

Kapitel 5

Elementare Stabilitätstheorie

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x . In diesem Kapitel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

mit $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in G$. Einer der wichtigsten Begriffe in der Theorie der Differentialgleichungen ist der der *Stabilität*.

5.1 Stabilitätsdefinitionen

Sei $\tilde{x}(t)$, $t \geq t_0$ eine ausgezeichnete Lösung der Differentialgleichung (5.1) zum Anfangswert $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$. Setze $y(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$, wobei $x(t)$, $t \geq t_0$ die Lösung von (5.1) ist. Dann gilt

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = f(t, x(t)) - f(t, \tilde{x}(t)) = f(t, y(t) + \tilde{x}(t)) - f(t, \tilde{x}(t)).$$

Definiert man $g(t, y(t)) := f(t, y(t) + \tilde{x}(t)) - f(t, \tilde{x}(t))$, so erhält man die Differentialgleichung $\dot{y} = g(t, y)$ für die Funktion $y(t)$, wobei die Funktion g natürlich wieder lokal Lipschitz in y und stetig in t ist. Es gilt offensichtlich $g(t, 0) = 0$, das heißt, die Differentialgleichung $\dot{y} = g(t, y)$ besitzt die triviale Lösung $y_* = 0$ zum Anfangswert $y_*(t_0) = 0$. Daher genügt es den Fall $f(t, 0) = 0$ zu betrachten.

Definition 5.1.1. Sei $f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x , mit $f(t, 0) = 0$ und $x(t, x_0)$, $t \geq t_0$, sei die Lösung des Anfangswertproblems (5.1).

1. Die triviale Lösung $x_* = 0$ heißt **stabil**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\bar{B}_\delta(0) \subset G$, die Lösung $x(t, x_0)$ zu $x_0 \in \bar{B}_\delta(0)$ für alle $t \geq t_0$ existiert und

$$|x(t, x_0)| \leq \varepsilon, \text{ für alle } |x_0| \leq \delta, \text{ und } t \geq t_0,$$

erfüllt ist.

2. $x_* = 0$ heißt **instabil**, falls x_* nicht stabil ist.
3. $x_* = 0$ heißt **attraktiv**, falls ein $\delta_0 > 0$ existiert, sodass $\bar{B}_{\delta_0}(0) \subset G$, die Lösung $x(t, x_0)$ zu $x_0 \in \bar{B}_\delta(0)$ für alle $t \geq t_0$ existiert, und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = 0 \text{ für alle } x_0 \in \bar{B}_{\delta_0}(0) \text{ gilt.}$$

4. $x_* = 0$ heißt **asymptotisch stabil**, falls $x_* = 0$ stabil **und** attraktiv ist.

Bemerkungen 5.1.2.

1. Die Stabilität der trivialen Lösung x_* ist die stetige Abhängigkeit der Lösung $x(t, x_0)$ vom Anfangswert x_0 auf \mathbb{R}_+ in einer Umgebung der trivialen Lösung, denn die Stabilitätsdefinition ist äquivalent zu

$$\lim_{|x_0| \rightarrow 0} |x(t, x_0)| = 0 \text{ gleichmäßig bezüglich } t \geq t_0.$$

2. Zwischen Stabilität und Attraktivität von x_* gelten *keine* allgemeingültigen Beziehungen. Genauer gilt

- (a) x_* stabil $\nRightarrow x_*$ attraktiv;
- (b) x_* attraktiv $\nRightarrow x_*$ stabil.

Ein Beispiel zu (a) ist das mathematische Pendel, welches wir später noch diskutieren werden. Zu (b) war historisch Vinograd (1957) der erste, der ein zweidimensionales System angegeben hat, in dem alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$

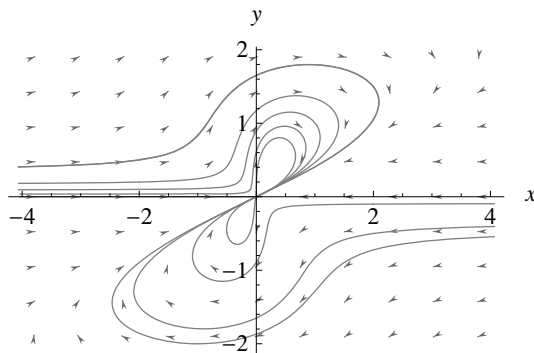


Abbildung 5.1: Phasenportrait von Vinograd

gegen Null gehen, aber die Nulllösung instabil ist, da es sog. homokline Orbits gibt; vgl. Abb. 5.1. Das Beispiel ist leider kompliziert, wir werden später ein einfacheres kennenlernen (vgl. Abschnitt 9.2).

Beispiele. (a) $\dot{x} = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Hier ist $x_* = 0$ die triviale Lösung der Differentialgleichung und die eindeutige Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$ lautet $x(t, x_0) = x_0 e^{\alpha t}$. Offensichtlich ist die Lösung $x(t, x_0)$

- stabil für $\alpha \leq 0$, denn $|x(t, x_0)| = |x_0| e^{\alpha t} \leq |x_0| \leq \delta := \varepsilon$, $t \geq 0$;
- instabil für $\alpha > 0$, denn $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = \infty$, sofern $x_0 \neq 0$ ist;
- attraktiv für $\alpha < 0$, denn $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\dot{x} = -x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Sei $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit Trennung der Variablen erhält man die eindeutige Lösung

$$x(t, x_0) = \frac{\operatorname{sgn}(x_0)}{\sqrt{2t + 1/x_0^2}}, \quad t > -1/(2x_0^2).$$

Wie man sieht, existiert die Lösung für jedes $x_0 \neq 0$ global nach rechts, und für $|x_0| \leq \delta$ und $t \geq 0$ gilt

$$|x(t, x_0)| = \frac{1}{\sqrt{2t + 1/x_0^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1/x_0^2}} = |x_0| \leq \delta := \varepsilon.$$

Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0)| = 0$ ist die Lösung $x_* = 0$ auch asymptotisch stabil.

(c) *Das mathematische Pendel.* Linearisiert um die untere Ruhelage (also kleine Auslenkungen) lautet das Anfangswertproblem für das linearisierte Pendel

$$(P) \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Die triviale Lösung $x_* = 0$ der Pendelgleichung beschreibt die untere Ruhelage des Pendels. Für kleine Abweichungen der Anfangswertes x_0 von $x_* = 0$, also $|x_0| \leq \delta$, bleibt die Lösung von (P) innerhalb einer ε -Umgebung von $x_* = 0$, denn mit $x(t, x_0) = x_0 \cos \omega t$ gilt

$$|x(t, x_0)| = |x_0| |\cos \omega t| \leq |x_0| \leq \delta := \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$. Die untere Ruhelage des linearisierten Pendels ist also stabil, aber nicht attraktiv, denn der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existiert nicht.

Wie wir später sehen werden, kann man bezüglich Stabilität von $x_* = 0$ der unteren Ruhelage des linearisierten Pendels keine Rückschlüsse auf die nichtlineare Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ ziehen. Die untere Ruhelage ist aber auch für die nichtlineare Pendelgleichung stabil, wie wir später zeigen; siehe auch Abb. 1.8.

Die obere Ruhelage $x_* = \pi$ der nichtlinearen Pendelgleichung $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ ist instabil, denn selbst für sehr kleine Abweichungen des Anfangswertes x_0 von π ergeben sich große Auslenkungen.

5.2 Ebene lineare autonome Systeme

Wir betrachten nun die autonome lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (5.2)$$

Offensichtlich ist $x_* = [0, 0]^T$ ein Equilibrium von (5.2). Ziel dieses Abschnittes ist, die Stabilitätseigenschaften der trivialen Lösung des Systems $\dot{x} = Ax$ mittels der Eigenwerte von A vollständig zu charakterisieren.

Dazu betrachten wir das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - p\lambda + q,$$

wobei $p = \text{sp } A = a_{11} + a_{22}$ und $q = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Wir müssen nun anhand der beiden (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerte λ_1, λ_2 diverse Fälle unterscheiden. Die Eigenwerte der Matrix A sind explizit gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{\text{sp } A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{sp } A)^2}{4} - \det A}.$$

Wir unterscheiden zunächst 3 Grundfälle.

1. $\lambda_{1,2}$ sind reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2$, falls $q < \frac{p^2}{4}$;
2. $\lambda_{1,2}$ sind reell und $\lambda_1 = \lambda_2$, falls $q = \frac{p^2}{4}$;
3. $\lambda_{1,2}$ sind konjugiert komplex ($\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$), falls $q > \frac{p^2}{4}$.

Diese Fälle werden nun separat behandelt.

Zu 1: Zu verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 existieren zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1, v_2 . Definieren wir eine Matrix C durch $C := [v_1, v_2]$, so gilt $\det C \neq 0$, aufgrund der linearen Unabhängigkeit von v_1, v_2 . Also ist C invertierbar. Ferner gilt natürlich $AC = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2)$. Das gleiche Resultat erhält man aber, indem man C mit einer Diagonalmatrix $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ multipliziert

$$C \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = AC,$$

also gilt $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = C^{-1}AC$. Mit $x = Cy$ folgt

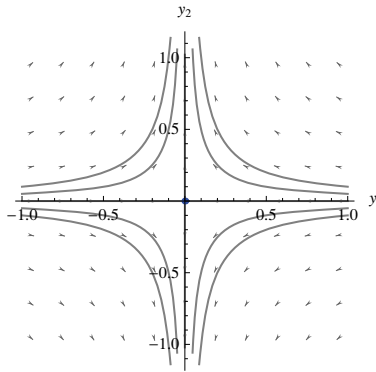
$$\dot{y} = C^{-1}\dot{x} = C^{-1}Ax = C^{-1}ACy$$

und wir haben das zu (5.2) äquivalente System

$$\dot{y} = By, \quad \text{mit } B := C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (5.3)$$

erhalten, welches die entkoppelte Struktur

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2, \end{aligned}$$

Abbildung 5.2: (α) Sattelpunkt

besitzt. Die Lösungen von (5.3) lauten

$$\begin{aligned} y_1(t) &= k_1 e^{\lambda_1 t}, \quad k_1 \in \mathbb{R}, \\ y_2(t) &= k_2 e^{\lambda_2 t}, \quad k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Beim Übergang von (5.2) zu (5.3) bleiben die Eigenwerte erhalten und auch das globale Verhalten der Lösungen ändert sich nicht. Geometrische Objekte werden lediglich einer affinen Ähnlichkeitstransformation unterworfen. Die Trajektorien sind durch die Parametrisierung (5.4) gegeben. Anhand der Lage der Eigenwerte unterscheiden wir nun 5 Unterfälle; vgl. Abb. 5.2, 5.3 und 5.4.

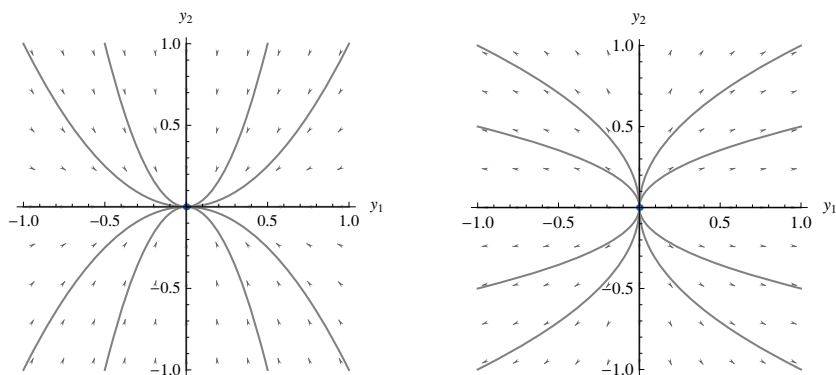
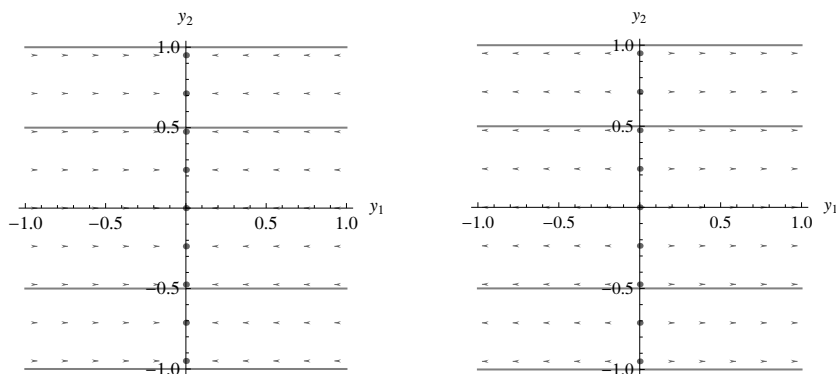
- $(\alpha) \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad : \quad q < 0,$
- $(\beta) \lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad : \quad 0 < q < p^2/4, \quad p < 0,$
- $(\gamma) \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad : \quad 0 < q < p^2/4, \quad p > 0,$
- $(\delta) \lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0 \quad : \quad q = 0, \quad p < 0,$
- $(\varepsilon) \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 \quad : \quad q = 0, \quad p > 0.$

Zu 2: Im Fall $q = p^2/4$ sind die Eigenwerte durch $\lambda_{1,2} = p/2 = \text{sp } A/2$ gegeben. Es ergeben sich nun 2 Möglichkeiten:

2a: $\lambda = \lambda_{1,2}$ ist halbeinfach, das heißt, die geometrische Vielfachheit von λ ist gleich der algebraischen Vielfachheit, also gleich 2. Es existieren dann 2 linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ . Diesen Fall können wir wie in 1. behandeln. Man erhält

$$\begin{aligned} y_1(t) &= k_1 e^{\lambda t}, \quad k_1 \in \mathbb{R}, \\ y_2(t) &= k_2 e^{\lambda t}, \quad k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Phasenportraits nennt man *echte Knoten*, stabil für $\lambda < 0$, instabil für $\lambda > 0$. Im Fall $\lambda = 0$ ist $A = 0$, also der Fluss trivial.

Abbildung 5.3: Stabiler Knoten (β) und instabiler Knoten (γ)Abbildung 5.4: Stabile Zustände (δ) und instabile Zustände (ϵ)

2b: $\lambda = \lambda_{1,2}$ ist nicht halbeinfach, das heißt, es gibt nur einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ . Die Matrix A lässt sich nun nicht mehr diagonalisieren. Gemäß Abschnitt 3.3 löse man die Gleichung $(A - \lambda I)w = v$; das ergibt einen von v linear unabhängigen Vektor w . Wie in 1. definieren wir dann die Matrix C durch $C := [v, w]$. Es gilt

$$AC = (\lambda v, Aw) = (\lambda v, v + \lambda w) = C \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Die Matrix C leistet also eine Transformation der Matrix A auf Tridiagonalform

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = C^{-1}AC.$$

Setzen wir wie im 1. Fall $x = Cy$, so erhalten wir für y das zu (5.2) äquivalente

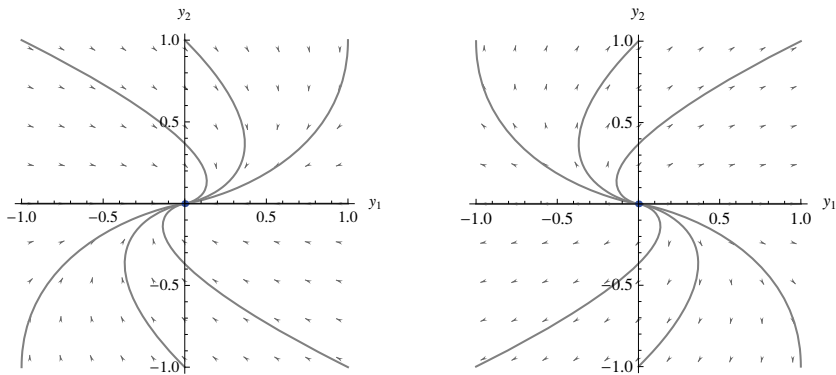


Abbildung 5.5: Stabiler falscher Knoten (a) und instabiler falscher Knoten (c)

System

$$\dot{y} = By, \quad B := C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

also

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Systems lauten

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \\ y_2(t) &= k_2 e^{\lambda t}, \quad k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich 3 Unterfälle für Fall 2b:

- (a) $\lambda < 0$: $p < 0$,
- (b) $\lambda = 0$: $p = 0$,
- (c) $\lambda > 0$: $p > 0$.

Abb. 5.5 und 5.6 zeigen das Verhalten der Trajektorien.

Zu 3: Wegen $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Die Matrix A lässt sich wie in Fall 1 (hier jedoch komplex) diagonalisieren. Man erhält so das System

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda_1 u, \\ \dot{v} &= \lambda_2 v. \end{aligned}$$

Zur Deutung der Stabilität ist dieses komplexe System jedoch nicht so geeignet. Daher betrachtet man den Real- und Imaginärteil von u . Sei $\lambda_1 = \sigma + i\rho$ und

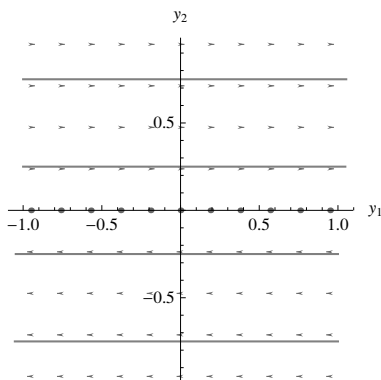


Abbildung 5.6: Instabile Zustände (b)

o.B.d.A. gelte $\rho > 0$. Ist das nicht der Fall, so vertausche man λ_1 und λ_2 . Seien ferner $y_1 = \operatorname{Re} u$ und $y_2 = \operatorname{Im} u$. Damit ergibt sich das reelle System

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \sigma y_1 - \rho y_2, \\ \dot{y}_2 &= \sigma y_2 + \rho y_1.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Bezüglich des Parameters σ unterscheiden wir nun wiederum 3 Unterfälle:

- (1) $\sigma < 0$: $p > 0$,
- (2) $\sigma = 0$: $p = 0$,
- (3) $\sigma > 0$: $p < 0$.

Wir schreiben (5.6) mittels der Transformation $y_1 = r \cos \varphi$, $y_2 = r \sin \varphi$ und $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi &= \sigma r \cos \varphi - \rho r \sin \varphi, \\ \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi &= \sigma r \sin \varphi + \rho r \cos \varphi.\end{aligned}$$

Daraus gewinnen wir das entkoppelte System

$$\begin{cases} \dot{r} = \sigma r, \\ \dot{\varphi} = \rho, \end{cases}$$

dessen Lösungen durch $r(t) = k_1 e^{\sigma t}$ und $\varphi(t) = \rho t + k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ gegeben sind. Man sieht sofort, dass sich für $\rho < 0$ lediglich die Laufrichtung der Phasenbahnen ändert. Das Stabilitätsverhalten hängt nur vom Vorzeichen von $\sigma \in \mathbb{R}$ ab. Die Phasenportraits für den Fall 3 sind in Abb. 5.7 und 5.8 wiedergegeben.

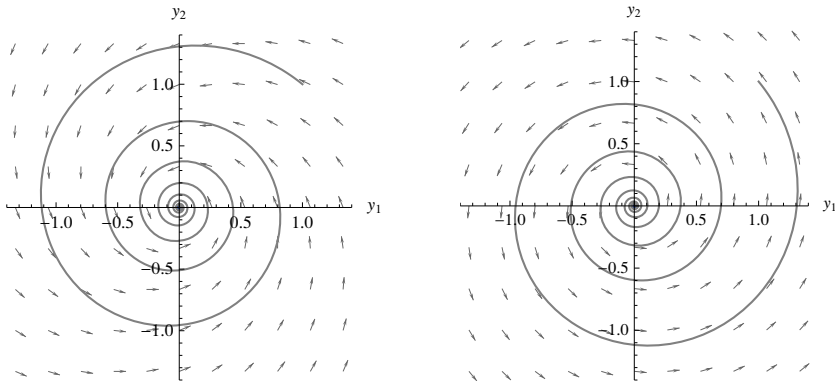


Abbildung 5.7: Stabile Spirale (1) und instabile Spirale (3)

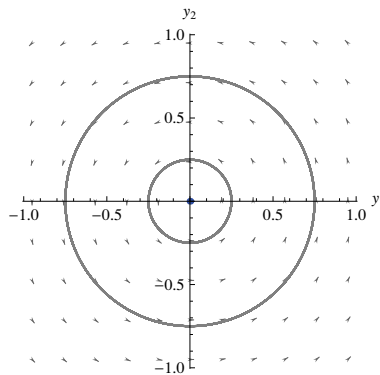


Abbildung 5.8: Zentrum (2)

Bemerkungen 5.2.1.

1. Wie bereits erwähnt, wird die Matrix A einer affinen Ähnlichkeitstransformation unterzogen. In den ursprünglichen Koordinaten (x_1, x_2) haben die Trajektorien daher ein verzerrtes Aussehen. Des Weiteren können wir aus Fall 1, 2 und 3 schlussfolgern, dass (5.2) für $q = \det A > 0$ und $p = \operatorname{sp} A < 0$ asymptotisch stabil ist, und für $q < 0$ oder $p > 0$ instabil ist.
2. Ein Zentrum ist das Übergangsstadium zwischen stabilen und instabilen Spiralen. Falsche Knoten treten beim Übergang von Knoten zu Spiralen auf.
3. Die wichtigsten Fälle sind die Knoten, Spiralen und die Sattelpunkte. Diese sind nämlich **strukturell stabil**, d.h. invariant unter kleinen Störungen der Matrix A . Insbesondere sind echte und falsche Knoten sowie Zentren nicht strukturell stabil. Letztere spielen in der Verzweigungstheorie eine wichtige Rolle.

Die Ergebnisse unserer Betrachtung können wir in folgendem Schema zusammenfassen:

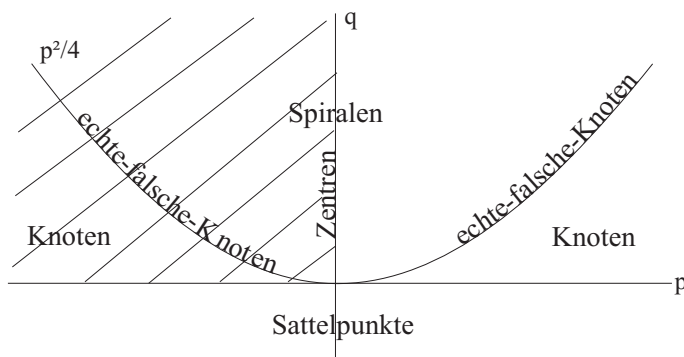


Abbildung 5.9: Stabilitätsbereiche

Der schraffierte Bereich skizziert das Stabilitätsgebiet.

Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0,$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ ist äquivalent zum ebenen linearen und autonomen System 1. Ordnung

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} z, \quad z = [u, v]^T.$$

Es gilt $\text{sp } A = -a$ und $\det A = b$, also $p = -a$ und $q = b$.

5.3 Stabilität linearer Systeme

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$(L) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t),$$

wobei $A \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$ und es seien $x_*(t)$ und $x(t)$ Lösungen von (L). Dann ist $y(t) := x(t) - x_*(t)$ eine Lösung von

$$(H) \quad \dot{y} = A(t)y.$$

Also ist eine Lösung von (L) genau dann stabil (bzw. attraktiv), wenn die triviale Lösung von (H) diese Eigenschaft hat. Daher spricht man bei linearen Systemen von Stabilität schlechthin.

Es sei $Y(t)$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung (H), also ist $y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0$ die Lösung von (H) zum Anfangswert $y(t_0) = y_0$.

Satz 5.3.1. Sei $Y(t)$ ein Fundamentalsystem für (H) . Dann gilt

1. $y_* = 0$ ist genau dann stabil für (H) , wenn $\sup_{t \geq t_0} |Y(t)| < \infty$ gilt;
2. $y_* = 0$ ist genau dann attraktiv für (H) , wenn $|Y(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt.

Insbesondere fallen die Begriffe attraktiv und asymptotisch stabil für lineare Systeme zusammen.

Beweis. Zu 1: Sei die Lösung $y_* = 0$ von (H) stabil. Laut Definition gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |y(t)| \leq \varepsilon, \text{ für alle } |y_0| \leq \delta, \text{ und } t \geq t_0.$$

Speziell existiert für $\varepsilon = 1$ ein $\delta = \delta(1) > 0$, sodass

$$|y(t)| = |Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \leq 1,$$

für $|y_0| \leq \delta$ und alle $t \geq t_0$. Sei nun $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $y_0 := \delta Y(t_0)v / |Y(t_0)v|$. Dann folgt

$$|Y(t)v| = \delta^{-1}|Y(t_0)v||Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0| \leq \delta^{-1}|Y(t_0)v| \leq (|Y(t_0)|/\delta)|v|.$$

Daher ist $|Y(t)|$ beschränkt durch $|Y(t_0)|/\delta$, für alle $t \geq t_0$.

Es gelte nun umgekehrt $|Y(t)| \leq M$, für alle $t \geq t_0$, mit einer Konstanten $M > 0$. Sei ferner $|y_0| \leq \delta$. Dann gilt

$$|y(t)| \leq |Y(t)||Y^{-1}(t_0)||y_0| \leq \delta M |Y^{-1}(t_0)| \leq \varepsilon,$$

falls $\delta \leq \varepsilon / (M|Y^{-1}(t_0)|)$.

Zu 2: Sei $y_* = 0$ asymptotisch stabil für (H) . Dann existiert ein $\delta_0 > 0$, sodass $|y(t)| = |Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und alle $|y_0| \leq \delta_0$. Wie in Teil 1 dieses Beweises erhalten wir $|Y(t)v| \rightarrow 0$ mit $t \rightarrow \infty$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt $|Y(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Umgekehrt gelte $|Y(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Dann gilt aber auch

$$|y(t)| \leq |Y(t)||Y^{-1}(t_0)||y_0| \rightarrow 0,$$

für $t \rightarrow \infty$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|y_0| \leq \delta_0$ und $\delta_0 > 0$ ist beliebig, aber fixiert. Daher ist $y_* = 0$ attraktiv für (H) .

Offensichtlich existiert dann auch eine Konstante $M > 0$, sodass $|Y(t)| \leq M$ für alle $t \geq t_0$ gilt. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt somit, dass $y_* = 0$ auch stabil für (H) ist, also ist $y_* = 0$ asymptotisch stabil. \square

Für den Fall, dass $A(t)$ eine vom Parameter t unabhängige Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist, erhält man aus Satz 5.3.1 das folgende Resultat.

Korollar 5.3.2. Sei $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gelten

1. $y_* = 0$ ist genau dann stabil für (H) , wenn gilt

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_j \leq 0 \text{ für alle Eigenwerte } \lambda_j \text{ von } A, \\ \text{im Fall } \operatorname{Re} \lambda_j = 0 \text{ ist } \lambda_j \text{ halbeinfach;} \end{cases}$$

2. $y_* = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil für (H) , wenn $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 3.3.2 bzw. Satz 3.3.4 und Satz 5.3.1. \square

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so heißt die Menge aller Eigenwerte $\sigma(A)$ *Spektrum* von A . Die Zahl

$$s(A) := \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

wird *Spektralschranke* von A genannt. Damit kann man das Korollar kurz auch wie folgt formulieren: $y_* = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil wenn $s(A) < 0$ gilt, und $s(A) > 0$ impliziert Instabilität. Der Fall $s(A) = 0$, also wenn es Eigenwerte auf der imaginären Achse gibt, erfordert weitere Informationen über diese, die über Stabilität und Instabilität entscheiden. Dieser Fall wird häufig *marginal stabil* genannt.

5.4 Das Prinzip der linearisierten Stabilität

Wir betrachten nun autonome Differentialgleichungen der Form

$$(N) \quad \dot{x} = f(x),$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Sei x_* ein Equilibrium von (N), also $f(x_*) = 0$. Unser Ziel ist es, die Stabilitätseigenschaften dieser speziellen Lösung zu charakterisieren. Es sei $x = x(t)$ eine Lösung von (N). Setzen wir $u(t) := x(t) - x_*$, so erhalten wir

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \underbrace{\frac{d}{dt} x_*}_{=0} = \dot{x}(t) - \underbrace{f(x_*)}_{=0} = f(u(t) + x_*) - f(x_*) = f'(x_*)u(t) + r(u(t)),$$

mit

$$r(u) := f(u + x_*) - f(x_*) - f'(x_*)u = o(|u|), \quad \text{für } |u| \rightarrow 0.$$

Daher untersuchen wir das äquivalente *semilineare* System

$$(NL) \quad \dot{u} = Au + r(u),$$

mit $A := f'(x_*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und vergleichen dieses mit dem linearen System

$$(L) \quad \dot{u} = Au.$$

Der folgende Satz enthält Implikationen der Stabilitätseigenschaften der trivialen Lösung $u_* = 0$ von (L) für die von x_* für (N).

Satz 5.4.1. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, x_* ein Equilibrium von (N), und $A := f'(x_*)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Gilt $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für alle Eigenwerte λ_j von A , so ist das Equilibrium x_* asymptotisch stabil für (N);
2. Existiert ein Eigenwert λ_j , mit $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, so ist x_* instabil für (N).

Damit gilt für ein Equilibrium x_* von (N):

$$s(f'(x_*)) < 0 \Rightarrow x_* \text{ asymptotisch stabil; } s(f'(x_*)) > 0 \Rightarrow x_* \text{ instabil.}$$

Daher ist die Spektralschranke von $f'(x_*)$ charakteristisch für Stabilität des Equilibriums x_* von (N).

Beweis. Zu 1: Sei $x = x(t)$ eine Lösung von (N). Dann löst $u(t) = x(t) - x_*$ das System (NL). Ferner sei $u(0) = u_0$. Wegen $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\forall \rho > 0 \exists \eta(\rho) > 0 : |r(u)| \leq \rho|u|, \text{ falls } |u| \leq \eta. \quad (5.7)$$

Da $u = u(t)$ eine Lösung von (NL) ist, liefert die Formel der Variation der Konstanten die Darstellung

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}r(u(s)) \, ds, \quad t \geq 0. \quad (5.8)$$

Wir müssen zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |u(t)| \leq \varepsilon, \text{ falls } |u_0| \leq \delta,$$

für alle $t \geq 0$, und $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$. Nach Übung 3.8 existieren Konstanten $\omega > 0$ und $M \geq 1$, sodass

$$|e^{At}| \leq M e^{-\omega t},$$

für alle $t \geq 0$. Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |e^{At}| |u_0| + \int_0^t |e^{A(t-s)}| |r(u(s))| \, ds \\ &\leq M e^{-\omega t} |u_0| + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} |r(u(s))| \, ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Wir fixieren $\rho > 0$ so, dass $M\rho - \omega < 0$ gilt. Sei ferner $|u_0| \leq \delta < \eta$. Solange $|u(s)| \leq \eta$, $0 \leq s \leq t$, können wir (5.7) anwenden und erhalten

$$|u(t)| \leq M e^{-\omega t} |u_0| + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \rho |u(s)| \, ds.$$

Mit der Substitution $\phi(t) = e^{\omega t} |u(t)|$ folgt

$$\phi(t) \leq M |u_0| + M\rho \int_0^t \phi(s) \, ds,$$

und das Lemma von Gronwall 2.4.1 liefert

$$|u(t)| \leq M e^{(M\rho - \omega)t} |u_0|.$$

Aufgrund der Wahl von $\rho > 0$ gilt $M\rho - \omega < 0$, also

$$|u(t)| \leq |u_0| M \leq \delta M < \eta \quad \text{und} \quad |u(t)| < \varepsilon, \quad (5.9)$$

mit $\delta = \frac{1}{2M} \min\{\eta, \varepsilon\}$. Dies zeigt, dass es kein $t_* > 0$ geben kann, sodass $|u(t_*)| = \eta$ gilt. Nach dem Fortsetzungssatz 2.3.2 existiert die Lösung $u(t)$ also global nach rechts und wegen (5.9) ist $u_* = 0$ zudem stabil. Zusätzlich gilt aber auch

$$|u(t)| \leq M e^{(M\rho - \omega)t} |u_0| \rightarrow 0,$$

für $t \rightarrow \infty$. Daher ist $u_* = 0$ asymptotisch stabil für (NL), das heißt, x_* ist asymptotisch stabil für (N).

Zu 2: Seien $\lambda_k, k = 1, \dots, r$, die verschiedenen Eigenwerte der Matrix A , geordnet nach aufsteigenden Realteilen. Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, gilt dann die Spektralzerlegung

$$\mathbb{C}^n = N(\lambda_1) \oplus \dots \oplus N(\lambda_r),$$

wobei $N(\lambda_k)$ den verallgemeinerten Eigenraum von λ_k bedeutet. Wenigstens der Eigenwert λ_r habe positiven Realteil. Wähle eine *Spektrallücke* $[\kappa - \sigma, \kappa + \sigma]$ mit $\sigma, \kappa > 0$ so, dass $\operatorname{Re} \lambda_r > \kappa + \sigma$ ist, und keine Eigenwerte Realteil in $[\kappa - \sigma, \kappa + \sigma]$ haben. Es sei s so gewählt, dass $\operatorname{Re} \lambda_s < \kappa - \sigma$ und $\operatorname{Re} \lambda_{s+1} > \kappa + \sigma$ gelten, und wir setzen $X_- := N(\lambda_1) \oplus \dots \oplus N(\lambda_s)$, $X_+ := N(\lambda_{s+1}) \oplus \dots \oplus N(\lambda_r)$, und bezeichnen mit P_\pm die Projektion auf $R(P_\pm) = X_\pm$ längs $N(P_\pm) = X_\mp$. Dann lässt e^{At} die Räume X_\pm invariant, und nach Übung 3.8, angewandt auf A in X_\pm , gibt es eine Konstante $M \geq 1$ mit

$$|P_- e^{At}| \leq M e^{(\kappa - \sigma)t}, \quad |P_+ e^{-At}| \leq M e^{-(\kappa + \sigma)t}, \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Angenommen, $u_* = 0$ sei stabil für (NL). Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass die Lösung $u(t)$ von (NL) die Ungleichung $|u(t)| \leq \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ erfüllt, sofern ihr Anfangswert $u(0) = u_0$ in $\bar{B}_\delta(0)$ liegt. Nach (5.7) gilt ferner $|r(u)| \leq \rho|u|$ für alle $u \in \bar{B}_\eta(0)$. Fixiere $\rho > 0$ (wird später gewählt) und setze $\varepsilon = \eta$ und $\delta = \delta(\eta)$.

Mit Variation der Konstanten gilt nun

$$u(t) = e^{At} u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} r(u(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (5.10)$$

Projiziert man diese Gleichung auf X_+ so erhält man

$$\begin{aligned} P_+ u(t) &= P_+ e^{At} u_0 + \int_0^t P_+ e^{A(t-s)} r(u(s)) ds \\ &= P_+ e^{At} v_0 - \int_t^\infty P_+ e^{-A(s-t)} r(u(s)) ds, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

mit $v_0 = P_+ u_0 + \int_0^\infty P_+ e^{-As} r(u(s)) ds$. Man beachte dabei, dass $|r(u(s))| \leq \rho |u(s)| \leq \rho \eta$ für alle $s \geq 0$ gilt, und da $P_+ e^{-As}$ exponentiell fällt, existieren die Integrale in der letzten Darstellung von $P_+ u(t)$ und in der Definition von v_0 und sind beschränkt. Andererseits ist $P_+ e^{As}$ exponentiell wachsend, folglich ist $v_0 = 0$, da $u(t)$ beschränkt ist.

Daraus folgt

$$|P_+ u(t)| \leq M\rho \int_t^\infty e^{(\kappa+\sigma)(t-s)} |u(s)| ds, \quad t \geq 0,$$

und durch Anwendung von P_- auf die Darstellung (5.10) von $u(t)$ ebenso

$$|P_- u(t)| \leq M e^{(\kappa-\sigma)t} |P_- u_0| + M\rho \int_0^t e^{(\kappa-\sigma)(t-s)} |u(s)| ds, \quad t \geq 0.$$

Mit $P_+ + P_- = I$ folgt $|u(s)| \leq |P_+ u(s)| + |P_- u(s)|$, und setzt man $\phi(t) = e^{-\kappa t} |P_- u(t)|$, $\psi(t) = e^{-\kappa t} |P_+ u(t)|$, so erhält man das System von Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq M e^{-\sigma t} |P_- u_0| + M\rho \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} [\phi(s) + \psi(s)] ds, \quad t \geq 0, \\ \psi(t) &\leq M\rho \int_t^\infty e^{-\sigma(s-t)} [\phi(s) + \psi(s)] ds, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt

$$\phi(t) + \psi(t) \leq M e^{-\sigma t} |P_- u_0| + M\rho \int_0^\infty e^{-\sigma|t-s|} [\phi(s) + \psi(s)] ds, \quad t \geq 0,$$

und nach Multiplikation mit $e^{-\sigma t/2}$ und Integration über \mathbb{R}_+

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\sigma t/2} [\phi(t) + \psi(t)] dt &\leq \frac{2M}{3\sigma} |P_- u_0| + M\rho \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\sigma t/2} e^{-\sigma|t-s|} dt \right] [\phi(s) + \psi(s)] ds \\ &\leq \frac{2M}{3\sigma} |P_- u_0| + \frac{8M\rho}{3\sigma} \int_0^\infty e^{-\sigma t/2} [\phi(t) + \psi(t)] dt. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Integrationsreihenfolge vertauscht, was erlaubt ist, da der Integrand stetig und absolut integrierbar ist. Wählt man nun ρ so klein, dass $8M\rho/3\sigma \leq 1/2$ ist, so folgt die Abschätzung

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} [\phi(t) + \psi(t)] dt \leq \int_0^\infty e^{-\sigma t/2} [\phi(t) + \psi(t)] dt \leq \frac{4M}{3\sigma} |P_- u_0|.$$

Aus der Definition von v_0 und mit $v_0 = 0$ folgt nun

$$|P_+ u_0| \leq M\rho \int_0^\infty e^{-\sigma t} [\phi(t) + \psi(t)] dt \leq \frac{4M^2\rho}{3\sigma} |P_- u_0| =: \gamma |P_- u_0|$$

Zusammengefasst haben wir aus der Stabilitätsannahme die Restriktion $|P_+ u_0| \leq \gamma |P_- u_0|$ hergeleitet. Nur Lösungen mit Anfangswerten in $\bar{B}_\delta(0)$, die dieser Restriktion genügen, bleiben in der Kugel $\bar{B}_\varepsilon(0)$, was im Widerspruch zur Stabilitätsannahme steht. \square

Bemerkung 5.4.2. Satz 5.4.1 liefert keine Aussage im Fall $\operatorname{Re} \lambda = 0$, für einen Eigenwert von A . Das zeigt schon das skalare Beispiel $\dot{x} = \beta x^3$ bzgl. der trivialen Lösung $x_* = 0$. Nach Beispiel (b) am Ende des Abschnittes 5.1 ist $x_* = 0$ asymptotisch stabil, falls $\beta < 0$ und instabil, falls $\beta > 0$.

Beispiele. (a) *Das mathematische Pendel.* Die obere Ruhelage, also der Punkt $(\pi, 0)$ ist ein Equilibrium der Pendelgleichung

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin u. \end{cases}$$

Mit $f(u, v) = [v, -\omega^2 \sin u]^\top$ gilt

$$f'(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos u & 0 \end{bmatrix},$$

sodass

$$A := f'(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, sodass für $\omega \neq 0$ ein positiver Eigenwert von A existiert. Nach Satz 5.4.1 ist die obere Ruhelage des mathematischen Pendels also instabil. Für die untere Ruhelage ergeben sich zwei imaginäre Eigenwerte von $f'(0)$, also ist Satz 5.4.1 nicht anwendbar.

(b) *Das Volterra-Lotka-Modell mit Sättigung*

$$(VL) \begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - fx^2, \\ \dot{y} = -dy + cxy, \end{cases} \quad a, b, c, d, f > 0.$$

Um die Equilibria von (VL) zu bestimmen, müssen wir das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax - bxy - fx^2 &= 0, \\ -dy + cxy &= 0, \end{aligned}$$

lösen. Für $y = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{a}{f}$. Ist andererseits $y \neq 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung $x = \frac{d}{c}$, woraus sich aus der ersten Gleichung $y = \frac{a}{b} - \frac{fd}{cb}$ ergibt.

Es existieren also die 3 Equilibria $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = \left(\frac{a}{f}, 0\right)$ und $E_3 = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} - \frac{fd}{cb}\right)$. Ferner gilt

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} a - by - 2fx & -bx \\ cy & -d + cx \end{bmatrix}.$$

Equilibrium E_1 :

$$f'(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $f'(0, 0)$ lauten $\lambda_1 = a > 0$ und $\lambda_2 = -d < 0$. Nach Satz 5.4.1 ist das Equilibrium E_1 ein Sattelpunkt, also instabil.

Equilibrium E_2 :

$$f'\left(\frac{a}{f}, 0\right) = \begin{bmatrix} -a & -\frac{ab}{f} \\ 0 & -d + \frac{ca}{f} \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind in diesem Fall gegeben durch $\lambda_1 = -a < 0$ und $\lambda_2 = -d + \frac{ca}{f}$. Es gilt $\lambda_2 < 0$ genau dann, wenn $ac < df$. Hier ist E_2 für $ac < df$ asymptotisch stabil und im Fall $ac > df$ instabil.

Equilibrium E_3 :

$$A := f'\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} - \frac{fd}{cb}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{df}{b} & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac-df}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Aus Abschnitt 5.2 wissen wir, dass $\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{sp} A < 0$ und $\det A > 0$. Es gilt $\operatorname{sp} A = -\frac{df}{c} < 0$ und

$$\det A = \frac{d}{c}(ac - df) \begin{cases} > 0, & \text{falls } ac > df, \\ < 0, & \text{falls } ac < df. \end{cases}$$

Freilich ist das *Koexistenzequilibrium* E_3 biologisch nur für $ac > df$ sinnvoll und dann ist es asymptotisch stabil und E_2 instabil. Das Phasenportrait für den Koexistenz-Fall in (VL) ist in Abb. 5.10 mit $a = b = c = 2$, $d = f = 1$ dargestellt.

(c) *Konkurrenzmodelle*. Seien u, v die Populationsgrößen zweier Spezies, welche um dieselbe Nahrungsquelle konkurrieren. Das entsprechende System lautet

$$(K) \begin{cases} \dot{u} = au - bu^2 - euv, \\ \dot{v} = cv - dv^2 - fuv, \end{cases} \quad a, b, c, d, e, f > 0.$$

Zur Bestimmung der Equilibria löse man das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a - bu - ev)u &= 0, \\ (c - dv - fu)v &= 0. \end{aligned}$$

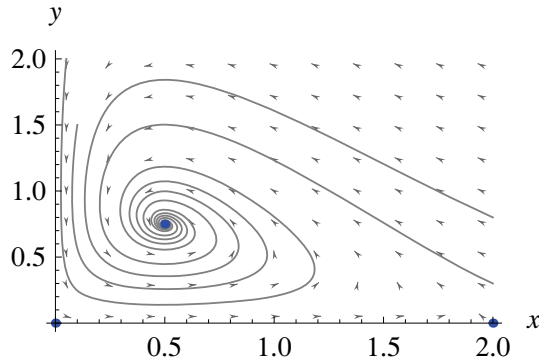


Abbildung 5.10: Koexistenz im Volterra–Lotka-Modell

Im Fall $u = 0$ bzw. $v = 0$ erhält man die 3 Gleichgewichtspunkte $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (0, \frac{c}{d})$ und $E_3 = (\frac{b}{a}, 0)$. Für $u \neq 0$, $v \neq 0$ existiert das *Koexistenzequilibrium*

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{bd - ef} \begin{bmatrix} d & -e \\ -f & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}.$$

Also gilt $E_4 = \left(\frac{ad - ec}{bd - ef}, \frac{bc - af}{bd - ef} \right)$. Ferner ist die Jacobi-Matrix gegeben durch

$$f'(u, v) = \begin{bmatrix} a - 2bu - ev & -eu \\ -fv & c - 2dv - fu \end{bmatrix}.$$

Equilibrium E_1 :

$$f'(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Da beide Eigenwerte größer als Null sind, ist E_1 instabil, ein instabiler Knoten.

Equilibrium E_2 :

$$A := f' \left(0, \frac{c}{d} \right) = \begin{bmatrix} a - \frac{ec}{d} & 0 \\ -\frac{fc}{d} & -c \end{bmatrix}.$$

Es liegt asymptotische Stabilität von E_2 vor, falls $\text{sp } A < 0$ und $\det A > 0$. Nun ist $\det A > 0$ genau dann, wenn $ce > ad$ gilt; in diesem Fall ist $\text{sp } A < 0$.

Equilibrium E_3 :

Eine ganz ähnliche Rechnung wie für das Equilibrium E_2 liefert die asymptotische Stabilität von E_3 für $af > bc$ und die Instabilität von E_3 für $af < bc$.

Equilibrium E_4 :

Dieses Koexistenzequilibrium ist wegen den Populationsgrößen (u, v) nur dann sinnvoll, wenn *beide* Komponenten positiv sind. Sei $E_4 = (u_*, v_*)$. Wegen $0 = u_*(a - bu_* - ev_*)$ und $u_* > 0$, gilt $-bu_* = a - 2bu_* - ev_*$. Analog erhält man

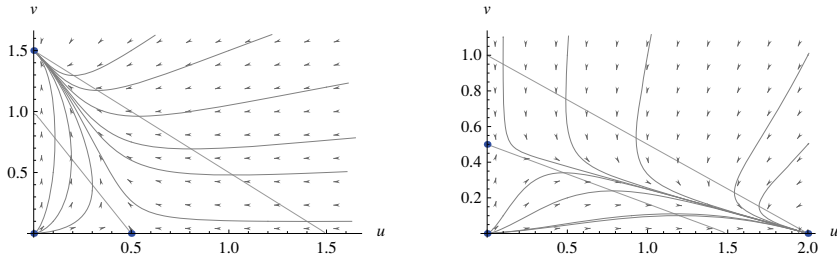


Abbildung 5.11: Konkurrenzmodell: Keine Koexistenz

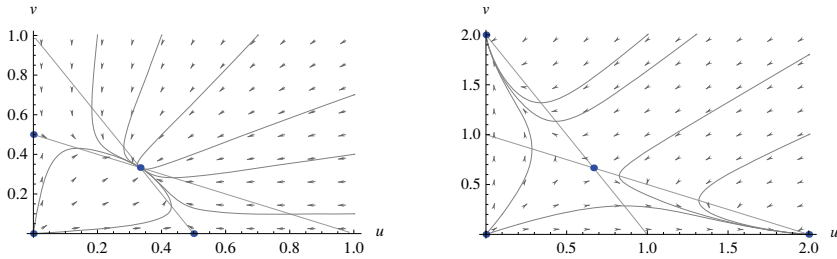


Abbildung 5.12: Konkurrenzmodell: Koexistenz

$-dv_* = c - 2dv_* - fu_*$. Daraus erhalten wir für die Jacobi-Matrix die Darstellung

$$A := f'(u_*, v_*) = \begin{bmatrix} -bu_* & -eu_* \\ -fv_* & -dv_* \end{bmatrix}.$$

Es gilt $\text{sp } A = -(bu_* + dv_*) < 0$, da $u_*, v_* > 0$ und $\det A = u_*v_*(bd - ef) > 0$, falls $bd - ef > 0$. Nach Satz 5.4.1 ist das Equilibrium E_4 asymptotisch stabil, falls $bd - ef > 0$ und instabil, falls $bd - ef < 0$. Im Falle $b = 0$ oder $d = 0$ ist E_4 wegen $-ef < 0$ stets instabil und falls $e = 0$ oder $f = 0$, ist E_4 wegen $bd > 0$ stets asymptotisch stabil.

Die zugehörigen Phasenportraits sind in den Abbildungen 5.11 und 5.12 dargestellt.

In höheren Dimensionen sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\lambda - A)$ nicht immer leicht zugänglich, daher sind Kriterien nützlich, die $\text{Re } \lambda_j < 0$ für alle Nullstellen λ_j von $p(\lambda)$ sicherstellen. Das bekannteste ist das Kriterium von *Routh-Hurwitz*, das hier ohne Beweis angegeben wird; siehe auch [9]. Um es formulieren zu können, schreibt man

$$p(\lambda) = a_1^0 \lambda^n + a_1^1 \lambda^{n-1} + a_2^0 \lambda^{n-2} + a_2^1 \lambda^{n-3} + \dots.$$

Die Zeilen a_j^0 und a_j^1 werden weiter nach rechts durch Nullen aufgefüllt. Induktiv

werden nun die Einträge der Routh-Matrix definiert mittels

$$a_j^{i+1} = a_{j+1}^{i-1} - r_i a_{j+1}^i, \quad r_i = \frac{a_1^{i-1}}{a_1^i}, \quad i, j \geq 1,$$

sofern $a_1^i \neq 0$ ist, andernfalls wird $a_j^{i+1} = 0$ gesetzt. Nun gilt:

Satz 5.4.3 (Routh-Hurwitz-Kriterium). *Es sei die Routh-Hurwitz-Matrix $[a_j^i]_{ij}$ wie angegeben definiert. Dann sind äquivalent:*

- (a) *Alle Nullstellen von $p(\lambda)$ haben negative Realteile.*
- (b) *Es gilt $a_1^i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.*

Man beachte dabei $a_1^0 = 1$!

Speziell ergeben sich für $n = 3$, also für $p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ die Stabilitätsbedingungen $a > 0$, $c > 0$, $ac > b$, und im Falle $n = 4$, also für $p(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$, die Relationen $a > 0$, $d > 0$, $ab > c$, $abc > c^2 + a^2d$.

5.5 Ljapunov-Funktionen

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und betrachte die autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x). \quad (5.12)$$

Ein wichtiges Konzept in der Stabilitätstheorie von Differentialgleichungen ist das der Ljapunov-Funktion.

Definition 5.5.1.

1. Eine Funktion $V \in C(G; \mathbb{R})$ heißt **Ljapunov-Funktion** für (5.12), falls V entlang der Lösungen von (5.12) fallend ist, das heißt, die Funktion $\varphi(t) := (V \circ x)(t)$ ist für jede beliebige Lösung $x(t)$ von (5.12) fallend in t ;
2. V heißt **strikte Ljapunov-Funktion** für (5.12), falls V entlang nichtkonstanter Lösungen von (5.12) streng fallend ist, das heißt, die Funktion $\varphi(t) := (V \circ x)(t)$ ist für jede beliebige nichtkonstante Lösung $x(t)$ von (5.12) streng fallend in t .

Beispiele für Ljapunov-Funktionen. (a) Sei $x = x(t)$ eine Lösung von (5.12) und $V \in C^1(G; \mathbb{R})$. Die Kettenregel ergibt für die Funktion $\varphi(t) = (V \circ x)(t)$:

$$\dot{\varphi}(t) = (\nabla V(x(t))|\dot{x}(t)) = (\nabla V(x(t))|f(x(t))).$$

Also ist $V \in C^1(G; \mathbb{R})$ genau dann eine Ljapunov-Funktion, falls

$$(\nabla V(x)|f(x)) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in G$$

gilt, und V ist eine strikte Ljapunov-Funktion, wenn

$$(\nabla V(x)|f(x)) < 0 \quad \text{für alle } x \in G \setminus \mathcal{E},$$

ist, wobei $\mathcal{E} = \{x \in G | f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$ die Equilibriumsmenge von (5.12) bedeutet.

(b) Sei $n = 1$. Die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ besitzt eine Ljapunov-Funktion, denn falls $V = V(x)$ eine Stammfunktion zu $-f(x)$ ist, also $V'(x) = -f(x)$, so gilt

$$V'(x)f(x) = -f(x)^2 \leq 0.$$

Die Funktion V ist sogar eine strikte Ljapunov-Funktion.

Sei $n > 1$. Unter *Gradientensystemen* verstehen wir Systeme, bei denen die Funktion $-f(x)$ eine Stammfunktion $F \in C^1(G, \mathbb{R})$ besitzt, also $\nabla F(x) = -f(x)$. Setzt man $V(x) = F(x)$, so ist die Funktion V eine strikte Ljapunov-Funktion, denn es gilt

$$(\nabla V(x)|f(x)) = -(f(x)|f(x)) = -|f(x)|^2 \leq 0,$$

und $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \mathcal{E}$.

(c) *Das gedämpfte Pendel*

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\alpha v - \omega^2 \sin u, \end{cases} \quad \alpha \geq 0, \omega > 0.$$

Wir definieren $V(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos u)$; dies ist das erste Integral für das ungedämpfte Pendel. Dann ist $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ eine Ljapunov-Funktion, denn es gilt

$$\begin{aligned} (\nabla V(u, v)|f(u, v)) &= \left(\begin{bmatrix} \omega^2 \sin u \\ v \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} v \\ -\alpha v - \omega^2 \sin u \end{bmatrix} \right) \\ &= v\omega^2 \sin u - \alpha v^2 - \omega^2 v \sin u = -\alpha v^2 \leq 0, \end{aligned}$$

für alle $v \in \mathbb{R}$. Mit Ausnahme der u -Achse gilt sogar $(V(u, v)|f(u, v)) < 0$, also $\varphi(t) = V(u(t), v(t))$ streng fallend. Angenommen, $\varphi(t)$ ist in einem nichttrivialem Intervall (a, b) nicht streng fallend; dann folgt $\dot{\varphi}(t) = 0$, also $v(t) = 0$ in (a, b) , folglich $\dot{u}(t) = 0$, und somit $u(t) = \text{const}$ in (a, b) . Mit $\dot{v}(t) = 0$ folgt dann $\sin u(t) = 0$, d.h. diese Lösung muss ein Equilibrium sein. Daher ist V sogar eine strikte Ljapunov-Funktion.

(d) *Das Volterra-Lotka-System mit Sättigung*

$$(VLS) \begin{cases} \dot{x} = ax - cxy - bx^2, \\ \dot{y} = -dy + exy, \end{cases} \quad a, b, c, d, e > 0.$$

Das Koexistenzequilibrium im Quadranten $G = (0, \infty) \times (0, \infty) = (0, \infty)^2$ haben wir schon im vorigen Abschnitt bestimmt und auf Stabilität untersucht. Es lautet $x_* = \frac{d}{e}$ und $y_* = \frac{ae-bd}{ce}$. Wir definieren nun eine Funktion V durch

$$V(x, y) = \alpha(x - x_* \log \frac{x}{x_*}) + \beta(y - y_* \log \frac{y}{y_*}) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (\nabla V(x, y) | f(x, y)) &= \left(\begin{bmatrix} \alpha(1 - x_*/x) \\ \beta(1 - y_*/y) \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} ax - bx^2 - cxy \\ -dy + cxy \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha(x - x_*)(a - bx - cy) + \beta(y - y_*)(-d + ex) \\ &= \alpha(x - x_*)[b(x_* - x) + c(y_* - y)] + \beta(y - y_*)e(x - x_*) \\ &= -ab(x - x_*)^2 + (\beta e - \alpha c)(y - y_*)(x - x_*). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Identitäten $a = bx_* + cy_*$ und $d = ex_*$ verwendet. Wir wählen $\alpha = e$ und $\beta = c$. Daraus folgt

$$(\nabla V(x, y) | f(x, y)) = -eb(x - x_*)^2 \leq 0,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also ist die Funktion $V = V(x, y)$ eine Ljapunov-Funktion. Es gilt sogar $(\nabla V(x, y) | f(x, y)) < 0$ für alle $x \neq x_*$, also ist $\varphi(t) = V(x(t), y(t))$ streng fallend, sofern $x(t) \neq x_*$ ist. Für Zeitwerte t mit $x(t) = x_*$ ist aber

$$\dot{x}(t) = x_*(a - cy - bx_*) \neq 0,$$

sofern nicht auch $y = y_*$ ist. Daher verlässt eine nichtkonstante Lösung sofort die Menge $\{x = x_*\}$, und V ist damit sogar eine strikte Ljapunov-Funktion.

Ljapunov-Funktionen eignen sich zum Nachweis globaler Existenz der Lösungen von (5.12).

Proposition 5.5.2. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz, $V \in C(G, \mathbb{R})$ eine Ljapunov-Funktion für (5.12) und es gelte*

1. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, falls G unbeschränkt ist: V ist koerziv;
2. $\lim_{x \rightarrow \partial G} V(x) = \infty$.

Dann existiert jede Lösung von (5.12) global nach rechts. Ferner gelten

$$\sup_{t \geq 0} |x(t)| < \infty \quad \text{und} \quad \inf_{t \geq 0} \text{dist}(x(t), \partial G) > 0.$$

Beweis. Sei $x(t)$ eine Lösung von (5.12) mit dem maximalen Existenzintervall $[0, t_+)$. Dann ist die Funktion $\varphi(t) := V(x(t))$ nach Voraussetzung monoton fallend für alle $t \in [0, t_+)$. Angenommen $x(t)$ ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $t_n \rightarrow t_+$ mit $|x(t_n)| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Nach Voraussetzung 1 gilt dann aber auch $V(x(t_n)) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dies widerspricht aber der Monotonie von φ .

Angenommen $\text{dist}(x(t_n), \partial G) \rightarrow 0$ für $t_n \rightarrow t_+$. Aus Voraussetzung 2 folgt dann wiederum $V(x(t_n)) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, ein Widerspruch. Aus Satz 2.3.2 folgt $t_+ = \infty$, also die globale Existenz der Lösung nach rechts. \square

Beispiele. (a) *Das Volterra–Lotka-System mit Sättigung.* Sei $G = (0, \infty)^2$. Wie wir bereits gesehen haben, ist die Funktion

$$V(x, y) = e(x - x_* \log \frac{x}{x_*}) + c(y - y_* \log \frac{y}{y_*})$$

eine Ljapunov-Funktion für das Volterra–Lotka-System mit Sättigung. Die Funktion V erfüllt ferner die Voraussetzungen aus Proposition 5.5.2 für $G = (0, \infty) \times (0, \infty)$. Also existieren die Lösungen global nach rechts und sind vom Rand weg beschränkt.

(b) *Das gedämpfte Pendel.* Sei $G = \mathbb{R}^2$. Die strikte Ljapunov-Funktion

$$V(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos u)$$

erfüllt leider nicht die Bedingung 1 aus Proposition 5.5.2. Jedoch gilt $V(u, v) \rightarrow \infty$ für $|v| \rightarrow \infty$. Das impliziert $|\dot{u}(t)| = |v(t)| \leq M$ für alle $t \geq 0$. Aus der Differentialgleichung für das gedämpfte Pendel erhalten wir zunächst $|\ddot{u}(t)| \leq M$ für alle $t \geq 0$ und nach Multiplikation der Gleichung mit \dot{u} und Integration bzgl. t weiterhin

$$\int_0^\infty \dot{u}(t)^2 dt < \infty.$$

Daraus folgt $v(t) = \dot{u}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Da die Ljapunov-Funktion V nichtnegativ ist, gilt $V(u(t), v(t)) \rightarrow V_\infty \geq 0$ für $t \rightarrow \infty$ und damit $\cos u(t) \rightarrow c_\infty \in [-1, 1]$ für $t \rightarrow \infty$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also ein $t_\varepsilon > 0$, sodass $|\cos u(t) - c_\infty| \leq \varepsilon$ falls $t \geq t_\varepsilon$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ besteht das Urbild

$$\cos^{-1}([c_\infty - \varepsilon, c_\infty + \varepsilon]) = \{v \in \mathbb{R} : \cos v \in [c_\infty - \varepsilon, c_\infty + \varepsilon]\}$$

aus einer Vereinigung beschränkter *disjunkter* Intervalle. Daher gilt $|u(t)| \leq C$ für alle $t \geq 0$ mit einer geeigneten Konstante $C > 0$, da die Menge $u(\mathbb{R}_+)$ zusammenhängend ist.

Bevor wir zur sogenannten *direkten Methode* von Ljapunov kommen, benötigen wir eine Aussage, die die Asymptotik der Lösungen von (5.12) für $t \rightarrow \infty$ mit einer gegebenen Ljapunov-Funktion verbindet.

Lemma 5.5.3. *Sei $V \in C(G)$ eine strikte Ljapunov-Funktion für (5.12), sei $x(t, x_0)$ eine nach rechts globale Lösung von (5.12) mit $x(t_k, x_0) \rightarrow x_\infty \in G$ für eine Folge $t_k \rightarrow \infty$. Dann gilt $x_\infty \in \mathcal{E}$.*

Beweis. Die Funktion $\varphi(t) = V(x(t))$ ist fallend, daher existiert der Grenzwert

$$\varphi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x(t_k, x_0)) = V(x_\infty),$$

da V stetig ist. Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit implizieren

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_k, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t, x(t_k, x_0)) = x(t, \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k, x_0)) = x(t, x_\infty),$$

für jedes feste t im maximalen Existenzintervall J_∞ von $x(\cdot, x_\infty)$. Die Stetigkeit von V liefert daher die Identität $\varphi(\infty) = V(x_\infty) = V(x(t, x_\infty))$, für alle $t \in J_\infty$. Da V eine strikte Ljapunov-Funktion ist, muss x_∞ daher ein Equilibrium von (5.12) sein. \square

Kennt man eine Ljapunov-Funktion zu (5.12), so kann man unter bestimmten Voraussetzungen auf das Stabilitätsverhalten eines Equilibriums $x_* \in G$ von (5.12) schließen.

Satz 5.5.4. *Sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov-Funktion für (5.12) und x_* sei ein Equilibrium für (5.12). Dann gelten:*

1. *Ist x_* ein striktes Minimum von V , so ist x_* stabil für (5.12).*
2. *Ist x_* isoliert in $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$, ein striktes Minimum von V und ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, so ist x_* asymptotisch stabil für (5.12).*

Beweis. Zu 1: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, sodass $\bar{B}_\varepsilon(x_*) \subset G$ und $V(x) > V(x_*)$ für alle $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_*) \setminus \{x_*\}$ gilt. Sei ferner

$$\eta := \min_{x \in \partial \bar{B}_\varepsilon(x_*)} V(x).$$

Offensichtlich gilt $V(x_*) < \eta$. Da V stetig ist, existiert ein $\delta \in (0, \varepsilon)$, sodass $V(x) < \eta$ für alle $x \in B_\delta(x_*)$. Für $x(0) = x_0$ mit $|x_0 - x_*| < \delta$ gilt demnach

$$V(x(t)) \leq V(x_0) < \eta, \quad (5.13)$$

solange die Lösung existiert, da die Komposition $V \circ x$ eine monoton fallende Funktion ist. Angenommen es existiert ein kleinstes $t_* > 0$ mit $|x(t_*) - x_*| = \varepsilon$. Dann gilt $V(x(t_*)) \geq \eta$, im Widerspruch zu (5.13). Die Lösung erreicht also niemals den Rand der Kugel $\bar{B}_\varepsilon(x_*)$. Daher existiert die Lösung global und es gilt $|x(t) - x_*| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$.

Zu 2: Seien $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ wie im ersten Teil des Beweises, aber unter der zusätzlichen Bedingung gegeben, dass $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass x_* das einzige Equilibrium in $\bar{B}_\varepsilon(x_*)$ ist. Angenommen die Lösung $x = x(t; x_0)$ von (5.12) zum Anfangswert $x_0 \in B_\delta(x_*)$ konvergiert nicht gegen das Equilibrium x_* . Dann existiert ein $\rho > 0$ und eine Folge $(t_n) \nearrow \infty$, sodass $|x(t_n; x_0) - x_*| > \rho$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Teil 1 des Beweises folgt, dass die Lösung $x(t; x_0)$ für alle $t \geq 0$ gleichmäßig beschränkt ist. Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge $(t_{n_k}) \nearrow \infty$, sodass der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_{n_k}; x_0) =: x_\infty \in \bar{B}_\varepsilon(x_*) \subset G,$$

existiert. Nach Lemma 5.5.3 ist $x_\infty \in \mathcal{E}$ ein Equilibrium von (5.12). Das ist ein Widerspruch dazu, dass x_* das einzige Equilibrium von (5.12) in $\bar{B}_\varepsilon(x_*)$ ist. \square

Bemerkung 5.5.5. Die Methode heißt *direkt*, da keine Algebra der Matrix $f'(x_*)$ (indirekte Methode), also keine Untersuchung der Eigenwerte notwendig ist. Das

ist der große Vorteil gegenüber der indirekten Methode. Leider muss man aber dazu eine Ljapunov-Funktion kennen, was im Allgemeinen nicht immer der Fall ist. Dem gegenübergestellt ist die indirekte Methode natürlich universell anwendbar, sofern die rechte Seite f aus C^1 ist. Leider liefert aber diese Methode wiederum keine Aussagen über globales Verhalten.

Beispiele. (a) *Bewegung eines Teilchens im Potentialfeld.* Sei $\phi = \phi(x)$ das Potential, $x = x(t) \in \mathbb{R}^3$ die Position des Teilchens zur Zeit t und m dessen Masse. Die Bewegung des Teilchens im Potentialfeld wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -\nabla\phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Setzt man $q = x$ und $p = m\dot{x}$, so erhält man die Hamilton'sche Formulierung des Problems:

$$(H) \begin{cases} \dot{q} = \dot{x} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} = m\ddot{x} = -\nabla\phi(x) = -\nabla\phi(q). \end{cases}$$

Setze nun $V(q, p) = m\frac{|\dot{x}|^2}{2} + \phi(x) = \frac{|p|^2}{2m} + \phi(q)$, also ist V die Gesamtenergie des Systems. Sind dann $q = q(t)$ und $p = p(t)$ Lösungen von (H), so gilt

$$\frac{d}{dt}V(q(t), p(t)) = (\nabla\phi(q)|\dot{q}) + \frac{1}{m}(p|\dot{p}) = \frac{1}{m}(\nabla\phi(q)|p) + \frac{1}{m}(p| - \nabla\phi(q)) = 0.$$

Somit ist V also eine Ljapunov-Funktion, sogar ein erstes Integral für (H). Die Equilibria (q_*, p_*) ergeben sich aus den Gleichungen $p_* = 0$ und $\nabla\phi(q_*) = 0$. Wie man leicht nachrechnet, ist $(q_*, 0)$ genau dann ein striktes Minimum von V , wenn q_* ein striktes Minimum von ϕ ist. Aus Satz 5.5.4 folgt also, dass strikte Minima des Potentials ϕ stabile Ruhelagen eines Teilchens in dessen Kraftfeld sind. Man beachte, dass diese aufgrund der Energieerhaltung nicht asymptotisch stabil sein können.

Ist andererseits q_* ein Sattelpunkt oder ein lokales Maximum von ϕ , genauer besitzt $\nabla^2\phi(q_*)$ einen negativen Eigenwert μ , dann sind $\lambda = \pm\sqrt{\mu/m}$ Eigenwerte der Linearisierung von (H) in $(q_*, 0)$. Das Prinzip der linearisierten Stabilität impliziert dann Instabilität des Equilibriums $(q_*, 0)$ von (H).

(b) *Das mathematische Pendel.* Dieses Beispiel ist ein Spezialfall von (a). Die Funktion $V(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \omega^2(1 - \cos x)$ ist eine Ljapunov-Funktion für die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$. Der Punkt $(0, 0)$ ist ein Equilibrium des Pendels und zugleich ein striktes Minimum, denn es gilt

$$\nabla V(0, 0) = \begin{bmatrix} \omega^2 \sin(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\nabla^2 V(0, 0) = \begin{bmatrix} \omega^2 \cos(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sodass die Hesse-Matrix $\nabla^2 V(0, 0)$ positiv definit ist. Nach Satz 5.5.4 ist die untere Ruhelage des Pendels stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Andererseits ist V im Fall des gedämpften Pendels eine strikte Ljapunov-Funktion, also zeigt Satz 5.5.4, dass die untere Ruhelage für das gedämpfte Pendel asymptotisch stabil ist.

(c) *Das Volterra–Lotka-System mit Sättigung.* Wir hatten bereits gezeigt, dass die Funktion

$$V(x, y) = e(x - x_* \log \frac{x}{x_*}) + c(y - y_* \log \frac{y}{y_*}),$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für das Volterra–Lotka-System mit Sättigung ist. Dabei ist (x_*, y_*) das Koexistenzequilibrium, welches durch $x_* = \frac{d}{e} > 0$ und $y_* = \frac{ae-bd}{ce} > 0$ gegeben ist. Es gilt

$$\nabla V(x_*, y_*) = \begin{bmatrix} e(1 - \frac{x_*}{x_*}) \\ c(1 - \frac{y_*}{y_*}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

und

$$\nabla^2 V(x_*, y_*) = \begin{bmatrix} \frac{e}{x_*} & 0 \\ 0 & \frac{c}{y_*} \end{bmatrix}.$$

Demnach ist die Hesse-Matrix $\nabla^2 V(x_*, y_*)$ wegen $c, e, x_*, y_* > 0$ positiv definit. Also ist (x_*, y_*) ein striktes Minimum von V und Satz 5.5.4 liefert die asymptotische Stabilität des Koexistenzequilibriums.

Ljapunov-Funktionen leisten aber noch viel mehr, sie geben nämlich auch Aufschluss über das asymptotische Verhalten von beliebigen beschränkten Lösungen.

Satz 5.5.6. *Sei V eine strikte Ljapunov-Funktion für (5.12), $K \subset G$ kompakt, $x(t) = x(t; x_0)$ sei eine Lösung von (5.12) mit $\{x(t; x_0)\}_{t \geq 0} \subset K$ und es sei $\mathcal{E} := f^{-1}(0) \subset G$ die Equilibriumsmenge von (5.12). Dann gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \mathcal{E}) = 0.$$

Ist $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\{\alpha\})$ diskret für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) =: x_\infty \in \mathcal{E}.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Lemma 5.5.3. Sei nun $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ diskret. Angenommen der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existiert nicht. Wähle eine Folge $t_k \rightarrow \infty$ mit $x(t_k) \rightarrow x_\infty$ ($k \rightarrow \infty$) und eine Folge $s_k \rightarrow \infty$ mit $x(s_k) \rightarrow y_\infty \neq x_\infty$ ($k \rightarrow \infty$) und $t_k < s_k < t_{k+1}$. Mit $\alpha_\infty := V(x_\infty)$, wähle ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\bar{B}_\varepsilon(x_\infty) \cap \mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha_\infty) = \{x_\infty\}$. Dies ist möglich, da $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha_\infty)$ diskret ist. Da $x(t)$ stetig ist und wegen $y_\infty \notin \bar{B}_\varepsilon(x_\infty)$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass

die Funktion $x(t)$ den Rand der Kugel $\bar{B}_\varepsilon(x_\infty)$ in jedem der Intervalle (t_k, s_k) für alle $k \geq k_0$ trifft. Man erhält so eine Folge $r_k \rightarrow \infty$, mit $|x(r_k) - x_\infty| = \varepsilon$. Da aber der Rand der Kugel $\bar{B}_\varepsilon(x_\infty)$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $x(r_{k_l}) \rightarrow z_\infty$ und $|z_\infty - x_\infty| = \varepsilon$. Nach Lemma 5.5.3 gilt $z_\infty \in \mathcal{E} \cap V^{-1}(\alpha_\infty)$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $V^{-1}(\alpha_\infty) \cap \mathcal{E} \cap \bar{B}_\varepsilon(x_\infty) = \{x_\infty\}$ gilt. \square

Beispiele. (a) *Das gedämpfte Pendel.* Die Funktion $V(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos u)$ ist eine strikte Ljapunov-Funktion für das Pendelsystem mit Dämpfung

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\alpha v - \omega^2 \sin u, \end{cases} \quad \alpha \geq 0, \omega > 0.$$

Die Equilibriumsmenge \mathcal{E} ist durch $\mathcal{E} = \{(k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben, also diskret. Damit konvergiert jede Lösung dieses Systems gegen eine der Gleichgewichtslagen.

(b) *Das Volterra–Lotka-System mit Sättigung.* Die Menge der Equilibria \mathcal{E} ist hier diskret. Wir wissen ferner, dass

$$V(x, y) = c(x - x_* \log \frac{x}{x_*}) + c(y - y_* \log \frac{y}{y_*})$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für $(x, y) \in G \setminus \mathcal{E}$ ist. Die Lösungen existieren außerdem für jeden Anfangswert $x_0, y_0 > 0$ global und sind vom Rand weg beschränkt. Dann besagt Satz 5.5.6, dass die Lösung $(x(t), y(t))$ zum Anfangswert (x_0, y_0) für $t \rightarrow \infty$ konvergent ist, mit $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_*, y_*)$. Die anderen Equilibria liegen auf dem Rand von $G = (0, \infty) \times (0, \infty)$, und sind damit instabil.

(c) *Teilchen im Potentialfeld mit Dämpfung.* In Verallgemeinerung von (a) betrachten wir nochmals die Gleichung für ein Teilchen im Potentialfeld

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + \nabla \phi(x) = 0,$$

wobei die lokale Lipschitz Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Dämpfung beschreibt. Als Ljapunov-Funktion wählen wir wieder die Energie $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|_2^2 + \phi(x)$. Dann ist

$$\frac{d}{dt}V(x, \dot{x}) = -(g(\dot{x})|\dot{x}),$$

folglich ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, falls die Bedingung

$$(g(y)|y) > 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0,$$

erfüllt ist. Satz 5.5.6 impliziert nun die Konvergenz beschränkter Lösungen, sofern die kritischen Punkte von ϕ in jeder Niveaumenge $\phi^{-1}(\alpha)$ diskret sind. Man beachte auch, dass mit Proposition 5.5.2 jede Lösung beschränkt ist, sofern ϕ koerziv ist.

5.6 Dynamik von Viren

Wir betrachten eine virale Infektion einer Zellkultur. Zur Modellierung seien V die Anzahl der freien Viren, Z die der nicht infizierten Zellen und I die der infizierten Zellen. Nicht infizierte Zellen werden mit einer festen Rate $\lambda > 0$ bereitgestellt. Die freien Viren infizieren die gesunden Zellen mit der Rate rVZ . Dabei beschreibt die Infektionskontaktrate $r > 0$ die Effizienz dieses Vorgangs, also etwa die Häufigkeit mit der freie Viren nichtinfizierte Zellen aufspüren und in sie eindringen (oder ihr genetisches Material einführen), sowie den Anteil der erfolgreichen Infektionen. Die anderen Prozesse sollen jeweils nur von einer Spezies abhängen: Infizierte Zellen produzieren neue Viren und setzen sie mit Rate $k > 0$ pro Zelle frei. Die Sterberaten der drei Klassen seien gleich νV , mZ und μI . Schließlich berücksichtigen wir die Möglichkeit, dass die Anwesenheit freier Viren die Zellproduktion mit der Rate bV anregt. Im übrigen können infizierte Zellen nicht gesunden. Somit erhalten wir das System

$$\begin{aligned}\dot{V} &= kI - \nu V, & t \geq 0, \\ \dot{Z} &= \lambda - mZ + bV - rVZ, & t \geq 0, \\ \dot{I} &= rVZ - \mu I, & t \geq 0, \\ V(0) &= V_0, \quad Z(0) = Z_0, \quad I(0) = I_0.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Hierbei sind die Anfangswerte $V_0, Z_0, I_0 \geq 0$ und die Konstanten $\lambda, r, k, m, \mu, \nu > 0$ und $b \geq 0$ gegeben. Mittels des Satzes von Picard–Lindelöf zeigt man leicht, dass (5.14) eine eindeutige Lösung besitzt. Wir skalieren diese Lösung mittels

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{r}{\mu} V(t/\mu), & y(t) &= \frac{kr}{\mu^2} Z(t/\mu), & z(t) &= \frac{kr}{\mu^2} I(t/\mu), \\ x_0 &= \frac{rV_0}{\mu}, & y_0 &= \frac{krZ_0}{\mu^2}, & z_0 &= \frac{krI_0}{\mu^2}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Ferner setzen wir $\xi = \nu\mu^{-1}$, $\sigma = kr\lambda\mu^{-3}$, $\rho = m\mu^{-1}$ und $\delta = bk\mu^{-2}$. Dann ergibt sich aus (5.14) das normalisierte System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z - \xi x, & t \geq 0, \\ \dot{y} &= \sigma - \rho y + \delta x - xy, & t \geq 0, \\ \dot{z} &= xy - z, & t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Wir formulieren nun das grundlegende Resultat über das qualitative Verhalten von (5.16), wobei wir annehmen, dass die Anfangswerte $x_0, y_0, z_0 \geq 0$ und die Konstanten $\xi, \sigma, \rho > 0$ und $\delta \geq 0$ gegeben sind.

Satz 5.6.1. *Es seien $\delta \in [0, \xi)$ und $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_+^3$. Dann besitzt das System (5.16) eine eindeutige, beschränkte, positive Lösung für alle $t \geq 0$. Ferner gibt es*

nur die Equilibria

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, \sigma/\rho, 0) \quad \text{und} \quad (x_*, y_*, z_*) = \left(\frac{\sigma - \rho\xi}{\xi - \delta}, \xi, \xi \frac{\sigma - \rho\xi}{\xi - \delta} \right). \quad (5.17)$$

Sei $\sigma < \xi\rho$. Dann ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ das einzige positive Equilibrium von (5.16). Es ist asymptotisch stabil und die Lösung von (5.16) konvergiert gegen $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Sei $\sigma > \xi\rho$. Dann ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in \mathbb{R}_+^3 instabil, und (x_*, y_*, z_*) ist strikt positiv und asymptotisch stabil. Die Lösung konvergiert gegen (x_*, y_*, z_*) , falls $x_0 + z_0 > 0$ ist.

Aus diesem Satz ergibt sich gemäß (5.15) unmittelbar die gewünschte Beschreibung des asymptotischen Verhaltens des Virenmodells (5.14). Zunächst beachte man, dass die Ungleichung $\delta < \xi$ zur Bedingung $kb < \mu\nu$ äquivalent ist. Diese Zusatzbedingung sichert die Beschränktheit der Lösung und schließt den unrealistischen Fall aus, dass die Viren die Produktion gesunder Zellen zu stark anregen. Sie gilt stets im Falle $b = 0$. Der obige Satz impliziert insbesondere, dass die Reproduktionsrate $\mathcal{R} = \frac{\sigma}{\xi\rho}$ das asymptotische Verhalten von (5.14) steuert: Ist $\mathcal{R} < 1$, dann konvergiert das System gegen das infektionsfreie Gleichgewicht und die Infektion erlischt. Ist $\mathcal{R} > 1$, dann konvergiert das System gegen das strikt positive endemische Gleichgewicht und die Infektion bleibt erhalten.

Beweis. Es ist klar, dass eine einzige lokale Lösung (x, y, z) von (5.16) existiert. Sie bleibt positiv, da die Positivitätsbedingung (P) erfüllt ist. Wir setzen $u = \alpha x + y + z$ und $\kappa = \min\{\rho, 1 - \alpha, \xi - \delta/\alpha\} > 0$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ mit $\delta < \alpha\xi$, wobei wir die vorausgesetzte Relation $\delta < \xi$ verwenden. Dann folgt aus (5.16) die Ungleichung

$$\dot{u} = \sigma - (\alpha\xi - \delta)x - \rho y - (1 - \alpha)z \leq \sigma - \kappa u.$$

Durch Integration erhalten wir $u(t) \leq u(0) + \sigma/\kappa$. Auf Grund ihrer Positivität sind die Lösungen somit beschränkt und existieren also für alle Zeiten nach dem Fortsetzungssatz. Offenbar ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, \sigma/\rho, 0)$ eine stationäre Lösung von (5.16). Sei (x_*, y_*, z_*) ein weiteres Equilibrium. Da dann $z_* = \xi x_* \neq 0$ gelten muss, erhalten wir $y_* = \xi$, woraus $x_* = (\sigma - \rho\xi)/(\xi - \delta)$ folgt. Folglich ist (x_*, y_*, z_*) das einzige weitere Gleichgewicht, das genau für $\sigma > \rho\xi$ positiv und ungleich $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ist. Die rechte Seite von (5.16) ist durch

$$f(x, y, z) = (z - \xi x, \sigma - \rho y + \delta x - xy, xy - z)$$

gegeben. An den Equilibria erhalten wir die Linearisierungen

$$\begin{aligned} A = f'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \begin{pmatrix} -\xi & 0 & 1 \\ \delta - \sigma/\rho & -\rho & 0 \\ \sigma/\rho & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ B = f'(x_*, y_*, z_*) &= \begin{pmatrix} -\xi & 0 & 1 \\ \delta - \xi & -\rho - x_* & 0 \\ \xi & x_* & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(\lambda) = (\lambda + \rho)[\lambda^2 + (1 + \xi)\lambda + \xi - \sigma/\rho]$. Es hat die Nullstellen $\lambda_1 = -\rho$ und

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1 + \xi}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \xi)^2 - 4(\xi - \sigma/\rho)}.$$

Gemäß dem Prinzip der linearisierten Stabilität ist also $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ für $\sigma < \xi\rho$ asymptotisch stabil und für $\sigma > \xi\rho$ instabil. Die Instabilität in \mathbb{R}_+^3 folgt unmittelbar aus der unten gezeigten globalen Attraktivität von (x_*, y_*, z_*) im Falle $\sigma > \xi\rho$. Sei nun $\sigma > \xi\rho$. Das charakteristische Polynom von B ist durch $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ mit $a_1 = 1 + \xi + \rho + x_*$, $a_2 = (1 + \xi)(\rho + x_*)$ und $a_3 = \sigma - \xi\rho$ gegeben. Weil $a_1a_2 > \xi x_* \geq (\xi - \delta)x_* = a_3 > 0$, zeigt das Routh–Hurwitz Kriterium, dass die Eigenwerte von B strikt negative Realteile haben. Somit ist (x_*, y_*, z_*) in diesem Fall asymptotisch stabil.

Wir wollen nun die behauptete globale asymptotische Stabilität mittels Ljapunov-Funktionen zeigen. Zuerst betrachten wir den Fall $\sigma < \rho\xi$ und das Equilibrium $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, \sigma/\rho, 0)$. Wir setzen

$$\Phi_0(x, y, z) = (y - \bar{y})^2/2 + (2\xi - \delta - \bar{y})(x + z) \quad (5.19)$$

für $x, y, z \geq 0$. Dann ergibt sich aus (5.16) und $\sigma = \rho\bar{y}$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0(x, y, z) &= (y - \bar{y})(\rho\bar{y} - \rho y + \delta x - xy) + (2\xi - \delta - \bar{y})(xy - \xi x) \\ &= -\rho(y - \bar{y})^2 - x[y^2 - 2\xi y + \delta\bar{y} + \xi(2\xi - \delta - \bar{y})] \\ &= -\rho(y - \bar{y})^2 - x[(y - \xi)^2 + (\xi - \bar{y})(\xi - \delta)]. \end{aligned}$$

Aus $\xi - \bar{y} = (\xi\rho - \sigma)/\rho > 0$ folgt somit, dass Φ_0 eine Ljapunov-Funktion auf \mathbb{R}_+^3 ist. Gilt $\dot{\Phi}_0(x, y, z) = 0$ längs einer Lösung, dann erhalten wir $y = \sigma/\rho$ und $x = 0$. Daraus ergibt sich aber $z = 0$, sodass Φ_0 eine strikte Ljapunov-Funktion ist. Somit folgt die Konvergenzaussage in diesem Fall aus Satz 5.5.6.

Nun untersuchen wir (x_*, y_*, z_*) unter der Bedingung $\sigma > \xi\rho$. Zunächst betrachten wir die schon für das Volterra–Lotka Modell verwendeten Funktionen $\phi_c(u) = u - c \ln u$ für $u > 0$, und setzen $\phi_1 = \phi_{x_*}$, $\phi_2 = \phi_{y_*}$ und $\phi_3 = \phi_{z_*}$. Aus $\dot{\phi}_c(u) = \dot{u}(1 - c/u)$, (5.16) und (5.17) ergeben sich

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1(x) &= (z - \xi x) \left(1 - \frac{x_*}{x}\right) = z - \frac{zx_*}{x} - \xi x + \xi x_*, \\ \dot{\phi}_2(y) &= (\rho y_* - \delta x_* + x_* y_* - \rho y + \delta x - xy)(1 - y_*/y) \\ &= -\frac{\rho}{y}(y - y_*)^2 + \frac{\delta}{y}(x - x_*)(y - y_*) - xy + \xi x + \xi x_* - \frac{\xi^2 x_*}{y} \\ &= -(y - y_*)^2 \frac{\rho + x}{y} - (x - x_*)(y - y_*) \frac{\xi - \delta}{y} \\ \dot{\phi}_3(z) &= (xy - z) \left(1 - \frac{\xi x_*}{z}\right) = xy - z - \frac{\xi xy x_*}{z} + \xi x_*. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wir definieren $\Psi(x, y, z) = \phi_1(x) + \phi_2(y) + \phi_3(z)$ und erhalten

$$\dot{\Psi}(x, y, z) = -\frac{\rho}{y}(y - y_*)^2 + \frac{\delta}{y}(x - x_*)(y - y_*) - x_* \left[\frac{z}{x} + \frac{\xi^2}{y} + \frac{\xi xy}{z} - 3\xi \right].$$

In Hinblick auf den Term $[\dots]$, setzen wir $a = z/x > 0$ und $b = \xi^2/y > 0$ und betrachten die Funktion $\varphi(a, b) = a + b + \frac{\xi^3}{ab} - 3\xi$. Man sieht leicht, dass $\nabla\varphi$ in $(0, \infty)^2$ nur für $a = b = \xi$ verschwindet und dass $\varphi(\xi, \xi) = 0$ ein striktes lokales Minimum ist. Ferner konvergiert φ gegen unendlich, wenn (a, b) gegen die Koordinatenachsen oder gegen ∞ strebt. Also ist φ positiv und somit $-x_*[\dots] \leq 0$. Gleichung (5.20) zeigt, dass wir den vorzeichenwechselnden Summanden $\frac{\delta}{y}(x - x_*)(y - y_*)$ eliminieren können, wenn wir ein geeignetes Vielfaches von ϕ_2 zu Ψ addieren. Demgemäß setzen wir

$$\Phi_*(x, y, z) = \Psi(x, y, z) + \frac{\delta}{\xi - \delta} \phi_2(y) \quad (5.21)$$

und erhalten nach unseren obigen Rechnungen

$$\dot{\Phi}_*(x, y, z) = -\frac{\delta x + \xi \rho}{y(\xi - \delta)}(y - y_*)^2 - x_* \left[\frac{z}{x} + \frac{\xi^2}{y} + \frac{\xi xy}{z} - 3\xi \right] \leq 0.$$

Also ist Φ_* eine Ljapunov-Funktion auf $(0, \infty)^3$. Ist $\dot{\Phi}_*(x, y, z) = 0$ längs einer Lösung, dann folgt $y = y_* = \xi$. Die zweite Gleichung in (5.16) impliziert somit $x = x_*$, woraus sich mit der ersten Gleichung $z = \xi x_* = z_*$ ergibt. Somit ist Φ_* eine strikte Ljapunov-Funktion. Wenn (x, y, z) gegen die Koordinatenebenen oder gegen unendlich strebt, dann konvergiert auch $\Phi_*(x, y, z)$ gegen unendlich. Somit sind die Mengen $N_c = \{x, y, z > 0 : \Phi_*(x, y, z) \leq c\}$ für $c \in \mathbb{R}$ positiv invariant und kompakt. Zu einem strikt positiven Anfangswert gibt es ein c , sodass (x_0, y_0, z_0) und (x_*, y_*, z_*) in N_c liegen. Nach Satz 5.5.6 konvergiert nun die zu (x_0, y_0, z_0) gehörende Lösung gegen das einzige Equilibrium (x_*, y_*, z_*) in N_c .

Wir betrachten abschließend einen Anfangswert (x_0, y_0, z_0) auf dem Rand von \mathbb{R}_+^3 mit $x_0 + z_0 > 0$, wobei weiterhin $\sigma > \xi\rho$ gelte. Zunächst zeigt die zweite Gleichung in (5.16), dass für kleine $t > 0$ die Komponente $y(t)$ strikt positiv ist, auch wenn y_0 gleich 0 sein sollte. Wir können also annehmen, dass $y_0 > 0$ gilt. Dann folgt aus (5.16), dass $f_1(0, y_0, z_0)$, $f_2(x_0, 0, z_0)$ und $f_3(x_0, y_0, 0)$ strikt positiv sind. Somit tritt die Lösung für $t > 0$ in $(0, \infty)^3$ ein und konvergiert dann gegen (x_*, y_*, z_*) . \square

Übungen

1. Sei $f \in C(\mathbb{R})$ lokal Lipschitz, $f(0) = 0$, und $f(x) \neq 0$ für $0 < |x| < r$. Betrachten Sie die DGL $\dot{x} = f(x)$. Charakterisieren Sie mit Hilfe von Vorzeichenbedingungen an die Funktion f im Intervall $(-r, r)$ die Stabilität, asymptotische Stabilität und Instabilität der stationären Lösung $x_*(t) \equiv 0$.

2 Betrachten Sie die Ruhelagen $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ und $(x, \dot{x}) = (\pi, 0)$ des Pendels

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0.$$

Zeigen Sie, dass die erste stabil aber nicht asymptotisch stabil, und die zweite instabil ist.

3. Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften der stationären Lösungen der Fitzhugh-Nagumo-Gleichung (vgl. Übung 4.6).

4. Bestimmen Sie die Equilibria des Brusselators (vgl. Übung 2.4) und untersuchen Sie deren Stabilitätseigenschaften.

5. Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften der stationären Lösungen des Oregonators (vgl. Übung 4.7).

6. Diese Aufgabe bezieht sich auf das Paarbildungsmodell (vgl. Übung 4.4). Die Funktion $\phi(u, v)$ sei aus $C^1(\mathbb{R}^2)$ und homogen, d.h. $\phi(tu, tv) = t\phi(u, v)$ für alle $t, u, v \in \mathbb{R}$. Alle im Modell auftretenden Parameter $\beta_j, \mu_j, \tilde{\mu}_j, \sigma$ seien streng positiv. Unter welchen Bedingungen an die Parameter des Modells ist die triviale Lösung asymptotisch stabil bzw. instabil?

7. Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ aus C^2 . Das zu H gehörige **Hamilton-System** ist definiert durch

$$\begin{aligned}\dot{q} &= H_p(q, p), \\ \dot{p} &= -H_q(q, p).\end{aligned}\tag{5.22}$$

Zeigen Sie, dass $H(q, p)$ eine Ljapunov-Funktion für (5.22) ist. Wann ist ein Equilibrium von (5.22) stabil, wann asymptotisch stabil?

8. Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda xy - \mu x + \mu a, \\ \dot{y} &= \lambda xy - \mu y - \gamma y, \\ \dot{z} &= \gamma y - \mu z,\end{aligned}\tag{5.23}$$

mit $\lambda, \mu, \gamma, a > 0$ ist ein *SIR-Endemiemodell*, bei der die Infektion nicht vererbt wird. Zeigen Sie, dass dieses System im Fall $a\lambda > \mu + \gamma$ genau ein nichttriviales (endemisches) Equilibrium $(x_*, y_*, z_*) \in (0, \infty)^3$ besitzt, und dass die Funktion

$$V(x, y, z) = x - x_* \log(x) + y - y_* \log(y)$$

eine Ljapunov-Funktion für (5.23) auf $(0, \infty)^3$ ist. Was können Sie über die Stabilität von (x_*, y_*, z_*) sagen?

9. Sei $a > 0$. Das lineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= a(x_1 - x_0), \\ \dot{x}_i &= a(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{x}_{N+1} &= a(x_N - x_{N+1}),\end{aligned}\tag{5.24}$$

entsteht durch räumliche Diskretisierung der Diffusionsgleichung $\partial_t u = b \partial_y^2 u$ für $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ mit Neumannschen Randbedingungen $\partial_y u(t, 0) = \partial_y u(t, 1) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})^2$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für (5.24) ist.

10. Das *Holling-Modell*

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u(1 - \lambda u) - v f(u), \\ \dot{v} &= -\mu v - v^2 + v f(u),\end{aligned}$$

ist ein weiteres Modell zur Beschreibung von Räuber-Beute Populationen. Dabei ist $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ aus C^1 streng wachsend mit $f(0) = 0$, und $\mu > 0, \lambda \geq 0$ sind Konstanten. Untersuchen Sie die (nichtnegativen) Equilibria des Systems. Unter welchen Bedingungen gibt es Koexistenz und wie ist das Stabilitätsverhalten der Equilibria?

11. Zeigen Sie, dass das *SEIS* Epidemie-Modell

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \lambda - mS + bI - rIS, & t \geq 0, \\ \dot{E} &= rIS - \mu E - aE, & t \geq 0, \\ \dot{I} &= aE - \nu I - bI, & t \geq 0, \\ S(0) &= S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0,\end{aligned}$$

nach geeigneter Skalierung äquivalent zum Virenmodell aus Abschnitt 5.6 ist. Formulieren Sie die entsprechenden Resultate für dieses Modell. Welche Zahl ist hier der Schwellenwert?