3.5.8 Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Dann existiert eine reelle Zahl x, sodass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Also ist $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik ein vollständig metrischer Raum.

Beweis. Gemäß Proposition 3.5.3 ist die Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. ... mit $d(x_n, x_N) \leq C := 1 + \max(\{ d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\}$ und $d(x_n, x_m) < 1$, für $n, m \geq N$. Nach Lemma 3.4.5 hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. „Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$, so gibt es eine Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\liminf_{n\to\infty} x_n$ konvergiert, und auch ...“ Schließlich konvergiert gemäß Lemma 3.5.7 auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst. „Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$, die eine konvergente Teilfolge hat. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ...... konvergent.“ Weil nach Definition 3.5.5, „Ein metrischer Raum $\langle X, d\rangle$ heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen aus X in X einen Grenzwert besitzt.“ und in den Beweisen von Proposition 3.5.3, Lemma 3.4.5, und Lemma 3.5.7 immer $\langle\mathbb{R}, d_2\rangle$, wobei d_2 die euklidische Metrik ist, verwendet wurde, ist „bloß“ $\langle\mathbb{R}, d_2\rangle$ ein vollständig metrischer Raum. $\square$