Satz 2.6.2 (Austauschlemma) Es seien $(m_i)_{i\in I}$ eine Basis eines Vektorraumes V, $j \in I$ und

$$a = \sum_{i\in I} x_i m_i \quad \text{mit} \quad x_j \neq 0. \tag{2.24}$$

Dann ist die Familie $(\tilde{m}_i)_{i\in I}$ mit[5] $\tilde{m}_i := m_i$ für $i \neq j$ und $\tilde{m}_j := a$ auch eine Basis von V.

Beweis. Wir berechnen

$$m_j = \frac{1}{x_j}\Big(a - \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i\Big).$$

$$\text{„(2.24)"} = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i + x_j m_j \Rightarrow a - \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i = x_j m_j \Rightarrow \cdots$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich jede Linearkombination von $(m_i)_{i\in I}$ in eine Linearkombination von $(\tilde{m}_i)_{i\in I}$ umschreiben. Zum Beispiel $\sum_{i\in I} y_i m_i$ lässt sich durch substituieren von m_j mit der oberen Formel umschreiben. Dann kommt m_j garnicht mehr vor, also

$$\sum_{i\in I} y_i m_i = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} y_i m_i + y_j m_j = \cdots + y_j\Big(\frac{1}{x_j}\Big(a - \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i\Big)\Big) =$$

$$\cdots + \frac{1}{x_j y_j}\cdot a - \sum_{i\in I\setminus\{j\}} \frac{x_i}{x_j y_j}\cdot m_i = \sum_{i\in I\setminus\{j\}}\Big(y_i - \frac{x_i}{x_j y_j}\Big) m_i + \frac{1}{x_j y_j}\cdot a,$$

wobei $y_j \neq 0$. Sonst ist der ganze Zirkus unnötig, weil

$$\sum_{i\in I} y_i m_i = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} y_i m_i.$$

Somit ist $(\tilde{m}_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V. ... weil

$(m_i)_{i\in I}$ eine Basis, also insbes. ein ES ist.
Da $x_j \neq 0$ und bezüglich einer Basis die Darstellung (2.24) gemäß Satz 2.5.3 eindeutig ist, lässt sich $a = \tilde{m}_j$ nicht als Linearkombination der Teilfamilie $(\tilde{m}_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ umschreiben. Nochmal:

$$„(2.24)" = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i + x_j m_j = \cdots$$

ist eindeutig und $x_j \neq 0$ ($m_j \neq \mathcal{O}$, weil eine Basis $\mathcal{O}$ nicht enthält $\Leftarrow$ jede Menge mit $\mathcal{O}$ ist l.a.) $\Rightarrow$ $x_j m_j \neq \mathcal{O}$, also

$$\cdots \neq \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i ,$$

wobei dies eine LK von $(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ ist. Weil laut Konstruktion $\forall i\in I, i\neq j: \tilde{m}_i := m_i$, ist $(\tilde{m}_i)_{i\in I\setminus\{j\}} := (m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$. a lässt sich also nicht umschreiben. Weil $a =: m_j$, lässt sich auch m_j nicht umschreiben. Diese Teilfamilie ist l.u. gemäß A 2.4.4 (a). $(m_i)_{i\in I}$ ist eine Basis, also insbes l.u.. Gemäß A 2.4.4 (a) ist $(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}} = (\tilde{m}_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ auch l.u. Wenden wir Satz 2.4.6 auf $(\tilde{m}_i)_{i\in I}$ und $(\tilde{m}_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ an, so folgt, dass die Familie $(\tilde{m}_i)_{i\in I}$ l.u. ist. „... für ein fest gewähltes $j\in I$ sei die Teilfamilie $(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ linear unabhängig. ...", und dann noch sowas:

$$m_j \notin [(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}] \Leftrightarrow M = (m_i)_{i\in I} \text{ l.u.},$$

nur brauchen wir $(\tilde{m}_i)_{i\in I}$ statt $(m_i)_{i\in I}$. $\square$