1 - b_2\\
\text{III}&: (b_3 - b_1) x + (b_1 - b_2) y = b_2 - b_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}&: b_1 x - b_2 x + b_2 y - b_3 y = b_3 - b_1\\
\text{II}&: b_2 x - b_3 x + b_3 y - b_1 y = b_1 - b_2\\
\text{III}&: b_3 x - b_1 x + b_1 y - b_2 y = b_2 - b_3
\end{aligned}$$

$\mathrm{I}: b_1 x - b_2 (x - y) + b_3 y = b_3 + b_1$

$\mathrm{II}: b_2 x - b_3 (x - y) + b_1 y = b_1 + b_2$

$\mathrm{III}: b_3 x - b_1 (x - y) + b_2 y = b_2 + b_3$

$\Rightarrow$ $x = y$, also liegt eine l. A vor.

$\mathrm{I}: x b_1 + y(b_1 + b_2) = b_1 + b_2 + b_3$

$\mathrm{II}: x(b_1 + b_2) + y(b_1 + b_2 + b_3) = b_1$

$\mathrm{III}: x(b_1 + b_2 + b_3) + y b_1 = b_1 + b_2$

Es liegt eine l. U. vor, weil B l.u. ist und $b_1, b_2, b_3 \neq \mathcal{O}$, d.h b_3 kürzt sich nie weg.