Satz 2.6.6 In einem endlichdimensionalen Vektorraum V hat jede linear unabhängige Familie höchstens $n := \dim V$ Elemente und jedes Erzeugendensystem mindestens n Elemente. Ein Erzeugendensystem oder eine linear unabhängige Familie ist genau dann eine Basis von V, wenn sie genau n Elemente besitzt.

Beweis. Folgt aus Satz 2.5.8, Satz 2.5.9, sowie Satz 2.5.4.
Aus Definition 2.6.5, wissen wir, dass „die Anzahl der Elemente einer Basis von V die Dimension von V" ist. In dem Fall hat unsere Basis also n Elemente.
Würde man eine l.u. Familie mit genau n Elementen, mittels Satz 2.5.8, erweitern und diese eine noch immer eine Basis nennen, so bekäme man einen Widerspruch zu Satz 2.5.4, dass jede Basis eine maximal l.u. TM von V ist.
Würde man ein ES mit genau n Elementen, mittels Satz 2.5.9, einschränken und dieses noch immer eine Basis nennen, so bekäme man einen Widerspruch zu Satz 2.5.4, das jede Basis ein minimales ES von V ist.
Die Implikation „$\Rightarrow$" im letzteren Satz ist trivial.
Habe ein ES von V genau n Elemente. Laut oben, lässt sich dieses ES nicht mehr weiter verkürzen, um dann noch immer ein ES zu bleiben. Wäre dieses ES l.a., so wäre dies jedoch der Fall. Folglich, muss ES l.u. und somit eine Basis sein.
Habe eine l.u. Familie von V genau n Elemente. Laut oben,

lässt sich diese nicht mehr weiter erweitern, um dann noch l.u. zu bleiben. Wäre diese l.u. Familie kein ES, so wäre dies jedoch der Fall. Folglich muss diese l.u. Familie ein ES sein und somit eine Basis. $\square$