

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzübung 3

Übungstermin: 1.4.2020

25. März 2020

Aufgabe 11:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und y die Lösung des Anfangwertproblems

$$y'(t) = |a - y(t)| + b, \quad t \geq 0, \quad y(0) = c. \quad (1)$$

a) Lösen Sie das Anfangwertproblem analytisch. Welches Verhalten der Lösung erhalten Sie für unterschiedliche Parameter a, b, c ? Wie glatt ist die Lösung?

b) Lösen Sie das Anfangwertproblem numerisch mit expliziten Runge-Kutta-Verfahren unterschiedlicher Ordnung. Welche Konvergenzordnung erhalten Sie bei unterschiedlichen Parametern a, b, c ? Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Sie können das vom Übungsleiter im TUWEL zur Verfügung gestellte Programm zur Aufgabe 6 verwenden.

Aufgabe 12:

Sei y die Lösung des Anfangwertproblems $y'(t) = f(t, y)$ mit $t \in [0, T]$, $y(0) = y_0$ und beliebig glattem f . Weiter seien y_i für $i = 0, \dots, N$ die Approximationen an $y(t_i)$, welche durch ein Einschrittverfahren der Ordnung p mit den Stützstellen $t_0 = 0, \dots, t_N = T$ berechnet werden. Sei weiter \tilde{y} der lineare Spline mit $\tilde{y}(t_i) = y_i$ für $i = 0, \dots, N$.

Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\sup_{t \in [0, T]} |\tilde{y}(t) - y(t)| \leq C \max\{h_0, \dots, h_{N-1}\}. \quad (2)$$

Aufgabe 13:

Ein explizites Einschrittverfahren mit Inkrementfunktion $\Phi(t, y, h)$ kann mit der sogenannten diskreten Evolution

$$\Psi^{t, t+h} y := y + h\Phi(t, y, h) \quad (3)$$

formuliert werden durch

$$y_{j+1} = \Psi^{t_j, t_j+h_j} y_j. \quad (4)$$

Es heisst reversibel, wenn gilt $\Psi^{t+h, t} \Psi^{t, t+h} y = y$ für alle zulässigen (t, y) und alle hinreichend kleinen h . Zeigen Sie, dass es kein konsistentes, explizites Runge-Kutta-Verfahren gibt, welches für jedes beliebige Anfangwertproblem reversibel ist.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\Psi^{0, h} y_0$ für ein s -stufiges, explizites Runge-Kutta Verfahren ein Polynom der Ordnung s in h ist, wenn das Verfahren auf die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = y_0, \quad (5)$$

angewendet wird.

Zusatzinformation: Bei reversiblen Einschrittverfahren führt ein Schritt des Verfahrens mit positiver Schrittweite h gefolgt von einem Schritt des Verfahrens mit negativer Schrittweite $-h$ wieder auf den Anfangswert.

Aufgabe 14:

Ein explizites Runge-Kutta Verfahren wurde in (2.27) und (2.28) im Skript definiert. Für ein implizites Runge-Kutta Verfahren wird die Gleichung (2.28) ersetzt durch

$$k_i = f \left(t + c_i h, y + h \sum_{j=1}^m A_{ij} k_j \right), \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Die Matrix A ist dabei keine strikte untere Dreiecksmatrix mehr sondern eine vollbesetzte Matrix.

Verallgemeinern Sie Theorem 2.27 auf implizite Runge-Kutta Verfahren. Beweisen Sie dazu, dass solche Verfahren in dem dortigen Sinne stabil sind.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass das implizite Runge-Kutta Verfahren eindeutig durchführbar ist. Diese Frage ist nicht trivial, da (6) ein nichtlineares Gleichungssystem ist.

Aufgabe 15:

Erweitern Sie das Programm zu Aufgabe 6 um eine Schrittweitensteuerung mit eingebettetem RK-Verfahren (RK5(4)) und wenden Sie es auf das Räuber-Beute-Modell an. Vergleichen Sie die Schrittweiten mit der Lösung.