2. Übungstest Analysis 2

16. 5. 2019

1 (10P): Für welchen Wert des Parameters a ist das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = (2xy, x^2 + az, -y)$$

ein lokales Gradientenfeld? Bestimmen Sie für diesen Parameter eine Stammfunktion von f.

$$\frac{\partial f}{\partial z} e_1 = \frac{\partial f}{\partial x} e_3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} e_1 = \frac{\partial f}{\partial x} e_2 = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} e_2 = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} e_3 = -1$$

f ist also genau für $a = -1$ ein lokales Gradientenfeld.
Für Stammfunktion F von f gilt für $a = -1$:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= \int f(x, y, z) e_1 \, dx + c_1(y, z) = \int 2xy \, dx + c(y, z) = x^2 y + c_1(y, z) \\ &= \int x^2 - z \, dy + c_2(x, z) = x^2 y - yz + c_2(x, z) \\ &= \int -y \, dz + c_3(x, y) = -yz + c_3(x, y) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Also $F(x, y, z) = x^2 y - yz + c$ ist Stammfunktion v. f, c beliebig.

2 (10P): Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{z^2 + 2}{(z-1)^2} \, dz$$

für den Weg $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma(t) = 1 + e^{it}$ mithilfe der Cauchy'schen Integralformel und direkt (d.h. ohne Cauchy'scher Integralformel).

Lösung: Mit CIF: Für $f(z) = z^2 + 2$ ist das Integral nach der CIF

$$\frac{2\pi i f'(1)}{1!} = 4\pi i.$$

Direkt:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{z^2 + 2}{(z-1)^2} \, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e^{it})^2 + 2}{e^{2it}} i e^{it} \, dt = i \int_0^{2\pi} \frac{3 + 2e^{it} + e^{2it}}{e^{it}} \, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} 3e^{-it} + 2 + e^{it} \, dt = i \left(\frac{3}{-it} e^{-it} + 2t + \frac{e^{it}}{i} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi i. \end{aligned}$$