Theoretische Informatik
1. Übungsblatt

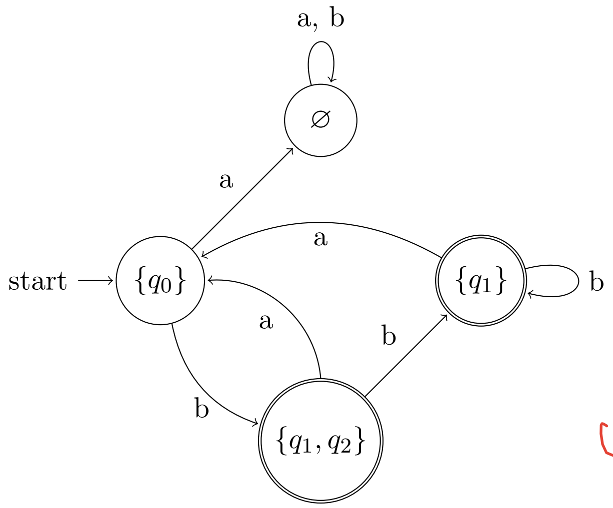
Paul Winkler
11818749

Aufgabe 1. Bezeichne $L := \{ab, aba\}^*, R := \{\varepsilon\} \cup \{a\}\{ba, baa\}^*\{b, ba\}$.

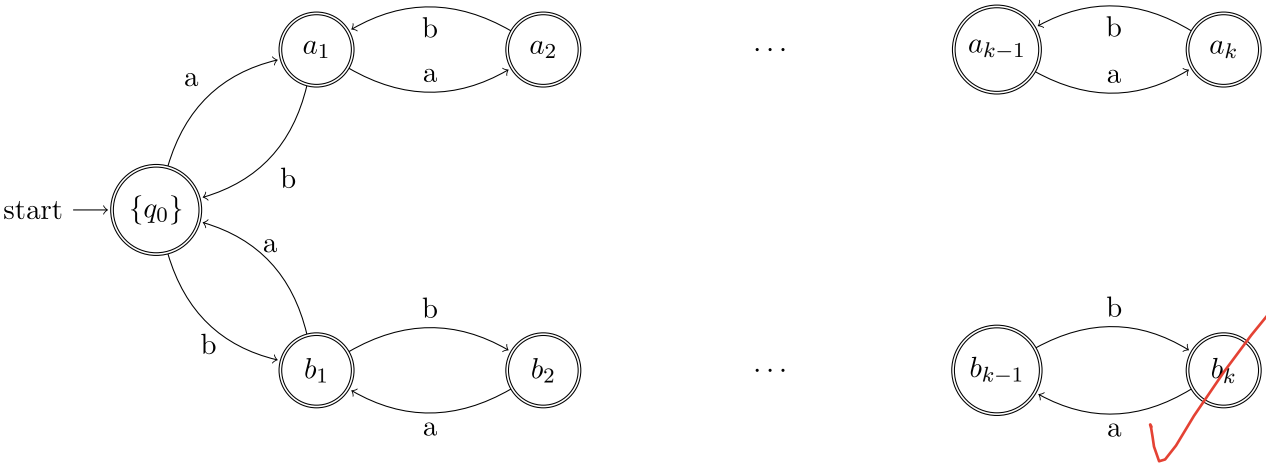
- Wir zeigen zuerst $L \subseteq R$ induktiv nach der Struktur: Klarerweise sind $\varepsilon, ab, aba \in R$. Sei $w \in L \backslash \{\varepsilon, ab, aba\}$ beliebig. Dann gibt es ein $v \in L \backslash \{\varepsilon\}$, sodass $w = abv$ oder $w = abav$.
  - Fall 1: $w = abv$: Es gibt nach Induktionsvoraussetzung ein Wort $v_1 \in \{ba, baa\}^*$, sodass $v = av_1b$ oder $v = av_1ba$, also $w = a(bav_1)b$ oder $w = a(bav_1)ba$. Mit v_1 liegt auch bav_1 in $\{ba, baa\}^*$, also gilt $w \in R$.
  - Fall 2: $w = abav$: Wieder finden wir ein v_1 wie in Fall 1. Es gilt $w = a(baav_1)b$ oder $w = a(baav_1)ba$; weil mit v_1 auch $baav_1$ in $\{ba, baa\}^*$ liegt, ist auch hier $w \in R$.
- Für den Beweis der anderen Inklusion gehen wir ebenfalls induktiv vor (nach der Struktur des mittleren Wortteils): Offensichtlich sind $\varepsilon, ab, aba \in L$. Sei $w \in R \backslash \{\varepsilon, ab, aba\}$ beliebig. Dann gibt es ein Wort $v \in \{ba, baa\}^+$ mit $w = avb$ oder $w = avba$.
  - Fall 1: $w = avb$:
    - Fall 1.1: $v = bav_1$: Hier gilt $w = ab(av_1b)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $av_1b \in L$, also auch $w \in L$.
    - Fall 1.2: $v = baav_1$: Hier gilt $w = aba(av_1b)$, woraus ebenso $w \in L$ folgt.
  - Fall 2: $w = avba$: Ganz analog zu Fall 1.

Aufgabe 2.

	a	b
$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$



Aufgabe 3. Ja, die Sprache $L_k := \{w \in \{a,b\}^* \mid |n_a(v) - n_b(v)| \leqslant k$ für jedes Präfix v von $w\}$ ist regulär, denn der folgende Automat akzeptiert genau L_k:



Aufgabe 4. Angenommen, $L := \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$ wäre regulär. Nach dem Pumping-Lemma gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $w \in L$ mit $|w| \geqslant n$ gilt: w lässt sich schreiben als $v_1v_2v_3$, wobei

$$(i)\;\; v_2 \neq \varepsilon, \qquad (ii)\;\; |v_1v_2| \leqslant n, \qquad (iii)\;\; \forall k \geqslant 0\colon v_1v_2^kv_3 \in L.$$

Seien $p \in \mathbb{P}$ mit $p \geqslant n, p \geqslant 3$ und $a^p = v_1v_2v_3$ mit $v_2 = a^l$ so, dass $(i) - (iii)$ gilt. Wegen $v_1v_2^kv_3 = a^{p+(k-1)l}$ für $k \geqslant 1$ gilt nun

$$\{p + kl \mid k \geqslant 0\} \subseteq \mathbb{P}. \tag{1}$$

Aus (i) folgt $l \neq 0$. Wegen (1) müsste aber $p + pl = p(1 + l)$ in $\mathbb{P}$ liegen – Widerspruch.

Aufgabe 5. Der Übersichtlichkeit halber bezeichnen wir hier die Erweiterung einer Übergangsrelation Δ mit $\overline{\Delta}$. Die eine Richtung ist trivial, weil jeder gekürzte NFA auch ein NFA ist. Sei umgekehrt $N = \langle Q, A, \Delta, q_0, F\rangle$ ein NFA mit $\mathrm{L}(N) = \{w \in A^* \mid \exists q \in F\colon (q_0, w, q) \in \overline{\Delta}\} = L$. Wir definieren

$$\begin{aligned} Q' := \{q_0\} \cup \{q \mid\ & \exists u \in A^*\colon (q_0, u, q) \in \overline{\Delta} \\ & \wedge\ \exists v \in A^*\ \exists q_f \in F\colon (q, v, q_f) \in \overline{\Delta}\} \end{aligned}$$

und einen neuen Automaten $N' = \langle Q', A, \Delta \cap \big(Q' \times A \times Q'\big), q_0, F \cap Q'\rangle$. Nach Definition ist N' gekürzt und erfüllt $\mathrm{L}(N') \subseteq \mathrm{L}(N)$.

Es gilt aber auch die umgekehrte Inklusion: Sei dazu $w = x_1 \cdots x_n \in L$ beliebig, dann gibt es Zustände $q_1, \ldots, q_n \in Q$ mit $(q_{i-1}, x_i, q_i) \in \Delta$, wobei $1 \leqslant i \leqslant n$ und $q_n \in F$. (Das folgt aus der Definition von $\overline{\Delta}$, formal müsste man das mit Induktion beweisen.) Für jedes i mit $1 \leqslant i \leqslant n$ gilt, wieder nach Definition von $\overline{\Delta}$, $(q_0, x_1 \cdots x_i, q_i)$, $(q_i, x_{i+1} \cdots x_n, q_n) \in \overline{\Delta}$ und somit $q_i \in Q'$.

Wir zeigen nun induktiv für $i = n-1, \ldots, 0$, dass

$$(q_i, x_i x_{i+1} \cdots x_n, q_n) \in \overline{\Delta \cap \big(Q' \times A \times Q'\big)}. \tag{2}$$

Für $i = n-1$ haben wir bereits festgestellt, dass $(q_{n-1}, x_n, q_n) \in \Delta \cap \big(Q' \times A \times Q'\big)$. Sei $i < n-1$, dann gilt

$$\begin{aligned} (q_i, x_i, q_{i+1}) &\in \Delta \cap \big(Q' \times A \times Q'\big) \\ \text{sowie } (q_{i+1}, x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n, q_n) &\in \overline{\Delta \cap \big(Q' \times A \times Q'\big)}, \end{aligned}$$

wobei Letzteres nach Induktionsvoraussetzung gilt, und somit nach Definition der erweiterten Übergangsrelation $(q_i, x_i x_{i+1} \cdots x_n, q_n) \in \overline{\Delta \cap (Q' \times A \times Q')}$. Für $i = 0$ erhalten wir nun

$$(q_0, w, q_n) \in \overline{\Delta \cap (Q' \times A \times Q')},$$

also $w \in \mathrm{L}(N')$.

Aufgabe 6. φ erfüllt also $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$ sowie $\varphi(vw) = \varphi(v)\varphi(w)$ für alle $v, w \in A^*$. Sei $L \subseteq A^*$ regulär, d. h. es gibt einen NFA $N = \langle Q, A, \Delta, q_0, F \rangle$ mit

$$\mathrm{L}(N) = \{w \in A^* \mid \exists q \in F \colon (q_0, w, q) \in \overline{\Delta}\} = L.$$

Wir definieren einen neuen NFA $M = \langle Q, \varphi(A), \varphi(\Delta), q_0, F \rangle$, wobei

$$\varphi(\Delta) := \{(q, \varphi(x), r) \mid (q, x, r) \in \Delta\}.$$

$\varphi(x)$ ist kein Buchstabe sondern ein Wort. „$\varphi(\Delta)$" muss zuerst als Teilmenge von $Q' \times B \times Q'$ (für geeignetes Q') definiert werden, wird erst nachher auf $Q' \times B^* \times Q'$ erweitert.

Wir wollen nun die erweiterte Übergangsrelation $\overline{\varphi(\Delta)}$ bestimmen. Wir zeigen induktiv

$$\overline{\varphi(\Delta)} = \{(q, \varphi(v), r) \mid (q, v, r) \in \overline{\Delta}\}:$$

$$\begin{aligned}
(p, xw, r) \in \overline{\varphi(\Delta)} &\iff \exists q \in F \colon (p, x, q) \in \varphi(\Delta) \wedge (q, w, r) \in \overline{\varphi(\Delta)} \\
&\overset{\text{(IV)}}{\iff} \exists a \in A, u \in \varphi(A)^*, q \in F \colon \varphi(a) = x \wedge \varphi(u) = w \wedge (p, a, q), (q, u, r) \in \overline{\Delta} \\
&\iff \exists a, u \colon \varphi(au) = xw \wedge (p, au, r) \in \overline{\Delta} \\
&\iff \exists v \colon \varphi(v) = xw \wedge (p, v, r) \in \overline{\Delta}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun $\mathrm{L}(\varphi(N)) = \varphi(L)$:

»$\subseteq$« Sei $w \in \mathrm{L}(\varphi(N))$ beliebig, dann gibt es ein $a \in A^*$ mit $\varphi(a) = w$ und ein $q \in F$ mit $(q_0, a, q) \in \overline{\Delta}$. Damit ist aber $a \in L$ und somit $w \in \varphi(L)$.

»$\supseteq$« Sei $w \in \varphi(L)$ beliebig, dann gibt es ein $a \in L$ mit $w = \varphi(a)$. Nun gibt es ein $q \in F$ mit $(q_0, a, q) \in F$, also $(q_0, \varphi(a), q) = (q_0, w, q) \in \overline{\varphi(\Delta)}$, d. h. $w \in \mathrm{L}(\varphi(N))$.