23 / 1: Sei S der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$.

(a) Zeige, dass

$$\sigma_p(S^*) = \sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$
$$\sigma_c(S^*) = \sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$
$$\sigma_r(S^*) = \sigma_p(S) = \emptyset.$$

(b) Bestimme $\sigma_{app}(S)$ und finde zu jedem Punkt $\lambda \in \sigma_{app}(S)$ eine Folge wie in der Definition des approximativen Punktspektrums verlangt.

(c) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \neq 1$ bestimme $\dim\left(\ell^2(\mathbb{N})/\operatorname{ran}(S-\lambda)\right)$.

a) Aus 19/1 wissen wir bereits, dass S isometrisch ist und nach Lemma 6.4.10 mit $\mathbb{E} := \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| < 1\}$

$\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{E}}$

Außerdem: $S^* : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$

•) $S^*(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow (x_{n+1} - \lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = \lambda x_n$

induktiv: $x_n = \lambda^{n-1} x_1$

$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{n-1}|^2 |x_1|^2 = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \Rightarrow |\lambda| < 1$ (falls $x_1 \neq 0$)

falls $x_1 = 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

Also: $\sigma_p(S^*) = \mathbb{E}$

•) Sei $\lambda \in \sigma_p(S^*) = \mathbb{E}$, also $\ker(S^* - \lambda I) = \operatorname{ran}((S^* - \lambda I)^*)^\perp \neq \{0\}$ (Prop. 6.6.2)

also $\operatorname{ran}(S - \bar{\lambda} I)^\perp = \ker(S^* - \lambda I)$ und da $\operatorname{ran}(S - \bar{\lambda} I)$ Unterraum von

$\ell^2(\mathbb{N})$ ist gilt nach Korollar 3.2.4: $\overline{\operatorname{ran}(S - \bar{\lambda} I)} = \operatorname{ran}(S - \bar{\lambda} I)^{\perp\perp} = \ker(S^* - \lambda I)^\perp \subsetneq \{0\}^\perp = \ell^2(\mathbb{N})$

Wir schließen $\bar{\lambda} \in \sigma_r(S)$ und wegen $\overline{\mathbb{E}} \overset{\text{konj.}}{=} \mathbb{E}$ also $\mathbb{E} = \sigma_p(S^*) \subseteq \sigma_r(S) \subseteq \mathbb{E}$

•) Für $\lambda \in \partial \mathbb{E}$ ist $\ker(S^* - \lambda I) = \{0\}$, wie im vorigen Punkt schließen wir

$\overline{\operatorname{ran}(S - \bar{\lambda} I)} = \ker(S^* - \lambda I)^\perp = \{0\}^\perp = \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \partial \mathbb{E} \cap \sigma_r(S) = \emptyset \Rightarrow \sigma_r(S) = \mathbb{E} = \sigma_p(S^*)$

•) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad S(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, \dots) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda x_1 = 0$

Fall 1: „$\lambda = 0$" $\Rightarrow x_n - \lambda x_{n+1} = x_n = 0 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

Fall 2: „$\lambda \neq 0$" $\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_1 - \lambda x_2 = -\lambda x_2 = 0$ usw. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

Also $\sigma_p(S) = \emptyset$

•) Nach Lemma 6.4.10 ist $\sigma(S)$ kompakt also abg. und wegen

$\mathbb{E} \subseteq \sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{E}}$ muss schon $\sigma(S) = \overline{\mathbb{E}}$ gelten und da

$\overline{\mathbb{E}} = \sigma(S) = \sigma_p(S) \dot\cup \sigma_c(S) \dot\cup \sigma_r(S) = \emptyset \dot\cup \sigma_c(S) \dot\cup \mathbb{E} \Rightarrow \sigma_c(S) = \partial \mathbb{E}$

•) Ang $\exists\, \lambda \in \sigma_r(S^*) \Rightarrow \overline{\operatorname{ran}(S^* - \lambda I)} \neq X \Rightarrow \operatorname{ran}(S^* - \lambda I)^{\perp\perp} \neq \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \ker(S - \bar{\lambda} I)^\perp \neq \{0\}$

$\Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(S) \neq \emptyset$ ↯ $\Rightarrow$ $\sigma_r(S^*) = \sigma_p(S) = \emptyset$

•) $\|S^*\| = 1$ (überlegt man leicht) $\Rightarrow$ $\sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{E}}$ es bleibt also $\sigma_c(S^*) = \partial \mathbb{E}$, weil $\sigma(S^*)$ kompakt

b) $\sigma_{app}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists$ Folge $((x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : \forall n \in \mathbb{N}.\ \|(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2 = 1,\ \|(S-\lambda I)(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$

•) Nach einem Korollar aus Teil 3 von Lecture 21 gilt $\partial\mathbb{E} = \sigma_p(S) \dot\cup \sigma_c(S) \subseteq \sigma_{app}(S) \subseteq \sigma(S) = \mathbb{E}$

$$\|S(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} - \lambda(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \|(-\lambda x_{n_1}, x_{n_1} - \lambda x_{n_2}, x_{n_2} - \lambda x_{n_3}, \dots)\|_2^2 =$$

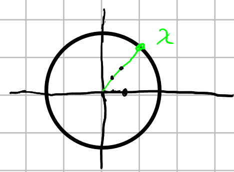
$$= |\lambda|^2 |x_{n_1}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - \lambda x_{n_{k+1}}|^2 \geq |\lambda|^2 |x_{n_1}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|x_{n_k}| - |\lambda||x_{n_{k+1}}|)^2 =$$

$$= \underbrace{\|(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2}_{=1} + |\lambda| \underbrace{\|(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2}_{=1} - 2|\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k}||x_{n_{k+1}}| \overset{\text{Hölder}}{\geq} 1 + |\lambda| - 2|\lambda| \underbrace{\|(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2}_{=1} \underbrace{\|S^*(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2}_{\leq 1} \geq$$

$$\geq 1 + |\lambda| - 2|\lambda| = 1 - |\lambda|$$

Für $|\lambda| < 1$ ist also $\|S(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} - \lambda(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2 \geq 1 - |\lambda| > 0$, woraus wir $\lambda \notin \sigma_{app}(S)$ schließen

also $\partial\mathbb{E} \subseteq \sigma_{app}(S) \subseteq \partial\mathbb{E} \Rightarrow \sigma_{app}(S) = \partial\mathbb{E}$



•) Sei nun $\lambda \in \sigma_{app}(S) = \partial\mathbb{E}$ bel.

$$x_{n_k} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda^{-(k-1)}, & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\|x_{n_k}\|_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\lambda^{-(k-1)}| = \frac{1}{n} n = 1$$

$$\|S(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} - \lambda(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2 = |\lambda|^2 |x_{n_1}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - \lambda x_{n_{k+1}}|^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |\lambda^{1-k} - \lambda\lambda^{-k}|^2 + \frac{1}{n}|\lambda^{1-n}| =$$

$$= \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

c) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$

Fall 1: „$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{E}$" $\Rightarrow \lambda \in \rho(S) \Rightarrow \operatorname{ran}(S-\lambda) = \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \dim(\ell^2(\mathbb{N}) / \ell^2(\mathbb{N})) = 0$

Fall 2: „$\lambda \in \mathbb{E}$" Aus Teil 3 von Lecture 21 wissen wir

$\lambda \in \sigma_{app}(S) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(S) \vee (\ker(S-\lambda) = \{0\} \wedge (S-\lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(S-\lambda) \to \ell^2(\mathbb{N})$ unbeschr.)

Da wir schon wissen $\lambda \notin \sigma_{app}(S)$ und $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ folgt die Beschränktheit von $(T-\lambda)^{-1}$. Das und die Injektivität von S sind nach Bem. 4.3.5 äquivalent zur Existenz einer $a \in \mathbb{R}^+$ mit $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$: $a\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 \leq \|S(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2$

Mit Lemma 4.3.6. folgt nun, dass $\operatorname{ran}(S-\lambda)$ abg. ist.

$\operatorname{ran}(S-\lambda) = \overline{\operatorname{ran}(S-\lambda)} = (\operatorname{ran}(S-\lambda)^\perp)^\perp = \ker(S^* - \bar\lambda)^\perp$

$\ker(S^* - \bar\lambda) = \{(z\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}} \mid z \in \mathbb{C}\}$, also $\dim \ker(S^* - \bar\lambda) = 1$, also $\ker(S^* - \lambda)$ abg.,

also $\operatorname{ran}(S-\lambda)^\perp = \ker(S^* - \bar\lambda)^{\perp\perp} = \overline{\ker(S^* - \bar\lambda)} = \ker(S^* - \bar\lambda)$

Nach Korollar 5.4.9. gilt $\dim(\ell^2(\mathbb{N}) / \operatorname{ran}(S-\lambda)) = \dim \operatorname{ran}(S-\lambda)^\perp = \dim \ker(S^* - \bar\lambda) = 1$

24 / 1:* Sei S der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$, und sei $M \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ der Operator definiert als $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\frac{1}{n}\cdot\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Betrachte $T := MS$.

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ bestimme $\|T^k\|$ und berechne $\lim_{n\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$.

(b) Zeige dass T kompakt ist.

(c) Zeige dass $\sigma_p(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = \{0\}$.

a) $MS(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = M(0,x_1,x_2,\dots) = (0,\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3},\dots)$

$(MS)^2(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = M(0,0,\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3},\dots) = (0,0,\frac{x_1}{2\cdot 3},\frac{x_2}{3\cdot 4},\dots)$

induktiv $T^k = (\underbrace{0,\dots,0}_{k \text{ mal}}, \frac{x_1}{(k+1)!}, \frac{x_2}{(k+2)!},\dots)$

also $\|T^k(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left|\frac{x_l}{(k+l)!}\right|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |x_l|^2 \left(\frac{1}{(k+l)!}\right)^2 \le \left(\frac{1}{(k+1)!}\right)^2 \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2$

also $\|T^k\| \le \frac{1}{(k+1)!}$ und wählt man $x_1 = 1$ und $\forall l > 1: x_l = 0$ so ist sicher $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ und $\|T^k(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \left(\frac{1}{(k+1)!}\right)^2 \underbrace{\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2}_{=1}$

Daher ist $\|T^k\| = \frac{1}{(k+1)!}$ und $k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$, für $k = 1$ ✓

$(k+1)! > (k+1)\left(\frac{k}{3}\right)^k = \frac{k^{k+1}}{3^k} + \frac{k^k}{3^k} \overset{!}{>} \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} \Leftrightarrow 3(k^{k+1} + k^k) > (k+1)^{k+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k^k(k+1) > (k+1)^{k+1} \Leftrightarrow 3k^k > (k+1)^k \Leftrightarrow 3 > (1+\frac{1}{k})^k \nearrow e$ (Kaltenbäck Bsp. 3.4.3 (iv))

$\lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{(k+1)!}\right)^{\frac{1}{k}} \le \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{(\frac{k}{3})^k (k+1)}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k} \underbrace{(k+1)^{-\frac{1}{k}}}_{\le 1} \le \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k} = 0$

b) $M_l : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\frac{x_1}{1},\dots,\frac{x_l}{l},0,\dots,0)$

M_l ist beschränkt und linear und dim ran $M_l \le l < \infty$, nach Prop. 6.5.4 (i)

ist daher M_l kompakt.

$\|(M-M_l)(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \|(0,\dots,0,\frac{x_{l+1}}{l+1},\frac{x_{l+2}}{l+2},\dots)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_{l+k}}{l+k}\right|^2 \le \left(\frac{1}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_{l+k}|^2 \le \frac{1}{l^2}\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2^2$

also gilt $M_l \xrightarrow{\|\cdot\|} M$ und da nach Prop. 6.5.4. (iii) die Menge der kompakten Operatoren

abg. bzgl. $\|\cdot\|$ ist wissen wir M ist kompakt.

Nach Prop. 6.5.4 (iv) gilt nun auch $T = MS$ kompakt.

c) Aus (a) wissen wir bereits $\lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = 0$, mit Satz 6.4.14 folgt daher

$r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = 0$ und $\sigma(T) \ne \emptyset$ also $\sigma(T) = \{0\}$

$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow (0,\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3},\dots) = 0 \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

also ker $T = \{0\}$ daraus schließen wir $0 \notin \sigma_p(T)$

Sei X eine Menge und ν ein Maß auf X. Hat man eine Funktion $k : X \times X \to \mathbb{C}$, so kann man die Abbildung K betrachten, die definiert ist als

$$(Kf)(x) := \int_X k(x,y) f(y) \, d\nu(y).$$

Man bezeichnet K als den *Integraloperator mit Kern k und Maß ν*.

IO / 1: Sei X eine Menge, μ ein σ-endliches Maß auf X, sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$, und betrachte den Integraloperator K mit Kern k und Maß μ.

Zeige, dass $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit $\|K\| \le \|k\|_{L^2(\mu \times \mu)}$. Zeige, dass seine Hilbertraumadjungierte $K^* \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ der Integraloperator mit Kern $k^*(x,y) := \overline{k(y,x)}$ ist.

- $\|Kf\|^2_{L^2(\mu)} = \int_X \left|\int_X k(x,y) f(y) \, d\mu(y)\right|^2 d\mu(x) \le \int_X \left(\int_X |k(x,y)| \, |f(y)| \, d\mu(y)\right)^2 d\mu(x) \le$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \int_X \int_X |k(x,y)|^2 d\mu(y) \int_X |f(y)|^2 d\mu(y) \, d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \|f\|^2_{L^2(\mu)} \int_{X \times X} |k(x,y)|^2 d\mu{\times}\mu(x,y) = \|f\|^2_{L^2(\mu)} \|k\|_{L^2(\mu \times \mu)}$$

- $(Kf, g) = \int_X \int_X k(x,y) f(y) \, d\mu(y) \, \overline{g(x)} \, d\mu(x) = \int_X \int_X k(x,y) f(y) \overline{g(x)} \, d\mu(y) \, d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=}$

$$= \int_X f(y) \int_X k(x,y) \overline{g(x)} \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_X f(x) \overline{\int_X \overline{k(y,x)} \, g(y) \, d\mu(y)} \, d\mu(x) =$$

$$= \int_X f(x) \overline{\int_X k^*(x,y) \, g(y) \, d\mu(y)} \, d\mu(x) = (f, K^* g)$$

- Die Beschränktheit von K^* folgt bereits aus Prop. 66.2 (i) mit $\|K^*\| = \|K\|$

IO / 2: Sei X eine Menge und μ ein σ-endliches Maß auf X. Zeige:

(a) Seien $a_i, b_i \in L^2(\mu)$, $i = 1, \dots, n$. Setze $k(s,t) := \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)$ und betrachte den Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k. Dann ist $\dim \operatorname{ran} K \le n$.

(b) Sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Dann ist der Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k und Maß μ kompakt.

a) Sei $g \in \operatorname{ran} K$ mit $Kf = g$, also

$$g(s) = Kf(s) = \int_X k(s,t) f(t)\, d\mu(t) = \int_X \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) f(t)\, d\mu(t) = \sum_{i=1}^n \int_X b_i(t) f(t)\, d\mu(t)\, a_i(s)$$

also $g \in \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow \dim \operatorname{ran} K \le n$

b) $K_n f(s) = \int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)\right) f(t)\, d\mu(t)$ ist nach Prop. 6.5.4 (i) kompakt, da $\dim \operatorname{ran} K_n \le n < \infty$

$$\|(K-K_n)f\|_2^2 = \int_X \left| \int_X k(s,t) f(t)\, d\mu(t) - \int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)\right) f(t)\, d\mu(t) \right|^2 d\mu(s) \le$$

$$\le \int_X \left(\int_X \left| k(s,t) - \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) \right| |f(t)|\, d\mu(t) \right)^2 d\mu(s) \le$$

$$\le \int_X \int_X \left| k(s,t) - \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) \right|^2 d\mu(t) \int_X |f(t)|^2 d\mu(t)\, d\mu(s) =$$

$$= \|f\|_2^2 \int_{X\times X} \left| k(s,t) - \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) \right|^2 d\mu\times\mu(s,t)$$

Nach Kusolitsch Lemma 13.37 gibt es Treppenfunktionen $t_n(s,t) = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{C_{ni}}(s,t)$ mit $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|t_n\|_{L^2(\mu\times\mu)} \le \|k\|_{L^2(\mu\times\mu)}$ und $\lim_{n\to\infty} \|k - t_n\|_{L^2(\mu\times\mu)} = 0$

wobei $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{1, \dots, m_n\}: C_{ni} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$

$\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} = \{A \times B \mid A, B \in \mathfrak{S}\}$ ist ein Semiring der $\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$ erzeugt (vgl. Kusolitsch Folgerung 10.12 und Lemma 10.14) Der von diesem Semiring erzeugte Ring ist

$\mathcal{R} = \{\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i \times B_i \mid A_i \times B_i \cap A_j \times B_j = \emptyset$ für $i \ne j\}$ (vgl. Kusolitsch Satz 2.59)

Klarerweise erzeugt auch $\mathcal{R}$ die σ-Algebra $\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$

Sei nun $C \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$ bel. Nach dem Approximationssatz (Kusolitsch 4.24) gibt es nun $D := \bigcup_{i=1}^{\ell} A_i \times B_i \in \mathcal{R}$ mit $\mu\times\mu(C \triangle D) < \varepsilon$ für bel. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\|\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_D\|_2^2 = \int_{X\times X} |\mathbb{1}_C(s,t) - \mathbb{1}_D(s,t)|^2\, d\mu\times\mu(s,t) = \int_{X\times X} \mathbb{1}_{C\triangle D}(s,t)\, d\mu\times\mu(s,t) = \mu\times\mu(C \triangle D) < \varepsilon$$

Wir können also eine Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{R}$ wählen mit $\|\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_{D_n}\|_2 < \frac{1}{n}$ also $D_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} C$

Zurück zu unserer Aufgabe: wir wollen $t_n(s,t) = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{C_{n,i}}(s,t)$ approximieren

Für jedes $C_{n,i}$ wählen wir $D_{n,i}$ mit $\|\mathbb{1}_{C_{n,i}} - \mathbb{1}_{D_{n,i}}\|_2 < \frac{\varepsilon}{m_n |\alpha_{ni}|}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{C_{n,i}} - \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{D_{ni}} \right\|_2 \leq \sum_{n=1}^{m_n} |\alpha_{ni}| \, \|\mathbb{1}_{C_{n,i}} - \mathbb{1}_{D_{ni}}\|_2 < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{D_{ni}}(s,t) = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \sum_{j=1}^{l_{ni}} \mathbb{1}_{A_{nij} \times B_{nij}}(s,t) = \sum_{i=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{l_{ni}} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{A_{nij}}(s) \mathbb{1}_{B_{nij}}(t)$$

Wir finden also Funktionen der Form $s_{nq} = \sum_{j=1}^{p_{nq}} \beta_{nqj} \mathbb{1}_{A_{nqj}}(s) \mathbb{1}_{B_{nqj}}(t)$, $q \in \mathbb{N}$

mit $s_{nq} \xrightarrow[q \to \infty]{\|\cdot\|_2} t_n$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. $\|k - s_{nq}\|_2 \leq \underbrace{\|k - t_n\|_2}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{für hinr. großes } n}} + \underbrace{\|t_n - s_{nq}\|_2}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für hinr. großes } q}} < \varepsilon$

IO / 3: Der *Volterra-Operator* ist der Integraloperator $(Vf)(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Zeige, dass $V \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ mit $\|V\| = \frac{2}{\pi}$, dass V kompakt ist, und dass

$$(V^*f)(x) = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

Zeige, dass $\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$.

•) $\|V \sin\circ\frac{\pi}{2}\mathrm{id}\|_2^2 = \int_0^1 \left|\int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t)\,dt\right|^2 dx = \int_0^1 \left|\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)\right|^2 dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 |\cos(\frac{\pi}{2}x)|^2 dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 |\sin(\frac{\pi}{2}x)|^2 dx =$

$= \frac{4}{\pi^2}\|\sin\circ\frac{\pi}{2}\mathrm{id}\|_2^2 \Rightarrow \|V\| \geq \frac{2}{\pi}$

$\|Vf\|_2^2 = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x \left|\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}t)}\,\frac{f(t)}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}t)}}\right| dt\right)^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x \cos(\frac{\pi}{2}t)\,dt \int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\cos(\frac{\pi}{2}t)}\,dt\right) dx =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}x)\int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\cos(\frac{\pi}{2}t)}\,dt\,dx = \frac{2}{\pi}\iint \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t)\sin(\frac{\pi}{2}x)\frac{|f(t)|^2}{\cos(\frac{\pi}{2}t)}\,dx\,dt =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{\cos(\frac{\pi}{2}t)}\int_t^1 \sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx\,dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|f\|_2^2$

•) Der Integraloperator hat den Kern $\mathbb{1}_{(0,x)}(t)$ und da es sich um eine positive Funktion handelt gilt mit Fubini

$\int_{(0,1)\times(0,1)} |\mathbb{1}_{(0,x)}(t)|^2\,d\lambda^2(t,x) = \int_0^1\int_0^x dt\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, also $\mathbb{1}_{(0,x)}(t) \in L^2(\lambda^2,(0,1))$

Auch die anderen Voraussetzungen von IO/2(b) sind erfüllt, also ist V kompakt.

•) Aus IO/1 wissen wir bereits K^* hat den Kern $\mathbb{1}_{(0,t)}(x) = \mathbb{1}_{(x,1)}(t)$

•) $Vf(x) - \mu f(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt - \mu f(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \mu f(x)$

Fall 1: „$\mu = 0$" $\Rightarrow f = 0$

Fall 2: „$\mu \neq 0$" Nach dem Hauptsatz für Lebesgue Integrale (Kusolitsch Satz 12.30) ist Vf absolut stetig,

mit Kusolitsch Lemma 12.10 also insbesondere stetig, wegen $f = \frac{1}{\mu}Vf$ ist auch f stetig

Sei nun $g(t,y(t)) := \frac{f(t)}{\mu}$

Wir suchen also eine stetige Funktion f mit $\forall x \in (0,1): f(x) = \int_0^x g(t,y(t))\,dt$

Nach Melenk Lemma 2.7. ist das äquivalent dazu ein stetig differenzierbares f zu

finden mit $f' = g(t,f)$ und $f(0) = 0$

Aus ODE wissen wir bereits, dass dieses AWP eindeutig lösbar ist und $f=0$ löst das AWP

Nun wissen wir also $\sigma_p(V) = \emptyset$

•) Mit Satz 6.5.12 (ii) gilt $\sigma(V)\setminus\{0\} = \sigma_p(V)\setminus\{0\} = \emptyset$ und da nach Satz 6.4.14 gilt, dass

$\sigma(V) \neq \emptyset$ ist $0 \in \sigma(V)$, aber $0 \notin \sigma_p(V)$ also $0 \in \sigma_r(V) \vee 0 \in \sigma_c(V)$

•) Wie schon in Aufgabe 15/3 verwenden wir auch hier, dass die C_c^∞ Funktionen dicht in $L^2(0,1)$ liegen. Sei also $f:(0,1)\to\mathbb{C}$ aus C_c^∞. Wegen der Stetigkeit von f' ist $f'\in L^2(0,1)$ und es gilt $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt = Vf'(x)$, also $Vf'=f$ und damit ist $f\in \operatorname{ran}(V)$, also $C_c^\infty\subseteq \operatorname{ran}(V) \Rightarrow \overline{C_c^\infty}\subseteq\overline{\operatorname{ran}(V)} \Leftrightarrow L^2(0,1)\subseteq\overline{\operatorname{ran}(V)}$, also liegt $\operatorname{ran}(V)$ dicht in $L^2(0,1)$ und daher ist $0\in\sigma_c(V)$

IO / 4: Sei $k \in C([0,1]^2)$, und betrachte den Integraloperator $(Kf)(x) := \int_0^1 k(x,t)f(t)\,dt$. Zeige, dass $K \in \mathcal{B}(C([0,1]))$ mit

$$\|K\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le \|k\|_{C([0,1]^2)}.$$

Zeige, dass K kompakt ist.

•) $\|Kf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt\right| \le \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,|f(t)|\,dt \le \sup_{x\in[0,1]} \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le$

$\le \|f\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le \|f\|_\infty \, \|k\|_{C([0,1]^2)}$

•) Sei $x \in [0,1]$ wo das sup angenommen wird

$$f: [0,1] \to \mathbb{C}: t \mapsto \begin{cases} \frac{\overline{k(x,t)}}{|k(x,t)|} & \text{, falls } k(x,t) \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } k(x,t) = 0 \end{cases}$$

Da $f \in L^1(0,1)$ gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von C_c^∞ Funktionen mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$

Nach Kusolitsch Satz 13.25 gilt $f_n \to f$ im Maß und nach Kusolitsch Satz 7.88 können wir eine Teilfolge f_{n_ℓ} auswählen mit $f_{n_\ell} \to f$ λ-f.ü.

$\lim_{\ell\to\infty} |Kf_{n_\ell}(x)| = \lim_{\ell\to\infty} \left|\int_0^1 k(x,t) f_{n_\ell}(t)\,dt\right| \overset{(*)}{=} \left|\int_0^1 k(x,t)\, f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |k(x,t)|\,dt$

wobei $(*)$ gilt weil $|k(x,t)\, f_{n_\ell}(t)| = |k(x,t)| \le \|k(x,\cdot)\|_\infty \ \forall \ell, \forall t$

also haben wir Konvergenz durch Majorisierung (Kusolitsch Satz 9.23)

•) Sei $x \in [0,1]$ bel. und $f \in C[0,1]$ mit $\|f\|_\infty \le 1$

$|Kf(x)| = \left|\int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt\right| \le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le \int_0^1 |k(x,t)|\,dt$

also $K(L) \subseteq C([0,1])$ punktweise beschränkt, wobei $L := \{f \in C[0,1] \mid \|f\|_\infty \le 1\}$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$|Kf(x) - Kf(y)| = \left|\int_0^1 (k(x,t) - k(y,t))\, f(t)\,dt\right| \le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t) - k(y,t)|\,dt$

Da alle Normen auf $[0,1]^2$ äquivalent sind erhält man mit der Stetigkeit von k bzgl. der Maximumsnorm

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+: \forall y \in [0,1]: |x-y| < \delta \Rightarrow |k(x,t) - k(y,t)| < \varepsilon$

also gilt für $|x-y| < \delta$

$|Kf(x) - Kf(y)| \le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t) - k(y,t)|\,dt < \varepsilon$

Damit ist $K(L)$ nun auch gleichgradig stetig

Nach dem Satz von Ascoli (Kaltenbäck Satz 12.13.10) ist $K(L)$ damit total beschränkt,

Nach Blümlinger Satz 1.4.9 ist auch $\overline{K(L)}$ totalbeschränkt und da $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banachraum ist gilt nach Blümlinger Satz 1.4.10, dass $\overline{K(L)}$ kompakt ist.

IO / 5: Gibt es eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die der Gleichung

$$f(x) + \int_0^x e^{x \cos t} f(t)\, dt = x^2 + 1, \ x \in [0,1],$$

genügt? Falls ja, ist f eindeutig?

Hinweis. Ist der Punkt -1 im Spektrum des Operators ?

•) $T: C[0,1] \to C[0,1]$ mit $Tf(x) = \int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\, dt$

sei $f \in C[0,1]$ bel. und $g \in X'$ bel.

$\langle Tf, g\rangle = g\left(\int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\,dt\right) = \int_{[0,1]} \int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\, dt\, d\mu(x) =$

$= \int\int \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\, e^{x\cos(t)} f(t)\, d\mu(x)\, dt = \int_0^1 f(t) \int_{[x,1]} e^{x\cos(t)}\, d\mu(x)\, dt$

$T'\mu(f) = \int_0^1 f(t) \int_{[t,1]} e^{x\cos(t)}\, d\mu(x)\, dt$

$\int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\, dt \;\Big|\; u = e^{\cos(t)} \quad \frac{du}{dt} = \sin(t)\, e^{\cos(t)}$

$\left| \int_0^x \left(e^{x\cos(t)} - 1\right) f(t)\, dt \right|$

Kettenbäcke Rep. 10. 1.22

$$f'(x) + e^{x\cos(x)} f(x) + \int_0^x \cos(t)\, e^{x\cos(t)} f(t)\, dt = 2x$$

$x\cos(t) = u \qquad \frac{du}{dx} = -\sin(t) \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin(t)}$

•) $T \in B(C[0,1])$ mit $Tf(x) = \int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\, dt$; für $f \in C[0,1]$ bel. gilt

$K \in B(C[0,1])$: $Kf(x) = \int_0^1 e^{x\cos(t)} f(t)\, dt$ ist ein Operator der Form von I0/4

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\, dt \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |e^{x\cos(t)} f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |e^{x\cos(t)}|\, dt = \|f\|_\infty \int_0^1 e^{\cos(t)}\, dt$$

für $\|f\|_\infty \leq 1$ gilt

$\|Tf\|_\infty \leq$