2.2.8 Lemma. Ist $A \subseteq B \subseteq K$, so gilt

(i) $\{x \in K : A \leq x\} \supseteq \{x \in K : B \leq x\}$ und
$\{x \in K : x \leq A\} \supseteq \{x \in K : x \leq B\}$.

(ii) Haben A und B ein Maximum (Minimum), so folgt
$\max A \leq \max B$ $(\min A \geq \min B)$.

(iii) Haben A und B ein Supremum (Infimum), so folgt
$\sup A \leq \sup B$ $(\inf A \geq \inf B)$.

Beweis.

(i) $t \in \{x \in K : B \leq x\}$ bedingt $b \leq t$ für alle $b \in B$. ... wegen $b \in B \leq x = t$. Wegen $A \subseteq B$ gilt auch $a \leq t$ für alle $a \in A$, und daher $t \in \{x \in K : A \leq x\}$. $A \subseteq B$ fordert $\forall a \in A : a \in B$. Außerdem gilt $\forall a \in A : a \leq t$. Durch $t \in \{x \in K : B \leq x\} \Rightarrow t \in \{x \in K : A \leq x\}$ folgt die Inklusion. Die zweite Mengeninklusion beweist man genauso.

(ii) Das Maximum von B erfüllt definitionsgemäß $\max B \geq b$ für alle $b \in B$, und damit insbesondere $\max B \geq a$ für alle $a \in A$. ... weil $A \subseteq B$. Wegen $\max A \in A$ folgt insbesondere $\max B \geq \max A$. ... weil $A \subseteq B$ ist $\max B$ mindestens genauso groß, wie $\max A$. Analog zeigt man $\min A \geq \min B$.

(iii) Definitionsgemäß gilt $\sup A = \min\{x \in K : A \leq x\}$, $\sup B = \min\{x \in K : B \leq x\}$. Das Supremum ist das Minimum der oberen Schranken. Nach (i) ist $\{x \in K : B \leq x\} \subseteq \{x \in K : A \leq x\}$, und infolge

$$\sup A = \min\{x \in K : A \leq x\} \leq \min\{x \in K : B \leq x\} = \sup B$$

Nenne die Menge der oberen Schranken von A, $A\uparrow$. Nenn

–"– B, $B\uparrow$. Da (i) besagt, dass $A \subseteq B \Rightarrow A\uparrow \supseteq B\uparrow$ und (ii)' besagt, dass wenn $A\uparrow$ und $B\uparrow$ ein Minimum ($\sup A$ und $\sup B$) haben, dass $A\uparrow \subseteq B\uparrow \Rightarrow \min B\uparrow \geq \min A\uparrow$, also $\sup A \leq \sup B$.

Das Infimum folgt anscheinend analog. $\square$