1) (8 Punkte)
Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\, y_1(t)\, y_2(t) \\ y_2'(t) &= 1 - y_2^2(t) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems, ihre Stabilität sowie ihren Typ.

b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

c) Für welche Anfangswerte $(y_1(0), y_2(0)) \in \mathbb{R}^2$ sind die Lösungen für $t \to \infty$ beschränkt?

2) (10 Punkte)

2.1) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\sqrt{y(x)} + x\, y'(x) = 0\,, \qquad y(1) = 0\,.$$

2.2) Finden Sie die Lösung $y(x)$ der Riccatischen Differentialgleichung

$$y'(x)\, e^{-x} + y^2(x) - 2y(x)\, e^x = 1 - e^{2x}$$

mit $y(0) = 2$.

3) (14 Punkte)
Sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x)$.

b) Begründen Sie, warum die Ruhelage $\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ stabil ist.

c) Bei Differentialgleichungen der Form $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ kann man die Stabilität des Ursprungs auch mittels einer Ljapunovfunktion der Form $V(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{y}$ zeigen, wobei $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ geeignet zu wählen ist. Finden Sie so eine Ljapunovfunktion.

d) Lösen Sie die inhomogene Gleichung

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

4) (8 Punkte)
Gegeben ist das Eigenwertproblem

$$Ly = y'' + \lambda y = 0$$

mit den Randbedingungen $y'(0) = 0$ und $y(l) = 0$, $l > 0$.

a) Zeigen Sie, dass es sich um ein Sturm-Liouville-Eigenwertproblem handelt.

b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte positiv sind, indem Sie die Gleichung $\lambda y(x) = -y''(x)$ mit $y(x)$ multiplizieren und partiell integrieren.

c) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$.