3.9.3 Korollar. Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent, wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $\lambda$ eine feste reelle oder komplexe Zahl, so sind auch $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k}$ konvergent, wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}.$$

Beweis. Für die entsprechenden Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k), \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k),$$

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}$$

gilt $S_n + T_n = U_n$, $V_n = \lambda S_n$ und $W_n = \overline{S_n}$. Die erste Gleichheit ist klar, weil die Indizes der Summenzeichen jeweils gleich sind. Die Zweite erklärt das Distributivgesetz. Für die Dritte werden jeweils Realteil und Imaginärteil separat zusammengefasst. $(x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_1 i) + \dots = (x_1 + x_2 + \dots) - (y_1 + y_2 + \dots)i$. Also folgen die Rechenregeln aus den entsprechenden Regeln für Folgen; vgl. Satz 3.3.5. Es werden dazu einfach Folgen von Partialsummen betrachtet. $\square$