13.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. Bestimmen Sie die Momente
$$M_n = \mathbb{E}(X^n)$$
und die Momentenerzeugende
$$M(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$$
für die Gammaverteilung.

2. Bestimmen Sie die Momente und die Momentenerzeugende für die Laplaceverteilung mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

3. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1.
   (a) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$
   (b) Zeigen Sie, dass $Y_n - \log(n)$ in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzverteilung (Gumbelverteilung, doppelte Exponentialverteilung).
   (c) Bestimmen Sie die momentenerzeugende Funktion dieser Verteilung.

4. X und Y seien unabhängige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $X+Y$ genau dann integrierbar ist, wenn X und Y integrierbar sind. (schätzen Sie in $\mathbb{E}(Y[|X| < M])$ $|Y|$ mit der Dreiecksungleichung ab; damit kann man zeigen, dass in der Bedingung für die Existenz von $\mathbb{E}(X)$ der Realteil von ϕ_X durch den Betrag ersetzt werden kann).

5. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit der Dichte
$$f(x) = \frac{1}{|x|^3}[|x| \geq 1].$$
Zeigen Sie, dass
$$\frac{S_n}{\sqrt{n\log(n)}}$$
in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung konvergiert (Setzen Sie
$$X_{nk} = \frac{X_k}{\sqrt{n\log(n)}}[|X_k| \leq \sqrt{n\log(n)}],$$
zeigen Sie, dass
$$\frac{S_n}{\sqrt{n\log(n)}} - \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$$
in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, und wenden Sie Lindeberg-Feller auf $\sum_k X_{nk}$ an).

6. Die kumulantenerzeugende Funktion einer Zufallsvariable X ist

$$K_X(t) = \log M_X(t).$$

Wenn M_X in einer Umgebung von 0 existiert, dann kann man K_X als Potenzreihe schreiben:

$$K_X(t) = \sum_n \frac{\kappa_n t^n}{n!}.$$

Die Koeffizienten κ_n heißen die Kumulanten von X. Drücken Sie κ_n, $n = 2, \ldots, 5$ durch die zentralen Momente

$$m_n = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^n)$$

von X aus. (mit $\mu = \mathbb{E}(X)$ und $Y = X - \mu$ gilt $K_X(t) = \mu t + K_Y(t)$; diese Darstellung der Kumulanten ist einfacher als die durch die gewöhnlichen Momente, die allerdings im Internet leichter zu finden ist).

7. Bestimmen Sie die Schiefe

$$\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}$$

und die Kurtosis

$$\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}$$

für die stetige Gleichverteilung, die Exponentialverteilung und die Laplaceverteilung.