# Kapitel 4

# Stetige und differenzierbare Abhängigkeit

Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in $x$. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (t_0, x_0) \in G. \tag{4.1}$$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, also von $t_0$, $x_0$, und $f$, hinsichtlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

## 4.1 Stetige Abhängigkeit

Gegeben sei die Lösung $x(t)$ von (4.1) auf ihrem maximalen Existenzintervall $(t_-, t_+)$. Es bezeichne $\operatorname{graph}_J(x) := \{(t, x(t)) : t \in J\} \subset G$, wobei $J = [a, b] \subset (t_-, t_+)$ ein kompaktes Teilintervall mit $t_0 \in (a, b)$ ist.

**Definition 4.1.1.** *Die gegebene Lösung $x(t)$ heißt* **stetig abhängig** *von $(t_0, x_0, f)$, falls es zu jedem kompakten Intervall $J \subset (t_-, t_+)$ eine kompakte Umgebung $K \subset G$ von $\operatorname{graph}_J(x)$ gibt, sodass gilt:*

*Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{y} = g(t, y)$, $y(\tau_0) = y_0$, für alle $t \in [a, b]$ existiert und der Ungleichung*

$$|x(t) - y(t)| \le \varepsilon, \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

*genügt, sofern $g : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in $x$, und*

$$|\tau_0 - t_0| \le \delta, \ |x_0 - y_0| \le \delta, \ \sup_{(s,z) \in K} |f(s,z) - g(s,z)| \le \delta$$

*erfüllt ist.*

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme,* Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_4, © Springer Basel AG 2010

Damit können wir das Hauptresultat dieses Abschnittes formulieren.

**Satz 4.1.2.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen mit $(t_0, x_0) \in G$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in $x$. Dann hängt die Lösung $x(t)$ von (4.1) stetig von den Daten $(t_0, x_0, f)$ ab.*

*Beweis.* Sei $y(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y} = g(t, y)$, $y(\tau_0) = y_0$ auf ihrem maximalen Existenzintervall $(\tau_-, \tau_+) \ni t_0$. Wie in Kapitel 2 schreiben wir die Anfangswertprobleme für $x(t)$ und $y(t)$ als äquivalente Integralgleichungen

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \qquad y(t) = y_0 + \int_{\tau_0}^{t} g(s, y(s))\, ds.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - \int_{\tau_0}^{t} g(s, y(s))\, ds \\ &= x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s))\, ds + \int_{\tau_0}^{t} [f(s, x(s)) - g(s, y(s))]\, ds \\ &= x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s))\, ds + \int_{\tau_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\, ds \\ &\quad + \int_{\tau_0}^{t} [f(s, y(s)) - g(s, y(s))]\, ds. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wähle $\alpha > 0$ und $\eta > 0$, sodass die kompakte Menge

$$K := \{(t, y) : t \in [a - \eta, b + \eta], |x(t) - y| \le \alpha\}$$

die Inklusion $K \subset G$ erfüllt, wobei $\eta$ so klein ist, dass außerdem $[a - \eta, b + \eta] \subset (t_-, t_+)$ gilt. Dann ist $f|_K$ global Lipschitz in $x$ mit einer Konstanten $L > 0$. Gilt $|\tau_0 - t_0|, |y_0 - x_0| \le \delta < \min\{\alpha, \eta\}$, so ist $(\tau_0, y_0) \in K$. Es sei $\sup\{|f(t, x) - g(t, x)| : (t, x) \in K\} \le \delta$, und wir setzen $M := \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in K\}$. Aus (4.2) und der Dreiecksungleichung folgt für $t \in [\tau_0, \min\{b, \tau_+\})$ mit $(s, y(s)) \in K$, $\tau_0 \le s \le t$

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\le |x_0 - y_0| + M|t_0 - \tau_0| + \delta(b - a + 2\eta) + L \int_{\tau_0}^{t} |x(s) - y(s)| ds \\ &\le C\delta + L \int_{\tau_0}^{t} |x(s) - y(s)| ds, \end{aligned} \tag{4.3}$$

mit $C = 1 + M + b - a + 2\eta$. Das Lemma von Gronwall 2.4.1 liefert somit die Abschätzung

$$|x(t) - y(t)| \le \delta C e^{L(t - \tau_0)}, \tag{4.4}$$

solange $(t, y(t)) \in K$ gilt. Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, sodass die rechte Seite von (4.4) $< \alpha$ ist. Angenommen es existiert ein erstes $t_* \in [\tau_0, \min\{b, \tau_+\})$ mit

$|x(t_*)-y(t_*)| = \alpha$. Wegen $(t_*, y(t_*)) \in K$ folgt aus (4.4) jedoch $|x(t_*)-y(t_*)| < \alpha$, ein Widerspruch. Ebenso argumentiert man nach links. Der Graph der Lösung $y(t)$ kann die Menge $K$ also nicht verlassen, und nach dem Fortsetzungssatz existiert die Lösung $y(t)$ daher auf $[a, b]$, und erfüllt dort $(t, y(t)) \in K$. Ist nun ein $0 < \varepsilon \leq \alpha$ gegeben, so wähle $\delta > 0$ klein genug, damit die rechte Seite von (4.4) $\leq \varepsilon$ ist. □

**Bemerkungen 4.1.3.**

1. Ist eine Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems (4.1) stetig von den Daten abhängig, so ist sie auch eindeutig. Sei nämlich $t_0 = \tau_0$, $x_0 = y_0$ und $f = g$. Ist $y(t)$ eine weitere Lösung von (4.1), so folgt aus der stetigen Abhängigkeit $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $x(t) \equiv y(t)$;

2. Die lokale Lipschitz-Eigenschaft für $g$ wurde nur verwendet, um die Existenz und Fortsetzbarkeit der Lösung von $\dot{y} = g(t, y)$, $y(\tau_0) = y_0$ sicherzustellen. Es genügt $g$ stetig vorauszusetzen, falls man den *Existenzsatz von Peano* verwendet; vgl. Kapitel 6.

3. Die lokale Lipschitz-Bedingung von $f$ kann weggelassen werden, falls man fordert, dass $x(t)$ die eindeutige Lösung von (4.1) ist. Jedoch braucht man für den Beweis den *Existenzsatz von Peano*; vgl. Kapitel 6.

Eine alternative Formulierung der stetigen Abhängigkeit mittels Folgen lautet:

**Korollar 4.1.4.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen,, $(t_0, x_0) \in G$, $f, f_n : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in $x$ und es sei $x(t)$ die Lösung von (4.1) auf dem maximalen Existenzintervall $(t_-, t_+)$. Es gelte*

$$t_n \to t_0,\ x_{n_0} \to x_0 \text{ und } f_n(t, x) \to f(t, x),$$

*gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $G$. Sei $[a, b] \subset (t_-, t_+)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_n), \quad x_n(t_n) = x_{n_0},\ t \in [a, b],$$

*für hinreichend großes $n$ genau eine Lösung auf $[a, b]$, und es gilt*

$$x_n(t) \to x(t),$$

*gleichmäßig auf $[a, b]$.*

**Beispiel.** *Volterra–Lotka-Modell*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -dy + cxy, & x_0, y_0 > 0,\ a, b, c, d > 0. \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

Nach Kapitel 2 existiert die eindeutige globale Lösung

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t; x_0, y_0, a, b, c, d) \\ y(t; x_0, y_0, a, b, c, d) \end{bmatrix}$$

des Volterra–Lotka-Modells. Die Funktion

$$f(x, y, a, b, c, d) = \begin{bmatrix} ax - bxy \\ -dy + cxy \end{bmatrix}$$

ist lokal Lipschitz in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 4.1.2 hängen die Lösungen stetig von den Daten $(x_0, y_0, f)$, also von $(x_0, y_0, a, b, c, d)$ ab, da $f$ stetig bezüglich $(a, b, c, d)$ ist.

## 4.2 Anwendungen

Der Satz über stetige Abhängigkeit hat viele wichtige Konsequenzen, nicht nur in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, aber auch in anderen Bereichen der Analysis. Hier soll dieser Satz mit drei Anwendungen illustriert werden.

### 1. Differentialungleichungen

In Lemma 2.4.2 hatten wir strikte Differentialungleichungen behandelt. Wir wollen in diesem Resultat die strikten Ungleichungen abschwächen.

**Lemma 4.2.1.** *Sei $u : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz in $x$, $J = [t_0, t_1]$. $\rho \in C^1(J, \mathbb{R})$ erfülle die Differentialungleichung $\dot\rho(t) \le u(t, \rho(t))$, $t \in J$ mit $\rho(t_0) \le \varphi_0$. Weiter sei $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$ die Lösung von*

$$\begin{cases} \dot\varphi = u(t, \varphi), \\ \varphi(t_0) = \varphi_0, \end{cases}$$

*die auf $J$ existiere. Dann gilt $\rho(t) \le \varphi(t)$ für alle $t \in J$.*

*Beweis.* Setze $u_n(t, x) := u(t, x) + 1/n$. Sei $\varphi_n(t)$ die Lösung von

$$\begin{cases} \dot\varphi_n = u_n(t, \varphi_n), \\ \varphi_n(t_0) = \varphi_0 + 1/n. \end{cases}$$

Dann gilt $\dot\rho(t) \le u(t, \rho(t)) < u(t, \rho(t)) + 1/n$ und $\rho(t_0) \le \varphi_0 < \varphi_0 + 1/n$. Aus Lemma 2.4.2 folgt also

$$\rho(t) < \varphi_n(t), \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ t \in J. \tag{4.5}$$

Nach Satz 4.1.2 ist die Lösung $\varphi$ stetig von den Daten abhängig, also folgt aus Korollar 4.1.4 $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ gleichmäßig auf $J$ und (4.5) liefert

$$\rho(t) \le \varphi(t),$$

für alle $t \in J$. □

## 2. Positivität von Lösungen

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz in $x$ und $x(t)$ sei die Lösung von (4.1). Wir gehen der Frage nach, unter welchen Bedingungen die Vorgabe der Anfangswerte $x_{0_j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$ die Nichtnegativität von $x_j(t),\ j = 1, \ldots, n,\ t \geq t_0$, mit $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ impliziert.

Diese Frage ist in Anwendungen von Bedeutung, da z.B. Variable wie Konzentrationen oder Populationsgrößen nichtnegativ sein müssen. Entsprechende Modelle müssen daher positivitätserhaltend sein.

Offensichtlich ist dafür zunächst die folgende Bedingung notwendig. Existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, mit $x_{0_k} = 0$, so gilt $0 \leq \dot{x}_k(t_0) = f_k(t_0, x_0)$, denn sonst wäre $x_k(t) < 0$ für $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Daher formulieren wir die **Positivitätsbedingung** wie folgt.

$$(P)\begin{cases}\text{Sei } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.\\ \text{Für jedes } k \in \{1, \ldots, n\},\ t \geq t_0 \text{ und } x_k = 0 \text{ gilt } f_k(t, x) \geq 0.\end{cases}$$

Funktionen, die (P) erfüllen, heißen **quasipositiv**. Zum Verständnis dazu einige

**Beispiele.** (a) *Volterra–Lotka-Modell*

$$\begin{cases}\dot{x} = ax - bxy,\\ \dot{y} = -dy + cxy,\\ x(t_0) = x_0 \geq 0,\ \ y(t_0) = y_0 \geq 0,\end{cases}$$

wobei die Konstanten $a, b, c, d$ nichtnegativ sind. Seien $x, y \geq 0$. Für $x = 0$ bzw. $y = 0$ gelten $f_1(0, y) = 0$ bzw. $f_2(x, 0) = 0$. Damit ist die Positivitätsbedingung (P) erfüllt.

(b) *Chemische Kinetik.* Wir greifen ein Beispiel aus der chemischen Kinetik aus Kapitel 1 auf, nämlich die Gleichgewichtsreaktion

$$\begin{aligned}\dot{c}_A &= -k_+ c_A c_B + k_- c_P, & c_A(0) &= c_A^0,\\ \dot{c}_B &= -k_+ c_A c_B + k_- c_P, & c_B(0) &= c_B^0,\\ \dot{c}_P &= k_+ c_A c_B - k_- c_P, & c_P(0) &= c_P^0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dabei gilt für die Reaktionskonstanten $k_-, k_+ > 0$. Damit verifiziert man leicht, dass die Positivitätsbedingung (P) erfüllt ist.

Dass die Positivitätsbedingung (P) tatsächlich die Nichtnegativität der einzelnen Komponenten $x_j(t)$ der Lösung $x(t)$ liefert, zeigt uns der folgende

**Satz 4.2.2.** *Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in $x$ und es sei $f$ quasipositiv. Ist $x(t)$ die Lösung von (4.1), und gilt $x_{0_j} \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, so folgt $x_j(t) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, t_+)$, dem maximalen Existenzintervall der Lösung nach rechts.*

*Beweis.* Sei $\mathsf{e} := [1, \ldots, 1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ und $x^m(t)$ sei die Lösung von

$$\begin{cases} \dot{x}^m = f(t, x^m) + \mathsf{e}/m =: f^m(t, x), \\ x^m(t_0) = x_0 + \mathsf{e}/m =: x_0^m, \end{cases} \quad x_{0_j}^m > 0, \ m \in \mathbb{N}.$$

Da $f$ nach Voraussetzung stetig und lokal Lipschitz in $x$ ist und aufgrund von $f^m(t, x) \to f(t, x)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $x_0^m \to x_0$, folgt aus Korollar 4.1.4 die gleichmäßige Konvergenz $x^m(t) \to x(t)$ auf kompakten Teilmengen des Existenzintervalls von $x(t)$.

Sei $t_1 > t_0$ das erste $t$, für das ein Komponente von $x^m(t)$ verschwindet, also z.B. $x_k^m(t_1) = 0$. Dann gilt einerseits $\dot{x}_k^m(t_1) \leq 0$, aber andererseits

$$\dot{x}_k^m(t_1) = f_k(t_1, x^m(t_1)) + 1/m \geq 1/m > 0,$$

denn aus der Positivitätsbedingung (P) folgt $f_k(t_1, x^m(t_1)) \geq 0$, da alle Komponenten von $x^m(t)$ nichtnegativ sind, also ein Widerspruch.

Es gilt also $x_k^m(t) > 0$ für alle $k \in \{1, \ldots n\}$ und $m \in \mathbb{N}$, und für alle $t \geq t_0$ für welche die Lösung $x^m(t)$ existiert. Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert somit $x_j(t) \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $t$ im maximalen Existenzintervall der Lösung nach rechts. □

## 3. Periodische Lösungen

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in $x$, sowie **$\tau$-periodisch** in $t$, das heißt

$$f(t + \tau, x) = f(t, x), \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Es stellt sich die Frage, ob es dann auch $\tau$-periodische Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ gibt. Leider ist das im Allgemeinen nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel.**

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \cos t, \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = x_1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Offensichtlich ist das dazugehörige System 1. Ordnung $2\pi$-periodisch. Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung $\ddot{x} + x = 0$ lautet

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten erhalten wir eine spezielle Lösung von (4.7), nämlich

$$x_*(t) = \cos t \int_0^t \cos(s) \sin(s) \ ds + \sin t \int_0^t \cos^2(s) \ ds = (t/2) \sin t.$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (4.7) lautet also $x(t) = x_0 \cos t + x_1 \sin t + t/2 \sin t$, welche offensichtlich nicht $2\pi$-periodisch ist.

Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit $x(t+\tau) = x(t)$. Dazu betrachten wir das äquivalente periodische Randwertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(0) = x(\tau), \end{cases} \qquad t \in [0,\tau]. \tag{4.8}$$

Sei $x(t)$ Lösung von (4.8) und sei $f$ $\tau$-periodisch in $t$. Dann ist die periodische Fortsetzung $\tilde{x}(t)$ von $x(t)$ auf $\mathbb{R}$ eine periodische Lösung. Wir behandeln dieses Randwertproblem, indem wir es auf ein Fixpunktproblem zurückführen. Es sei $y(t,z)$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(0) = z \end{cases} \tag{4.9}$$

und wir definieren eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $Tz := y(\tau, z)$, die sogenannte *Poincaré*- oder *Periodenabbildung*. $z_*$ ist genau dann ein Fixpunkt von $T$ – es gilt also $Tz_* = z_*$ –, wenn $y(\tau, z_*) = z_* = y(0, z_*)$ ist. Jedoch bleiben einige Probleme zu klären:

1. Existiert die Lösung $y(t)$ von (4.9) auf dem ganzen Intervall $[0,\tau]$?

2. Ist der Operator $T$ stetig? Offenbar ja, hier geht der Satz 4.1.2 über stetige Abhängigkeit ein.

3. Wir benötigen einen geeigneten Fixpunktsatz. Der Fixpunktsatz von Banach ist hier eher ungeeignet, da er nur unter starken Voraussetzungen über $f$ anwendbar ist. Stattdessen werden wir den *Fixpunktsatz von Brouwer* verwenden, der hier jedoch nicht bewiesen wird.

**Satz 4.2.3 (Fixpunktsatz von Brouwer).** *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, und $T : D \to D$ stetig. Dann besitzt $T$ mindestens einen Fixpunkt in $D$.*

Sei $D = \bar{B}_R(0)$ die abgeschlossene Kugel um den Nullpunkt mit Radius $R$. Dann ist $D$ abgeschlossen, beschränkt und konvex.

**Satz 4.2.4.** *Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in $x$ und $\tau$-periodisch in $t$. Außerdem gelte*

$$(f(t,x)|x) \leq 0, \quad \text{für alle } |x|_2 = R,\ t \in [0,\tau]. \tag{4.10}$$

*Dann besitzt die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mindestens eine $\tau$-periodische Lösung $x_*(t)$ auf $\mathbb{R}$.*

*Beweis.* Sei $k \in \mathbb{N}$. Setze $f_k(t,x) := f(t,x) - x/k$ und sei $T_k : \bar{B}_R(0) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T_k z := y_k(\tau, z)$, wobei $y_k(t,z),\ t \in [0,\tau]$, die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{y}_k = f_k(t, y_k), \\ y_k(0) = z_k, \end{cases}$$

ist. Wir wissen zwar jetzt noch nicht, dass $y_k$ global nach rechts existiert, aber dies wird im Weiteren bewiesen. Sei zunächst $|z_k| < R$. Dann gilt $|y_k(t, z_k)| < R$, für alle $t \in [0,\tau]$. Denn angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert ein erstes $t_* \in (0,\tau]$, mit $|y_k(t_*, z_k)| = R$ und $|y_k(t,z_k)| < R$ für alle $0 \le t < t_*$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}|y_k(t,z_k)|_2^2\Big|_{t=t^*} \ge 0.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|y_k(t,z_k)|^2 &= 2(\dot{y}_k(t,z_k)|y_k(t,z_k)) = 2(f_k(t,y_k(t,z_k))|y_k(t,z_k)) \\ &= 2(f(t,y_k(t,z_k)) - y_k(t,z_k)/k|y_k(t,z_k)) \\ &= 2(f(t,y_k(t,z_k))|y_k(t,z_k)) - 2|y_k(t,z_k)|_2^2/k, \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,\tau]$, also mit (4.10)

$$0 \le \frac{d}{dt}|y_k(t,z_k)|_2^2\Big|_{t=t^*} \le -2\frac{|y_k(t^*,z_k)|_2^2}{k} = -2\frac{R^2}{k} < 0,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch. Die Lösung $y_k(t,z_k),\ t \in [0,\tau]$, erreicht also niemals den Rand der Kugel $B_R(0)$, falls $|z_k| < R$. Im Fall $|z_k| = R$ gilt

$$\frac{d}{dt}|y_k(t,z_k)|_2^2\Big|_{t=0} \le -2\frac{R^2}{k} < 0,$$

also $|y_k(t,z_k)| < R$ für kleine $t > 0$. Daher ist $T_k : D \to \mathbb{R}^n$ nach dem Fortsetzungssatz wohldefiniert und eine Selbstabbildung, also $T_k(D) \subset D$.

Da die Funktionen $f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ stetig und lokal Lipschitz in $x$ sind, ist die Abbildung $T_k$ nach Satz 4.1.2 für jedes $k \in \mathbb{N}$ stetig. Nach Satz 4.2.3 existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Fixpunkt $z_k^* \in D$ von $T_k$. Daher gilt $y_k(0, z_k^*) = y_k(\tau, z_k^*),\ k \in \mathbb{N}$. Wegen $z_k^* \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und aufgrund der Kompaktheit der Menge $D$ existiert eine konvergente Teilfolge $z_{k_m}^* \to x_0 \in D$ für $m \to \infty$. Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y), \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad t \in [0,\tau]. \tag{4.11}$$

Da die Lösung $y(t)$ von (4.11) nach Satz 4.1.2 stetig von den Daten abhängt, folgt aus Korollar 4.1.4 die gleichmäßige Konvergenz $y_{k_m}(t) \to y(t)$ auf $[0,\tau]$, denn $f_{k_m}(t,x) \to f(t,x)$ gilt gleichmäßig auf $[0,\tau] \times D$. Ferner ist $y(0) = y(\tau)$, da

$$y(\tau) = \lim_{m\to\infty} y_{k_m}(\tau) = \lim_{m\to\infty} y_{k_m}(0) = x_0 = y(0).$$

Die periodische Fortsetzung $x_*(t)$ von $y(t)$ auf $\mathbb{R}$ ist die gesuchte $\tau$-periodische Lösung von (4.11). $\square$

## 4.3 Differenzierbarkeit der Lösungen nach Daten

### 1. Autonome Systeme

Wir untersuchen zunächst das autonome Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = y, \end{cases} \tag{4.12}$$

mit $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $y \in G$. Nach Proposition 2.1.5 und Satz 2.2.2 existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $x = x(t, y)$, $x \in C^1(J_y, \mathbb{R}^n)$ auf dem maximalen Existenzintervall $J_y := [0, t_+(y))$ nach rechts.

Um die Frage der Differenzierbarkeit der Lösung $x(t, y)$ nach dem Anfangswert $y$ zu beantworten, differenziert man zunächst formal die Differentialgleichung (4.12) nach $y$ mit dem Ergebnis

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial t}(t, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\ f(x(t, y)) = f'(x(t, y))\frac{\partial x}{\partial y}(t, y).$$

Andererseits gilt formal

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial t}(t, y)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial y}(t, y)\right).$$

Daraus erhält man die *lineare* Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial y}(t, y)\right) = f'(x(t, y))\frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$$

für die Ableitung der Lösung nach dem Anfangswert $y$. Aus $x(0, y) = y$ folgt ferner $\frac{\partial x}{\partial y}(0, y) = I$. Mit $A(t, y) := f'(x(t, y))$ ist die Funktion $X = X(t, y) = \frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$ also eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t, y)X, \quad t \in J = [0, a], \\ X(0) = I. \end{cases} \tag{4.13}$$

Der folgende Satz zeigt, dass diese formale Rechnung legitim ist.

**Satz 4.3.1.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $x(t, y)$ sei die Lösung von (4.12) auf einem Intervall $J = [0, a] \subset J_y$. Dann ist die Abbildung $(t, y) \mapsto x(t, y)$ stetig differenzierbar und $X = X(t, y) = \frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$ erfüllt das Anfangswertproblem (4.13).*

*Beweis.* Sei $y \in G$ fixiert und eine Kugel $B_\delta(y) \subset G$ um $y$ mit Radius $\delta > 0$ gegeben. Ferner sei $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$ hinreichend klein, $X = X(t)$ sei die Lösung von (4.13) und $u_h(t)$ sei definiert durch

$$u_h(t) := x(t, y+h) - x(t, y) - X(t)h, \quad t \in J.$$

Man beachte, dass $x(t, y+h)$ nach Satz 4.2.3 auf $J$ existiert sofern $\delta > 0$ hinreichend klein ist. Um nachzuweisen, dass $\frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$ existiert, müssen wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass $|u_h(t)| \leq \varepsilon|h|$ für $|h| \leq \eta(\varepsilon)$ gilt. Dazu leiten wir eine Differentialgleichung für die Funktion $u_h(t)$ her.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\, u_h(t) &= \dot{x}(t, y+h) - \dot{x}(t, y) - \dot{X}(t)h \\ &= f(x(t, y+h)) - f(x(t, y)) - A(t, y)X(t)h \\ &= A(t, y)u_h(t) + r_h(t), \end{aligned}$$

wobei $r_h(t)$ durch

$$r_h(t) := f(x(t, y+h)) - f(x(t, y)) - A(t, y)[x(t, y+h) - x(t, y)]$$

gegeben ist. Die Funktion $u_h(t)$ erfüllt also das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}_h = A(t, y)u_h + r_h(t), & t \in J, \\ u_h(0) = 0. \end{cases}$$

Die matrixwertige Funktion $X(t)$ ist ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung $\dot{u}_h = A(t, y)u_h$. Dann liefert (3.6) die eindeutige Lösung

$$u_h(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(s) r_h(s)\, ds, \ t \in J := [0, a].$$

Wegen $M_1 := \sup_{t \in J} |X(t)| < \infty$ und $M_2 := \sup_{t \in J} |X^{-1}(t)| < \infty$ gilt

$$|u_h(t)| \leq M_1 M_2 \int_0^t |r_h(s)|\, ds, \ t \in J.$$

Da die Funktion $f$ stetig und lokal Lipschitz in $x$ ist, folgt aus Satz 4.1.2 die gleichmäßige Konvergenz $x(t, y+h) \to x(t, y)$ auf $J$ für $|h| \to 0$. Da $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ auf kompakten Mengen gleichmäßig differenzierbar ist, existiert zu jedem $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $\eta(\varepsilon) > 0$, sodass

$$|r_h(t)| \leq \varepsilon |x(t, y+h) - x(t, y)| \quad \text{für alle } |h| \leq \eta(\varepsilon), t \in J,$$

gilt. Folglich gilt

$$|r_h(t)| \leq \varepsilon |u_h(t)| + \varepsilon |X(t)h| \leq \varepsilon |u_h(t)| + \varepsilon M_1 |h|, \quad t \in J,$$

und somit erhält man die Integralungleichung

$$|u_h(t)| \leq \varepsilon a M_1^2 M_2 |h| + \varepsilon M_1 M_2 \int_0^t |u_h(s)|\, ds, \; t \in J. \tag{4.14}$$

Das Lemma von Gronwall 2.4.1 liefert

$$|u_h(t)| \leq \varepsilon a M_1^2 M_2 |h| e^{\varepsilon M_1 M_2 t} \leq C\varepsilon |h|, \quad t \in J,$$

mit $C = aM_1^2 M_2 e^{M_1 M_2 a}$. Damit ist die Lösung $x(t,y)$ von (4.12) differenzierbar bezüglich $y$ und $\frac{\partial x}{\partial y}(t,y)$ ist als Lösung von (4.13) nach Satz 4.1.2 stetig in $y$. □

## 2. Nichtautonome Systeme

Betrachten wir nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,p), \\ x(\tau) = y, \end{cases} \tag{4.15}$$

wobei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ ist, sowie $(\tau, y, p) \in G$.

Zu zeigen ist, dass die Lösung $x(t;\tau,y,p)$ von (4.15) stetig differenzierbar nach $(\tau,y,p)$ ist. Dazu transformieren wir (4.15) in ein autonomes System, um die Ergebnisse aus dem vorangehenden Abschnitt anzuwenden. Sei

$$v := \begin{bmatrix} \tau \\ y \\ p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k+1} \quad \text{und} \quad u(s) := \begin{bmatrix} \tau + s \\ x(\tau+s;\tau,y,p) \\ p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k+1}, \; s \geq 0.$$

Der Term $\tau + s$ spielt hier die Rolle von $t$. Differenziert man $u(s)$, so erhält man

$$\begin{aligned} \partial_s u(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{x}(\tau+s;\tau,v,p) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ f(\tau+s, x(\tau+s;\tau,v,p),p) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ f(u_1(s),u_2(s),u_3(s)) \\ 0 \end{bmatrix} =: F(u(s)). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $f \in C^1(G,\mathbb{R}^n)$ gilt, folgt $F \in C^1(G,\mathbb{R}^{n+k+1})$. Wegen $u(0) = v$ lautet das resultierende autonome System wie folgt:

$$\begin{cases} \partial_s u(s) = F(u(s)), \\ u(0) = v, \end{cases} \tag{4.16}$$

mit $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Dann folgt aus Satz 4.3.1, dass die Lösung $u(s,v)$ von (4.16), also auch die Lösung $x(t;\tau,y,p)$ von (4.15), stetig differenzierbar bezüglich $v$ ist.

Ferner gilt nach Satz 4.3.1, dass $\frac{\partial u}{\partial v}(s,v)$ das Anfangswertproblem (4.13) erfüllt, also gilt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) = F'(u(s,v))\frac{\partial u}{\partial v}, \\ \frac{\partial u}{\partial v}(0) = I. \end{cases} \tag{4.17}$$

Wir wollen nun die einzelnen Differentialgleichungen bezüglich den Variablen $(\tau, y, p)$ aus (4.17) herleiten. Zur Abkürzung setzen wir $f = f(u_1, u_2, u_3)$ und $x = x(\tau + s; \tau, y, p)$. Dann gilt

$$F'(u) = \frac{\partial}{\partial u}\begin{bmatrix} 1 \\ f(u_1,u_2,u_3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial_t f & \partial_x f & \partial_p f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Für $\frac{\partial u}{\partial v}$ erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \partial_t x + \partial_\tau x & \partial_y x & \partial_p x \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

sodass sich für $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)$ unter Beachtung von $\partial_s = \partial_t$ der folgende Ausdruck ergibt

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial_t^2 x + \partial_t(\partial_\tau x) & \partial_t(\partial_y x) & \partial_t(\partial_p x) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$\frac{\partial u}{\partial v}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \partial_t x(\tau) + (\partial_\tau x)(\tau) & (\partial_y x)(\tau) & (\partial_p x)(\tau) \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Diese Matrix muss aber gerade gleich der Einheitsmatrix sein, das heißt, es gilt $\partial_t x(\tau) + (\partial_\tau x)(\tau) = 0$, $(\partial_y x)(\tau) = I$ und $(\partial_p x)(\tau) = 0$. Ferner ist $\partial_t x(\tau) = f(\tau, x(\tau), p) = f(\tau, y, p)$.

Setzt man (4.18), (4.19) und (4.20) in (4.17) ein, so erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \partial_t(\partial_\tau x) = \partial_x f(t,x,p)\partial_\tau x, \\ \partial_t(\partial_y x) = \partial_x f(t,x,p)\partial_y x, \\ \partial_t(\partial_p x) = \partial_x f(t,x,p)\partial_p x + \partial_p f(t,x,p), \end{cases} \tag{4.22}$$

denn $\partial_t^2 x(t) = \partial_t f(t, x(t), p) + \partial_x f(t, x(t), p)\partial_t x(t)$. Es gilt also der

**Satz 4.3.2.** *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $(\tau, y, p) \in G$. Dann ist die Lösung $x = x(t; \tau, y, p)$ von* (4.15) *stetig differenzierbar in allen Variablen $(t, \tau, y, p)$. Des Weiteren genügen die partiellen Ableitungen $(\partial_\tau x, \partial_y x, \partial_p x)$ dem Differentialgleichungssystem* (4.22) *mit den Anfangsbedingungen*

$$(\partial_\tau x)(\tau) = -f(\tau, y, p), \quad (\partial_y x)(\tau) = I, \quad (\partial_p x)(\tau) = 0.$$

**Bemerkung.** Die Differentialgleichungen für die Ableitungen der Lösung nach den Parametern $\tau$, $y$ und $p$ enthalten nicht die partielle Ableitung nach $t$. In der Tat ist unter den Voraussetzungen dieses Satzes die Lösung zweimal stetig differenzierbar bzgl. $t$, es gilt

$$\ddot{x}(t) = \partial_t f(t, x(t)) + \partial_x f(t, x(t)) f(t, x(t)).$$

Daher kann man Satz 4.3.2 mittels eines Approximationsarguments auf den Fall erweitern, dass $f$ bzgl. $t$ nur stetig ist. Auf die Details verzichten wir hier.

## 4.4 Dynamische Systeme

**Definition 4.4.1.** *Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$ heißt* **dynamisches System (Fluss)**, *falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

*(D1)* $\phi(0, x) = x$, *für alle* $x \in M$;

*(D2)* $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$, *für alle* $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in M$ *(Gruppeneigenschaft);*

*(D3)* $\phi$ *ist stetig in* $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$.

*Ersetzt man in dieser Definition* $\mathbb{R}$ *durch* $\mathbb{R}_+$ *so spricht man von einem* **semidynamischen System** *oder* **Halbfluss** *auf $M$ und $(D2)$ heißt* Halbgruppeneigenschaft.

**Interpretation.** Die Abbildung $\phi$ beschreibt die Dynamik des Systems: Ist das System zum Zeitpunkt $t = 0$ in $x$, so befindet es sich zur Zeit $t = t_*$ in $\phi(t_*, x)$.

**Beispiele.** (a) *Das mathematische Pendel.* Wir schreiben die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ als System erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = -\omega^2 \sin u_1. \end{cases} \tag{4.23}$$

Zu jedem Anfangswert $y \in M = \mathbb{R}^2$ existiert genau eine globale Lösung $u(t, y) = [u_1(t, y), u_2(t, y)]^{\mathsf{T}}$. Setze $\phi(t, y) = u(t, y)$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^2$. Dann definiert die Funktion $\phi$ ein dynamisches System, denn es gilt $\phi(0, y) = u(0, y) = y$, also (D1). Des Weiteren sind $u(t+s, y)$ und $u(t, u(s, y))$ Lösungen von (4.23) bezüglich $t$. Für $t = 0$ gilt $u(0 + s, y) = u(s, y) = u(0, u(s, y))$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt also

$$\phi(t + s, y) = u(t + s, y) = u(t, u(s, y)) = \phi(t, u(s, y)),$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^2$, also (D2). Die Eigenschaft (D3) folgt aus Satz 4.1.2.

(b) *Skaliertes Volterra–Lotka-Modell mit Sättigung*

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \kappa u^2 - uv, \\ \dot{v} = -\varepsilon v + uv. \end{cases} \tag{4.24}$$

Sei $M = \mathbb{R}^2_+$. Für alle $z_0 := [u_0, v_0]^\mathsf{T} \in M$ existiert genau eine globale Lösung $z(t, z_0) := [u(t, z_0), v(t, z_0)]^\mathsf{T}$ von (4.24) nach rechts. Diese hängt nach Satz 4.1.2 stetig von $z_0$ ab. Wie in Beispiel (a) definiert dann die Funktion $\phi(t, z_0) := z(t, z_0)$ zumindest ein semidynamisches System. Man beachte, dass globale Existenz nach links hier nicht gilt!

Der Satz über stetige Abhängigkeit ergibt den

**Satz 4.4.2.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz und zu jedem Anfangswert $y \in G$ existiere die Lösung $x(t, y)$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = y, \end{cases} \tag{4.25}$$

*global, also für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann definiert die Funktion $\phi(t, y) := x(t, y)$, $y \in G$, $t \in \mathbb{R}$, ein dynamisches System. Existieren die Lösungen wenigstens nach rechts global, so erhält man entsprechend einen Halbfluss.*

*Beweis.* Die Eigenschaft (D1) ist wegen $\phi(0, y) = x(0, y) = y$ erfüllt. Aufgrund der Autonomie des Systems (4.25), sind $\phi(t+s, y) = x(t+s, y)$ und $\phi(t, \phi(s, y)) = x(t, x(s, y))$ ebenfalls Lösungen von (4.25) bzgl. $t$. Für $t = 0$ ergibt sich $x(0 + s, y) = x(s, y) = x(0, x(s, y))$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt $x(t + s, y) = x(t, x(s, y))$, also (D2). Schließlich gilt auch (D3), da $x(t, y) = \phi(t, y)$ nach Satz 4.1.2 stetig von $y$ abhängt. □

**Bemerkungen 4.4.3.**

1. Die Autonomie des Systems (4.25) ist notwendig, denn für ein zeitabhängiges $f$ ist $x(t + s, y)$ im Allgemeinen keine Lösung von $\dot{x} = f(t, x)$, wie schon das Beispiel $\dot{x} = tx$, $x(0) = y$, zeigt.

2. Sei $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ ein dynamisches System. Ersetzt man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Z}$, so spricht man von **diskreten** dynamischen Systemen. Entsprechend sind diskrete semidynamische System erklärt.

3. Sei $y \in M$ fixiert. Dann nennt man $\gamma(y) := \{\phi(t, y) | t \in \mathbb{R}\}$ **Orbit** oder **Bahn** oder **Trajektorie** durch $y$. Entsprechend heißt $\gamma_+(y) = \phi(\mathbb{R}_+, y)$ positives Halborbit von $y$.

4. Ist $\phi(t, x)$ ein Halbfluss, und existiert $x_\infty := \lim_{t\to\infty} \phi(t, x_0)$ so ist $x_\infty$ ein Fixpunkt des Halbflusses, also $\phi(t, x_\infty) = x_\infty$ für alle $t \geq 0$. Dies zeigt

$$\phi(t, x_\infty) = \phi(t, \lim_{s\to\infty} \phi(s, x_0)) = \lim_{s\to\infty} \phi(t, \phi(s, x_0)) = \lim_{s\to\infty} \phi(t + s, x_0) = x_\infty.$$

   Daher sind Grenzwerte von globalen Lösungen einer autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ für $t \to \infty$ stets stationäre Lösungen der Gleichung.

**Übungen**

**1.** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \quad \dot{x} = 3(x^2)^{1/3},$$

und für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_n$ die Lösung mit $x_n(0) = 1/n$ auf $\mathbb{R}_+$, $y_n$ die Lösung mit Anfangswert $y_n(0) = -1/n$ auf $\mathbb{R}_-$. Zeigen Sie, dass diese global existieren und eindeutig bestimmt sind. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$ und $\lim_{n\to\infty} y_n(t)$. Zeigen Sie, dass diese Grenzwerte die größte bzw. kleinste Lösung von $(*)$ mit $x(0) = 0$ sind.

**2.** Sei $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz, $J = [a, b]$, und $\phi \in C^1(J)$ die Lösung von

$$\dot{\phi} = \omega(\phi), \phi(a) = \phi_0.$$

Es sei $\varphi \in C^1(J)$, und gelte

$$\dot{\varphi}(t) \le \omega(\varphi(t)),\ t \in J,\ \varphi(a) \le \phi_0.$$

Zeigen Sie $\varphi(t) \le \phi(t)$ für alle $t \in J$.
**Tipp:** Die Behauptung zunächst im Falle strikter Ungleichungen beweisen; danach geeignet stören und mit dem Satz über stetige Abhängigkeit den allgemeinen Fall zeigen.

**3.** Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, lokal Lipschitz in $x$ und gelte

$$(f(t, x)|x) \le 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+,\ |x| = R.$$

Sei $|x_0| \le R$. Dann existiert die Lösung $x(t)$ von

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(0) = x_0,$$

global und es gilt $|x(t)| \le R$ für alle $t \ge 0$.
**Tipp:** Betrachten Sie zunächst $f_n(t, x) = f(t, x) - x/n$ und verwenden Sie stetige Abhängigkeit.

**4.** Das folgende System ist ein Modell für eine Population bestehend aus männlichen ($x$) und weiblichen ($y$) Singles, und Paaren ($p$), in der nur die Paare zur Fortpflanzung beitragen.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\mu_m x + (\beta_m + \tilde{\mu}_f + \sigma)p - \phi(x, y),\\
\dot{y} &= -\mu_f y + (\beta_f + \tilde{\mu}_m + \sigma)p - \phi(x, y),\\
\dot{p} &= -(\tilde{\mu}_m + \tilde{\mu}_f + \sigma)p + \phi(x, y).
\end{aligned}$$

Dabei bedeuten $\beta_j$ die Geburtsraten, $\mu_j$ bzw. $\tilde{\mu}_j$ die Sterberaten der Singles bzw. der Paare, $\sigma$ die Trennungsrate der Paare, und $\phi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ die sogenannte Paarbildungsfunktion.

Es sei $\phi$ lokal Lipschitz, monoton wachsend in beiden Variablen, und $\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Zeigen Sie, dass dieses System einen Halbfluss auf $\mathbb{R}^3_+$ erzeugt, also dass die Lösungen zu nichtnegativen Anfangswerten global nach rechts existieren, eindeutig bestimmt und nichtnegativ sind, und stetig von den Daten abhängen.

**5.** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz und $x \in C^1(\mathbb{R}_+; G)$ eine Lösung von

$$\dot{x} = f(x). \tag{4.26}$$

Es existiere der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t) =: x_\infty \in G$. Zeigen Sie, dass dann $x_\infty$ stationäre Lösung von (4.26) ist, also $f(x_\infty) = 0$ gilt.

**6.** Das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x) - y, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= \sigma x - \gamma y, \quad y(0) = y_0, \end{aligned}$$

mit $g(x) = -x(x-a)(x-b)$, $0 < a < b$, $\sigma, \gamma > 0$, heißt **Fitzhugh-Nagumo-Gleichung**. Es spielt in der Theorie der Nervensysteme eine wichtige Rolle. Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem eindeutig und nach rechts global lösbar ist. Bestimmen Sie die Equilibria des Systems und skizzieren Sie das Phasendiagramm. Leiten Sie Differentialgleichungen für die Ableitung der Lösung nach $\sigma$ her.

**7.** Das folgende System wurde von **Field und Noyes** zur Modellierung der **Belousov-Zhabotinski** Reaktion vorgeschlagen. Es wird gelegentlich auch *Oregonator* genannt.

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= x + y - xy - \gamma x^2, \quad x(0) = x_0 \geq 0, \\ \dot{y} &= 2\delta z - y - xy, \quad y(0) = y_0 \geq 0, \\ \beta\dot{z} &= x - z, \quad z(0) = z_0 \geq 0, \end{aligned}$$

wobei $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$ Konstanten sind. Zeigen Sie, dass die Lösung eindeutig bestimmt ist, nichtnegativ bleibt, und nach rechts global existiert. Bestimmen Sie alle Equilibria in $\mathbb{R}^3_+$

**8.** Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \; x(0) = x(1) = 0,$$

wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz sei. Die **Shooting-Methode** zur Lösung solcher Randwertprobleme besteht darin, das entsprechende Anfangswertproblem mit $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = a$ zu lösen, und dann eine Nullstelle der Abbildung $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ definiert durch $\phi(a) = x(1, a)$ zu suchen. Dabei bezeichnet $x(t, a)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems. Beweisen Sie mit dieser Methode einen Existenzsatz im Fall eines beschränkten $g$: $|g(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$.