Serie 4

Thema: exakte Differentialgleichungen

Falls es eine Funktion F gibt mit
$$F(t, y(t)) \equiv 0,$$
dann erfüllt $t \mapsto y(t)$ die Differentialgleichung

$$F_y(t, y)y' + F_t(t, y) = 0.$$

Man nennt Differentialgleichungen von der Form

$$p(t, y)y' + q(t, y) = 0, \tag{*}$$

exakt, falls es eine skalare Funktion F gibt mit

$$p(t, y) = \partial_y F(t, y), \qquad q(t, y) = \partial_t F(t, y).$$

Umgekehrt ist eine Differentialgleichung von der Form (*) exakt, falls $\partial_t p = \partial_y q$.
Damit

1. Prüfen, ob exakte ODE vorliegt: $p_y \stackrel{?}{=} q_t$

2. Bestimme F durch (z.B.)

   $$F(t, y) := \int_y p(t, y)\, dy + \varphi(t), \qquad \text{bestimme } \varphi \text{ durch Bedingung} \quad \partial_t F(t, y) \stackrel{!}{=} q(t, yq)$$

   Gleichung $y' = f(t)y$. Der Ansatz $y(t) = Y(t)c(t)$ führt auf eine separierbare ODE für c.

Aufgaben

$$3t^2 + 6ty^2 + (6t^2y + 4y^3) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 + y^2}} + \frac{1}{t} + \frac{1}{y} + \left(\frac{y}{\sqrt{t^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{t}{y^2}\right) y' = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\sin(2t)}{y} + t) + \left(y - \frac{\sin^2 t}{y^2}\right) y' = 0 \tag{3}$$

$$\frac{y + \sin t \cos^2(ty)}{\cos^2(ty)} + \left(\frac{t}{\cos^2(ty)} + \sin y\right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{2t}{y^3} + \frac{y^2 - 3t^2}{y^4} y' = 0, \qquad y(1) = 1. \tag{5}$$

Lösungen

$$t^3 + 3t^2y + y^4 = C \tag{1}$$

$$\ln|ty| + \sqrt{t^2 + y^2} + \frac{t}{y} = C \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}(t^2 + y^2) + \frac{\sin^2 t}{y} = C \tag{3}$$

$$\tan(ty) - \cos t - \cos y = C \tag{4}$$

$$y = t. \tag{5}$$