A 6.2.2

Ein affiner Raum $\mathcal{A}$, lässt sich darstellen als $p + U$, wobei $p \in \mathcal{A}$ und U die Hülle aller Differenzenvektoren des affinen ES, die von s weggehen, ist.

$$a - b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a - c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$d - e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d - f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{A}_1 = a + \underbrace{\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]}_{U_1 :=}, \quad \mathcal{A}_2 = d + \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right]}_{U_2 :=};$$

l.u. $\Rightarrow \dim \mathcal{A}_1 = 2$ l.a. $\Rightarrow \dim \mathcal{A}_2 = 1$

$U_2 \in Sub(U_1)$, weil $\exists x, y \in K$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftarrow x = -3, \ y = 1.$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2.$$

$$\nexists x, y \in K: \ d = a + x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset.$$

Laut Satz 6.2.10, ist also

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = a + \Bigg(\underbrace{[d - a]}_{\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right]} \oplus \Bigg(\underbrace{\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]}_{U_1} + \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right]}_{U_2}\Bigg)\Bigg).$$

$U_1 \supseteq U_2$

Affine Basis von $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ ist

$$a + \left\{ \mathcal{O}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

A 6.2.3 (a) Seien $\mathcal{E}_1 = p + U_1$, $\mathcal{E}_2 = q + U_2$.

Laut Definition von Ebenen, ist $\dim \mathcal{E}_1 = \dim \mathcal{E}_2 = 2$.

I. $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 2$: $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2$, weil eine affine Basis von $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ auch $\mathcal{E}_1$ bzw. $\mathcal{E}_2$ erzeugt. Insbesondere, gilt $\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$.

(ii), (iii), und (iv) treffen nicht zu.

II. $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 1$: $\mathcal{E}_1 \nparallel \mathcal{E}_2$, weil $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$ und somit $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1 \Rightarrow U_1 = U_2$, also $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) \in \{„-1“, 2\}$.

(ii) gilt, aber (iii), (iv) nicht.

III. $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 0$: $\mathcal{E}_1 \nparallel \mathcal{E}_2$, laut „II“.

(ii) und (iv) sind falsch, aber (iii) wahr.

IV. $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = „-1“$: (ii) und (iii) sind falsch.

Fall (a): $\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$: (i)

Fall (b): $\mathcal{E}_1 \nparallel \mathcal{E}_2$: (iv), weil $\exists g : \mathcal{E}_1 \parallel g \parallel \mathcal{E}_2$:

$\exists b \in U_1 \cap U_2 : g := p + [b]$, weil sonst $U_1 \oplus U_2 = V$. Aber dann kann man

$$p =: \sum_{i=1}^{4} p_i b_i \quad \text{und} \quad q =: \sum_{i=1}^{4} q_i b_i, \text{ wenn}$$

$U_1 = [b_1, b_2]$ und $U_2 = [b_3, b_4]$. Weiters ist

$$\exists x \in p + [b_1, b_2] \, \exists y \in q + [b_3, b_4] : \exists u_1, \dots, u_4 \in K :$$

$$x = \sum_{i=1}^{4} p_i b_i + u_1 b_1 + u_2 b_2 = \sum_{i=1}^{4} q_i b_i + u_3 b_3 + u_4 b_4 = y \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{4} (q_i - p_i) b_i = u_1 b_1 + u_2 b_2 - u_3 b_3 - u_4 b_4.$$

Satz 6.2.12 (Affiner Dimensionssatz):

$$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \begin{cases} \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) & , A \\ \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) - 1 & , B \end{cases}$$

$A \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$,

$B \Leftrightarrow \neg A$.

I. $\dim = 2$

II. $\dim = 3$

III. $\dim = 4$

IV. (a) $U_1 = U_2 \Rightarrow \dim = 3$

(b) $\mathcal{E}_1 \parallel g \parallel \mathcal{E}_2 \Rightarrow \dim = 4$

6.3.wf

Welche der folgenden Aussagen sind (für alle affinen Räume $\mathbf{A} = \mathbf{r} + \mathbf{X}$ mit Richtungsvektorraum X (über dem Körper K), für alle $a \in A$, alle $v \in X$, alle $f : A \to A$, ...) wahr? Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an. (Also zum Beispiel den Vektorraum $X = \mathbb{Q}^{3\times 1}$, den Vektor $v := (1, 2, 4)^T$, etc.)

1. f ist Schiebung (Translation) $\Leftrightarrow \forall a \in A : f(a) = a + u$.
2. f ist Schiebung $\Leftrightarrow f = \tau_u$.
3. f ist Schiebung $\Leftrightarrow \forall u \in X : f = \tau_u$.
4. f ist Schiebung $\Leftrightarrow \exists u \in X : f = \tau_u$.
5. f ist Schiebung $\Leftrightarrow \exists u \in X\ \forall a \in A : f(a) = a + u$.
6. f ist Schiebung $\Leftrightarrow \forall a \in A\ \exists u \in U : f(a) = a + u$.
7. f ist Streckung $\Leftrightarrow \exists z \in A\ \exists \lambda \in K^\times\ \forall a \in A : f(a) = z + \lambda(a - z)$.
8. f ist Streckung $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^\times\ \exists z \in A\ \forall a \in A : f(a) = (1 - \lambda)z + \lambda a$.
9. f ist Streckung $\Leftrightarrow \exists z \in A\, \exists \lambda \in K^\times\ \forall v \in X : f(z + v) = z + \lambda v$.
10. f ist Streckung $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^\times\ \forall v \in X : f(r + v) = r + \lambda v$.

1\. „$\exists$" fehlt.

2\. „$\exists$" fehlt, sonst gleich, wie 1.

3\. falsch, weil $u \neq v$ erzeugen $\tau_u \neq \tau_v$.

4\. wahr, richtiges 2., weil $f : A \to A$.

5\. wahr, richtiges 1.

6\. Was ist „U"?

7\. wahr, weil $z + \lambda(a - z) = z + \lambda a - \lambda z = z(1 - \lambda) + \lambda a$.

8\. wahr, weil $f := \tau_z \circ (\lambda \cdot id) \circ \tau_{-z}$.

9\. wahr, weil „$\Leftrightarrow$" zu 7.:

„$\Rightarrow$" $a =: z + v$ ...

„$\Leftarrow$" $a := z + v$ ...

10\. Was ist „r"?

A 6.3.2 (α)

Die Punkte $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ sind, laut

Satz 6.2.6, affin unabhängig, wenn

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} \text{ l.u. Vektoren sind.}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&-1&-2\\-1&1&0\end{bmatrix} \xmapsto{\cdot(-1)} \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} \xmapsto{-1} \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix} \xmapsto{-2,\ \cdot(1/2)} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix} \xmapsto{+1,\ -2}$$

$\mapsto E_3$.

Weil $\dim \mathbb{R}^{3\times 1} = 3$ und 4 affin unabhängige Punkte vorliegen, bilden diese eine Basis.

Laut Fortsetzungssatz, ist somit α eindeutig festgelegt:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Man definiere eine Abbildung $g \in L(\mathbb{R}^{4\times 1}, \mathbb{R}^{4\times 1})$:

$$g: \begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline t_1&&&\\t_2&&A&\\t_3&&&\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|ccc}0&0&0&0\\\hline 0&&&\\0&&A&\\0&&&\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Laut Angabe, bekommen wir:

(i) $$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline t_1 & & & \\ t_2 & & A & \\ t_3 & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline t_1 + a_{11} \\ t_2 + a_{21} \\ t_3 + a_{31} \end{pmatrix}$$

(ii) $$\ldots \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline t_1 + a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ t_2 + a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ t_3 + a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}$$

(iii) $$\ldots \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline t_1 + a_{11} + a_{12} - a_{13} \\ t_2 + a_{21} + a_{22} - a_{23} \\ t_3 + a_{31} + a_{32} - a_{33} \end{pmatrix}$$

(iv) $$\ldots \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline t_1 + 2a_{11} + 2a_{12} \\ t_2 + 2a_{21} + 2a_{22} \\ t_3 + 2a_{31} + 2a_{32} \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich ein 12×12 LGS konstruieren und A und t bestimmen.

A 6.3.3

(a) Zz: $\exists b_0, b_1 \in \mathcal{A} : \alpha(b_0) = b_0,\ \alpha(b_1) = b_1$
$\Rightarrow \forall u \in \mathcal{A} : \alpha(u) = u$.

Ww: $\exists t \in \mathcal{A} : \alpha = \tau_{\alpha(t)} \circ f_\alpha \circ \tau_{-t}$ und
$\exists U : \mathcal{A} = b_0 + U$.

Sei $g \in$ Geraden $(\mathcal{A})$ beliebig, dann
$\exists u, v \in \mathcal{A} : g = u + [u-v] =: u + U_1$.
Sei $x \in g$ beliebig, dann

$$\exists \lambda \in K : x = u + \lambda(u-v)$$
$$= u + \lambda u - \lambda v.$$

x ist also eine affine LK, weil $1 + \lambda - \lambda = 1$.
Also darf man

$$\alpha(x) = \alpha(u + \lambda u - \lambda v)$$
$$= \alpha(u) + \lambda\alpha(u) - \lambda\alpha(v)$$
$$= \alpha(u) + \lambda\underbrace{(\alpha(u) - \alpha(v))}_{f_\alpha(u-v),\ \text{weil}}$$

$$\alpha(u) = \alpha(t) + f_\alpha(u-t)$$
$$\alpha(v) = \alpha(t) + f_\alpha(v-t)$$

Nun ist aber $U_2 := \{\lambda f_\alpha(u-v) : \lambda \in K\}$ ein 1-dim UR zur $\alpha(g)$. Weil $\alpha(g) \parallel g$, also $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$
$\Rightarrow U_1 = U_2$.

Weil nun $(u-v), f_\alpha(u-v) \in U_1 = U_2 = [u-v]$,
$\exists \gamma \in K : \gamma(u-v) = f_\alpha(u-v)$. Wegen der Linearität von f_α, ist das γ, $\forall \tilde{u} - \tilde{v} \in [u-v]$, dasselbe.

Erweitere b_0, b_1 zur affinen Basis $(b_i)_{i\in I}$ und seien

$$v =: b_0 + \sum_{i\in I^\times} v_i (b_i - b_0) \text{ und } u =: b_0 + \sum_{i\in I^\times} u_i (b_i - b_0).$$

$$\begin{aligned} f_\alpha(u-v) &= f_\alpha\Big(\sum_{i\in I^\times} u_i(b_i-b_0) - \sum_{i\in I^\times} v_i(b_i-b_0)\Big) \\ &= f_\alpha\Big(\sum_{i\in I^\times}(u_i-v_i)(b_i-b_0)\Big) = \sum_{i\in I^\times}(u_i-v_i) f_\alpha(b_i-b_0) \\ &= \sum_{i\in I^\times}(u_i-v_i)\,\gamma\,(b_i-b_0). \end{aligned}$$

Nun ist $f_\alpha(b_1-b_0) = (\alpha(t) + f_\alpha(b_1-t)) -$
$(\alpha(t) + f_\alpha(b_0-t)) = \alpha(b_1) - \alpha(b_0) = b_1 - b_0.$

$$\Rightarrow (u_1-v_1)(b_1-b_0) = (u_1-v_1) f_\alpha(b_1-b_0) = (u_1-v_1)\,\gamma\,(b_1-b_0).$$

Fall 1: $u_1 - v_1 \neq 0$: $\gamma = 1$

Fall 2: sonst: Ww: $\forall i\in I: u_i - v_i \neq 0 \Rightarrow f_\alpha(b_i-b_0) = \gamma(b_i-b_0).$

Betrachte $f_\alpha((u-v)+(b_1-b_0))$

$$= f_\alpha(b_1-b_0) + f_\alpha\Big(\sum_{i\in I}(u_i-v_i)(b_i-b_0)\Big)$$

$$\overset{1.}{=} \beta(b_1-b_0) + \sum_{i\in I^\times}(u_i-v_i)\,\beta\,(b_i-b_0) \text{ für ein } \beta\in K.$$

$$\overset{2.}{=} (b_1-b_0) + \sum_{i\in I^\times}(u_i-v_i)\,\gamma\,(b_i-b_0).$$

$$\Rightarrow \beta = 1 \wedge \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \beta = 1$$

Zuletzt

siehe ganz oben

$$\alpha(u) = \alpha\Big(b_0 + \sum_{i\in I} u_i(b_i-b_0)\Big) = \alpha(b_0) + \sum_{i\in I^\times} u_i f_\alpha(b_i-b_0)$$

$$= b_0 + \sum_{i\in I^\times} u_i(b_i-b_0) = u.$$

(b) $\exists!\, b_0 \in \mathcal{A} : \alpha(b_0) = b_0 \Rightarrow \alpha \neq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ zentrische Streckung.

Betrachte abermals (siehe (a))

$f_\alpha(u-v) = \gamma(u-v)$.

Angenommen, $\gamma = 1$, dann $\exists j \in I^\times$:

$\alpha(b_j) = \alpha(b_0 + (b_j - b_0)) = \alpha(b_0) + f_\alpha(b_j - b_0) =$

$b_0 + b_j - b_0 = b_j$

und somit wäre b_j ein weiterer Fixpunkt.

$\Rightarrow \gamma \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$

A 6.3.7

(a) $\exists!\, \alpha \in \text{Affinität}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) : \forall h \in \mathcal{H} : \alpha(h) = h$?

Sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von $\mathcal{H}$. Erweitere sie auf
$\{b_i : i \in I\} \cup \{a\}$.
$\forall i \in I : \alpha(b_i) := b_i$ und $\alpha(a) := b$.
Der Rest folgt aus dem Fortsetzungssatz.

(b) $\exists t \in \mathcal{H}\ \exists c^* \in X^*\ \exists v \in X : \forall x \in \mathcal{A} :$
$\alpha(x) = \langle c^*, x - t \rangle v$?

Wähle $t \in \mathcal{H}$ beliebig, $c^* \in X^* : \ker a^* = \mathcal{H}$.
$v := \dfrac{b - a}{\langle c^*, a - t \rangle}$.

- $\forall h \in \mathcal{H} : \alpha(h) = h + \langle c^*, \overbrace{h - t}^{\ker c^*} \rangle v = h$.
- $\alpha(a) = a + \langle c^*, a - t \rangle \dfrac{b - a}{\langle c^*, a - t \rangle} = b$.

(c) $\forall x \in \mathcal{A} : x \neq \alpha(x)$
$\Rightarrow x + \{\mathcal{O}\} \vee \alpha(x) + \{\mathcal{O}\}$ ist eine Gerade
$g = x + [v]$?

Satz 6.2.10:
Weil $x + \{\mathcal{O}\} \cap \alpha(x) + \{\mathcal{O}\} = \emptyset$,
$\Rightarrow x + \{\mathcal{O}\} \vee \alpha(x) + \{\mathcal{O}\} =$
$x + ([\alpha(x) - x] \oplus \{\cancel{\{\mathcal{O}\} + \{\mathcal{O}\}}\}) =$
$x + [x + \langle c^*, x - t \rangle v - x] = x + [v]$.

A 6.3.9 (α)

Satz 6.3.3 (a). $f: X \to X' : x - y \mapsto \alpha(x) - \alpha(y)$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-3\\4\\1\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\5\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-5\\6\\2\\14\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\2\\8\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-3\\2\\1\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} & E_3 & \\ \hline -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \Bigg\} A$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\5\end{pmatrix} \Rightarrow t := \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

A 6.3.10

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\alpha}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 14 - 4x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

$\overset{\alpha}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 14 - 4x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

(b) $\frac{1}{2}((t + Ax) + (\mathcal{O} + E_3 x)) = \frac{1}{2}(t + (A + E_3)x)$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}}_{t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 7 - 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

(c) M hat Spaltenrang 2 : $\mu(\mathbb{R}^{3\times 1})$ ist Ebene.

Sei $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ beliebig.

$\frac{x + \alpha(x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 14 - 4x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \right) =$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 14 - 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 7 - 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$

Sei $x \in \mu(\mathbb{R}^{3\times 1})$, so gilt

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 7 - 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 14 - 4x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 7 - 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$