Partielle Differentialgleichungen

7. Übung am 12. 11. 2020

Richard Weiss   Florian Schager   Christian Sallinger   Fabian Zehetgruber
Paul Winkler   Christian Göth

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass

$$u(x,y) = \ln\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in H^1(B_{1/2}(0)).$$

Lösung. Zunächst einmal wollen wir zeigen, dass $u(x,y) \in H^1(B_{1/2}(0))$.

$$\int_{B_{1/2}(0)} u^2 dx = \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \left(\ln\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)^2 r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\ln\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)^2 r dr$$

Um zu zeigen, dass der Integrand stetig auf $[0,1]$ ist (und somit das Integral existiert), müssen wir noch die Stetigkeit im Punkt 0 zeigen. Dafür verwenden wir die Regel von de l'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} \frac{(\ln(-\ln r))^2}{\frac{1}{r}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{2\left(\ln(-\ln r)\right)\cdot \frac{1}{-\ln r}\cdot(-\frac{1}{r})}{-\frac{1}{r^2}} = \lim_{r\to 0} -2\cdot \frac{(\ln(-\ln r))}{\frac{1}{r}\cdot \ln r} \\
&= -2\cdot \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{-\ln r}\cdot -\frac{1}{r}}{\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\ln r} = -2\cdot\lim_{r\to 0} \frac{r}{\ln r(1-\ln r)} = 0
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun zuerst naiv die punktweise Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) &= -\frac{2}{\ln(x^2+y^2)}\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2)}\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) \\
&= \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)} \\
\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) &= \frac{2y}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)} \\
|\nabla u(x,y)|^2 &= 4\frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^2} = \frac{4}{\ln(x^2+y^2)^2(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

und integrieren sie über $B_{1/2}(0)$

$$\int_{B_{1/2}(0)} |\nabla u|^2 dx = \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \frac{4}{r\ln(r^2)^2} d\varphi dr = 2\pi\int_0^{1/2} \frac{1}{r\ln(r)^2} dr \overset{u=\ln(r)}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{-\ln(2)} \frac{1}{u^2} du = 2\pi[-\frac{1}{u}]_{-\infty}^{-\ln(2)} = \frac{2\pi}{\ln(2)}.$$

Jetzt müssen wir noch nachweisen, dass die distributionelle Ableitung tatsächlich mit der punktweisen Ableitung übereinstimmt. Wir berechnen also für $\Omega_\epsilon := B_{1/2}(0) \backslash B_\epsilon(0)$

$$\begin{aligned}\int_{B_{1/2}(0)} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy &= \int_{B_\epsilon(0)} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy + \int_{\Omega_\epsilon} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy \\ &= \int_{B_\epsilon(0)} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy - \int_{\Omega_\epsilon} u(x,y)\phi_x dxdy + \int_{\partial\Omega_\epsilon} u(x,y)\phi_x \nu_x ds\end{aligned}$$

Das Randintegral lässt sich schreiben als

$$\left|\int_{\partial\Omega_\epsilon} u(x,y)\phi_x\nu_x ds\right| \leq |\ln(-\ln(\epsilon))| \int_{\partial B_\epsilon(0)} |\phi_x(x)|ds = |\ln(-\ln(\epsilon))\phi_x(x_\epsilon)|\epsilon S_2 = \left|\phi_x(x_\epsilon)S_2\frac{\ln(-\ln(\epsilon))}{\frac{1}{\epsilon}}\right|.$$

Mit der Regel von l'Hospital erhalten wir

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\ln(-\ln(\epsilon))}{\frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\epsilon\ln(\epsilon)}}{-\frac{1}{\epsilon^2}} = \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{\epsilon}{\ln(\epsilon)} = 0.$$

Schließlich schätzen wir noch das erste Integral ab

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_\epsilon(0)} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy\right| &\leq -\|\phi\|_\infty \int_{B_\epsilon(0)} \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy = -2\|\phi\|_\infty \int_0^\epsilon\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{\ln(r^2)r^2}d\varphi dr \\ &= -4\pi\|\phi\|_\infty\int_0^\epsilon \frac{1}{2\ln(r)}dr \leq -2\pi\frac{\epsilon}{\ln(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}\int_{B_{1/2}(0)} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{B_\epsilon(0)} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy + \int_{\Omega_\epsilon} \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\phi dxdy\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} -\int_{\Omega_\epsilon} u(x,y)\phi_x dxdy = -\int_{B_{1/2}(0)} u(x,y)\phi_x dxdy\end{aligned}$$

Damit ist die punktweise Ableitung tatsächlich auch die schwache Ableitung. □

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Zeigen Sie:

(a) Sind $u \in H^k(\Omega) (k \in \mathbb{N})$ und $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so folgt $uv \in H^k(\Omega)$.

(b) Sind $u \in H^1(\Omega)$ und $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, so folgt $uv \in H_0^1(\Omega)$.

Lösung. a) Wir führen den Beweis mittels Induktion nach k:

$k = 0$: $\|uv\|^2_{H^0(\Omega)} = \int_\Omega (uv)^2 dx \leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} v(x)^2\right)\|u\|^2_{H^0(\Omega)} < \infty$

$k \rightsquigarrow k+1$: Sei $u \in H^{k+1}(\Omega), v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ beliebig.

$$\begin{aligned}\int_\Omega uvD^i\phi dx &= \int_\Omega uD^i(v\phi)dx - \int_\Omega u(D^iv)\phi dx \\ &= -\int_\Omega D^i(u)v\phi dx - \int_\Omega u(D^iv)\phi dx = -\int_\Omega (D^i(u)v + uD^iv)\phi dx\end{aligned}$$

Also erhalten wir $D^i(uv) = D^i(u)v + uD^i(v)$. Für $|\alpha| = k+1$ beliebig folgt somit wegen $H^{k+1}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$

$$\int_\Omega (D^\alpha(uv))^2 dx = \int_\Omega (D^\beta D^i(uv))^2 dx = \int_\Omega \overbrace{(D^\beta(\underbrace{D^i(u)}_{\in H^k(\Omega)}v)}^{\in L^2(\Omega)} + \overbrace{D^\beta(\underbrace{u}_{\in H^k(\Omega)}D^i(v))}^{\in L^2(\Omega)})^2 dx < \infty$$

(b) Wir wählen eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C^\infty(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$.
Zuerst berechnen wir für festes $i \le d$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(D^i\left((u_n-u)v\right)\right)^2 \, \mathrm{d}\lambda^d \\
&= \int_\Omega (D^i(u_n-u)v + (u_n-u)D^i v)^2 \, \mathrm{d}\lambda^d \\
&\le \|v\|_\infty^2 \|u_n-u\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2\int_\Omega v(D^i v)(u_n-u)D^i(u_n-u)\, \mathrm{d}\lambda^d + \|D^i v\|_\infty^2 \|u_n-u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\le \underbrace{\|u_n-u\|_{H^1(\Omega)}^2}_{\xrightarrow{n\to\infty}0} \left(\|v^2\|_\infty + \|D^i v\|_\infty^2\right) + 2\|vD^i v\|_\infty^2 \underbrace{\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}}_{\xrightarrow{n\to\infty}0} \underbrace{\|D^i(u_n-u)\|_{L^2(\Omega)}}_{\xrightarrow{n\to\infty}0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\|u_n v - uv\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|(u_n-u)v\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&= \int_\Omega ((u_n-u)v)^2 \, \mathrm{d}\lambda^d + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(D^i\left((u_n-u)v\right)\right)^2 \, \mathrm{d}\lambda^d \\
&\le \|v\|_\infty^2 \underbrace{\|u_n-u\|_{H^1(\Omega)}^2}_{\xrightarrow{n\to\infty}0} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_\Omega \left(D^i\left((u_n-u)v\right)\right)^2 \, \mathrm{d}\lambda^d}_{\xrightarrow{n\to\infty}0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Als Grenzwert der Folge der C_0^∞-Funktionen $u_n v$ liegt uv damit in $H_0^1(\Omega)$.

□

Aufgabe 3. Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^{1/5} < y < 1\}$.

(a) Finden Sie eine Funktion $u \in H^2(\Omega)$, sodass $u \notin C^0(\overline{\Omega})$. *Hinweis:* $u(x,y) = y^\alpha$.

(b) Warum ist das kein Widerspruch zur stetigen Einbettung von $H^2(\Omega)$ in $C^0(\Omega)$ in zweidimensionalen Gebieten?

Lösung.

(a) Wähle $\alpha = -\frac{1}{2}$, dann ist $u(x,y) = y^\alpha$ auf der y-Achse sicher nicht stetig bis zum Rand und somit nicht in $C^0(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Omega)} &= \int_0^1 \int_{x^{1/5}}^1 (y^{-1/2})^2 dy dx = -\int_0^1 \ln(x^{1/5}) dx = -\frac{1}{5}[x\ln(x) - x]_0^1 = \frac{1}{5} \\
\left\|\frac{\partial}{\partial y} u\right\|_{L^2(\Omega)} &= \int_0^1 \int_{x^{1/5}}^1 \left(-\frac{1}{2}y^{-3/2}\right)^2 dy dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left[-\frac{1}{2}y^{-2}\right]_{x^{1/5}}^1 dx \\
&= -\frac{1}{8}\int_0^1 1 - x^{-2/5} dx = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{12} \\
\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)\right\| &= \int_0^1 \int_{x^{1/5}}^1 \left(\frac{3}{4}y^{-5/2}\right)^2 dy dx = \frac{9}{16}\int_0^1 \left[-\frac{1}{4}y^{-4}\right]_{x^{1/5}}^1 dx \\
&= -\frac{9}{64}\int_0^1 1 - x^{-4/5} dx = -\frac{9}{64}(1-5) = \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

Da die x-Ableitungen wegfallen, ist $u \in H^2(\Omega)$.

Satz 5.9 (Einbettungssatz von Sobolev). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und es gelte $k - n/2 > m$ für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$

d.h., es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Abbildung 1: **PDEs**

b) In unserem Fall ist die Bedingung $k - n/2 = 2 - 1 > 0 = m$ erfüllt, also muss die Bedingung an $\partial\Omega$ verletzt sein. In der Tat kann man zeigen, dass der Rand sich in keiner Umgebung von $(0,0)$ durch eine Lipschitz-stetige Funktion darstellen lassen kann, da

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{1/5}}{x} = x^{-4/5} = +\infty.$$

$\square$

Aufgabe 4. Zeigen Sie die *2. poincarésche Ungleichung:* Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt, wobei $\overline{u} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\ dx$.
Hinweis: Sie dürfen folgende Aussage ohne Beweis verwenden: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $u \in H^1(\Omega)$ mit $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Dann ist u eine konstante Funktion.

Lösung. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gäbe keine solche Konstante, dann finden wir eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ mit

$$\|u_n - \overline{u_n}\|_{L^2(\Omega)} \geq n\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

Definiere nun $v_n := \frac{u_n - \overline{u_n}}{\|u_n - \overline{u_n}\|_{L^2(\Omega)}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|v_n\|_{L^2(\Omega)} &= 1,\\
\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{n},\\
\int_\Omega v_n &= \frac{1}{\|u_n - \overline{u_n}\|_{L^2(\Omega)}}\left(\int_\Omega u_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n dx dy\right) = \frac{1}{\|u_n - \overline{u_n}\|_{L^2(\Omega)}}\left(\int_\Omega u_n dy - \int_\Omega u_n dx\right) = 0.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$. Aus dem Satz von Rellich-Kondrachov erhalten wir vermöge der kompakten Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ eine konvergente Teilfolge $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$. Für den Grenzwert $v := \lim_{k\to\infty} v_{n_k}$ gilt

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1, \qquad \int_\Omega v = 0.$$

Die zweite Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit der Abbildung $v \mapsto \int_\Omega v$, da mit Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_\Omega v\right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}\|1\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)}\lambda^n(\Omega).$$

Außerdem ist $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sogar eine Cauchy-Folge in $H^1(\Omega)$ und konvergiert daher in $H^1(\Omega)$ gegen den selben Grenzwert. Aus der Stetigkeit von $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ bezüglich der $H^1(\Omega)$-Norm folgt also

$$\|\nabla v\| = \lim_{k\to\infty} \|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Laut Hinweis dürfen wir nun behaupten, dass v bereits konstant sein muss. Aus $\int_\Omega v = 0$ folgt damit sogar $v \equiv 0$, im Widerspruch zu $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. $\square$

Partielle Differentialgleichungen

8. Übung am 19. 11. 2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Betrachten Sie die Poisson-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$.

a) Bestimmen Sie die schwache Formulierung für das Randwertproblem (1).

b) Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in V$, wobei $V := \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v(x)dx = 0\}$, für das RWP (1). *Hinweis:* Poincaré-Ungleichung aus Aufgabe 4 von letzter Woche.

c) Diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen und klassischen Lösungen von (1), falls $\int_\Omega f(x)dx \neq 0$.

Lösung.

> **4.** Zeigen Sie die *2. poincarésche Ungleichung:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt
> $$\|u - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$
> wobei $\overline{u} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.
> *Hinweis:* Sie dürfen folgende Aussage ohne Beweis verwenden: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $u \in H^1(\Omega)$ mit $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Dann folgt, dass u eine konstante Funktion ist.

a) Das RWP (1) entspricht genau (5.17) aus dem Skriptum mit

$$A := I, \quad b := 0, \quad c := 0, \quad g := 0.$$

> $$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (A(x)\nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{5.17}$$

Wir führen die Umformulierung dennoch nochmal durch. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $v \in H^1(\Omega)$, integrieren über Ω und integrieren partiell:

$$-\Delta u = f \implies (-\Delta u)v = fv$$

$$\implies \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\Delta u)v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\operatorname{div} \nabla u)v \,\mathrm{d}x \overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\nabla u \cdot \nu)}_{0} v \,\mathrm{d}s$$

Dabei haben wir Satz 5.8 (Gauß für Sobolev-Funktionen) verwendet.

Satz 5.8 (Gauß für Sobolev-Funktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und seien $u_1, \ldots, u_n, w \in H^1(\Omega)$. Setze $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$. Dann gilt*

$$\int_\Omega (\operatorname{div} u) w dx = -\int_\Omega u \cdot \nabla w dx + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu) w ds,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist.

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x, \quad F(v) := \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x$$

Also lautet die schwache Formulierung wie folgt: Finde $u \in H^1(\Omega)$, sodass

$$\forall\, v \in H^1(\Omega) : a(u,v) = F(v)$$

b) V ist, als ker einer stetigen Funktion, ein Hilbertraum.

$$\left| \int_\Omega v \,\mathrm{d}x \right| \leq \|v\|_{L^1(\Omega)} \overset{\text{CSB}}{\leq} \|1\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{|\Omega|^{1/2}}_{<\infty} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$V = \ker\left(H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, v \mapsto \int_\Omega v \,\mathrm{d}x \right)$$

Wir haben hier zwei Optionen.

1. Option (Satz 5.18 (Lemma von Lax-Milgram)):

Definition 5.17. *Seien H ein Hilbertraum und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Wir nennen a* stetig, *wenn eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass*

$$|a(u,v)| \leq K\|u\|_H \|v\|_H \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

Die Bilinearform heißt koerziv, *wenn eine Konstante $\kappa > 0$ existiert, so dass*

$$a(u,u) \geq \kappa \|u\|_H^2 \quad \text{für alle } u \in H.$$

Satz 5.18 (Lemma von Lax-Milgram). *Seien H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform und $F \in H'$. Dann existiert genau ein $u \in H$, so dass*

$$a(u,v) = F(v) \quad \textit{für alle } v \in H. \tag{5.8}$$

Für diese Lösung gilt

$$\|u\|_H \leq \kappa^{-1}\|F\|_{H'}. \tag{5.9}$$

- Stetigkeit von a:

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

- Koerzivität von a:

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \nabla u \, \mathrm{d}x = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \overset{\mathrm{P}}{\geq} \frac{1}{C^2+1}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \frac{1}{C^2+1}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

- Stetigkeit von F:

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega fv \, \mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |fv| \, \mathrm{d}x = \|fv\|_{L^1(\Omega)} \overset{\mathrm{CSB}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

2. Option (Satz 5.1 (Darstellungssatz von Riesz)):

Satz 5.1 (Darstellungssatz von Riesz). *Seien H ein Hilbertraum und $F \in H'$. Dann existiert genau ein $u \in H$, so dass*

$$(u,v) = F(v) \quad \textit{für alle } v \in H.$$

Aus der 2. poincaréschen Ungleichung erhalten wir $\exists\, C > 0 : \forall\, v \in V$:

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v - \overline{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \overset{\mathrm{P}}{\leq} (C^2+1)\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Daher definiert $a : V \times V \to \mathbb{R}$ ein zu $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}$ äquivalentes Skalarprodukt auf V. Das macht (V,a) zu einem Hilbertraum.

$$\implies a \sim (\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)} \text{ auf } V \implies (V,a) \text{ Hilbertraum}$$

Nicht zuletzt ist $F \in V'$ ein lineares und (bzgl. a) stetiges Funktional.

$$\begin{aligned}|F(v)| = \left|\int_\Omega fv \, \mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |fv| \, \mathrm{d}x \overset{\mathrm{CSB}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ = \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v - \overline{v}\|_{L^2(\Omega)} \overset{\mathrm{P}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Laut dem Lemma von Lax-Milgram, bzw. Darstellungssatz von Riesz existiert nun genau ein $u \in V$, sodass $a(u,v) = F(v)$ für alle $v \in V$.

$$\implies \exists!\, u \in V : \forall\, v \in V : a(u,v) = F(v)$$

Damit u auch eine schwache Lösung in $H^1(\Omega)$ (und nicht nur in V) ist, müssen wir diese Gleichheit jetzt noch für alle $w \in H^1(\Omega)$ zeigen. Sei also $w \in H^1(\Omega)$, dann ist $w - \overline{w} \in V$.

$$w \in H^1(\Omega) \implies \int_\Omega w - \overline{w} \;\mathrm{d}x = \int_\Omega w \;\mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{w} \;\mathrm{d}x = \int_\Omega w \;\mathrm{d}x - |\Omega|\overline{w} = 0 \implies w - \overline{w} \in V$$

Damit können wir den oberen Teil auf $w - \overline{w}$ anwenden.

$$\begin{aligned}\implies a(u,w) = a(u,w) - \int_\Omega \nabla u \underbrace{\nabla \overline{w}}_{0} \;\mathrm{d}x = a(u,w) - a(u,\overline{w}) = a(u, w - \overline{w})\\ = F(w - \overline{w}) = F(w) - F(\overline{w}) = F(w) - \int_\Omega f\overline{w} \;\mathrm{d}x = F(w) - \overline{w} \underbrace{\int_\Omega f \;\mathrm{d}x}_{0} = F(w)\end{aligned}$$

c) Für $\int_\Omega f(x) \;\mathrm{d}x \neq 0$ und eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ folgt nach Integrieren der Differentialgleichung mit Satz 5.8 (Gauß für Sobolev-Funktionen) ein Widerspruch!

$$0 \neq \int_\Omega f(x) \;\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u \;\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div} \nabla u \;\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{0} \;\mathrm{d}s = 0$$

Also kann es in dem Fall keine schwachen und insbesondere keine klassischen Lösungen geben.

$\square$

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Zeigen Sie, dass die *biharmonische Gleichung*

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

eine schwache Lösung besitzt, falls $f \in L^2(\Omega)$. Hierbei ist ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$. Anleitung:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die schwache Formulierung des obigen Randwertproblems

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \;\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \;\mathrm{d}x \text{ für alle } v \in H_0^2(\Omega)$$

lautet.

(b) Zeigen Sie, dass $a(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v \;\mathrm{d}x$ eine stetige und koerzive Bilinearform ist. Verwenden Sie hierbei folgende Ungleichung: Für alle $u \in H_0^2(\Omega)$ gilt $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$.

(c) Zeigen Sie die Existenz einer schwachen Lösung des Randwertproblems.

Lösung.

(a) Wir zeigen zunächst, dass für $v \in H_0^2(\Omega)$ auch $\nabla v \in H_0^1(\Omega)$. Aus der Definition von $H_0^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}}$ folgt, dass wir $H_0^2(\Omega)$-Funktionen als $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$-Grenzwert von $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen darstellen können.

$$v \in H_0^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}} \implies \exists\, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega) : v_n \xrightarrow[n\to\infty]{H^2(\Omega)} v$$

$$\implies \|v - v_n\|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le 2} \int_\Omega |D^\alpha (v - v_n)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\begin{aligned}\implies \|\nabla v - \nabla v_n\|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla(v - v_n)\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le 1} \int_\Omega |D^\alpha \nabla (v - v_n)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le 2} \int_\Omega |D^\alpha (v - v_n)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} = \|v - v_n\|_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

$$\implies \nabla v \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = H_0^1(\Omega)$$

Laut Satz 5.7 (Charakterisierung von H_0^1-Funktionen) verschwindet der Trace von v. Das gilt nun aber auch für ∇v.

$$\implies T(\nabla v) = 0, \quad T(v) = 0$$

> **Satz 5.7 (Charakterisierung von H_0^1-Funktionen).** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei ferner $u \in H^1(\Omega)$. Dann gilt*
>
> $$u \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{genau dann, wenn} \quad T(u) = 0.$$

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $v \in H_0^2(\Omega)$, integrieren über Ω und integrieren zweimal partiell:

$$\Delta^2 u = f \implies (\Delta^2 u)v = fv$$

$$\begin{aligned}\implies F(v) := \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\Delta^2 u)v \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega (\operatorname{div} \nabla \Delta u) v \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} -\int_\Omega \nabla\Delta u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\nabla(\Delta u)\cdot \nu)\underbrace{T(v)}_{0} \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \Delta u \operatorname{div} \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} (\underbrace{T(\nabla v)}_{0} \cdot \nu) \Delta u \,\mathrm{d}s = \int_\Omega \Delta u \Delta v \,\mathrm{d}x =: a(u,v)\end{aligned}$$

(b) • Stetigkeit:
$|\cdot|$ bezeichnet hier (unter Anderem) die Frobenius-Norm. Hess liefert die Hesse-Matrix.

$$|\Delta v|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u\right|^2 \overset{\text{CSB}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u\right|^2\right) \leq n \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u\right|^2 = n|\operatorname{Hess} u|^2$$

$$\begin{aligned} \implies |a(u,v)| = \left|\int_\Omega \Delta u \Delta v \ \mathrm{d}x\right| &\leq \int_\Omega |\Delta u \Delta v| \ \mathrm{d}x \overset{\text{CSB}}{\leq} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 \ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\Delta v|^2 \ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_\Omega n|\operatorname{Hess} u|^2 \ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega n|\operatorname{Hess} v|^2 \ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= n\left(\int_\Omega |\operatorname{Hess} u|^2 \ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\operatorname{Hess} v|^2 \ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= n\|\operatorname{Hess} u\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{Hess} v\|_{L^2(\Omega)} \leq n\|u\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

• Koerzivität:

$$a(u,u) = \int_\Omega \Delta u \Delta u \ \mathrm{d}x = \int_\Omega |\Delta u|^2 \ \mathrm{d}x = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C^{-2}\|u\|_{H^2(\Omega)}^2$$

(c) Laut Konstruktion, ist H_0^2 ist mit $(\cdot,\cdot)_{H^2(\Omega)}$ ein Hilberbraum. In (b) haben wir gezeigt, dass die Bilinearform a stetig und koerziv ist. $F \in H^{-2}(\Omega)$ ist ein lineares und stetiges Funktional.

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega fv \ \mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |fv| \ \mathrm{d}x = (\|fv\|_{L^1(\Omega)}) \overset{\text{CSB}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)}$$

Laut dem Lemma von Lax-Milgram existiert nun genau ein $u \in H_0^2(\Omega)$, sodass $a(u,v) = F(v)$ für alle $v \in H_0^2(\Omega)$.

$$\implies \exists!\, u \in H_0^2(\Omega) : \forall\, v \in H_0^2(\Omega) : a(u,v) = F(v)$$

□

Aufgabe 3. Sei $\Omega = (0,1)$. Lösen Sie das folgende Problem: Gesucht ist ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega a(x)u'(x)v'(x) - v(x)dx = 0 \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei $a(x) = \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{2}]}(x) + 2 \cdot \mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1)}(x)$.

Lösung. Motivation: Für $u \in C^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ und $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt mit partieller Integration für Sobolevfunktionen, sowie der Tatsache, dass aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes $v \in C(\overline{\Omega})$ ist und somit

$Tv = v|\partial\Omega, Tu = u|\partial\Omega$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)u'(x)v'(x) &= \int_\Omega v(x)dx \\
\iff \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x)v'(x)dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 u'(x)v'(x)dx &= \int_0^1 v(x)dx \\
\iff u'\left(\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}\right) - u'\left(\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}\right) - 2\int_{\frac{1}{2}}^1 u''(x)v(x)dx \int_0^{\frac{1}{2}} u''(x)v(x) &= \int_0^1 v(x)dx \\
\iff -2\int_{\frac{1}{2}}^1 u''(x)v(x)dx - \int_0^{\frac{1}{2}} u''(x)v(x) &= \int_0^1 v(x)dx \\
\iff \int_0^1 v(x)(a(x)u''(x)+1)dx &= 0
\end{aligned}$$

Ansatz: Suche $u \in C^1(\Omega) \subset H_1(\Omega)$, sodass $u''(x)a(x) + 1 = 0$ punktweise, sowie $u(0) = u(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
u(x) = -\int\int \frac{1}{a(z)}dzdy &= -\int\int \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{2}]}(x) + \frac{1}{2}\cdot \mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1)}(x)dzdy \\
&= -\int y - \frac{2y-1}{4}\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1)}(y) + Cdy \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{4x^2-4x+1}{16}\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1)}(x) + Cx + D
\end{aligned}$$

Damit $u \in H_0^1(\Omega)$, muss noch $u(0) = u(1) = 0$ erreicht werden

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} u(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1-1+1}{4} + C + D \iff C + D = \frac{1}{4} \\
0 &\overset{!}{=} u(0) = D \iff D = 0 \iff C = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Unser Lösungskandidat $u \in C^1(\Omega)$ ist also

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\frac{1}{16}(8x^2 - 4x - (4x^2-4x+1)\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1)}(x)) \\
u'(x) &= -\frac{1}{16}(16x - 4 - (8x-4)\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1)}(x))
\end{aligned}$$

Berechne nun die distributionelle Ableitung von $u'(x)$:

$$\begin{aligned}
\langle u'', \phi\rangle = \langle u', -\phi'\rangle = -\int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx &= \frac{1}{16}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(16x-4)\phi'(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (16x-4-8x+4)\phi'(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{16}\left([(16x-4)\phi(x)]_{x=0}^{\frac{1}{2}} + [8x\phi(x)]_{x=1/2}^1 - 16\int_0^{\frac{1}{2}}\phi(x) - 8\int_{\frac{1}{2}}^1 \phi(x)dx\right) \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{a(x)}\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Also ist $u \in H_0^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, es gilt $a(x)u''(x) + 1 = 0$ fast überall. Damit können wir alle Schritte aus der

Motivation genauso wieder zurückgehen und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 v(x)(a(x)u''(x)+1)dx = 0\\
\iff& -\int_0^{\frac{1}{2}} u''(x)v(x) - 2\int_{\frac{1}{2}}^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx\\
\iff \underbrace{u'\left(\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}\right) - u'\left(\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0}& -\int_0^{\frac{1}{2}} u''(x)v(x) - 2\int_{\frac{1}{2}}^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx\\
\overset{PI}{\iff}& \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x)v'(x)dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx\\
\iff& \int_\Omega a(x)u'(x)v'(x) = \int_\Omega v(x)dx
\end{aligned}$$

□

Lösung. Wir stellen zunächst einen Ansatz für u auf, indem wir partiell integrieren (streng genommen nach Satz 5.8 (Gauß für Sobolev-Funktionen)).

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \int_\Omega a(x)u'(x)v'(x) - v(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 2u'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega v(x)\ \mathrm{d}x\\
&\overset{\mathrm{PI}}{=} u'(x)v(x)\Big|_{x=0}^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} u''(x)v(x)\ \mathrm{d}x + 2u'(x)v(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 2u''(x)v(x)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega v(x)\ \mathrm{d}x\\
&= u'\left(\frac{1}{2}+\right)v\left(\frac{1}{2}-\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} u''(x)v(x)\ \mathrm{d}x - 2u'\left(\frac{1}{2}-\right)v\left(\frac{1}{2}+\right) - \int_{\frac{1}{2}}^1 2u''(x)v(x)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega v(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\implies u'\left(\frac{1}{2}+\right)v\left(\frac{1}{2}-\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} u''(x)v(x)\ \mathrm{d}x - 2u'\left(\frac{1}{2}-\right)v\left(\frac{1}{2}+\right) - \int_{\frac{1}{2}}^1 2u''(x)v(x)\ \mathrm{d}x \overset{!}{=} \int_\Omega v(x)\ \mathrm{d}x$$

Laut Satz 5.9 (Einbettungssatz von Sobolev), ist v stetig.

$$\implies v \in C(\Omega)$$

Satz 5.9 (Einbettungssatz von Sobolev). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und es gelte $k - n/2 > m$ für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$

d.h., es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Laut Satz 5.6 (Spur von Sobolevfunktionen) und Satz 5.7 (Charakterisierung von H_0^1-Funktionen), muss $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ am Rand $\partial\Omega = \{0,1\}$ verschwinden.

$$\implies v(0) = v(1) = 0$$

Satz 5.6 (Spur von Sobolevfunktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator, genannt die* Spur *(engl.: trace), $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit der Eigenschaft*

$$T(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \text{für alle } u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Satz 5.7 (Charakterisierung von H_0^1-Funktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei ferner $u \in H^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad T(u) = 0.$$

Das müsste auch für u gelten. u setzen wir daher an als quadratischen Spline mit Stützstellen $0, \frac{1}{2}, 1$.

$$u(x) := \begin{cases} c_1x^2 + c_2x + c_3, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ c_4x^2 + c_5x + c_6, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$
$$\implies u'(x) = \begin{cases} 2c_1x + c_2, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2c_4x + c_5, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$
$$\implies u''(x) = \begin{cases} 2c_1, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2c_4, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Aus unserer oberern Umformulierung können wir nun folgende Bedingungen ziehen.

$$\implies \begin{cases} u'\left(\frac{1}{2}-\right) = 2u'\left(\frac{1}{2}+\right) & \implies 2(2c_1\left(\frac{1}{2}\right) + c_2) = 2c_4\left(\frac{1}{2}\right) + c_5 \\ u''(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} & \implies 2c_1 = -1, \quad 2c_4 = -\frac{1}{2} \\ u\left(\frac{1}{2}-\right) = u\left(\frac{1}{2}+\right) & \implies c_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1}{2}\right) + c_3 = c_4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c_5\left(\frac{1}{2}\right) + c_6 \\ u(0) = 0 & \implies c_3 = 0 \\ u(1) = 0 & \implies c_4 + c_5 + c_6 = 0 \end{cases}$$

Das können wir auch schön als Lineares Gleichungssystem schreiben und lösen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{24} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir unseren Kandidaten für u.

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{24}x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Von diesem müssen wir noch zeigen, dass $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Schritt („H^1“):

(i) u ist stetig, also auch u^2. $\overline{\Omega}$ ist kompakt. Daher ist u^2 integrierbar, d.h. u quadratisch integrierbar auf Ω.

$$\begin{aligned} u \in C(\Omega) &\implies u^2 \in C(\Omega) \\ \overline{\Omega} \text{ kompakt} &\implies u^2 \in L^1(\Omega) \implies u \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

(ii) Wir zeigen zunächst, dass die distributionelle Ableitung u' von u wie folgt aussieht.

$$u'(x) \overset{!}{=} \begin{cases} -x + \frac{11}{24}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Dazu rechnen wir, via partieller Integration, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &:= -\langle u, \varphi' \rangle \\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{24}x\right)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}\right)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{PI}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-x + \frac{11}{24}\right)\varphi(x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\varphi(x)\Big|_{x=0}^{\frac{1}{2}} - \frac{11}{24}x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\right)\varphi(x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{4}x\varphi(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{6}x\varphi(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{12}\varphi(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{11}{24}\left(\frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \int_0^1 u'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{8} - \frac{11}{48} - \frac{1}{16} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)}_{0}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 u'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

u' hat nur eine Unstetigkeitsstelle (in $\frac{1}{2}$). Daher können wir analog zu (ii) argumentieren, dass $u' \in L^2(\Omega)$.

$$\implies u' \in L^2(\Omega)$$

$$\implies u, u' \in L^2(\Omega) \implies u \in H^1(\Omega)$$

2. Schritt („H_0“):

u ist stetig und verschwindet am Rand. Laut Satz 5.7 (Charakterisierung von H_0^1-Funktionen), sind wir fertig.

$$u \in C(\Omega) \implies T(u) = u|_{\partial\Omega} = 0 \implies u \in H_0^1(\Omega)$$

□

Aufgabe 4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und im ersten Argument stetig differenzierbar mit $f_u(u,x) \geq 0$ für alle $(u,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$, und $\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Delta u = f(u,x) \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega$$

höchstens eine klassische Lösung besitzt (*Hinweis:* Mittelwertsatz der Differentialrechnung).

(b) Finden Sie für $n = 1$ ein Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f'(u) < 0$ für alle u so, dass

$$u'' = f(u) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

nicht eindeutig lösbar ist.

Lösung.

(a) Seien u_1 und u_2 klassische Lösungen und $u := u_1 - u_2$. Laut dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\exists\, \vartheta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (0,1):$

$$\begin{aligned}\Delta u(x) = \Delta u_1(x) - \Delta u_2(x) &= f(u_1(x),x) - f(u_2(x),x) \\ &= \underbrace{f_u\left(\vartheta\begin{pmatrix}u_1(x)\\u_2(x)\end{pmatrix} u_1(x) - \left(1 - \vartheta\begin{pmatrix}u_1(x)\\u_2(x)\end{pmatrix}\right)u_2(x), x\right)}_{=:c(x)} \underbrace{(u_1(x) - u_2(x))}_{u(x)}\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Differentialoperator $L := -\Delta + c$. u erfüllt also das folgende RWP.

$$Lu = 0 \text{ auf } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

$$\implies \inf_{x\in\partial\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) = 0$$

Laut Voraussetzung ist $c \geq 0$.

$$\forall\, (u,x) \in \mathbb{R} \times \Omega : f_u(u,x) \geq 0 \implies c \geq 0$$

Wir können also Satz 5.27 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$) auf das konstruierte RWP anwenden.

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad x \in \Omega. \tag{5.20}$$

Satz 5.27 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$). *Sei $c \geq 0$ in Ω. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte*

$$L(u) \leq 0 \quad \textit{bzw.} \quad L(u) \geq 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

Dann folgt

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \max\left\{0, \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)\right\} \quad \textit{bzw.} \quad \inf_{x \in \Omega} u(x) \geq \min\left\{0, \inf_{x \in \partial\Omega} u(x)\right\}.$$

$$\begin{aligned}
&\implies 0 = \min\left\{0, \inf_{x \in \partial\Omega} u(x)\right\} \leq \inf_{x \in \Omega} u(x) \leq \sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \max\left\{0, \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)\right\} = 0 \\
&\implies u = 0 \\
&\implies u_1 = u_2
\end{aligned}$$

(b)

$$\Omega = (0, \pi), \quad f := -\operatorname{id}, \quad u_\pm := \pm \sin$$

$\square$

Partielle Differentialgleichungen

9. Übung am 26. 11. 2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. Sei $u(x,t)$ eine beschränkte Lösung des Cauchyproblems für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $a > 0$ ist und $\varphi \in C(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = b, \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = c$$

erfüllt. Berechnen Sie den Grenzwert von $u(x,t),\ x \in \mathbb{R}$ für $t \to \infty$.

Lösung. Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(\cdot,t), u_t(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.
Wir gehen analog zum Skript vor und erhalten

$$0 = \mathscr{F}(u_t - a^2 u_{xx}) = \hat{u_t} + a^2|k|^2\hat{u}$$

Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $\hat{u}(k,0) = \hat{\varphi}(k)$ lautet

$$\hat{u}(k,t) = \hat{\varphi}(k)\exp(-(ak)^2 t)$$

Mit der Inversionsformel erhalten wir mit $w = \mathscr{F}^{-1}(\exp(-(ak)^2 t))$

$$\begin{aligned} u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}(\hat{u})(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k,t)\exp(ikx)dk = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k)\exp(-(ak)^2 t)\exp(ikx)dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k)\hat{w}(k,t)\exp(ikx)dk = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi * w}(k,t)\exp(ikx)dk = (\varphi * w)(x,t). \end{aligned}$$

Nun berechnen wir w: Mit

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \mathscr{F}^{-1}\left(\sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)\exp(iyx)dy$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(-(ak)^2 t)\exp(ikx)dk = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2ta}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\exp\left(\frac{iyx}{\sqrt{2ta}}\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4\pi ta}}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\exp\left(\frac{iyx}{\sqrt{2ta}}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi}\sqrt{ta}}\exp\left(\frac{-k^2}{2}\right)|_{k=x/(a\sqrt{2t})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}\sqrt{ta}}\exp\left(\frac{-x^2}{4a^2 t}\right) \end{aligned}$$

Also erhalten wir (mit der Substitution $z = \frac{y}{a\sqrt{2t}}$)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \varphi * w(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}\sqrt{t}a} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-y^2}{4a^2 t}\right) \varphi(x-y) dy \\
&= \frac{a\sqrt{2t}}{\sqrt{4\pi}\sqrt{t}a} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \varphi(x - z(a\sqrt{2t})) dz \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \varphi(x - z(a\sqrt{2t})) dz + \int_{\mathbb{R}^-} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \varphi(x - z(a\sqrt{2t})) dz \right)
\end{aligned}
$$

Nun können wir den Grenzwert ausrechnen (mithilfe Majorisierter Konvergenz):
Da $\phi \in C(\mathbb{R})$ und die Grenzwerte im Unendlichen endlich sind, ist auch $M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| < \infty$ und $g(z) := M \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)$ eine integrierbare Majorante.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} u(x,t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \varphi(x - z(a\sqrt{2t})) dz + \int_{\mathbb{R}^-} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \varphi(x - z(a\sqrt{2t})) dz \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi}} \left(c \int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz + b \int_{\mathbb{R}^-} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz \right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi}} (b+c) = \frac{1}{2}(b+c)
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\Delta^2 u + u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

mit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

(i) Bestimmen Sie formal für eine Lösung u eine Darstellung der Fourier-Transformierten $\hat{u}$ in Abhängigkeit von $\hat{f}$.

(ii) Zeigen Sie $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ für $n \leq 7$.
Hinweis: Sie können verwenden, dass $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lösung.

(i) Es gilt $\Delta^2 u = \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}$. Weiters stellen wir fest, dass

$$\sum_{i,j=0}^n k_i^2 k_j^2 = \sum_{i=0}^n k_i^2 \left(\sum_{j=0}^n k_j^2 \right) = \sum_{i=0}^n k_i^2 \; |k|^2 = |k|^4.$$

Wir wenden nun auf beide Seiten der Differentialgleichung die Fouriertransformation an und erhalten mit der gerade gemachten Hilfsrechnung

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} \right)(k) + \hat{u}(k) &= \hat{f}(k) \\
\left(\sum_{i,j=0}^n k_i^2 k_j^2 \right) \hat{u}(k) + \hat{u}(k) &= \hat{f}(k) \\
\left(|k|^4 + 1\right) \hat{u}(k) &= \hat{f}(k) \\
\hat{u}(k) &= \frac{\hat{f}(k)}{|k|^4 + 1}.
\end{aligned}
$$

(ii) Aus Teil (i) und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakowski folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}| \,\mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\hat{f}(k)}{|k|^4+1} \right| \mathrm{d}k \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\| \frac{1}{|k|^4+1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Für die Abschätzung des zweiten Faktors ist die Tatsache hilfreich, dass die Funktion $\frac{1}{|k|^4+1}$ radialsymmetrisch ist. Deshalb können wir die Koflächenformel anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{|k|^4+1} \right|^2 \mathrm{d}k &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|k|^8+2|k|^4+1} \,\mathrm{d}k \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|k|^8+1} \,\mathrm{d}k \\
&= \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{r^8+1} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(0)) \frac{1}{r^8+1} \,\mathrm{d}r \\
&= S_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{r^8+1} \,\mathrm{d}r \\
&\le S_n \left(\int_0^1 1 \,\mathrm{d}r + \int_1^\infty \frac{1}{r^2} \,\mathrm{d}r \right) < \infty;
\end{aligned}$$

also gilt $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir durch eine wesentlich simplere Überlegung:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 \,\mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\hat{f}(k)}{|k|^4+1} \right|^2 \mathrm{d}k \le \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(k) \right|^2 \mathrm{d}k < \infty.$$

□

Aufgabe 3. Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die *freie Schrödingergleichung*

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u & \text{in } \Omega = \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wobei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und i die imaginäre Einheit ist.

(i) Bestimmen Sie für eine Lösung u des AWP mit $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \ge 0$ eine Darstellung mittels Fourier-Transformation.

(ii) Zeigen Sie, dass $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}$ für $t > 0$.

Lösung.

(i) Wir betrachten das Fouriertransformierte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
i\widehat{u}_t = \widehat{-\Delta u} = -\sum_{i=1}^n \widehat{\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \widehat{u} = |x|^2 \widehat{u} \\
\widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(x).
\end{aligned}$$

Eine Lösung davon ist gegeben durch

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{-i|k|^2 t}$$

und mit der Definition $\widehat{w}(k,t) := \mathrm{e}^{-i|k|^2 t}$ erhalten wir

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k)\widehat{w}(k,t)\mathrm{e}^{ix\cdot k}\ \mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f * w}(k,t)\mathrm{e}^{ix\cdot k}\ \mathrm{d}k = (f * w)(x,t)$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt mit der Koflächenformel

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i|k|^2 t}\mathrm{e}^{ik\cdot x}\ \mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i(|k|^2 t - k\cdot x)}\ \mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\left|k\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right|^2 + i\frac{|x|^2}{4t}}\ \mathrm{d}k \\
&= (2\pi)^{-n}\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\left|k\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right|^2}\ \mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i|u|^2}\ \mathrm{d}u \\
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial B_r(0)} \mathrm{e}^{-i|y|^2}\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y)\ \mathrm{d}r \\
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(0))\mathrm{e}^{-ir^2}\ \mathrm{d}r \\
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} S_n \int_{\mathbb{R}^+} r^{n-1}\mathrm{e}^{-ir^2}\ \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

oder aber mit dem Wert des Fresnel-Integrals

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i|k|^2 t}\mathrm{e}^{ik\cdot x}\ \mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i(|k|^2 t - k\cdot x)}\ \mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\left|k\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right|^2 + i\frac{|x|^2}{4t}}\ \mathrm{d}k \\
&= (2\pi)^{-n}\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\left|k\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right|^2}\ \mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i|u|^2}\ \mathrm{d}u \\
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \prod_{j=1}^{n} 2\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-iu_j^2}\ \mathrm{d}u_j \\
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \prod_{j=1}^{n} 2\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} \cos\left(u_j^2\right)\ \mathrm{d}u_j}_{=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}} - i\underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} \sin\left(u_j^2\right)\ \mathrm{d}u_j}_{=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}}\right) \\
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \prod_{j=1}^{n} 2\frac{2\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \pi^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-in\frac{\pi}{4}} = (4i\pi t)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich unsere Darstellung

$$u(x,t) = (4i\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy$$

(ii) Wir erinnern uns an die Tatsache aus Analysis, dass die Fouriertransformation (in der dortigen Definition) eine Isometrie ist und berechnen

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left\|\widehat{f}\mathrm{e}^{-i|\cdot|^2 t}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(x)\right|^2 \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-i|x|^2 t}\right|^2}_{=1}\ \mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Betrachten Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{für } x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ u_x(\pi,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,\pi), \end{cases}$$

wobei $u_0 \in L^2(0,\pi)$.

(i) Bestimmen Sie ein vollständiges Orthonormalsystem $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,\pi)$ mit $\phi_n'' = \lambda_n \phi_n$ in $(0,\pi)$ mit Randbedingungen $\phi_n(0) = \phi_n'(\pi) = 0$.

(ii) Konstruieren Sie aus $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lösungsformel für das obige parabolische Problem.

(iii) Welche Abklingrate (für $t \to \infty$) hat die Wärmeenergie $E(t) := \int_0^\pi u(x,t)dx$ für eine Lösung u?

Lösung. (i) Wir betrachten zunächst Lösungen der Differentialgleichung

$$\phi_n = c_1 e^{\sqrt{\lambda_n}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$$

Fall 1: $\lambda_n > 0$:
Dann hat die Lösung folgende Form:

$$\phi_n(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\lambda_n}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda_n}x)$$

Diese kann die Randbedingungen jedoch nur im trivialen Fall $c_1, c_2 = 0$ erfüllen, da

$$\begin{aligned} \phi_n(0) &= c_1 \overset{!}{=} 0 \\ \implies \phi'(\pi) &= c_2\sqrt{\lambda_n}\cosh(\sqrt{\lambda_n}x) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Nun ist cosh jedoch eine strikt positive Funktion, also muss auch $c_2 = 0$.
Fall 2: $\lambda_n = 0$:
Hier ist unsere Differentialgleichung nur $\phi_n'' = 0$, hat also die Form $c_1 x + c_2$. Auch hier erhalten wir $\phi_n \equiv 0$.
Fall 3: $\lambda_n < 0$:
Lösungen sind gegeben durch

$$\phi_n(x) = c_1 \sin(\sqrt{|\lambda_n|}x) + c_2 \cos(\sqrt{|\lambda_n|}x)$$

Für die RB setzen wir ein

$$\begin{aligned} \phi_n(0) &= c_2 \overset{!}{=} 0 \\ \implies \phi_n'(\pi) &= c_2\sqrt{|\lambda_n|}\cos(\sqrt{|\lambda_n|}\pi) \overset{!}{=} 0 \iff \sqrt{|\lambda_n|}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Wir haben also zunächst mit der Wahl $k := n-1$ eine Darstellung von ϕ_n, mit einer noch zu bestimmenden Konstante c, als

$$\phi_n(x) = c\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

Zweimaligens differenzieren liefert

$$\phi_n''(x) = \underbrace{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}_{\lambda_n} c\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

Da $\left\|\sin(\frac{2n-1}{2}x)\right\|_{L^2((0,\pi))} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ wählen wir $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ um $\|\phi_n\|_{L^2((0,\pi))} = 1$ zu erhalten.

Wir haben also ein Orthonormalsystem gefunden, von dem wir noch zeigen wollen, dass es auch vollständig ist. Aus der Analysis wissen wir, dass $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}^+\}$ eine vollständiges Orthonormalsystem vom $L^2(-\pi,\pi)$ ist. Betrachten wir also eine beliebige Funktion $f \in L^2(0,\pi)$ und setzen wir diese ungerade fort auf $(-\pi,\pi)$, wissen wir, dass wir das neue $\tilde{f}$ darstellen können als

$$\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{f}, \cos(nx))_{L^2(-\pi,\pi)}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{f}, \sin(nx))_{L^2(-\pi,\pi)}\sin(nx)$$

Die cosinus-Teile fallen weg, da $\tilde{f}$ ungerade ist.

Aus der oberen Gleichheit folgt also, dass für unser $f \in L^2(0,\pi)$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \sqrt{2}\sin(nx))_{L^2(0,\pi)}\sqrt{2}\sin(nx)$$

und somit $\{\sqrt{2}\sin(nx) : n \in \mathbb{N}^+\}$ eine Orthonormalbasis ist. Daraus kann man vermutlich zeigen, dass auch unser Orthonormalsystem $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\frac{2n-1}{2}x) : n \in \mathbb{N}^+\}$ vollständig ist - darauf müssen wir an dieser Stelle leider verzichten.

(ii) Da wir ein vollständiges Orthonormalsystem haben, konvergiert die folgende Reihe unbedingt und damit absolut.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n = u_0$$

Folgende Funktion ist also wohldefiniert.

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left|e^{\lambda_n t}\right|}_{\leq 1} |(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n| < \infty$$

Diese Funktion löst die PDE, dazu setzen wir ein

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n = 0 \\
u(0,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\sqrt{-\lambda_k}0) = 0 \\
u_x(\pi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\sqrt{-\lambda_k}\pi) = 0 \\
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n(x) = u_0(x)
\end{aligned}
$$

(iii) Unter der Annahme, dass mit der Abklingrate eine Ähnliche Ungleichung wie in (6.15) im Skript gemeint ist, schätzen wir ab (wobei λ_1 der betragsmäßig kleinste (d.h. größte) EW ist)

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n \right\|_{L^2}^2 \\
&\overset{\text{Pythagoras}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| e^{\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}\phi_n \right\|_{L^2}^2 \\
&= \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n t}(u_0, \phi_n)_{L^2}^2 \phi_n^2 \, \mathrm{d}x \\
&\leq e^{2\lambda_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \phi_n)_{L^2}^2 \underbrace{\|\phi_n\|_{L^2(0,\pi)}^2}_{1} \overset{\text{Parceval}}{=} e^{2\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir eine Abschätzung

$$
|E(t)| \leq \int_0^{\pi} |u(x,t)| \, \mathrm{d}x \leq \sqrt{\pi}\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq \sqrt{\pi}e^{\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2}
$$

□

Aufgabe 5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und u eine klassische Lösung des parabolischen Problems

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta u + \gamma u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty), \\
u = u_0 & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\},
\end{cases}
$$

wobei $u_0 \in C_0(\Omega)$ und $\gamma > 0$. Zeigen Sie, dass

(i) $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \exp(-(\lambda_1 + \gamma)t)$ für $t > 0$,

(ii) $|u(x,t)| \leq C_\infty \exp(-\gamma t)$ für $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$,

wobei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert des *Laplace*-Operators $-\Delta$ und C_2, C_∞ positive Konstanten sind.

Lösung.

$$u_t - \operatorname{div}(A\nabla u) + cu = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \quad u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{6.7}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty). \tag{6.8}$$

Satz 6.13 (Existenz von Lösungen homogener Probleme). *Sei $u_0 \in L^2(\Omega)$. Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem (v_n) von $L^2(\Omega)$ und eine monoton wachsende Folge (λ_n) positiver Zahlen mit $\lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$, so dass*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(u_0, v_k)_{L^2} v_k \tag{6.13}$$

die eindeutig bestimmte Lösung von (6.7)-(6.8) *im folgenden Sinne ist: Es gilt*

$$u \in C^0([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\Omega)), \quad u(t) \in D(L) \text{ für alle } t > 0, \tag{6.14}$$

und die Differentialgleichung $u_t(t) + L(u(t)) = 0$ ist für alle $t > 0$ erfüllt. Ferner gilt die A-priori-Abschätzung

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.15}$$

(i) Wir behaupten, dass $\lambda_1 + \gamma$ der kleinste Eigenwert von $L := -\Delta + \gamma$ ist. Angenommen, $\tilde{\lambda}_1 < \lambda_1 + \gamma$ wäre ein kleinerer Eigenwert. Sei $\tilde{v}_1$ der zugehörige Eigenvektor.

$$\begin{aligned} &\implies \tilde{\lambda}_1 \tilde{v}_1 = L\tilde{v}_1 = (-\Delta + \gamma)\tilde{v}_1 = -\Delta\tilde{v}_1 + \gamma\tilde{v}_1 \\ &\implies (\tilde{\lambda}_1 - \gamma)\tilde{v}_1 = -\Delta\tilde{v}_1 \end{aligned}$$

Damit wäre aber $\tilde{\lambda}_1 - \gamma$ ein kleinerer Eigenwert von $-\Delta$ als λ_1. Widerspruch!

$$\tilde{\lambda}_1 < \lambda_1 + \gamma \implies \tilde{\lambda}_1 - \gamma < \lambda_1$$

Weil nun $\lambda_1 + \gamma$ tatsächlich der kleinste Eigenwert von L ist, folgt die Behauptung aus Satz 6.13 (Existenz von Lösungen homogener Probleme).

$$\implies \|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \overset{6.13}{\leq} e^{-(\lambda_1+\gamma)t} \underbrace{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}_{=:C_2}$$

(ii) Die Eigenwerte von L sind genau die Eigenwerte von $-\Delta$, um γ verschoben.

„$\implies$“: Sei (λ, v) Eigenpaar von $-\Delta$, dann ist $(\lambda + \gamma, v)$ Eigenpaar von L.

$$(\lambda + \gamma)v = \lambda v + \gamma v = -\Delta v + \gamma v = (-\Delta + \gamma)v = Lv$$

„$\impliedby$“: Sei $\tilde{\lambda}, \tilde{v}$ Eigenpaar von L, dann ist $(\tilde{\lambda} - \gamma, \tilde{v})$ Eigenpaar von $-\Delta$.

$$(\tilde{\lambda} - \gamma)\tilde{v} = \tilde{\lambda} - \gamma\tilde{v} = L\tilde{v} - \gamma\tilde{v} = (-\Delta + \gamma)\tilde{v} - \gamma\tilde{v} = -\Delta\tilde{v} + \gamma\tilde{v} - \gamma\tilde{v} = -\Delta\tilde{v}$$

Sei $\tilde{u}$ Lösung der PDE mit $\gamma = 0$. Wir betrachten die Darstellung (6.13) aus Satz 6.13 (Existenz von Lösungen homogener Probleme) für $\tilde{u}$.

$$\Longrightarrow \forall\, x \in \Omega : \tilde{u}(x,t) \begin{cases} \xrightarrow{t \to 0} u_0, \\ \xrightarrow{t \to \infty} 0, \end{cases} \qquad \forall\, x \in \partial\Omega : \tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u_0(0) = 0, & t = 0, \\ 0, & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

Weil $\tilde{u} \in C^2$ stetig ist, also auch beschränkt.

$$\Longrightarrow |u(x,t)| \overset{(6.13)}{=} \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k + \gamma)t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k(x) \right| = e^{-\gamma t} \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k(x) \right|$$
$$\overset{(6.13)}{=} e^{-\gamma t} |\tilde{u}(x,t)| \leq e^{-\gamma t} \underbrace{\sup_{(y,s) \in \Omega \times (0,\infty)} |\tilde{u}(y,s)|}_{=: C_\infty}$$

$\square$

Partielle Differentialgleichungen

10. Übung am 03. 12. 2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. *(Inhomogeneous boundary data)* Consider the initial value problem (IVP)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \sin(3\pi x) + x & \text{for } x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 & \text{for } t > 0, \\ u(1,t) = 1 & \text{for } t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + x & \text{for } x \in (0,1). \end{cases}$$

(i) Transform the IVP into a problem with homogeneous boundary data.

(ii) Discuss the existence of a solution for the transformed problem.

(iii) Find a complete orthonormal system consisting of eigenfunctions of the operator $Lu = -u_{xx} + u$ with suitable boundary conditions.

(iv) Find a solution of the IVP using the orthonormal system from (iii).

Lösung.

(i) Mit der Transformation $v := u - x$ erhalten wir folgendes Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + v = \sin(3\pi x) & \text{für } x \in (0,1), \ t > 0, \\ v(0,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ v(1,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ v(x,0) = \sin(\pi x) & \text{für } x \in (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

(ii) Wir wollen Satz 6.19 (Existenz von Lösungen inhomogener Probleme) anwenden; dafür werden wir nun die Voraussetzungen überprüfen.

Die allgemeine parabolische Differentialgleichung aus der Vorlesung hat die Form

$$u_t \underbrace{-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu}_{=\,L(u)} = f(\cdot, t).$$

Um den Satz anwenden zu können, müssen A, $|\nabla A|$ und $c \geq 0$ in Ω beschränkt und A symmetrisch und gleichmäßig positiv definit sein. Im betrachteten eindimensionalen Fall entartet die Matrix A zu einer Konstanten, nämlich $A \equiv 1$. Ebenso gilt $|\nabla A| \equiv 0$ sowie $c \equiv 1 \geq 0$ und $\Omega = (0,1)$ ist offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C_1$, womit der Differentialoperator L die richtige Form hat.

Wegen $v_0 = \sin(\pi x) \in L^2(\Omega)$ und $f(\cdot, t) = \sin(3\pi x) \in C^0([0,\infty); L^2(\Omega))$ (f ist in unserem Beispiel konstant in t) sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Also können wir Satz 6.19 anwenden und erhalten eine Lösung v in der dort postulierten Form.

(iii) Wir wollen Funktionen φ_k und Zahlen $\lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$L\varphi_k = -\varphi_k'' + \varphi_k = \lambda_k \varphi_k \tag{2}$$

finden, wobei $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$ gelten soll. Wir formen (2) um zu $\varphi_k'' = (1-\lambda_k)\varphi_k$. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\varphi_k(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda_k - 1}\; x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda_k - 1}\; x).$$

Aus der Randbedingung für $x = 0$ folgt sofort $c_2 = 0$. Aus jener bei $x = 1$ folgt $\sqrt{\lambda_k - 1} = k\pi$ und somit $\lambda_k = 1 + k^2\pi^2, k \in \mathbb{N}$. Damit hat unser Orthonormalsystem die Form

$$\varphi_k(x) = c_1 \sin(k\pi x),\; k \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\;\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{1}{2}, & n = m \end{cases}$$

wählen wir noch $c_1 = \sqrt{2}$ und erhalten unsere finale Lösung:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \sqrt{2}\sin(k\pi x), \\ \lambda_k &= 1 + (k\pi)^2, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Dichtheit in $L^2(\Omega)$ folgt mit demselben Argument wie letzte Woche.

(iv) Mithilfe von Satz 6.19 können wir nun die konkrete Lösung von (1) bestimmen:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathrm{e}^{-Lt} v_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-L(t-s)} f(s)\;\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_k t}(v_0, \varphi_k)\varphi_k + \int_0^t \sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_k(t-s)}(f(s), \varphi_k)\varphi_k\;\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_k t}(\varphi_1, \varphi_k)\varphi_k + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_k(t-s)}(\varphi_3, \varphi_k)\varphi_k\;\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\sin(\pi x) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_3(t-s)}\sin(3\pi x)\;\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{\lambda_3}(\mathrm{e}^{-\lambda_3 t} - 1)\sin(3\pi x) \\ &= \mathrm{e}^{-(1+\pi^2)t}\sin(\pi x) + \frac{1}{1+9\pi^2}(\mathrm{e}^{-(1+9\pi^2)t} - 1)\sin(3\pi x). \end{aligned}$$

Das ursprüngliche Problem wird also gelöst von

$$u = v + x = \mathrm{e}^{-(1+\pi^2)t}\sin(\pi x) + \frac{1}{1+9\pi^2}(\mathrm{e}^{-(1+9\pi^2)t} - 1)\sin(3\pi x) + x.$$

□

Aufgabe 2. *(Periodic Sobolev Spaces)*
Let $\Omega = (0, 2\pi)$ and consider the complete orthonormal system of $L^2(\Omega)$ given by

$$\left\{ C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, C_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(i) Show that for $k \in \mathbb{N}$ the space

$$H^k_{per}(\Omega) := \left\{ f \in H^k(\Omega) \mid f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi) \text{ for } j = 0, \dots, k-1 \right\}$$

is a well-defined Hilbert space.

(ii) Show that $f \in H^1_{per}(\Omega)$ if and only if

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m C_m \quad \text{with} \quad \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(|a_m|^2 + |b_m|^2 \right) < \infty.$$

In this case, f can be differentiated „term-wise".

(iii) For $n \in \mathbb{N}$ consider the projection

$$\begin{aligned} P_n : H^k_{per}(\Omega) &\to H^k_{per}(\Omega) \\ f = \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m C_m &\mapsto P_n f = \sum_{m=1}^{n} a_m S_m + \sum_{m=0}^{n} b_m C_m. \end{aligned}$$

Show that for $f \in H^k_{per}(\Omega)$ it holds that

$$\|f - P_n f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{(n+1)^k} \left\| f^{(k)} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lösung.

(i) Offensichtlich ist $H^k_{\text{per}}(\Omega)$ ein linearer Unterraum von $H^k(\Omega)$. Für die Abgeschlssenheit bzgl. $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ verwenden wir ...

> **Satz 5.9 (Einbettungssatz von Sobolev).** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und es gelte $k - n/2 > m$ für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*
>
> $$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$
>
> *d.h., es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$*
>
> $$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

$$\implies H^k(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$$

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $H^k_{\text{per}}(\Omega)$, die bzgl. $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ gegen ein f konvergiert.

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^k_{\text{per}}(\Omega)^{\mathbb{N}} : \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{H^k(\Omega)} f$$

$$\begin{aligned} \implies |f(2\pi) - f(0)| &\leq |f(2\pi) - f_n(2\pi)| + \underbrace{|f_n(2\pi) - f_n(0)|}_{0} + |f_n(0) - f(0)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2C_{\text{Sobolev}} \underbrace{\|f - f_n\|_{H^k(\Omega)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

(ii) (a) Inklusion („⊆“):
Sei $f \in H^1_{\text{per}}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, dann können wir f bzgl. der oberen ONB darstellen.

$$\implies f = \sum_{m=1}^{\infty} (f, S_m) S_m + \sum_{m=0}^{\infty} (f, C_m) C_m$$

Die folgende Darstellung von f', so wie in der Angabe postuliert, wird weiter unten dann noch (rigoros) nachgerechnet. Die Fourier-Koeffizienten sind eindeutig.

$$\implies \sum_{m=0}^{\infty} (f', C_m) C_m + \sum_{m=1}^{\infty} (f', S_m) S_m = f' = \sum_{m=1}^{\infty} (f, S_m) m C_m + \sum_{m=1}^{\infty} (f, C_m)(-m) S_m$$

Mit der Parceval-Gleichung erhalten wir schließlich noch die ℓ^2-Bedingung.

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 \Big(|(f, C_m)|^2 + |(f, S_m)|^2 \Big) \overset{\text{P}}{=} \|f'\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty$$

(b) Inklusion („⊇“):

$$f := \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m C_m$$

- „$_{\text{per}}$“:
  ... gilt Summanden-weise, also auch insgesamt.
- „^{1}“:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m C_m \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m} |a_m| \underbrace{\|S_m\|_{L^2(\Omega)}}_{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m} |b_m| \underbrace{\|C_m\|_{L^2(\Omega)}}_{1} + |b_0| \underbrace{\|C_0\|_{L^2(\Omega)}}_{1} \\
&\overset{\text{CSB}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}}}_{\pi/\sqrt{6}} \underbrace{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} m^2 |a_m|^2}}_{<\infty} + \underbrace{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}}}_{\pi/\sqrt{6}} \underbrace{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} m^2 |b_m|^2}}_{<\infty} + |b_0| < \infty
\end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden den Satz 6.8 verwenden.

Lemma 6.8. *Sei (v_n) ein vollständiges Orthonormalsystem in H und $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann konvergiert*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$$

gegen ein $v \in H$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert. In diesem Fall gilt $a_k = (v, v_k)$ und die Parseval-Gleichung

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \qquad (6.10)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2\Big(|a_m|^2+|b_m|^2\Big)<\infty \overset{6.8}{\iff} \sum_{m=1}^{N} a_m S_m' + \sum_{m=0}^{N} b_m C_m'$$
$$= \sum_{m=1}^{N} a_m m C_m + \sum_{m=0}^{N} b_m(-m) S_m$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m m C_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m(-m) S_m = f'$$

Diese Tatsache können wir verwenden, um eine lim-$\int$-Vertauschung zu rechtfertigen. Nachdem der $L^2(\Omega)$ abgeschlossen, müssen wir nur noch (heiß angekündigt) zeigen ... $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle &= -\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m S_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m C_m\right)\varphi' \,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} -\int_0^{2\pi} a_m S_m \varphi' \,\mathrm{d}x - \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_m C_m \varphi' \,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{PI}}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_m m C_m \varphi \,\mathrm{d}x + \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_m(-mS_m)\varphi \,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{\Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m m C_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m(-mS_m)\Big)}_{\in L^2(\Omega)\subseteq L^1_{\text{lok}}}\varphi \,\mathrm{d}x\\
&= \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} a_m m C_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m(-mS_m), \varphi\right\rangle
\end{aligned}$$

Dabei ist $f\in L^2(\Omega)\in L^1_{\text{lok}}$, eine reguläre Distribution. Die erste lim-$\int$-Vertauschung folgt via unbedingter Konvergenz. Bei der Partiellen Integration fallen die Randterme weg, weil φ als Testfunktion am Rand verschwindet.

(iii) Für $k=0$ folgt das direkt aus der Parceval-Gleichung.

$$\begin{aligned}
(P_n f)^{(k)} = \left(\sum_{m=1}^{n} a_m S_m + \sum_{m=0}^{n} b_m C_m\right)^{(k)} &= \sum_{m=1}^{n} (a_m C_m)^{(k)} + \sum_{m=0}^{n} (b_m S_m)^{(k)}\\
&= \sum_{m=1}^{n} m^k a_m C_m^{(k)} + \sum_{m=0}^{n} m^k b_m S_m^{(k)} \in P_n(L^2(\Omega))
\end{aligned}$$

Dabei bilden die $C_m^{(k)}$ und $S_m^{(k)}$ wieder eine (Teil-)ONB (die alte wird nur etwas umgerührt) ... Jedenfalls sind die Fourier-Koeffizienten von $f^{(k)}$ von der Form $\pm m^k a_m$, $\pm m^k b_m$. Wir benutzen die Parceval-Gleichung.

$$\begin{aligned}
\implies \|f-P_n f\|^2_{L^2(\Omega)} &\overset{\text{P}}{=} \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m|^2+|b_m|^2 \le \frac{1}{(n+1)^{2k}} \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2k}\Big(|a_m|^2+|b_m|^2\Big)\\
&\le \frac{1}{(n+1)^{2k}}\sum_{m=1}^{\infty} \left|m^k a_m\right|^2 + \left|m^k b_m\right|^2 \overset{\text{P}}{=} \frac{1}{(n+1)^{2k}}\left\|f^{(k)}\right\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 3. *(Smoothing properties of the heat operator)*
Let $\Omega = (0, 2\pi)$ and consider the initial value problem (IVP)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x, t = 0) = u_0 & \text{for } x \in \Omega, \\ u(x = 0, t) = u(x = 2\pi, t) & \text{for } t > 0, \end{cases}$$

with $u_0 \in L^2(\Omega)$. The set $\left\{\phi_n(x) = e^{\mathrm{i}nx} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ is a complete orthogonal system in the complex Hilbert space $L^2(\Omega)$, corresponding to the eigenfunctions of the operator $Lu = -u_{xx}$ with periodic boundary conditions. We now consider the operator

$$e^{-Lt} : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega), \quad v \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \left\langle v, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle_{L^2} \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}.$$

In what sense is $u(\cdot, t) = e^{-Lt}u_0$ a solution of IVP? Furthermore, show that:

(i) For $t \geq 0$ it holds that $\left\|e^{-Lt}\right\|_{L^2 \to L^2} = 1$.

(ii) For $t > 0$ it holds that $\left\|e^{-Lt}\right\|_{L^2 \to H^1_{per}} \leq C\left(1 + t^{-1/2}\right)$ for some constant $C > 0$.

(iii) For $t > 0$ it holds that $\left\|e^{-Lt}\right\|_{L^2 \to H^k_{\mathrm{per}}} \leq C_k\left(1 + t^{-a_k}\right)$ for all $k \in \mathbb{N}$ and $a_k, C_k > 0$.

Notice that here $\left\|e^{-Lt}\right\|_{X \to Y}$ denotes the operator-norm of e^{-Lt} as an operator from X to Y.

Lösung.

Wir haben erst im Nachhinein bemerkt, dass immer ganz am Ender jeder Abschätzung das ^{2} bei dem $\|u\|^2$ flöten gegangen ist. Deswegen muss man über die Schraken noch eine $\sqrt{\cdot}$ drüber-stülpen. Das tut nich weh, weil die immer ≥ 1 sind und wir die dann noch immer nach oben wegschätzen können.

Wir zeigen mit den folgenden Unterpunkten, dass der Operator

$$e^{-Lt} : L^2(\Omega) \to H^k_{per}(\Omega)$$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz folgt damit sogar, dass unsere Lösung $e^{-Lt}u_0 \in C^\infty(\Omega)$ sein muss. Damit ist $e^{-Lt}u_0$ eine klassische Lösung des Anfangwertproblems, da wir aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe die Differentiation mit dem Grenzwert der Summe vertauschen dürfen:

$$\begin{aligned}
(e^{-Lt}u_0)_t &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 e^{-n^2 t} \left\langle u_0, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle_{L^2} \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \left\langle u_0, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle_{L^2} \frac{(\phi_n)_{xx}}{\|\phi_n\|} = (e^{-Lt}u_0)_{xx} \\
e^{-Lt}u_0(\cdot, 0) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle u_0, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle_{L^2} \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} = u_0 \\
e^{-Lt}u_0(0, t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \left\langle u_0, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle_{L^2} \frac{\phi_n(0)}{\|\phi_n\|} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \left\langle u_0, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle_{L^2} \frac{\phi_n(2\pi)}{\|\phi_n\|} = e^{-Lt}u_0(2\pi, t)
\end{aligned}$$

(i) Fall $t = 0$: Sei $u \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}\|\exp(-L0)u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-0n^2) \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \right|^2 \frac{\|\phi_n\|^2}{\|\phi_n\|^2} \\ &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Fall $t > 0$: Sei $u \in L^2(\Omega)$:

$$\|\exp(-Lt)u\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-tn^2) \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\| \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Damit erhalten wir $\left\|e^{-Lt}\right\|_{L^2} \leq 1$. Für die andere Richtung erhalten wir für $u(x) = \phi_0(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned}\|\exp(-Lt)u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-tn^2) \left\langle \phi_0, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\| \left\langle \phi_0, \frac{\phi_0}{\|\phi_0\|} \right\rangle \frac{\phi_0}{\|\phi_0\|} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

(ii) Wir verwenden $\exp(-x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned}\|\exp(-Lt)u\|^2_{H^1_{per}} &= \|\exp(-Lt)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\exp(-Lt)u)_x\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\exp(-Lt)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-tn^2) \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \frac{in\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\exp(-Lt)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| \exp(-tn^2) \left| \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \|\exp(-Lt)u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| \frac{1}{\sqrt{t}|n|} \left| \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

(iii) Wir verwenden $\exp(-x) \leq C_k x^{-k/2}$:

$$\begin{aligned}\|(\exp(-Lt)u)^{(k)}\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-tn^2) \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \frac{(in)^k\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k| \exp(-tn^2) \left| \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \right|^2 \\ &\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_k |t^{-k/2}| \left| \left\langle u, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\rangle \right|^2 \\ &= (C_k t^{-k/2}) \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $t < 1$

$$\begin{aligned}
\|\exp(-Lt)u\|^2_{H^k_{per}} &= \sum_{i=0}^{k} \|(\exp(-Lt)u)^{(i)}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^{k} (C_i t^{-i/2})\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_k \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^i \|u\|_{L^2(\Omega)} = C_k \left(\frac{t^{-(k+1)/2} - 1}{t^{-1/2} - 1}\right) \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_k \left(\frac{(1 - t^{(k+1)/2})t^{1/2}}{(1 - t^{1/2})t^{(k+1)/2}}\right) \|u\|_{L^2(\Omega)} = C_k \left(\frac{(1 - t^{(k+1)/2})}{(1 - t^{1/2})}\right) t^{-k/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \tilde{C}_k t^{-k/2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Abschätzung aufgrund

$$\lim_{t\to 1} \frac{(1 - t^{(k+1)/2})}{(1 - t^{1/2})} = \lim_{t\to 1} \frac{-(k+1)/2 t^{(k-1)/2}}{-\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \lim_{t\to 1} (k+1)t^{k/2} = k+1,$$

also ist die Funktion $f : t \mapsto \frac{(1-t^{(k+1)/2})}{(1-t^{1/2})}$ auf dem Kompaktum $[0, 1]$ durch eine Konstante beschränkt. Für $t \geq 1$ gilt

$$\|\exp(-Lt)u\|^2_{H^k_{per}} = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^i \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^{k} \|u\|_{L^2(\Omega)} = (k+1)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\|\exp(-Lt)u\|^2_{H^k_{per}} \leq \max(\tilde{C}_k, k+1)(1 + t^{-k/2})\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

□

Aufgabe 4. *(Galerkin method for the Poisson equation)*
Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded, open set with smooth boundary. For $f \in L^2(\Omega)$ construct a solution of the Poisson equation

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{3}$$

using a Galerkin method. To do this, let $\{\phi_k\}$ for $k \in \mathbb{N}$ denote the eigenfunctions of the Laplacian with homogeneous Dirichlet boundary data on Ω. Then prove that for any $m \in \mathbb{N}$ there exists

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{d}^k_m \phi_k, \quad \text{for } \mathbf{d}^k_m \in \mathbb{R}$$

that satisfies

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla \phi_k \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\phi_k, \quad \text{for } k = 1, \ldots, m.$$

To finish, show that the sequence $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converges weakly in $H^1_0(\Omega)$ to a weak solution of (3).

Lösung. Wir wissen bereits, dass (3) eine eindeutige schwache Lösung besitzt und können deshalb den Operator

$$K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) : f \mapsto u$$

mit jener eindeutigen Lösung u betrachten. Wir wissen bereits aus der Vorlesung, dass K ein injektiver, kompakter, selbstadjungierter Operator ist. Wegen der Injektivität von K können wir den inversen Operator

$$L : K\big(L^2(\Omega)\big) \to L^2(\Omega)$$

betrachten.Wir interpretieren den Ausdruck *smooth boundary* aus der Angabe als $\partial\Omega \in C^2$, womit dann mit Lemma 6.14 die Gleichheit $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gilt. Daraus schließen wir sofort $-\Delta = L$. Den Ausdruck *the eigenfunctions* aus der Angabe interpretieren wir so, dass es sich um eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen ϕ_k von $L^2(\Omega)$ handelt. Sollten sie nicht normiert sein, erschwert das nur die Rechnungen, wenn wir die Orthogonalität nicht fordern müssen wir die Rechnungen wohl nocheinmal überdenken. Wir wissen wegen der Selbstadjungiertheit von K zumindest, dass die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander stehen. Alle Eigenfunktionen sind, wie wir aus der Vorlesung wissen, auch schon Eigenfunktionen von K und es gilt

$$K(f) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k \left\langle f, \phi_k \right\rangle \phi_k$$

wobei μ_k jeweils Eigenwert bezüglich K von ϕ_k sein soll. Wir können die μ_k so ordnen, dass sie eine monotone Nullfolge bilden. Wegen der Injektivität von K sind alle Eigenwerte ungleich 0. Weiters wissen wir aus der Vorlesung, dass

$$\mu \in \sigma_p(K) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \in \sigma_p(L)$$

also sind die $\lambda_k := \frac{1}{\mu_k}$ die Eigenwerte von L.
Wir wählen $d_m^k := \frac{1}{\lambda_k \|\phi_k\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega f\phi_k \mathrm{d}x$ und rechnen nach:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla\phi_k \ \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \Delta u_m \ \phi_k \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\phi_k}_{=0} (\nabla u_m \cdot \nu) \ \mathrm{d}s \\
&= \sum_{j=1}^m d_m^j \int_\Omega -\Delta\phi_j\phi_k \ \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^m d_m^j \lambda_j \int_\Omega \phi_j\phi_k \ \mathrm{d}x \\
&= d_m^k \lambda_k \|\phi_k\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f\phi_k \ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\langle Kf - u_m, w\rangle_{L^2}| &= \left| \sum_{k=m+1}^\infty \mu_k \langle f, \phi_k\rangle_{L^2} \langle \phi_k, w\rangle \right| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^\infty |\mu_k \langle f, \phi_k\rangle \langle \phi_k, w\rangle| \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=m+1}^\infty \mu_k^2 |\langle f, \phi_k\rangle|^2} \sqrt{\sum_{k=m+1}^\infty |\langle \phi_k, w\rangle|^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

$$(*) : \langle \nabla u_m, \nabla\phi_k\rangle = \sum_{j=1}^m d_m^j \left\langle \nabla\phi_j, \nabla\phi_k \right\rangle = \begin{cases} 0, & k > m, \\ \langle f, \phi_k\rangle, & k \leq m. \end{cases}$$

Wegen $w \in H_0^1$ verschwinden beim Satz vom Gauß die Randterme im Folgenden immer und es gilt.

$$
\begin{aligned}
|\langle \nabla (Kf - u_m, w), \nabla w \rangle_{L^2}| &= |\langle \nabla K f, \nabla w\rangle - \langle \nabla u_m, \nabla w\rangle| = |\langle -\Delta K f, w\rangle - \langle -\Delta u_m, w\rangle| \\
&= \left| \langle f, w\rangle - \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle w, \phi_k\rangle \langle -\Delta u_m, \phi_k\rangle \right| = \left| \langle f, w\rangle - \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle w, \phi_k\rangle\langle \nabla u_m, \nabla \phi_k\rangle \right| \\
&\overset{(*)}{=} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \langle w, \phi_k\rangle\langle f, \phi_k\rangle - \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle w, \phi_k\rangle\langle \nabla u_m, \nabla\phi_k\rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle w, \phi_k\rangle \langle f, \phi_k\rangle \right| \\
&= \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle w, \phi_k\rangle \left(\langle f, \phi_k\rangle - \langle \nabla u_m, \nabla \phi_k\rangle\right) \right| \\
&\overset{(*)}{=} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle w, \phi_k\rangle\langle f, \phi_k\rangle \right| \le \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} |\langle w, \phi_k\rangle|^2} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} |\langle f, \phi_k\rangle|^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5. *(Exponential decay to equilibrium for the Fokker-Planck equation)*
We consider smooth solutions of the Fokker-Planck equation

$$\partial_t u = \nabla \cdot (\nabla u + u \nabla V), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d, \tag{4}$$

where we assume that V satisfies the Bakry-Emery condition $\nabla^2 V \ge \lambda\,\mathrm{Id}$ for some $\lambda > 0$. Furthermore, assume that $\phi \in C^4((0,\infty))$ is convex with $\phi(1) = 0$, and $1/\phi''$ is welldefined and concave. Examples of admissible functions ϕ are $\phi(s) = s(\log(s) - 1) + 1$ and $\phi(s) = s^\alpha - 1$ for $1 < \alpha \le 2$.

(i) Compute u_∞, a stationary solution of (4) that is strictly positive ($u_\infty > 0$) and has unit mass $\left(\int_{\mathbb{R}^d} u_\infty = 1\right)$.

(ii) Define the relative entropy with respect to ϕ as

$$H_\phi[u] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(\frac{u}{u_\infty}\right) u_\infty \,\mathrm{d}x.$$

Notice that, setting $\rho = \frac{u}{u_\infty}$, we have that $\partial_t u = \nabla \cdot (u_\infty \nabla \rho)$. Using this, show that the *entropy production*, $-\frac{d}{dt} H_\phi[u]$, is non-negative.

(iii) Show that

$$
\begin{aligned}
\nabla \partial_t \rho &= \nabla \Delta \rho - \nabla^2 \rho \nabla V - \nabla^2 V \nabla \rho, \\
\nabla \rho \cdot \nabla \Delta \rho &= \nabla \cdot \left(\nabla^2 \rho \nabla \rho\right) - \left|\nabla^2 \rho\right|^2,
\end{aligned}
$$

where $\left|\nabla^2\rho\right|^2 = \sum_{i,j=1,\dots,n} |\partial_i\partial_j \rho|^2$. Using these identities and the expression for $\frac{d}{dt} H_\phi[u]$ that you have obtained in (i), show that

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} H_\phi[u] &\ge \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi''''(\rho)|\nabla\rho|^4 + 4\phi'''(\rho)\nabla\rho^T \nabla^2\rho\nabla\rho + 2\phi''(\rho)\left|\nabla^2\rho\right|^2\right) u_\infty \mathrm{d}x - 2\lambda \frac{d}{dt} H_\phi[u] \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d} \phi''(\rho) \left| \nabla^2 \rho + \frac{\phi'''(\rho)}{\phi''(\rho)} \nabla\rho \otimes \nabla\rho \right|^2 u_\infty \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi''''(\rho) - 2\frac{\phi'''(\rho)^2}{\phi''(\rho)}\right) |\nabla\rho|^4 u_\infty \mathrm{d}x - 2\lambda \frac{d}{dt} H_\phi[u].
\end{aligned}
$$

(iv) Using the concavity of $1/\phi''$ and convexity of ϕ, argue that the result of (iii) yields that

$$\frac{d^2}{dt^2} H_\phi[u] \ge -2\lambda \frac{d}{dt} H_\phi[u], \quad t > 0 \tag{5}$$

(v) Argue that integrating (5) on the interval (s, ∞) yields that

$$\frac{d}{dt} H_\phi[u(s)] \leq -2\lambda H_\phi[u(s)], \quad s \geq 0$$

Hint: For this use Gronwall's lemma applied to (5) and you may use (without proof) that $\lim_{t\to\infty} H_\phi[u(t)] = 0$.

(vi) Using (without proof) that

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^1(R^d)} \leq \frac{2}{\phi''(1)} H_\phi[u(t)],$$

which follows from the Csiszár-Kullback-Pinsker inequality, show that

$$\|u(t) - u_\infty\|^2_{L^1(\mathrm{R}^d)} \leq \frac{1}{\phi''(1)} H_\phi\left[u_0\right] e^{-2\lambda t}.$$

Lösung.

(i) Schreiben wir die Differentialgleichung zuerst schöner darauf

$$\partial_t u = \Delta u + \nabla u \cdot \nabla V + u \Delta V$$

Die stationäre Gleichung wird sicher schon erfüllt, falls $\nabla u_\infty + u_\infty \nabla V = 0$. Aus dem eindimensionalen Fall motiviert, da $u' + V'u = 0$ von $u = ce^{-V}$ gelöst wird, definieren wir

$$u_\infty(x) := c \exp(-V(x))$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_\infty = c \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp \circ - V) = -c \exp(-V) \frac{\partial}{\partial x_i} V \qquad \Longrightarrow \nabla u_\infty = -u_\infty \nabla V$$

Nun wollen wir $c := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-V(s)) \, \mathrm{d}x}$, so bleibt noch zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(s)} \, \mathrm{d}x < \infty$$

Das gilt, da man aus $\nabla^2 V \geq \lambda \, \mathrm{id}$ mit dem mehrdimensionalen Taylor folgern kann, dass $V \geq C_1 + C_2|x| + \lambda |x|^2$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(ii)

$$\nabla \cdot (u_\infty \nabla \rho) = \nabla \cdot (u_\infty \frac{\nabla u u_\infty - u \nabla u_\infty}{u_\infty^2}) = \nabla \cdot (\nabla u - \frac{u \nabla u_\infty}{u_\infty}) = \nabla \cdot (\nabla u + \frac{u u_\infty \nabla V}{u_\infty}) = \nabla \cdot (\nabla u + u \nabla V) = \partial_t u$$

Unter der Annahme, dass $H_\phi : C_1^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ rechnen wir ganz rigoros

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} H_\phi[u] &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt}(\phi(\rho) u_\infty) \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} u_\infty \phi'(\rho) \frac{1}{u_\infty} \underbrace{\mathrm{div}(u_\infty \nabla \rho)}_{\partial_t u} \, \mathrm{d}x \\
&= -\lim_{r\to\infty} \int_{B_r(0)} \phi'(\rho) \, \mathrm{div}(u_\infty \nabla \rho) \, \mathrm{d}x \overset{Gauss}{=} \lim_{r\to\infty} \int_{B_r(0)} \nabla(\phi'(\rho)) u_\infty \nabla \rho \, \mathrm{d}x - \int_{\partial B_r(0)} \phi' u_\infty (\nabla \rho \cdot \nu) \, \mathrm{d}s \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{B_r(0)} \phi''(\rho) u_\infty \nabla \rho \cdot \nabla \rho \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \phi''(\rho) |\nabla \rho|^2 u_\infty \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Das Randintegral verschwindet, da wir aus $u_\infty > 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} u_\infty \, \mathrm{d}x = 1$ schließen, dass für $\epsilon > 0$ ein $r > 0$ existiert, sodass $u_\infty(|x|) < \epsilon$ für $|x| \geq r$. Für die Vertauschung von Integral und Ableitung müsste man noch eine geeignete Majorante finden.

(iii) Die ersten beiden Identitäten rechnen wir nach, wobei wir bei der ersten $\nabla u_\infty = -u_\infty \nabla V$ verwenden

$$\nabla \partial_t \rho = \nabla \frac{\partial_t u}{u_\infty} = \nabla \frac{\operatorname{div}(u_\infty \nabla \rho)}{u_\infty} = \nabla (\frac{u_\infty \Delta \rho + \nabla u_\infty \cdot \nabla \rho}{u_\infty}) = \nabla \Delta \rho - \nabla(\nabla V \cdot \nabla \rho) = \nabla \Delta \rho - \nabla^2 \rho \nabla V - \nabla^2 V \nabla \rho \tag{6}$$

$$\nabla \cdot (\nabla^2 \rho \nabla \rho) = \operatorname{div}(\nabla^2 \rho \nabla \rho) = \sum_{i=1}^d \partial_i \sum_{k=1}^d \partial_k \rho \partial_i \partial_k \rho = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \partial_k \rho \partial_k \partial_i^2 \rho + (\partial_k \partial_i \rho)^2 = \nabla \rho \cdot \nabla \Delta \rho + |\nabla^2 \rho|^2 \tag{7}$$

Nun zu der Abschätzung, wobei wir erstmal wieder Integral und Ableitung einfach Vertauschen und die Darstellung aus (ii) verwenden. Die Abschätzung

$$\nabla \rho \cdot \nabla^2 V \nabla \rho \geq \lambda |\nabla \rho|^2$$

erhalten wir aus der Bakry-Emery condition von V. Wir wollen

$$\frac{d^2}{dt^2} H_\phi[u] \geq \int_{\mathbb{R}^d} (\underbrace{\phi''''(\rho)|\nabla \rho|^4}_{1} + \underbrace{4\phi'''(\rho)\nabla \rho^T \nabla^2 \rho \nabla \rho}_{2} + \underbrace{2\phi''(\rho)|\nabla^2 \rho|^2}_{3}) u_\infty \mathrm{d}x - \underbrace{2\lambda \frac{d}{dt} H_\phi[u]}_{4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} H_\phi[u] &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} (\phi''(\rho)|\nabla \rho|^2) u_\infty \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} (\phi''' \partial_t \rho |\nabla \rho|^2 + 2\phi'' \nabla \rho \cdot \nabla \partial_t \rho) u_\infty \, \mathrm{d}x \\
&\overset{6}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} (\phi''' \partial_t \rho |\nabla \rho|^2 + 2\phi'' \nabla \rho \cdot (\nabla \Delta \rho - \nabla^2 \rho \nabla V - \nabla^2 V \nabla \rho) u_\infty \, \mathrm{d}x \\
&\overset{7}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\phi''' \partial_t \rho |\nabla \rho|^2 + 2\phi'' (\operatorname{div}(\nabla^2 \rho \nabla \rho) - |\nabla^2 \rho|^2 - \nabla \rho \cdot \nabla^2 \rho \nabla V - \nabla \rho \cdot \nabla^2 V \nabla \rho)\Big) u_\infty \, \mathrm{d}x \\
&\geq -\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\phi''' \partial_t \rho |\nabla \rho|^2 + 2\phi'' (\operatorname{div}(\nabla^2 \rho \nabla \rho) - \underbrace{|\nabla^2 \rho|^2}_{3} - \nabla \rho \cdot \nabla^2 \rho \nabla V)\Big) u_\infty \, \mathrm{d}x \underbrace{-2\lambda \frac{d}{dt} H_\phi[u]}_{4} \rightsquigarrow
\end{aligned}$$

An dieser Stelle lassen wir die Terme, die schon direkt mit jenen aus der Angabe übereinstimmen der Einfachheithalber weg. Eine kleine Nebenrechnung erlauben wir uns dabei noch

$$\partial_i |\nabla \rho|^2 = \partial_i \sum_{j=1}^d (\partial_j \rho)^2 = \sum_{j=1}^d 2\partial_j \rho \partial_i \partial_j \rho \tag{8}$$

$$\nabla |\nabla \rho|^2 \cdot \nabla \rho = 2 \sum_{i,j=1}^d \partial_j \rho \partial_i \partial_j \rho \partial_i \rho = 2 \nabla \rho \cdot \nabla^2 \rho \nabla \rho \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&\rightsquigarrow -\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\phi'''(\rho)\partial_t\rho|\nabla\rho|^2 + 2\phi''(\operatorname{div}(\nabla^2\rho\nabla\rho) - \nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V)\Big)u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{r\to\infty}\int_{B_r(0)} \phi'''(\rho)\operatorname{div}(u_\infty\nabla\rho)|\nabla\rho|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''(\operatorname{div}(\nabla^2\rho\nabla\rho) - \nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V)u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&\overset{Gauss}{=} \lim_{r\to\infty}\int_{B_r(0)} \nabla(\phi'''(\rho)|\nabla\rho|^2)u_\infty\nabla\rho \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''(\operatorname{div}(\nabla^2\rho\nabla\rho) - \nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V)u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\phi^{(4)}(\rho)\nabla\rho|\nabla\rho|^2 + \phi^{(3)}\nabla|\nabla\rho|^2)u_\infty\nabla\rho \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''(\operatorname{div}(\nabla^2\rho\nabla\rho) - \nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V)u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\underbrace{\phi^{(4)}(\rho)|\nabla\rho|^4}_{1} + \phi^{(3)}\nabla|\nabla\rho|^2\cdot\nabla\rho)u_\infty \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''(\operatorname{div}(\nabla^2\rho\nabla\rho) - \nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V)u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&\overset{9}{\rightsquigarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \phi^{(3)}2\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho\ u_\infty \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''(\operatorname{div}(\nabla^2\rho\nabla\rho) - \nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V)u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi^{(3)}\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho\ u_\infty \,\mathrm{d}x - \lim_{r\to\infty}\int_{B_r(0)} 2\phi''\operatorname{div}(\nabla^2\rho\nabla\rho)u_\infty \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V\ u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&\overset{Gauss}{=} \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi^{(3)}\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho\ u_\infty \,\mathrm{d}x + \lim_{r\to\infty}\int_{B_r(0)} 2\nabla(\phi''u_\infty)\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V\ u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi^{(3)}\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho\ u_\infty \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} 2(\phi^{(3)}\nabla\rho u_\infty + \phi''\nabla u_\infty)\nabla^2\rho\nabla\rho \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V\ u_\infty \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi^{(3)}\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho\ u_\infty \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi^{(3)}\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho u_\infty \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} \phi''u_\infty\nabla V\cdot\nabla^2\rho\nabla\rho \,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi''\nabla\rho\cdot\nabla^2\rho\nabla V\ u_\infty \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{4\phi'''(\rho)\nabla\rho^T\nabla^2\rho\nabla\rho}_{2} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Damit haben wir schließlich alle Teile gesammelt.
Für die letzte Gleichheit zeigen wir:

$$
\begin{aligned}
&4\phi'''(\rho)\nabla\rho^T\nabla^2\rho\nabla\rho + 2\phi''(\rho)\left|\nabla^2\rho\right|^2 \\
&= 4\phi'''(\rho)\sum_{j,k=1}^{n}(\partial_j\partial_k\rho)(\partial_j\rho\partial_k\rho) + 2\phi''\sum_{j,k=1}^{n}|\partial_j\partial_k\rho|^2 \\
&= 2\phi''\sum_{j,k=1}^{n} 2\frac{\phi'''(\rho)}{\phi''(\rho)}(\partial_j\partial_k\rho)(\partial_j\rho\partial_k\rho) + (\partial_j\partial_k\rho)^2 \\
&= 2\phi''\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\phi'''(\rho)}{\phi''(\rho)}(\partial_j\rho\partial_k\rho) + (\partial_j\partial_k\rho)\right)^2 - \frac{\phi'''(\rho)^2}{\phi''(\rho)^2}(\partial_j\rho\partial_k\rho)^2 \\
&= 2\phi''\left|\nabla^2\rho + \frac{\phi'''(\rho)}{\phi''(\rho)}\nabla\rho\otimes\nabla\rho\right|^2 - 2\frac{\phi'''(\rho)^2}{\phi''(\rho)}\sum_{j,k=1}^{n}(\partial_j\rho\partial_k\rho)^2 \\
&= 2\phi''\left|\nabla^2\rho + \frac{\phi'''(\rho)}{\phi''(\rho)}\nabla\rho\otimes\nabla\rho\right|^2 - 2\frac{\phi'''(\rho)^2}{\phi''(\rho)}|\nabla\rho|^4
\end{aligned}
$$

(iv) ϕ ist konvex, daher ist $\phi''(\rho) \geq 0$ und somit das erste Integral positiv. Wir rechnen

$$\left(\frac{1}{\phi''(\rho)}\right)'' = \left(\frac{-\phi'''(\rho)}{\phi''(\rho)^2}\right)' = \frac{-\phi''''(\rho)(\phi''(\rho))^2 + 2(\phi'''(\rho))^2\phi''(\rho)}{\phi''(\rho)^4}$$
$$= -\frac{1}{(\phi''(\rho))^2}\left(\phi''''(\rho) - 2\frac{\phi'''(\rho)^2}{\phi''(\rho)}\right)$$

Aus der Konkavität von $\frac{1}{\phi''}$ folgt

$$\left(\phi''''(\rho) - 2\frac{\phi'''(\rho)^2}{\phi''(\rho)}\right) = -\underbrace{\left(\frac{1}{\phi''(\rho)}\right)''}_{\geq 0}\underbrace{\phi''(\rho)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

und damit die Positivität des zweiten Integrals.

(v) Wir integrieren (5) über (s, ∞):

$$\int_s^\infty \frac{d^2}{dt^2}H_\phi[u]dt \geq \int_s^\infty -2\lambda\frac{d}{dt}H_\phi[u]ds$$
$$\iff \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}H_\phi[u(t)] - \frac{d}{dt}H_\phi[u(s)] \geq -2\lambda(\underbrace{\lim_{t\to\infty}H_\phi[u(t)]}_{=0} - H_\phi[u(s)])$$
$$\iff \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}H_\phi[u(t)] - \frac{d}{dt}H_\phi[u(s)] \geq 2\lambda H_\phi[u(s)]$$

Mit dem Gronwall-Lemma angewandt auf (5), sowie (ii) erhalten wir

$$0 < -\frac{d}{dt}H_\phi[u(t)] \leq -\frac{d}{dt}H_\phi[u(s)]\exp(-2\lambda(t-s)) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

und somit

$$-\frac{d}{dt}H_\phi[u(s)] \geq 2\lambda H_\phi[u(s)] \iff \frac{d}{dt}H_\phi[u(s)] \leq -2\lambda H_\phi[u(s)].$$

(vi) Wir verwenden die Ungleichung

$$\|u(t) - u_\infty\|^2_{L^1(R^d)} \leq \frac{2}{\phi''(1)}H_\phi[u(t)]$$

und erhalten mittels Gronwall

$$H_\phi[u(t)] \leq H_\phi[u(0)]\exp(-2\lambda t)$$

und damit

$$\|u(t) - u_\infty\|^2_{L^1(R^d)} \leq \frac{2}{\phi''(1)}H_\phi[u_0]\exp(-2\lambda t).$$

□

Partielle Differentialgleichungen

11. Übung am 10. 12. 2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1.
Seien $T > 0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, wobei $G := \Omega \times (0, T]$ und $\Gamma := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T))$. Betrachten Sie die Differentialoperatoren

$$L_1 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

und $L_2 u = L_1 u + c(x,t)u$, für eine symmetrische und gleichmäßig elliptische Matrix $A = (a_{ij}(x,t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} \in C(\overline{G})$, einen Vektor $b = (b_i(x,t)) \in \mathbb{R}^n$ und $c \in C(\overline{G})$. Zeigen Sie:

(i) Für $u \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $u_t + L_2 u \leq 0$ in G und $u \leq 0$ auf Γ gilt $u \leq 0$ in G.

Hinweis: *Beachten Sie, dass c negative Werte annehmen darf. Welche Differentialgleichung erfüllt $v = \exp(\lambda t)u$?*

(ii) Für $u, v \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ und eine stetige differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ mit

$$u_t + L_1 u + f(x,t,u) \leq v_t + L_1 v + f(x,t,v) \quad \text{in } G \text{ und } u \leq v \text{ auf } \Gamma$$

gilt $u \leq v$ in G.

(iii) Für eine stetige differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ gilt, dass das Anfangsrandwertproblem für die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_t + L_1 u + f(x,t,u) = 0 & \text{in } G, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

höchstens eine klassische Lösung haben kann.

Lösung.

(i) Man erinnere sich an die Definition vom

$$C_1^2(G) := \big\{ u : G \to \mathbb{R} : u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in C^0(G) \quad \forall\, i,j \big\}.$$

Wir wollen Satz 6.31 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$) auf v anwenden.

Satz 6.31 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$). *Sei $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\overline{G})$, $c \geq 0$ in G und*

$$u_t + L(u) \leq 0 \quad bzw. \quad u_t + L(u) \geq 0 \quad in\ G.$$

Dann folgt

$$\sup_{(x,t)\in G} u(x,t) \leq \max\left\{0, \sup_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t)\right\} \ bzw. \ \inf_{(x,t)\in G} u(x,t) \geq \min\left\{0, \inf_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t)\right\}.$$

$$\begin{aligned} v_t + L_1 v &= (\exp(\lambda t)u)_t + L_1(\exp(\lambda t)u) = \lambda \exp(\lambda t)u + \exp(\lambda t)u_t + \exp(\lambda t)L_1 u \\ &= \lambda \exp(\lambda t)u + \exp(\lambda t)u_t + \exp(\lambda t)(L_2 u - c(x,t)u) = \exp(\lambda t)(u_t + L_2 u) - \exp(\lambda t)(c(x,t) - \lambda)u \end{aligned}$$

Wähle also $\lambda < -\|c\|_\infty$.

$$\implies \tilde{c} := c(x,t) - \lambda > 0 \implies v_t + L_1 v + \tilde{c}\underbrace{\exp(\lambda t)u}_{v} = \exp(\lambda t)\underbrace{(u_t + L_2 u)}_{\leq 0} \leq 0$$

Nun können wir Satz 6.31 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$) auf v und $\tilde{L} := L_1 + \tilde{c}$ anwenden.

$$\implies \sup_{(x,t)\in G} v(x,t) \overset{\text{MP}}{\leq} \max\left\{0, \sup_{(x,t)\in\Gamma} v(x,t)\right\} = 0$$

Nachdem u und v dasselbe Vorzeichen haben, folgt die Behauptung.

(ii) Betrachte die Funktion $w := u - v \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ und erhalten mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass $\forall\,(x,t) \in G : \exists \xi_{x,t} \in [\min\{u(x,t), v(x,t)\}, \max\{u(x,t), v(x,t)\}]$:

$$w_t = u_t - v_t \leq L_1 v - L_1 u + f(x,t,v) - f(x,t,u) \overset{\text{MWS}}{=} L_1\underbrace{(v-u)}_{-w} + \partial_u f(x,t,\xi_{x,t})\underbrace{(v-u)}_{-w}.$$

$$\begin{aligned} c(x,t) := \partial_u f(x,t,\xi_{x,t}), \quad L_2 := L_1 + c &\implies w_t + L_2 w \leq 0 \text{ in } G, \\ u \leq v \text{ auf } \Gamma &\implies w = u - v \leq 0 \text{ auf } \Gamma \end{aligned}$$

Hier wurde noch das Problem erkannt, dass c möglicherweise nicht stetig ist. Wenn wir das behoben haben, dann gilt nach Punkt (i), dass

$$\implies u - v = w \leq 0 \text{ in } G \implies u \leq v \text{ in } G.$$

(iii) Wenn wir zwei Lösungen u, v des Problems betrachten, so gilt

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_t + L_1 u + f(x,t,u) = v_t + L_1 v + f(x,t,v), & \text{in } G, \\ u(\cdot,0) = u_0 = v(\cdot,0), & \text{in } \Omega, \\ u = g = v, & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$
$$\Longrightarrow u = v \text{ auf } \Gamma.$$

Mit Punkt (ii) folgt $u \leq v$ und $v \leq u$ also $u = v$.

□

Aufgabe 2. Betrachten Sie die skalare Reaktions-Diffusionsgleichung

$$u_t = \Delta u + \lambda u - u^3 \quad \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

für $u(x,t) \in \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ und einem negativen Parameter λ.

(i) Bestimmen Sie die räumlich homogenen Lösungen $u = u(t)$ und untersuchen Sie deren asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$.
Hinweis: Die räumlich homogenen Lösungen erfüllen eine gewöhnliche DGl. Bestimmen Sie die Stationärzustände dieser DGl und deren Stabilität.

(ii) Betrachten Sie das ARWP mit der Randbedingung

$$u(x,t) = 0 \quad \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty),$$

und beschränkten Anfangsdaten

$$m \leq u(x,0) \leq M \quad \text{für } x \in \Omega, t \geq 0,$$

Zeigen Sie, dass klassische Lösungen $u(x,t)$ des ARWP und die räumlich homogenen Lösungen $\underline{u}(t)$ bzw. $\overline{u}(t)$ von dem ARWP mit Anfangsbedingungen $\underline{u}(0) = \min\{0,m\}$ bzw. $\overline{u}(0) = \max\{0,M\}$ die Ungleichung

$$\underline{u}(t) \leq u(x,t) \leq \overline{u}(t) \quad \text{für } x \in \Omega, t \geq 0,$$

erfüllen.

(iii) Was können Sie aus diesen Ungleichungen für das zeitlich asymptotische Verhalten von klassischen Lösungen $u(x,t)$ des ARWP schließen?

Lösung.

(i) Für eine räumlich homogene Lösung u gilt $\Delta u = 0$ also

$$u_t = \lambda u - u^3.$$

Diese ODE ist separabel, um eine Lösung zu erhalten berechnen wir also eine Stammfunktion

$$\int \frac{1}{u(\lambda - u^2)}\,\mathrm{d}u \overset{u^2=v}{=} \int \frac{1}{2v(\lambda - v)}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\lambda v}\,\mathrm{d}v + \int \frac{1}{\lambda(\lambda - v)}\,\mathrm{d}v\right)$$
$$= \frac{1}{2\lambda}(\ln(v) - \ln(v - \lambda)) = \frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{u^2}{u^2 - \lambda}\right)$$

Nun lösen wir

$$\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{u^2}{u^2-\lambda}\right) = t + \tilde{C}$$

nach u auf und erhalten

$$u(t) = \pm\frac{\sqrt{-\lambda}\exp(\lambda t)}{\sqrt{\exp(2\lambda t) - C^{-1}}}$$

mit $C := \exp(2\lambda\tilde{C}) > 0$. Sind das alle Lösungen?
Wir fragen uns auch welche Ruhelagen das System hat und erkennen

$$\lambda u - u^3 = -u(u-\sqrt{\lambda})(u+\sqrt{\lambda}).$$

Da $\lambda < 0$, also $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, gibt es also nur die Ruhelage Null.

Satz 5.8.
Vor.: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, y^* Ruhelage von f, $A := Df(y^*) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ das Spektrum von A.
Beh.: (i) Falls $\Re\lambda < 0 \quad \forall\lambda \in \sigma(A)$, so ist y^* eine asymptotisch stabile Ruhelage.
(ii) Falls es ein $\lambda \in \sigma(A)$ gibt mit $\Re\lambda > 0$, so ist die Ruhelage y^* instabil.

Wegen dem Prinzip der linearisierten Stabilität und

$$\partial_u(\lambda u - u^3)\mid_{u=0} = (\lambda - 3u^2)\mid_{u=0} = \lambda < 0$$

ist diese Ruhelage sogar asymptotisch stabil. Es gilt sogar ($\lambda < 0$)

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \pm\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{-\lambda}\exp(\lambda t)}{\sqrt{\exp(2\lambda t) - C^{-1}}} = 0.$$

Somit konvergiert die homogene Lösung für alle Startwerte gegen die asymptotische Ruhelage.

(ii) Für ein beliebiges $T > 0$ gilt

$$\underline{u}_t - \Delta\underline{u} - \lambda\underline{u} + \underline{u}^3 = 0 = u_t - \Delta u - \lambda u + u^3 = 0 = \overline{u}_t - \Delta\overline{u} - \lambda\overline{u} + \overline{u}^3 \quad \text{in } \Omega\times(0,T].$$

Außerdem gilt

$$\underline{u}(0) = \min\{0,m\} \le m \le u(x,0) \le M \le \max\{0,M\} \le \overline{u}(0) \quad \text{für jedes } x \in \Omega.$$

Schließlich gilt

$$\underline{u}(0) = \min\{0,m\} \le 0 \le \max\{0,M\} = \overline{u}(0)$$

0 ist eine Ruhelage entsprechender ODE also auch eine Lösung. Da sich die Lösungen ($\underline{u}$, 0 und $\overline{u}$) nicht schneiden dürfen gilt schon

$$\underline{u}(t) \le 0 = u(x,t) = 0 \le \overline{u}(t) \quad \text{für jedes } (x,t) \in \partial\Omega\times[0,T)$$

Nach der vorherigen Aufgabe 1 (ii) gilt ($L_1 := -\Delta$ und $f(x,t,u) := u^3 - \lambda u$)

$$\underline{u}(t) \le u(x,t) \le \overline{u}(t) \quad \text{für jedes } (x,t) \in \Omega\times(0,T]$$

und da $T > 0$ beliebig war folgt die Aussage.

(iii) Wir erkennen, dass eine klassische Lösung u, wegen des Einschluss-Satzes und der letzten Ungleichung aus (ii), für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

$\square$

Aufgabe 3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und sei u eine klassische Lösung des parabolischen Problems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

wobei $u_0 \geq 0$ in Ω und $c \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie: $u \geq 0$ in $\Omega \times (0,\infty)$. Achtung: c ist also nicht notwendig nichtnegativ!
Hinweis: Welche Differentialgleichung löst $v = \exp(\lambda t)u$?

Lösung. Seien $T > 0$, $G_T = \Omega \times (0,T)$ ein beschränkter Zylinder und Γ_T dessen Mantel $\cup$ Grundfläche. Gemäß Hinweis wählen wir die Substitution $v := \exp(\lambda t)$. Weil u eine klassische Lösung ist, gilt $\Delta u = u_t + cu$ in $\Omega \times (0,\infty)$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad v_t &= (\exp(\lambda t)u)_t = \exp(\lambda t)u_t + \lambda \exp(\lambda t)u = \exp(\lambda t)u_t + \lambda v, \\ \Delta v &= \Delta(\exp(\lambda t)u) = \exp(\lambda t)\Delta u = \exp(\lambda t)(u_t + cu) = \exp(\lambda t)u_t + \exp(\lambda t)cu = \exp(\lambda t)u_t + cv \end{aligned}$$

Fügen wir beides zusammen erhalten wir folgende PDE. (Die RWBs und AWBs interessieren uns dabei nicht.)

$$v_t - \Delta v + (c - \lambda)v = 0$$

Darauf wollen wir Satz 6.31 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$) anwenden.

Satz 6.31 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$). *Sei $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\overline{G})$, $c \geq 0$ in G und*

$$u_t + L(u) \leq 0 \quad \textit{bzw.} \quad u_t + L(u) \geq 0 \quad \textit{in } G.$$

Dann folgt

$$\sup_{(x,t)\in G} u(x,t) \leq \max\left\{0, \sup_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t)\right\} \textit{ bzw. } \inf_{(x,t)\in G} u(x,t) \geq \min\left\{0, \inf_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t)\right\}.$$

Wählen wir $\lambda := -\|c\|_{L^\infty(\Omega)}$, so ist $(c - \lambda) \geq 0$. Da u klassische Lösung ist, muss $v \in C_1^2(G_T) \cap C^0(\overline{G_T})$. Wir können also tatsächlich das Schwache Minimumsprinzip auf v anwenden.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow v = \exp(\lambda t)0 = 0 \text{ auf Mantel von } G_T, \\ & v = \exp(\lambda t)u_0 \geq 0 \text{ auf Boden von } G_T \\ &\Longrightarrow v \geq 0 \text{ auf } \Gamma_T \\ &\overset{\text{MP}}{\Longrightarrow} v \geq \inf_{(x,t)\in G_T} v \geq \min\left\{0, \inf_{(x,t)\in\Gamma_T}\right\} = 0 \text{ auf } G_T \\ &\Longrightarrow u = \exp(-\lambda t)v \geq 0 \text{ auf } G_T \end{aligned}$$

T kann nun beliebig groß sein.

$$\implies u \geq 0 \text{ auf } \Omega \times (0, \infty)$$

□

Aufgabe 4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $g, u_0 \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass das semilineare Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta(u^\alpha) = g(x) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

höchstens eine nichtnegative Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega} \times (0, \infty))$ besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie zwei Lösungen u und v des obigen ARWP und benutzen Sie die Lösung $w(t)$ von

$$\Delta w(t) = u(t) - v(t) \quad \text{in } \Omega, \quad w(t) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

als Testfunktion.

Lösung. Seien u und v zwei nichtnegative Lösungen. Nach Satz 5.20 hat das Poisson-Problem

$$\begin{cases} \Delta w(t) = u(t) - v(t) & \text{in } \Omega, \\ w(t) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

eine eindeutige schwache Lösung $w(t) \in H_0^1(\Omega)$, das heißt für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega (u - v)(t)\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla w(t) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Wir können w nun als Testfunktion für die schwache Formulierung unseres ARW-Problems verwenden: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega gw \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s &= \int_0^t \int_\Omega (u_t - \Delta(u^\alpha))\, w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left(\int_\Omega u_t w \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}\nabla(u^\alpha) w \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left(\int_\Omega u_t w \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla(u^\alpha) \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \underbrace{w}_{=0} (\nabla(u^\alpha) \cdot \nu) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \int_\Omega u_t w + \nabla(u^\alpha) \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Dieselbe Gleichheit gilt natürlich auch für v. Wenn wir beide Gleichungen voneinander subtrahieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_\Omega u_t w + \nabla(u^\alpha) \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s - \int_0^t \int_\Omega v_t w + \nabla(v^\alpha) \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left(\int_\Omega (u - v)_t w \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla(u^\alpha - v^\alpha) \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\ &= -\int_0^t \left(\int_\Omega \nabla w_t \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x - \int_\Omega (u^\alpha - v^\alpha)(u - v) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Das dabei auftretende Randintegral fällt weg, weil w auf $\partial\Omega$ verschwindet. Weiters haben wir (2) auf $\varphi = u^\alpha - v^\alpha$ angewandt.
Weil für $\alpha > 0$ die Abbildung $x \mapsto x^\alpha$ monoton steigend ist, gilt stets $(u^\alpha - v^\alpha)(u - v) \geq 0$. Des weiteren ist $w \equiv 0$ für $t = 0$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung von (1), womit $\nabla w(\cdot, 0) = 0$ ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\int_0^t \int_\Omega (u^\alpha - v^\alpha)(u - v) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_\Omega \nabla w_t \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|\nabla w(\cdot, s)\|_{L^2} \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^2} - \frac{1}{2} \|\underbrace{\nabla w(\cdot, 0)}_{=0}\|_{L^2} \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^2} ;
\end{aligned}$$

$w(\cdot, t)$ ist also für alle $t > 0$ eine konstante Funktion. Damit gilt $0 = \Delta w(t) = u(t) - v(t)$, was zu beweisen war.
Zeigen wir noch die Gleichheit $(*)$: Für ein $u \in C^\infty(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t u_t u \, \mathrm{d}x &\overset{\mathrm{PI}}{=} u^2(x,t) - u^2(x,t_0) - \int_{t_0}^t u_t u \, \mathrm{d}x \\
\Longrightarrow \quad \|u(t_0)\|_{L^2}^2 + 2\int_{t_0}^t (u_t(s), u(s))_{L^2} \, \mathrm{d}s &= \|u(t_0)\|_{L^2}^2 + \int_\Omega 2 \int_{t_0}^t u_t u \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&= \|u(t_0)\|_{L^2}^2 + \int_\Omega u^2(x,t) - u^2(x,t_0) \, \mathrm{d}x \\
&= \|u(t)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun beide Seiten nach t differenzieren, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u(t)\|_{L^2} = 2\,(u_t(t), u(t))_{L^2} \, .$$

Aus der Dichtheit von $C^\infty(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ folgt die gewünschte Gleichheit für alle $u \in L^2(\Omega)$, insbesondere also für $\nabla w(\cdot, s)$. $\square$

Partielle Differentialgleichungen

12. Übung am 17.12.2020

Richard Weiss   Florian Schager   Christian Sallinger   Fabian Zehetgruber
Paul Winkler   Christian Göth

Aufgabe 1. Sei u eine klassische Lösung der Telegraphengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} + du_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, t > 0, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

wobei $d > 0$ konstant, $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist.

(i) Zeigen Sie durch eine formale Rechnung, dass die Energie $\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)\ \mathrm{d}x$ uniform beschränkt in $t \in (0, \infty)$ ist.

(ii) Bestimmen Sie formal eine Lösung bzgl. eines geeigneten ONS.

(iii) Zeigen Sie, dass $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}$ exponentiell schnell für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, falls $u_1 = 0$. Gilt diese Aussage auch für $d = 0$?

Lösung.

(i) Wir gehen analog zu Seite 121 im Skriptum vor.

Dann können wir die Differentialgleichung mit u_t multiplizieren und integrieren und erhalten

$$\implies 0 = \int_\Omega u_{tt}u_t + du_t^2 - (\Delta u)u_t\ \mathrm{d}x = \int_\Omega u_{tt}u_t\ \mathrm{d}x + d\int_\Omega u_t^2\ \mathrm{d}x - \int_\Omega (\Delta u)u_t\ \mathrm{d}x.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_t^2 = 2u_{tt}u_t, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla u|^2 = 2\nabla u \cdot \nabla u_t$$

Für das linke Integral erhalten wir daher

$$\implies \int_\Omega u_{tt}u_t\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_t^2\ \mathrm{d}x.$$

Für das rechte Integral erhalten wir (daher)

$$\implies -\int_\Omega (\Delta u)u_t\ \mathrm{d}x \overset{\text{PI}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t\ \mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega u_t(\nabla u \cdot \nu)\ \mathrm{d}s}_{0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x.$$

Insgesamt erhalten wir (daher)

$$\implies \int_\Omega u_{tt}u_t \, \mathrm{d}x + d\int_\Omega u_t^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega (\Delta u)u_t \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + d\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Die Energie bezeichnen wir mit $E(t)$.

$$\implies E'(t) = -2d\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

Das heißt, dass die Energie höchstens abnimmt. Wir berechnen die Anfangs-Energie $E(0)$.

$$\implies E(0) = \int_\Omega u_t(x,0)^2 + |\nabla u(x,0)|^2 \, \mathrm{d}x = \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \underbrace{\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2}_{<\infty} + \underbrace{\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2}_{<\infty} < \infty$$

Wir benutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, um zu zeigen, dass die Anfangs-Energie $E(0)$ tatsächlich eine uniforme Schranke für $E(t)$, $t > 0$ ist.

$$\implies E(t) = E(0) + \underbrace{\int_0^t E'(s) \, \mathrm{d}s}_{\leq 0} \leq E(0) < \infty$$

(ii) Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein ONS von $L^2(\Omega)$ bestehend aus Eigenvektoren von $-\Delta$ zu den positiven und aufsteigend sortierten Eigenwerten $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Wir berechnen für $j \in \mathbb{N}$ und $\tilde{u}_j := (u, v_j)_{L^2(\Omega)}$ formal

$$(\partial_{tt} + d\partial_t)u_j = (u_{tt} + du_t, v_j)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u, v_j)_{L^2(\Omega)} = -\lambda_j u_j.$$

Hier haben wir es also mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu tun. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\mu_j := -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}, \quad \nu_j := -\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}.$$

Also ist eine Allgemeine Lösung gegeben durch

$$\tilde{u}_j(t) = c_1 e^{\mu_j t} + c_2 e^{\nu_j t}$$

Nun sollen auch noch die Anfangsbedingungen

$$(u_0, v_j)_{L^2(\Omega)} = \tilde{u}_j(0) = c_1 + c_2, \quad (u_1, v_j)_{L^2(\Omega)} = \partial_t \tilde{u}_j(0) = \mu_j c_1 + \nu_j c_2$$

Wenn wir das nun lösen erhalten wir

$$\tilde{u}_j(t) = \frac{\mu_j(u_0, v_j)_{L^2(\Omega)} - (u_1, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\nu_j t} - \frac{\nu_j(u_0, v_j)_{L^2(\Omega)} - (u_1, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\mu_j t}$$

und somit die formale Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{j=1}^\infty \tilde{u}_j(t) v_j \\ &= \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\mu_j(u_0, v_j)_{L^2(\Omega)} - (u_1, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\nu_j t} - \frac{\nu_j(u_0, v_j)_{L^2(\Omega)} - (u_1, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\mu_j t} \right) v_j \end{aligned}$$

(iii) Nun setzen wir $u_1 := 0$. Damit gilt

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\nu_j t} - \frac{\nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\mu_j t} \right) v_j$$

und mit einer formalen Grenzwertvertauschung und dem Satz von Parseval weiters

$$\begin{aligned}
\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\nu_j t} - \frac{\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}}{\mu_j - \nu_j} e^{\mu_j t} \right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2}{\left|\mu_j - \nu_j\right|^2} \left|e^{\nu_j t} - e^{\mu_j t}\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2}{\left|\mu_j - \nu_j\right|^2} e^{-dt} \left| \exp\left(-t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}\right) - \exp\left(t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}\right) \right|^2
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ der Eigenwert λ_j positiv ist und dass die Eigenwerte aufsteigend geordnet sind. Sei also $l \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit $\frac{d^2}{4} < \lambda_l$. Für alle $k \geq l$ gilt nun

$$\mu_k \nu_k = \left(-\frac{d}{2} + i\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{4}}\right)\left(-\frac{d}{2} - i\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{4}}\right) = \frac{d^2}{4} + \left(\lambda_k - \frac{d^2}{4}\right) = \lambda_k.$$

Außerdem gilt

$$\left|\mu_k - \nu_k\right|^2 = \left|2i\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{4}}\right|^2 = 4\left(\lambda_k - \frac{d^2}{4}\right) \geq 4\left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left| \exp\left(-it\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{4}}\right) - \exp\left(it\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{4}}\right) \right|^2 &= 4 \left| \frac{\exp\left(it\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{4}}\right) - \exp\left(-it\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{4}}\right)}{2i} \right|^2 \\
&= 4 \left| \sin\left(t\sqrt{\lambda_k - \frac{d^2}{2}}\right) \right|^2 \leq 4
\end{aligned}$$

also gilt mit der Besselschen Ungleichung ganz am Ende

$$\begin{aligned}
\sum_{j=l}^{\infty} \frac{\left|\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2}{\left|\mu_j - \nu_j\right|^2} e^{-dt} &\left|\exp\left(-t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}\right) - \exp\left(t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}\right)\right|^2 \\
&\leq \left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} e^{-dt} \sum_{j=l}^{\infty} \left|\lambda_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2 \\
&= \left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} e^{-dt} \sum_{j=l}^{\infty} \left|(u_0, \lambda_j v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2 \\
&= \left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} e^{-dt} \sum_{j=l}^{\infty} \left|(u_0, \Delta v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2 \\
&= \left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} e^{-dt} \sum_{j=l}^{\infty} \left|(\nabla u_0, \nabla v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2 \\
&\leq \left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} e^{-dt} \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
&\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq e^{-dt} &\left(\left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\left|\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2}{\left|\mu_j - \nu_j\right|^2} \left|\exp\left(-t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}\right) - \exp\left(t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_j}\right)\right|^2\right) \\
&\leq e^{-dt} \left(\left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\left|\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2}{\left|\mu_j - \nu_j\right|^2} \left|2\exp\left(t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_1}\right)\right|^2\right) \\
&\leq e^{-dt} \left(\left(\lambda_l - \frac{d^2}{4}\right)^{-1} \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\exp\left(2t\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_1}\right) \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\left|\mu_j \nu_j (u_0, v_j)_{L^2(\Omega)}\right|^2}{\left|\mu_j - \nu_j\right|^2}\right)
\end{aligned}$$

und

$$-d + 2\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_1} < 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{d^2}{4} - \lambda_1\right) < d^2 \Leftrightarrow -4\lambda_1 < 0$$

Für $d = 0$ haben wir es einfach mit der homogenen Wellengleichung zu tun. Nach den überlegungen auf Seite 118 im Skript bekommen wir die Lösungsformel

$$u(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda_k} t)(u_0, v_k)_{L^2(\Omega)} v_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} t)}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, v_k)_{L^2(\Omega)} v_k$$

Nach Parseval gilt also (wiederum mit formaler Grenzwertvertauschung)

$$
\begin{aligned}
\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^{\infty} |\sqrt{\lambda_k}\sin(\sqrt{\lambda_k}t)(u_0,v_k)_{L^2(\Omega)}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\cos(\sqrt{\lambda_k}t)(u_1,v_k)_{L^2(\Omega)}\right|^2 \\
&\geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} |\sin(\sqrt{\lambda_k}t)(u_0,v_k)_{L^2(\Omega)}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\cos(\sqrt{\lambda_k}t)(u_1,v_k)_{L^2(\Omega)}\right|^2
\end{aligned}
$$

Durch die Sinus- und Cosinusterme bekommen wir nun keine (erst recht keine exponentiell schnelle) Konvergenz gegen 0.

$\square$

Aufgabe 2. Seien das elektrische Feld $E = (E_1, E_2, E_3)^\top$ und das magnetische Feld $B = (B_1, B_2, B_3)^\top$ glatte Lösungen der Maxwell-Gleichungen

$$
E_t = \operatorname{rot} B, \quad B_t = -\operatorname{rot} E, \quad \operatorname{div} E = \operatorname{div} B = 0
$$

ohne Ladungen und Ströme, wobei $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $u = E_i$ bzw. $u = B_i, i = 1,2,3$, die Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ löst.

(ii) Zeigen Sie, dass die Energiedichte $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|E|^2 + |B|^2)\,\mathrm{d}x$ zeitlich konstant ist.

Lösung.

(i) Wir erinnern uns an folgende Definitionen.

$$
\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} f_i
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\operatorname{rot} f &= \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1) - \partial_{x_3}(\partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3) \\ \partial_{x_3}(\partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2) - \partial_{x_1}(\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1) \\ \partial_{x_1}(\partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3) - \partial_{x_2}(\partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{x_1x_2} f_2 - \partial_{x_2x_2} f_1 - \partial_{x_3x_3} f_1 + \partial_{x_1x_3} f_3 \\ \partial_{x_2x_3} f_3 - \partial_{x_3x_3} f_2 - \partial_{x_1x_1} f_2 + \partial_{x_1x_2} f_1 \\ \partial_{x_1x_3} f_1 - \partial_{x_1x_1} f_3 - \partial_{x_2x_2} f_3 + \partial_{x_2x_3} f_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2}\partial_{x_1} f_2 + \partial_{x_3}\partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2} f_1 + \partial_{x_2}\partial_{x_2} f_2 + \partial_{x_3}\partial_{x_2} f_3 \\ \partial_{x_1}\partial_{x_3} f_1 + \partial_{x_2}\partial_{x_3} f_2 + \partial_{x_3}\partial_{x_3} f_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_{x_1x_1} f_1 + \partial_{x_2x_2} f_1 + \partial_{x_3x_3} f_1 \\ \partial_{x_1x_1} f_2 + \partial_{x_2x_2} f_2 + \partial_{x_3x_3} f_2 \\ \partial_{x_1x_1} f_3 + \partial_{x_2x_2} f_3 + \partial_{x_3x_3} f_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \operatorname{div} f \\ \partial_{x_2} \operatorname{div} f \\ \partial_{x_3} \operatorname{div} f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} \\
&= \nabla \operatorname{div} f - \Delta f
\end{aligned}
$$

Wir erinnern uns an die Bedingungen an das elektrische und magnetische Feld E bzw. B.

$$\begin{aligned} \implies B_{tt} &= -\operatorname{rot} E_t = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} B = \Delta B, \\ E_{tt} &= \operatorname{rot} B_t = \operatorname{rot}(-\operatorname{rot} E) = \Delta E \end{aligned}$$

(ii) Wir zeigen, dass die Ableitung der Energiedichte verschwindet.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|E|^2+|B|^2\right)\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}\left(|E|^2+|B|^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{!}{=} \lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}\left(|E|^2+|B|^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{MK}}{=} \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|E|^2+|B|^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|E|^2+|B|^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3}E_i^2+B_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3}2E_i(E_t)_i+B_i(B_t)_i \\ &= 2\sum_{i=1}^{3}E_i(\operatorname{rot} B)_i - B_i(\operatorname{rot} E)_i \\ &= 2(E_1(\partial_{x_2}B_3-\partial_{x_3}B_2)+E_2(\partial_{x_3}B_1-\partial_{x_1}B_3)+E_3(\partial_{x_1}B_2-\partial_{x_2}B_1) \\ &\quad -B_1(\partial_{x_2}E_3-\partial_{x_3}E_2)-B_2(\partial_{x_3}E_1-\partial_{x_1}E_3)-B_3(\partial_{x_1}E_2-\partial_{x_2}E_1)) \\ &= 2((E_1\partial_{x_2}B_3+B_3\partial_{x_2}E_1)-(E_1\partial_{x_3}B_2+B_2\partial_{x_3}E_1) \\ &\quad +(E_2\partial_{x_3}B_1+B_1\partial_{x_3}E_2)-(E_2\partial_{x_1}B_3+B_3\partial_{x_1}E_2) \\ &\quad +(E_3\partial_{x_1}B_2+B_2\partial_{x_1}E_3)-(E_3\partial_{x_2}B_1+B_1\partial_{x_2}E_3)) \\ &= 2(\partial_{x_2}(E_1B_3)-\partial_{x_3}(E_1B_2)+\partial_{x_3}(E_2B_1)-\partial_{x_1}(E_2B_3)+\partial_{x_1}(E_3B_2)-\partial_{x_2}(E_3B_1)) \\ &= 2\left(\operatorname{div}\begin{pmatrix}E_3B_2\\E_1B_3\\E_2B_1\end{pmatrix}-\operatorname{div}\begin{pmatrix}E_2B_3\\E_3B_1\\E_1B_2\end{pmatrix}\right) \\ &= 2\operatorname{div}(E\times B) \end{aligned}$$

Wir gehen davon aus, dass $E(\cdot,t), B(\cdot,t)\in L^2(\mathbb{R}^3)$, $t>0$. Sei f eine dieser Funktionen.

$$\begin{aligned} \implies \int_0^\infty \|f\|^2_{L^2(\partial B_R(0))}\,\mathrm{d}R &= \int_0^\infty\int_{\partial B_R(0)}|f|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}R \\ &\overset{\text{KOFLFO}}{=} \int_{\mathbb{R}^3}|f|^2\,\mathrm{d}x \\ &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &< \infty \\ \implies \|f\|_{L^2(\partial B_R(0))} &\xrightarrow{R\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\implies \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(|E|^2+|B|^2\big)\ \mathrm{d}x &= \int_{B_r(0)} \operatorname{div}(E\times B)\ \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial B_R(0)} (E\times B)\cdot \nu\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{\partial B_R(0)} (E\times \nu)\cdot B\ \mathrm{d}s \\
&\overset{\text{CSB}}{\leq} \sqrt{\int_{\partial B_R(0)} |E\times\nu|^2\ \mathrm{d}s}\sqrt{\int_{\partial B_R(0)} |B|^2\ \mathrm{d}s} \\
&= \sqrt{\int_{\partial B_R(0)} |E|^2|\nu|^2\sin^2\theta\ \mathrm{d}s}\sqrt{\int_{\partial B_R(0)} |B|^2\ \mathrm{d}s} \\
&\leq \|E\|_{L^2(\partial B_R(0))}\|B\|_{L^2(\partial B_R(0))} \xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3. Betrachten Sie die lineare Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$

$$
\begin{cases}
u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \\
u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\
u_t(x,0) = u_1(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3.
\end{cases}
$$

Leiten Sie die Kirchhoffsche Formel

$$
u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_1(y)\ \mathrm{d}s(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_0(y)\ \mathrm{d}s(y)\right)
$$

für die Lösung der Wellengleichung her, wobei $B(x,t)$ die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius t ist.
Hinweis: Betrachten Sie für eine Lösung $u \in C^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$ die Mittelwerte

$$
\begin{aligned}
U(x,r,t) &:= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\ \mathrm{d}s(y), \\
G(x,r) &:= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_0(y)\ \mathrm{d}s(y), \\
H(x,r) &:= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_1(y)\ \mathrm{d}s(y).
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^3$ der Mittelwert $U \in C^2([0,\infty)\times[0,\infty))$ die *Euler-Poisson-Darboux-Gleichung*

$$
\begin{cases}
U_{tt} - U_{rr} - \frac{2}{r}U_r = 0 & \text{für } (r,t) \in (0,\infty)\times(0,\infty), \\
U(r,0) = G & \text{für } r \in (0,\infty), \\
U_t(r,0) = H & \text{für } r \in (0,\infty),
\end{cases}
$$

erfüllt und $\tilde{U} := rU$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{für } (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \\ \tilde{U}(r,0) = rG & \text{für } r \in (0,\infty), \\ \tilde{U}_t(r,0) = rH & \text{für } r \in (0,\infty), \\ \tilde{U}(0,t) = 0 & \text{für } t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Lösung. Eine 1000 Formeln sagen mehr als 1000 Worte!

1. Schritt (Euler-Poisson-Darboux-Gleichung):

1.1. Schritt ($\forall\, (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty) : U_{tt} - U_{rr} - \frac{2}{r} U_r = 0$):

$$\Longrightarrow U(x,t,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\ \mathrm{d}s(y) \overset{\text{TRAFO}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)\ \mathrm{d}s(z)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow U_r(x,t,r) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz,t) \cdot z\ \mathrm{d}s(z) \\ &\overset{\text{TRAFO}}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y,t) \cdot \frac{y-x}{r}\ \mathrm{d}s(y) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y,t) \cdot \nu\ \mathrm{d}s(y) \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(x,r)} \operatorname{div} \nabla u(y,t)\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\ \mathrm{d}y \\ &\overset{\text{KOFLFO}}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \int_{\partial B(x,R)} u_{tt}(y,t)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}R \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow r^2 U_r(x,f,t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^r \int_{\partial B(x,R)} u_{tt}(y,t)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}R$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 2rU_r(x,r,t) + r^2 U_{rr}(x,r,t) &= (r^2 U_r(x,r,t))_r \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(y,t)\ \mathrm{d}s(y) = \partial_{tt} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\ \mathrm{d}s(y) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{r} U_r(x,r,t) + U_{rr}(x,r,t) = \partial_{tt} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\ \mathrm{d}s(y) = U_{tt}(x,r,t)$$

1.2. Schritt ($\forall\, r \in (0,\infty) : U(r,0) = G$):

$$\Longrightarrow U(x,r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y,0)\ \mathrm{d}s(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u_0(y)\ \mathrm{d}s(y) = G(x,r)$$

1.3. Schritt ($\forall\, r \in (0,\infty) : U_t(r,0) = H$):

$$\implies U_t(x,r,0) = \left[\partial_t \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\ \mathrm{d}s(y)\right]_{t=0} = \left[\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u_t(y,t)\ \mathrm{d}s(y)\right]_{t=0}$$
$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u_t(y,0)\ \mathrm{d}s(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u_1(y)\ \mathrm{d}s(y) = H(x,r)$$

2. Schritt (homogene eindimensionale Wellengleichung):

$$\tilde{U} := rU, \quad \tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH$$

2.1. Schritt ($\forall\, (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty) : \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0$):

$$\implies \tilde{U}_{tt} = rU_{tt} \overset{1.1}{=} r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

2.2. Schritt ($\forall\, r \in (0,\infty) : \tilde{U}(r,0) = \tilde{G}$):

$$\implies \tilde{U}(r,0) = rU(r,0) \overset{1.2}{=} rG(r,0) = \tilde{G}(r,0)$$

2.3. Schritt ($\forall\, r \in (0,\infty) : \tilde{U}_t(r,0) = \tilde{H}$):

$$\implies \tilde{U}_t(r,0) = rU_t(r,0) \overset{1.3}{=} rH(r,0) = \tilde{H}(r,0)$$

2.4. Schritt ($\forall\, t \in (0,\infty) : \tilde{U}(0,t) = 0$):

$$\implies \tilde{U}(0,t) = 0 \cdot U(0,t) = 0$$

3. Schritt:

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \quad u(\cdot,0) = u_0,\ u_t(\cdot,0) = u_1 \quad \text{in } \mathbb{R}. \qquad (7.1)}$$

$$\boxed{u_{\text{hom}}(x,t) = \frac{1}{2}\big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z)dz, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \qquad (7.2)}$$

$$\implies \tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)\Big) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x,y)\ \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)\Big) + \frac{1}{2}\left(\int_0^{t+r} \tilde{H}(x,y)\ \mathrm{d}y - \int_0^{t-r} \tilde{H}(x,y)\ \mathrm{d}y\right)$$

$$
\begin{aligned}
\implies u(x,t) &= \frac{1}{4\pi} u(x,t) \int_{\partial B(0,1)} \, \mathrm{d}s(z) \\
&= \lim_{r \to 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t) \, \mathrm{d}s(z) \\
&= \lim_{r \to 0} U(x,r,t) \\
&= \lim_{r \to 0} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r} \\
&= \lim_{r \to 0} \left(\frac{1}{2r} \Big(\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r) \Big) + \frac{1}{2r} \left(\int_0^{t+r} \tilde{H}(x,y) \, \mathrm{d}y - \int_0^{t-r} \tilde{H}(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \right) \\
&= \partial_t \tilde{G}(x,t) + \tilde{H}(x,t) \\
&= \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} u_1(y) \, \mathrm{d}s(y) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} u_0(y) \, \mathrm{d}s(y) \right)
\end{aligned}
$$

$\square$