Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Numerische Mathematik - Kreuzlübung 3

Übungstermin: 22.10.2019 15. Oktober 2019

Aufgabe 13:
Approximieren Sie $\sqrt{2}$ durch $p(1/2)$, wobei $p \in \Pi_3$ das Interpolationspolynom zu

$$p(x) = 2^x, \qquad x = -1, 0, 1, 2$$

ist. Verwenden Sie dazu das Aitken-Neville Schema.

Aufgabe 14:
Geben Sie die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms aus Aufgabe 13 an. Verwenden Sie dabei zwei unterschiedlichen Varianten, nämlich die Lösung der linearen Gleichungssystems der Vandermonde-Matrix und die rekursive Definition der dividierten Differenzen.

Aufgabe 15:
a) Seien die Stützstellen $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ und $x_4 = 5$ gegeben. Stellen Sie die Lagrange- und die Newton-Basispolynome grafisch dar. Achten Sie dabei insbesondere auf die Werte an den Stützstellen.
b) Berechnen Sie näherungsweise mit dem Computer (also nicht von Hand) die Werte der Lebesgue-Konstante, indem Sie die Summe der Beträge der zugehörigen Lagrange-Polynome auf einem feinen Gitter auswerten und von den erhaltenen endlich vielen Werten das Maximum bilden. Unterscheiden Sie dabei zwei Verteilungen von jeweils $n+1$ Stützstellen auf dem Intervall $[-1, 1]$: Äquidistant, d.h. $x_i := -1 + 2i/n$ für $i = 0, \dots, n$, bzw. die sogenannten Chebyshevknoten $x_i := \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n+2}\right)$ für $i = 0, \dots, n$.

Aufgabe 16:
Gesucht sei die Lösung der Hermite-Polynominterpolation mit den Stützstellen $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = x_4 = 1$. Konstruieren Sie analog zur Lagrange-Polynominterpolation Basisfunktionen $L_0, \dots, L_4 \in \Pi_4$ sodass $\mu_j(L_k) = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \dots, 4$ gilt. Skizzieren Sie die Basisfunktionen L_j.

Aufgabe 17:
In der Vorlesung wurde bei der Definition der Hermite-Interpolation vorausgesetzt, dass höhere Ableitungen nur in Kombination mit den zugehörigen niedrigeren Ableitungen vorgegeben werden. Im Gegensatz dazu sei in dieser Variante der Hermite-Interpolation für paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und Stützwerte $y_0, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$ das Polynom $p \in \Pi_n$ gesucht mit

$$p(x_0) = y_0, \qquad p'(x_j) = y_j^{(1)} \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass diese Aufgabe eindeutig lösbar ist und geben Sie ein Verfahren zur Berechnung von p an.

Aufgabe 18:
Lösen Sie mit dem Verfahren der Dividierten Differenzen die Hermite Interpolationsaufgabe: Gesucht ist $p \in \Pi_5$ mit

$$p(-1) = \frac{1}{2}, \quad p'(-1) = \frac{1}{4}, \quad p''(-1) = \frac{1}{4}, \quad p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

Geben Sie das interpolierende Polynom in der Monombasis an.