Übungen zu Analysis 3, 10. Übung 16. 12. 2019

81. Berechnen Sie $\int_A \operatorname{rot}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^2$ für das Vektorfeld $\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ z^2 \\ x+y+z^3 \end{pmatrix}$ und die Fläche
$$A = \{(x,y,z) : z = (\sqrt{x^2+y^2}+1)(\sqrt{x^2+y^2}-1)(x^2+y^2), \quad x^2+y^2 < 1\}.$$
$\mathbf{n}$ sei das Normalvektorfeld auf A mit positiver z-Koordinate.

82. Es sei A die Oberfläche des durch
$$y = 1+x^2, \; y = 2, \; z = 0, \; z = 1$$
begrenzten Körpers. Berechnen Sie $\int_A \mathbf{f}^t \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^{n-1}$ für das Vektorfeld
$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x^2 - 2yz \\ x - 2y\cos^{-2} z \\ 3y + 2\tan(z) - 3xz \end{pmatrix}$$

83. Eine C^2-Funktion f auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, Ω offen heißt harmonisch, wenn sie $\Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass f der Mittelwerteigenschaft genügt, d.h, es gilt
$$⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} f(\mathbf{y}) \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) := \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} f(\mathbf{y}) \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) / \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(\mathbf{x},r)) = f(\mathbf{x}). \qquad (1)$$
Hinw.: Zeigen sie, dass für $n \geq 3$ die Funktion $\phi : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^{2-n}$ und für $n = 2$ die Funktion $\log(x_1^2 + x_2^2)$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist und verwenden Sie Integralsätze.

84. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f \in C^2(\Omega)$ die auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ in allen Punkten $\mathbf{x} \in \Omega$ mit $\bar{B}_r(\mathbf{x}) \subseteq \Omega$ die Mittelwerteigenschaft (1) besitzt harmonisch ist.

    Hinw.: Zeigen Sie, dass für eine nicht harmonische Funktion
$$m(r) = ⨍_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y})$$
als Funktion von r nicht konstant ist.

85. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion f auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$, die in allen Punkten $\mathbf{x} \in \Omega$ mit $\bar{B}_r(\mathbf{x}) \subseteq \Omega$ die Mittelwerteigenschaft (1) besitzt aus $C^\infty(\Omega)$ ist.

    Hinw.: Zeigen Sie $f(x) = f * \eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ für zentralsymmetrische Mollifier $(\eta_\varepsilon)_\varepsilon$, $\eta_\delta(\mathbf{x}) = \tilde{\eta}_\delta(|\mathbf{x}|)$ und hinr. kleine ε und verwenden Sie die Koflächenformel für Kugeln wie in Bsp 4.4.3.

86. Zeigen Sie: Sei $u \in C^3(\Omega)$, Ω offen, u harmonisch und positiv, $\bar{B}_R(\mathbf{x}_0) \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \frac{n}{R}|u(\mathbf{x}_0)|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Hinw.: Schreiben Sie die Mittelwerteigenschaft zu einer Mittelwerteigenschaft über B_R um (etwa mit Bsp. 4.4.3) und verwenden Sie Gauß.

87. Zeigen Sie, dass eine auf $\mathbb{R}^n$ harmonische beschränkte Funktion konstant ist (Satz von Liouville).

88. Sei u harmonisch in $B_R(\mathbf{x}_0)$ und $u(\mathbf{y}) \geq c > 0$ für $\mathbf{y} \in \bar{B}_R(\mathbf{x}_0)$. Dann gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_{R/2}(\mathbf{x}_0)$

$$u(\mathbf{x}) \leq \mathrm{e}^{2n} u(\mathbf{y}).$$

Hinw.: Verwenden Sie Bsp. 86 um eine Abschätzung für die logarithmischen Ableitungen von u zu erhalten.