

3. Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2019

1. Es sei

$$(a) \Omega = \mathbb{N}, \mathfrak{A} = \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \vee |A^C| < \infty\}, \mu_n(A) = \frac{1}{n}|A \cap \{1, \dots, n\}|.$$

$$(b) \Omega = \mathbb{N}, \mathfrak{A} = 2^{\mathfrak{N}}, \mu_n(A) = |A|/n.$$

Zeigen Sie dass jeweils μ_n Maße auf \mathfrak{A} sind und dass für jedes $A \in \mathfrak{A}$ der Grenzwert $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A)$ existiert, aber μ kein Maß ist.

2. \mathfrak{A} sei eine Sigmaalgebra, μ ein endlicher Inhalt auf \mathfrak{A} und $C \subseteq \Omega$, $C \notin \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass μ zu einem Inhalt auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{C\})$ fortgesetzt werden kann (setzen Sie $\mu(A \cap C) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A \cap C, B \in \mathfrak{A}\}$).

3. μ sei ein endliches Maß auf dem Sigmaring \mathfrak{R} .

(a) Zeigen Sie, dass μ beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass μ zu einem endlichen Maß auf der erzeugten Sigmaalgebra fortgesetzt werden kann (man muss dazu nur $\mu(\Omega)$ festlegen).

4. Die Mengen A, B, C in einem Wahrscheinlichkeitsraum erfüllen

$$\mu(A) = 0.7, \mu(B) = 0.6, \mu(C) = 0.5,$$

$$\mu(A \cap B) = 0.4, \mu(A \cap C) = 0.3, \mu(B \cap C) = 0.2, \mu(A \cap B \cap C) = 0.1.$$

Bestimmen Sie $\mu(A \cup B)$ und $\mu(A \cup B \cup C)$.

5. Drücken Sie $\mu(A \triangle B)$ und $\mu(A \triangle B \triangle C)$ mithilfe der Maße der Durchschnitte aus (à la Additionstheorem). Wie wird die allgemeine Formel (für n) Mengen aussehen?

6. \mathfrak{R} sei ein Sigmaring über der Menge Ω , μ ein Maß auf \mathfrak{R} . Zeigen Sie, dass durch

$$\tilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathfrak{R}, B \subseteq A\}$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ (der von \mathfrak{R} erzeugten Sigmaalgebra) definiert wird.

7. Wir haben gesehen, dass das Urbild $f^{-1}(\mathfrak{C})$ wieder ein Ring (eine Algebra, ein Sigmaring, eine Sigmaalgebra) ist, wenn \mathfrak{C} ein Ring (eine Algebra, ein Sigmaring, eine Sigmaalgebra) ist. Es bleiben noch die Fragen

(a) Ist das Urbild eines monotonen Systems ein monotonen System?

(b) Ist das Urbild eines Dynkinsystems ein Dynkinsystem?

(c) Ist das Urbild eines Semirings ein Semiring?