A 8.9.1 Geg.: V VR/$\mathbb{R}$, $\dim V = 4$, $f \in L(V)$,

(β) Geg.: $\langle B^*, f(B)\rangle = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(a) Ges.: $\chi_f(X)$, $\mu_f(X)$ bzw. $f_{\mathbb{C}}$

$$\begin{vmatrix} 2-X & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-X & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1-X \end{vmatrix} = (X-1-i)(X-1+i)(X+1)X$$

$\mu_f(X) = \chi_f(X)$

(b) Ges.: $\langle B^*, f(B)\rangle \approx C$ in komplexer JNF

$C = \operatorname{diag}(0, -1, 1+i, 1-i)$

Ges.: $\langle B^*, f(B)\rangle \approx R$ in reeller JNF

$$R = \operatorname{diag}(0, -1, J_2(1+i, 1-i))$$
$$= \operatorname{diag}\left(0, -1, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

(c) Ges.: D Basis v. V, mit $\langle D^*, f(D)\rangle$ reelle JNF

Ww.: $EW_f = \{1 \pm i, -1, 0\}$

$$ER_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; ER_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; ER_{1+i} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, \; ER_{1-i} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Repräsentanten erzeugen eine Basis, die f nach C koordinatisiert. Die letzten Basisvektoren d_3, d_4 müssen erfüllen:

$$d_3 \overset{f}{\mapsto} d_3 + d_4, \quad d_4 \overset{f}{\mapsto} -d_3 + d_4.$$

Das gibt ein LGS mit Lösung

$$d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A 8.9.8 Gg.: Bestimmung der EW, ER von

$\frac{d}{dx} \in L(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}))$:

(i) $\forall t \in \mathbb{R}$: t EW v. $\frac{d}{dx}$, $ER_t = [x \mapsto e^{tx}]$

(ii) $\forall a+ib \in \mathbb{C}$: $a+ib$ EW v. $\frac{d}{dx}$ $\mathbb{C}$

$\in \{x \mapsto f(x) + ig(x) : f, g \in C^\infty(\mathbb{R})\}$

$ER_t = [\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx)]$

(iii) $P(X) := X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$

$P\left(\frac{d}{dx}\right) : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f'' + a_1 f' + a_0 f \end{cases}$

$U := \ker P\left(\frac{d}{dx}\right)$

(β) $P(X) = (X-t)^2$ mit $t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x \mapsto e^{tx}}_{a}$, $\underbrace{x \mapsto xe^{tx}}_{b} \in U$

(a) Zz.: U ist $\frac{d}{dx}$ - invariant

Sei $f \in U$, dann muss

$\mathcal{O} = P\left(\frac{d}{dx}\right)(f) = (f-t)^2 = f'' - 2tf' + t^2 f$

$\Rightarrow P\left(\frac{d}{dx}\right)(f') = f''' - 2tf'' + t^2 f' = P\left(\frac{d}{dx}\right)(f') = 0$

(b) Zz.: a, b l.u.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha a + \beta b = \mathcal{O}$.

Ww.: $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 0$, weil $a, b \neq \mathcal{O}$

Ww.: $0 = \mathcal{O}(0) = (\alpha a + \beta b)(0) = \alpha$

$\Rightarrow \alpha, \beta = 0$

Gg.: $T := [a, b]$

(c) Zz.: $\forall f \in U: [f, f'] \leq T$, $\frac{d}{dx}$-invariant

Ww.: $\frac{d}{dx} f = f' \in [f, f']$

$\frac{d}{dx} f' = f'' \in [f, f']$, weil

$0 = P(\frac{d}{dx})(f') = (f-t)^2 = f'' - 2t f' + t^2 f$

$\Rightarrow f'' = 2t f' - t^2 f \in [f, f']$.

Fall 1. f, f' l.a.

d.h. $\exists t \in \mathbb{R}: f' = t \cdot f \vee \cancel{t \cdot f' = f}$

(o.BdA. $t \neq 0$, sonst $f = 0 \Rightarrow f' = 0$)

$\overset{(i)}{\Rightarrow} f \in [a], f' \in [a]$

Fall 2. f, f' l.u.

$\Rightarrow \{f, f'\}$ ist Basis, d.h. $\dim [f, f'] = 2$

Ww.: $\operatorname{rg} \frac{d}{dx}\Big|_{[f,f']} = 2$, weil

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \frac{d}{dx}(f) = f' \\ \cdot\ \frac{d}{dx}(f') = f'' = 2tf' - t^2 f \end{array}\right\} \text{ l.u., weil sonst } \Rightarrow f, f' \text{ l.a. } \lightning$$

$\Rightarrow \operatorname{grad} \chi_{\frac{d}{dx}|_{[f,f']}} = 2$

Ww.: P ist auch Annullatorpolynom v. $\frac{d}{dx}\Big|_{[f,f']}$

$\Rightarrow \exists a_0 \in \mathbb{R}: \chi_{\frac{d}{dx}|_{[f,f']}}(X) = a_0 P(X) = a_0 (X-t)^2$

$\Rightarrow \exists!$ EW v. f: t

Ww.: $\exists!$ 2 mögliche JNF:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}}_{} \ \dot{\vee} \ \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ist die richtige JNF für Fall 2}$$

$\Rightarrow$ Basisvektoren $\in [x \mapsto e^{tx}] \rightsquigarrow$ Fall 1

Seien $d_1 := a$, $d_2 := b$.

$$\frac{da}{dx}(x) = t\underbrace{e^{tx}}_{a(x)}, \quad \frac{db}{dx}(x) := \underbrace{e^{tx}}_{a(x)} + t\underbrace{xe^{tx}}_{b(x)};$$

$\Rightarrow$ $\{a, b\}$ Basis v. $[f, f']$

(d) Zz.: $U = T$

A 8.9.10. Geg.: V VR$/\mathbb{R}$, $\dim V = 2$, $f \in L(V)$,
$\exists B$ Basis v. V:

$\langle B^*, f(B)\rangle = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b > 0$;

(a) Ges.: alle $C = (c_1, c_2)$ Basen v. $V_{\mathbb{C}}$ mit $\langle C^*, f_{\mathbb{C}}(C)\rangle$ JNF

Ww.: Laut 8.9.3 gilt, $C := \{c_1, c_2\}$ mit

$c_1 := 1/2\, i\, b_1 + 1/2\, b_2$,

$c_2 := -1/2\, i\, b_1 + 1/2\, b_2$,

bildet eine Basis v. $V_{\mathbb{C}}$ mit

$\langle C^*, f(C)\rangle = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a-bi & 0 \\ 0 & a+bi \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ c_1, c_2 sind EV v. f

$\Rightarrow$ Menge aller Basen $= \{\{t_1 c_1, t_2 c_2\} : t_1, t_2 \in \mathbb{C}^\times\}$

(b) Ges.: alle $D = (d_1, d_2)$ Basen v. V mit $\langle D^*, f(D)\rangle$ reelle JNF

Ww.: Laut 8.9.3, gilt, $D := (d_1, d_2)$ mit

$d_1 := 2\,\mathrm{Im}\,(t_1 c_1) = t_1 b_1$,

$d_2 := 2\,\mathrm{Re}\,(t_1 c_1) = t_1 b_2$,

bildet eine Basis v. V, mit ...

Durch die Transformationsmatrizen

$\langle D^*, C\rangle = 1/2 \begin{pmatrix} i E_m & -i E_m \\ E_m & E_m \end{pmatrix}$, $\langle C^*, D\rangle = \cdots$, $m = 1$.

lässt sich zwischen den Basen wechseln, also müssen d_1, d_2 obere Form haben.

A 9.2.1 Ges.: Sesquilinearform / Bilinearform ?,

$\ker d_\sigma$, $d_\sigma : V \to V^*$

(δ) Geg.: $\sigma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \overline{xy}$

(i) $\sigma(x+y, z) \overset{?}{=} \sigma(x,z) + \sigma(y,z)$

$= \overline{(x+y)z} = \overline{xz + yz} = \overline{xz} + \overline{yz}$

(ii) $\sigma(x, y+z) \overset{?}{=} \sigma(x,y) + \sigma(x,z)$

(iii) $\sigma(cx, y) \overset{?}{=} \zeta(c)\,\sigma(x,y)$

$= \overline{cxy} = \overline{c} \cdot \overline{xy}$ für $\zeta = \overline{}$

(iv) $\sigma(x, cy) \overset{?}{=} c\,\sigma(x,y)$ ↯

(ε) Geg.: $\sigma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \bar{x}x + \bar{x}y$

(i) $\overline{x+y}\,(x+y) + \overline{x+y}\,z \overset{?}{=}$

$\bar{x}(x+y) + \bar{y}(x+y) + \bar{x}z + \bar{y}z =$

$\bar{x}x + \bar{x}y + \bar{y}x + \bar{y}y + \bar{x}z + \bar{y}z \neq$ ↯

$\bar{x}x + \bar{x}z + \bar{y}y + \bar{y}z$

(ϑ) Geg.: $\sigma : C^1(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto f(0) \cdot g'(1)$

(i) $(f+g)(0) \cdot h'(1) = f(0) \cdot h'(1) + g(0) \cdot h'(1)$

(ii) $f(0) \cdot (g+h)'(1) = f(0) \cdot g'(1) + f(0) \cdot h'(1)$

(iii), (iv) ✓

$d_\sigma : f \mapsto \sigma(f, \cdot) : g \mapsto \sigma(f,g)$

$\Rightarrow \ker d_\sigma = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}$

A 9.2.2 Gg.: $\sigma : V^2 \to K$ bilinearform, nicht ausgeartet $:\Leftrightarrow$

1. $\forall x \in V^\times \; \exists b \in V : \sigma(x, b) \neq 0_K$

2. $\forall y \in V^\times \; \exists a \in V : \sigma(a, y) \neq 0_K$

(a) Zz.: 1. $\Leftrightarrow d_\sigma : V \to V^*$ inj.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\ker d_\sigma}_{\{x \in V : \sigma(x, \cdot) = \mathcal{O}\}} = \{\mathcal{O}_V\}$$

(b) Zz.: 2. $\Leftrightarrow \bigcap_{x \in V} \underbrace{\ker d_\sigma(x)}_{\{y \in V : \sigma(x,y) = 0_K\}} = \{\mathcal{O}_V\}$

(c) Gg.: $\dim V < \infty$

Zz.: 2. $\vee$ 1. $\Leftrightarrow d_\sigma$ bij.

Ww.: $\dim V < \infty \Rightarrow \dim V = \dim V^* < \infty \Rightarrow$

1. $\overset{(b)}{\Leftrightarrow} d_\sigma$ inj. $\Leftrightarrow d_\sigma$ bij.

$\neg$ 2. $\Leftrightarrow \exists y \in V^\times : \forall a \in V : \sigma(a, y) = 0_K$

$\Leftrightarrow \exists a^{**} \in d_\sigma(V)^\circ \setminus \{\mathcal{O}_{V^{**}}\} \overset{!}{=}$

$= \{a^{**} \in V^{**} : \langle a^{**}, d_\sigma(V)\rangle = \{0_K\}\} \overset{?}{=}$

$= \{\langle \cdot, x\rangle \in V^{**} : \forall \sigma(a, \cdot) \in d_\sigma(V) : \sigma(a, x) = 0_K\}$

$= \{y \in V : \forall a \in V : \langle \sigma(a, \cdot), x\rangle = 0_K\}$

$\Leftrightarrow \dim d_\sigma(V)^\circ \neq 0 \Leftrightarrow \dim d_\sigma(V) < \dim V^* = \dim V$

$\Leftrightarrow d_\sigma(V) < V^* \Leftrightarrow f \neg$ surj. $\Leftrightarrow f \neg$ bij.

Was ist ?: Weil $\dim V < \infty$, sind alle $a^{**} \in V^{**}$, Eval.-A66.

A 9.2.3 Gg.: $K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$:

$\sigma_1 : K^{\langle\mathbb{N}\rangle^2} \to K : ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_j)_{j\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i$,

$\sigma_2 : \ldots \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_{i+1}$

$\sigma_3 : \ldots \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i+1} y_i$

(a) Ges.: $d_{\sigma_k}(e_i)$ für $k = 1, 2, 3$, $d_{\sigma_k} =: d_k$

Ww.: $d_{\sigma_k} : \begin{cases} K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to (K^{\langle\mathbb{N}\rangle})^* \\ x \mapsto \sigma(x, \cdot) : \begin{cases} K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K \\ y \mapsto \sigma(x,y) \end{cases} \end{cases}$

$d_1(e_i) = \sigma_1(e_i, \cdot) : y \mapsto \sigma_1(e_i, y) = y_i$
$d_2(e_i) = \sigma_2(e_i, \cdot) : y \mapsto \sigma_2(e_i, y) = y_{i+1}$
$d_3(e_i) = \sigma_3(e_i, \cdot) : y \mapsto \sigma_3(e_i, y) = y_{i-1}$ mit $y_0 := 0$

(b) Zz.: σ_1 nicht ausgeartet

1. $\forall x \in V^\times \exists b \in V : \sigma_1(x, b) \neq 0$ ✓ $(b := x)$
2. $\forall y \in V^\times \exists a \in V : \sigma_1(a, y) \neq 0$ ✓ $(a := y)$

Zz.: für σ_2, σ_3 gilt entweder 1. oder 2.

1. trifft auf σ_2 zu mit $(1)_{i\in\mathbb{N}}$
$\rightsquigarrow$ nicht 2., weil $y := e_1$

2. analog