• gleiche VSen an L wie in §7.2. (inkl. $A, c \in C^\infty(\bar\Omega)$)

Satz 7.6: Zusätzlich zu S. 7.5 gelte $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. $\Rightarrow$

$u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Bew-Idee (Details: Skript)

Schritt 1:

(v_k) ist ON-Basis von $L^2(\Omega)$, aber auch orthogonal bez. (H_0^1-äquiv.)

Skalarprodukt $\quad a(u,v) := \int_\Omega (\nabla u^T A(x) \nabla v + c\, u v)\,dx$; da:

$$a(v_j, v_k) = (L v_j, v_k)_{L^2} = \lambda_j (v_j, v_k)_{L^2} = \lambda_j \delta_{jk}.$$

Schritt 2:

Sei $U_N(t) := \sum_{k=1}^N u_k(t) v_k \in H_0^1(\Omega)$ Partialsumme der Fourier-Reihe von $u(t)$, und $F_N(t)$ von $f(t)$

$\Rightarrow a(U_N(0), U_N(0))$ ist glm. beschr. in $N \in \mathbb{N}$:

$$a(U_N(0), U_N(0)) = \sum_{j,k=1}^N u_j(0) u_k(0)\, a(v_j, v_k) = \sum_{k=1}^N \lambda_k u_k(0)^2 \le \sum_{k=1}^\infty \lambda_k u_k(0)^2 =$$

$$= a(u(0), u(0)) = a(u_0, u_0) \le C \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Schritt 3:

U_N, F_N erfüllen (siehe (89a), Satz 7.5):

$$U_{N,tt} + L(U_N) = F_N \quad | \cdot U_{N,t}, \int_\Omega \ldots dx$$

analog zu (90)–(91):

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (U_{N,t}^2 + \nabla U_N^T \underbrace{A(x)}_{0<\alpha\le} \nabla U_N + \underbrace{c}_{0\le} U_N^2)\,dx}_{=:G(t)} = \int_\Omega F_N U_{N,t}\,dx \overset{\text{Cauchy-Schwarz, Young}}{\le} \frac{1}{2} \underbrace{\int_\Omega F_N^2\,dx}_{=:H(t)} + \frac{1}{2} \int_\Omega U_{N,t}^2\,dx \quad (92)$$

$\Rightarrow G'(t) \le H(t) + G(t) \Rightarrow$ Gronwall: $G(t) \le e^t \left(G(0) + \int_0^t H(s)\,ds\right)$, $t \ge 0$

• $G(0) = \|U_{N,t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + a(U_N(0), U_N(0)) \overset{\text{Schritt 2}}{\le} \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}$

$\Rightarrow \|U_{N,t}(t)\|^2_{L^2} + \alpha \|\nabla U_N(t)\|^2_{L^2} \le C(t) := e^t \left(\|u_1\|^2_{L^2} + C\|u_0\|^2_{H^1} + \int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2}\,ds\right)$,

d.i. glm. Abschätzung in $N \in \mathbb{N}$.

• Limes $N \to \infty$ liefert: $u_t(t) \in L^2(\Omega)$, $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ $\quad \forall t \ge 0$.

• noch z.z.: Stetigkeit von u_t. $\square$