9.1. Ziel dieser Aufgabe ist eine Beziehung zwischen der linearisierten Stabilität und dem Konzept der Ljapunovfunktion. Genauer: wir zeigen die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

1. Die Ruhelage $y^* = 0$ der ODE $y' = Ay$ ist asymptotisch stabil.
2. Es gibt eine symmetrisch positiv definite Lösung der Matrixgleichung ("Ljapunovgleichung")

$$A^\top Q + QA = -I. \tag{1}$$

a) Sei die Ruhelage $y^* = 0$ asymptotisch stabil. Definieren Sie die Matrix

$$Q := \int_{t=0}^{\infty} e^{tA^\top} e^{tA}\, dt$$

Zeigen Sie: Q ist symmetrisch positiv definit (insbesondere also $(Qx, x)_2 > 0$ für $x \neq 0$) und erfüllt (1). Wie Teilaufgabe b) zeigen wird, ist die Funktion $V(x) := (Qx, x)_2$ eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE.

b) Sei Q eine symmetrisch positiv definite Lösung von (1). Zeigen Sie: $V(x) := (Qx, x)_2$ ist eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE. Zeigen Sie: die Ruhelage $y^* = 0$ ist asymptotisch stabil.

a) „(1) $\Rightarrow$ (2)" Sei die Ruhelage $y^*=0$ der ODE $y'=Ay$ asymptotisch stabil

$Q := \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA}\, dt$

Wegen der Stetigkeit der Transposition ist $e^{tA^T} = (e^{tA})^T$ und daher

$(e^{tA^T} e^{tA})^T = ((e^{tA})^T e^{tA})^T = (e^{tA})^T((e^{tA})^T)^T = (e^{tA})^T e^{tA}$ also ist Q symmetrisch.

$x^T Q x = x^T \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA}\, dt\, x = \int_0^\infty x^T (e^{tA})^T e^{tA} x\, dt = \int_0^\infty (e^{tA}x)^T e^{tA} x\, dt > 0$ für $x \neq 0$, weil e^{tA} invertierbar ist

$A^T Q + QA = \int_0^\infty (A^T e^{tA^T} e^{tA} + e^{tA^T} e^{tA} A)\, dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{tA^T} e^{tA})\, dt = \lim_{s\to\infty} e^{sA^T} e^{sA} - I$

Jetzt können wir verwenden, dass $y^*=0$ eine asymptotisch stabile Ruhelage ist.

Aus Satz 3.15 wissen wir, dass e^{tA} ein Fundamentalsystem der ODE ist und von Satz 5.6 (ii) wissen wir $\lim_{s\to\infty} \|e^{sA}\| = 0$ und daher auch $\lim_{s\to\infty} \|e^{sA^T}\| = 0$ und $\lim_{s\to\infty} e^{sA^T} e^{sA} = 0$

b) „(2) $\Rightarrow$ (1)": Sei nun Q eine pos. def. und symmetrische Matrix mit $A^T Q + QA = -I$

$V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : x \mapsto x^T Q x$

Sei $x \in \mathbb{R}^d$ mit $Ax \neq 0$

$\frac{\partial}{\partial x_i}(x^T Q x) = e_i^T Q x + x^T Q e_i = 2 x^T Q e_i \Rightarrow \nabla V(x) = 2Qx$

$\nabla V(x) \cdot Ax = 2x^T Q A x = x^T Q^T A x + x^T Q A x = x^T(A^T Q + QA)x =$

$= -x^T I x = -\|x\|_2^2 < 0$, weil $Ax \neq 0$ also $x \neq 0$

Also ist V strikte Ljapunovfunktion

und $x \neq 0 \wedge Ax = 0 \Rightarrow 0 = 2x^T Q A x = -\|x\|_2^2 < 0$ ↯
$\Rightarrow A$ regulär

$y^*=0$ ist striktes Minimum von V, denn $V(y^*) = 0$ und da Q pos. def. ist gilt

$\forall x \neq 0: x^T Q x > 0$

Da A regulär ist erhalten wir, dass $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und mit Satz 5.19 ist $y^*=0$ asymptotisch stabil.

9.2. Betrachten Sie die ODE

$$x' = -x - 2y + x^2y^2$$
$$y' = x - \frac{1}{2}y - x^3y$$

Konstruieren Sie eine Ljapunovfunktion V von der Form $V(x,y) = ax^2 + by^2$ mit geeigneten a, b. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ aussagen?

$\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = 2ax(-x-2y+x^2y^2) + 2by(x-\frac{1}{2}y - x^3y) \overset{!}{\leq} 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2ax^2 - 4axy + 2ax^3y^2 + 2byx - by^2 - 2bx^3y^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2ax^2 + (2b-4a)xy - by^2 + 2ax^3y^2 - 2bx^3y^2 \leq 0$

Sei jedenfalls $0 < a = b$, dann ist $\Leftrightarrow -2ax^2 - 2axy - ay^2 \leq 0 \Leftrightarrow -a(x^2 + (x^2 + 2ax + y^2)) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a(x^2 + (x+y)^2) \leq 0$

Wähle also $a = b = 1$, dann ist

$\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = 2x(-x-2y+x^2y^2) + 2y(x-\frac{1}{2}y - x^3y) = -2x^2 - 4xy + 2x^3y^2 + 2xy - y^2 - 2x^3y^2 =$

$= -x^2 - x^2 - 2xy - y^2 = -x^2 - (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$

und es ist $f(0,0) = 0$ also ist V sogar strikte Ljapunovfunktion

Weiters ist $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow -x - 2y + x^2y^2 = 0 \wedge x - \frac{1}{2}y - x^3y = 0$

für $|x| < 2^{-\frac{1}{3}}$ ist das nur der Fall für $y^2x^2 - x - 2y = 0 \wedge y = \frac{x}{\frac{1}{2} + x^3} = \frac{2x}{1+2x^3}$

also $\frac{4x^4}{(1+2x^3)^2} - x - \frac{4x}{1+2x^3} = 0$ und diese Gleichung hat als Polynom eine aus isolierten Punkten bestehende Lösungsmenge, also ist $(x,y) = (0,0)$ ein isolierter Punkt von $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$

Der Punkt $(0,0)$ ist striktes Minimum von V (das sieht man)

nach ~~Satz~~ Satz 5.19 (ii) ist daher die Ruhelage $(0,0)$ asymptotisch stabil.

9.3. Betrachten Sie für λ, μ, γ, $a > 0$ das System

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda xy - \mu x + \mu a \\ y' &= \lambda xy - \mu y + \gamma y \\ z' &= \gamma y - \mu z \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß das System im Fall $a\lambda > \mu - \gamma > 0$ genau eine nichttriviale Ruhelage $(x^*, y^*, z^*) \in (0,\infty)^3$ hat. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$V(x,y,z) = x - x^* \ln x + y - y^* \ln y$$

eine Ljapunovfunktion ist. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage (x^*, y^*, z^*) sagen?

•) Sei also $a\lambda > \mu - \gamma > 0$ und $(x,y,z) \neq (0,0,0)$; $\lambda, \mu, \gamma, a > 0$

$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow -\lambda xy - \mu x + \mu a = 0 \wedge \lambda xy - \mu y + \gamma y = 0 \wedge \gamma y - \mu z = 0 \Leftrightarrow$

1 u. 3 in 2 einsetzen liefert $\mu(a - x - y + z) = 0$

$\longrightarrow a - x - y + z = 0 \Leftrightarrow a + z = x + y$

die 2. Glg.: $y(\lambda x - \mu + \gamma) = 0$

Fall 1: „$y = 0$“ Die 1. Glg.: $\mu(a - x) = 0 \Leftrightarrow a = x$

also $\lambda a + \gamma - \mu = 0$ ↯ zu $\lambda a > \mu - \gamma$

Fall 2: „$\lambda x - \mu + \gamma = 0$“ $\rightsquigarrow \lambda x = \gamma - \mu \longrightarrow x = \frac{\gamma - \mu}{\lambda} > 0$ $\boxed{x > 0}$

$\rightsquigarrow -\lambda \frac{\gamma - \mu}{\lambda} y - \mu \frac{\gamma - \mu}{\lambda} + \mu a = 0 \Leftrightarrow y = \mu\Big(\underbrace{\frac{\gamma - \mu}{\lambda} - a}_{<0}\Big)\underbrace{(\gamma - \mu)^{-1}}_{<0} > 0$

und $\frac{\gamma - \mu}{\lambda} - a < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma - \mu}{\lambda} < a \Leftrightarrow \underbrace{\gamma - \mu}_{<0} < \underbrace{a\lambda}_{>0}$ $\longrightarrow$ $\boxed{y > 0}$

$\longrightarrow z = \frac{\gamma y}{\mu} \rightsquigarrow \boxed{z > 0}$

•) $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: (x,y,z) \longmapsto x - x^* \ln(x) + y - y^* \ln(y)$

$\nabla V(x,y,z) \cdot f(x,y,z) = \left(1 - \frac{x^*}{x}\right)(-\lambda xy - \mu x + \mu a) + \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)(\lambda xy - \mu y + \gamma y) =$

$= \cancel{-\lambda xy} - \mu x + \mu a + x^*\lambda y + x^*\mu - \frac{x^*\mu a}{x} \cancel{+ \lambda xy} - \mu y + \gamma y - y^*\lambda x + y^*\mu - y^*\gamma =$

$= x(-\mu - y^*\lambda) + y(x^*\lambda - \mu + \gamma) - \frac{x^*\mu a}{x} + \mu a + x^*\mu + y^*\mu - y^*\gamma \overset{!}{\leq} 0 \Leftrightarrow$

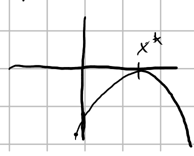
$\Leftrightarrow x(-\mu - y^*\lambda) + y(x^*\lambda - \mu + \gamma) + \mu a + x^*\mu + y^*\mu - y^*\gamma \leq \frac{x^*\mu a}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(-\mu - y^*\lambda) + x\big(y(x^*\lambda - \mu + \gamma) + \mu a + x^*\mu + \underbrace{y^*\mu - y^*\gamma}_{= \lambda x^* y^*}\big) \leq x^*\mu a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(-\mu - y^*\lambda) + x\big(y(x^*\lambda - \mu + \gamma) \underbrace{+ \lambda x^* y^* + x^*\mu}_{= \mu a} + \mu a\big) \leq x^*\mu a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \underbrace{(-\mu - y^*\lambda)}_{= -\frac{\mu a}{x^*}} + xy\underbrace{(x^*\lambda - \mu + \gamma)}_{= 0} + 2x\mu a \leq x^*\mu a \Leftrightarrow -x^2 \frac{\mu a}{x^*} + 2x\mu a - x^*\mu a \overset{!}{\leq} 0$

und $-x^2 \frac{\mu a}{x^*} + 2x\mu a - x^*\mu a = 0 \Leftrightarrow x = -x^* \frac{-2\mu a \pm \sqrt{4\mu^2a^2 - 4\mu^2a^2}}{2\mu a} = x^*$



Also handelt es sich sogar um eine strikte Ljapunovfunktion!

$$\nabla V(x,y,z) = \left(1 - \frac{x^*}{x},\ 1 - \frac{y^*}{y},\ 0\right)^T \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = x^* \wedge y = y^*$$

$$D^2 V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^* x^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & y^* y^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } D^2 V(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} x^{*-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{*-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{?}{0}$$

9.4. Die Existenz einer (strikten) Ljapunovfunktion erlaubt es, die Konvergenz einer Lösung gegen die asymptotisch stabile Ruhelage zu quantifizieren. Seien hierzu $V \in C^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $y^* = 0$ eine Ruhelage für $y' = f(y)$ und ein striktes Minimum von V. Nehmen Sie an, daß für das Spektrum der Matrix

$$B := (\nabla f(0))^\top \nabla^2 V(0) + \nabla^2 V(0) \nabla f(0)$$

gilt: $\max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(B)\} =: \alpha < 0$. Zeigen Sie: Es existieren β, $C > 0$, so daß für alle y_0 hinreichend nahe bei $y^* = 0$ gilt:

$$\|y_{0,y_0}(t)\| \leq Ce^{-\beta t}.$$

Wovon hängt β ab?

9.5. **a)** Sei $V \in C(G;\mathbb{R})$ eine Ljapunovfunktion für $y' = f(y)$. Nehmen Sie an, daß für jedes $y_0 \in G$ die Lösung y_{0,y_0} auf $(0,\infty)$ existiert. Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Menge $V^{-1}((-\infty,\alpha])$ eine invariante Menge für die ODE $y' = f(y)$.

b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ mit $f_i(y) \le 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ und ein $i \in \{1,\dots,d\}$. Geben Sie eine Ljapunovfunktion für die ODE $y' = f(y)$ an.

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ bel. und $y_0 \in V^{-1}(]-\infty,\alpha]) \subseteq G$ sowie $z \in \gamma^+(y_0) := \{y_{0,y_0}(t) \mid t \geq 0\}$

z.z.: $z \in V^{-1}(]-\infty,\alpha])$

Es ist also $V(y_0) \leq \alpha$. Als Ljapunovfunktion ist V monoton fallend entlang von Lösungen, deshalb ist $V(z) \leq V(y_0) \leq \alpha$ und damit $z \in V^{-1}(]-\infty,\alpha])$

b) $V: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}: y \mapsto y_i$

$\nabla V(y) \cdot f(y) = f_i(y) \leq 0$, nach Satz 5.13 ist V Ljapunovfunktion

9.6. Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung eines mathematischen Pendels (ohne Reibung):

$$y'' + g(y) = 0,$$

wobei die Funktion g auf $(-a, a)$ definiert ist und $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ für $x > 0$ und $g(x) < 0$ für $x < 0$ erfüllt (d.h., $xg(x) > 0$ für $x \neq 0$). Überführen Sie diese ODE 2. Ordnung in ein System erster Ordnung. Geben Sie eine Ljapunovfunktion an. Zeigen Sie, daß $(y, y') = (0, 0)$ eine stabile Ruhelage ist.

$f:]-a,a[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : (y_1, y_2)^T \mapsto (y_2, -g(y_1))^T$ Annahme: g Lipschitz-stetig

Die neue ODE ist $y' = f(y)$

$V:]-a,a[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (y_1, y_2) \mapsto \frac{1}{2} y_2^2 + \int_0^{y_1} g(x)\,dx$ (Orientierung an der Energie, vgl. S.62)

dann ist $\nabla V(y) \cdot f(y) = y_2\, g(y_1) - y_2\, g(y_1) = 0$

V ist also Ljapunovfunktion $\nabla V(y) = (g(y_1), y_2)^T$

$f(0,0) = 0$, also ist $(0,0)$ Ruhelage

$\nabla V(0,0) = 0$; Nun ist $\forall y_1 \in]-a, a[\setminus \{0\} : \int_0^{y_1} g(x)\,dx > 0$

also $V(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ und sonst $V(y) > 0$

Im Punkt $(0,0)$ hat V also ein striktes Minimum, nach Satz 5.19 ist daher $(0,0)$ stabil

9.7. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Mengen $M_1 = \{(0,0)\}$, $M_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $M_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ sind invariante Mengen.

„M_1" $f(0,0) = 0$ also ist $(0,0)$ Ruhelage und daher M_1 invariant.

„M_2" Sei $(a,b) \in M_2$ bel. und y Lsg. der ODE mit $y(0) = (a,b)$ und $s \geq 0$ bel.

z.z.: $y(s) \in M_2$

Wir schreiben (a,b) in Polarkoordinaten $(1, \varphi)$ mit $\cos(\varphi) = a$ und $\sin(\varphi) = b$

Die Funktion $z(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + t) \\ \sin(\varphi + t) \end{pmatrix}$ ist dann Lsg. des AWP und damit M_2 invariant

„M_3" Da die Funktion z aus „M_2" eine Lösung ist, die den Einheitskreis umläuft, sich Lösungen nicht schneiden und für $y_0 \in M_3$ die Funktion $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : t \mapsto \|y_{0,y_0}(t)\|_2$ stetig ist, können wir mit dem ZWS schließen, dass M_3 invariant ist

9.8. Betrachten Sie für $d = 1$ das System $y' = f(y)$, wobei $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f(y) > 0$ für $y \in (0, 1)$. Geben Sie $\omega_+(y_0)$ für $y_0 \in [0, 1]$ an. Betrachten Sie für $r \in \mathbb{R}$ die ODE

Aus Aufgabe 8.4(a) von letzter Übung wissen wir bereits, dass $y' = f(y)$ eine strikte Ljapunovfunktion hat. Nach Korollar 5.25 ist daher $\omega_+(y_0) \subseteq \mathcal{E} = \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) = 0\}$

Da $\forall y \in [0,1]: (f(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \{0,1\})$ und sich Lsg. nicht schneiden ist $\omega_+(y_0) \subseteq \{0,1\}$

Fall 1: „$y_0 = 0$" Dann ist $\omega_+(y_0) = \{0\}$

Fall 2: „$y_0 = 1$" Dann ist $\omega_+(y_0) = \{1\}$

Fall 3: „$y_0 \in]0,1[$"

Da sich Lsg. nicht schneiden ist $0 < y_{t_0,y_0} < 1$ und wegen $\forall y \in]0,1[: y' = f(y) > 0$ ist y_{t_0,y_0} streng monoton wachsend, der Grenzwert $\lim_{t \to \infty} y_{t_0,y_0}(t) \in]y_0, 1]$ existiert also

Deshalb ist $|\omega_+(y_0)| = 1$, es kann nur $\omega_+(y_0) = \{1\}$ sein