8.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2019

1. Geben Sie ein Beispiel für ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, das sigmaendlich aber nicht regulär von oben, und eines, das von oben regulär aber nicht sigmaendlich ist.

2. Monotone Ereignisse und die FKG Ungleichung: es sei für $n \in \mathbb{N}$ $\Omega_n = \{0,1\}^n$, $\mathfrak{S}_n = 2^{\Omega_n}$ und $\mathbb{P}_n(A) = 2^{-n}|A|$ für $A \subseteq \Omega_n$. Das Ereignis $A \subseteq \Omega$ heißt monoton, wenn aus $x \in A$ und $x \leq y$ (was natürlich $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ heißt) $y \in A$ folgt. Zeigen Sie: wenn A und B monoton sind, dann gilt
$$\mathbb{P}_n(A \cap B) \geq \mathbb{P}_n(A)\mathbb{P}_n(B).$$
(das geht natürlich per induktionem; setzen sie für $i = 0, 1$ $A_i = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) : (x_1, \ldots, x_{n-1}, i) \in A\}$. Es gilt
$$\mathbb{P}_n(A) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_{n-1}(A_0) + \mathbb{P}_{n-1}(A_1))$$
und wenn A monoton ist, dann sind es auch A_0 und A_1 und zusätzlich $A_0 \subseteq A_1$)

3. Mehr Spaß mit Cantor: wir modifizieren die Vorschrift zur Konstruktion der Cantormenge für $\epsilon \in]0,1]$so, dass die Menge $C_{n,\epsilon}$ aus $C_{n-1,\epsilon}$ dadurch enthalten wird, dass aus der Mitte jedes der 2^{n-1} Teilintervalle von $C_{n-1,\epsilon}$ ein offenes Intervall der Länge $\epsilon/3^n$ entfernt wird ($\epsilon = 1$ gibt genau die Cantormenge), und wir setzen
$$C_\epsilon = \bigcap_n C_{n,\epsilon}.$$
Zeigen Sie: Wie die Cantormenge selbst sind die "fetten Cantormengen" C_ϵ abgeschlossen und nirgends dicht (d.h., sie enthalten kein nichtleeres offenes Intervall) und überabzählbar, aber es gilt
$$\lambda(C_\epsilon) = 1 - \epsilon.$$
(Fleißaufgabe: $C_{n,\epsilon}$ besteht aus 2^n Intervallen der Länge
$$\frac{1-\epsilon}{2^n} + \frac{\epsilon}{3^n}$$
und
$$C_\epsilon = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\frac{1-\epsilon}{2^n} + \frac{2\epsilon}{3^n}) : a_n \in \{0,1\} \forall n \in \mathbb{N}\})$$

4. Noch mehr Spaß mit noch mehr Cantor: die Menge aller offenen Intervallen mit rationalen Endpunkten ist abzählbar, $I_n =]a_n, b_n[$ sei eine Abzählung davon. Wir Konstruieren zwei Folgen A_n und B_n von abgeschlossenen nirgends dichten Mengen wie folgt: einem offenen Teilintervall von $I_n \setminus$

$\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i \cup B_i)$ werden zwei disjunkte fette Cantormengen A_n und B_n eingeschrieben. Zeigen Sie für

$$A = \bigcup_n A_n :$$

Für jede nichtleere offene Menge U gilt $\lambda(A \cap U) > 0$ und $\lambda(A^C \cap U) > 0$.

5. Zeigen Sie: wenn μ ein Inhalt auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist, und wenn μ regulär sit, dann ist μ ein Maß.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei überall differenzierbar. Dann ist die Ableitung f' Borel-messbar.

7. Es sei
$$\mathfrak{C} = \{A \in \mathfrak{B} : x \in A \Rightarrow -x \in A\}$$
die Menge der symmetrischen Borelmengen. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{C}$ eine Sigmaalgebra ist, und stellen Sie fest, für welche Werte $n \in \mathbb{N}$
$$f(x) = x^n$$
$\mathfrak{C}$-messbar ist.