3.3.5 Satz (Rechenregeln für Folgen). Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller oder komplexer Zahlen, $\lim_{n\to\infty} z_n := z$, $\lim_{n\to\infty} w_n := w$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$

(i) $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$, $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w$, $\lim_{n\to\infty} (-z_n) = -z$.

(iii) Ist $z = 0$, also $z_n \to 0$, $n \to \infty$, und ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot v_n) = 0$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = z \cdot w$.

(v) $\lim_{n\to\infty} z_n^k = z^k$.

(vi) Falls $z \neq 0$ ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$.

(vii) Ist $z_n \in \mathbb{R}$ und $z_n \geq 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{z_n} = \sqrt[k]{z}$.

Beweis. (Satz 3.3.5)

(i) Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $|z_n - z| < \epsilon$ für $n \geq N$.
Dabei ist $d(z_n, z) := |z_n - z|$. N zu wählen ist ok, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist schließlich konvergent. Mit der Dreiecksgleichung nach unten erhält man

$$\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z| < \epsilon, \quad |\overline{z_n} - \overline{z}| = |z_n - z| < \epsilon.$$

vgl. Seite 61. Wenn $z_n := a_n + b_n i$, $z := a + bi$, dann

$$|z_n - z| = |(a_n + b_n) - (a + bi)| = |(a_n - a) + (b_n - b)i| =$$
$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = \sqrt{(a_n - a)^2 + (-1)^2 \cdot (b_n - b)^2} =$$
$$\sqrt{(a_n - a)^2 + ((-1) \cdot (b_n - b))^2} = |(a_n - a) - (b_n - b)i| =$$

$|a_n - b_n i - a + bi| = |a_n - b_n i - (c - di)| = |\overline{z_n} - \overline{z}|$. Man kann $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ auch als Spezialfall von Lemma 3.2.10 sehen: $|z_n| = d(z_n, 0) \to d(z, 0) = |z|$. Das Lemma besagt, dass $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ und idFg., dass $|z_n| = |z_n - 0| = d(z_n, 0)$ und $d(z, 0) = |z - 0| = |z|$ und $z_n = x_n$, $0 = y_n$, $z = x$, sowie $0 = y$. Es wurde also doppelt bewiesen, wobei die erste Variante für „Höhlenmenschen" bewiesen wurde, da direkt mit der Definition 3.2.2 der Konvergenz argumentiert wird.

(ii) Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Ok. Wähle N so, dass $|z_n - z| < \frac{\epsilon}{2}$ und auch $|w_n - w| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Weil z, w konvergent sind, muss ab einem $N \leq n$ immer $d(z_n, z) < \frac{\epsilon}{2}$, für alle $\frac{\epsilon}{2} \in \mathbb{R}^+$ (das dann auch für $d(w_n, w)$). Es gilt für solche n

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| = |(z_n - z) + (w_n - w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Für die erste Gleichheit, wird das $-$ in die Klammern gezogen, umgeschoben und umgeklammert. Die erste Ungleichheit folgt aus (M3), also $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ und die zweite laut oberer Definition, sowie Lemma 2.2.3 (v). Also ist $(z_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und der Grenzwert ist $z + w$. ... weil $|(z_n + w_n) - (z + w)| = d(z_n + w_n, z + w) < \epsilon$, was Definition 3.2.2 entspricht. Weiters gilt für N so groß, dass $|z_n - z| < \epsilon$, wenn nur $n \geq N$, auch

$$|(-z_n) - (-z)| = |-(z_n - z)| = |z_n - z| < \epsilon, \; n \geq N.$$

Für die erste Gleichheit wird das $-$ herausgehoben (eigentlich (-1)) und dann $|-a| = |(-1)\cdot a| = |-1|\cdot|a| = 1\cdot a = a$ verwendet, um die zweite nachzuvollziehen. Also konvergiert $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $-z$. ... weil $|(-z_n)-(-z)| = d(-z_n, -z) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

(iii) Ist $C > 0$ so, dass $|u_n| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$, und ist $\epsilon > 0$, so gibt es wegen $z_n \to 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|z_n| < \frac{\epsilon}{C}$, $n \geq N$. C beschränkt also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und solange $\epsilon > 0$, können wir es frei wählen (es muss nur beliebig groß/klein werden können), also auch $\frac{\epsilon}{C}$ und zuletzt $z_n \to 0 \Rightarrow d(z_n, 0) = |z_n - 0| = |z_n| < \frac{\epsilon}{C}$. Es folgt $|z_n \cdot u_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, also $z_n \cdot u_n \to 0$. Es gilt $0 \leq |z_n| < \frac{\epsilon}{C} \Leftrightarrow |z_n|\cdot|u_n| < \frac{\epsilon}{C}\cdot C \Leftrightarrow |z_n \cdot u_n| < \epsilon$, wegen $0 \leq |u_n| \leq C$ und Lemma 2.2.3 (xi). Weiters gilt $|z_n \cdot u_n - 0| = d(z_n \cdot u_n, 0) < \epsilon$ für $n \geq N$.

(iv) Ist N so groß, dass $|w_n - w| < \epsilon$ für $n \geq N$, so gilt

$$|zw_n - zw| = |z|\cdot|w_n - w| < |z|\cdot\epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

$|zw_n - zw| = |z(w_n - w)| = |z|\cdot|w_n - w| < |z|\cdot\epsilon \Leftrightarrow$ $|w_n - w| < \epsilon$ und mit $|z|$ multiplizieren darf ich, weil $|z|$ nicht negativ ist (scheinbar ist $|z| = 0$?, ist aber Wurscht, weil dann wissen wir, dass $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen, also insbesondere beschränkt ist und können getrost mit $z_n \to z = 0$ (iii) anwenden). Gemäß (3.4) folgt daher zunächst $zw_n \to zw$. ... also „$d(zw_n, zw) < |z|\cdot\epsilon$ für alle $n \geq N$“.

Um $z_n w_n \to zw$ nachzuweisen, sei daran erinnert, dass gemäß Proposition 3.2.13 konvergente Folgen beschränkt sind. Das meinte ich oben. Nach (ii) konvergiert $(z_n - z)$ gegen Null, und mit (iii) daher auch $(z_n - z)w_n \to 0$, $n \to \infty$. Dabei wird $(z_n - z)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(-z)_{n \in \mathbb{N}}$ zerlegt und deren Grenzwerte $z + (-z) = 0$. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent, also insbesondere beschränkt. Der schon bewiesene Teil von (iv) gibt nun zusammen mit (ii)

$$z_n w_n = (z_n - z) w_n + z w_n \xrightarrow{n \to \infty} 0 + zw.$$

$$z_n w_n = z_n w_n - z w_n + z w_n = (z_n - z) w_n + z w_n.$$

(v) Das folgt durch vollständige Induktion nach k aus (iv).
$k = 1$ ist trivial, weil $\lim_{n \to \infty} z_n^1 = \lim_{n \to \infty} z_n = z = z^1$.
$\lim_{n \to \infty} z_n^{k+1} = \lim_{n \to \infty} (z_n^k \cdot z_n) = z^k \cdot z = z^{k+1}$, wobei bei der zweiten Gleichheit die Induktionsvoraussetzung und (iv) verwendet wird.

(vi) Sei nun $z \neq 0$. Wegen (i) und Lemma 3.3.1 folgt aus $z_n \to z$ für hinreichend großes n, dass $|z_n| > \frac{|z|}{2}$. „Ist $c \in \mathbb{R}$ mit $x < c$ ($c < x$), so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n < c$ ($c < x_n$) für alle $n \geq N$." $\lim_{n \to \infty} |z_n| = |z|$ laut (i) und $|z| > \frac{|z|}{2} \Rightarrow |z_n| > \frac{|z|}{2}$ laut Lemma 3.3.1. Es folgt die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \frac{|z - z_n|}{|z| \cdot |z_n|} \leq |z - z_n| \cdot \frac{2}{|z|^2},$$

und damit wird die Differenz $\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}$ für große n beliebig klein.
$|1/z_n - 1/z| = \left| \frac{z}{z_n z} - \frac{z_n}{z_n z} \right| = \left| \frac{z - z_n}{z_n z} \right| = |z - z_n| \cdot \left| \frac{1}{z_n} \cdot \frac{1}{z} \right| = \frac{|z - z_n|}{|z| \cdot |z_n|} \leq |z - z_n| \cdot \frac{2}{|z|^2} \Leftrightarrow \frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z|} \Leftarrow \frac{|z|}{2} < |z_n|$. $0 \leq \left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| \leq |z - z_n| \cdot \frac{2}{|z|^2}$, wobei letzteres gegen 0 konvergiert, also auch $\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = d(1/z_n, 1/z)$ und daher $1/z_n \to 1/z$.

(vii) Sei zunächst $z > 0$. Ok, Fallunterscheidung. Wegen (i) und Lemma 3.3.1 folgt aus $z_n \to z$ die Existenz von $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq N$ sicher $z_n > \frac{z}{2} > 0$ und $|z_n - z| < \epsilon$. $z > \frac{z}{2} > 0$ führt mit Lemma 3.3.1 mit $c = \frac{z}{2}$ zu $z_n > \frac{z}{2}$. Gemäß (2.9) gilt für solche n

$$|\sqrt[k]{z_n} - \sqrt[k]{z}| = \frac{|z_n - z|}{|\sqrt[k]{z}^{k-1} + \sqrt[k]{z}^{k-2}\sqrt[k]{z_n}^{1} + \ldots + \sqrt[k]{z_n}^{k-2}\sqrt[k]{z} + \sqrt{z_n}^{k-1}|}$$

$$\leq \frac{|z_n - z|}{\left|\sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-1} + \sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-2}\sqrt[k]{\frac{z}{2}} + \ldots + \sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-2}\sqrt[k]{\frac{z}{2}} + \sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-1}\right|}$$

$$< \frac{\epsilon}{k\sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-1}},$$

da klarerweise auch $z > \frac{z}{2}$. Dabei wird (2.9) umgeformt. $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}) \Leftrightarrow b - a = b^n - a^n / \ldots$. Dabei ist $b := \sqrt[k]{z_n}$ und $a := \sqrt[k]{z}$. Weil $\ldots$ stets positiv ist (Summe von lauter Wurzeln) und $\sqrt[k]{z_n} \geq \sqrt[k]{z} \Leftrightarrow z_n \geq z$, und $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, können die Betragsstriche in das umgeformte (2.9) noch eingearbeitet werden. Ersetzt man im Nenner z und z_n mit $\frac{z}{2}$ ersetzt, so wird er kleiner, also der gesamte Ausdruck größer (das geht, weil $z_n > \frac{z}{2} < z$). Dieser besteht nun aus k Termen der Form $\sqrt[k]{z/2}^{k-1}$ und kann daher aus der zweiten Ungleichung für sich gesehen gekürzt werden und $|z_n - z| < \epsilon$ (oben festgesetzt) bleibt übrig. Die Betragsstriche waren im sowieso positiven Nenner redundant und konnten daher weggelassen werden. Gemäß (3.4) folgt $\sqrt[k]{z_n} \to \sqrt[k]{z}$. Für (3.4), also $\forall \epsilon \in \ldots : d(x_n, x) < K \cdot \epsilon$, wäre $|\sqrt[k]{z_n} - \sqrt[k]{z}| = d(\sqrt[k]{z_n}, \sqrt[k]{z}) < K \cdot \epsilon$, wobei K der ja konstante Nenner ist.

Ist $z = 0$, so sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Von mir aus... Ist nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $z_n = |z_n - 0| < \epsilon^k$ für $n \geq N$, dann folgt aus der Monotonie der Wurzelfunktion (vgl. Bemerkung 2.9.7) $|\sqrt[k]{z_n} - 0| = \sqrt[k]{z_n} < \epsilon$. $|z_n - 0| < \epsilon^k$ geht, weil $z_n \to z = 0$ laut Fall-Voraussetzung. Streng monoton wachsend heißt ja $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ und daher ist $z_n < \epsilon^k \Rightarrow \epsilon = \sqrt[k]{\epsilon^k} > \sqrt[k]{z_n} = |\sqrt[k]{z_n} - 0| = d(\sqrt[k]{z_n}, 0) < \epsilon$ ist klar. Also $\sqrt[k]{z_n} \to 0$. $\square$