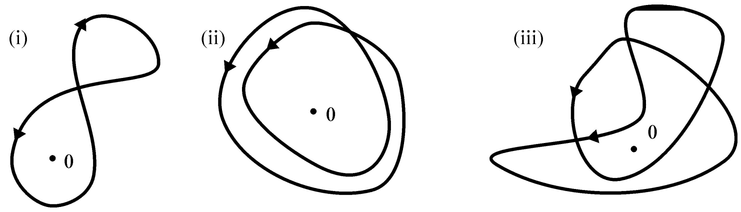
5. Übung zur Komplexen Analysis

1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. u ist zweimal reell stetig differenzierbar in G mit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Ferner sei $f : K \to \mathbb{C}$ auf einer Kreisscheibe $K \subseteq G$ holomorph, Zeigen Sie: Falls u in K der Realteil von f ist, kann f längs eines jeden Weges in G analytisch fortgesetzt werden.

2. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung einer ganzen Funktion. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ bestimme man das Residuum
$$\operatorname{Res}_0 \frac{f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n}.$$

3. Welche Werte kann das Integral $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+a^2}$, $a \in \mathbb{C}$, für geschlossene Kurven in $\mathbb{C}\backslash\{\pm ia\}$ annehmen?

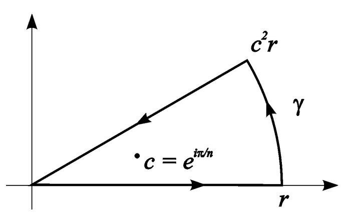
4. Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sinh z}{z^2}\, dz$ für γ laut Skizze:

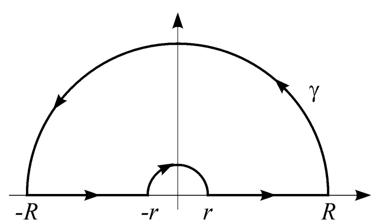


5. Es sei $f : G \to f(G)$ biholomorph auf einem Gebiet G, d.h. f ist bijektiv und f, f^{-1} sind holomorph. Weiters sei $B := \{z : |z - z_0| < r\}$ mit $\overline{B} \subseteq G$ für gewisse $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Zeigen Sie, dass für $w \in f(B)$ gilt:
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

6. Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten. Zeigen Sie: Die Funktion $g(z) := z^{-2} f(z^{-1})$ ist in einer punktierten Umgebung von 0 holomorph, und es gilt $\operatorname{Res}_0 g = \sum_{a \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_a f$.

7. Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx = \frac{\pi}{n}(\sin \frac{m}{n}\pi)^{-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$, indem Sie $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$ über γ (siehe Skizze unten links) integrieren





8. Zeigen Sie: $\int\limits_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$, indem Sie $\frac{l(z)}{1+z^2}$, wobei l ein geeigneter Zweig des Logarithmus ist, über γ laut Skizze (oben rechts) integrieren.