# ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020
# BLATT 11 (10. 12. 2020)

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

**1.** Seien $T > 0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, wobei $G := \Omega \times (0, T]$ und $\Gamma := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T))$. Betrachten Sie die Differentialoperatoren

$$L_1 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

und $L_2 u = L_1 u + c(x,t)u$, für eine symmetrische und gleichmäßig elliptische Matrix $A = (a_{ij}(x,t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} \in C(\overline{G})$, einen Vektor $b = (b_i(x,t)) \in \mathbb{R}^n$ und $c \in C(\overline{G})$. Zeigen Sie:

(i) Für $u \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $u_t + L_2 u \leq 0$ in $G$ und $u \leq 0$ auf $\Gamma$, dass $u \leq 0$ in G.
**Hinweis:** *Beachten Sie, dass c negative Werte annehmen darf. Welche Differentialungleichung erfüllt* $v = e^{\lambda t} u$*?*

(ii) Für $u, v \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ mit

$$u_t + L_1 u + f(x,t,u) \leq v_t + L_1 v + f(x,t,v) \quad \text{ in } G \text{ und } u \leq v \text{ auf } \Gamma$$

gilt $u \leq v$ in G.

(iii) Für eine stetig differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ gilt, dass das Anfangsrandwertproblem für die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_t + L_1 u + f(x,t,u) = 0 & \text{in } G, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

höchstens eine klassische Lösung haben kann.

**2.** Betrachten Sie die skalare Reaktions-Diffusionsgleichung

$$u_t = \Delta u + \lambda u - u^3 \quad \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

für $u(x,t) \in \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ und einem negativen Parameter $\lambda$.

(i) Bestimmen Sie die räumlich homogenen Lösungen $u = u(t)$ und untersuchen Sie deren asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$.
*Hinweis:* Die räumlich homogenen Lösungen erfüllen eine gewöhnliche DGl. Bestimmen Sie die Stationärzustände dieser DGl und deren Stabilität.

(ii) Betrachten Sie das ARWP mit der Randbedingung

$$u(x,t) = 0 \text{ für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

und beschränkten Anfangsdaten

$$m \le u(x,0) \le M \text{ für alle } x \in \Omega\,.$$

Zeigen Sie, dass klassische Lösungen $u(x,t)$ des ARWP und die räumlich homogenen Lösungen $\underline{u}(t)$ bzw. $\overline{u}(t)$ von dem ARWP mit Anfangsbedingungen $\underline{u}(0) = \min\{0, m\}$ bzw. $\overline{u}(0) = \max\{0, M\}$ die Ungleichungen

$$\underline{u}(t) \le u(x,t) \le \overline{u}(t) \quad \text{für } x \in \Omega\,,\ t \ge 0\,,$$

erfülllen.

(iii) Was können Sie aus diesen Ungleichungen für das zeitlich asymptotische Verhalten von klassischen Lösungen $u(x,t)$ des ARWP schließen?

**3.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und sei $u$ eine klassische Lösung des parabolischen Problems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\,,\\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\,,\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega\,, \end{cases}$$

wobei $u_0 \ge 0$ in $\Omega$ und $c \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie: $u \ge 0$ in $\Omega \times (0,\infty)$. *Achtung:* $c$ ist also nicht notwendig nichtnegativ!

*Hinweis:* Welche Differentialgleichung löst $v = \exp(\lambda t)u$?

**4.** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $g, u_0 \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass das semilineare Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta(u^\alpha) = g(x) & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\,,\\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\,,\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega\,, \end{cases}$$

höchstens eine nichtnegative Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ besitzt.

*Hinweis:* Betrachten Sie zwei Lösungen $u$ und $v$ des obigen Anfangsrandwertproblems und benutzen Sie die Lösung $w(t)$ von

$$\Delta w(t) = u(t) - v(t) \quad \text{in } \Omega\,, \quad w(t) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

als Testfunkton.

**Exercises "bumped" to next week (i. e. to be handed-in on 19.12.2020):**

**5.** Sei $u$ eine klassische Lösung der *Telegraphengleichung*

$$\begin{cases} u_{tt} + du_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega\,,\ t > 0\,,\\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,,\ t > 0\,,\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega\,,\\ u_t(\cdot,0) = u_1 & \text{in } \Omega\,, \end{cases}$$

wobei $d > 0$ konstant, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist.

(i) Zeigen Sie durch eine formale Rechnung, dass die Energie $\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)dx$ uniform beschränkt in $t \in (0, \infty)$ ist.
(ii) Bestimmen Sie formal eine Lösung bzgl. eines geeigneten ONS.
(iii) Zeigen Sie, dass $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}$ exponentiell schnell für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, falls $u_1 = 0$. Gilt diese Aussage auch für $d = 0$?

**6.** Betrachten Sie die lineare Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3\,, \\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3\,. \end{cases}$$

Leiten Sie die *Kirchhoffsche Formel*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} u_1(y)ds(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_0(y)ds(y)\right)$$

für die Lösung der Wellengleichung her, wobei $B(x,t)$ die Kugel mit Mittelpunkt $x$ und Radius $t$ ist.
*Hinweis:* Betrachten Sie für eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ die Mittelwerte

$$\begin{aligned} U(x,r,t) :=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y,t)ds(y), \\ G(x,r) :=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_0(y)ds(y), \\ H(x,r) :=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_1(y)ds(y). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^3$ der Mittelwert $U \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$ die *Euler-Poisson-Darboux-Gleichung*

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{2}{r}U_r = 0 & \text{für } (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \\ U(r,0) = G & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \\ U_t(r,0) = H & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \end{cases}$$

erfüllt und $\tilde{U} := rU$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{für } (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \\ \tilde{U}(r,0) = rG & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \\ \tilde{U}_t(r,0) = rH & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \\ \tilde{U}(0,t) = 0 & \text{für } t \in (0,\infty)\,. \end{cases}$$