3.9.13 Lemma. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Beweis. Laut Voraussetzung und gemäß Lemma 3.9.11 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| < \epsilon$ für alle $n > m \geq N$. Der Betrag bei $|a_k|$ ist deswegen vorhanden, weil das eine absolut konvergente Reihe, laut Definition 3.9.12, ausmacht. Die Gleichheit gilt, weil, wenn $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $||a_1| + |a_2| + \dots| = |a_1| + |a_2| + \dots$, da die $a_k$ „nicht positiver" werden können, als sie bereits sind, und wenn $a_k \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k := x_k + y_k i$ dann auch $\sqrt{x_k^2 + y_k^2} > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ist und die Betragsstriche auch dann redundant sind. Die Ungleichheit folgt tatsächlich aus Lemma 3.9.11, also (3.14)

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \text{ für alle } n > m \geq N.$$

Daraus und aus der Dreiecksungleichung erhält man

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon.$$

Hier wird sie eben mehrmals angewendet. Wieder wegen Lemma 3.9.11 konvergiert damit die Reihe. Ok. $\square$