Übungen zu Analysis 3, 4. Übung 4. 11. 2019

28. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $f * f = cf$ für $f \in L^1(\mathbb{T}),\ c \in \mathbb{C}$.

    Für $c \neq 0$ können dann wegen dem Riemann Lebesguelemma nur endlich viele Koeffizienten ungl. 0 sein. f ist also ein trigonometrisches Polynom mit allen nichtverschwindenden Koeffizienten gleich $\frac{c}{\sqrt{2\pi}}$.

29. Zeigen Sie, dass für Funktionen f von beschränkter Variation $|\hat{f}(n)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} n} \|f\|_{BV},\ n \neq 0$.

    Hinw.: Verwenden Sie partielle Integration für Riemann-Stieltjes-Integrale.

30. Zeigen Sie, dass für eine $2\pi/n$-periodische Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt $\hat{f}(l) = 0$ für $l \notin n\mathbb{Z}$.

31. Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx = \hat{f}(0)\hat{g}(0)$ gilt. (Lemma von Fejér)

32. Zeigen Sie, dass für $f \in L^1(\mathbb{T})$ die Operatornorm von $T_f : L^1 \to L^1,\ T_f g = f * g$ gleich $\|f\|_1$ ist.

    Hinw. Betrachten Sie $T_f F_n$.

33. Zeigen Sie:

    –Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit Stammfunktion F mit $\int_{\mathbb{T}} F(t)\,dt = 0$ gilt $\hat{F}(n) = \frac{-i}{n}\hat{f}(n) \quad n \neq 0, F(0) = 0$.

    –Sei $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ auf dem Raum $A(\mathbb{T})$ aller Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe. Dann gilt $\|fg\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})}\|g\|_{A(\mathbb{T})}$

34. Sei $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$, $\alpha > \frac{1}{2}$, d.h. es gilt $\|f - \tau_h f\|_\infty \leq C_f h^\alpha$ für eine von f abhängige Konstante C_f. Zeigen Sie f in $A(\mathbb{T})$ mit $\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq |\hat{f}(0)| + C_f C_\alpha$ mit einer nur von α abhängigen Konstanten C_α.

    Hinw.: Zeigen Sie $|(f - \tau_h f)^\wedge(n)| \geq \sqrt{2}|\hat{f}(n)|$ für geeignetes h und $3^m \leq n \leq 3^{m+1} - 1$. Schätzen Sie so mit der Bessel'schen Ungleichung $\sum_{n=3^m}^{3^{m+1}-1} |\hat{f}(n)|^2 + |\hat{f}(-n)|^2$ durch $\|f - \tau_h f\|_2^2$ ab und verwenden Sie dann die Hölder'sche Ungleichung.

35. Zeigen Sie: Ist $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(|n|) = -\hat{f}(-|n|) \geq 0$ dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\hat{f}(n)$. Zeigen Sie, dass es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $a_n \to 0$ für $|n| \to \infty$ gibt, die nicht Fouriertransformierte einer L^1-Funktion sind.

    Hinw.: Betrachten Sie die Fejérreihe der Stammfunktion von f und verwenden Sie Bsp. 33.

36. Zeigen Sie dass für f absolut stetig auf $\mathbb{T}$ mit $f' \in L^2(\mathbb{T})$ gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_2.$$

Hinw.: Zeigen Sie $\hat{f'}(n) = \mathrm{i}n\hat{f}(n)$ für absolut stetige Funktionen und verwenden Sie Bsp. 25 (dort wurde gezeigt $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$),