Partielle Differentialgleichungen

1. Übung am 1.10.2020

Richard Weiss Florian Schager Paul Winkler

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Operatornorm von

$$T : \ell^2 \to \ell^1, \quad Tx = (x_1, x_2/2, x_3/3, x_4/4, \ldots)..$$

Lösung. Wir zeigen, dass die Operatornorm $\|T\| = \pi/\sqrt{6}$ ist.
Sei dazu $x \in \ell^2$. Laut der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt folgende Abschätzung.

$$\|Tx\|_1^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right|\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \left|\frac{1}{n}\right|\right)^2 \overset{\text{CSB}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)}_{\|x\|_1^2} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)}_{\pi^2/6}$$

Dadurch erhalten wir eine Abschätzung nach oben für die Operatornorm von T.

$$\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_1}{\|x\|_2} : x \in \ell^2 \setminus \{0\} \right\} \leq \pi/\sqrt{6}$$

Für die andere Ungleichung, betrachten wir die Folge $x := (1/n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

$$\implies Tx = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1 \implies \|T\| \geq \frac{\|Tx\|_1}{\|x\|_2} = \pi/\sqrt{6}$$

$\square$

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{P}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ der normierte Vektorraum aller Polynome $p : [0,1] \to \mathbb{K}$. Ist die Abbildung $D : \mathcal{P}([0,1]) \to \mathcal{P}([0,1]), Dp = p'$ beschränkt? Wenn ja, berechnen Sie $\|D\|$.

Lösung. Wir zeigen, dass der Operator D auf $\mathcal{P}([0,1])$ unbeschränkt ist.
Dazu, definieren wir die folgenden Polynome.

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1 \\ p_1(x) &:= 1/2 + x/2 \\ p_2(x) &:= 1/3 + x/3 + x^2/3 \\ &\vdots \\ p_n(x) &:= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ berechnen wir die Norm von p_n ...

$$\|p_n\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |p_n(x)| = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

... und dessen Ableitung $p_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ix^i}{n+1}$ ...

$$\|p_n'\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |p_n'(x)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2} = n/2.$$

Damit, kann $\|D\|$ beliebig groß werden.

$$\implies \|D\| := \sup\left\{\frac{\|Dp\|_\infty}{\|p\|_\infty} : p \in \mathcal{P}([0,1]) \setminus \{0\}\right\} \geq \frac{\|p_n'\|_\infty}{\|p_n\|_\infty} = n/2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Paul's elegantere Polynome: Monome

$\square$

Aufgabe 3. Beweisen Sie mithilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)} \leq 2(x+y+z)$$

Lösung.

$$\begin{aligned} a &:= \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)^T, \\ b &:= \left(\sqrt{3x+y}, \sqrt{3y+z}, \sqrt{3z+x}\right)^T, \end{aligned}$$

$$\implies \text{lhs} = (a,b) \overset{\text{CSB}}{\leq} \|a\|_2\|b\|_2 = (x+y+z)^{1/2}(4(x+y+z))^{1/2} = 2(x+y+z)$$

Richard's FAIL:

Bezeichne $(\cdot,\cdot)$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$. Der Übersicht halber definieren wir noch $a, b \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} a &:= \left(\sqrt{x(3x+y)}, \sqrt{y(3y+z)}, \sqrt{z(3z+x)}\right)^T, \\ b &:= (1,1,1)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \text{lhs} = (a,b) \overset{\text{CSB}}{\leq} \|a\|_2\|b\|_2 &= (\underbrace{1^2+1^2+1^2}_{3})^{1/2}(\underbrace{x(3x+y)}_{3x^2+xy} + \underbrace{y(3y+z)}_{3y^2+yz} + \underbrace{z(3z+x)}_{3z^2+zx})^{1/2} \\ &\overset{!}{\leq} \sqrt{3}\sqrt{3}(\underbrace{x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2zx}_{(x+y+z)^2})^{1/2} \overset{!}{=} \text{rhs} \end{aligned}$$

Bei dem ersten „!“, verlangen wir, dass $xy, yz, zx \geq 0$; Bei dem zweiten, gehen wir davon aus, dass in der Angabe ein 3er statt einem 2er stehen sollte.

$\square$

Aufgabe 4. Beweisen Sie mithilfe der hölderschen Ungleichung:

$$4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3 \qquad (a,b \geq 0)$$

Lösung. Bezeichne $(\cdot,\cdot)$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$. Der Übersicht halber definieren wir noch $x=(a,b)^T, y=(1,1)^T \in \mathbb{R}^2$. Weiters, wählen wir $p:=3$ und die entsprechende Hölder-Konjugierte q.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \overset{!}{=} 1 \iff q := \frac{1}{1-1/p} = \frac{p}{p-1} = 3/2$$

$$\implies \text{rhs} = (x,y)^3 \overset{\text{Hölli}}{\leq} \|x\|_3^3\|y\|_{3/2}^3 = (|a|^3+|b|^3)\underbrace{\left(\left(|1|^{3/2}+|1|^{3/2}\right)^{2/3}\right)^3}_{4} = \text{lhs}$$

□

Aufgabe 5. Beweisen Sie mithilfe der jensenschen Ungleichung die youngsche Ungleichung für Produkte ($1<p,q<\infty$ mit $1/p+1/q=1$):

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \qquad (a,b\geq 0).$$

Lösung. Wegen der Konkavität des ln, und $1/p+1/q=1$, folgt mit der jensenschen Ungleichung

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \overset{\text{Jens}}{\leq} \ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right).$$

.
Aus der Monotonie der exp erhält man daraus die youngsche Ungleichung.

□

Aufgabe 6. Lösen Sie die homogene eulersche Differentialgleichung

$$a_2x^2y''(x)+a_1xy'(x)+a_0y(x)=0$$

mit $a_2,a_1,a_0 \in \mathbb{R}$ durch die Transformation $z(t)=y(e^t)$.

Lösung. Wir wollen eine ODE lösen, in der z,z',z'' vorkommen. Man kann aber nicht einfach bei den Ableitungen e^t für x substituieren. Das liegt daran, dass $y'=y'$, wir wollen aber eigentlich (z) nach t ableiten. Aushilfe bietet die Kettenregel ...

$$\begin{aligned}
z(t) = y(e^t) &\iff y(e^t) = z(t) \\
z'(t) = y'(e^t)e^t &\iff y'(e^t) = z'(t)e^{-t} \\
z''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y'(e^t)e^t\right] = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y'(e^t)\right]}_{y''(e^t)e^t} e^t + \underbrace{y'(e^t)}_{z'(t)e^{-t}} e^t &\iff y''(e^t) = (z''(t)-z'(t))e^{-2t}
\end{aligned}$$

JETZT können wir endlich substituieren.

$$\begin{aligned}\text{rhs} = a_2(e^t)^2 y''(e^t) + a_1 e^t y'(e^t) + a_0 y(e^t) &= a_2 e^{2t}(z''(t) - z'(t))e^{-2t} + a_1 e^t z'(t) e^{-t} + a_0 z(t) \\ &= a_2 z''(t) + (a_1 - a_2) z'(t) + a_0 z(t)\end{aligned}$$

Diese ODE lässt sich nun leicht lösen.

$$Z := (z, z')^T \implies Z'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & \frac{a_2 - a_1}{a_2} \end{pmatrix}}_{=:A} Z(t) \implies Z(t) = e^{tA}$$

Wenn man das z gefunden hat, muss man nur noch rücksubstituieren.

$$z(t) = y(e^t) \iff z(\ln x) = y(x)$$

$\square$

Aufgabe 7. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(0, x) = g(x)$$

für $u : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, wobei $g \in C^3(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass bei $t = 0$ die Funktionen u_t, u_x, u_{xx} und u_{tx} schon durch g bestimmt sind.

Lösung.

$$\implies g'(x) = u_x(0, x) \implies \exists!_{\,t=0} \; u_x \implies \exists!_{\,t=0} \; u_{xx} = u_t \implies \exists!_{\,t=0} \; u_{tx}$$

$\square$

Aufgabe 8. ToDo!

Lösung. ToDo!

$\square$

Aufgabe 9. (i) Zeigen Sie, dass für fixes $\lambda = \mu^2 > 0$ die Funktion

$$w(x, y) = (Ax + B)(C \cos \mu y + D \sin \mu y)$$

mit beliebigen Konstanten A, B, C, D die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = 0$$

löst.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$w(x,y,z,t) = \frac{A}{(t-t_0)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a(t-t_0)}\right]$$

mit beliebigen Konstanten $A, t_0, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

(mit $a \in \mathbb{R}$) löst.

Lösung. (i)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) &= A(C\cos\mu y + D\sin\mu y)\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) &= 0\\
\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) &= (Ax+B)(-\mu C\sin\mu y + \mu D\cos\mu y)\\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) &= (Ax+B)(-\mu^2 C\cos\mu y - \mu^2 D\sin\mu y) = -\lambda w(x,y)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y)}_{-\lambda w(x,y)} + \lambda w(x,y) = 0$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z,t) &= w(x,y,z,t)\frac{-2(x-x_0)}{4a(t-t_0)}\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y,z,t) &= w(x,y,z,t)\frac{4(x-x_0)^2}{16a^2(t-t_0)^2} + w(x,y,z,t)\frac{-1}{2a(t-t_0)} = w(x,y,z,t)\frac{1}{2a(t-t_0)}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right)\\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y,z,t) &= \cdots = w(x,y,z,t)\frac{1}{2a(t-t_0)}\left(\frac{(y-y_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right)\\
\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(x,y,z,t) &= \cdots = w(x,y,z,t)\frac{1}{2a(t-t_0)}\left(\frac{(z-z_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right)\\
\frac{\partial w}{\partial t}(x,y,z,t) &= \frac{A}{(t-t_0)^{5/2}}(-3/2)\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a(t-t_0)}\right] +\\
&\quad \frac{A}{(t-t_0)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a(t-t_0)}\right]\left(-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a(t-t_0)^2}\right)(-1)\\
&= w(x,y,z,t)\frac{1}{t-t_0}\left(-3/2 + \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a(t-t_0)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \text{rhs} = a\Bigg(& w(x,y,z,t)\frac{1}{2a(t-t_0)}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right) + \\
& w(x,y,z,t)\frac{1}{2a(t-t_0)}\left(\frac{(y-y_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right) + \\
& w(x,y,z,t)\frac{1}{2a(t-t_0)}\left(\frac{(z-z_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right)\Bigg) \\
& = w(x,y,z,t)\frac{1}{2(t-t_0)}\left(\left(\frac{(x-x_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right) + \left(\frac{(y-y_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right) + \left(\frac{(z-z_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1\right)\right) = \text{lhs}
\end{aligned}$$

$\square$

Partielle Differentialgleichungen - Übung

2. UE am 8.10.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. Bestimmen und skizzieren Sie diejenigen Gebiete in R^2, fur welche die folgenden Differentialgleichungen jeweils elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind:

(i) $(y^2+1)u_{xx} + 2xu_{xy} + 9u_{yy} - uu_y = y^2 - x$,

(ii) $xu_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + xu_x = 1$.

Lösung. Wir erinnern uns an die allgemeine Form aus dem Skriptum (bzw. der Vorlesung) ...

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f, \tag{2.7}$$

... und an die Definitionen von elliptisch, parabolisch und hyperbolisch ...

2-6.png

Definition 2.6. *Die Klassifikation der Gleichung* (2.7) *lautet wie folgt:*

- *Falls* $b^2 - ac < 0$ *an der Stelle* (x, y), *so heißt* (2.7) elliptisch *an* (x, y).
- *Falls* $b^2 - ac > 0$ *an der Stelle* (x, y), *so heißt* (2.7) hyperbolisch *an* (x, y).
- *Falls* $b^2 - ac = 0$ *an der Stelle* (x, y), *so heißt* (2.7) parabolisch *an* (x, y).

(i)

$$\begin{aligned} a &= y^2 + 1 \\ b &= x \\ c &= 9 \\ f &= y^2 - x + uu_y \end{aligned}$$

$$0 \stackrel{!}{=} b^2 - ac = x^2 - 9(y^2+1) \implies x = \pm 3\sqrt{y^2+1}$$

(ii)

$$\begin{aligned} a &= x \\ b &= y \\ c &= 1 \\ f &= 1 - xu_x \end{aligned}$$

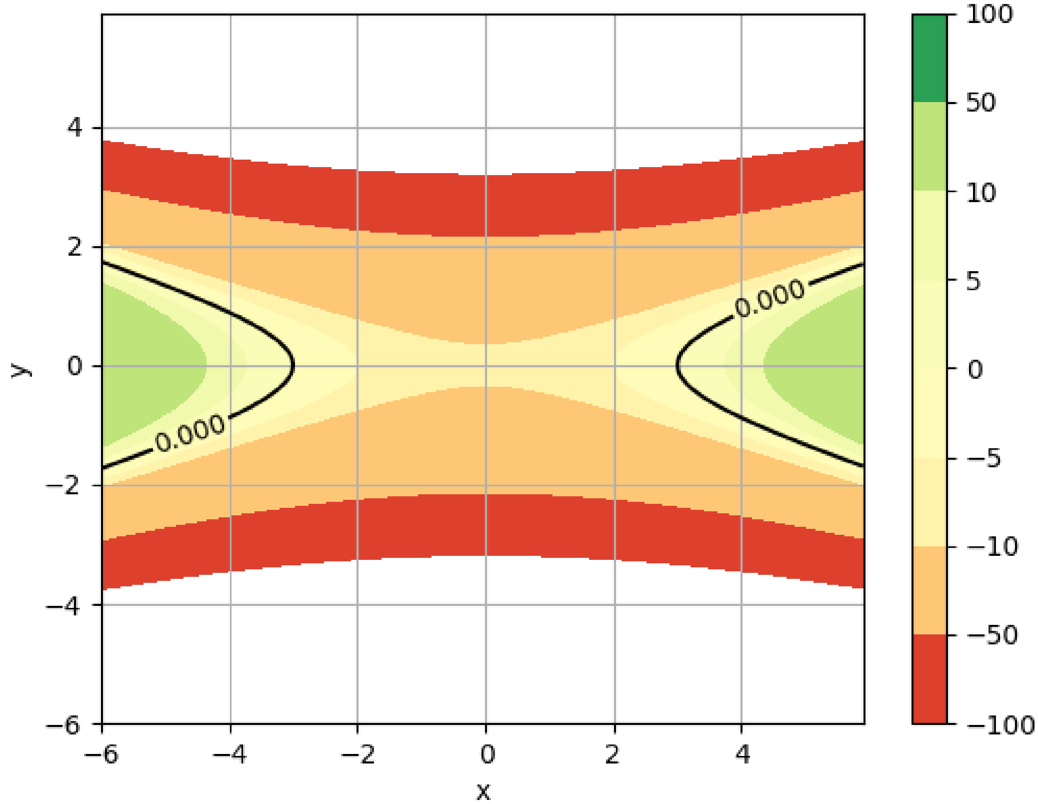


Abbildung 1: $x = \pm 3\sqrt{y^2+1}$

$$0 \overset{!}{=} b^2 - ac = y^2 - x \implies x = y^2$$

Die PDEs sind

- parabolisch auf dem graphen,
- hyperbolisch darunter, und
- elliptisch darunter.

Aufgabe 2. (i) Lösen Sie das Randwertproblem für die Laplacegleichung in ebenen Polarkoordinaten

$$(\Delta u)(r, \varphi) = 0 \text{ für } r < R,$$
$$u(R, \varphi) = f(\varphi) \text{ für alle } \varphi,$$

wobei

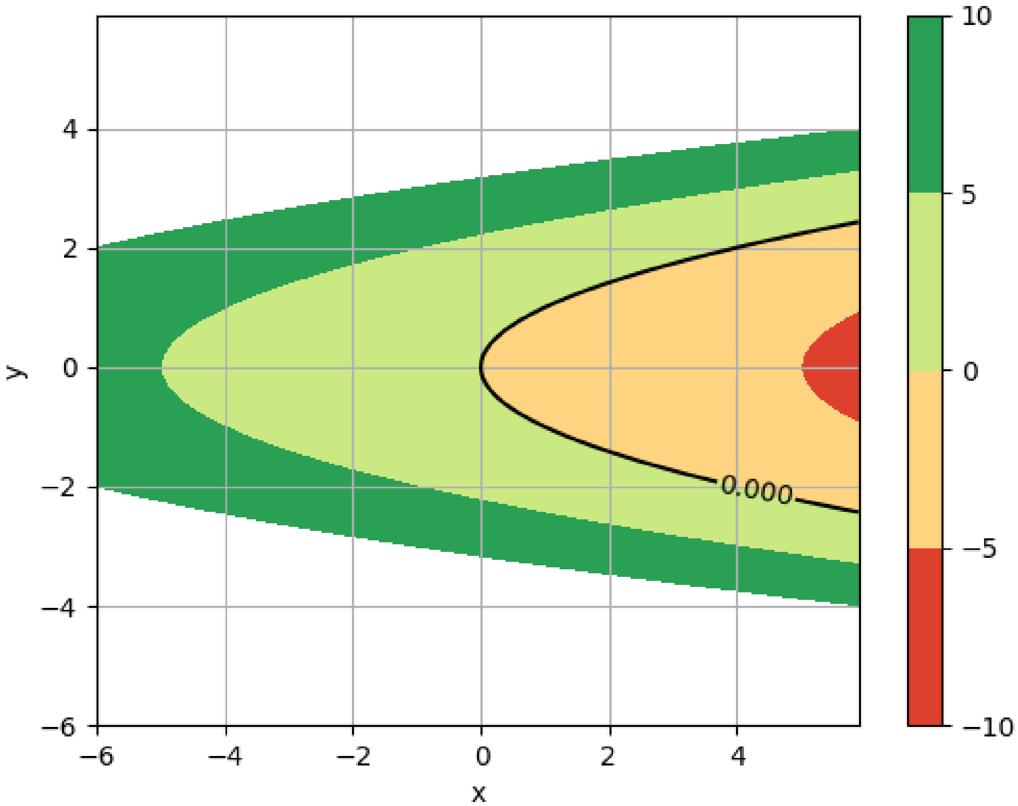


Abbildung 2: $x = y^2$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$$

der Laplaceoperator in Polarkoordinaten, $R > 0$ eine positive Konstante und f eine stückweise stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion ist?

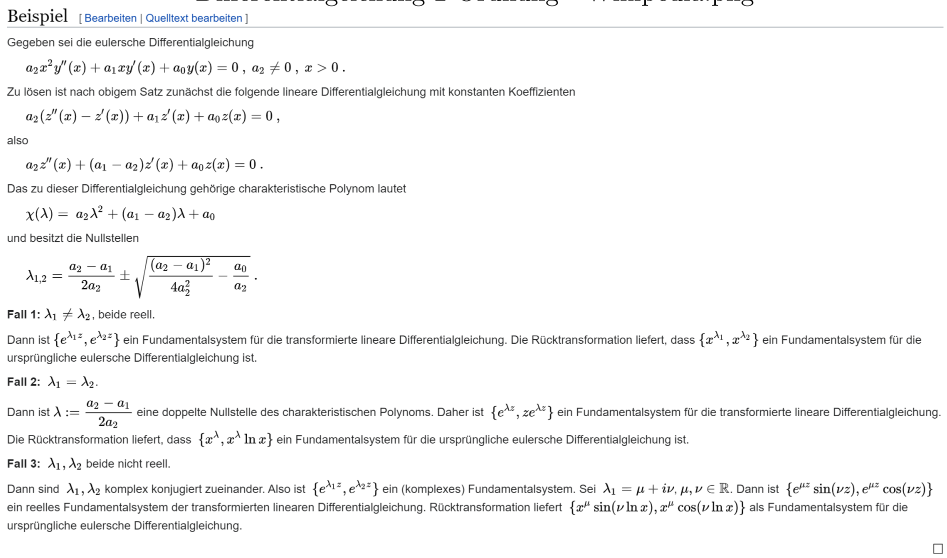
(ii) Wie sieht die Lösung konkret im Fall

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0 & \varphi = 0, \pi \\ 1 & 0 < \varphi < \pi \\ -1 & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

mit $R = 1$ aus?

Hinweis: Verwenden Sie einen Separationsansatz. Betrachten Sie dazu zunächst Einzellösungen u_n der Gestalt $u_n(r, \varphi) = v_n(r) \cdot w_n(\varphi)$ (mit w_n 2π-periodisch), welche die Differentialgleichung erfüllen und insbesondere C^2 im Nullpunkt sind. Die gesuchte Gesamtlösung ergibt sich dann als Summe über die Einzellösungen u_n mit geeigneten Koeffizienten. Falls Sie dabei auf die homogene eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung stoßen, verwenden Sie Aufgabe 6 von Blatt 1 oder schlagen sie in einer beliebigen Quelle ein Fundamentalsystem von Lösungen nach.

Differentialgeichung 2-Ordnung - Wikipedia.png



Beispiel [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Gegeben sei die eulersche Differentialgleichung

$$a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0\,,\ a_2 \neq 0\,,\ x > 0\,.$$

Zu lösen ist nach obigem Satz zunächst die folgende lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a_2(z''(x) - z'(x)) + a_1 z'(x) + a_0 z(x) = 0\,,$$

also

$$a_2 z''(x) + (a_1 - a_2) z'(x) + a_0 z(x) = 0\,.$$

Das zu dieser Differentialgleichung gehörige charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = a_2 \lambda^2 + (a_1 - a_2)\lambda + a_0$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_2 - a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{(a_2 - a_1)^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}\,.$$

Fall 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, beide reell.

Dann ist $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ ein Fundamentalsystem für die transformierte lineare Differentialgleichung. Die Rücktransformation liefert, dass $\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}\}$ ein Fundamentalsystem für die ursprüngliche eulersche Differentialgleichung ist.

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2$.

Dann ist $\lambda := \frac{a_2 - a_1}{2a_2}$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Daher ist $\{e^{\lambda z}, z e^{\lambda z}\}$ ein Fundamentalsystem für die transformierte lineare Differentialgleichung. Die Rücktransformation liefert, dass $\{x^\lambda, x^\lambda \ln x\}$ ein Fundamentalsystem für die ursprüngliche eulersche Differentialgleichung ist.

Fall 3: λ_1, λ_2 beide nicht reell.

Dann sind λ_1, λ_2 komplex konjugiert zueinander. Also ist $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ ein (komplexes) Fundamentalsystem. Sei $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{e^{\mu z}\sin(\nu z), e^{\mu z}\cos(\nu z)\}$ ein reelles Fundamentalsystem der transformierten linearen Differentialgleichung. Rücktransformation liefert $\{x^\mu \sin(\nu \ln x), x^\mu \cos(\nu \ln x)\}$ als Fundamentalsystem für die ursprüngliche eulersche Differentialgleichung.

□

Abbildung 3: Lösen einer Eulerschen Differentialgleichung 2. Ordnung nach Wikipedia

Lösung. (i) Wir machen den Ansatz $u(r, \varphi) = v(\varphi)w(\varphi)$. Einsetzen in die PDE liefert Folgendes.

$$v_{rr}(r)w(\varphi) + \frac{1}{r}v_r(r)w(\varphi) + \frac{1}{r^2}v(r)w_{\varphi\varphi}(\varphi) = 0 \implies \frac{r^2 v_{rr}(r) + r v_r(r)}{v(r)} = -\frac{w_{\varphi\varphi}(\varphi)}{w(\varphi)} = \lambda_{r,\varphi}$$

Da die linke Seite nur von r und die rechte Seite nur von φ abhängt, ist $\lambda := \lambda_{r,\varphi}$ konstant. Wir erhalten also zwei Differentialgleichung. Die w-ODE lautet wie folgt (mit dem charakteristischen Polynom χ).

$$w_{\varphi\varphi} + \lambda w = 0, \quad \chi(\mu) = \mu^2 + \lambda$$

Für $\lambda \neq 0$ erhalten wir die folgende Lösung.

$$w(\varphi) = c_1 \exp\left(i\varphi\sqrt{\lambda}\right) + c_2 \exp\left(-i\varphi\sqrt{\lambda}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Die Lösung soll 2π-periodisch sein, also $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, also $\lambda = n^2$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Weil $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}$, dürfen wir ein trigonometrisches Fundamentalsystem wählen. Wir schreiben die möglichen Lösungen wie folgt an. (Für $-n \in \mathbb{N}$, können wir das -1 aus dem sin ziehen und in das $c_{n,1}$ stecken und der cos schluckt es sowieso.)

$$w_n(\varphi) = c_{n,1}\cos(n\varphi) + c_{n,2}\sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}, c_{n,1}, c_{n,2} \in \mathbb{R}$$

Sei nun $\lambda = 0$.

$$\implies w_{\varphi\varphi} = 0 \implies w(\varphi) = \left(\int\int w_{\varphi\varphi}(\phi)\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\phi\right)(r) = c_{0,1}\varphi + c_{0,2}, \quad c_{0,1}, c_{0,2} \in \mathbb{R}$$

Davon sind aber bloß die konstanten Funktionen 2π-periodische Lösungskandidaten. Daher, muss $c_{0,1} = 0$.

Wir widmen uns nun der φ-ODE. Diese ist eine homogene eulersche Differentialgeichung.

$$a_2 r^2 v_{rr} + a_1 r v_r + a_0 v = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = -\lambda$$

Wie wir solch eine Differentialgleichung lösen wissen wir schon von Blatt 1 Aufgabe 6, oder Wikipedia also Abbildung 3 (oder beides).

$$\frac{1}{2a_2}\left(a_2 - a_1 \pm \sqrt{(a_2 - a_1)^2 - 4a_2a_0}\right) = \pm\sqrt{\lambda}$$

Für $\lambda \neq 0$, muss $\sqrt{\lambda} \neq -\sqrt{\lambda}$, und wir erhalten wir die folgende Lösung. (Für $-n \in \mathbb{N}$, vertauschen die Konstanten $c_{n,3}$ und $c_{n,4}$.)

$$v_n(r) = c_{n,3}r^n + c_{n,4}r^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_{n,3}, c_{n,4} \in \mathbb{R}$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir

$$v_n(r) = c_{n,3}r^n + c_{n,4}r^n \ln r, \quad n = 0, \quad c_{n,3}, c_{n,4} \in \mathbb{R}$$

u soll nun C^2 im Nullpunkt sein. Dort ist allerdings v_n nur definiert, falls $c_{n,4} = 0$. Insgesamt liefert der Separationsansatz folgende Lösungskandidaten.

$$\begin{gathered} u_n(r,\varphi) = v_n(r)w_n(\varphi) = c_{n,3}r^n(c_{n,1}\cos(n\varphi) + c_{n,2}\sin(n\varphi)) = r^n(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)), \\ n \in \mathbb{N}, \quad c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3} \in \mathbb{R}, \quad a_n := c_{n,3}c_{n,1}, \quad b_n := c_{n,3}c_{n,2} \\ u_0(r,\varphi) = v_0(r)w_0(\varphi) = c_{0,3}c_{0,2} =: a_0, \\ c_{0,3}, c_{0,2} \in \mathbb{R}, \end{gathered}$$

Weil jeder einzelne dieser Lösungskandidaten seinen Beitrag leisten könnte, summieren wir diese und hoffen (durch die Koeffizienten) auf das Beste. (Sei dabei $b_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Es leistet aber keinen Beitrag und dient nur zur Formalität.)

$$u(r,\varphi) \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} r^n(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))$$

Korollar 3.1.9. *Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion f konvergiert ihre Fourierreihe in allen Punkten x_0 gegen $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.*

Abbildung 4: Blümlinger - Analysis 3

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ n \geq 0,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,\ n \geq 1,$$

Abbildung 5: Fourier-Cheat-Sheet

Wir wollen nun noch die Koeffizienten bestimmen.

Wir berechnen also deren Fourierkoeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$, $n \in \mathbb{N}$, frei nach Abbildung 5. Es muss auf jeden Fall $\tilde{a}_0 = 0$, ansonsten gibt's ein kleines Problem!

Die offiziellen Koeffizienten bekommen wir nun durch normalisieren. (Wir wollen schließlich die Randbedingung $u(R,\cdot) = f$ gewährleisten.)

$$a_n := \frac{\tilde{a}_n}{R^n}, \quad b_n := \frac{\tilde{b}_n}{R^n}$$

ToDo:

- „Wohldefiniertheit“: Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ fest. Laut Abbildung 4, konvergiert die Fouriereihe von $u(R,\cdot) = f$. Diese kann man (für jenes feste φ) als Potenzreihe in R auffassen. Weil diese ja in R konvergiert, hat sie auch einen (sogar noch) größeren Konvergenzradius. Insbesondere konvergiert auch (die Potenzreihe) $u(r,\varphi)$.
- „Ableitung“: Weil $u(r,\varphi)$ als Potenzreihe absolut und somit gleichmäßig konvergiert, dürfen wir Limitten, also auch Ableitungsoperatoren hineinziehen.

$$\begin{aligned}
\implies (\Delta u)(r,\varphi) &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)r^{n-2}(a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-2}(a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) \\
&- \sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{n-2}(a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)r^{n-2} + nr^{n-2} - n^2 r^{n-2})(a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) = 0
\end{aligned}$$

- „Randbedingung“: Das folgt unmittelbar aus der „Wahl“ der Fourierkoeffizienten.

(ii)

$$u(R,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi))$$

Nachdem f ungerade ist, fallen die cos-Koeffizienten weg, und wir müssen nur noch die sin-Koeffizienten berechnen. Außerdem, ist ja $R = 1$; wir können R^n also getrost weglassen. $\forall\, n \in \mathbb{N}:$

$$\begin{aligned}
a_n &= 0,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \underbrace{f(\varphi)}_{1} \sin(n\varphi)\ \mathrm{d}\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{f(\varphi)}_{-1} \sin(n\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(n\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\pi} + \frac{1}{n}\cos(n\varphi)\Big|_{\varphi=\pi}^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi + \cos 2n\pi - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \in 2\mathbb{N},\\ \frac{4}{n\pi}, & n \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um den Nullpunkt und $g, f \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachten Sie das Cauchyproblem

$$u_t + g(u)u_x = 0, \quad u(0,x) = f(x)$$

für $(t,x) \in I \times \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie die Charakteristiken und überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen für den Existenzsatz 2.3 erfüllt sind.

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

mit den Anfangsdaten $u(0,x) = -x$ und geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an. Skizzieren Sie die Charakteristiken und die Lösung zu verschiedenen Zeitpunkten.

Lösung. (i) Unsere Differentialgleichung hat die Form

$$\begin{gathered}
\bar{t}(y) = 0, \bar{x}(y) = y, \bar{u}(y) = f(y),\\
\Gamma = \left\{(\bar{t}(y), \bar{x}(y)) : y \in \mathbb{R}\right\}, \quad S = \left\{(\bar{t}(y), \bar{x}(y), \bar{u}(y)) : y \in \mathbb{R}\right\},\\
a(t,x,u)u_t + b(t,x,u)u_x = c(t,x,u),\\
a(t,x,u) = 1, \quad b(t,x,u) = g(u), \quad c(t,x,u) = 0.
\end{gathered}$$

Wir haben gelernt wie man so eine Differentialgleichung mit der Charakteristikenmethode löst. Dafür lösen wir als erstes das System an Differentialgleichungen

$$\frac{\partial t}{\partial s} = a(t,x,u) = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = b(t,x,u) = g(u), \quad \frac{\partial u}{\partial s} = c(t,x,u) = 0.$$

Aus der Nebenbedingung ergeben sich für die Lösungen noch zusätzlich die Bedingungen

$$t(0,y) = \bar{t}(y) = 0, \quad x(0,y) = \overline{x}(y) = y, \quad , u(0,y) = \overline{u}(y) = f(y).$$

Die erste und letzte ODE löst man mit Integration nach s. Die Integrationskonstante ergibt sich aus dem Anfangswert.

$$\implies t(s,y) = s, \quad u(s,y) = f(y)$$

Damit, und einer weiteren Integration (einer s-Konstanten), bekommt man die Lösung der zweiten ODE.

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,y) = g(u(s,y)) = g(f(y)) \implies x(s,y) = s \cdot g(f(y)) + y.$$

Für festes y ist also eine Charakteristik gegeben durch

$$(t^{(y)}(s), x^{(y)}(s), u^{(y)}(s)) = (s, s \cdot g(f(y)) + y, f(y)).$$

Sind die Voraussetzungen von Satz 2.3 erfüllt? Wir rechnen nach.

$$\det \frac{\partial(t,x)}{\partial(s,y)} = \det \begin{pmatrix} t_s(0,y) & t_y(0,y) \\ x_s(0,y) & x_y(0,y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a(t,x,u) & \bar{t}_y(y) \\ b(t,x,u) & \overline{x}_y(y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g(f(y)) & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Und wir sehen, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, es gibt also lokal eine Lösung.

(ii) Nun haben wir es mit einem Spezialfall des bisher Betrachteten zu tun, nämlich mit $g(u) = u$ und $f(x) = -x$. Wir nützen die Ergebnisse vom vorigen Teil und erhalten

$$\begin{aligned} t(s,y) &= s, \\ x(s,y) &= s \cdot g(f(y)) + y = s \cdot g(-y) + y = -sy + y = y(1-s), \\ u(s,y) &= f(y) = -y \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} t = s &\iff s = t \\ x = y(1-s) = y(1-t) &\iff y = \frac{x}{1-t} \end{aligned}$$

und damit als Lösung

$$u(t,x) = u(s(t,x), y(t,x)) = y(t,x) = \frac{x}{t-1},$$

eine auf $(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$ definierte Funktion. Plots dazu findet man in den Abbildungen 6 und 7.

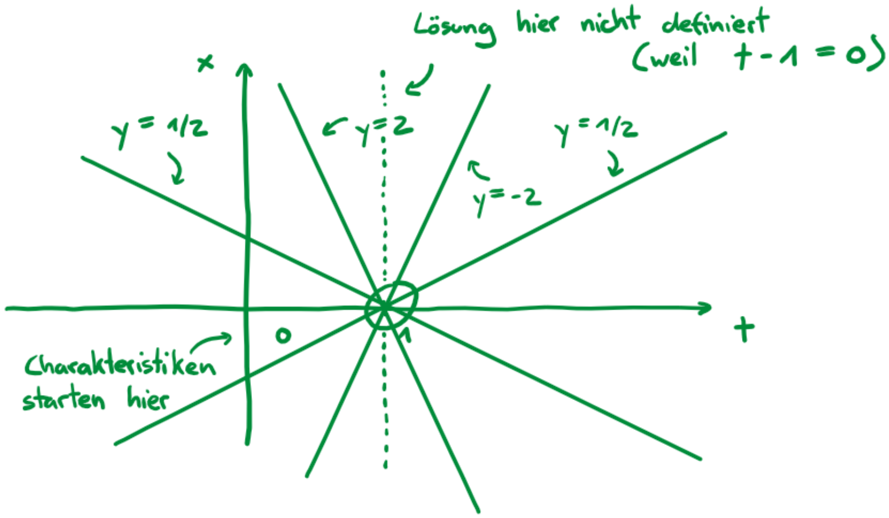


Abbildung 6: Charakteristiken von u im $\mathbb{R}^2$

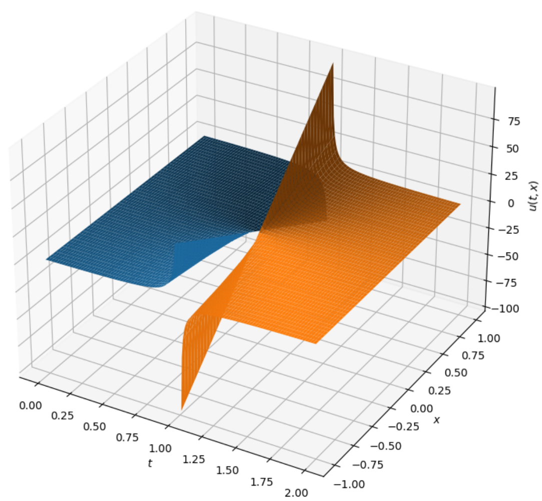


Abbildung 7: Graph von u im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 4. Lösen Sie folgendes Problem für $x > 0$ mithilfe der Methode der Charakteristiken:

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= u + 1 \\ u(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

wobei ψ eine beliebige Funktion ist.

Lösung. Wir bringen zunächst die PDE in die allgemeine Form aus dem Skript (bzw. Vorlesung).

$$a(x,y,u) = -y, \quad b(x,y,u) = x, \quad c(x,y,u) = u+1,$$
$$\overline{x}(t) = t, \quad \overline{y}(t) = 0, \quad \overline{u}(t) = \psi(t),$$
$$\Gamma = \{((\overline{x}(t), \overline{y}(t)) : t \in \mathbb{R})\} \in \mathbb{R}^2, \quad S = \{((\overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{u}(t)) : t \in \mathbb{R})\} \in \mathbb{R}^3$$

Die folgende Abbildung 8 soll die räumliche Intuition hinter der Methode der Charakteristiken wiederholen.

der Charakteristiken - Skizze.png

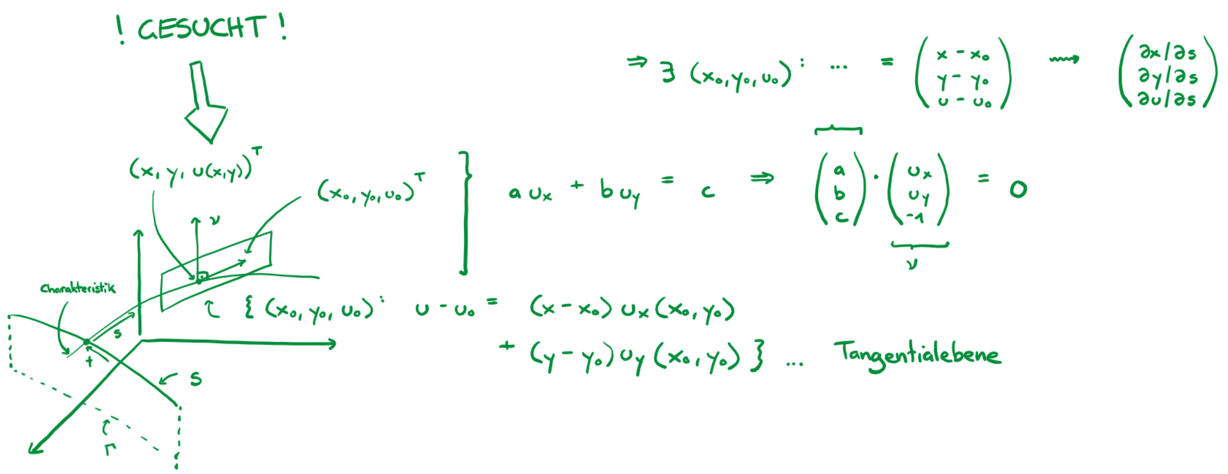


Abbildung 8: Methode der Charakteristiken - Skizze

Das dazugehorige Anfangswertproblem lautet

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a = -y, \frac{\partial y}{\partial s} = b = -x, \frac{\partial u}{\partial s} = c = u+1,$$

mit Anfangswerten

$$x(0,t) = \overline{x}(t) = t, y(0,t) = \overline{y}(t) = 0, u(0,t) = \overline{u}(t) = \psi(t).$$

Wir lösen die ODE für festes t als folgendes inhomogene lineare System mit konstanten koeffizienten.

$$v(s) := \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ u(s,t) \end{pmatrix} \implies v' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} v + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b}, \quad v(0) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

Um die partielle Lösung v zu bekommen, brauchen wir zuerst eine (alle) homogene(n). Damit, ist ein Fundamentalsystem gemeint. Nachdem die ODE konstante Koeffizienten hat, ist die Exponentialmatrix e^{sA} ein Solches. Um sie zu finden, müssen wir A diagonalisieren (oder zumindest die Jordan-Normalform finden). Dazu, berechnen wir die Eigenwerte $\lambda_{1,2,3}$ von A, als Nullstellen des Charakteristischen Polynoms χ_A. Man kann sich, durch Laplace-entwickelnnach der rechten (unteren) Spalte (Zeile) viel Arbeit ersparen.

$$\implies \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda^2) = (1-\lambda)(1-i)(1+i)$$

$$\implies \lambda_{1,2,3} = 1, \pm i$$

Die Eigenvektoren $v_{1,2,3}$ von A dürfen auch nicht fehlen. Das verläuft nach folgendem Schema $\forall\, i = 1, 2, 3:$

$$Av_i = \lambda_i v_i \iff (A - \lambda_i)v_i = 0 \iff v_i \in \ker(A - \lambda_i)$$

Konkret ...

$$A - \lambda_1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \cdots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies v_1 \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$A - \lambda_2 \mapsto \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \mapsto \cdots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies v_2 \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$A - \lambda_3 \mapsto \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \mapsto \cdots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies v_3 \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Die Eigenpaare (samt algebraischen Vielfachheiten) bekommt man auch ganz leicht mit `SymPy`.

```
A = sp.Matrix([[0, 1, 0], [-1, 0, 0], [0, 0, 1]])
display(A)

eigen_info = A.eigenvects()
display(eigen_info)
```

Wir fassen die Eigenvektoren (jeweils die angegebenen Repräsentanten) in eine Transformationsmatrix $V := (v_1, v_2, v_3)$ zusammen, und und berechnen deren Determinante. Man kann sich, durch Laplace-entwickeln nach der linken (unteren) Spalte (Zeile) viel Arbeit ersparen.

$$\implies \det V = \begin{vmatrix} 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-i-i) = 2i \neq 0$$

Nachdem die Determinante $\det V$ nicht verschwindet, muss V invertierbar sein. Wir invertieren V wie üblich: Durch Spaltenumformungen (d.h. von links drauf-multiplizieren von geeigneten regulären Permutations-Matrizen $P_1, \ldots, P_n$), so lange, bis

$$PV = I_3 \iff PI_3 = V^{-1}, \quad P := \prod_{i=1}^{n} P_i.$$

Der Übersicht halber, schreiben wir die Matrizen über bzw. unter einander.

$$\implies \left[\begin{array}{c} V \\ \hline I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{P_1}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{P_2}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\overset{P_3}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \overset{P_4}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 1/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{array}\right] \overset{P_5}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_3 \\ \hline V^{-1} \end{array}\right]$$

Also, ist A diagonalisierbar, mit

$$\implies A = V \Lambda V^{-1}, \quad \Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Somit, können wir die Exponentialmatrix (das Fundamentalsystem) e^{sA} endlich ausrechnen.

$$\begin{aligned} \implies e^{sA} = V e^{s\Lambda} V^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{is} & ie^{-is} \\ 0 & e^{is} & e^{-is} \\ e^s & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{is}}{2} + \frac{e^{-is}}{2} & -\frac{ie^{is}}{2} + \frac{ie^{-is}}{2} & 0 \\ \frac{ie^{is}}{2} - \frac{ie^{-is}}{2} & \frac{e^{is}}{2} + \frac{e^{-is}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Exponentialmatrix bekommt man auch schnell mit `SymPy`.

```
s = sp.Symbol('s')
display(s)

exp_sA = sp.exp(s * A)
display(exp_sA)
```

Die Inverse bekommt man sehr schnell.

$$\implies \left(e^{sA}\right)^{-1} = e^{-sA} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$$

Wir setzten nun in die Formel für die Partikulärlösung ein. (Das ist in Wahrheit eine Zusammenfassung der „Variation der Konstanten“.)

$$\implies \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ u(s,t) \end{pmatrix} = v(s) = e^{sA} \underbrace{\left(e^{0A}\right)^{-1}}_{I_3} v(0) + e^{sA} \int_0^s \underbrace{\left(e^{\xi A}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(0,0,e^{-\xi})^T} \mathrm{d}\xi = e^{sA} \left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \psi(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\int_0^s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\xi} \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi}_{(0,0,1-e^{-s})^T} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} t\cos s \\ t \sin s \\ e^s(\psi(t)+1)-1 \end{pmatrix} \overset{A}{\underset{\frac{\partial}{\partial s}}{\mapsto}} \begin{pmatrix} -t\sin s \\ t\cos s \\ e^s(\psi(t)+1) \end{pmatrix}$$

Wir erhalten insgesamt also folgende Lösung unserer ODE.

$$x(s,t) = t\cos s, \quad y(s,t) = t\sin s, \quad u(s,t) = e^s(\psi(t)+1)-1$$

Wir transformieren $(s,t) \mapsto (x,y)$, indem wir die ersten beiden Gleichungen nach s und t auflösen und in die dritte einsetzen. Das funktioniert, laut dem „Hauptsatz über implizite Funktionen" bzw. „Umkehrsatz" bzw. Skriptum (bzw. Vorlesung), $\forall\, t \neq 0$:

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t\sin 0 & \cos 0 \\ t\cos 0 & \sin 0 \end{vmatrix} = t \neq 0.$$

Konkret, dividieren wir die ersten beiden Gleichungen ...

$$\implies \frac{y}{x} = \frac{t}{t}\frac{\sin s}{\cos s} = \tan s \implies s = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

... und wenden die $\mathbb{R}^2$ euklidische Norm an ...

$$\implies \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(t\cos s)^2 + (t\sin s)^2} = |t| \underbrace{\sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s}}_{1}$$

Einsetzen liefert das endgültige Ergebnis.

$$\implies u(x,y) = \exp\arctan\frac{y}{x}\left(\psi\left((\operatorname{sgn} x)\sqrt{x^2+y^2}\right)+1\right)-1$$

Wir setzen $y=0$ und überprüfen die Anfangsbedingung. Damit diese auch für $x<0$ gilt, mussten wir $\operatorname{sgn} x$ einfügen. Um die Ableitung zu überprüfen, verwenden wir jetzt aber wirklich `SymPy`.

```
x, y = sp.symbols('x y')
psi = sp.Function('psi')
u = sp.exp(sp.atan(y / x)) * (psi(sp.sqrt(x**2 + y**2)) + 1) - 1
display(u)

u_x = u.diff(x).simplify()
display(u_x)

u_y = u.diff(y).simplify()
display(u_y)
```

```
lhs = -y * u_x + x * u_y
rhs = u + 1
residuum = sp.simplify(lhs - rhs)
display(residuum)
```

Lösung. Wir bringen zunächst die PDE in die allgemeine Form aus dem Skript (bzw. Vorlesung).

$$a(x,y,u) = -y, \quad b(x,y,u) = x, \quad c(x,y,u) = u+1,$$
$$\overline{x}(t) = t, \quad \overline{y}(t) = 0, \quad \overline{u}(t) = \psi(t),$$
$$\Gamma = \{((\overline{x}(t), \overline{y}(t)) : t \in \mathbb{R})\} \in \mathbb{R}^2, \quad S = \{((\overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{u}(t)) : t \in \mathbb{R})\} \in \mathbb{R}^3$$

Das dazugehorige Anfangswertproblem lautet

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = b = -x, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = c = u+1,$$

mit Anfangswerten

$$x(0,t) = \overline{x}(t) = t, \quad y(0,t) = \overline{y}(t) = 0, \quad u(0,t) = \overline{u}(t) = \psi(t).$$

Zuerst suchen wir eine Lösung für u. Wir können die Variablen separieren und berechnen dann

$$\int (1+u)^{-1} = \ln(1+u) + c_1 \quad \text{und erhalten} \quad \ln(1+u) + c_1 = s$$
$$\text{und gemeinsam mit der Nebenbedingung} \quad u(s,t) = (\psi(t)+1)e^s - 1$$

Die anderen beiden Differentialgleichungen leiten wir ein weiteres Mal ab und erhalten

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = -\frac{\partial y}{\partial s} = -x \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{\partial x}{\partial s} = -y$$

also zweimal die gleiche Differentialgleichung mit dem charakteristischen Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1$ also den Lösungen $y(s,t) = c_2 \sin(s) + c_3 \cos(s)$ und $x(s,t) = c_4 \sin(s) + c_5 \cos(s)$. Nun soll außerdem

$$c_3 = y(0,t) \overset{!}{=} 0 \quad \text{gelten, und damit} \quad c_4 \cos(s) - c_5 \sin(s) = \frac{\partial x}{\partial s} \overset{!}{=} -y = -c_2 \sin(s)$$

also $c_4 = 0$ und $c_2 = c_5$. Uns bleibt $x(s,t) = c_2 \cos(s)$ und $y(s,t) = c_2 \sin(s)$. Nun wissen wir außerdem

$$c_2 = x(0,t) \overset{!}{=} t \quad \text{also} \quad x(s,t) = t\cos(s) \quad \text{und} \quad y(s,t) = t\sin(s).$$

Daraus erhalten wir

$$t = \frac{x}{\cos(s)} \quad \text{und} \quad y = t\sin(s) = x\tan(s) \quad \text{also} \quad s = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{und} \quad t = \frac{x}{\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}.$$

So ergibt sich die Lösung

$$u(x,y) = \left(\psi\left(\frac{x}{\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}\right) + 1\right) \exp\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) - 1.$$

Aufgabe 5. Lösen Sie folgendes Problem mithilfe der Methode der Charakteristiken und geben Sie an, wo die Lösung definiert ist:

$$\begin{aligned} (y+u)u_x + yu_y &= x - y, \\ u(x,1) &= 1 + x \end{aligned}$$

Lösung. Das dazugehorige Anfangswertproblem lautet

$$\frac{\partial x}{\partial s} = y + u, \frac{\partial y}{\partial s} = y, \frac{\partial u}{\partial s} = x - y,$$

mit Anfangswerten

$$x(0,t) = t, y(0,t) = 1, u(0,t) = 1 + t.$$

Anstatt sofort ein lineares (3×3)-System aufzustellen, bemerken wir zunächst, dass $y(s,t) = e^s$. Wir benötigen also bloß folgendes inhomogene lineare (2×2)-System (mit konstanten koeffizienten im linearen Teil).

$$v(s) := \begin{pmatrix} x(s,t) \\ u(s,t) \end{pmatrix} \implies v' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v + \underbrace{\begin{pmatrix} e^s \\ -e^s \end{pmatrix}}_{=:b(s)}, \quad v(0) = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$.

$$\begin{aligned} &\implies \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1^2 = (\lambda+1)(\lambda-1) \\ &\implies \lambda_{1,2} = \pm 1 \end{aligned}$$

Wir bestimmen die zugehörigen Eigenvektoren $v_{1,2}$.

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies v_1 \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ A - \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies v_2 \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

$$\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad V := (v_1, v_2)$$

Wir berechnen die Inverse von V.

$$\left[\begin{array}{c} V \\ \hline I_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_2 \\ \hline V^{-1} \end{array}\right]$$

Somit, können wir die Exponentialmatrix von A ausrechnen.

$$\implies e^{sA} = Vs^{s\Lambda}V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{s\lambda_2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^s & e^{-s} \\ e^s & -e^{-s} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^s + e^{-s} & e^s - e^{-s} \\ e^s - e^{-s} & e^s + e^{-s} \end{pmatrix}$$

Nachdem ein Fundamentalsystem nach Spaltenumformungen wieder ein Fundamentalsystem bleibt, werden wir die Exponentialmatrix transformieren. Das soll die folgenden Rechnungen vereinfachen.

$$e^{sA} \mapsto \begin{pmatrix} e^s & -e^{-s}/s \\ e^s & e^{-s}/2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^s & -e^{-s} \\ e^s & e^{-s} \end{pmatrix} =: Y(s)$$

Die Inverse bekommen wir mit dem Determinanten-Trick.

$$Y(s)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-s} & e^{-s} \\ -e^s & e^s \end{pmatrix}$$

Damit, können wir die Partikulärlösung nun konkret hinschreiben.

$$\implies \begin{pmatrix} x(s,t) \\ u(s,t) \end{pmatrix} = v(s) = Y(s)\left(Y(0)^{-1}v_0 + \int_0^s Y(\xi)^{-1} b(\xi) \,\mathrm{d}\xi \right) = \begin{pmatrix} te^s + e^s - e^{-s} \\ te^s + e^{-s} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten insgesamt also folgende Lösung unserer ODE.

$$x(s,t) = te^s + e^s - e^{-s}, \quad y(s,t) = e^s, \quad u(s,t) = te^s + e^{-s}$$

Wir transformieren $(s,t) \mapsto (x,y)$, indem wir die ersten beiden Gleichungen nach s und t auflösen und in die dritte einsetzen. Das funktioniert, weil

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} te^s + e^s + e^{-s} & e^s \\ e^s & 0 \end{vmatrix} = -e^{2s} \neq 0.$$

Konkret ...

$$\begin{aligned} &\implies s = \ln y \\ &\implies t = x/y - 1 + 1/y^2 \\ &\implies u = x - y + 2/y \end{aligned}$$

Die Lösung ist, laut unseren Rechnungen, auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ definiert. „Zufälligerweise“ gilt sie sogar auf $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Lösung. Wie bereits in den vorigen beiden Aufgaben lösen wir

$$\frac{\partial x}{\partial s} = y + u \quad \text{mit} \quad x(0,t) = t, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = y \quad \text{mit} \quad y(0,t) = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = x - y \quad \text{mit} \quad u(0,t) = 1 + t.$$

Die zweite Differentialgleichung lässt sich leicht lösen, nämlich ist $y(s,t) = e^s$ eine Lösung die zudem noch die zusätzliche Bedingung erfüllt. Die anderen beiden Differentialgleichungen wollen wir ein weiteres Mal ableiten und erhalten so

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} = y + x - y = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} = y + u - y = u,$$

also zweimal die gleiche homogene Differentialgleichung. Diese haben das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1$ also die Lösung $x(s,t) = c_1 e^s + c_2 e^{-s}$ und $u(s,t) = c_3 e^s + c_4 e^{-s}$, wobei die scheinbaren Konstanten noch von t abhängen können. Nun wissen wir außerdem

$$c_1 e^s - c_2 e^{-s} = \frac{\partial x}{\partial s}(s) \overset{!}{=} y + u = e^s + c_3 e^s + c_4 e^{-s}, \quad \text{also} \quad c_1 = 1 + c_3 \quad \text{und} \quad -c_2 = c_4$$

Diese beiden Gleichungen können wir nützen und erhalten

$$t = x(0,t) = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad 1 + t = u(0,t) = c_3 + c_4 = c_1 - 1 - c_2$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems ist nun wirklich nicht mehr schwer und wir erhalten

$$c_1 = 1 + t, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = t \quad \text{und} \quad c_4 = 1$$

also die Funktionen

$$x(s,t) = (1+t)e^s - e^{-s} \quad \text{und} \quad u(s,t) = te^s + e^{-s}$$

Aus $y = e^s$ erhalten wir schnell $s = \ln(y)$ und damit

$$x = (1+t)e^s - e^{-s} = (1+t)y - y^{-1} \quad \text{umgeformt also} \quad t = \frac{x}{y} + y^{-2} - 1$$

woraus sich insgesamt

$$u(x,y) = te^s + e^{-s} = \left(\frac{x}{y} + y^{-2} - 1\right) y + y^{-1} = x + \frac{2}{y} - y$$

ergibt. Die Lösung ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wohldefiniert. **erfüllt sie dort auch überall die Differentialgleichung?**

Partielle Differentialgleichungen - Übung

3. UE am 15.10.2020

Richard Weiss   Florian Schager   Christian Sallinger   Fabian Zehetgruber
Paul Winkler   Christian Göth

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(i) Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sodass

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)f_i(x).$$

(ii) Gilt $xT = 0$ für eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, so ist $T = c\delta$ für eine Konstante c.

(iii) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u' = 0$ impliziert $u =$ const.

(iv) Für jedes $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ existieren Konstanten c_0, c_1 sodass

$$f\delta' = c_0\delta + c_1\delta'.$$

Lösung. (i) Sei also $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Wir verwenden die Taylorsche Formel, siehe dazu Kaltenbäck Satz 10.2.10, und erhalten

$$f(x) = f(y) + \int_0^1 df((1-t)y + tx)(x-y)dt = f(y) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}((1-t)y + tx)dt.$$

Mit der Definition

$$f_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}((1-t)y + tx)dt$$

erhalten wir die gewünschte Gestalt, die f_i sind auch C^∞ weil man eine beliebige partielle Ableitung des Integranden auf dem Intervall $[0,1]$ mit dem Supremum majorisieren kann also den Differentialoperator mit dem Integral vertauschen darf. Vergleiche dazu Kusolitsch Korollar 9.37.

(ii) Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $xT = 0$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Gemäß Hinweis wählen wir ein $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\forall x \in \operatorname{supp}\varphi : \chi(x) = 1$ (gibt es sowas? Ja, betrachte die Faltung von $\mathbb{1}_A$ mit $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, sodass $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, A^C) > \delta$ mit einer bekannten Testfunktion g mit $\operatorname{supp} g \subset [-\delta, \delta]$. Da $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist auch $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt $f * g \equiv 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi$.) Wir berechnen

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle \overset{(i)}{=} \langle T, \chi(\varphi(0) + x\varphi_1)\rangle = \varphi(0)\langle T, \chi\rangle + \underbrace{\langle xT, \chi\varphi_1\rangle}_{=0}.$$

Nun hängt das χ allerdings noch von φ ab, wir erhalten obige Gleichheit allerdings für alle $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\forall x \in \operatorname{supp} \varphi : \chi(x) = 1$ Für ein $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(0) \neq 0$ gilt also für alle entsprechenden χ die Gleichheit $c := \frac{\langle T, \psi \rangle}{\psi(0)} = \langle T, \chi \rangle$. Für eine beliebige weitere Funktion $\hat{\psi}$ können wir nun das χ so wählen, dass es nicht nur am Träger von $\hat{\psi}$ sondern auch am Träger von ψ den Wert 1 annimmt. Für solch ein χ kennen wir aber schon den Wert $\langle T, \chi \rangle = c$.

(iii) Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u' = 0$. Wir erinnern uns an den Beweis von Blümlingers Prop. 6.14. Sei Ψ_0 eine Testfunktion die $\int_{\mathbb{R}} \Psi_0 d\lambda = 1$ erfüllt. Wir definieren für beliebiges $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Funktion $\zeta := \phi - \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \Psi_0$, welche $\int_{\mathbb{R}} \zeta d\lambda = 0$ erfüllt. Die Funktion $\theta(x) := \int_{-\infty}^{x} \zeta d\lambda$ ist aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ und es gilt $\theta' = \zeta$. So erhalten wir die Darstellung $\phi = \theta' + \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \Psi_0$. So können wir berechnen

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \theta' \rangle + \left\langle u, \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \Psi_0 \right\rangle = \langle u', \theta \rangle + \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \langle u, \Psi_0 \rangle = \langle \langle u, \Psi_0 \rangle, \phi \rangle$$

(iv) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\langle f\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', f\varphi \rangle = -(f\varphi)'(0) = -f(0)\varphi'(0) - f'(0)\varphi(0) = f(0)\langle \delta', \phi \rangle - f'(0)\langle \delta, \varphi \rangle$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

(i) $\lim_{\lambda \to \infty} \sin \lambda x$,

(ii) $\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\sin \lambda x}{x}$,

und zeigen Sie, dass

(iii) $\lim_{a \to 0+} \frac{a}{x^2 + a^2} = \pi \delta$.

Lösung. (i) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig. Es gilt

$$|\langle \sin(\lambda x), \phi \rangle| = \left| \frac{1}{\lambda} \langle \cos(\lambda x), \phi' \rangle \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} |\cos(\lambda x) \varphi'(x)| \, dx \leq \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)| \, dx \to 0$$

für λ gegen ∞.

(ii) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig und $\operatorname{supp} \phi \subseteq [-a, a]$. Es gilt

$$\left\langle \frac{\sin(\lambda x)}{x}, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \phi(x) \ \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{|x|>a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \phi(x) \ \mathrm{d}x}_{=0} + \int_{|x|<a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \phi(x) \ \mathrm{d}x = \tag{1}$$

$$\int_{|x|<a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} (\phi(x) - \phi(0)) \ \mathrm{d}x + \phi(0) \int_{|x|<a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \ \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Wir definieren $\psi(x) := \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}$ und erkennen, dass wir ψ mit $\psi(0) := \phi'(0)$ stetig fortsetzen können. Wir wenden auf das linke Integral partielle Integration und die Dreiecksungleichung an und sehen, dass es für $\lambda \to \infty$ gegen Null geht:

$$\left| \int_{|x|<a} \sin(\lambda x) \ \psi(x) \ \mathrm{d}x \right| = \left| -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x) \ \psi(x) \Big|_{t=-a}^{a} \right| + \left| \frac{1}{\lambda} \int_{|x|<a} \cos(\lambda x) \ \psi'(x) \ \mathrm{d}x \right| \tag{3}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} (2\|\psi\| + 2a\|\psi'\|) \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0. \tag{4}$$

Für das zweite Integral substituieren wir $x\backslash\lambda x$ und verwenden wir unser Wissen aus der Analysis:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-a\lambda}^{a\lambda}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\pi \tag{5}$$

und somit

$$\frac{\sin(\lambda x)}{x}\overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}\pi\delta. \tag{6}$$

(iii) Mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt

$$\lim_{a\to 0+}\left\langle\arctan\left(\frac{x}{a}\right),\phi\right\rangle=\lim_{a\to 0+}\int_{\mathbb{R}}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\phi(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{a\to 0+}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\phi(x)dx=\pi\left\langle H-\frac{1}{2},\phi\right\rangle,$$

wobei H die Heaviside-Funktion ist und nach Beispiel 3.12 die Gleichheit $H'=\delta$ gilt. Mit Lemma 3.13 erhalten wir

$$\frac{a}{x^2+a^2}=\left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)'\to\left(\pi\left(H-\frac{1}{2}\right)\right)'=\pi\delta$$

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\ln|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

eine reguläre Distribution definiert, die punktweise Ableitung

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ \text{undefiniert} & x=0\end{cases}$$

jedoch nicht.

(ii) Es bezeichne $\mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right)$ die Distribution

$$\langle\mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $\left\langle\mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle=\int_0^\infty\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(iii) Überprüfen Sie, dass $(\ln|x|)'=\mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt.

Lösung. (i) Gegeben sei eine beliebige kompakte Menge $K\subseteq\mathbb{R}$. Wir wählen $a\in\mathbb{R}^+$ mit $K\subseteq[-a,a]$. Laut der Regel von L'Hospital, gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\ln(\epsilon)\epsilon=0.$$

$$\implies \int_K |f(x)| \ \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} |\ln|x|| \ \mathrm{d}x = 2\int_0^a |\ln x| \ \mathrm{d}x = 2\Big(\int_0^1 -\ln x \ \mathrm{d}x + \int_1^a \ln x \ \mathrm{d}x\Big)$$
$$= 2\Big(-\lim_{\epsilon\to 0+} (\ln(x)x - x)\Big|_\epsilon^1 + (\ln(x)x - x)\Big|_1^a\Big)$$
$$= 2\Bigg(-\underbrace{(\ln(1)1 - 1)}_{<\infty} + \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0+} (\ln(\epsilon)\epsilon - \epsilon)}_{0} + \underbrace{(\ln(a)a - a)}_{<\infty} - \underbrace{(\ln(1)1 - 1)}_{<\infty}\Bigg) < \infty$$

Betrachte hingegen

$$\int_0^1 |f'(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \log(1) - \lim_{\epsilon\to 0+} \log(\epsilon) = \infty.$$

(ii) Wir berechnen

$$\left\langle \mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} \ \mathrm{d}t + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \ \mathrm{d}x\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(-x)}{x} \ \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \ \mathrm{d}x\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \ \mathrm{d}x$$

(iii)

$$\big\langle (\log|x|)', \varphi \big\rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \log|x| \varphi'(x) \ \mathrm{d}x = -\int_0^\infty \log|x| (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) \ \mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^\infty \log|x| (\varphi(x) - \varphi(-x))' \ \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \ \mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = \mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi i \delta.$$

Lösung. Wir beginnen mit der folgenden Rechnung.

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} = \frac{x + i\varepsilon}{(x - i\varepsilon)\overline{(x - i\varepsilon)}} = \frac{x + i\varepsilon}{|x - i\varepsilon|^2} = \frac{x + i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} + i\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Wogegen der zweite Summand konvergiert, wissen wir schon aus der zweiten Aufgabe. Kümmern wir uns also um den ersten. Sei dazu $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$f_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \log\left(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}\right)\phi(x), \quad f : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \log|x|\phi(x)$$

Seien $a \in \mathbb{R}^-$, $b \in \mathbb{R}^+$, sodass $\operatorname{supp}\phi \subseteq [a, b]$. Wir können also mit dem Satz von der dominierten Konvergenz die folgende Vertauschung des Grenzwerts mit dem Integral rechtfertigen. Auf den Intervallen $[a, -\delta], [\delta, b]$ ist für $\varepsilon^2 < \delta/2$ die Funktion

$$g(x) = \max\left\{\left|\log\left(\sqrt{a^2 + 1}\right)\right|, \left|\log\left(\sqrt{b^2 + 1}\right)\right|, \left|\log\left(\sqrt{\delta/2}\right)\right|\right\} |\phi(x)|$$

eine integrierbare Majorante. Während für das Intervall $[-\delta,\delta]$ für $\delta^2+\varepsilon^2<1$ die Ungleichung

$$\left|\log\left(\sqrt{x^2+\varepsilon^2}\right)\right| \leq |\log(|x|)|$$

gilt, also können wir als integrierbare Majorante $g(x) = |\log|x|\phi(x)|$ nehmen.

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\langle \log\left(\sqrt{x^2+\varepsilon^2}\right),\phi\right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}} \log\left(\sqrt{x^2+\varepsilon^2}\right)\phi(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^b \log\left(\sqrt{x^2+\varepsilon^2}\right)\phi(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{-\delta} f_\varepsilon(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-\delta}^{\delta} f_\varepsilon(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x + \int_\delta^b f_\varepsilon(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \log|x|\phi(x)\ \mathrm{d}x = \langle \log|x|,\phi\rangle.\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.13 folgt die gewünschte Gleichheit.

$$\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\log\left(\sqrt{x^2+\varepsilon^2}\right)\right] \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} [\log|x|]' = \mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aufgabe 5. Eine Distribution $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ heißt von endlicher Ordnung wenn es ein $m\in\mathbb{N}_0$ gibt sodass man für alle kompakten Mengen $K\subset\Omega$ eine Konstante $C>0$ finden kann, sodass für alle $\varphi\in\mathcal{D}(K)$ gilt:

$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{C^m(K)}.$$

In diesem Fall heißt m die Ordnung von u. Gibt es kein solches m, sagt man, dass u unendliche Ordnung hat.
Bestimmen Sie die Ordnung folgender Distributionen ($\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen):

(i) $\delta\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

(ii) $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

(iii) $\varphi\mapsto\partial^\alpha\varphi(x_0)$ für $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, $x_0\in\Omega$,

(iv) $\varphi\mapsto\sum_{j\in\mathbb{N}}\partial^{\alpha_j}\varphi(x_j)$ für eine Folge $(x_j)_j$ in Ω ohne Häufungspunkt und $\alpha_j\in\mathbb{N}_0^n$.

Lösung. (i) Wir behaupten, die Ordnung ist 0. Sei dazu $K\subset\Omega$ eine beliebige kompakte Menge, $C=1$, $\varphi\in\mathcal{D}(K)$:

$$|\langle\delta,\varphi\rangle| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{C(K)}$$

Die Ungleichung ist für $0\in K$ klar, ansonsten ist $0\notin\operatorname{supp}(\varphi)$ und die Ungleichung trivialerweise erfüllt.

(ii) Wir behaupten, die Ordnung ist 0. Sei dazu wieder $K\subset\Omega$ eine beliebige kompakte Menge, $\varphi\in\mathcal{D}(K)$:

$$|\langle f,\varphi\rangle| = |\int_K f(x)\varphi(x)dx| \leq \int_K |f(x)||\varphi(x)|dx \leq \|\varphi\|_{C(K)}\|f|_K\|_{L^1(K)}$$

Mit $C=\|f|_K\|_{L^1(K)}$ als Konstante (in φ) haben wir die Behauptung also gezeigt.

(iii) Wir behaupten, die Ordnung ist kleiner (eventuell gleich) $|\alpha|$. Erinnern wir uns zuerst an die Defintion der Norm.

$$\|\phi\|_{C^k(K)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |D^\alpha \phi(x)|$$

Sei nun $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Menge, $C = 1$, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|\langle \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0), \varphi\rangle| = |\partial^\alpha \varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_{C^{|\alpha|}(K)}$$

Wie in (i) gilt die Ungleichung sowohl für $x_0 \in K$ als auch $x_0 \notin K$.

(iv) Hier unterscheiden wir

1. Fall: $\max|\alpha_j| < \infty$. Dann wählen wir $m = \max|\alpha_j|$. Für kompaktes $K \subset \Omega$ gilt, da die Folge x_j in Ω keinen Häufungspunkt hat

$$C_K := |\{j \in \mathbb{N} : x_j \in K\}| < \infty$$

Das C_K sei nun also unsere Konstante. Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(K)$

$$|\left\langle \varphi \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} \partial^{\alpha_j}\varphi(x_j), \varphi \right\rangle| = |\sum_{x_j\in\mathbb{K}} \partial^{\alpha_j}\varphi(x_j)| \leq \sum_{x_j\in\mathbb{K}} |\partial^{\alpha_j}\varphi(x_j)| \leq C_K\|\varphi\|_{C^m(K)}$$

2. Fall: Nun gibt es also $j \in \mathbb{N}$ sodass $|\alpha_j| = \infty$. Sei nun $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wählen wir nun eine kompakte Menge K_m sodass es ein $j_0 \in \mathbb{N} : x_{j_0} \in K \wedge |\alpha_{j_0}| > m$ gibt. Es soll von allen Folgengliedern nur $x_{j_0} \in K$ (solange keine doppelt vorkommen ist das auch möglich). Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(K)$

$$|\sum_{j\in\mathbb{N}} \partial^{\alpha_j}\varphi(x_j)| = |\partial^{\alpha_{j_0}}\varphi(x_{j_0})|$$

und damit, wenn wir in (iii) noch Gleichheit für die Ordnung zeigen können, ist die Ordnung größer m.

Aufgabe 6. Eine Distribution heißt *positiv* wenn $\langle u, \varphi\rangle \geq 0$ für alle $\varphi \geq 0$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass jede positive Distribution Ordnung 0 hat.

(ii) Zeigen Sie, dass folgende Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nicht positiv ist:

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung. (i) Seien $K \subseteq \Omega$ kompakt und $u \in \mathcal{D}(K)'$ positiv sowie $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Laut der Konstruktion aus Aufgabe 1, $\exists\, \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\forall\, x \in K : \chi(x) = 1, \quad \chi \geq 0.$$

Laut der Definition der Supremumsnorm gilt $\phi := \varphi - \chi\|\varphi\|_{C(K)} \leq 0$. Wegen der Linearität von u, folgt aus $\phi \leq 0$ auch $\langle u, \phi \rangle \leq 0$.

$$\Longrightarrow\ \langle u, \phi \rangle \leq 0 \iff \langle u, \varphi \rangle \leq \langle u, \chi \rangle \|\varphi\|_{C(K)}$$

(ii) Wir wählen die Funktion φ welche, wie wir aus der Vorlesung wissen, aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist und $\varphi \geq 0$ erfüllt.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Man beachte, dass $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-1, 1]$. Außerdem nimmt die Funktion im Punkt 0 ihr Maximum an.

$$\Longrightarrow\ \forall\, x \in [-1, 1] : \varphi(x) \leq \varphi(0) \implies \langle T, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|}\, \mathrm{d}x < 0$$

Damit T nicht positiv.

Aufgabe 7. Der *Träger* eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist das Komplement der größten offenen Menge, auf der T verschwindet:

$$\operatorname{supp} T = \Omega \setminus \bigcup \{U \subseteq \Omega \text{ offen} \mid T \text{ verschwindet auf } U\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Für $f \in C(\Omega)$ ist der distributionelle Träger gleich dem üblichen Träger der Funktion f.

(ii) Ist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution von endlicher Ordnung m und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion deren Ableitung $\partial^\alpha \psi$ für $|\alpha| \leq m$ verschwindet, dann ist $\langle T, \psi \rangle = 0$.

(iii) Gilt $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = 0$, dann folgt $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

(iv) Gilt $fT = 0$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$, dann folgt $\operatorname{supp} T \subseteq \{x : f(x) = 0\}$.

Lösung. (i) Sei $f \in C(\Omega)$. Wir definieren die Mengen

$$A := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}, \qquad B := \bigcup \left\{ U \subseteq \Omega \text{offen} \mid \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left(\operatorname{supp}(\phi) \subseteq U \Rightarrow \int_\Omega f\phi \,\mathrm{d}\lambda^n = 0 \right) \right\}$$

und wollen $A = \Omega \setminus B$ zeigen.

$\subseteq$: Sei $x \in A$ und $V \subseteq \Omega$ eine beliebige offene Umgebung von x. Nach Definition von A gibt es ein $y \in V$ mit $f(y) \neq 0$, o.B.d.A $f(y) > 0$. Wegen der Stetigkeit von f finden wir nun eine Umgebung $W \subset V$ von y mit $f(W) > 0$. Nun wählen wir ein $0 \neq \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\phi \geq 0$ und $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq W$. Nun ist aber $\int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}\lambda^n > 0$, also ist $x \notin B$ und damit ist $x \in \Omega \setminus B$.

$\supseteq$: Sei $x \in A^c$, also gibt es eine Umgebung V von x mit $f(V) = 0$. Für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq U$ gilt also $\int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}\lambda^n = 0$ also $V \subseteq B$ und damit $x \in B$.

(ii) Definieren wir die kompakte Menge $K := \operatorname{supp}(\psi)$, so gilt $|\langle T, \psi\rangle| \leq C\|\psi\|_{C^m(K)} = 0$

(iii) Nach Definition von $\operatorname{supp} T$ gilt also

$$\operatorname{supp}\phi \subseteq \bigcup\{U \subseteq \Omega \text{ offen} \mid \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{supp}\psi \subseteq U \implies \langle T, \psi\rangle = 0\} =: V. \tag{7}$$

Mit der Identität als Karte ist die offene Menge V eine C^∞ Mannigfaltigkeit und wird wie man oben sieht überdeckt.Wir wählen eine dieser Überdeckung untergeordnete, lokal endliche C^∞-Zerlegung der Eins $(\zeta_k)_{k=0}^\infty$ mit $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \zeta_k \geq 0$. Nun gilt für beliebiges $l \in \mathbb{N}$, einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und jedes $x \in \Omega$

$$\left|\sum_{k=1}^{l} \zeta_k(x) D^\alpha \phi(x)\right| = \left|D^\alpha \phi(x) \sum_{k=1}^{l} \zeta_k(x)\right| \leq |D^\alpha \phi(x)|.$$

Definiere $\psi_l := \sum_{k=1}^{l} \zeta_k(x)\phi(x)$. Also gilt auch $\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \psi_l| \leq \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \phi(x)| < \infty$ womit wir sehen, dass der linke Grenzwert für $l \to \infty$ existiert. Klarerweise gilt für alle $l \in \mathbb{N}$, dass $\operatorname{supp}\psi_l \subseteq \operatorname{supp}\phi$. Wegen der lokalen Endlichkeit (hineinziehen des Differentialoperators) und der eben gezeigten Konvergenz gilt

$$\lim_{l\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha(\phi(x) - \psi_l(x))| = \lim_{l\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \left|D^\alpha \sum_{k=l}^{\infty} \zeta_k(x)\phi(x) - D^\alpha \psi_l(x)\right| = \lim_{l\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \left|\sum_{k=l+1}^{\infty} \zeta_k(x) D^\alpha \phi(x)\right| = 0.$$

Die Folge von Funktionen ψ_l konvergiert also im Sinne von Definition 3.2 gegen ϕ. Damit und mit der Stetigkeit von T im Sinne der eben gezeigten Konvergenz gilt

$$\langle T, \phi\rangle = \langle T, \sum_{k\in\mathbb{N}} \zeta_k \phi\rangle = \lim_{l\to\infty} \langle T, \psi_l\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle T, \zeta_k\phi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} 0 = 0. \tag{8}$$

(iv) Seien $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$ so, dass $fT = 0$. Sei $x \in \Omega$ so, dass $f(x) \neq 0$, o.B.d.A $f(x) > 0$. Wegen der Stetigkeit von f finden wir eine Umgebung U von x mit $f(U) > 0$. Für ein beliebiges gegebenes $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq U$ definieren wir $\psi := \frac{\phi}{f}$ und erhalten

$$\langle T, \phi\rangle = \langle T, f\psi\rangle = \langle fT, \psi\rangle = 0$$

und damit ist $x \notin \operatorname{supp}(T)$.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass die Faltung

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}y$$

für $f, g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist, wenn $\operatorname{supp} f$ und $\operatorname{supp} g$ beide nach unten (oder beide nach oben) beschränkt sind. Berechnen Sie dann $f * f * \ldots * f$ ($n \in N$ Faktoren) für $f(t) = H(t)$.

Lösung. Seien die Träger von f und g o. B. d. A. nach unten beschränkt, d. h. es gebe ein $C \in \mathbb{R}$, sodass

$$(-\infty, C) \cap (\mathrm{supp} f \cup \mathrm{supp} g) = \emptyset. \tag{9}$$

Die Faltung $f * g$ ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\ g(y)\ \mathrm{d}y. \tag{10}$$

Damit der Integrand nicht Null ist, müssen also $x - y$ und y jeweils größer als C sein. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- <u>Fall 1: $x < 2C$.</u> In diesem Fall gilt für $y > C$

$$x < 2C < y + C \tag{11}$$

  und damit $x - y < C$. Deshalb ist der Integrand und damit $f * g(x)$ in diesem Fall stets Null.

- <u>Fall 2: $x > 2C$.</u> Das Integral vereinfacht sich zu

$$(f * g)(x) = \int_C^{x-C} f(x-y)\ g(y)\ \mathrm{d}y. \tag{12}$$

  Für festes x ist $[C, x - C]$ eine kompakte Menge. f und g sind lokal quadratisch integrierbar. Die Existenz des Integrals ist somit eine unmittelbare Folgerung aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Wir wollen nun die n-te Faltung der Heaviside-Funktion H induktiv berechnen. Die Behauptung ist

$$H *^{(n)} H(t) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\ \frac{t^n}{n!}. \tag{13}$$

Für $n = 1$ gilt nach dem ersten Aufgabenteil (mit $C = 0$)

$$H * H(t) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\ \int_0^t H(t-y)\ H(y)\ \mathrm{d}y = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\ \int_0^t 1\ \mathrm{d}y = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\ t. \tag{14}$$

Im Induktionsschritt gilt (der Träger von $H *^{(n-1)} H$ ist nach Induktionsvoraussetzung nach unten durch Null beschränkt) wieder mit Teil eins

$$H *^{(n)} H(t) = H * (H *^{(n-1)} H) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\ \int_0^t \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\ \mathrm{d}y = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\ \frac{t^n}{n!}. \tag{15}$$

Partielle Differentialgleichungen

4. Übung am 22.10.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit C^∞-Rand und $\mathbb{1}_\Omega$ ihre Indikatorfunktion. Zeigen Sie

$$\langle \Delta \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist.

Lösung. Klarerweise ist $\mathbb{1}_\Omega \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Somit ist der Ausdruck auf der linken Seite, als Linearkkombination von Ableitungen von dieser Distribution, wohldefiniert. Der Laplace-Operator Δ ist formal selbstadjungiert und $\Delta = \mathrm{div}\,(\nabla)$. Wenn wir Ω als offen annehmen, können wir den Satz von Gauß anwenden (ansonsten müssen wir uns noch was einfallen lassen):

1-5 (Gauss).png

Satz 1.5 (Gauß). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und äußerem Normaleneinheitsvektor ν, definiert auf $\partial\Omega$. Ferner sei $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ eine vektorwertige Funktion. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \mathrm{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds.$$

$$\implies \langle \Delta \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle = \langle \mathbb{1}_\Omega, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega \Delta\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}\,(\nabla\varphi) \, \mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \nu \, \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \, \mathrm{d}s$$

□

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass

$$F = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n}$$

eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(u) = \mathrm{div}\,(u)$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, wobei σ_n die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist. Achtung: Obwohl F eigentlich eine vektorwertige Distribution in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^n$ ist, wird das nicht gebraucht um die Behauptung

$$\langle \mathrm{div}\, F, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

zu zeigen, da $\mathrm{div}\, F = \frac{1}{\sigma_n} \sum_i \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

Definition 3.19. *Seien L ein linearer formaler Differentialoperator wie zu Beginn dieses Abschnitts und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen eine distributionelle Lösung von*

$$L(U_\xi) = \delta_\xi,$$

wobei δ_ξ die verschobene Delta-Distribution aus Beispiel 3.11 ist, Fundamentallösung von L mit Pol in ξ.

3-19.png

Lösung. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen im Folgenden partiell integrieren.

der partiellen Integration.png

Hierbei bezeichnet das Integral auf der rechten Seite das Oberflächenintegral auf $\partial\Omega$. Man nennt F auch ein *Vektorfeld*. Der Satz von Gauß bleibt gültig, wenn $\partial\Omega$ die disjunkte Vereinigung von endlich vielen C^1-Flächenstücken ist.

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, und es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ergibt die Produktregel $\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F$ und damit

$$\int_\Omega u \operatorname{div} F dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial\Omega} u(F \cdot \nu) ds.$$

Dies ist das mehrdimensionale Analogon der partiellen Integration.

Die Partielle Integration basiert auf dem Integral-Satz von Gauß. Um diesen anzuwenden, brauchen wir eine offene und beschränkte Menge. Das garantieren wir formal, indem wir $\Omega \supseteq \operatorname{supp}(\phi)$ als offene und beschränkte Menge mit C^1-Rand wählen und durch $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(0)}$ für $\epsilon > 0$ die Singularität 0 rausschneiden. Wir integrieren somit nur auf Ω bzw. Ω_ϵ. (Außerhalb des Trägers, verschwindet alles).

$$\begin{aligned}
\implies \langle LF, \phi \rangle &= \langle \operatorname{div} F, \phi \rangle = \left\langle \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right), \phi \right\rangle = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \left\langle \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right), \phi \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_n} \sum_1^n \left\langle \frac{x_i}{|x|^n}, \partial_i \phi \right\rangle \\
&= -\frac{1}{\sigma_n} \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^n}, \partial_i \phi \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_n} \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^n} \partial_i \phi \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sigma_n} \int_\Omega \frac{x}{|x|^n} \cdot \nabla \phi(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} -\frac{1}{\sigma_n} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{x}{|x|^n} \cdot \nabla \phi(x) \, \mathrm{d}x \overset{\text{PI}}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\sigma_n} \left(\int_{\Omega_\epsilon} \operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^n} \right) \phi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{x}{|x|^n} \phi(x) \cdot \nu \, \mathrm{d}s \right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\sigma_n} \left(\int_{\Omega_\epsilon} \operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^n} \right) \phi(x) \, \mathrm{d}x - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{x}{|x|^n} \phi(x) \cdot \nu \, \mathrm{d}s}_{0} - \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{x}{|x|^n} \phi(x) \cdot \nu \, \mathrm{d}s \right)
\end{aligned}$$

Wir kümmern uns nun um die übrigen Integrale separat. Das Erste fällt weg, weil

$$\operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|^n}\right) = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n \partial_i\left(\frac{x_i}{|x|^n}\right) = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{n/2} - x_i 2x_i \frac{n}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{n/2-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n \frac{1-\frac{nx_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{n/2}}$$

$$= \frac{1}{\sigma_n}\frac{n-n\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{n/2}} = 0.$$

Das Zweite wird zu genau dem Rest, den wir brauchen. Dazu bemerken wir, dass das Normalvektorfeld auf $\partial B_\epsilon(0)$ wie folgt aussieht.

$$|x| = \epsilon, \quad \nu(x) = -\frac{x}{|x|}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung berechnen wir den Rest.

$$-\int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{x}{|x|^n}\phi(x)\cdot\nu \,\mathrm{d}s = \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{x\cdot x}{|x|^{n+1}}\phi(x)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{|x|^2}{|x|^{n+1}}\phi(x)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\epsilon^2}{\epsilon^{n+1}}\phi(x)\,\mathrm{d}s$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \epsilon^{1-n}\phi(x_\epsilon)\operatorname{meas}\partial B_\epsilon(0) = \epsilon^{1-n}\epsilon^{n-1}\sigma_n\phi(x_\epsilon) = \sigma_n\phi(x_\epsilon)$$

Formal gilt noch zu zeigen, dass $F_i = \frac{x_i}{|x|^n}$ eine L^1_{loc}-Funktion ist, dazu betrachten wir das Integral über den Radialanteil in sphärischen Koordinaten. Dort betrachten wir eine Kugel die unser Kompaktum umfasst. Dann gilt für $g(x) = |x|^{1-n}$, da $r = |x|$

$$\int_0^r z^{1-n}z^{n-1}dz = r < \infty$$

Damit ist nach folgender Rechnung auch $\sum_{i=1}^n |F_i|$, und somit auch F_i eine L^1_{loc}-Funktion.

$$\int_K \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x|^n}\,\mathrm{d}x \overset{CS}{\leq} \int_K n\frac{|x|}{|x|^n}\,\mathrm{d}x = n\int_K |x|^{1-n}\,\mathrm{d}x < \infty$$

□

Aufgabe 3. Gegeben $v \in C^2(\mathbb{R})$, sei $u(x,t) = v\left(x/\sqrt{t}\right)$ für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie:

$$u_t = u_{xx} \iff v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung v und damit u.

(ii) Wählen Sie die Konstanten in u so, dass

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0 \text{ für } x < 0, \quad \lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 1 \text{ für } x > 0.$$

(iii) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Funktion $f(x,t) = (\partial_x u(\cdot,t) * \varphi)(x)$ (Faltung in der x-Variablen) folgendes Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung löst:

$$\begin{aligned} f_t - f_{xx} &= 0 \\ \lim_{t\to 0^+} f(t,x) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

Lösung. (i) Da $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = u_t - u_{xx} = \partial_t v(x/\sqrt{t}) - \partial_{xx} v(x/\sqrt{t}) = -\frac{x}{2\sqrt{t}^3} v'(x/\sqrt{t}) - \frac{1}{t} v''(x/\sqrt{t}) = -\frac{z}{2t} v'(z) - \frac{1}{t} v''(z) \\ \iff \frac{z}{2} v'(z) + v''(z) = 0. \end{aligned}$$

Nun lösen wir die gewöhnliche Differentialgleichung für $w := v'$

$$\begin{aligned} w'(z) + \frac{z}{2} w(z) = 0 \iff \frac{w'(z)}{w(z)} = -\frac{z}{2} \iff \ln(w(z))' = -\frac{z}{2} \iff \ln(w(z)) = -\frac{z^2}{4} + C_0 \\ \iff w(z) = C_1 \exp\left(-z^2/4\right). \end{aligned}$$

Also erhalten wir $v(z) = C_1 \int_0^z \exp(-s^2/4) ds + C_2$ und $u(x,t) = v(x/\sqrt{t}) = C_1 \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4) ds + C_2$.

(ii)

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = \lim_{t\to 0^+} C_1 \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4) ds + C_2 = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\pi} C_1 + C_2.$$

Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\sqrt{\pi} C_1 + C_2 = 0 &\iff C_2 = C_1\sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} C_1 + C_2 = 1 &\iff 2C_1\sqrt{\pi} = 1 \iff C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iff C_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Unter diesen zusätzlichen Bedingungen lautet unsere Lösung nun

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4) ds + \frac{1}{2}.$$

(iii) Da $u(\cdot,t)$ und $\partial_x u(\cdot,1)$ stetig sind, sind sie insbesondere auch lokal integrierbar und es folgt mit Lemma 3.14

$$\begin{aligned} f_t - f_{xx} &= \partial_t((\partial_x u(\cdot,t) * \varphi)(x)) - \partial_{xx}(\partial_x u(\cdot,t) * \varphi)(x) \\ &= (\partial_{tx} u(\cdot,t) * \varphi)(x) - (\partial_{xxx} u(\cdot,t) * \varphi)(x) \\ &= ((\partial_{tx} u(\cdot,t) - \partial_{xxx} u(\cdot,t)) * \varphi)(x) \\ &= ((\partial_x(\partial_t u(\cdot,t) - \partial_{xx} u(\cdot,t))) * \varphi)(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} f(t,x) &= \lim_{t\to 0^+} (\partial_x u(\cdot,t) * \varphi)(x) = \lim_{t\to 0^+} (u(\cdot,t) * \varphi')(x) = \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} u(x-y,t)\varphi'(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0^+} u(x-y,t)\varphi'(y) dy = \int_{-\infty}^{x} \lim_{t\to 0^+} u(x-y,t)\varphi'(y) dy + \int_{x}^{\infty} \lim_{t\to 0^+} u(x-y,t)\varphi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \varphi'(y) dy = \varphi(x). \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Grenzwert und Integral gelingt mittels dominierter Konvergenz wegen der Abschätzung

$$|u(x-y,t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-y)/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4)ds + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-s^2/4)ds + \frac{1}{2}$$

$\square$

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(x,y) = (8\pi)^{-1}(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

ist eine Fundamentallösung von Δ^2 mit Pol in $(0,0)$ im $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_i x_j x_j}.$$

Lösung. Wir zeigen also für beliebiges $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$\langle \Delta^2 u, \phi \rangle := \langle u, \Delta^2 \phi \rangle \stackrel{!}{=} \phi(0)$$

Wir machen einen Ansatz wie im Skript: Sei $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$, dann soll

$$\phi(0) \stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta^2 \phi dx$$

Nun integrieren wir viermal partiell gemäß dem Satz von Gauß:

der partiellen Integration.png

Hierbei bezeichnet das Integral auf der rechten Seite das Oberflächenintegral auf $\partial\Omega$. Man nennt F auch ein *Vektorfeld*. Der Satz von Gauß bleibt gültig, wenn $\partial\Omega$ die disjunkte Vereinigung von endlich vielen C^1-Flächenstücken ist.

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, und es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ergibt die Produktregel $\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F$ und damit

$$\int_\Omega u \operatorname{div} F dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial\Omega} u(F \cdot \nu) ds.$$

Dies ist das mehrdimensionale Analogon der partiellen Integration.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} u\Delta^2\phi dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} u \operatorname{div} \underbrace{\nabla\Delta\phi}_{F} dx = -\int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\nabla u}_{F} \cdot \nabla \underbrace{\Delta\phi}_{u} dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla\Delta\phi \cdot \nu) ds = \\
&\int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\operatorname{div} \nabla u}_{\Delta u} \underbrace{\Delta\phi}_{\operatorname{div} \nabla\phi} dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta\phi(\nabla u \cdot \nu) ds + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla\Delta\phi \cdot \nu) ds = \\
-\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\Delta u \cdot \nabla\phi dx &+ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta u(\nabla\phi \cdot \nu) ds - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta\phi(\nabla u \cdot \nu) ds + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla\Delta\phi \cdot \nu) ds = \\
\underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta^2 u\phi dx}_{0} - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi(\nabla\Delta u \cdot \nu) ds &+ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta u(\nabla\phi \cdot \nu) ds - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta\phi(\nabla u \cdot \nu) ds + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla\Delta\phi \cdot \nu) ds
\end{aligned}$$

Die Integrale über den Rand sehen wir uns einzeln an. Dabei ist der Normalenvektor an $\partial\Omega_\varepsilon$ gegeben durch

$$\nu(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Für das erste wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung an: Es existiert ein $x_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(0)$, sodass

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi(\nabla\Delta u \cdot \nu)ds = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi\Big(\frac{1}{2\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon}\Big)ds = \phi(x_\varepsilon)\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} 1ds = \phi(x_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \phi(0)$$

Das zweite transformieren wir in Polarkoordinaten, also $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)$. Da $\Delta u = \frac{\ln(x^2+y^2)+2}{4\pi}$ erhalten wir unter Anwendung der CS-Ungleichung

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}(\ln(x^2+y^2)+2)(\nabla\phi\cdot\nu)ds\right| \le \frac{\|\nabla\phi\|}{4\pi}\left(\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\ln(r^2)rd\varphi dr + \underbrace{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} 2ds}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0}\right) = \frac{\|\nabla\phi\|}{2}\int_0^\varepsilon \ln(r^2)rdr =$$

$$\frac{\|\nabla\phi\|}{2}\left[\frac{r^2\ln(r^2)-r^2}{2}\right]_{r=0}^{\varepsilon} = \|\nabla\phi\|\frac{\varepsilon^2(\ln(\varepsilon^2)-1)}{4} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Beim dritten berechnen wir nun zuerst $\nabla u\cdot\nu = \frac{(x^2+y^2)\ln(\sqrt{x^2+y^2})}{4\pi} + \frac{x^2+y^2}{8\pi}$. Dann erhalten wir wiederum mit TRAFO:

$$\left|\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\Delta\phi(\nabla u\cdot\nu)ds\right| \le \|\Delta\phi\|\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{r^3\ln r}{4\pi}+\frac{r^3}{8\pi}d\varphi dr = \|\Delta\phi\|\int_0^\varepsilon\frac{r^3\ln r}{2}+\frac{r^3}{4}dr = \|\Delta\phi\|\left(\frac{4\varepsilon^4\ln\varepsilon-\varepsilon^4}{16}+\frac{\varepsilon^4}{32}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Auch beim letzten können wir das so durchführen:

$$\left|\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}(x^2+y^2)(\ln(\sqrt{x^2+y^2}))(\nabla\Delta\phi\cdot\nu)ds\right| \le \frac{\|\nabla\Delta\phi\|}{8\pi}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi} r^3\ln(r)d\varphi dr = \frac{\|\nabla\Delta\phi\|}{4}\int_0^\varepsilon r^3\ln(r)dr =$$

$$\frac{\|\nabla\Delta\phi\|}{4}\frac{4\varepsilon^4\ln(\varepsilon)-\varepsilon^4}{16} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Damit ist diese Funktion also wirklich eine Fundamentallösung.
Alternative Lösung:
Durch elementares Ableiten erhält man

$$(\Delta u)(x,y) = \frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})+1}{2\pi}. \tag{1}$$

Nach Satz 4.1 ist $\frac{\log(r)}{2\pi}$ eine Fundamentallösung des Laplace-Operators, wobei $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Daher gilt

$$\langle\Delta^2 u,\phi\rangle = \left\langle\Delta\left(\frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})+1}{2\pi}\right),\phi\right\rangle = \tag{2}$$

$$\left\langle\Delta\left(\frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})}{2\pi}\right)+\underbrace{\Delta\frac{1}{2\pi}}_{=0},\phi\right\rangle = \left\langle\Delta\frac{\log(r)}{2\pi},\phi\right\rangle \overset{\text{Satz 4.1}}{=} \langle\delta_0,\phi\rangle. \tag{3}$$

□

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die formal adjungierten Operatoren von

(i) $L\phi = a(x,y)\phi_x + b(x,y)\phi_y + c(x,y)\phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

(ii) $L\phi = x^2\phi'' + \phi' - 3x^2\phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

(iii) $L\phi = \Delta\phi + v(x)\nabla \cdot \phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

mit $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Lösung. (i)

$$\begin{aligned} L^*(\phi) &= -\partial_x(a(x,y)\phi) - \partial_y(b(x,y)\phi) + c(x,y)\phi \\ &= -a_x(x,y)\phi - a(x,y)\phi_x - b_y(x,y)\phi - b(x,y)\phi_y + c(x,y)\phi \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} L^*(\phi) &= (x^2\phi)'' - \phi' - 3x^2\phi = (2x\phi + x^2\phi')' - \phi' - 3x^2\phi \\ &= 2\phi + 4x\phi' + x^2\phi'' - \phi' - 3x^2\phi \end{aligned}$$

(iii)

$$L\phi = \Delta\phi + \sum_{i=1}^n v_i \partial_{x_i}\phi$$

Nun bleibt $\Delta\phi$ nach Definition des formal adjungierten Operators erhalten und es gibt sich insgesamt

$$L^*(\phi) = \Delta\phi - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(v_i\phi) = \Delta\phi - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}v_i\phi - \sum_{i=1}^n v_i\partial_{x_i}\phi = \Delta\phi - \operatorname{div}(v)\phi - v\nabla\phi$$

□

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von ∂^α in $\mathbb{R}^n$ mit Träger in

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \forall i = 1, \dots, n : x_i \geq 0\},$$

wobei alle $\alpha_i > 0$ sind.

Lösung. Wir behaupten die allgemeine Lösung lautet

$$U_0(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!}.$$

Wir behaupten per Induktion

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!} \partial_\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|}\phi(0).$$

Betrachte zuerst den Fall $n = 1$:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha - 1!} \\ \langle \partial_\alpha U_0, \phi \rangle &= (-1)^\alpha \langle U_0, \phi^{(\alpha)} \rangle \\ &= (-1)^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \phi^{(\alpha)}(x) dx \\ &= (-1)^\alpha (-1)^{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{x^0}{0!} \phi'(x) dx \\ &= -1 \int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Nun zum Induktionsschritt $n-1 \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_\alpha U_0, \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!} \partial_\alpha \phi(x) dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!} \partial_\alpha \phi(x) dx_n d\overline{x} \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha_n - 1}}{(\alpha_n - 1)!} \partial_\alpha \phi(\overline{x}, x_n) dx_n d\overline{x} \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{\alpha_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!} \phi(\overline{x}, 0) d\overline{x} = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{\sum_{i=1}^n \alpha_n} \phi(0) = \phi(0).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7. Bestimmen Sie Fundamentallösungen mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$ folgender Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}$:

(i) $L(u) = u'$

(ii) $L(u) = u''$

(iii) $L(u) = u' - au (a \neq 0)$
Hinweis: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung u_{hom} der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ und verwenden Sie einen Ansatz der Form $U_0(x) = C_1 u_{hom}(x)$ für $x < 0, U_0(x) = C_2 u_{hom}(x)$ für $x > 0$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

Lösung. (i) Wir wählen die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases}$$

und rechnen für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig nach

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Also ist die Heaviside-Funktion eine Fundamentallösung zur Polstelle 0. Für eine Fundamentallösung U_ξ zur Polstelle $\xi \in \mathbb{R}$ gehen wir nach folgender Formel vor:

$$U_\xi(x) = \tau_{-\xi} U_0(x) = \tau_{-\xi} H(x) = H(x - \xi) = \begin{cases} 0 & : x < \xi \\ 1 & : x \geq \xi \end{cases}.$$

(ii) Die Lösung ist aus dem Skript bekannt:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & : x \leq \xi \\ \xi(x - 1) & : x > \xi \end{cases}$$

(iii) Wir lösen $Lu = u' - au \stackrel{!}{=} 0$.

$$\frac{u'}{u} = a \iff \ln(u)' = a \iff \ln(u) = ax + C \iff u = D \exp(ax)$$

Wir machen den Ansatz

$$U_0(x) = \begin{cases} C_1 \exp(ax) & : x < 0 \\ C_2 \exp(ax) & : x \geq 0 \end{cases}$$

und setzen für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig ein:

$$\begin{aligned}
\langle L(U_0), \phi \rangle &= -\langle U_0, \phi' + a\phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} U_0(\phi' + a\phi) dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} C_1 \exp(ax)(\phi' + a\phi) dx - \int_{0}^{\infty} C_2 \exp(ax)(\phi' + a\phi) dx \\
&= -\left[C_1 \exp(ax)\phi\right]_{-\infty}^{0} - \left[C_2 \exp(ax)\phi\right]_{0}^{\infty} \\
&= (C_2 - C_1) \exp(0)\phi(0) = (C_2 - C_1)\langle \delta, \phi \rangle
\end{aligned}$$

Für $C_2 - C_1 = 1$ ist also U_0 eine Fundamentallösung an der Polstelle 0. Wählen wir also der Einfachheit halber $C_2 = 1$ und $C_1 = 0$, dann erhalten wir

$$U_\xi(x) = \tau_{-\xi} U_0(x) = \begin{cases} 0 & : x < \xi \\ \exp(a(x - \xi)) & : x \geq \xi \end{cases}.$$

$\square$

Partielle Differentialgleichungen

5. Übung am 29.10.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für $L(u) = u' - au(a \in \mathbb{R})$ eine Greensche Funktion G auf $\Omega = (0, \infty)$, also für festes $x \in \Omega$ gelten

$$LG(x, \cdot) = \delta_x \quad \text{in } \Omega, \quad G(x, \cdot) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Lösung. Wir suchen also eine Funktion G mit

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= 0, \quad x > 0 \\ G_y(x, y) - aG(x, y) &= \delta_x, \quad x, y > 0 \end{aligned}$$

Wir kennen aus der letzten Übung eine Fundamentallösung für den Operator $L(u) = u' - au$ mit Polstelle x:

$$U_x(y) = \begin{cases} 0 & : y < x \\ \exp(a(y - x)) & : y \geq x \end{cases}$$

Es sieht so aus, als hätten wir Glück gehabt: Für $x > 0$ ist $U_x(0) = 0$. Also definieren wir

$$G(x, y) := U_x(y)$$

und haben gewonnen! □

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) &= f(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit $k(x) > 0$ für $0 \leq x \leq 1$ eine Funktion $g(x, y)$ (genannt *greensche Funktion*) sodass

$$u(x) = \int_0^1 g(x, y) f(y) dy$$

das Randwertproblem löst. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit einer Funktion $K(x)$, welche das homogene Problem

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = 0$$

löst und die Randbedingung bei $x = 1$ erfüllt.

(ii) Integrieren Sie die erhaltene Gleichung von $x = 0$ bis $x = 1$, um einen Ausdruck für $u'(0)$ zu erhalten.

(iii) Leiten Sie daraus eine Formel für $u'(x)$ und dann $u(x)$ her.

(iv) Bringen Sie die Formel für $u(x)$ auf die gewünschte Form.

Überprüfen Sie am Ende, dass

$$-\frac{d}{dy}\left(k(y)\frac{dg}{dy}(x,y)\right) = \delta(x-y)$$
$$g(x,0) = g(x,1) = 0$$

gilt.
Hinweis: Die Methode ist im Spezialfall $k(x) = 1$ mit $K(x) = 1 - x$ etwas einfacher.

Lösung. (i) Lösen wir also das homogene Problem mit Randbedingung $u(1) = 0$:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = 0 \iff -k(x)u'(x) = C \iff u(x) = C\int_x^1 \frac{1}{k(y)}dy$$

Setzen wir $C = 1$ erhalten wir eine Lösung $K(x) = \int_x^1 \frac{1}{k(y)}dy$.
Rechnen wir mal mal:

$$-(k(x)u'(x))'K(x) = f(x)K(x)$$

(ii) Integrieren wir mal:

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 (k(x)u'(x))'K(x)dx &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\
\iff -[k(x)u'(x)K(x)]_{x=0}^1 + \int_0^1 k(x)u'(x)K'(x) &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\
\iff k(0)u'(0)K(0) - \underbrace{k(1)u'(1)K(1)}_{=0} - \int_0^1 u'(x) &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\
\iff k(0)u'(0)K(0) + \underbrace{(u(0)-u(1))}_{=0} &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\
\iff u'(0) &= \frac{\int_0^1 f(x)K(x)dx}{k(0)K(0)}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
-(k(x)u'(x))' = f(x) &\iff -k(x)u'(x) = \int_0^x f(x)dx - k(0)u'(0) \\
&\iff u'(x) = \frac{k(0)u'(0) - \int_0^x f(y)dy}{k(x)} \\
&\iff u(x) = \int_0^x \frac{k(0)u'(0) - \int_0^y f(z)dz}{k(y)} dy \\
&\iff u(x) = k(0)u'(0) \int_0^x \frac{1}{k(y)} - \int_0^y \frac{f(z)}{k(y)} dzdy \\
&\iff u(x) = k(0)u'(0)(K(0) - K(x)) - \int_0^x \int_0^y \frac{f(z)}{k(y)} dzdy \\
&\iff u(x) = \frac{\int_0^1 f(y)K(y)dy}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \int_0^x \int_0^y \frac{f(z)}{k(y)} dzdy \\
&\iff u(x) = \int_0^1 \frac{f(z)K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x))dz - \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,x]}(y)\mathbb{1}_{[0,y]}(z)\frac{f(z)}{k(y)} dydz \\
&\iff u(x) = \int_0^1 \frac{f(z)K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - f(z) \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,x]}(y)\mathbb{1}_{[z,1]}(y)\frac{1}{k(y)} dydz \\
&\iff u(x) = \int_0^1 \frac{f(z)K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - f(z)\mathbb{1}_{[0,x]}(z)(K(z) - K(x))dz \\
&\iff u(x) = \int_0^1 f(z) \left[\frac{K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(z)(K(z) - K(x))\right] dz
\end{aligned}$$

Also erhalten wir mit

$$g(x,z) = \frac{K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(z)(K(z) - K(x))$$

die lange gesuchte greensche Funktion.

(iv) Zuerst die Randbedingungen, die sind einfacher (und wir brauchen sie für die erste Gleichheit noch):

$$\begin{aligned}
g(x,0) &= \frac{K(0)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(0)(K(0) - K(x)) = (K(0) - K(x)) - (K(0) - K(x)) = 0, \\
g(x,1) &= \frac{K(1)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(1)(K(1) - K(x)) = 0.
\end{aligned}$$

Wie ist die erste Gleichheit zu verstehen? Ich kann für festes x zeigen, dass δ_x rauskommt...

$$
\begin{aligned}
-\left\langle \frac{d}{dy}\left(k(y)\frac{dg}{dy}(x,y)\right), \phi(y)\right\rangle &= -\langle g(x,y), (k(y)\phi'(y))'\rangle \\
&= -\int_0^1 g(x,y)(k(y)\phi'(y))' dy \\
&= -[g(x,y)k(y)\phi'(y)]_{y=0}^1 + \int_0^1 k(y)\phi'(y)g_y(x,y)dy \\
&= \int_0^1 k(y)\phi'(y)g_y(x,y)dy \\
&= \int_0^x k(y)\phi'(y)\left(\frac{K(x)-K(0)}{K(0)k(y)} + \frac{1}{k(y)}\right)dy + \int_x^1 k(y)\phi'(y)\left(\frac{K(x)-K(0)}{K(0)k(y)}\right)dy \\
&= \int_0^x \phi'(y)\frac{K(x)}{K(0)}dy + \int_x^1 \phi'(y)\frac{K(x)-K(0)}{K(0)} \\
&= \frac{K(x)}{K(0)}\phi(x) - \phi(0) + \phi(1)\frac{K(x)-K(0)}{K(0)} - \phi(x)\frac{K(x)-K(0)}{K(0)} = \phi(x).
\end{aligned}
$$

Zum Schluss verwenden wir die kuriose Tatsache, dass $\phi(0) = \phi(1) = 0$, da ϕ eine Testfunktion auf $[0,1]$ ist.

□

Aufgabe 3. Berechnen Sie die greensche Funktion $G(x,y,\xi,\eta)$ für Δ auf der Viertelebene

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$$

mit Hilfe der Spiegelungsmethode. Stellen Sie mit dieser greenschen Funktion die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(x,0) = f(x) \text{ für } x > 0, \quad u(0,y) = g(y) \text{ für } y > 0$$

dar, wobei f und g stetig und beschränkt auf $(0,\infty)$ sind. Ist diese Lösung eindeutig?

Lösung. Wir verwenden die Fundamentallösung im $\mathbb{R}^2$,

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0).$$

Die Spiegelungsmethode liefert nach richtiger Anwendung beide Teile von (4.4).

1. Nachdem wir, durch addieren von gespiegelten Fundamentallösungen, nur Pole außerhalb von Ω einführen, und uns auf Ω am Ende beschränken, ist der erste Teil automatisch gegeben.
2. Wir wollen im zweiten Teil, dass die Greensche Funktion mit $(\xi,\eta) \in \partial\Omega$ verschwindet. Schematisch lässt sich das mit Matrizen ausdrücken. Der Text unter den Matrizen soll die Spiegelung beschreiben. Die Summe der Matrizen soll (auf dem Rand) 0 werden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & N & \\ W & & O \\ & S & \end{pmatrix}}_{\text{keine}} - \underbrace{\begin{pmatrix} & S & \\ W & & O \\ & N & \end{pmatrix}}_{x \text{ Achse}} - \underbrace{\begin{pmatrix} & N & \\ O & & W \\ & S & \end{pmatrix}}_{y \text{ Achse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} & S & \\ O & & W \\ & N & \end{pmatrix}}_{x\&y \text{ Achse}} = 0$$

Definition 4-3.png

4-3.png

Insgesamt erhalten wir durch die Spiegelungsmethode folgenden Kandidaten für die Greensche Funktion.

$$
\begin{aligned}
G(x,y,\xi,\eta) &= U\left(\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right|\right)-h_{(x,y)}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\\
&= U\left(\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right|\right)-U\left(\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\xi\\\eta\end{pmatrix}\right|\right)-U\left(\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\xi\\-\eta\end{pmatrix}\right|\right)+U\left(\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\xi\\-\eta\end{pmatrix}\right|\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\\
&\quad -\ln\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}+\ln\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}\Big)\\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)-\ln((x-\xi)^2+(y+\eta)^2)\\
&\quad -\ln((x+\xi)^2+(y-\eta)^2)+\ln((x+\xi)^2+(y+\eta)^2)\Big)
\end{aligned}
$$

Wir wollen die Repräsentationsformel für das Dirichlet-Problem benutzen um einen Lösungskandidaten zu finden. Unsere Rand-Funktionen können wir zu einer zusammenfassen.

$$
h:\partial\Omega\to\mathbb{C}:(x,y)\mapsto\begin{cases}u(0,y)=g(y), & x=0,\\ u(x,0)=f(x), & y=0\end{cases}
$$

4-4 (Repraesentationsformel fuer das Dirichlet-Problem.png

`Satz 4-4 (Repraesentationsformel fuer das Dirichlet-Problem.png`

Weil unser Dirichlet-Problem homogen ist, fällt das zweite Integral von (4.5) weg. Wir erhalten somit folgende Repräsentation von u.

$$u(x,y) = \int_{\partial\Omega} h(\xi,\eta) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y,\xi,\eta) \, \mathrm{d}s(\xi,\eta) = -\int_0^\infty \underbrace{h(0,\eta)}_{g(\eta)} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,0,\eta)}_{=:K_\xi(x,y,\eta)} \, \mathrm{d}\eta - \int_0^\infty \underbrace{h(\xi,0)}_{f(\xi)} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,0)}_{=:K_\eta(x,y,\xi)} \, \mathrm{d}\xi$$

Wir berechnen die (eigentlich negativen) Kerne explizit.

$$K_\xi(x,y,\eta) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{x^2+(y+\eta)^2} + \frac{x}{x^2+(y-\eta)^2}\right), \quad K_\eta(x,y,\xi) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{y^2+(x+\xi)^2} + \frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}\right)$$

Wir berechnen deren Integrale.

$$I_\eta := \int_0^\infty K_\xi(x,y,\eta) \, \mathrm{d}\eta = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctan}_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \operatorname{arctan}_2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\right) \overset{x \geq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{y}{x} - \arctan -\frac{y}{x}\right) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

$$I_\xi := \int_0^\infty K_\eta(x,y,\xi) \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctan}_2\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} - \operatorname{arctan}_2\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}\right) \overset{y \geq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{x}{x} - \arctan -\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y}$$

Um zu sehen, dass die Summe der Integrale konstant gleich 1 ist, bemerken wir, dass dies für $x := y := 1$ gilt, und die Ableitungen nach x und y verschwinden.

$$\implies I := I_\xi + I_\eta = \frac{2}{\pi}\left(\arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y}{x}\right) = 1$$

Der erste Teil von (4.4) funktioniert analog zu Beweis von Satz 4.5. Der zweite Teil nicht ganz ...

$$u(x,y)\begin{cases} \xrightarrow[y\to 0]{x\to x_0} f(x_0), \\ \xrightarrow[x\to 0]{y\to y_0} g(y_0). \end{cases}$$

Weil das sehr aufwändig ist, tun wir das aber nur für die x-Achse.

$$\begin{aligned} |u(x,y) - f(x_0)| &= \left|\int_0^\infty g(\eta)K_\xi(x,y,\eta)\ \mathrm{d}\eta + \int_0^\infty f(\xi)K_\eta(x,y,\xi)\ \mathrm{d}\xi - f(x_0)\cdot I\right| \\ &\leq \underbrace{\int_0^\infty K_\xi(x,y,\eta)|g(\eta) - f(x_0)|\ \mathrm{d}\eta}_{\cdots} + \underbrace{\int_0^\infty K_\eta(x,y,\xi)|f(\xi) - f(x_0)|\ \mathrm{d}\xi}_{\text{siehe Beweis von Satz 4.5}} \end{aligned}$$

Das zweite Integral wird im Beweis von Satz 4.5 abgeschätzt; Wir kümmern uns daher bloß um das erste. Dazu bemerken wir, dass g und f beschränkt sind.

$$\cdots \leq \sup_{\eta\in(0,\infty)} |g(\eta) - f(x_0)| \int_0^\infty K_\xi(x,y,\eta)\ \mathrm{d}\eta = \frac{2}{\pi}\underbrace{\sup_{\eta\in(0,\infty)} |g(\eta) - f(x_0)|}_{<\infty} \arctan\frac{y}{x} \xrightarrow{y\to 0} 0.$$

Eindeutigkeit gilt nicht, da $u(x,y) + Cxy$ für $C \in \mathbb{R}$ ebenso eine Lösung ist. □

Aufgabe 4. Betrachten Sie die *Helmholtz-Gleichung*

$$(\Delta + k^2)u = f \text{ in } \mathbb{R}^3$$

mit der Wellenzahl $k > 0$, der Wellenquelle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und dem Wellenfeld $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$.

(i) Berechnen Sie eine radialsymmetrische Funktion $G(x,\xi) = g(|x-\xi|)$, für die $(\Delta_x + k^2)G = \delta_\xi$ gilt, und die der *sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung*

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)g(r) = 0$$

genügt.

Anmerkung: Diese Bedingung stellt eine Randbedingung (im Unendlichen) dar, weshalb man G auch eine greensche Funktion nennt.

(ii) Stellen Sie die/eine Lösung u der Helmholtz-Gleichung mit Hilfe von $G(x,\xi)$ dar. Zeigen Sie, dass für eine radialsymmetrische Funktion f diese Lösung auch radialsymmetrisch ist.

(iii) Konstruieren Sie aus G zwei weitere Funktionen G_{Dir} und G_{Neu}, welche greensche Funktionen auf $\Omega := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ sind und auf $\partial\Omega$ homogene Dirichlet- bzw. homogene Neumann-Randbedingunen erfüllen.

Lösung. (i) Da unser Ableitungsoperator nur konstante Koeffizienten hat suchen wir eine Lösung mit Pol in 0 und verschieben diese dann nach Satz 3.21, den wir anwenden können da unser Differentialoperator ja konstante Koeffizienten hat, um eine Polstelle in ξ zu erhalten. Unsere Funktion g soll nun radialsymmetrisch sein mit Radius $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.Wir berechnen zuerst für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = g'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = g'(r)\frac{x_i}{r}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = g''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + g'(r)\frac{1}{r} - g'(r)\frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r^2}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$(\Delta_x + k^2)G = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + k^2 G = g''(r)\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{r^2} + g'(r)\frac{3}{r} - g'(r)\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{r^3} + k^2 g(r) = g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) + k^2 g(r)$$

Also wird $(\Delta_x + k^2)G = 0$ zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für g die für $r > 0$ zu lösen ist.

$$0 = g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) + k^2 g(r)$$

Durch Multiplikation mit r und unter der Verwendung der Produktregel bekommen wir

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rg) + k^2(rg) = 0$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind gegeben durch $g = C\frac{1}{r}e^{\pm ikr}, C \in \mathbb{C}$. Um der sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung zu genügen wählen wir $g = C\frac{1}{r}e^{ikr}$ mit der noch unbestimmten Konstante C und rechnen nach

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)g(r) &= \lim_{r\to\infty} r\left(C\frac{ike^{ikr}r - e^{ikr}}{r^2} - ikCe^{ikr}\frac{1}{r}\right) \\ &= \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{1}{r^2}e^{ikr}(ikr-1) - ikCe^{ikr}\frac{1}{r}\right) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}e^{ikr}ikrC - \frac{1}{r}e^{ikr}C - e^{ikr}ikC = 0\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Funktion $G(x, \xi) = g(|x - \xi|)$ auch Fundamentallösung ist sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ beliebig, $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)$, dann ist (mit PI nach Gauss)

$$
\begin{aligned}
\langle (\Delta_x + k^2)G(\cdot,0),\phi\rangle &= \langle G(\cdot,0),(\Delta_x+k^2)\phi\rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} G(x,0)(\Delta+k^2)\phi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} G(x,0)\Delta\phi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega_\varepsilon} G(x,0)k^2\phi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla G(x,0)\cdot\nabla\phi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega_\varepsilon} G(x,0)k^2\phi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(x,0)\nabla\phi\cdot\nu\ \mathrm{d}s \\
&= \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon}(\Delta_x+k^2)G(x,0)\phi(x)\ \mathrm{d}x}_{=0} + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(x,0)\nabla\phi\cdot\nu\ \mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\phi\nabla G(x,0)\cdot\nu\ \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Die beiden Randintegrale schauen wir uns für $\varepsilon \to 0$ noch einmal genauer an.

$$
\left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(x,0)\nabla\phi\cdot\nu\ \mathrm{d}s\right) \leq \underbrace{|g(\varepsilon)|}_{\frac{C}{\varepsilon}}\underbrace{\mathrm{meas}(\partial\Omega_\varepsilon)}_{\varepsilon^2 S_3}\max_{x\in\mathbb{R}^3}|\nabla\phi(x)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0
$$

Beim zweiten verwenden wir $\nu(x) = -r$, wenden den MWS der Integralrechnung an und wählen $C = -\frac{1}{S_3}$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\phi\nabla g(|x|)\cdot\nu\ \mathrm{d}s \overset{\text{MWS}}{=} \phi(x_\varepsilon)\frac{\partial g}{\partial r}(\varepsilon)\int_{\partial\Omega_\varepsilon} 1\ \mathrm{d}s \\
&= \phi(x_\varepsilon)C\frac{ike^{ik\varepsilon}\varepsilon - e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2}\varepsilon^2 S_3 = -\phi(x_\varepsilon)\underbrace{(ike^{ik\varepsilon}\varepsilon - e^{ik\varepsilon})}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}-1} \xrightarrow{\varepsilon\to 0}\phi(0)
\end{aligned}
$$

Also insgesamt

$$
\langle (\Delta_x+k^2)G(\cdot,0),\phi\rangle = \langle\delta,\phi\rangle
$$

(ii) Um eine Lösung mit $G(x,\xi)$ darzustellen verwenden wir wieder Satz 3.21. Dieser besagt, dass $G(x,0)*f$ eine distributionelle Lösung von $L(u) = f$ ist. Mit den Rechenregeln für Distributionen gilt für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$
\langle g*f,\phi\rangle = \langle g,\phi * Rf\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} g(|y|)(\phi * Rf)(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} g(|y|)f(x-y)\phi(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
$$

wobei $(Rf)(x) = f(-x)$ und die zweite Gleichheit wegen $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ gilt. Daher ist

$$
(G(x,0)*f)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} g(|y|)f(x-y)\ \mathrm{d}y
$$

Weil f eine Testfunktion ist, ist die Faltung $G * f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und damit auch eine klassische Lösung.

Um einzusehen, dass die Lösung für rotationssymmetrisches f auch rotationssymmetrisch ist seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $|x_1| = |x_2|$ und R die Rotationsabbildung, die x_2 auf x_1 abbildet. Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie von g und f erhalten wir

$$(g * f)(x_1) = \int_{\mathbb{R}^3} g(|x_1|)f(|x_1 - y|)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^3} g(|R(x_1)|)f(|R(x_1 - y)|)\ \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} g(|x_2|)f(|x_2 - Ry|)\ \mathrm{d}y \overset{TRAFO}{=} \int_{\mathbb{R}^3} g(|x_2|)f(|x_2 - u|) \underbrace{|\det(R^{-1})|}_{=1}\ \mathrm{d}u = (g * f)(x_2)$$

(iii) Wir schreiben noch einmal genau auf, was G_{Dir} und G_{Neu} erfüllen sollen:

$$\Delta G_{\text{Dir}}(\cdot, \xi) = \delta_\xi \text{ in } \Omega, \quad G_{\text{Dir}}(\cdot, \xi) = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$
$$\Delta G_{\text{Neu}}(\cdot, \xi) = \delta_\xi \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial G_{\text{Neu}}}{\partial \nu}(\cdot, \xi) = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Um die Dirichlet-Randbedingung zu erfüllen Spiegeln wir in der $(x, y)-$Ebene und erhalten so mit $x = (x_1, x_2, x_3), \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$G_{\text{Dir}}(x, \xi) = G(x, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) - G(x, (\xi_1, \xi_2, -\xi_3))$$

Diese Funktion hat in Ω nur den Pol (ξ_1, ξ_2, ξ_3) und erfüllt somit die erste Bedingung. Die Randbedingung rechnen wir nach:

$$G((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) - G((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)) =$$
$$-\frac{1}{S_3}\left(\frac{e^{ik\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}}}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}} - \frac{e^{ik\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}}}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}}\right) = 0$$

Um die Neumann-Randbedingunen zu erfüllen, Spiegeln wir ebenfalls aber addieren die Funktionen

$$G_{\text{Neu}}(x, \xi) = G(x, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) + G(x, (\xi_1, \xi_2, -\xi_3))$$

Auch diese hat in Ω nur einen Pol und die Randbedingung rechnen wir wieder nach, wobei der Normalenvektor durch $\nu = (0, 0, -\xi_3)$ gegeben ist.
Wir berechnen mit $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (0 - \xi_3)^2} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (0 + \xi_3)^2}$

$$S_3 \frac{\partial G_{\text{Neu}}}{\partial \nu}(x, \xi) = -S_3 \frac{\partial G_{\text{Neu}}}{\partial x_3}(x, \xi) = -S_3 (\frac{\partial G}{\partial x_3}((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) + \frac{\partial G}{\partial x_3}((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)))$$
$$= \frac{\frac{-2ik\xi_3}{r}\exp(ikr) - \exp(ikr)\frac{-2\xi_3}{r}}{r^2} + \frac{\frac{2ik\xi_3}{r}\exp(ikr) - \exp(ikr)\frac{2\xi_3}{r}}{r^2} = 0.$$

□

Aufgabe 5. Betrachten Sie den Differentialoperator $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ für $c \in \mathbb{R}_+$ und $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$G(x, t) = \frac{1}{2c} H(t)[H(x + ct) - H(x - ct)]$$

eine Fundamentallösung von L mit Pol in $(x, t) = (0, 0)$ ist, wobei H die Heaviside-Funktion ist.

(ii) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von L mit Pol in $(x,t) = (\xi, \tau)$.

(iii) Berechnen Sie $\partial_t G(x,t)$.

Lösung. (i)

$$\begin{aligned}
\langle LG, \phi\rangle = \langle G, L\phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} G(x,t) L\phi(x,t) \;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2c} \underbrace{H(t)}_{\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)} \left[\underbrace{H(x+ct) - H(x-ct)}_{\mathbb{1}_{(-ct,ct)}(x)}\right] \big(\phi_{tt}(x,t) - c^2\phi_{xx}(x,t)\big) \;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2c}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|/c}^{\infty} \phi_{tt}(x,t) \;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}x - c^2\int_0^\infty\int_{-ct}^{ct} \phi_{xx}(x,t)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2c}\left(\int_{\mathbb{R}} -\phi_t(x,|x|/c)\;\mathrm{d}x - c^2\int_0^\infty \phi_x(ct,t) - \phi_x(-ct,t)\;\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2c}\left(-\int_{\mathbb{R}} \phi_t(x,|x|/c)\;\mathrm{d}x - c^2\int_0^\infty \phi_x(ct,t)\;\mathrm{d}t + c^2\int_0^\infty \phi_x(-ct,t)\;\mathrm{d}t\right) \\
&\overset{(u=x/c)}{=} -\frac{1}{2c}\left(c\int_0^\infty \phi_t(cu,u)\;\mathrm{d}u + c\int_0^\infty \phi_t(-cu,u)\;\mathrm{d}u + c^2\int_0^\infty \phi_x(ct,t)\;\mathrm{d}t - c^2\int_0^\infty \phi_x(-ct,t)\;\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty c\phi_x(cu,u) + \phi_t(cu,u)\;\mathrm{d}u + \int_0^\infty -c\phi_x(-cu,u) + \phi_t(-cu,u)\;\mathrm{d}u\right) \\
&\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\left(\phi(cu,u)\big|_{u=0}^{\infty} + \phi(-cu,u)\big|_{u=0}^{\infty}\right) = \phi(0).
\end{aligned}$$

Die Gleichheit $(*)$ folgt hierbei aus der Kettenregel:

$$\frac{d}{du}\left(u \mapsto \phi(cu,u)\right) = \nabla\phi\begin{pmatrix} cu \\ u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c \\ 1\end{pmatrix} = c\phi_x(cu,u) + \phi_t(cu,u),$$
$$\frac{d}{du}\left(u \mapsto \phi(-cu,u)\right) = \nabla\phi\begin{pmatrix} -cu \\ u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -c \\ 1\end{pmatrix} = -c\phi_x(cu,u) + \phi_t(cu,u).$$

(ii) Weil L ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, erhalten wir gemäß Satz 3.21 eine Fundamentallösung im Pol $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ durch

$$(t,x) \mapsto G(x-\xi_1, t-\xi_2).$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t G, \phi\rangle = -\langle G, \partial_t\phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} G(x,t)\partial_t\phi(x,t)\;\mathrm{d}(x,t) &= -\frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|/c}^{\infty} \partial_t\phi(x,t)\;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}}\phi(x,|x|/c)\;\mathrm{d}x = \frac{1}{2c}\left(\int_0^\infty \phi(x,x/c)\;\mathrm{d}x + \int_0^\infty \phi(-x,x/c)\;\mathrm{d}x\right) \\
&\overset{(u=x/c)}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty \phi(cu,u) + \phi(-cu,u)\;\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6. Bestimmen Sie mit der Spiegelungsmethode eine greensche Funktion für das Dirichlet-Problem für Δ auf dem Keil

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \text{ und } 0 < y < x\}.$$

Lösung. Betrachte die Fundamentallösung von Δ mit Pol $(\xi,\eta)\in\Omega$. Nun ergänzen wir diese Fundamentallösung mit insgesamt sieben Spiegelpolen, mit alternierenden Vorzeichen. Die Pole lauten also wie folgt:

$$\begin{aligned}
+(\xi,\eta), &\quad -(\eta,\xi)\\
+(-\eta,\xi), &\quad -(-\xi,\eta)\\
+(-\xi,-\eta), &\quad -(-\eta,-\xi)\\
+(\eta,-\xi), &\quad -(\xi,-\eta)
\end{aligned}$$

Dass das so auch funktioniert lässt sich, so wie in Aufgabe 3, mit Matrizen veranschaulichen.

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\begin{pmatrix} NW & N & NO\\ W & & O\\ SW & S & SO\end{pmatrix}}_{\text{keine}} - \underbrace{\begin{pmatrix} SW & S & SO\\ W & & O\\ NW & N & NO\end{pmatrix}}_{x\text{ Achse}} - \underbrace{\begin{pmatrix} NO & N & NW\\ O & & W\\ SO & S & SW\end{pmatrix}}_{y\text{ Achse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} SO & S & SW\\ O & & W\\ NO & N & NW\end{pmatrix}}_{x\&y\text{ Achse}}\\
&- \underbrace{\begin{pmatrix} SO & O & NO\\ S & & N\\ SW & W & NW\end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale}} + \underbrace{\begin{pmatrix} SW & W & NW\\ S & & N\\ SO & O & NO\end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale \& } x\text{ Achse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} NO & O & SO\\ N & & S\\ NW & W & SW\end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale \& } y\text{ Achse}}\\
&- \underbrace{\begin{pmatrix} NW & W & SW\\ N & & S\\ NO & O & SO\end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale \& } x\&y\text{ Achse}} = 0
\end{aligned}$$

Die Summe aller dieser Fundamentallösung hat dann genau einen Pol in unserem Keil und lautet

$$\begin{aligned}
G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}(&\ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2) - \ln((x-\eta)^2+(y-\xi)^2) + \ln((x+\eta)^2+(y-\xi)^2) - \ln((x+\xi)^2+(y-\eta)^2) +\\
&\ln((x+\xi)^2+(y+\eta)^2) - \ln((x+\eta)^2+(y+\xi)^2) + \ln((x-\eta)^2+(y+\xi)^2) - \ln((x-\xi)^2+(y+\eta)^2))
\end{aligned}$$

Klarerweise ist diese Funktion eine Fundamentallösung in unserem Gebiet Ω. Für die Randbedingungen an $\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : y=0 \lor x=y\}$.

Fall 1: $y=0$

$$\begin{aligned}
G(x,0,\xi,\eta) &= \frac{1}{4\pi}(\ln((x-\xi)^2+\eta^2) - \ln((x-\eta)^2+\xi^2) + \ln((x+\eta)^2+\xi^2) - \ln((x+\xi)^2+\eta^2) +\\
&\quad \ln((x+\xi)^2+\eta^2) - \ln((x+\eta)^2+\xi^2) + \ln((x-\eta)^2+\xi^2) - \ln((x-\xi)^2+\eta^2))\\
&= \frac{1}{4\pi}(\underbrace{\ln((x-\xi)^2+\eta^2) - \ln((x-\xi)^2+\eta^2)}_{=0} - \underbrace{\ln((x-\eta)^2+\xi^2) + \ln((x-\eta)^2+\xi^2)}_{=0} +\\
&\quad \underbrace{\ln((x+\eta)^2+\xi^2) - \ln((x+\eta)^2+\xi^2)}_{=0} - \underbrace{\ln((x+\xi)^2+\eta^2) + \ln((x+\xi)^2+\eta^2)}_{=0})
\end{aligned}$$

Fall 2: $x=y$

$$\begin{aligned}
G(x,x,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}(&\ln((x-\xi)^2+(x-\eta)^2) - \ln((x-\eta)^2+(x-\xi)^2) + \ln((x+\eta)^2+(x-\xi)^2) - \ln((x+\xi)^2+(x-\eta)^2) +\\
&\ln((x+\xi)^2+(x+\eta)^2) - \ln((x+\eta)^2+(x+\xi)^2) + \ln((x-\eta)^2+(x+\xi)^2) - \ln((x-\xi)^2+(x+\eta)^2))\\
= \frac{1}{4\pi}(&\underbrace{\ln((x-\xi)^2+(x-\eta)^2) - \ln((x-\eta)^2+(x-\xi)^2)}_{=0} + \underbrace{\ln((x+\eta)^2+(x-\xi)^2) - \ln((x+\xi)^2+(x-\eta)^2)}_{=0} +\\
&\underbrace{\ln((x+\xi)^2+(x+\eta)^2) - \ln((x+\eta)^2+(x+\xi)^2)}_{=0} + \underbrace{\ln((x-\eta)^2+(x+\xi)^2) - \ln((x-\xi)^2+(x+\eta)^2)}_{=0}).
\end{aligned}$$

□

Partielle Differentialgleichungen

6. Übung am 5.11.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge und $u \in C^2(\Omega)$. Es gelte für alle $R > 0$ und $x \in \Omega$ mit $\overline{B_R(x)} \subseteq \Omega$ die Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \frac{1}{S_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, \mathrm{d}s,$$

wobei S_n die Oberfläche der Einheitskugel ist. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.

Lösung. Wir führen den Beweis mit Kontraposition. Sei also u nicht harmonisch, also gibt es $y \in \Omega$ mit $\Delta u(y) \neq 0$. Da Ω offen ist gibt es ein $R \in \mathbb{R}^+$ sodass $\overline{B_R(y)} \subseteq \Omega$. Wir definieren eine Funktion

$$m : (0, R) \to \mathbb{R} : r \mapsto \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x) \, \mathrm{d}H^{n-1}(x).$$

Wir erhalten für beliebiges $r \in (0, R)$ die Gleichheit

$$m(r) = \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x) \, \mathrm{d}H^{n-1}(x) = \frac{1}{S_n} \int_{\partial B_1(0)} u(y + rz) \, \mathrm{d}H^{n-1}(z)$$

und $z \in \partial B_1(0)$ erhalten wir mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz die Abschätzung

$$|\partial_r(u(y + rz))| = |\nabla u(y + rz) \cdot z| \leq \|\nabla u(y + rz)\|_2 \|z\|_2 \leq \sup \{\|\nabla u(y + rz)\|_2 : z \in \partial B_1(0)\} < \infty.$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz ist daher m differenzierbar und es gilt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} m'(r) &= \frac{1}{S_n} \int_{\partial B_1(0)} \partial_r(u(y + rz)) \, \mathrm{d}H^{n-1}(z) \\ &= \frac{1}{S_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(y + rz) \cdot z \, \mathrm{d}H^{n-1}(z) = \frac{1}{S_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(y + rz) \, \mathrm{d}\lambda^n(z) \\ &= \frac{1}{S_n r^n} \int_{B_r(y)} \Delta u \, \mathrm{d}\lambda^n(x) \end{aligned}$$

Schließlich erkennen wir, dass es ein $\rho \in (0, R)$ gibt so, dass Δu auf $B_\rho(y)$ das Vorzeichen nicht wechselt und daher sicher $m'(\rho) \neq 0$, also ist m nicht konstant und daher erfüllt u die Mittelwerteigenschaft nicht. □

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Aussage von Beispiel 1. schon für $u \in C^1(\Omega)$ gilt und u dann sogar in $C^\infty(\Omega)$ ist.
Hinweis: Schreiben Sie die Mittelwerteigenschaft als $u(x) = u * v$ für eine geeignete Funktion v; versuchen Sie dann v durch eine besser geeignete Funktion $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ zu ersetzen.

Lösung. Wir wählen eine radialsymmetrische Testfunktion φ mit den Eigenschaften

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B_1(0)}, \quad \varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}\lambda^n = 1.$$

Die skalierte Standardtestfunktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\int_{B_1(0)} \exp\left(\frac{1}{|y|^2-1}\right) dy\right) \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & x \in B_1(0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bietet sich dafür an. Weiters definieren wir für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi\big(\frac{1}{\varepsilon}x\big)$. Definiere die offene Menge $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Dann folgt für $x \in \Omega_\delta$ und beliebiges $\delta > 0$ wegen $B_\delta(x) \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
(u * \varphi_\delta)(x) &= \int_{B_\delta(x)} \varphi_\delta(x-y)u(y) \,\mathrm{d}\lambda^n = \int_0^\delta \int_{\partial B_\rho(x)} \varphi_\delta(x-y)u(y) \,\mathrm{d}H^{n-1}(y) \,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^\delta \delta^{-n}\varphi\Big(\frac{\rho}{\delta}\Big) \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \,\mathrm{d}H^{n-1}(y) \,\mathrm{d}\rho = \delta^{-n} \int_0^\delta \varphi\Big(\frac{\rho}{\delta}\Big) S_n \rho^{n-1} u(x) \,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\eta=\rho/\delta}{=} \delta^{-n} S_n u(x) \int_0^1 \varphi(\eta)(\eta\delta)^{n-1}\delta \,\mathrm{d}\eta = u(x) S_n \int_0^1 \varphi(\eta)\eta^{n-1} \,\mathrm{d}\eta \\
&= u(x) \int_0^1 \int_{\partial B_\eta(0)} \varphi(z) dz \,\mathrm{d}\eta = u(x) \int_{B_1(0)} \varphi(z) \,\mathrm{d}\lambda^n(z) = u(x)
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.14 erhalten wir also $u \in C^\infty(\Omega_\delta)$ und da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt mit der Tatsache, dass $\bigcup_{\delta>0} \Omega_\delta = \Omega$ schon $u \in C^\infty(\Omega)$. Also können wir Aufgabe 1 anwenden. Meines Erachtens nach sind die gegebenen Voraussetzungen sogar unnötig stark. Für $u \in L^1(\Omega)$ sollten alle Schritte auch gelten. □

Aufgabe 3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie:

(i) Wenn $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ konvex und u harmonisch ist, dann ist $v = \phi(u)$ subharmonisch, d.h. $\Delta v \geq 0$.

(ii) Ist $u \in C^3(\Omega)$ harmonisch, so ist $v = |\nabla u|^2$ subharmonisch.

Lösung. (i) Durch Anwenden von Ketten- und Produktregel erhalten wir

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi'(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \phi''(u(x))\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \phi'(u(x))\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}.$$

Aus der Konvexität von ϕ und der Harmonität von u folgt daraus

$$\Delta v(x) = \underbrace{\phi''(u(x))}_{\geq 0, \text{ weil } \phi \text{ konvex}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \phi'(u(x)) \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}}_{=0} \geq 0.$$

(ii) Nach Definition ist $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$. Wir berechnen

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)(x) =$$

$$2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)^2(x) + 2\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x_j \partial x_i}(x).$$

Durch Summation und aus dem Satz von Schwarz erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}|\nabla u|^2(x) = 2\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)^2(x) + \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j}\right)(x)\right].$$

Abermaliges Summieren liefert

$$\frac{1}{2}\Delta v(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}\right)^2(x)}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j}(x)}_{=0}\right) \geq 0.$$

□

Aufgabe 4. Es sei $(a,b)\subset\mathbb{R}$ ein beschränktes offenes Intervall und $L := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, mit $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $u\in C^2((a,b))\cap C([a,b])$ folgende Implikationen gelten.

(i) $Lu > 0$ in (a,b) $\implies$ u kann ihr Maximum nicht in (a,b) annehmen.

(ii) $Lu \geq 0$ in (a,b) $\implies$ u kann ihr Maximum nicht in (a,b) annehmen, außer u ist konstant.

Überlegen Sie, ob (i) und (ii) ihre Gültigkeit behalten, wenn g nur in jedem abgeschlossenen Intervall $[a',b']\subset(a,b)$, aber nicht unbedingt in $[a,b]$ beschränkt ist.

Lösung. (i) Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Sei x_0 das Maximum von u, also $\forall x\in(a,b): u(x)\leq u(x_0)$. Damit gilt $u'(x_0)=0$ und $u''(x_0)\leq 0$ und daher

$$0 < u''(x_0) + g(x_0)u'(x_0) = u''(x_0) \leq 0. \quad ↯$$

(ii) Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Wir wählen eine Stelle $x_0\in(a,b)$ an der u das Maximum annimmt, also $\forall x\in(a,b): u(x)\leq u(x_0)$. Weiters wissen wir, da u nicht konstant ist, dass es ein $\eta\in(a,b)$ gibt mit $u(\eta)<u(x_0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\eta > x_0$. Nun definieren wir

$$x_1 := \sup\{y\in[x_0,b) \mid \forall z\in[x_0,y]: u(z)=u(x_0)\} < b.$$

————————————alte Version————————————————————

Als nächstes wählen wir $0<\delta_0<b-x_1$. Nach Definition von x_1 finden wir ein $x_2\in(x_1,x_1+\delta_0)$ mit $u(x_2)<u(x_1)$ und danach mit dem Mittelwertsatz ein $x_3\in(x_1,x_2]$ mit $u'(x_3)<0$. Da x_1 Maximum von u ist gilt $u'(x_1)=0$ und $u''(x_1)\leq 0$ daher finden wir wieder mit dem Mittelwertsatz ein $x_4\in(x_1,x_3]$ mit $u''(x_4)<0$. Als nächstes wählen wir $\delta_1\in(0,\delta_0)$ mit $u''(x_4)<-\delta_1$. Sei

$$M := \sup\{|g(y)| : y\in[x_1,x_1+\delta_1]\}.$$

Nun wählen wir $\delta_2\in(0,\delta_1)$ mit $\delta_2<\frac{1}{2M}$. Nach Voraussetzung gilt $u''(x_1)=u''(x_1)+g(x_1)u'(x_1)\geq 0$, also $u''(x_1)=0$. Nach dem Zwischenwersatz können wir daher

$$x_5 := \inf\{z\in(x_1,x_1+\delta_1): u''(z)=-\delta_2\}$$

definieren. Da die Menge wegen der Stetigkeit von u'' abgeschlossen ist handelt es sich tatsächlich um ein Minimum. Noch ein letzetes Mal verwenden wir den Mittelwertsatz und erhalten ein $x_6\in(x_1,x_5)$ mit

$$u'(x_5) = u'(x_1) + u''(x_6)(x_5-x_1) = u''(x_6)(x_5-x_1)$$

Wir bemerken hier noch, dass $u''(x_6) < 0$ nach Entstehung aus dem Mittelwertsatz. Wäre $u''(x_6) < -\delta_2$ so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz noch ein $x_7 < x_6 < x_5$ mit $u''(x_7) = -\delta_2$, das kann nach Definition von x_5 nicht sein. Also gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le u''(x_5) + g(x_5)u'(x_5) = u''(x_5) + g(x_5)u''(x_6)(x_5 - x_1) \\ &\le u''(x_5) + M|u''(x_6)|\frac{1}{2M} \le -\delta_2 + \frac{\delta_2}{2} = -\frac{\delta_2}{2} < 0 \end{aligned}$$

Ein Widerspruch!

——————————neue Version——————————

Als nächstes wählen wir $0 < \delta_0 < b - x_1$.

$$M := \sup\{|g(y)| : y \in [x_1, x_1 + \delta_0]\}.$$

Nun wähle $\delta_1 < \frac{1}{2M}$. Nach Definition von x_1 finden wir ein $x_2 \in (x_1, x_1 + \delta_1)$ mit $u(x_2) < u(x_1)$ und danach mit dem Mittelwertsatz ein $x_3 \in (x_1, x_2]$ mit $u'(x_3) < 0$. Da x_1 Maximum von u ist gilt $u'(x_1) = 0$ und $u''(x_1) \le 0$ daher finden wir wieder mit dem Mittelwertsatz ein $x_4 \in (x_1, x_3]$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u''(x_4) < -\frac{1}{n}$.

$$x_5 := \min\left\{x \in (x_1, x_1 + \delta_1) : u''(x) = -\frac{1}{n}\right\}$$

Wieder mit dem Mittelwertsatz existiert ein $x_6 \in (x_1, x_5)$

$$u'(x_6) = u'(x_1) + u''(x_6)(x_5 - x_1) = u''(x_6)(x_5 - x_1)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le u''(x_5) + g(x_5)u'(x_5) = u''(x_5) + g(x_5)u''(x_6)(x_5 - x_1) \\ &\le -\frac{1}{n} + M\frac{1}{n}\frac{1}{2M} = -\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) < 0. \end{aligned}$$

Ein Widerspruch!

$\square$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass folgendes Problem nur die triviale Lösung $u = 0$ hat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u^3 \text{ für } x^2 + y^2 < 1, \\ u &= 0 \text{ für } x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Lösung. Sei $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^0(\overline{B_1(0)})$ eine Lösung des Problems. Dann ist auch $v := u^2$ in dieser Menge und es gilt

$$v_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2uu_x) = 2u_x^2 + 2uu_{xx}$$

und analog für v_{yy} also gilt in $B_1(0)$ die Gleichung

$$\Delta v = 2(u_x^2 + u_y^2) + 2u\Delta u = 2(u_x^2 + u_y^2) + 2u^4 \ge 0.$$

und weiters gilt $v \ge 0$ sowie auf $\partial B_1(0)$ die Gleichung $v = 0$. Nach dem Maximumsprinzip nimmt v das Maximum am Rand an, deshalb muss $v = 0$ auf ganz $B_1(0)$ gelten, also ist $u^2 = v = 0$ und daher $u = 0$.

$\square$

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Ist w harmonisch auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $x \in \Omega$ sodass $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$, dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$:

$$|\partial_i w| \leq \frac{n}{r} \|w\|_{L^\infty(B_r(x))}.$$

Zeigen Sie weiters, dass für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k$ gilt:

$$|\partial^\alpha w(x)| \leq \left(\frac{kn}{r}\right)^k \|w\|_{L^\infty(B_r(x))}.$$

Lösung. Mit dem Satz von Schwarz erhalten wir, dass auch $\partial_i w$ harmonisch ist. Somit folgt mit der Mittelwerteigenschaft, sowie dem Satz vor dem Satz von Gauß, dass

$$\begin{aligned}
|\partial_i w(x)| &= \left| \frac{n}{S_n r^n} \int_{B_r(x)} \partial_i w(y) dy \right| \\
&= \left| \frac{n}{S_n r^n} \int_{\partial B_r(x)} w(y) \nu_i(y) dS(y) \right| \\
&= \left| \frac{n}{S_n r^n} \int_{\partial B_r(x)} w(y) \frac{y_i}{|y|} dS(y) \right| \\
&\leq \frac{n}{S_n r^n} S_n r^{n-1} \|w\|_{L^\infty(\partial B_r(x))} \\
&= \frac{n}{r} \|w\|_{L^\infty(\partial B_r(x))} \leq \frac{n}{r} \|w\|_{L^\infty(B_r(x))}.
\end{aligned}$$

Sei α nun ein beliebiger Multiindex der Ordnung k. Wähle i und β, sodass $\partial^\alpha w = \partial_i(\partial^\beta w)$. ($\beta$ hat Ordnung $k-1$.) Da $\partial^\alpha w$ wieder harmonisch ist, können wir die obere Abschätzung anwenden.

$$\implies |\partial^\alpha w(x)| = |\partial_i(\partial^\beta w)(x)| \leq \frac{kn}{r} \left\| \partial^\beta w \right\|_{L^\infty(B_{r/k}(x))}$$

Jetzt gilt es die Prozedur zu iterieren. Für $y \in B_{r/k}(x)$ gilt $B_{r/k}(y) \subset B_{2r/k}(x) \subset \Omega$. Analog zu obiger Rechnunge erhalten wir also Folgendes. (γ sei dabei ein Multiindex mit Ordnung $k-2$.)

$$\implies |\partial^\beta w(y)| = \dots \leq \frac{kn}{r} \|\partial^\gamma w\|_{L^\infty(B_{r/k}(y))} \leq \frac{kn}{r} \|\partial^\gamma w\|_{L^\infty(B_{2r/k}(x))}$$

Weil y beliebig war, gilt die Abschätzung auch mit linker Seite $\left\| \partial^\beta w \right\|_{L^\infty(B_{r/k}(x))}$. Nach der k-ten Iteration erhalten wir damit die Behauptung:

$$|\partial^\alpha w(x)| \leq \left(\frac{kn}{r}\right)^k \|w\|_{L^\infty(B_{kr/k}(x))}$$

$\square$

Aufgabe 7. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in H^1(U)$. Angenommen, $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $\sup_{y \in \mathbb{R}} |f'(y)| < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \circ u \in H^1(U)$ und $\partial_i(f \circ u) = f'(u)\partial_i u$ gilt. Zeigen Sie dasselbe Resultat für unbeschränkte U unter der zusätzlichen Voraussetzung $f(0) = 0$.

Lösung. Wir wissen zweierlei Dinge:

$$H^1(U) := \overline{\{u \in C^\infty(U); \|u\|_{H^1(U)} < \infty\}}$$
$$u \in H^1(U) \iff u \in L^2(U) \wedge \partial_i u \in L^2(U), \quad i = 1, \dots, n.$$

Definitionsgemäß können wir also u in der $\|\cdot\|_{H^1(U)}$-Norm durch $C^\infty(U)$-Funktionen u_n mit $\|u_n\|_{H^1(U)} < \infty$ approximieren. Wir zeigen zuerst $f \circ u \in L^2(\Omega)$. Da $f \in C^1(\mathbb{R})$ und die Ableitung beschränlt ist, ist f auch Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L := \sup_{y\in\mathbb{R}} |f'(y)|$ (folgt aus MWS) und es folgt

$$\begin{aligned}
\|f \circ u - f \circ u_n\|^2_{L^2(U)} &= \int_U (f \circ u - f \circ u_n)^2 dx = \int_U (f(u(x)) - f(u_n(x)))^2 dx \\
&\leq \int_U L^2(u(x) - u_n(x))^2 dx = L^2\|u - u_n\|^2_{L^2(U)} \leq L^2\|u - u_n\|^2_{H^1(U)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Fall 1: U unbeschränkt, aber dafür $f(0) = 0$:

$$\|f \circ u_n\|^2_{L^2(U)} = \int_U f(u_n(x))^2 dx = \int_U [f(u_n(x)) - f(0)]^2 dx \leq \int_U L^2 u_n(x)^2 = L^2\|u_n\|_{L^2(U)} < \infty$$

Fall 2: U beschränkt: (für beschränkte Mengen gilt $L^2(U) \subset L^1(U)$)

$$\begin{aligned}
\|f \circ u_n\|^2_{L^2(U)} &= \int_U f(u_n(x))^2 dx = \int_U (f(u_n(x)) - f(0))^2 dx - \int_U f(0)^2 dx + 2f(0) \int_U f(u_n(x)) dx \\
&\leq \int_U L^2|u_n(x)|^2 dx - \lambda^n(U) f(0)^2 + 2f(0) \int_U f(u_n(x)) - f(0) + f(0) dx \\
&\leq L^2\|u_n\|_{L^2(U)} + \lambda^n(U) f(0)^2 + 2f(0)L \int_U u_n(x) dx \\
&\leq L^2\|u_n\|_{H^1(U)} + \lambda^n(U) f(0)^2 + 2f(0)L\|u_n\|_{L^1(U)} < \infty
\end{aligned}$$

Da alle $f \circ u_n \in L^2(U)$ ist aufgrund der Abgeschlossenheit von $L^2(U)$ auch $f \circ u \in L^2(U)$.
Jetzt müssen wir noch die distributionellen Ableitungen von $f \circ u$ nachprüfen: Sei dazu $\phi \in \mathcal{D}(U)$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\langle \partial_i(f \circ u_n), \phi \rangle &= -\langle f \circ u_n, \partial_i \phi \rangle \\
&= -\int_U f(u_n(x))\partial_i\phi(x) dx = \int_U \partial_i f(u_n(x))\phi(x) dx - \underbrace{\int_{\partial U} f(u_n(x))\phi(x) dx}_{=0} \\
&= \int_U f'(u_n(x))\partial_i u_n(x)\phi(x) dx = \langle f'(u_n)\partial_i u_n, \phi \rangle
\end{aligned}$$

Dichtheitsargumente:

$$\langle \partial_i(f \circ u_n) - \partial_i(f \circ u), \phi \rangle = \int_U [f(u_n(x)) - f(u(x))]\partial_i\phi(x) dx \leq \|f \circ u_n - f \circ u\|_{L^2(U)}\|\partial_i\phi\|_{L^2(U)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Damit folgt

$$\langle \partial_i(f \circ u), \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \partial_i(f \circ u_n), \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f'(u_n)\partial_i u_n, \phi \rangle.$$

Berechnen wir nun den letzten Grenzwert

$$\begin{aligned}
\langle f'(u_n)\partial_i u_n - f'(u)\partial_i u, \phi \rangle &= \int_U [f'(u_n(x))\partial_i u_n(x) - f'(u(x))\partial_i u(x)]\phi(x) dx \\
&= \int_U [(f'(u_n(x)) - f'(u(x)))\partial_i u_n(x) + (\partial_i u_n(x) - \partial_i u(x))f'(u(x))]\phi(x) dx \\
&\leq \|(f'(u_n) - f'(u))\phi(x)\|_{L^2(U)} \underbrace{\|\partial_i u_n(x)\|_{L^2(U)}}_{<\infty} + \underbrace{\|\partial_i u_n - \partial_i u\|_{L^2(U)}\|f'(u)\phi\|_{L^2(U)}}_{\to 0}
\end{aligned}$$

Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir aufgrund $(f'(u_n(x) - f'(u(x))^2 < 4\sup_{y\in\mathbb{R}} f'(y)^2$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_U (f'(u_n(x)) - f'(u(x)))^2\phi(x)^2dx &= \int_{\text{supp }(\phi)} \phi(x)^2 \lim_{n\to\infty}(f'(u_n(x)) - f'(u(x)))^2dx\\ &= \int_{\text{supp }(\phi)} \phi(x)^2(f'(u(x)) - f'(u(x)))^2dx = 0.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also $\langle\partial_i(f\circ u), \phi\rangle = f'(u)\partial_i u$. Jetzt gilt es noch zu überprüfen, dass diese distributionellen Ableitungen wieder in $L^2(U)$ liegen:

$$\int_U (f'(u(x))\partial_i u(x))^2dx \le \sup_{y\in\mathbb{R}} f'(y)^2\|\partial_i u\|^2_{L^2(U)} \le \sup_{y\in\mathbb{R}} f'(y)^2\|u\|^2_{H^1(U)} < \infty.$$

Damit ist auch $f\circ u \in H^1(U)$ und das Beispiel ist gelöst. □

Aufgabe 8. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Aufgabe: ist $u \in H^1(\Omega)$, dann sind auch $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = -\min\{u, 0\}$ und $|u|$ in $H^1(\Omega)$. (Hinweis: die ersten beiden Aussagen ergeben sich direkt aus der dritten.)

Lösung. Wir zeigen nach dem Hinweis zuerst $|u| \in H^1(\Omega)$ für $u \in H^1(\Omega)$. Dazu approximieren wir die Betragsfunktion mit $n \in \mathbb{N}$ bel. durch

$$f_n(x) := \begin{cases} p_n(x) & , |x| < \frac{1}{n} \\ |x| & , |x| \ge \frac{1}{n}\end{cases}$$

wobei p_n das Hermite-Interpolationspolynom ist, sodass also $p_n(\pm\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ und $p_n'(\pm\frac{1}{n}) = \pm 1$ gilt. Explizit ist

$$p_n(x) = -\frac{n^3}{2}x^4 + \frac{3n}{2}x^2 = x^2(-\frac{n^3}{2}x^2 + \frac{3n}{2})$$

Es gilt also $f_n \in C^1(\mathbb{R}), f_n(0) = 0, \sup_{y\in\mathbb{R}}|f_n'(y)| < \infty$ und damit können wir nach Aufgabe 7 schließen, dass $\forall n \in \mathbb{N} : f_n\circ u \in H^1(\Omega)$ und $\partial_i(f_n\circ u) = f_n'\circ u\partial_i u$. Nun gilt es

$$\|f_n\circ u - f\circ u\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also die Konvergenz von $f_n\circ u$ gegen $|u|$ in $H^1(\Omega)$ zu zeigen. Dazu zeigen wir die Konvergenz der Funktionenfolge als auch deren Ableitungen in $L^2(\Omega)$. Um später majorisierte Konvergenz anwenden zu können, zeigen wir zuerst noch $\forall x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] : |x| \ge p_n(x)$. Dazu sei $g_n(x) := x - p_n(x)$, explizit

$$\begin{aligned} g_n(x) &= x(1 + \frac{n^3}{2}x^3 - \frac{3n}{2})\\ g_n(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{n} \vee x = -\frac{2}{n}\end{aligned}$$

Zwischen den Nullstellen gibt es keine Vorzeichenwechsel, deswegen schließen wir mit

$$g_n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}(1 + \frac{1}{16} - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2n}\frac{5}{16} > 0$$

dass $\forall x \in [0, \frac{1}{n}] : g_n(x) \geq 0$, also $x \geq p_n(x)$. Weil die p_n gerade Funktionen sind, gilt dann schließlich $\forall x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] : |x| \geq p_n(x)$. Nun zeigen wir die Konvergenz in $L^2(\Omega)$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f \circ u - f_n \circ u\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u(x)) - f_n(u(x))^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(u(x))\Big(|u(x)| - p_n(u(x))\Big)^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(u(x))}_{0} \Big(|u(x)| - p_n(u(x))\Big)^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

Wobei wir unsere integrierbare Majorante mit $|\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(u(x))\Big(|u(x)| - p_n(u(x))\Big)^2| \leq 4|u(x)|^2$ wobei wir die zuvor gezeigte Abschätzung der p_n verwenden. Nun zeigen wir die Konvergenz der Ableitungen, dabei zeigen wir, dass die Folge der Ableitungen eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ ist, womit wir erhalten, dass $f_n \circ u$ eine Cauchy-Folge in $H^1(\Omega)$ ist.
Seien also $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, $\epsilon > 0$ beliebig.

$$\|\partial_i(f_n \circ u) - \partial_i(f_m \circ u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|(f'_n \circ u - f'_m \circ u)\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \Big(f'_n(u(x)) - f'_m(u(x))\Big)^2 (\partial_i u(x))^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(u(x))\Big(p'_n(u(x)) - f'_m(u(x))\Big)^2 (\partial_i u(x))^2 \, \mathrm{d}x = \cdots$$

Wir machen eine Fallunterscheidung für $p'_n - f'_m$:

Fall i: $\frac{1}{m} \leq y \leq \frac{1}{n}$: Hier gilt

$$f'_m(y) - p'_n(y) = 1 - 3ny + 2n^3y^3 \leq 1 + 2n^3y^3 \leq 3$$
$$p'_n(y) - f'_m(y) = 3ny - 2n^3y^3 - 1 \leq 3ny \leq 3$$

Fall ii: $0 \leq y < \frac{1}{m}$: Hier gilt

$$p'_m(y) - p'_n(y) = 2y^3(n^3 - m^3) + 3y(m - n) \leq 3\frac{m - n}{m} \leq 3(1 - \frac{n}{m}) \leq 3$$
$$p'_n(y) - p'_m(y) = 2y^3(m^3 - n^3) + 3y(n - m) \leq 2y^3(m^3 - n^3) \leq 3$$

Wir können also $|p'_n - f'_m|$ in jedem Fall mit 3 abschätzen (da die Ableitungen ungerade Funktionen sind) und erhalten so insgesamt

$$\cdots \leq 9 \int_\Omega \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(u(x))(\partial_i u(x))^2 \, \mathrm{d}x < \epsilon \quad \text{für } n \text{ hinreichend groß}$$

Diese letzte Ungleichung erhalten wir widerum durch majorisierte Konvergenz, da sich der Integrand durch $(\partial_i(u(x)))^2$ abschätzen lässt.
Da wir nun wissen, dass $f_n \circ u$ eine Cauchy-Folge in $H^1(\Omega)$ ist und wir schon $f_n \circ u \to f \circ u$ in $L^2(\Omega)$ gezeigt haben, folgern wir $f_n \circ u \to f \circ u$ in $H^1(\Omega)$.
Um noch die ersten beiden Aussagen zu zeigen schreiben wir

$$\max\{u, 0\} = \frac{u + 0 + |u - 0|}{2} \in H^1(\Omega)$$
$$-\min\{u, 0\} = -\frac{u + 0 - |u - 0|}{2} \in H^1(\Omega)$$

$\square$