Musterlösung zum 1. Übungstest

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Cauchy-Problem:

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 2 \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,y) &= x \quad \text{auf } x = y. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie die Charakteristiken $(x(s,t), y(s,t))$. (2 Punkte)

(ii) Geben Sie (wo möglich) eine Lösung für das Cauchy-Problem an. (2 Punkte)

(i) Das charakteristische System lautet

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 2$$
$$x(0,t) = t, \ y(0,t) = t, \ u(0,t) = t$$

Dadurch ergibt sich

$$u(s,t) = 2s + t, \quad y(s,t) = s + t.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung für x ergibt

$$\frac{dx}{ds} = 2s + t.$$

Integrieren und Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf

$$x(s,t) = s^2 + st + t.$$

(ii) Nach s und t auflösen ergibt für $y \neq 1$

$$s = \frac{x-y}{y-1},$$
$$t = \frac{y^2-x}{y-1},$$

und daher die gesuchte Lösung

$$u(x,y) = \frac{y^2 - 2y + x}{y-1}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(i) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $(\sin(x)x^2 + \exp(x^3))\delta'$ ein Element aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiert ist. (0,5 Punkte)

(b) Sei $\phi_n(x) = \phi(x+\frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(\phi_n - \phi) \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. (1,5 Punkte)

(c) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \langle (\sin(x)x^2 + \exp(x^3))\delta', \phi_n - \phi \rangle.$$

(1 Punkt)

(ii) Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x) = 0$ für $x \leq 0$, $H(x) = 1$ für $x > 0$ die Heaviside Funktion. Berechnen Sie die erste Ableitung von $H(x)\exp(x)$ im distributionellen Sinn. (1 Punkt)

(i) (a) Die Funktion $f : x \mapsto (\sin(x)x^2 + \exp(x^3))$ liegt in $C^\infty(\mathbb{R})$, δ' ist als Ableitung einer Distribution wiederum eine Distribution, damit ist auch das Produkt $f\delta'$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) Für die Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ müssen die folgenden zwei Bedingungen gezeigt werden:

(A) $\exists\, K \subset \mathbb{R}$ kompakt sodass $\operatorname{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(B) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(\phi_n - \phi)^{(k)}(x)| = 0.$$

Da $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ existiert eine kompakte Menge K_ϕ sodass $\operatorname{supp}\phi \subset K_\phi$. Für ϕ_n gilt, dass $\operatorname{supp}\phi_n = \operatorname{supp}\phi - \frac{1}{n}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $K_\phi \subset [a, b]$, dann ist (A) für $K = [a-1, b]$ erfüllt.
Es gilt $\phi_n^{(k)}(x) = \phi^{(k)}(x + \frac{1}{n})$, und unter Verwendung des Mittelwertsatzes $\phi_n^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x) = \phi^{(k+1)}(\xi(x))\frac{1}{n}$. Damit folgt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(\phi_n - \phi)^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi^{(k+1)}(x)| \to 0,$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Per Definition sind Distributionen stetig bezüglich der Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, also ist das Ergebnis 0.

(ii) Für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle (H\cdot\exp)', \phi \rangle = -\langle H \cdot \exp, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \exp(x)\phi'(x)dx = \phi(0) + \int_0^\infty \exp(x)\phi(x)dx,$$

wobei die letzte Gleichheit aus partieller Integration und dem kompakten Träger von ϕ folgt. Damit gilt $(H \cdot \exp)' = \delta + H \cdot \exp$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Betrachten Sie die Folge von Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (2 Punkte)

(ii) Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n^2$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? (2 Punkte)

(i) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\langle f_n, \phi \rangle = n \int_0^{1/n} \phi(x)dx = \int_0^1 \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

Der Integrand besitzt die integrierbare Majorante $\|\phi\|_\infty$, damit kann nach dem Satz von Lebesgue Limes und Integration vertauscht werden. Es folgt

$$\langle f_n, \phi \rangle \to \int_0^1 \phi(0)dy = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Dies gilt für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, daher ist der gesuchte Grenzwert die Delta-Distribution.

(ii) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\phi(x) \equiv 1$ für $x \in (0,1)$. Dann gilt

$$\langle f_n^2, \phi \rangle = n^2 \int_0^{1/n} \phi(x)dx = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \to \infty,$$

also existiert der Grenzwert nicht.

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Betrachten Sie den Differentialoperator

$$Lu := \frac{du}{dx} + \frac{x}{2}u \quad \text{für} \quad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(i) Geben Sie eine Bedingung an die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ an, sodass durch die Funktion

$$U_\xi(x) = \begin{cases} a \cdot u_{hom}(x) & \text{für } x < \xi, \\ b \cdot u_{hom}(x) & \text{für } x > \xi, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung von L mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$ definiert wird, wobei u_{hom} die Lösung der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ ist. (3 Punkte)

(ii) Gilt der Zusammenhang $\tau_{-\xi}U_0 = U_\xi$? Falls nicht, warum ist dies kein Widerspruch zu dem aus der VO bekannten Resultat? (1 Punkt)

(iii) Bestimmen Sie eine Greensche Funktion für den Differentialoperator L auf $\Omega = (-\infty, 0)$. (2 Punkte)

(i) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Lu = 0$ lautet $u_{hom}(x) = c \cdot \exp(-x^2/4)$ mit $c \in \mathbb{R}$. Damit U_ξ eine Fundamentallösung ist, muss $LU_\xi = \delta_\xi$ im distributionellen Sinn erfüllt sein. Wir berechnen also für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle LU_\xi, \phi \rangle &= \langle U_\xi, L^*\phi \rangle \\ &= a \int_{-\infty}^{\xi} \exp(-x^2/4)(-\phi'(x) + \frac{x}{2}\phi(x))dx + b \int_{\xi}^{\infty} \exp(-x^2/4)(-\phi'(x) + \frac{x}{2}\phi(x))dx \\ &= -a \exp(-x^2/4)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\xi} - b \exp(-x^2/4)\phi(x)\Big|_{\xi}^{\infty} \\ &= (b-a)\exp(-\xi^2/4)\phi(\xi) \stackrel{!}{=} \phi(\xi). \end{aligned}$$

Daher ist U_ξ eine Fundamentallösung wenn $b = a + \exp(\xi^2/4)$.

(ii) Aus (i) folgt

$$\tau_{-\xi}U_0(x) = \begin{cases} a \cdot \exp(-x^2/4 + (x\xi)/2 - \xi^2/4) & \text{für } x < \xi, \\ (a+1) \cdot \exp(-x^2/4 + (x\xi)/2 - \xi^2/4) & \text{für } x > \xi. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt also nicht $\tau_{-\xi}U_0 = U_\xi$, und $\tau_{-\xi}U_0$ ist keine Fundamentallösung. Dies steht nicht im Widerspruch zu dem Resultat aus der VO, da der Koeffizient $x/2$ in L nicht konstant ist.

(iii) Eine Greensche Funktion muss für alle $y \in \Omega = (-\infty, 0)$ erfüllen, dass

$$LG(\cdot, y) = \delta_y \quad \text{in } \Omega, \quad G(\cdot, y) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Da G für jedes feste y eine Fundamentallösung mit Pol in y sein muss, verwenden wir den Ansatz $G(x, y) = U_y(x)$ und bestimmen die Konstante a so, dass die Randbedingung $G(0, y) = 0$ erfüllt ist. Da $y > 0$ gilt

$$G(0, y) = a + \exp(y^2/4) \stackrel{!}{=} 0,$$

woraus $a = -\exp(y^2/4)$ folgt. Die Greensche Funktion lautet also

$$G(x,y) = \begin{cases} -\exp((y^2 - x^2)/4) & \text{für } x < y, \\ 0 & \text{für } x > y. \end{cases}$$

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= x^2 + y^2 + 5 \quad \text{für } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= \sin(x)x^2 + \exp(y^3) \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit dem Maximumsprinzip für den Laplace-Operator, dass für $\Omega = B_1(0)$ (offene Einheitskreisscheibe) maximal eine klassische Lösung existiert. (2 Punkte)

Angenommen es existieren zwei klassische Lösungen des RWPs $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Dann erfüllt $w := u_1 - u_2$ das RWP

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \quad \text{für } (x,y) \in \Omega, \\ w(x,y) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aus dem Maximumsprinzip für den Laplace-Operator folgt damit (da Ω beschränktes Gebiet, $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und $\Delta w = 0$)

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} w(x,y) = \sup_{(x,y)\in\partial\Omega} w(x,y) = 0, \quad \inf_{(x,y)\in\Omega} w(x,y) = \inf_{(x,y)\in\partial\Omega} w(x,y) = 0,$$

und damit $w \equiv 0$, also $u_1 = u_2$.