3.3.2 Satz (Einschloss-Satz). Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen mit

$$x_n \leq a_n \leq y_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Existieren zudem die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$ und $\lim_{n\to\infty} y_n$, und gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

so existiert auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und stimmt mit dem gemeinsamen Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überein.

Beweis. Setze $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Der existiert ja, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a|, |y_n - a| < \epsilon$ und $x_n \leq a_n \leq y_n$ für $n \geq N$. Wieder $d(x,y) := |x-y|$ und wegen (3.3), also $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$, auch $|x_n - a|, |y_n - a| < \epsilon$. $x_n \leq a_n \leq y_n$ ist ja vorausgesetzt. Für solche $n$ folgt

$$-\epsilon < x_n - a \leq a_n - a \leq y_n - a < \epsilon,$$

und damit $|a_n - a| < \epsilon$. $x_n \leq a_n \leq y_n \Rightarrow x_n - a \leq a_n - a \leq y_n - a$ und weil $\epsilon > 0$ auch $|y_n - a| < \epsilon \Rightarrow y_n - a < \epsilon$, $|x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow |-1| \cdot |x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow |-(x_n - a)| < \epsilon \Leftrightarrow -(x_n - a) < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x_n - a$. Letzteres folgt, weil $-\epsilon < |x_n - a| \leq |a_n - a| \leq |y_n - a| < \epsilon$. Also ist $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ jetzt offiziell. □