Ergebnisse und Zeit für Einsichtnahme in Kürze auf `http://asc.tuwien.ac.at/~blue`

1 (10P): Für welche Werte des Parameters a ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \ln \sqrt[3]{x} & x > 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

stetig bzw. gleichmäßig stetig auf $[0, 1)$, bzw. auf $[0, \infty)$?

Lösung: f stetig in $(0, \infty$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Für Stetigkeit in 0 muss gelten $\lim_{x\to 0+0} f(x) = 0$. Es gilt (De L'Hospital):

$$\lim_{x\to 0+0} x \ln \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{3}\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0+=} \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-x}{3} = 0,$$

also f stetig in 0 genau für $a = 0$.

f ist für $a = 0$ auf $[0, 1]$ stetig, damit ist f als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig (Satz 6.6.6) und somit auch auf $[0, 1)$ (Wenn es für $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$ für alle $x, y \in [0, 1]$ mit $|x - y| \le \delta$, so gilt diese Aussage klarerweise auch für $x, y \in [0, 1)$).

Mit Mittelwersatz folgt für $x, y > 1$ ist $(x \ln x)' = 1 + \ln x > 0$, also

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \left| \left(\frac{1}{3}\xi \ln \xi \right)' \right| \ge |x - y| \frac{1}{3}(1 + \ln(\min\{x, y\}).$$

Für $0 < |x - y| < \delta$ und $\frac{1}{3}(1 + \ln(\min\{x, y\}) > \frac{\epsilon}{|x-y|}$ folgt $|f(x) - f(y)| > \epsilon$ obwohl $|x - y| < \delta$. Also f nicht gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

Oder (ohne MWS): Für $1 < x < y$ gilt $f(y) - f(x) = \frac{1}{3}(y \ln y - x \ln x) > \frac{1}{3}(y - x) \ln x$. Für $x_n = \mathrm{e}^n, y_n = \mathrm{e}^n + \frac{1}{n}$ folgt $y_n - x_n = \frac{1}{n},\ f(y_n) - f(x_n) > \frac{1}{3}$, also für $\epsilon = \frac{1}{3}$ gibt es kein $\delta > 0$ mit $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$, d.h. nicht gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

2 (10P): Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades P_3 der Funktion

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$$

mit Anschlusssstelle $x_0 = 0$ und geben Sie eine möglichst gute Abschätzung für das Restglied im Intervall $(-1/4, 1/4)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-x}{1+x} & f(0) &= 1 \\
f'(x) = \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} &= \frac{-2}{(1+x)^2} & f'(0) &= -2 \\
f''(x) &= -2(-2)(1+x)^{-3}, & f''(0) &= 4 \\
f'''(x) &= -12(1+x)^{-4}, & f'''(0) &= -12 \\
f^{(4)}(x) &= 4\cdot 12(1+x)^{-5}, & f^{(4)}(\xi) &\leq 48(1-|x|)^{-5}
\end{aligned}$$

Taylorpolynom:

$$P_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3$$

Lagrange'sches Restglied: $R_3(x) = \frac{48}{4!}(1+\xi)^{-5}x^4$

$$|R_3| \leq 2(1-|x|)^{-5}x^4 \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 2\frac{4}{3^5} = \frac{8}{3^5}$$

für $|x| < \frac{1}{4}$.