1.Übung zur EIMA / 10.10.2018

(Zeit und Ort wie in Lineare Algebra 1 Übungsgruppen)

---

1. Zeige, dass die folgenden Aussageformen allgemeingültig sind:
   - $A \Rightarrow A \vee B$
   - $(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   - $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$
2. Beantworte für die folgenden Aussageformen die beiden Fragen: Ist die Aussageform allgemeingültig ? Gibt es Aussagen A und B für die die Aussageform wahr ist ?
   - $(\neg(A \wedge B) \wedge B) \Rightarrow A$
   - $(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg(A \wedge \neg B)$
   - $(\neg A) \wedge A$
3. Seien M, N Mengen. Zeige, dass
   $$M \subseteq N \;\Leftrightarrow\; M \cap N = M \;\Leftrightarrow\; M \cup N = N$$
4. Auf welchen allgemeingültigen Aussageformen beruht die Gleichheit $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$.
5. Sei X eine Menge, und $M, N \subseteq X$.
   - Zeige, dass $(X \setminus M) \cap (M \cup N) \subseteq N$. Welche Tautologie(n) haben Sie im Beweis benützt ?
   - Welche Mengenbeziehung erhält man, wenn man die Tautologie $\neg(A \wedge B) \wedge B \;\Rightarrow \neg A$ benützt ?
6. Betrachte die Aussage

   A: "Sei $\sim$ eine Relation auf einer nichtleeren Menge X. Ist $\sim$ symmetrisch und transitiv, so ist $\sim$ auch reflexiv."

   (i) Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort "wahr" lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort "falsch", finde ein Gegenbeispiel.

   (ii) Ist der folgende Beweis der Aussage A wahr oder falsch?

   Wir müssen zeigen dass stets $x \sim x$ gilt. Sei $x \sim y$, dann ist wegen der Symmetrie auch $y \sim x$, und wegen der Transitivität daher auch $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv.

   (iii) Falls Ihre Antwort in (ii) "falsch" lautet, finde den Fehler im Beweis.

   (iv) Muss man den in (ii) genannten Beweis lesen um zu entscheiden ob er wahr oder falsch ist ?
7. Eine, möglicherweise unendlich große, Gruppe von Mathematikern spielt mit einem Physiker ein Spiel. Die Spielregeln sind wie folgt: Zu Spielbeginn setzt der Physiker jedem Mathematiker einen Hut auf der rot oder grün sein kann. Jeder der Mathematiker sieht wohl die Farbe der Hüte aller anderen, nicht jedoch die Farbe seines eigenen Hutes. In geheimer Abstimmung schreibt dann jeder der Mathematiker auf einen Zettel welche Farbe er glaubt dass sein Hut hat. Die Mathematiker gewinnen, wenn sich nur endlich viele von ihnen irren. Dabei dürfen sich die Mathematiker vor Spielbeginn auf eine Strategie einigen, während des Spiels ist jedoch jegliche Kommunikation verboten.

   Gibt es eine Strategie, sodass die Mathematiker sicher gewinnen ? Falls ja, finde eine.

Hinweis. Nachdem wir Mathematiker sind und nicht Physiker liegt die Vermutung nahe, dass die Antwort auf diese Frage "ja" lautet. Eine mögliche Strategie benützt eine geeignete Äquivalenzrelation und das Auswahlaxiom.

8. Seien M, N Mengen, und $f : M \to N$ eine Funktion. Wir definieren eine Relation $\ker f$ auf M als

$$\ker f := \big\{(x, y) \in M \times M : \ f(x) = f(y)\big\}.$$

Zeige, dass $\ker f$ eine Äquivalenzrelation ist.

9. Seien M, N Mengen, $f : M \to N$ eine Funktion, und $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M. Bezeichne M/R die Faktormenge, das ist die Menge aller Äquivalenzklassen

$$M/R = \big\{[x]_R : \ x \in M\big\}.$$

Weiters bezeichne mit $\pi : M \to M/R$ die kanonische Projektion, das ist die Funktion definiert als $\pi(x) = [x]_R$. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen (A) und (B) äquivalent sind:

(A) $R \subseteq \ker f$.

(B) Es existiert eine Funktion $F : M/R \to N$, sodass das Diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/R \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. sodass $f = F \circ \pi$ gilt.

Zeige weiters, dass, falls (A) und (B) erfüllt sind, die Funktion F mit der genannten Eigenschaft eindeutig bestimmt ist.

10. Seien M, N Mengen, und $f : M \to N$ eine Funktion. Bezeichne mit ι die mengentheoretische Inklusionsabbildung $\iota : f(M) \to N$, das ist die Funktion die definiert ist als $\iota(x) := x$ für $x \in f(M)$.

- Zeige, dass durch die folgende Vorschrift eine Abbildung $F : M/\ker f \to f(M)$ wohldefiniert ist.

  Sei $a \in M/\ker f$ gegeben. Wähle $x \in M$ mit $a = [x]_{\ker f}$, und setze $F(a) := f(x)$.
- Zeige, dass F bijektiv ist.
- Zeige, dass das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert, dass heißt dass $f = \iota \circ F \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\ker f \arrow[r, "F"'] & f(M) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

2.Übung zur EIMA / 16.10.2018

(Zeit und Ort wie in Analysis 1 Übungsgruppen)

---

11. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Weiters seien $M, N \subseteq X$.
    - Zeige, dass $M \subseteq N \;\Rightarrow\; f(M) \subseteq f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Implikation ? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
    - Zeige, dass $f(M \cup N) \subseteq f(M) \cup f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion ? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
    - Zeige, dass $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion ? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
12. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Weiters sei I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Teilmenge von Y. Zeige, dass $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(M_i)$ und $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(M_i)$.
13. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Weiters sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Partition von Y. Zeige, dass $\{f^{-1}(M) : \; M \in \mathcal{Q}\} \setminus \{\emptyset\}$ eine Partition von X ist.
14. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Zeige
    - f ist surjektiv $\Leftrightarrow \big[\forall B \subseteq Y : f(f^{-1}(B)) = B\big] \Leftrightarrow f^{-1}$ ist injektiv
    - f ist injektiv $\Leftrightarrow \big[\forall A \subseteq X : f^{-1}(f(A)) = A\big] \Leftrightarrow f^{-1}$ ist surjektiv
15. Seien X, Y Mengen, und $f, g \subseteq X \times Y$ Funktionen von X nach Y. Zeige, dass aus $f \subseteq g$ bereits $f = g$ folgt.
16. Finde eine Menge M und zwei Funktionen $f, g : M \to M$, sodass $g \circ f = f$, wobei aber $g \neq \mathrm{id}_M$. Kann man so ein Beispiel auch dann konstruieren, wenn man zusätzlich verlangt dass f injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) ist ?
17. Eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ heißt kommutativ, wenn für je zwei Elemente $x, y \in G$ gilt dass $x \cdot y = y \cdot x$. Für welche Mengen M ist die Permutationsgruppe $\mathrm{Sym}(M)$ kommutativ ?
18. Ein Tupel $(K, +, *, 0, e)$ heißt ein Körper, wenn $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, *, e)$ kommutative Gruppen sind und das Distributivgesetz $\forall x, y, z \in K : \; x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ gilt.

    Betrachte die Menge $K = \{0, 1\}$, und definiere $+, * : K \times K \to K$ als
    $$x + y := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \qquad x * y := \begin{cases} 0, & x = 0 \lor y = 0 \\ 1, & x = y = 1 \end{cases}$$
    Zeige, dass $(K, +, *, 0, 1)$ ein Körper ist.
19. Sei M eine nichtleere Menge. Für $A \subseteq M$ bezeichne mit $\mathbb{1}_A$ die charakteristische Funktion der Menge A, das ist die Funktion $\mathbb{1}_A : M \to \{0, 1\}$ die definiert ist als
    $$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$
    Weiters bezeichne mit $\{0, 1\}^M$ die Menge aller Funktionen von M nach $\{0, 1\}$. Auf $\{0, 1\}^M$ definieren wir eine Addition und Multiplikation punktweise, sprich, durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ sowie $(f \cdot g)(x) := f(x) * g(x)$ für $x \in \{0, 1\}$. Betrachte nun die Funktion
    $$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(M) & \to & \{0, 1\}^M \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$$

- Zeige, dass
$$\Phi(A \triangle B) = \Phi(A) + \Phi(B), \quad \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B),$$
wobei $\triangle$ die symmetrische Differenz bezeichnet. Zeige weiters, dass Φ injektiv ist. Ist Φ surjektiv ?
- Zeige, dass $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ eine kommutative Gruppe ist.
- Zeige, dass $\cap$ distributiv über $\triangle$ ist $(\forall x, y, z \in \mathcal{P}(M) : x \cap (y \triangle z) = (x \cap y) \triangle (x \cap z))$, und es ein neutrales Element bzgl. $\cap$ gibt $(\exists\, e \in \mathcal{P}(M)\, \forall x \in \mathcal{P}(M) :\ e \cap x = x \cap e = x)$. Welche Elemente von $\mathcal{P}(M)$ haben ein Inverses bezüglich $\cap$?

Hinweis. Hier kann man sich viel Arbeit ersparen, wenn man die vorherige Aufgabe verwendet.

20. Wir haben gesehen, dass die folgende Schlußweise richtig ist: Ist eine Implikation $A \Rightarrow B$ wahr und ist ihre Prämisse A wahr, so folgt dass ihre Konklusion B wahr ist.

    Man stelle sich nun vor man weiss, dass eine Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist und dass ihre Konklusion B wahr ist. Kann man daraus etwas für die Aussage A schliessen ?

    Im folgenden nehmen wir wieder einmal eine Anleihe aus den aus der Anschauung bekannten Rechenoperationen und Rechenregeln für Zahlen.

    - Sei A die Aussage (die Ungleichung vom arithmetisch und geometrischen Mittel)
    $$A: \qquad \forall x, y > 0 : \ \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$
    Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort "wahr" lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort "falsch", finde ein Gegenbeispiel.

      Ist der folgende Beweis der Aussage A richtig oder falsch?

      Wir multiplizieren die Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ mit 2, also folgt $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Jetzt bringen wir $\sqrt{xy}$ auf die linke Seite, also folgt $x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$. Nun formen wir die linke Seite um, und erhalten $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schliessen dass die Aussage A wahr ist.

      Sollte Ihre Antwort "falsch" sein, was ist der Fehler ? Kann man den Beweis so modifizieren dass ein richtiger Beweis entsteht ?
    - Sei A die Aussage
    $$A: \qquad \forall x > 0 : \ x + 1 \leq 2x$$
    Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort "wahr" lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort "falsch", finde ein Gegenbeispiel.

      Ist der folgende Beweis der Aussage A richtig oder falsch?

      Wir multiplizieren die Ungleichung $x + 1 \leq 2x$ mit $x - 1$, also folgt $x^2 - 1 \leq 2x^2 - 2x$. Jetzt bringen wir ale Terme auf die rechte Seite, damit erhalten wir $0 \leq x^2 - 2x + 1$. Nun formen wir die rechte Seite um, und erhalten $0 \leq (x-1)^2$. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schliessen dass die Aussage A wahr ist.

      Sollte Ihre Antwort "falsch" sein, was ist der Fehler ? Kann man den Beweis so modifizieren dass ein richtiger Beweis entsteht ?