1. Gg.: $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$

Zz.: $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx$

Man zerlege $f = f^+ - f^-$, sodass

$\forall x \in [a,b]: f^+(x), f^-(x) \geq 0$

Ww.: f^+ stetig $\Rightarrow$ f^+ Riemann Integrierbar, wobei

$$\int_a^b f^+ dx = \sup_{Z \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(Z)} \inf_{t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]} f^+(t) \; (\xi_j - \xi_{j-1})$$

$$= \sup_{Z \in \mathfrak{Z}} U(f^+, Z)$$

Ww.: f^+ stetig $\Rightarrow$ f^+ Borel Messbar, und

$$\int f^+ d\lambda := \sup \{ \int T d\lambda : T \in \mathcal{T}^+([a,b], \mathcal{B}), T \leq f \},$$

wobei $\mathcal{T}^+$ die Menge aller positiven Treppenfunktionen,

$$\int T \, d\lambda := \sum_{i=1}^{K} y_i \, \lambda(P_i), \text{ und}$$

$$T = \sum_{i=1}^{K} y_i \, P_i(\cdot), \text{ wobei } \sum_{i=1}^{K} P_i = [a,b].$$

Wähle nun

$$T_Z = \sum_{j=1}^{n(Z)} y_j \, \mathbb{1}_{[\xi_{j-1}, \xi_j]} \in \mathcal{T}^+, \leq f^+, \text{ sodass}$$

$$\int T_Z \, d\lambda = \sum_{j=1}^{n(Z)} y_j \, \lambda([\xi_{j-1}, \xi_j]) = \sum_{j=1}^{n(Z)} y_j \, (\xi_j - \xi_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n(Z)} \inf_{t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]} f^+(t) \; (\xi_j - \xi_{j-1}) = U(f^+, Z).$$

$$\Rightarrow \int f^+ \, d\lambda = \int f^+(x) \, dx$$

Analog geht man für f^- vor und nützt die Linearität der Integrale aus.

2. Gg.: Verteilungsfunktion F stetig differenzierbar,

f stetig

Zz.: $\int_{]a,b]} f \, d\mu_F = \int_a^b f(x) F'(x) dx$

fF' stetig $\Rightarrow$ rechte Seite existiert und (oBdA. $f \geq 0$)

$$= \lim_{|\mathfrak{Z}| \to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{Z})} f(\alpha_j) F'(\alpha_j) (\xi_j - \xi_{j-1})$$

$$= \lim_{|\mathfrak{Z}| \to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{Z})} f(\alpha_j) \lim_{\xi \to \xi_j} \frac{F(\xi_j) - F(\xi)}{\xi_j - \xi} (\xi_j - \xi_{j-1}) = \dots$$

Weil $\forall j = 1, \dots, n(\mathfrak{Z}): \xi_j - \xi_{j-1} \leq |\mathfrak{Z}| \to 0$,

$$\dots = \lim_{|\mathfrak{Z}| \to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{Z})} f(\alpha_j) \frac{F(\xi_j) - F(\xi_{j-1})}{\cancel{(\xi_j - \xi_{j-1})}} \cancel{(\xi_j - \xi_{j-1})} = \dots$$

Wähle α_j, sodass $f(\alpha_j) = \inf_{t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]} f(t)$, dann ist

$$\sum_{j=1}^{n(\mathfrak{Z})} \inf_{t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]} f(t) \, \mu_F(]\xi_{j-1}, \xi_j])$$

man benutzt den MWS und die glm. Stetigkeit von f um α_j zu wechseln (*)

$$\in \left\{ \int T \, d\mu_F : T \in \mathcal{T}^+, T \leq f \cdot 1\!\!1_{]a,b]} \right\}$$

$\Rightarrow$ „$\geq$", weil die linke Seite definiert ist als $\sup \{ \cdots \}$

„$\leq$" Sei $\int T \, d\mu_F$ bel., dann vergrößert man T, sodass T' ein Integral der Form (*) besitzt, welches aufgrund der Monotonie größer ist.

Argumentiere mit Obersummen!

3. Gg.: $(\Omega, 2^{\Omega}, \zeta)$ Maßraum, $\zeta(A) = |A|$

Zz.: $\int f \, d\zeta = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$

oBdA. $f \geq 0$

$$\int f \, d\zeta := \sup \{ \int t \, d\zeta : t \in \mathcal{T}^{+}(\Omega, 2^{\Omega}), t \leq f \}$$

Ww.: $\zeta(A) = \sum_{\omega \in \Omega} 1\!\!1_A(\omega)$

„$\leq$" Sei $t \in \mathcal{T}^{+}(\Omega, 2^{\Omega}), t \leq f$, dann hat t die Form

$$t = \sum_{k=1}^{n} y_k 1\!\!1_{P_k}, \text{ wobei } \sum_{k=1}^{n} P_k = \Omega.$$

$$\int_{\Omega} t \, d\zeta = \sum_{k=1}^{n} y_k \zeta(P_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{\omega \in \Omega} 1\!\!1_{P_k}(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{k=1}^{n} y_k 1\!\!1_{P_k}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} t(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$$

„$\geq$" $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \lim_{A \in \mathcal{E}(\Omega)} \underbrace{\sum_{\omega \in A} f(\omega)}_{} \leq \int_{\Omega} f \, d\zeta$

$$\int_A f \, d\zeta \leq$$

4.

Geg.: $F(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ Verteilungsfunktion

Ges.: $\int f \, d\mu_F$, mit $f(x) = x$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) F'(x) \, dx + \sum_{i=1}^{n} f(a_i)(F(a_i) - F(a_i - 0)),$$

wobei $a_1 < \dots < a_n$ Sprungstellen und

$a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = \infty$. $(f \geq 0)$

$$\dots = - \cancel{\int_{-\infty}^{0} x \, 0 \, dx} - \int_0^\infty x e^{-x} \, dx + \cancel{f(0)(F(0) - F(0-0))}$$

$$= -1$$

5. Gg.: $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ Maßraum

$$f_n(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \le \omega \le \sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zz.: $f_n \to f$ im Maß

d.h. $\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} \lambda(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$

Mit $f = 0_f$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\underbrace{\{x : f_n(x) = 1\}}_{[\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor]}) = 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Zz.: $f_n \not\to f$ f.ü.

Beh.: $\forall \omega \in [0,1]: f_n(\omega) \not\to 0, 1$ punktweise

Bew.: Zz.: $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \; \exists m, n \ge N:$
$|f_n(\omega) - f_m(\omega)| \ge \varepsilon$

d.h. $\forall N \in \mathbb{N} \; \exists m, n \ge N : |f_n(\omega) - f_m(\omega)| = 1$

Sei $n \in \{q \in \mathbb{N}^2 : q \ge N\}$, $i := \sqrt{n}$, dann ist n die i-te Quadratzahl.
Wir teilen $[0,1]$ in $2i+1$, fast disjunkte, Intervalle auf und sind fertig:

$$[0,1] = \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} [\sqrt{j} - \lfloor \sqrt{j} \rfloor, \sqrt{j+1} - \lfloor \sqrt{j} \rfloor].$$

6. Gg.: $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ WSK - Raum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$

(a) Zz.: $A_n(\cdot) \to 0$ in WSK $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{x : |A_n(x) - 0| > \varepsilon\}) = 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\underbrace{\{x : A_n(x) = 1\}}_{A_n})$$

(b) Gg.: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$

Zz.: $A_n(\cdot) \to 0$ fast sicher

7. Gg.: f Borel- (oder Lebesgue-) messbar auf $[a,b]$.

Zz.: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A \in \mathcal{B} : \lambda(A) < \varepsilon, \; f|_{A^c}$ stetig

Ww.: $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^0([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$:

$f_n \to f \quad \lambda$-f.ü.

$\lambda|_{[a,b]}$ endl. $\overset{\text{Egorov}}{\Rightarrow} \quad f_n \to f \quad \lambda$-f.ü. glm.

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A \in \mathcal{B} : \lambda(A) < \varepsilon$,

$\underbrace{f_n|_{A^c}}_{\text{stetig}} \to \underbrace{f|_{A^c}}_{\text{stetig}}$ glm. $\quad$ stetig $\Rightarrow$ stetig