Differentialgleichungen 1 - Übung 2

1. UE am 19.03.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. *Sei* $G \subseteq \mathbb{R}^{d+1} Gebiet, f \in C(G; \mathbb{R}^d)$.
a) zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. ** (1)* $\forall (t, y) \in G \exists U$ *Umgebung* $\exists L_U > 0 \forall (\tilde{t}, x), (\tilde{t}, y) \in U(\left\| f(\tilde{t}, x), f(\tilde{t}, y) \right\| \leq L_U \left\| x - y \right\|)$.

2. ** (2)* $\forall K \subseteq G kompakt \exists L_K > 0 \forall (\tilde{t}, x), (\tilde{t}, y) \in K(\left\| f(\tilde{t}, x), f(\tilde{t}, y) \right\| \leq L_K \left\| x - y \right\|)$.

Lösung. $(2) \Rightarrow (1) : Sei(\text{t, y}) \in \mathbb{R}^d$. G ist Gebiet $\Rightarrow \epsilon > 0(U_\epsilon((t, y)) \subseteq G)$. Insbesondere ist die abgeschlossene $\epsilon/2$-Kugel um (t, y) in G enthalten und kompakt, (1) gilt also insbesondere für die offene $\epsilon/4$-Umgebung um (t, y).
$(1) \Rightarrow (2) : JedeUmgebungenthälteine\epsilon - Kugel.Dahergilt \forall x \in K \exists \epsilon_x > 0((1) giltfür U_{\epsilon_x}(x))$. Weil K kompakt ist, existiert eine endl. TÜ von K durch solche Kugeln: $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\epsilon_{x i}}(x_i)$. Wähle $L_K := max L_{U_{\epsilon_{x i}}(x_i)}$.