Satz 3.4.2 Sei $B = (b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V.

(a) Die Koordinatisierung $B^*: V \to K^{\langle I \rangle}$ ist eine lineare Bijektion.

(b) Wird $i \in I$ beliebig, aber fest gewählt, so ist die i-te Koordinatenform $b_i^*: V \to K$ linear, wobei wir $K = K^1$ als eindimensionalen Vektorraum über sich selbst auffassen.

Beweis. (a) Wir wenden Satz 3.2.2 an, um die Linearität von B^* zu zeigen: Für alle Linearkombinationen $x = \sum_{j \in I} x_j b_j$ und $y = \sum_{j \in I} y_j b_j$ sowie $c \in K$ gilt in der Tat

$$\langle B^*, x + cy \rangle \overset{(1)}{=} \langle B^*, \sum_{j \in I} (x_j + c y_j) b_j \rangle \overset{(2)}{=} (x_j + c y_j)_{j \in I} \overset{(3)}{=}$$

$$(x_j)_{j \in I} + c (y_j)_{j \in I} \overset{(2)}{=} \langle B^*, x \rangle + c \langle B^*, y \rangle.$$

Satz 3.2.2 fasst die beiden Linearitäts-Axiome zusammen als $\Leftrightarrow f(x + cy) = f(x) + c f(y)$.

(1) $\Leftrightarrow x + cy = \sum_{j \in I} x_j b_j + c \sum_{j \in I} y_j b_j = \dots$, (2) $\Leftrightarrow$ $B^*: V \to K^{\langle I \rangle}$, $x = \sum_{j \in I} x_j b_j \mapsto (x_j)_{j \in I} =: \langle B^*, x \rangle$,

(3) $\Leftrightarrow$ bei $(x_j)_{j \in I}$ und $(y_j)_{j \in I}$ wird jeweils das selbe j gewählt, was die selbe Familie ergibt.

Für alle $j \in I$ ist die j-te Koordinate von b_j gleich 1, alle anderen Koordinaten sind gleich 0; Es wird, für ein festes $j \in I$, b_j als LK von $(b_j)_{j \in I}$ (eindeutig) dargestellt und alle b_j werden koordinatisiert. Unter Verwendung des Kronecker-Symbols gilt daher $\langle B^*, b_j \rangle = (\delta_{ij})_{i \in I} . = e_j$, weil $\forall i \in I : (i = j \Rightarrow \delta_{ij} := 1) \wedge (i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} := 0)$. Das Bild der Basis B unter B^* ist also die kanonische Basis von $K^{\langle I \rangle}$ (vgl. 2.5.2 Beispiel 4). $B^*(B) = B^*((b_j)_{j\in I}) = ((\delta_{ij})_{j\in I})_{i\in I} = (e_i)_{i\in I}$. Laut Beispiel 2.5.2 (4), gilt immer $\{1, 0\} \subseteq K$, also muss die kanonische Basis eine Basis von $K^{\langle I \rangle}$ sein. Weil nur endlich viele e_i in einer LK aufsummiert werden können, schreibt man $\langle I \rangle$. Satz 3.2.5 (c) zeigt nun, dass B^* bijektiv ist. „f ist genau dann bijektiv, falls $(f(b_i))_{i\in I}$ eine Basis von W ist.", wobei hier $f := B^*$.

(b) Die Linearität von b_i^*, folgt wie in (a) aus

$$\langle b_i^*, x + cy \rangle = x_i + cy_i = \langle b_i^*, x \rangle + c \langle b_i^*, y \rangle.$$

... und Satz 3.2.2. Beachte $x := \sum_{j\in I} x_j b_j$, $y := \sum_{j\in I} y_j b_j$
$\Rightarrow x + cy = \sum (x_j + cy_j) b_j$ und außerdem $b_i^* : V \to K :$
$x = \sum_{j\in I} x_j b_j \mapsto x_i$. $\square$