Serie 9

Besprechung: Donnerstag, 28.5

9.1. Ziel dieser Aufgabe ist eine Beziehung zwischen der linearisierten Stabilität und dem Konzept der Ljapunovfunktion. Genauer: wir zeigen die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

1. Die Ruhelage $y^* = 0$ der ODE $y' = Ay$ ist asymptotisch stabil.
2. Es gibt eine symmetrisch positiv definite Lösung der Matrixgleichung ("Ljapunovgleichung")

$$A^\top Q + QA = -I. \tag{1}$$

a) Sei die Ruhelage $y^* = 0$ asymptotisch stabil. Definieren Sie die Matrix

$$Q := \int_{t=0}^{\infty} e^{tA^\top} e^{tA}\, dt$$

Zeigen Sie: Q ist symmetrisch positiv definit (insbesondere also $(Qx, x)_2 > 0$ für $x \neq 0$) und erfüllt (1). Wie Teilaufgabe b) zeigen wird, ist die Funktion $V(x) := (Qx, x)_2$ eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE.

b) Sei Q eine symmetrisch positiv definite Lösung von (1). Zeigen Sie: $V(x) := (Qx, x)_2$ ist eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE. Zeigen Sie: die Ruhelage $y^* = 0$ ist asymptotisch stabil.

9.2. Betrachten Sie die ODE

$$\begin{aligned} x' &= -x - 2y + x^2y^2 \\ y' &= x - \frac{1}{2}y - x^3y \end{aligned}$$

Konstruieren Sie eine Ljapunovfunktion V von der Form $V(x, y) = ax^2 + by^2$ mit geeigneten a, b. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ aussagen?

9.3. Betrachten Sie für λ, μ, γ, $a > 0$ das System

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda xy - \mu x + \mu a \\ y' &= \lambda xy - \mu y + \gamma y \\ z' &= \gamma y - \mu z \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß das System im Fall $a\lambda > \mu - \gamma > 0$ genau eine nichttriviale Ruhelage $(x^*, y^*, z^*) \in (0, \infty)^3$ hat. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$V(x, y, z) = x - x^* \ln x + y - y^* \ln y$$

eine Ljapunovfunktion ist. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage (x^*, y^*, z^*) sagen?

9.4. Die Existenz einer (strikten) Ljapunovfunktion erlaubt es, die Konvergenz einer Lösung gegen die asymptotisch stabile Ruhelage zu quantifizieren. Seien hierzu $V \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $y^* = 0$ eine Ruhelage für $y' = f(y)$ und ein striktes Minimum von V. Nehmen Sie an, daß für das Spektrum der Matrix

$$B := (\nabla f(0))^\top \nabla^2 V(0) + \nabla^2 V(0) \nabla f(0)$$

gilt: $\max\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(B)\} =: \alpha < 0$. Zeigen Sie: Es existieren β, $C > 0$, so daß für alle y_0 hinreichend nahe bei $y^* = 0$ gilt:

$$\|y_{0,y_0}(t)\| \leq Ce^{-\beta t}.$$

Wovon hängt β ab?

9.5. **a)** Sei $V \in C(G;\mathbb{R})$ eine Ljapunovfunktion für $y' = f(y)$. Nehmen Sie an, daß für jedes $y_0 \in G$ die Lösung y_{0,y_0} auf $(0,\infty)$ existiert. Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Menge $V^{-1}((-\infty,\alpha])$ eine invariante Menge für die ODE $y' = f(y)$.

b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ mit $f_i(y) \leq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ und ein $i \in \{1,\dots,d\}$. Geben Sie eine Ljapunovfunktion für die ODE $y' = f(y)$ an.

9.6. Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung eines mathematischen Pendels (ohne Reibung):

$$y'' + g(y) = 0,$$

wobei die Funktion g auf $(-a,a)$ definiert ist und $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ für $x > 0$ und $g(x) < 0$ für $x < 0$ erfüllt (d.h., $xg(x) > 0$ für $x \neq 0$). Überführen Sie diese ODE 2. Ordnung in ein System erster Ordnung. Geben Sie eine Ljapunovfunktion an. Zeigen Sie, daß $(y,y') = (0,0)$ eine stabile Ruhelage ist.

9.7. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Mengen $M_1 = \{(0,0)\}$, $M_2 = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ und $M_3 = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ sind invariante Mengen.

9.8. Betrachten Sie für $d = 1$ das System $y' = f(y)$, wobei $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f(y) > 0$ für $y \in (0,1)$. Geben Sie $\omega_+(y_0)$ für $y_0 \in [0,1]$ an.