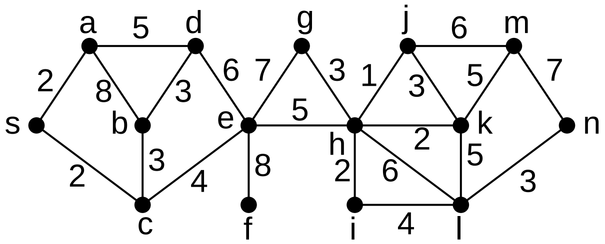
UE DGA WS2020-2021
Übungsblatt 7

Aufgabe 37:
Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V| + |E|)$ an, dessen Eingabe ein gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten s und t sind, der die Anzahl der (gerichteten) Wege von s nach t berechnet. Beispielsweise enthält der Graph aus Aufgabe 50 drei Wege von b nach i nämlich $b - d - e - h - i$, $b - d - f - h - i$ und $b - g - i$. (Anmerkung: der Algorithmus soll die Pfade bloß zählen, nicht ausgeben)

Hinweis: Topologisches Sortieren

Aufgabe 38:
Erklären Sie die Funktionsweise der Algorithmen von Kruskal und Prim anhand der Konstruktion eines maximalen Spannbaums (eines spannenden Baums mit maximalen Gewicht) mittels Kruskal's Algorithmus und eines minimalen Spannbaums mittels Prim's Algorithmus für den Wurzelknoten s im folgenden kantenbewerteten Graph:



Aufgabe 39:
Alternative Algorithmen zur Bestimmung minimaler Spannbäume. Nachfolgend sind die Pseudocodes von drei verschiedenen Algorithmen angegeben. Alle drei erhalten als Eingabe einen zusammenhängenden kantenbewerteten Graphen und geben eine Kantenmenge T zurück. Beweisen oder widerlegen Sie für jeden der drei Algorithmen die Behauptung, dass T in jedem Fall ein minimaler Spannbaum ist.

Maybe-MST-A(G, w)
sortiere die Kanten in nichtsteigender Reihenfolge nach ihren Gewichten w
$T := E$
for $e \in E$ (in der soeben berechneten Reihenfolge) **do**
    if $T \setminus \{e\}$ ist ein zusammenhängender Graph **then**
        $T := T \setminus \{e\}$
    end if
end for
return T

Maybe-MST-B(G, w)
$T := \emptyset$
for $e \in E$ (in einer beliebigen Reihenfolge) **do**
    if $T \cup \{e\}$ kreisfrei **then**
        $T := T \cup \{e\}$
    end if
end for
return T

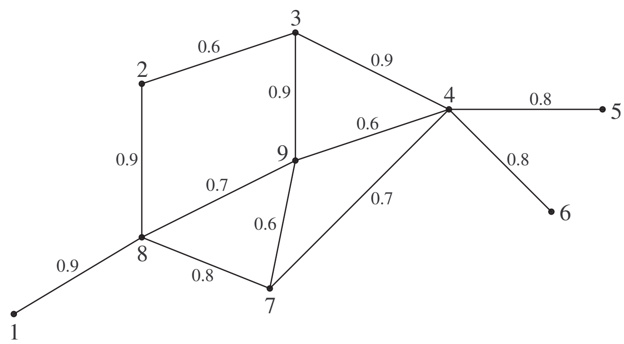
Maybe-MST-C(G, w)
$T := \emptyset$
for $e \in E$ (in einer beliebigen Reihenfolge) **do**
    $T := T \cup \{e\}$
    if T enthält einen Zyklus c **then**
        sei e_0 eine Kante von c mit maximalem Gewicht
        $T := T \setminus \{e_0\}$
    end if
end for
return T

Aufgabe 40:

Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Jeder Kante $(u, v) \in E$ ist ein reeller Wert $r(u, v)$ mit $0 \leq r(u, v) \leq 1$ zugeordnet, der die Zuverlässigkeit einer Datenübertragung vom Knoten u zum Knoten v darstellt. Wir interpretieren $r(u, v)$ als die Wahrscheinlichkeit, dass der Kanal von u nach v nicht versagt. Weiters setzen wir voraus, dass diese Wahrscheinlichkeiten paarweise unabhängig sind.

a Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der den zuverlässigsten Kanal zwischen zwei gegebenen Knoten bestimmt.

b Wenden Sie diesen Algorithmus auf folgenden Graphen an, um einem möglichst zuverlässigen Kommunikationskanal zwischen dem Knoten 1 und 5 herzustellen, wobei die Wahrscheinlichkeiten $r(u, v)$ bei den entsprechenden Kanten angegeben sind.



Hinweis: Dijkstra Algorithmus.

Aufgabe 41:

Beweisen Sie, dass ein Unabhängigkeitssystem (E, S) genau dann ein Matroid ist, wenn für alle $A \subseteq E$ gilt, dass alle maximalen unabhängigen Teilmengen von A gleichmächtig sind.

Aufgabe 42:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und k eine beliebige nichtnegative ganze Zahl. Ferner sei $M_k(G) = (E, S)$. Die Menge S sei definiert als die Menge aller Teilmengen von E, die sich in der Form $M \cup F$ darstellen lassen, wobei M eine höchstens k-elementige Menge bezeichnet und F eine Menge, für die (V, F) ein Wald ist. Beweisen Sie, dass $M_k(G)$ ein Matroid ist.