

Theoretische Informatik

1. Übungsblatt

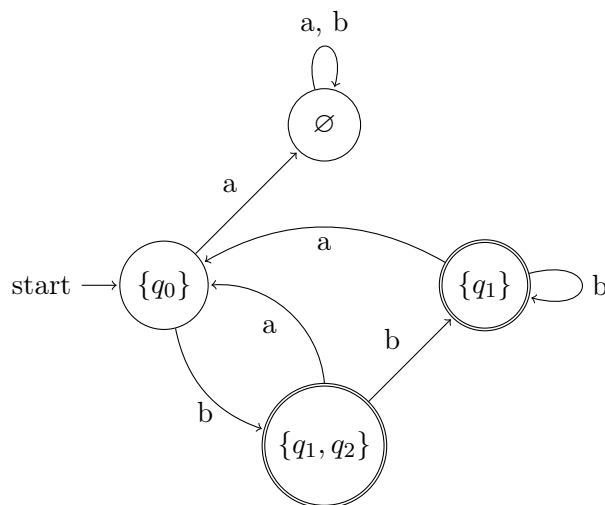
Paul Winkler
11818749

Aufgabe 1. Bezeichne $L := \{ab, aba\}^*$, $R := \{\varepsilon\} \cup \{a\}\{ba, baa\}^*\{b, ba\}$.

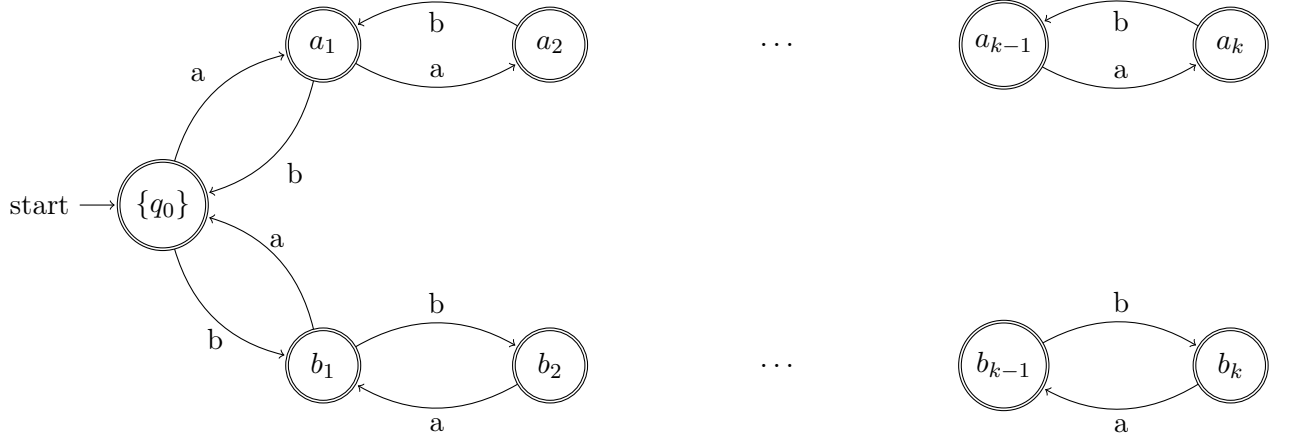
- Wir zeigen zuerst $L \subseteq R$ induktiv nach der Struktur: Klarerweise sind $\varepsilon, ab, aba \in R$. Sei $w \in L \setminus \{\varepsilon, ab, aba\}$ beliebig. Dann gibt es ein $v \in L \setminus \{\varepsilon\}$, sodass $w = abv$ oder $w = abav$.
 - Fall 1: $w = abv$: Es gibt nach Induktionsvoraussetzung ein Wort $v_1 \in \{ba, baa\}^*$, sodass $v = av_1b$ oder $v = av_1ba$, also $w = a(bav_1)b$ oder $w = a(bav_1)ba$. Mit v_1 liegt auch bav_1 in $\{ba, baa\}^*$, also gilt $w \in R$.
 - Fall 2: $w = abav$: Wieder finden wir ein v_1 wie in Fall 1. Es gilt $w = a(baav_1)b$ oder $w = a(baav_1)ba$; weil mit v_1 auch $baav_1$ in $\{ba, baa\}^*$ liegt, ist auch hier $w \in R$.
- Für den Beweis der anderen Inklusion gehen wir ebenfalls induktiv vor (nach der Struktur des mittleren Wortteils): Offensichtlich sind $\varepsilon, ab, aba \in L$. Sei $w \in R \setminus \{\varepsilon, ab, aba\}$ beliebig. Dann gibt es ein Wort $v \in \{ba, baa\}^+$ mit $w = avb$ oder $w = avba$.
 - Fall 1: $w = avb$:
 - * Fall 1.1: $v = bav_1$: Hier gilt $w = ab(av_1b)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $av_1b \in L$, also auch $w \in L$.
 - * Fall 1.2: $v = baav_1$: Hier gilt $w = aba(av_1b)$, woraus ebenso $w \in L$ folgt.
 - Fall 2: $w = avba$: Ganz analog zu Fall 1.

Aufgabe 2.

	a	b
$\{q_0\}$	\emptyset	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset



Aufgabe 3. Ja, die Sprache $L_k := \{w \in \{a, b\}^* \mid |n_a(v) - n_b(v)| \leq k \text{ für jedes Präfix } v \text{ von } w\}$ ist regulär, denn der folgende Automat akzeptiert genau L_k :



Aufgabe 4. Angenommen, $L := \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$ wäre regulär. Nach dem Pumping-Lemma gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $w \in L$ mit $|w| \geq n$ gilt: w lässt sich schreiben als $v_1 v_2 v_3$, wobei

$$(i) \ v_2 \neq \varepsilon, \quad (ii) \ |v_1 v_2| \leq n, \quad (iii) \ \forall k \geq 0: v_1 v_2^k v_3 \in L.$$

Seien $p \in \mathbb{P}$ mit $p \geq n, p \geq 3$ und $a^p = v_1 v_2 v_3$ mit $v_2 = a^l$ so, dass (i) – (iii) gilt. Wegen $v_1 v_2^k v_3 = a^{p+(k-1)l}$ für $k \geq 1$ gilt nun

$$\{p + kl \mid k \geq 0\} \subseteq \mathbb{P}. \quad (1)$$

Aus (i) folgt $l \neq 0$. Wegen (1) müsste aber $p + pl = p(1 + l)$ in \mathbb{P} liegen – Widerspruch.

Aufgabe 5. Der Übersichtlichkeit halber bezeichnen wir hier die Erweiterung einer Übergangsrelation Δ mit $\overline{\Delta}$. Die eine Richtung ist trivial, weil jeder gekürzte NFA auch ein NFA ist. Sei umgekehrt $N = \langle Q, A, \Delta, q_0, F \rangle$ ein NFA mit $L(N) = \{w \in A^* \mid \exists q \in F: (q_0, w, q) \in \overline{\Delta}\} = L$. Wir definieren

$$Q' := \{q_0\} \cup \{q \mid \exists u \in A^*: (q_0, u, q) \in \overline{\Delta} \\ \wedge \exists v \in A^* \exists q_f \in F: (q, v, q_f) \in \overline{\Delta}\}$$

und einen neuen Automaten $N' = \langle Q', A, \Delta \cap (Q' \times A \times Q'), q_0, F \cap Q' \rangle$. Nach Definition ist N' gekürzt und erfüllt $L(N') \subseteq L(N)$.

Es gilt aber auch die umgekehrte Inklusion: Sei dazu $w = x_1 \cdots x_n \in L$ beliebig, dann gibt es Zustände $q_1, \dots, q_n \in Q$ mit $(q_{i-1}, x_i, q_i) \in \Delta$, wobei $1 \leq i \leq n$ und $q_n \in F$. (Das folgt aus der Definition von $\overline{\Delta}$, formal müsste man das mit Induktion beweisen.) Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ gilt, wieder nach Definition von $\overline{\Delta}$, $(q_0, x_1 \cdots x_i, q_i) \in \overline{\Delta}$ und somit $q_i \in Q'$.

Wir zeigen nun induktiv für $i = n-1, \dots, 0$, dass

$$(q_i, x_i(x_{i+1} \cdots x_n), q_n) \in \overline{\Delta \cap (Q' \times A \times Q')}. \quad (2)$$

Für $i = n-1$ haben wir bereits festgestellt, dass $(q_{n-1}, x_n, q_n) \in \Delta \cap (Q' \times A \times Q')$. Sei $i < n-1$, dann gilt

$$(q_i, x_i, q_{i+1}) \in \Delta \cap (Q' \times A \times Q') \\ \text{sowie } (q_{i+1}, x_{i+1}(x_{i+2} \cdots x_n), q_n) \in \overline{\Delta \cap (Q' \times A \times Q')},$$

wobei Letzteres nach Induktionsvoraussetzung gilt, und somit nach Definition der erweiterten Übergangsrelation $(q_i, x_i(x_{i+1} \cdots x_n), q_n) \in \overline{\Delta \cap (Q' \times A \times Q')}$. Für $i = 0$ erhalten wir nun

$$(q_0, w, q_n) \in \overline{\Delta \cap (Q' \times A \times Q')},$$

also $w \in L(N')$.

Aufgabe 6. φ erfüllt also $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$ sowie $\varphi(vw) = \varphi(v)\varphi(w)$ für alle $v, w \in A^*$. Sei $L \subseteq A^*$ regulär, d. h. es gibt einen NFA $N = \langle Q, A, \Delta, q_0, F \rangle$ mit

$$L(N) = \{w \in A^* \mid \exists q \in F: (q_0, w, q) \in \Delta\} = L.$$

Wir definieren einen neuen NFA $M = \langle Q, \varphi(A), \varphi(\Delta), q_0, F \rangle$, wobei

$$\varphi(\Delta) := \{(q, \varphi(x), r) \mid (q, x, r) \in \Delta\}.$$

Wir wollen nun die erweiterte Übergangsrelation $\overline{\varphi(\Delta)}$ bestimmen. Wir zeigen induktiv

$$\overline{\varphi(\Delta)} = \{(q, \varphi(v), r) \mid (q, v, r) \in \overline{\Delta}\}:$$

$$\begin{aligned} (p, xw, r) \in \overline{\varphi(\Delta)} &\iff \exists q \in F: (p, x, q) \in \varphi(\Delta) \wedge (q, w, r) \in \overline{\varphi(\Delta)} \\ &\stackrel{(IV)}{\iff} \exists a \in A, u \in \varphi(A)^*, q \in F: \varphi(a) = x \wedge \varphi(u) = w \wedge (p, a, q), (q, u, r) \in \overline{\Delta} \\ &\iff \exists a, u: \varphi(au) = xw \wedge (p, au, r) \in \overline{\Delta} \\ &\iff \exists v: \varphi(v) = xw \wedge (p, v, r) \in \overline{\Delta}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun $L(\varphi(N)) = \varphi(L)$:

» \subseteq « Sei $w \in L(\varphi(N))$ beliebig, dann gibt es ein $a \in A^*$ mit $\varphi(a) = w$ und ein $q \in F$ mit $(q_0, a, q) \in \Delta$. Damit ist aber $a \in L$ und somit $w \in \varphi(L)$.

» \supseteq « Sei $w \in \varphi(L)$ beliebig, dann gibt es ein $a \in L$ mit $w = \varphi(a)$. Nun gibt es ein $q \in F$ mit $(q_0, a, q) \in F$, also $(q_0, \varphi(a), q) = (q_0, w, q) \in \overline{\varphi(\Delta)}$, d. h. $w \in L(\varphi(N))$.