Theoretische Informatik

1. Übung

Richard Weiss

28.3.2021

Aufgabe 1. Zeigen Sie dass $\{ab, aba\}^* = \{\epsilon\} \cup \{a\}\{ba, baa\}^*\{b, ba\}$.

Lösung. Sei L die linke und R die rechte Menge.

1. Inklusion ($L \subseteq R$):
   Wir verwenden Induktion nach $k \geq 0$, um zu zeigen, dass

$$L = \bigcup_{k \geq 0} \{ab, aba\}^k \subseteq R.$$

- ($k = 0$):

$$\{ab, aba\}^0 = \{\epsilon\} = \subseteq R$$

- ($k = 1$):

$$\{ab, aba\}^1 = \{ab, aba\}\{\epsilon\} = \{a\}\{b, ba\} \subseteq R$$

- ($k \mapsto k + 1$):

$$\begin{aligned}
\{ab, aba\}^{k+1} &= \{ab, aba\}\{ab, aba\}^k \\
&\subseteq^{\mathrm{IH}} \{ab, aba\}R \\
&= \{ab, aba\}\{\epsilon\} \cup \{ab, aba\}\{a\}\{ba, baa\}^*\{b, ba\} \\
&= \{ab, aba\}^1 \cup \{a\}\{ba, baa\}^*\{b, ba\} \\
&\subseteq R \cup R = R
\end{aligned}$$

2. Inklusion ($R \subseteq L$):
   Für $k = 0$ sieht man $\{\epsilon\} \subseteq L$. Wir verwenden Induktion nach $k \geq 0$, um zu zeigen, dass

$$R = \{\epsilon\} \cup \{a\} \left(\bigcup_{k \geq 0} \{ba, baa^k\} \right) \{b, ba\} = \{\epsilon\} \cup \bigcup_{k \geq 0} \{a\}\{ba, baa\}^k\{b, ba\} \subseteq L.$$

- $(k = 0)$:

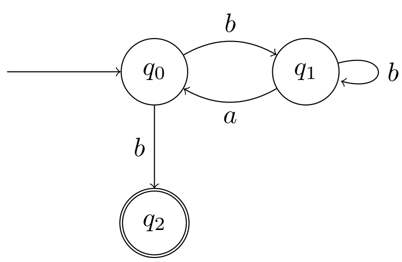
$$\{a\}\{ba, baa\}^0\{b, ba\} = \{a\}\{\epsilon\}\{b, ba\} = \{ab, aba\} \subseteq L$$

- $(k \mapsto k + 1)$:

$$\begin{aligned}
\{a\}\{ba, baa\}^{k+1}\{b, ba\} &= \{a\}\{ba, baa\}^k\{ba, baa\}\{b, ba\} \\
&= \{a\}\{ba, baa\}^k\{b, ba\}\{a\}\{b, ba\} \\
&\subseteq^{\text{IH}} \{ab, aba\}^*\{ab, aba\} \\
&= \{ab, aba\}^+ \\
&\subseteq L
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Verwenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung, um den NFA

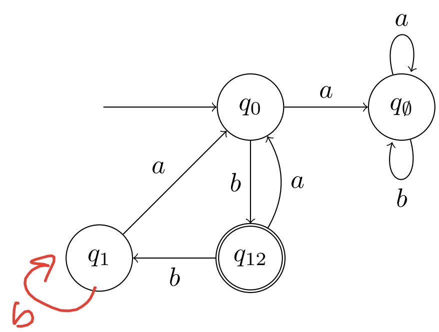


in einen DFA umzuwandeln.

Lösung. Wir verwenden die Potenzmengenkonstruktion aus dem Beweis von Satz 1.1. Wir konstruieren dazu aber bloß jene Zustände, die vom Startzustand q_0 erreichbar sind.
Wir erstellen eine Tabelle mit dem Startzustand und den Symbolen des Alphabets. Der Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte soll die Menge von Zuständen des NFA enthalten die von einem Zustand aus der Beschriftung der i-ten Zeile mit dem Symbol das die j-Spalte beschriftet erreichbar sind. Falls dieses Prozess einen neuen Zustand des DFA erzeugt, so wird dieser als neue, leere, Zeile der Tabelle hinzugefugt. Diese Tabelle ist saturiert wenn jeder Zustand des DFA der in der Tabelle vorkommt auch als Beschriftung einer Zeile vorkommt. Sobald die Tabelle saturiert ist, ist die Konstruktion des NFA vollständig.

	a	b
$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Auf diese Weise haben wir also den folgenden DFA konstruiert, der per constructionem äquivalent zu dem NFA aus der Angabe.

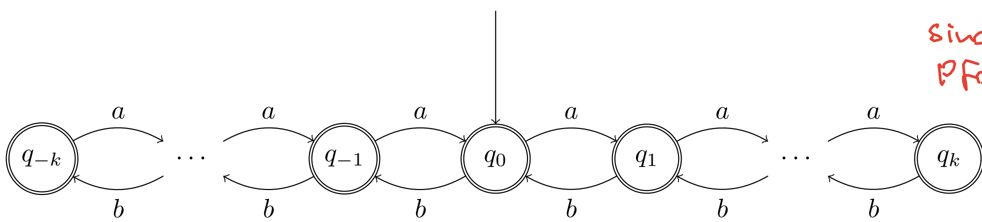


□

Aufgabe 3. Für $k \geq 1$ sei $L_k = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_a(v) - n_b(v)| \leq k \text{ für jedes Präfix } v \text{ von } w\}$. Ist L_k eine reguläre Sprache?

Lösung. Wir finden einen expliziten NFA D_k, sodass $\mathrm{L}(D_k) = L_k$.

Zustände (Knoten) sind erreichbar, Pfade und Wörter nicht



Für einen Zustand q_l, $l \in \{0, \pm 1, \ldots, \pm k\}$, und einem Pfad w von q_0 nach q_l gilt $n_a(w) - n_b(w) = l$. Das zeigt $\mathrm{L}(D_k) \subseteq L_k$.
Für die umgekehrte Inklusion sei $w \in L_k$. Wir verwenden Induktion nach $|w|$.
Für $|w| = 0$, muss $w = \epsilon$, also das leere Wort sein. Diese ist durch unseren Automaten offenbar unmittelbar (im Start-Zustand) erreichbar. Ansonsten gibt es ein $c \in \{a,b\}$ und $v \in \{a,b\}^{|w|-1}$, sodass $w = vc$. Laut Induktionshypothese, ist v erreichbar und führt zu einem Zustand q_l, $l \in \{0, \pm 1, \ldots, \pm k\}$.

induziert v einen Pfad von q_0 zu

$$\sigma := (n_a(w) - n_b(w)) - (n_a(v) - n_b(v)) = \sigma_a - \sigma_b, \quad \sigma_a := n_a(w) - n_a(v), \quad \sigma_b := n_b(w) - n_b(v)$$

Für $c = a$ gilt $\sigma = 1 - 0$ und w führt nach q_{l+1}. Für $c = b$ gilt $\sigma = 0 - 1$ und w führt nach q_{l-1}. w ist also erreichbar und führt zum Zustand $q_{l+\sigma}$.

□

Aufgabe 4. Zeigen sie dass $\{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$ nicht regulär ist.

Lösung. Angenommen, $L := \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$ wäre regulär. Sei n wie im Pumping Lemma für L und betrachte $w = a^p$ mit $p \in \mathbb{P}_{\geq n}$. (Es gibt unendlich viele Primzahlen.) Dann existieren v_1, v_2, v_3 so dass $w = v_1 v_2 v_3$ und

1. $v_2 \neq \epsilon$
2. $|v_1 v_2| \leq n$, und
3. für alle $k \geq 0 : v_1 v_2^k v_3 \in L$.

$$\begin{aligned} &\overset{3.}{\Longrightarrow} L \ni v_1 v_2^{p+1} v_3 = w v_2^p = a^p (a^{|v_2|})^p = a^{p(1+|v_2|)} \\ &\Longrightarrow p(1 + |v_2|) \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

Wegen dem 1-ten Punkt, erhalten wir $|v_2| \neq 0$. $p \in \mathbb{P}$, ist aber $p \neq 1$, also $1 + |v_2| = 1$. Widerspruch!

□

Aufgabe 5. Ein NFA $\langle Q, A, \Delta, q_0, F\rangle$ heißt *gekürzt* falls es für alle $q \in Q \setminus \{q_0\}$ Wörter $u, v \in A^*$ und einen Zustand $q_{\mathrm{f}} \in F$ gibt so dass $(q_0, u, q) \in \Delta$ und $(q, v, q_{\mathrm{f}}) \in \Delta$. Zeigen Sie dass eine Sprache L regulär ist genau dann wenn ein gekürzter Automat existiert der L akzeptiert.

Lösung. Die Rückrichtung ist klar. Für die Hinrichtung bemerkt man, dass „gekürzte Zustände" $q \in Q \setminus \{q_0\}$ zum NFA $N = \langle Q, A, \Delta, q_0, F\rangle$ mit $L = \mathrm{L}(N)$, d.h.

↳ Automaten können gekürzt sein, Zustände nicht...

$$\exists\, u, v \in A^*, \exists\, q_{\mathrm{f}} \in F : (q_0, u, q), (q, v, q_{\mathrm{f}}) \in \Delta,$$

genau jene sind, durch die ein Wort $w \in L$ führt. Sei nämlich q ein solcher Zustand. Dann gilt $(q_0, w, q_{\mathrm{f}}) \in \Delta$. Das Wort $w := uv \in L$ führt durch q. Die Umkehrung ist klar.
Der gekürzte „Teil-Automat" mit den gekürzten Zuständen aus Q (und dem Anfangszustand q_0) reicht also aus, um alle Worte $w \in L$ zu generieren. ✓

□

Aufgabe 6. Seien A, B Alphabete und $\varphi : A^* \to B^*$ ein Monoidhomomorphismus. Zeigen Sie dass für alle regulären $L \subseteq A^*$ auch $\varphi(L) = \{\varphi(w) \mid w \in L\}$ regulär ist.

Lösung. Sei $N = \langle Q, A, \Delta, q_0, F\rangle$ ein NFA für $L = \mathrm{L}(N)$. Betrachte den NFA $\varphi(N) := \langle Q, \varphi(A), \varphi(\Delta), q_0, F\rangle$, wobei $\varphi(\Delta) := \{(q_1, \varphi(w), q_2) : (q_1, w, q_2) \in \Delta\}$.
Wir behaupten, dass $\varphi(L) = \varphi(\mathrm{L}(n)) = \mathrm{L}(\varphi(N))$.
Aus der Definition 1.7 der erweiterten Übergangsrelation (hier als $\overline{\Delta}$) und der Tatsache, dass

$$\varphi(\epsilon) = \epsilon, \quad \forall\, u, v \in A^* : \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v),$$

sieht man unmittelbar, dass

$$\overline{\varphi(\Delta)} = \varphi(\overline{\Delta}) := \{(q_1, \varphi(w), q_2) : (q_1, w, q_2) \in \overline{\Delta}\}.$$

$\varphi(a)$ ist i.A. ein Wort, kein Buchstabe (in B). Δ muss als Teilmenge von $Q' \times B \times Q'$ def werden (für geeignetes Q'), erst dann wird Δ [illegible] $\times Q'$

Sei $v \in \varphi(\mathrm{L}(N))$ und $w \in \mathrm{L}(N)$ mit $\varphi(w) = v$.

$$\begin{aligned}
&\implies \exists\, q \in F : (q_0, w, q) \in \overline{\Delta} \\
&\implies (q_0, v, q) = (q_0, \varphi(w), q) \in \varphi(\overline{\Delta}) = \overline{\varphi(\Delta)} \\
&\implies v \in \mathrm{L}(\varphi(N))
\end{aligned}$$

Sei nun $v \in \mathrm{L}(\varphi(N))$ und $q \in F$ sodass $(q_0, v, q) \in \overline{\varphi(\Delta)} = \varphi(\overline{\Delta})$.

$$\begin{aligned}
&\implies \exists\, w \in A^* : (q_0, w, q) \in \overline{\Delta}, v = \varphi(w) \\
&\implies w \in \mathrm{L}(N) \\
&\implies v = \varphi(w) \in \varphi(\mathrm{L}(N))
\end{aligned}$$

□