UE DGA WS2020-2021
Übungsblatt 5

Aufgabe 25:
Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 1$ und $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2 + n$ für $n = 2^k \geq 2$, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie ihr Ergebnis anschließend mit der Substitutionsmethode.

Aufgabe 26:

Verwenden Sie einen Rekursionsbaum, um eine asymptotische obere Schranke für die Rekursion

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + n \quad \text{für } n > a, \quad T(n) = 0 \quad \text{für } n < a,$$

zu bestimmen ($a \geq 1$). Überprüfen Sie Ihre Schranke mittels Subsitutionsmethode.

Aufgabe 27:

Verwenden Sie einen Rekursionsbaum, um eine asymptotische untere sowie eine asymptotisch obere Schranke (brauchen nicht dieselbe Größenordnung zu haben) für die Rekursion

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n$$

zu finden. Verifizieren Sie Ihre Schranken mittels Substitutionsmethode.

Aufgabe 28:

Finden Sie für folgende Rekursionen $T(n)$ asymptotische untere und obere Schranken mittels Master-Theorem.

a $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \log n$

b $T(n) = T(\frac{8n}{9}) + n$

c $T(n) = 11T(\frac{n}{3}) + n^{1.5}$

d $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

e $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$

f $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$

Aufgabe 29:

Gegeben ist die Divide-and-Conquer-Rekursion

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

wobei $f(n)$ eine nichtnegative Funktion mit asymptotischen Wachstum $\Theta(n^{\log_b a} \log n)$ ist. Zeigen Sie für den Fall $n = b^k$, $k \in \mathbb{N}$, dass $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^2(n))$.

Aufgabe 30:

Gegeben ist die Rekursion

$$a_n = a_{f(n)} + a_{g(n)} + a_{h(n)} + 1$$

für $n > t$ und $a_n = 1$ für $n \leq t$ mit $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ und $f(n) + g(n) + h(n) = n$. Beweisen Sie, dass $a_n = \Theta(n)$ gilt.