Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Michael Neunteufel

Numerik partieller Differentialgleichungen: stationäre Probleme - Übung 3

Übungstermin: 11.11.2020 6. November 2020

Aufgabe 11:
a) Sei $(T_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ ein Folge von nicht-degenerierten Dreiecken. Zeigen Sie, dass die shape regularity Konstanten $\sigma(T_j) = h_{T_j}/\rho_{T_j}$ genau dann gegen unendlich divergieren wenn der kleinste Winkel in T_j gegen Null geht.
b) Eine alternative Definition der shape regularity Konstante ist gegeben durch $\widetilde{\sigma}(T) := h_T/r_T$, wobei

$$r_T := \max\{\mathrm{diam}(B) : B \text{ ein Kreis enthalten in } T\}.$$

Wie hängen $\sigma(T)$ und $\widetilde{\sigma}(T)$ zusammen?

Aufgabe 12:
Sei $P_p := \mathcal{L}\{x^i y^j : i, j \geq 0 \wedge i + j \leq p\}$ für $p \in \mathbb{N}$ der Raum der Polynome vom maximalen Grad p.
a) Geben Sie eine Basis von P_0 an.
b) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\lambda_1(x,y) := 1 - x - y, \qquad \lambda_2(x,y) := x, \qquad \lambda_3(x,y) =: y \tag{1}$$

eine Basis des P_1 bilden.
c) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \lambda_2\lambda_3$ eine Basis des P_2 bilden.
d) Zeigen Sie, dass eine Basis des P_p für $p \geq 3$ aus folgenden Funktionen gebildet werden kann:

(i) $(x,y) \mapsto \lambda_j(x,y)$ mit $1 \leq j \leq 3$,

(ii) $(x,y) \mapsto p_{jk}(x,y)\lambda_j(x,y)\lambda_k(x,y)$ mit $1 \leq k < j \leq 3$ und

(iii) $(x,y) \mapsto p_{123}(x,y)\prod_{j=1}^{3}\lambda_j(x,y)$ und $p_{123} \in P_{p-3}$.

Die folgenden Einschränkungen der Polynome p_{jk} sind dabei jeweils eindimensionale Polynome vom maximalen Grad $p-2$: $\xi \mapsto p_{12}(\xi, 0)$, $\xi \mapsto p_{13}(0, \xi)$ und $\xi \mapsto p_{23}(\xi, 1-\xi)$.
e) Erklären Sie anhand des Referenzdreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ die Bedeutung dieser Aufgabe auf eine Erweiterung von Proposition 3.1 auf Polynomräume höheren Grades.

Aufgabe 13:
Sei $\hat{Q} := (0,1) \times (0,1)$ und $\hat{T}$ das offene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$. Sei weiters

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x, (1-x)y) \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung Ψ ein Diffeomorphismus zwischen $\hat{Q}$ und $\hat{T}$ ist.
b) Seien für $N, M \in \mathbb{N}$ zwei Quadraturformeln Q_N, Q_M der Ordnung N bzw. M auf dem Einheitsintervall gegeben. Konstruieren Sie daraus eine Quadraturformel $Q_{\hat{Q}}$ auf $\hat{Q}$. Welche Funktionen werden durch $Q_{\hat{Q}}$ exakt integriert?

c) Verwenden Sie die Abbildung Ψ und die Quadratur aus b) um eine Quadratur $Q_{\hat{T}}$ auf $\hat{T}$ zu konstruieren. Welche Funktionen werden durch $Q_{\hat{T}}$ exakt integriert?

Aufgabe 14:
Formulieren und beweisen Sie das Lemma 3.8 explizit für den Fall $m = 2$.

Aufgabe 15:
Sei $\Omega_\beta := \{r(\cos\varphi, \sin\varphi)^\top \in \mathbb{R}^2 : r \in (0,1), \varphi \in (0, \pi/\beta)\}$ für $\beta \in (1/2, 1)$ ein nicht-konvexer Kreissektor.
a) Verwenden Sie den Ansatz $u(r,\varphi) = (1 - r^2)r^\beta \sin(\beta\varphi)$ zur Konstruktion einer Lösung $u \in H_0^1(\Omega_\beta)$ mit $u \notin H^2(\Omega_\beta)$ der Poisson Gleichung $\Delta u = f$ mit passendem $f \in L^2(\Omega_\beta)$.
b) Überprüfen Sie numerisch mit Hilfe des zur Verfügung gestellten Jupyther-Notebooks für $\beta = 2/3$, welche Konvergenzrate h^s mit $s > 0$ sich für diese Lösung bei unterschiedlichen Polynomordnungen bei Verfeinerungen von h ergibt.
c) Testen Sie die Konvergenzrate einer geeigneten Lösung auf dem konvexen Gebiet Ω_β mit $\beta = 2$.