A 6.4.1 Laut 6.4.1, ist

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis, also

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 6, \ b = -3.$$

A 6.4.4 Gg: $\mathcal{A}$ affine Ebene, $\{a, b, c\} \subseteq \mathcal{A}$ Dreieck, $d \in \mathcal{A}$ Punkt mit

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (a \vee d) \cap (b \vee c), \\ b_1 &= (b \vee d) \cap (a \vee c), \\ c_1 &= (c \vee d) \cap (a \vee b). \end{aligned}\right\} \text{ verschieden zu } a, b, c.$$

Zz: $TV(a, b, c_1) \cdot TV(b, c, a_1) \cdot TV(c, a, b_1) = -1$.

Sei $d = d_1 a + d_2 b + d_3 c$, wobei $d_1 + d_2 + d_3 = 1$.

Satz 6.2.2. $H(m_i)_{i \in I} = m_j + [(m_i - m_j)_{i \in I \setminus \{j\}}]$.

6.2.9. $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A} := H(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i)$.

Also $a_1 = (a + [d - a]) \cap (b + [c - b])$.

Daher $\exists \lambda, \mu \in K$:

$$a + \lambda(d_1 a + d_2 b + d_3 c - a) = b + \mu(c - b) \Leftrightarrow$$
$$a - b = \mu c - \mu b - \lambda d_1 a - \lambda d_2 b - \lambda d_3 c + \lambda a =$$
$$a\lambda(1 - d_1) - b(\mu + \lambda d_2) + c(\mu - \lambda d_3).$$

Weil das Dreieck $\{a, b, c\}$, laut Definition 6.2.7, a.u. ist, folgen

- $\lambda(1 - d_1) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1 - d_1}$
- $\mu + \lambda d_2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 - \lambda d_2 = 1 - \frac{d_2}{1 - d_1}$
- $\mu - \lambda d_3 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{d_3}{1 - d_1}$

$\Rightarrow a_1 = b + \frac{d_3}{1 - d_1}(c - b)$.

Analog, bekommt man

$$b_1 = c + \frac{d_1}{1-d_2}(a-c) \quad \text{und} \quad c_1 = a + \frac{d_2}{1-d_3}(b-a).$$

Laut (6.11), kann man nun

$$x_1 := TV(a, b, c_1) \Leftrightarrow a = c_1 + x_1(b - c_1)$$

$$= a + \frac{d_2}{1-d_3}(b-a) + x_1\left(b - a - \frac{d_2}{1-d_3}(b-a)\right) =$$

$$= a\left(1 - \frac{d_2}{1-d_3} - x_1 + x_1\frac{d_2}{1-d_3}\right) + b\left(\frac{d_2}{1-d_3} + x_1 - x_1\frac{d_2}{1-d_3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{d_2}{1-d_3} + x_1\left(\frac{d_2}{1-d_3} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{d_2}{d_1}.$$

Analog, bekommt man

$$x_2 = -\frac{d_3}{d_2} \quad \text{und} \quad x_3 = -\frac{d_1}{d_3}.$$

Also muss $x_1 x_2 x_3 = -1$.

A 6.5.1 Gg: Im proj. Raum $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{4\times 1})$, seien

$\mathcal{E}: x_0 - x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$,

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right],$$

Ebenen.

Ww: $x_0 = x_1 - x_2 + 3x_3$, also kann man für x_1, x_2, x_3 jeweils 1 wählen und bekommt

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right].$$

Ww: $\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\1 & 2 & 1\\2 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Also muss $\mathcal{E} \cap \mathcal{U} = \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$.

A 6.5.6

(a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ ist tatsächlich die Anzahl der Projektiven Punkte:

- $q^{n+1}-1$ ist die Anzahl der Vektoren in $GF(q)^n \setminus \{\mathcal{O}\}$.
  ($\mathcal{O}$ spannt mit $\mathcal{O}$ keine Gerade auf.)
- Mit $q-1$ Skalaren könnte multipliziert werden, wobei die Gerade unverändert bliebe.

A 6.5.7

(a) Zz: $\mathcal{P}(\ker a^*) \cap \mathcal{P}(\ker b^*) \subseteq \mathcal{P}(\ker c^*) \Leftrightarrow$
$c^* \in [a^*, c^*]$.

„$\Rightarrow$". Fall 1. $\ker a^* = \ker b^*$.
Ww: $\mathcal{P}(\ker a^*) \subseteq \mathcal{P}(\ker b^*)$ und beide sind gleichdimensional, also gleich

Fall 2. $\ker a^* \neq \ker b^*$
Ww: $\exists x \in V: x \notin \ker c^* \wedge (x \in \ker a^* \text{ xor } x \in \ker b^*)$.
oBdA. $x \in \ker a^*$; dann
$0 \neq \langle c^*, x\rangle = \langle \lambda a^* + \mu b^*, x\rangle = \mu \langle b^*, x\rangle \Rightarrow \mu := \frac{\langle c^*, x\rangle}{\langle b^*, x\rangle}$
„$\Leftarrow$". Sei abermals $g \in \mathcal{P}(\ker a^*) \cap \mathcal{P}(\ker b^*)$.
Ww: $\exists \lambda, \mu \in K$:

$\langle c^*, g\rangle = \langle \lambda a^* + \mu b^*, g\rangle = \lambda \langle a^*, g\rangle + \mu \langle b^*, g\rangle =$
$\lambda \cdot \{0\} + \mu \cdot \{0\} = \{0\}$

$\Rightarrow g \in \mathcal{P}(\ker c^*)$.

(b) $g: \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -4 & 2 \\ -2 & -1 \end{matrix}}_{*} & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ -* \end{bmatrix} = [0]$

$\Rightarrow g = \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Analog bekommt man $h = \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

Laut Formel (6.14), gilt

$\{P\} \vee g = \mathcal{P}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{bmatrix} & E_3 & \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$(-6, 1, 1, E_1) \cdot \cdots = (\mathcal{O})$$

$\Rightarrow \quad \{P\} \vee g : \quad -6x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0.$

Analog bekommt man $\{P\} \vee h : -2x_0 + x_1 - x_2 + x_3 = 0.$

Die Treffgerade t_P wird, laut A 6.5.3 als solche bestimmt:

$t_P = ((\{P\} \vee g) \cap h) \vee \{P\}.$

$(\{P\} \vee g) \cap h$:

$$\begin{aligned} -6x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 &= 0 \\ x_0 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3 & \\ -2 & E_3 \\ -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathcal{O})$$

Also $t_P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} E_2 & \\ & \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & E_2 \\ -4 & 1 & \end{bmatrix} \quad (\mathcal{O})$$

$$\Rightarrow \quad t_P : \quad \begin{aligned} -2x_0 + x_2 &= 0 \\ -4x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir schneiden nun mit g, indem wir die LGS vereinigen

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{matrix} & E_2 \\ \begin{matrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Gleichungen geben im $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{4\times 1})$ einen Punkt vor.
Analog für $t \cap h$.

A 6.5.8 (α)

(a) $H_1 \cap H_2$: $2x_0 + x_1 + x_2 + x_4 = 0$
$-x_0 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & \\ 2 & 1 & 1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & E_3 & \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = (0)$$

Wir addieren P und

$$\begin{bmatrix} & E_3 & & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & E_4 & & \\ 2 & 1/3 & -1 & -4/3 \end{bmatrix}$$

$(-2 \ \ -1/3 \ \ 1 \ \ 4/3 \ \ 1) \qquad (0)$

H_p : $-2x_0 - 1/3\, x_1 + x_2 + 4/3\, x_3 + x_4 = 0$.

(b) $P_1 \vee P_2 = \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ & E_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & 3 & -2 \\ E_3 & 1 & -1 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (0) \quad \Rightarrow \quad P_1 \vee P_2 : \begin{aligned} x_0 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Gemeinsam mit der Gleichung für H_1, gibt das

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & 2 \\ E_4 & 1/3 \\ & -1 \\ & -4/3 \end{bmatrix}.$$

Also ist

$$P_H = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ \cdot 1/3 \\ 1 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

(c) Der Vektor oben (von P_H) besitzt die selben Koeffizienten, wie die Gleichung von H_p.

A 6.6.2 Ug:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right], \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\6\\2\end{pmatrix}\right];$$

6.6.4. Wenn $s \in V$, $U \in Sub(V)$, dann

$$\varepsilon(s+U) = \{K(1, s+a) \mid a \in U\}$$
$$= \{K((1,s)+(0,a)) \mid a \in U\},$$

wobei in unserem Fall

$$\varepsilon: \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4\times 1})$$
$$x \mapsto \mathbb{R}(1,x)^T.$$

Also lauten die Basen von

- $\mathcal{P}(U_1)$: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\4\\4\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$,

- $\mathcal{P}(U_2)$: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\6\\2\end{pmatrix} \right\}$.

$$\left[\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\6\\2\end{pmatrix}\right] \subseteq \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$\uparrow \qquad \uparrow \quad \uparrow$

Fernpunkte laut 6.6.4

„$\subseteq$" haben wir letzte Woche bereits gezeigt.