

Differentialgleichungen 1 – alte mündliche Prüfungsfragen

MELENK

Prüfungsbericht vom 3. August 2012:

- Zunächst reicht er einem ein Blatt mit dem Titel "Prüfungsprotokoll", auf dem man Name und Matrikelnummer eintragen muß. Dann kommen die Fragen, die zum Teil auch mit Hilfe eines bereitgelegten Kugelschreibers und Blatt Papier zu beantworten sind (wahrscheinlich unvollständige Liste):
- Was ist ein linear beschränktes System? Warum existieren hier die Lösungen für alle Zeiten? Können sie das beweisen? (Hier durfte ich die Abschätzung mit dem Gronwall-Lemma durchrechnen.)
- Was können sie mir zu Stabilität sagen? Schreiben sie die Definition bitte auf! Welche Beziehungen gibt es zwischen stabil, attraktiv und asymptotisch stabil? Können sie das Beispiel (*) hinschreiben, das zeigt, daß attraktiv nicht stabil impliziert?
- Was heißt linearisierte Stabilität? Wie schaut der Beweis aus? Warum existieren hier die Lösungen für alle Zeiten? Funktioniert das auch im nicht-autonomen Fall? Da gab es in der Übung doch ein Gegenbeispiel!
- Was sind Ljapunov-Funktionen? Warum existieren bei koerziven Ljapunov-Funktionen die Lösungen für alle Zeiten? Welche Stabilitätsaussagen kann man mit Ljapunov-Funktionen machen?
- Was ist der Satz von Poincaré-Bendixson? Können sie mir auch die verallgemeinerte Variante sagen, wo in der Limesmenge Ruhelagen sein können? War der Orbit beim Beispiel (*) homoklin oder heteroklin?
- Was ist ein SLEWP? Schreiben sie das bitte auf! Was kann man über SLEWP sagen? Warum ist der Lösungsoperator kompakt? Wie haben wir das in der VO bewiesen? Können sie auch direkt (ohne Fana) beweisen, daß die Eigenvektoren l.u. sind? Wo treten SLEWP auf? (Nachdem ich das Beispiel aus der VO mit der 1D-Wellengleichung hingeschrieben hab:) Wieviele Anfangsbedingungen brauchen sie hier? Können sie mir noch andere Beispiele nennen?
- Können sie mir den Satz von Peano beweisen?

Prüfungsbericht von 2016:

- Satz von Piccard Lindelöf, was sagt er aus(worüber ist die Aussage?, wie sieht der Beweis aus? (Hier wollte die idee und eckpunkte wissen) Warum ist es eine Kontraktion (das durfte ich etwas genauer ausführen). Das ist jetzt eine "lokale" Aussage, wie sieht das aus mit Lösungen auf einem größeren Intervall aus(Lösungen stimmen auf ihrem gesamten überschneidenden Intervall überein=> Beweis). Es gibt also so ein Maximales Existenzintervall, welche Möglichkeiten gibt es da(hier reichte ihm die drei Möglichkeiten).

- Wissen Sie etwas über Linearisierte Stabilität (Was schaut man sich an, vom Beweis nur ganz grob die Idee, welche 'Abschätzungswerkzeuge' werden benutzt)? Warum klappt die Aussage nur für 'asymptotisch stabil' und nicht nur für 'stabil' alleine (Weil man nicht mehr über die EW aussagt als " <0 ", oder so etwas in der Art)
- Lineare Systeme wie schauen die aus, $A(t)$ und $b(t)$ sind was? Was kann man über den Lösungsraum aussagen? Welche Dimension hat er und warum (kurz Beweisidee)? Was macht man bei einem Inhomogenen System (Variation der Konstanten)? Was wenn A konstant ist, dann gehts doch einfacher? Warum konvergiert e^{At} (Abschätzen und auf 1D Fall zurückgeführt)? Daraus kann man die Ableitung berechnen (Hat was von Gliedweise ableiten gesagt, hat aber gepasst als ichs ihm so erzählt hab wie wirs in der VO gemacht haben "ja so haben wirs wahrscheinlich in der VO gemacht")? Ist $A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$, warum?
- Irgendwann zwischendurch: Was ist eigentlich wenn bei $y' = f(t, y(t))$ f sogar noch glatter ist? (f aus $C^1 \Rightarrow y$ aus C^1 , warum? weil f abgeleitet nach t ergibt mit Kettenregel $f'(t, y(t)) \cdot y'(t)$ und das ist stetig da f aus C^1 ist und y als Lösung aus $C^1 \Rightarrow y'$ aus C , damit ist $y'' = f$ nach t abgeleitet, stetig $\Rightarrow y$ ist C^2)

Prüfungsbericht von 26.09.2016:

Fragen kamen zu Picard Lindelöf und Beweis, genauer hab ich ihm die Kontraktion zeigen müssen, dann ging es um lokale Lipschitzstetigkeit, um maximale Existenzintervalle und dann die lineare Beschränktheit mit einer kurzen Skizze des Beweises. Danach hat er gefragt was ich zu Ljapunov zu sagen habe, habe dann die Def. angegeben und gesagt, dass wenn y Ruhelage und striktes Minimum folgt y stabil und wenn y striktes Minimum, V strikte Ljapunov und y isoliert in der Menge der Ruhelage dann folgt as. stabil und der Beweis dazu. Dann zum Schluss ging es noch kurz um was die Lyapunov Funktion und die strikten Minimums mit Physik zu tun haben (nämlich eine Ruhelage ist stabil weil sich dann das System darauf einpendelt).

Prüfungsbericht von 11.11.2016:

- Kennen Sie eine Existenzaussage für die Lösung von Differentialgleichungen? (\rightarrow Picard Lindelöf). Ist das nur eine Existenzaussage oder sagt das mehr aus? (\rightarrow Eindeutigkeit). Beim Beweis davon, war ihm nur wichtig wie man zeigt, dass die Picard Iteration eine Kontraktion ist.
- Das ist jetzt lokal, wie siehts mit globalen Lösungen aus? Also Wiederverwendung von Picard Lindelöf + die 3 Möglichkeiten für das maximale Intervall. Können Sie ein Beispiel nennen für Funktionen mit Blow up + Kollaps?
- Bei Linearen Systemen, was kann man da über den Lösungsraum sagen? Und welche Dimension hat er?
- Was ist die Wronski Determinante? Was ist ein Fundamentalsystem? Was sagt die Wronski Determinante nur aus? Welche Differentialgleichung erfüllt die Wronski Determinanten? (Satz von Liouville)

- Was sagt ihnen der Begriff asymptotisch stabil? Wie ist stabil definiert? Wie attraktiv?
- Was machen wir bei einem autonomen System? (-> Linearisierung).
- Was können wir machen, wenn die Linearisierung keine Aussage liefert? (-> Ljapunov Funktion). Definition für V in C1 (die allgemeine Definition von V in C0 interessiert ihn nicht)? Was hat das jetzt mit Stabilität zu tun? Wie ist da der physikalische Zusammenhang? Wie ist das mit Energiefunktionen?

Prüfungsbericht von xx.12.2016:

- Satz von Picard Lindelöf: Aussage und Idee des Beweises, musste nichts konkret zeigen aber quasi alles erklären, keine genauen Schritte
- Hat gefragt was ich zu Ljapunov Funktionen weiß: Direkte Methode von Ljapunov + Beweis, den hab ich ihm genau ausgeführt. War ihm zu formal, wollte wissen auf was das ganze hinausläuft -> das eine Ruhelage eines Systems stabil ist falls es sich darauf einpendelt. Wollte das ganze bisschen bildlich wissen. Hab ihm dann das Beispiel mit dem Pendel genannt, da wollte er die Ljapunov Funktion wissen. (es war ihm wichtig dass diese Ljapunovfunktionen häufig Anwendung in der Physik haben)
- Wie kann man noch Stabilität überprüfen: linearisierte Stabilität: Hab ihm die Herleitung erzählt, dann den Satz und er wollte dann wissen ob man den Satz auf das Bsp mit dem Pendel anwenden kann: Pendel ohne Reibung nein, weil es Eigenwerte gibt mit $\operatorname{Re}(\text{eigenwert})=0$, wollte das ich ihm das ausrechne, wusste aber ca worauf es hinausläuft und er war damit auch zufrieden.

Prüfungsbericht von 20.12.2016:

- Satz von Picard-Lindelöf: Voraussetzungen, Aussage, beim Beweis wollte er nicht PL direkt ("das ist schon zu konkret"), sondern den Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz allgemein
- die 3 Fälle für das maximale Existenzintervall und ein Beispiel zu Blow-Up
Er wollte auch wissen warum das für T- analog geht und wie die Bedingungen da aussehen (es ändert sich nur das T- $\rightarrow -\infty$ sein muss, der Rest bleibt gleich) und wie man sowas technisch zeigen könnte (neue Fkt $v(t)=y(-t)$, also die Zeit geht in die andere Richtung)
- Wronski-Determinante und Aussage vom Satz vom Liouville
- Homogene Systeme: Lösungsraum, die Abbildung ist ein VR-Isomorphismus, was ist eine Lösungsmatrix
- Inhomogene Systeme: Variation der Konstanten und dass der Lösungsraum affin ist bzw wie die Lösung des AWP dann aussieht ($y = y_p + \tilde{y}$)

- Aussage vom Prinzip der linearisierten Stabilität und wie ist das mit den Eigenwerten dass die Ruhelage stabil ist (halbeinfach und $\operatorname{Re} \lambda = 0$) -> warum dürfen die EW nicht größer als 0 im Re sein, warum ist das dann instabil?

Zusammenfassung von 3 mündlichen Prüfungen am 20.01.2017

[*] Picard-Lindelöf - Aussage, Voraussetzung, Beweisidee, Kontraktion genau

[*] Warum ist Raum+Norm im Beweis von Picard-Lindelöf ein Banachraum?

[*] 3 Existenzintervalle - Beweisidee, Beispiel für blow-up, Wie geht das bei T-?

[*] Lokale Eindeutigkeit => globale Eindeutigkeit (nur Satz)

[*] Satz von Peano - Aussage, Grundprinzip des Beweises, Warum sind die zwei Bedingungen von Ascoli erfüllt? (genau!)

[*] Was ist wenn $f \in C^2$?

[*] Stetige Abhängigkeit - Wie hängt Lösung von Anfangswerten ab? (4.3 und 4.4 Abschätzungen), 4.6 (Aussage, Beweis bis "Wir hoffen also ...")

[*] Definition stabil, attraktiv, asymptotisch

[*] Gegenbeispiel warum aus attraktiv nicht stabil folgt und eine Skizze (Einheitskreis) + Ruhelagen, Orbits, invariante Mengen

[*] Satz Poincare-Bendixson + Verallgemeinerung (5.40), Welcher Fall tritt bei dem Gegenbeispiel (aus attraktiv folgt nicht stabil) auf? Homoklin oder Heteroklin?

[*] Linearisierte Stabilität (Satz 5.8+ Beweis)

[*] $y' = Ay$, $d=2$, Was passiert, wenn man an A "wackelt"?