ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020
BLATT 12 (17. 12. 2020)

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Sei u eine klassische Lösung der *Telegraphengleichung*

$$\begin{cases} u_{tt} + du_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega\,,\ t > 0\,, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,,\ t > 0\,, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega\,, \\ u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{in } \Omega\,, \end{cases}$$

wobei $d > 0$ konstant, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist.

(i) Zeigen Sie durch eine formale Rechnung, dass die Energie $\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)dx$ uniform beschränkt in $t \in (0, \infty)$ ist.

(ii) Bestimmen Sie formal eine Lösung bzgl. eines geeigneten ONS.

(iii) Zeigen Sie, dass $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}$ exponentiell schnell für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, falls $u_1 = 0$. Gilt diese Aussage auch für $d = 0$?

2. Seien das elektrische Feld $E = (E_1, E_2, E_3)^T$ und das magnetische Feld $B = (B_1, B_2, B_3)^T$ glatte Lösungen der *Maxwell-Gleichungen*

$$E_t = \mathrm{rot} B\,, \quad B_t = -\mathrm{rot} E\,, \quad \mathrm{div} E = \mathrm{div} B = 0$$

ohne Ladungen und Ströme, wobei $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $u = E_i$ bzw. $u = B_i$, $i = 1, 2, 3$, die Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ löst.

(ii) Zeigen Sie, dass die Energiedichte $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|E|^2 + |B|^2)dx$ zeitlich konstant ist.

3. Betrachten Sie die lineare Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)\,, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3\,, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3\,. \end{cases}$$

Leiten Sie die *Kirchhoffsche Formel*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_1(y)ds(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_0(y)ds(y)\right)$$

für die Lösung der Wellengleichung her, wobei $B(x,t)$ die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius t ist.

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

Hinweis: Betrachten Sie für eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ die Mittelwerte

$$\begin{aligned} U(x,r,t) :=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y,t)ds(y), \\ G(x,r) :=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_0(y)ds(y), \\ H(x,r) :=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_1(y)ds(y). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^3$ der Mittelwert $U \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$ die *Euler-Poisson-Darboux-Gleichung*

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{2}{r}U_r = 0 & \text{für } (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \\ U(r,0) = G & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \\ U_t(r,0) = H & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \end{cases}$$

erfüllt und $\tilde{U} := rU$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{für } (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \\ \tilde{U}(r,0) = rG & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \\ \tilde{U}_t(r,0) = rH & \text{für } r \in (0,\infty)\,, \\ \tilde{U}(0,t) = 0 & \text{für } t \in (0,\infty)\,. \end{cases}$$