7.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet, $f \in C^1(G;\mathbb{R}^d)$. Sei $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ eine Lösung der autonomen ODE $y' = f(y)$ mit $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty \in G$. Zeigen Sie: y_∞ ist eine Ruhelage der ODE.

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} \overset{!}{=} \lim_{h\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} \quad ; \quad U_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R} : |x|<\varepsilon\} \; ; \; \rho\in\mathbb{R}^+$$

- Für beliebiges $t\in\mathbb{R}$ ist $U_\rho\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^d : h\mapsto \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$ beschränkt, weil $y\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$
- Gleichmäßig in h ist $\lim_{t\to\infty}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=0$, denn
$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \forall h\in\overline{U_\rho} : \exists s_h\in\mathbb{R} : \forall t\geq s : \left|\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right|<\varepsilon$ und $\overline{U_\rho}$ ist kompakt, also gilt die Konvergenz
auch gleichmäßig $\exists s := \max\{s_h \mid h\in\overline{U_\rho}\} : \forall h\in U_\rho : \forall t\geq s : \left|\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right|<\varepsilon$
- Für alle $t\in\mathbb{R}$ existiert $\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$, weil $y\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$

Nach Kaltenbäck Lemma 8.7.1. gilt also

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{y_\infty-y_\infty}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Also:

$$f(y_\infty) = f\left(\lim_{t\to\infty} y(t)\right) = \lim_{t\to\infty} f(y(t)) = \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$$

7.2. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} x' &= -x(x-a)(x-b) - y \\ y' &= \sigma x - \gamma y \end{aligned}$$

wobei $0 < a < b$ und $\sigma, \gamma > 0$.

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems. Skizzieren Sie das Phasenportrait, d.h. deuten Sie durch Pfeile das Richtungsfeld (das ist das Vektoreld $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ der autonomen ODE $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$) an.

b) Ist die Ruhelage $(0, 0)$ asymptotisch stabil?

c) Geben Sie die Differentialgleichung an, die von der Ableitung der Lösung nach σ erfüllt wird.

$f(x,y) = (-x(x-a)(x-b) - y \,,\ \sigma x - \gamma y)$

a) $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow -x(x-a)(x-b) - y = 0 \wedge \sigma x - \gamma y = 0 \Leftrightarrow$

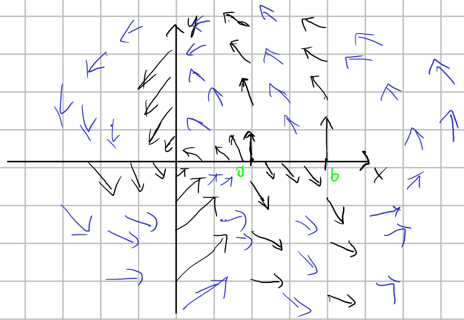
$\Leftrightarrow -x(x-a)(x-b) - y = 0 \wedge y = \frac{\sigma}{\gamma} x \Leftrightarrow -x(x-a)(x-b) - \frac{\sigma}{\gamma} x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(\frac{\sigma}{\gamma} + (x-a)(x-b)\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{\sigma}{\gamma} + x^2 - x(a+b) + ab = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{\sigma}{\gamma} - 4ab}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 - 4\frac{\sigma}{\gamma}}$

Ruhelagen: 1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - 4\frac{\sigma}{\gamma}} \,,\ \frac{\sigma}{\gamma}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - 4\frac{\sigma}{\gamma}}\right)\right)^T$

3) $\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - 4\frac{\sigma}{\gamma}} \,,\ \frac{\sigma}{\gamma}\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - 4\frac{\sigma}{\gamma}}\right)\right)^T$



b)

$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -(x-a)(x-b) - x(x-b) - x(x-a) & -1 \\ \sigma & -\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow Df(0,0) = \begin{pmatrix} -ab & -1 \\ \sigma & -\gamma \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -ab-\lambda & -1 \\ \sigma & -\gamma-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-ab-\lambda)(-\gamma-\lambda) + \sigma = \lambda^2 + \lambda(\gamma + ab) + \gamma ab + \sigma$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\gamma - ab \pm \sqrt{(\gamma+ab)^2 - 4\gamma ab - 4\sigma}}{2} = \frac{-\gamma - ab \pm \sqrt{(\gamma-ab)^2 - 4\sigma}}{2}$

Fall 1: „$(\gamma-ab)^2 - 4\sigma \leq 0$" dann ist $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{-\gamma-ab}{2} < 0$ nach Satz 5.8 ist $(0,0)$ asymptotisch stabil

Fall 2: „$(\gamma-ab)^2 - 4\sigma > 0$" dann ist $(\gamma-ab)^2 - 4\sigma < (\gamma-ab)^2 \Leftrightarrow 4\sigma > 0$

und daher $\mathrm{Re}(\lambda) \leq \frac{-\gamma-ab}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma-ab)^2 - 4\sigma} < \frac{-\gamma-ab}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma-ab)^2} =$

$= \frac{-\gamma-ab}{2} + \frac{\gamma-ab}{2} = -ab < 0$ nach Satz 5.8 ist $(0,0)$ asymptotisch stabil

Insgesamt also ja, $(0,0)$ ist asymptotisch stabil.

2) $\tilde{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,\sigma)^T \mapsto (-x(x-a)(x-b)-y \;,\; \sigma x - \gamma y)^T \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$

Sei $y_{t_0,y_0,\sigma} \in C^1$ Lösung von $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(t,y,\sigma)$ und $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = y_0$

Dann gilt nach Satz 4.6 (bzw. Übung 4.7)

$$\partial_\sigma \partial_t y_{t_0,y_0,\sigma}(t) = \partial_\sigma \tilde{f}(y_{t_0,y_0,\sigma}(t),\sigma) \wedge \partial_\sigma y_{t_0,y_0,\sigma}(t_0) = \partial_\sigma y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t\left(\partial_\sigma y_{t_0,y_0,\sigma}\right)(t) = \partial_y \tilde{f}(y_{t_0,y_0,\sigma}(t),\sigma)\left(\partial_\sigma y_{t_0,y_0,\sigma}\right)(t) + \partial_\sigma \tilde{f}(y_{t_0,y_0,\sigma}(t),\sigma) \wedge \partial_\sigma y_{t_0,y_0,\sigma}(t_0) = 0$$

also erfüllt $\partial_\sigma y_{t_0,y_0,\sigma}$ die DGL $v' = \partial_y \tilde{f}(y_{t_0,y_0,\sigma}(t),\sigma)\, v(t) + \partial_\sigma \tilde{f}(y_{t_0,y_0,\sigma}(t),\sigma)$

$$\partial_y \tilde{f}(x,y,\sigma) = \begin{pmatrix} -(x-a)(x-b) - x(x-b) - x(x-a) & -1 \\ \sigma & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_\sigma \tilde{f}(x,y,\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

also $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_{t_0,y_0}(t)-a)(x_{t_0,y_0}(t)-b) - x_{t_0,y_0}(t)(x_{t_0,y_0}(t)-b) - x_{t_0,y_0}(t)(x_{t_0,y_0}-a) & -1 \\ \sigma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

7.3. Versuchen Sie, die Lösung des AWP

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

für kleine ε anzunähern. Bestimmen Sie hierzu Funktionen $t \mapsto y_0(t)$ und $t \mapsto y_1(t)$, so daß $y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + O(\varepsilon^2)$ ist.

•) $y_0'' + y_0 = 0$; char Poly: $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$ und $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -1$

also ist $y_0(t) = c_1 + c_2 \exp(-t)$

Beispiel 4.8

$y_0'(0) = 0 \Leftrightarrow -c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

$y_0(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$

wir erhalten: $y_0 = 1$

•) $y_1'' = -y_0^3 = -1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2$

$y_1(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$

$y_1'(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

wir erhalten $y_1 = \frac{1}{2} id^2 + 1$

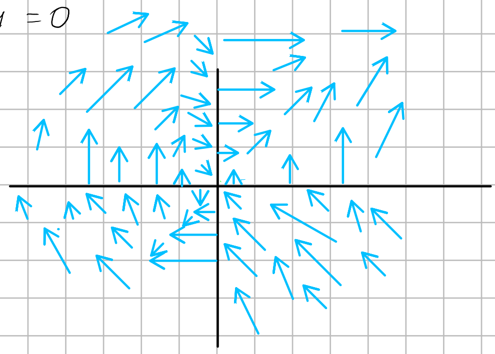
Also: $y = 1 + \varepsilon(\frac{1}{2} id^2 + 1) + O(\varepsilon^2)$

7.4. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^2 + x \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $h(x,y) := y^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^3$ eine Erhaltungsgröße ist. Benutzen Sie diese Information, um das Phaseportrait zu skizzieren. Was können Sie über die Stabilität der beiden Ruhelagen sagen?

$h' = 2yy' - 2xx' - 2x^2x' = 2y(x^2+x) - 2xy - 2x^2y = 0$



h ist also Erhaltungsgröße

Ruhelagen:

$y = 0 \wedge x^2 + x = 0 \Leftrightarrow y = 0 \wedge x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 0 \wedge (x = 0 \vee x = -1)$ also

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y)^T \mapsto (y, x^2 + x)$

$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (i): $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (ii): $Df(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(i) $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ $\quad$ Nach Satz 5.8 ist die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ also instabil

(ii) $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$ $\quad$ Mit Satz 5.8 keine Aussage

anders eine Aussage machen!

7.5. Eine (skalare) ODE der Form

$$p(t,y)y' + q(t,y) = 0 \tag{1}$$

heißt *exakt*, falls es eine Funktion F gibt, so daß

$$\frac{\partial}{\partial y}F(t,y) = p(t,y), \qquad \frac{\partial}{\partial t}F(t,y) = q(t,y).$$

a) Zeigen Sie: Falls $p(t_0, y_0) \neq 0$, dann kann das AWP

$$p(t,y)y' + q(t,y) = 0, \qquad y(t_0) = y_0$$

für eine exakte ODE durch Lösen der impliziten Gleichung $F(t, y(t)) = c$ für geeignetes c gelöst werden.

b) Lösen Sie das AWP

$$(4bty + 3t + 5)y' + 3t^2 + 8at + 2by^2 + 3y = 0, \qquad y(t_0) = y_0.$$

a) $0 = \frac{\partial}{\partial t} c = \frac{\partial}{\partial t} F(t,y(t)) = \frac{\partial}{\partial t} F(t,y(t)) + \frac{\partial}{\partial t} F(t,y(t))\, y'(t) = p(t,y(t))\,y'(t) + q(t,y(t))$

mit $c = F(t_0, y_0)$ ist $F(t_0, y(t_0)) = F(t_0, y_0)$ und wegen der lokalen Injektivität

durch $p(t_0, y_0) \neq 0$ ist $y(t_0) = y_0$ wackelig!

b) $F(t,y) := 2bty^2 + 3ty + 5y + 4at^2 + t^3$

$\frac{\partial}{\partial y} F(t,y) = 4bty + 3t + 5$ und $\frac{\partial}{\partial t} F(t,y) = 2by^2 + 3y + 8at + 3t^2$

$F(t,y) = c \Leftrightarrow 2bty^2 + 3ty + 5y + 4at^2 + t^3 = c \Leftrightarrow (2bt)y^2 + (3t+5)y + (4at^2 + t^3 - c) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(t) = \dfrac{-3t - 5 \pm \sqrt{(3t+5)^2 - 8bt(4at^2 + t^3 - c)}}{4bt}$

7.6. Wir sagen, daß für eine ODEs der Form (1) die Funktion μ ein *integrierender Faktor* ist, falls die (äquivalente) ODE

$$\mu(t,y)p(t,y)y' + \mu(t,y)q(t,y) = 0$$

exakt ist. Lösen Sie die ODE

$$ty' + 3t - 2y = 0$$

indem Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(t,y) = \mu(t)$ suchen.

Bemerkung: auf der Vorlesungshomepage gibt es ein Extrablatt zum Üben (freiwillig!) mit einer Liste von exakten ODEs und ODEs, die mithilfe eines integrierenden Faktors gelöst werden können (samt Lösungen).

$F(t,y) := yt^{-2} - 3t^{-1}$ $\qquad$ $\mu(t) := t^{-3}$

$\frac{\partial}{\partial y} F(t,y) = t^{-2} = t^{-3}\, t$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial t} F(t,y) = -2yt^{-3} + 3t^{-2} = t^{-3}\,(3t - 2y)$

$F(t,y) = c \Leftrightarrow yt^{-2} - 3t^{-1} = c \Leftrightarrow yt^{-2} = c + 3t^{-1} \Leftrightarrow y(t) = t^2(c + 3t^{-1}) = ct^2 + 3t$

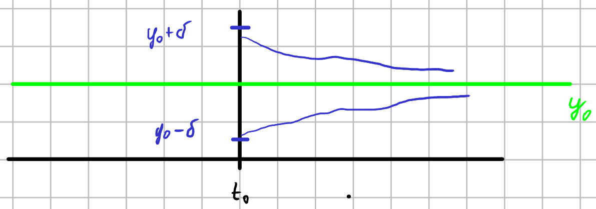
$y'(t) = 2ct + 3 = t^{-1}(-3t + 2(ct^2 + 3t)) = t^{-1}(-3t + 2y) \Leftrightarrow ty' + 3t - 2y = 0$

7.7. Betrachten Sie das skalare autonome System $y' = f(y)$ (mit $f \in C^1$), welches die Ruhelage y_0 habe. Zeigen Sie:

a) Falls es $\delta > 0$ gibt, so daß $f(y) < 0$ für $y \in (y_0, y_0 + \delta)$ *und* $f(y) > 0$ für $y \in (y_0 - \delta, y_0)$, dann ist $y \equiv y_0$ asymptotisch stabil.

b) Falls es $\delta > 0$ gibt, so daß $f(y) > 0$ für $y \in (y_0, y_0 + \delta)$ *und* $f(y) < 0$ für $y \in (y_0 - \delta, y_0)$, dann ist $y \equiv y_0$ instabil.

a) Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. und $\rho := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta\}$



$\tilde{y}_0 \in B_\rho(y_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - y_0| < \rho\}$ bel.

o.B.d.A. $\tilde{y}_0 > y_0$

Sei nun $y := y_{t_0, \tilde{y}_0}$ Lsg. von $y' = f(y)$, $y(t_0) = \tilde{y}_0$

Da sich Lösungen der AWPs nicht schneiden (Kor. 2.10), ist $y_{t_0,\tilde{y}_0} > y_0$

Ang. $\exists\, r, s \in [t_0, \infty[\,:\, r < s \wedge y(r) \leq y(s)$

Nach dem Mittelwertsatz (vgl. Kaltenbäck Satz 7.2.6) gibt es dann $\xi \in \,]r, s[$:

$0 \geq \frac{y(s) - y(r)}{s - r} = y'(\xi) = f(y(\xi))$ Nun können wir $\eta := \min\{\xi \in \,]t_0, \infty[\,:\, f(y(\xi)) \geq 0\}$ betrachten

Also: $\forall t \in \,]t_0, \eta[\,:\, f(y(t)) = y'(t) < 0$, also ist y dort monoton fallend, daraus folgt, dass

$y_0 < y(\eta) < y(t_0) < y_0 + \rho$ also $0 \leq f(y(\eta)) < 0$ ↯

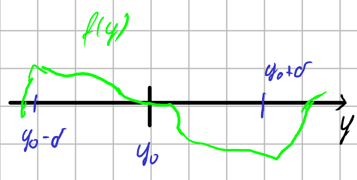
Wir erhalten, dass y auf $[t_0, \infty[$ strikt monoton fallend ist.

Wegen $y_0 < y < y_0 + \rho$ kann es keinen „blow up" geben und y kann auch nicht an den Rand des Definitionsbereiches laufen, also existiert die Lösung y für alle Zeiten $t \in [t_0, \infty[$ und es gilt für bel. $t \in [t_0, \infty[$:

$$|y(t) - y_0| \leq |y(t) - y(t_0)| - |y(t_0) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Die Ruhelage y_0 ist also stabil

Ang. $\lim_{t \to \infty} y(t) = z > y_0$. Da y strikt monoton fallend ist gilt



$0 = \lim_{t \to \infty} y'(t) = \lim_{t \to \infty} f(y(t)) = f(z) < 0$ ↯

also gilt $\lim_{t \to \infty} y(t) = y_0$ und daher ist y_0 attraktiv, also sogar asymptotisch stabil.

b) Wie in (a) zeigt man, dass y strikt monoton steigend ist.

Ang. $\lim_{t \to \infty} y(t) = z < y_0 + \delta$

dann ist $0 = \lim_{t \to \infty} y'(t) = \lim_{t \to \infty} f(y(t)) = f(z) > 0$ ↯

Also ist $\lim_{t \to \infty} y(t) > y_0 + \delta$ $\quad$ $f \in C$ reicht?