A 4.3.2 Im Vektorraum $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ sei die kanonische Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben.

(a) Zeige, dass die Familie $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$b_0 := (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $b_1 := (-1, 1, 0, \ldots)$, $b_2 := (0, -1, 1, 0, \ldots)$, ...

ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ ist.

(b) Berechne $\langle b_j^*, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle \in \mathbb{R}$ und gib an, welche der Linearformen b_j^* in der Hülle von $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen.

Hinweis: $\langle b_0^*, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$. Warum ist diese Summe endlich?

Beweis. (a) Um l.u. zu zeigen, wollen wir

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n b_n$$

darstellen. Dies ist jedoch bloß trivial möglich:
Damit die erste Komponente der Summe 0 wird, müsste man $b_0 + b_1$ machen; dann ist die zweite Komponente 1 und man addiert b_2 ...
Dann wären aber nicht fast alle $x_n = 0$.

Es liegt ein ES vor, da man immer $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren kann und auch $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$:

$$b_0 = e_1,\ b_0 + b_1 = e_2,\ \ldots,\ \sum_{k=0}^{n} b_k = e_{n+1}, \ldots \qquad \square$$

(6) $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \sum_{k=0}^{i-1} b_k$.

$\langle b_j^*, (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle = \langle b_j^*, \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \sum_{k=0}^{i-1} b_k \rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{i-1} a_i \langle b_j^*, b_k \rangle =$

$\sum_{i=j+1}^{\infty} a_i$

ist endlich, weil fast alle $a_i = 0$. Man kommt erst mit k nach j, bei $i = j+1$.

$\nexists j \in \mathbb{N}: b_j^* \in [(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}]$, weil

$b_0^* = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*$, $b_1^* = \sum_{i=2}^{\infty} e_i^*$, ..., $b_j^* = \sum_{i=j+1}^{\infty} e_i^*$, ...

unendliche Summen wären.

A 4.5.2 Die Funktionen $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$ bilden nach A 3.2.4 eine Basis $B := (f_0, f_1, f_2)$ eines dreidimensionalen Unterraumes U_2 des Vektorraumes der Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Bestimme die Koordinatenmatrizen $\langle v_{t_i}, B \rangle$ der Evaluierungsabbildungen $v_{t_i} \in U_2^*$ für $i \in I = \{0, 1, 2\}$ und

(α) $(t_0, t_1, t_2) = (-1, 0, -\frac{1}{2})$.

(b) Zeige mit Hilfe der Koordinatenmatrizen aus (a), dass diese drei Evaluierungsabbildungen eine Basis von U_2^* bilden.

(c) Ermittle jene Basis $(g_j)_{j \in I}$ von U_2, welche die Evaluierungsabbildungen $(v_{t_i})_{i \in I}$ als duale Basis besitzt. (Jede der drei gesuchten Polynomfunktionen g_j ordnet also den Elementen t_i die Werte $g_j(t_i) = \delta_{ij}$ zu.) Stelle die gesuchten Funktionen g_j als Linearkombinationen der Basisfunktionen aus B dar.

...

Hinweis: Rechne zunächst nicht mit Polynomfunktionen sondern mit den Koordinatenspalten dieser Funktionen bezüglich der Basis B. Formuliere erst die Endergebnisse wieder für Polynomfunktionen.

(a) $v_{t_i}(f_0) = f_0(t_i) = 1, \quad v_{t_i}(f_1) = f_1(t_i) = t_i,$

$v_{t_i}(f_2) = f_2(t_i) = t_i^2.$

$\langle v_{t_i}, B\rangle = (\langle v_{t_i}, f_0\rangle, \langle v_{t_i}, f_1\rangle, \langle v_{t_i}, f_2\rangle) = (1, t_i, t_i^2)$

$\Rightarrow \quad t_0 : (1, -1, (-1)^2), \quad t_1 : (1, 0, 0),$

$t_2 : (1, -1/2, (-1/2)^2);$

(b)
$$\underset{+}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}} \mapsto \underset{\times(-2) \quad \times(-4)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}} \mapsto \underset{/2 \quad -1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \mapsto \underset{2 \quad -}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mapsto$$

E_3. Und wegen Satz 2.6.6.

(c) Sei $C^* = \{v_{t_0}, v_{t_1}, v_{t_2}\}$. Wir wollen $C = (g_i)_{i\in I}$ herausfinden. Wir wissen, dass

$$\langle C^*, B\rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen $\langle B^*, C\rangle = \langle C^*, B\rangle^{-1}$ (laut oben)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \langle B^*, C\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f_0^*, g_0\rangle & \cdots & \langle f_0^*, g_2\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_2^*, g_0\rangle & \cdots & \langle f_2^*, g_2\rangle \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad g_0 = 0\cdot f_0 + 1\cdot f_1 + 2\cdot f_2,$

$g_1 = 1\cdot f_0 + 3\cdot f_1 + 2\cdot f_2,$

$g_2 = 0\cdot f_0 - 4\cdot f_1 - 4\cdot f_2.$

A 4.6.2

(b) Zerlege die Menge $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ in Klassen äquivalenter Matrizen.

Satz 4.6.8 Zwei Matrizen $A, B \in K^{m\times n}$ sind genau dann äquivalent, falls sie denselben Rang haben.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $rg = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $rg = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $rg = 1$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $rg = 2$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $rg = 1$

A 4.6.4 Es seien $A, B \in K^{n \times n}$. Diese Matrizen heißen kommutierend, falls $AB = BA$. Zeige: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ kommutiert genau dann mit allen Matrizen aus $GL_n(K)$, falls A eine skalare Matrix ist.
Hinweis: Überlege zuerst, wie eine Matrix A aufgebaut sein muss, damit sie mit jenen Elementarmatrizen kommutiert, deren Elemente nur 0 und 1 sind. Jede skalare Matrix $A \in K^{n \times n}$ kommutiert sogar mit allen Matrizen aus $K^{n \times n}$.

Beweis. Wir zeigen also

$$\forall A \in K^{n \times n}\ \forall B \in GL_n(K): AB = BA \Leftrightarrow$$
$$\exists c \in K: \forall 1 \leq i,j \leq n: a_{ij} = c \cdot \delta_{ij}.$$

„$\Rightarrow$" Kontraposition:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ast & \cdots & \ast \\ \vdots & & \vdots \\ b_{11} + b_{n1} & \cdots & \ast \end{bmatrix} \neq$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ast & \cdots & \ast \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} + b_{nn} & \cdots & \ast \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ast & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ast & \cdots & \ast \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & \ast \end{bmatrix} \neq$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ast & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ast & \cdots & \ast \\ \vdots & & \vdots \\ \ast b_{n1} & \cdots & \ast \end{bmatrix}$$

„$\Leftarrow$" $\exists c \in K: AB = cE_n B = cBE_n = BcE_n = BA.$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & j & i & \end{matrix} \\ i & \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{cc} \begin{matrix} & j & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & 1 & \vdots \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} j \\ \\ i \end{matrix} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+a_{jj} & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \ddots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{i1} + a_{j1} = a_{i1} \Rightarrow a_{j1} = 0$$

$$a_{ij} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ii} \Leftrightarrow a_{jj} = a_{ii}$$

A 4.6.5 Sei $B = (b_1, b_2)$ eine Basis eines Vektorraumes V über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f \in L(V, V)$ hat die Koordinatendarstellung

$$B^* \circ f \circ (B^*)^{-1} : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Eine weitere Basis von V sei $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ mit

(α) $\langle B^*, \tilde{b}_1 \rangle = (1, 1)^T$, $\langle B^*, \tilde{b}_2 \rangle = (1, -1)^T$.

(a) Bestimme die Koordinatenmatrizen $\langle B^*, f(B) \rangle$, $\langle \tilde{B}^*, f(B) \rangle$ und $\langle \tilde{B}^*, f(\tilde{B}) \rangle$.

(b) Skizziere die Vektoren der Basen $B, \tilde{B}$ sowie ihre f-Bilder.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow B^* & & \downarrow \tilde{B}^* \\ \mathbb{R}^{2\times 1} & \dashrightarrow & \mathbb{R}^{2\times 1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2\times 1} & \dashrightarrow & \mathbb{R}^{2\times 1} \\ \uparrow \tilde{B}^* & & \uparrow \tilde{B}^* \\ V & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow B^* & & \downarrow B^* \\ \mathbb{R}^{2\times 1} & \dashrightarrow & \mathbb{R}^{2\times 1} \end{array}$$

$\tilde{B}^* \circ f \circ (B^*)^{-1}$

$B^* \circ f \circ (B^*)^{-1}$ wird durch $\langle B^*, f(B) \rangle$ beschrieben.

$$\langle B^*, f(B) \rangle \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle B^*, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(α) $\Rightarrow \langle B^*, \tilde{B} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $\langle \tilde{B}^*, B \rangle = \langle B^*, \tilde{B} \rangle^{-1}$, also

$$\langle \tilde{B}^*, f(B) \rangle = \langle \tilde{B}^*, B \rangle \cdot \langle B^*, f(B) \rangle = \langle B^*, \tilde{B} \rangle^{-1} \cdot \langle B^*, f(B) \rangle.$$

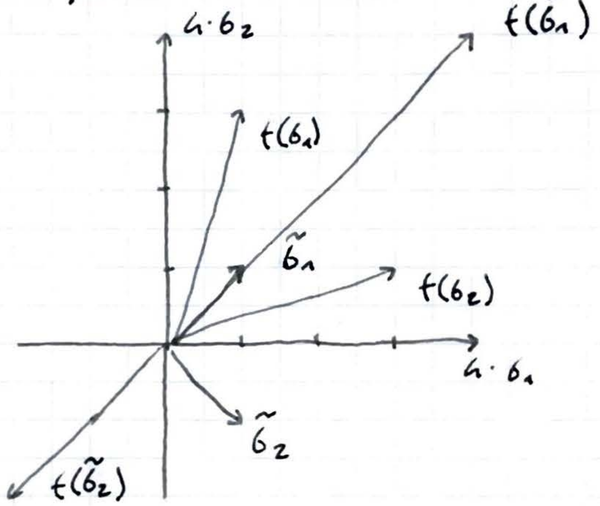
$$\langle \tilde{B}^*, f(\tilde{B}) \rangle = \langle \tilde{B}^*, f(B) \rangle \cdot \langle B^*, \tilde{B} \rangle.$$

Ergebnisse:

$\langle B^*, \tilde{B} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\langle \tilde{B}^*, B \rangle = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,

$\langle B^*, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\langle \tilde{B}, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\langle \tilde{B}^*, f(\tilde{B}) \rangle = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.



Zeichnung nach b_1, b_2; $f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(b_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\tilde{b}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f(\tilde{b}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

Aufgabe 4.6.x: Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}^\times$.
Wir definieren die folgenden Relationen auf der Menge $K^{m \times n}$

- $A \sim_1 B \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(K): PA = B$
- $A \sim_2 B \Leftrightarrow \exists Q \in GL_n(K): AQ = B$
- $A \sim_3 B \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(K) \exists Q \in GL_n(K) (PAQ = B)$
- $A \sim_4 B \Leftrightarrow (A \sim_1 B) \wedge (A \sim_2 B)$
- $A \sim_5 B \Leftrightarrow (A \sim_1 B) \vee (A \sim_2 B)$

Welche dieser 5 Relationen sind (für beliebige n, m) Äquivalenzrelationen?

Hinweis: Betrachten Sie die Matrizen
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\sim_1$: Reflexiv: $E_n A = A$;
Symmetrisch: $PA = B \Rightarrow P^{-1}PA = A = P^{-1}B$;
Transitiv: $PA = B \wedge QB = C \Rightarrow QPA = C$

$\sim_2$: Analog zu $\sim_1$.

$\sim_3$: Folgt aus $\sim_1$ und $\sim_2$.

$\sim_4$: Folgt aus $\sim_3$.

$\sim_5$: $\neg$ Transitiv: $A \sim_5 B \wedge B \sim_5 C \not\Rightarrow A \sim_5 C$, also
$(A \sim_1 B \vee A \sim_1 B) \wedge (B \sim_1 C \vee B \sim_2 C) \not\Rightarrow A \sim_1 C \vee$
$A \sim_2 C$:

Angenommen,

$$\exists P \in GL_m(K),\ Q \in GL_n(K) : PA = B \wedge BQ = C,$$

also $A \sim_1 B \wedge B \sim_2 C$. Dann folgt

$$PAQ = C,$$

aber im Allgemeinen nicht

$$A \sim_1 C \vee A \sim_2 C.$$

Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{11}q_{12} \\ p_{21}q_{11} & p_{21}q_{22} \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 \\ p_{11}q_{11} & p_{11}q_{12} \\ p_{21}q_{11} & p_{21}q_{22} \end{pmatrix}$$

!

Aufgabe 4.6.4: Welche der folgenden 3 Aussagen sind (für beliebige Körper K, beliebige K-Vektorräume V, beliebige $n, m \in \mathbb{N}^\times$) immer wahr?

1. Für alle $A, B \in K^{n \times n}$ gilt: $AB = E_n \Rightarrow BA = E_n$.

2. Für alle $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times n}$ gilt:
$AB = E_n \Rightarrow BA = E_m$.

3. Für alle Basen $B, \tilde{B}$ von V gilt:
$\langle B^*, f(\tilde{B}) \rangle = E_n \Leftrightarrow (B = \tilde{B} \wedge f = id_V)$.

Die erste Aussage stimmt.

Beweis. $AB = E_n \Rightarrow A = ABB^{-1} = E_n B^{-1} = B^{-1} \Rightarrow$
$BA = BB^{-1} = E_n$. $\square$

Die zweite Aussage stimmt nicht, weil

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = E_2 \text{, aber } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq E_3 .$$

Letzter Aussage stimmt auch nicht, weil wenn

$\tilde{B} \neq B \wedge f(\tilde{B}) = B \Rightarrow \langle B^*, f(\tilde{B}) \rangle = \langle B^*, B \rangle = E_n$.

Aber $B = \tilde{B} \wedge f = id_V \Rightarrow \langle B^*, f(\tilde{B}) \rangle = \langle B^*, id_V(B) \rangle =$
$\langle B^*, B \rangle = E_n$.