Kapitel 7

Invarianz

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.1}$$

wobei $x_0 \in G$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ sei. Im ganzen Kapitel nehmen wir Eindeutigkeit der Lösungen nach rechts an. Sei $x(t; t_0, x_0)$ die Lösung von (7.1) auf dem maximalen Intervall $J_+(t_0, x_0) := [t_0, t_+(t_0, x_0))$.

7.1 Invariante Mengen

Eines der wichtigsten Konzepte in der qualitativen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist der Begriff der invarianten Menge.

Definition 7.1.1. *Sei $D \subset G$. D heißt* **positiv invariant** *für* (7.1)*, falls die Lösung $x(t; t_0, x_0) \in D$ für alle $t \in J_+(t_0, x_0)$ erfüllt, sofern $x_0 \in D$ ist. Entsprechend wird* **negativ invariant** *definiert, falls die Lösungen von* (7.1) *eindeutig nach links sind, und D heißt* **invariant***, wenn D sowohl positiv als auch negativ invariant ist.*

Es ist nicht schwer eine notwendige Bedingung für die positive Invarianz von D anzugeben. Denn ist D positiv invariant, und ist $x_0 \in D$ beliebig, so gilt für hinreichend kleine $h > 0$

$$\operatorname{dist}(x_0 + hf(t_0, x_0), D) \le |x_0 + hf(t_0, x_0) - x(t_0 + h; t_0, x_0)|_2$$

und mit

$$x(t_0 + h; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} \dot{x}(s; t_0, x_0)\, ds, \qquad \dot{x}(t_0; t_0, x_0) = f(t_0, x_0)$$

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme,* Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_7, © Springer Basel AG 2010

erhält man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\operatorname{dist}(x_0 + hf(t_0, x_0), D) \leq \left| h\dot{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+h} \dot{x}(s)\, ds \right|_2 \leq \varepsilon h,$$

sofern $h \in (0, \delta]$ ist. Wir haben gezeigt, dass die positive Invarianz von D die sogenannte **Subtangentialbedingung**

$$(S) \begin{cases} \text{Für alle } t \in \mathbb{R},\, x \in D \text{ gilt} \\ \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\operatorname{dist}(x + hf(t,x), D) = 0. \end{cases}$$

nach sich zieht. Man beachte, dass (S) unabhängig von der gewählten Norm ist, da auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind.

Erfreulicherweise ist (S) auch hinreichend für positive Invarianz. Zunächst wollen wir uns jedoch (S) genauer ansehen. Es ist klar, dass

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\operatorname{dist}(x + hf(t,x), D) = 0$$

für alle $x \in \operatorname{int} D$ trivialerweise erfüllt ist; (S) ist eine Bedingung in den Randpunkten von D und wird deshalb manchmal **Randbedingung** genannt. Um die geometrische Bedeutung von (S) zu klären, benötigen wir die

Definition 7.1.2. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $x \in \partial D$. Ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, heißt* **äußere Normale** *an D in x, falls $B_{|y|_2}(x + y) \cap D = \emptyset$ ist. Die Menge der äußeren Normalen in x sei mit $\mathcal{N}(x)$ bezeichnet.*

Äußere Normalen müssen nicht unbedingt existieren, wie das Beispiel einer einspringenden Ecke zeigt.

Lemma 7.1.3. *Sei D abgeschlossen, $x \in \partial D$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Dann impliziert die Bedingung*

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\operatorname{dist}(x + hz, D) = 0,$$

dass $(z|y) \leq 0$ für alle $y \in \mathcal{N}(x)$ gilt.

Beweis. Sei $x \in \partial D$, $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathcal{N}(x)$ und gelte $\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \operatorname{dist}(x + hz, D) = 0$. Angenommen $(z|y) > 0$. Dann folgt $x + hz \in B_{|y|_2}(x + y)$ für $0 < h \leq h_1 \leq (z|y)/|z|_2^2$, denn es ist sogar

$$\begin{aligned} |x + hz - (x + y)|_2^2 &= |hz - y|_2^2 = h[h|z|_2^2 - 2(z|y)] + |y|_2^2 \\ &\leq h[h_1|z|_2^2 - 2(z|y)] + |y|_2^2 \leq |y|_2^2 - h(z|y) = |y|_2^2(1 - h\alpha) \\ &\leq |y|_2^2(1 - \frac{\alpha}{2}h)^2, \end{aligned}$$

mit $\alpha := (y|z)/|y|_2^2 > 0$. Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt $1 - \alpha h \geq 0$ für alle $0 < h \leq h_1$, also $1 - \alpha h/2 > 0$. Sei nun $\varepsilon \in (0, \alpha|y|_2/2)$ gegeben. Dann existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit $\mathrm{dist}(x + hz, D) \le \varepsilon h$ für alle $h \in (0, \delta)$. O.B.d.A. dürfen wir dabei $\delta \le h_1$ annehmen. Folglich erhalten wir für $h \in (0, \delta)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\varepsilon h &\ge \mathrm{dist}(x + hz, D) = |x + hz - p(h)|_2 = |x + hz - (x + y) - (p(h) - (x + y))|_2 \\ &\ge |p(h) - x - y|_2 - |hz - y|_2 \ge |y|_2 - |y|_2(1 - \alpha h/2) = \alpha h|y|_2/2,\end{aligned}$$

mit $p(h) \in \partial D$, also $\varepsilon \ge \alpha|y|_2/2$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von ε. □

Die geometrische Bedeutung von (S) dürfte nun klar sein: erreicht eine Lösung den Rand von D, so zwingt die Bedingung (S) sie zum Umkehren, da der Winkel zwischen $\dot{x}(t)$ und jeder äußeren Normalen in $x(t) \in \partial D$ stets $\ge \pi/2$ ist.

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist der

Satz 7.1.4. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $D \subset G$ abgeschlossen. Dann sind äquivalent:*

1. *D ist positiv invariant für* (7.1)*;*
2. *f und D erfüllen die Subtangentialbedingung (S).*

Beweis. Unter Annahme der Subtangentialbedingung (S) genügt es zu zeigen, dass es zu jedem $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$ eine lokale Lösung von (7.1) in D gibt. Eindeutigkeit der Lösungen impliziert dann, das auch die maximale Lösung in D nach rechts in D bleibt.

Dazu seien $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ gegeben und gelte (S). Wähle eine Kugel $\bar{B}_r(x_0) \subset G$, setze $M := \max\{|f(t, x)| : t \in [t_0, t_0 + 1], x \in \bar{B}_r(x_0) \cap D\}$, und sei $a := \min\{1, r/(M + 1)\}$. Wir zeigen, dass es auf dem Intervall $[t_0, t_0 + a]$ eine Lösung $x(t)$ von (7.1) gibt, sodass $x(t) \in D$ für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$ gilt. Dazu konstruieren wir eine endliche Folge von Punkten $(t_j, x_j) \in [t_0, t_0 + a] \times [D \cap \bar{B}_r(x_0)]$, die den Graphen der Lösung approximieren sollen, wie folgt. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$. Der erste Punkt (t_0, x_0) ist der gegebene Anfangspunkt. Die weiteren Punkte werden nun induktiv definiert. Sei (t_j, x_j) bereits konstruiert. Aus (S) in diesem Punkt folgt, dass es $h_{j+1} > 0$ und $x_{j+1} \in D$ gibt mit

$$\mathrm{dist}(x_j + h_{j+1} f(t_j, x_j), D) = |x_j + h_{j+1} f(t_j, x_j) - x_{j+1}| \le \varepsilon h_{j+1}. \tag{7.2}$$

Wir wählen dieses $h_{j+1} \le \varepsilon$ maximal, sodass

$$|f(s, x) - f(t_j, x_j)| \le \varepsilon \text{ für alle } \ |s - t_j| \le h_{j+1},\ |x - x_j| \le h_{j+1}(M + 1) \tag{7.3}$$

erfüllt ist, und setzen $t_{j+1} := t_j + h_{j+1}$.
Nun ist nach (7.2) $|x_{k+1} - x_k| \le h_{k+1}(M + 1)$ für alle $k \in \{0, \ldots, j\}$ und daher

$$\begin{aligned}|x_{j+1} - x_0| \le \sum_{k=0}^{j} |x_{k+1} - x_k| &\le (M + 1) \sum_{k=0}^{j} h_{k+1} \\ &= (M + 1) \sum_{k=0}^{j} (t_{k+1} - t_k) \le a(M + 1) \le r,\end{aligned}$$

also auch $x_{j+1} \in \bar{B}_r(x_0) \cap D$, sofern $t_{j+1} \leq t_0 + a$ gilt.

Das Verfahren bricht ab, wenn $t_{j+1} \geq t_0 + a$ ist. Angenommen, es existieren unendlich viele t_j mit $t_j \leq t_0 + a$. Dann haben wir $t_j \nearrow t_* \leq t_0 + a$, und wegen

$$|x_{j+l} - x_j| \leq \sum_{k=0}^{l-1} |x_{j+k+1} - x_{j+k}| \leq (M+1)(t_{j+l} - t_j) \to 0,$$

auch $x_j \to x_* \in D \cap \bar{B}_r(x_0)$. Da f auf $[t_0, t_0 + a] \times [D \cap \bar{B}_r(x_0)]$ gleichmäßig stetig ist, gilt (7.3) mit einem gleichmäßigen $h_* > 0$, und (S) bzw. (7.3) ergeben eventuell nach Verkleinerung von h_*,

$$\operatorname{dist}(x_* + h_* f(t_*, x_*), D) \leq \varepsilon h_*/3$$

bzw.

$$|f(s,x) - f(t_j, x_j)| \leq \varepsilon/3 \text{ für alle } |s - t_j| \leq h_*,\ |x - x_j| \leq h_*(M+1).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(x_j + h_* f(t_j, x_j), D) &\leq \operatorname{dist}(x_* + h_* f(t_*, x_*), D) \\
&\qquad + h_* |f(t_j, x_j) - f(t_*, x_*)| + |x_j - x_*| \\
&\leq \varepsilon h_*/3 + \varepsilon h_*/3 + \varepsilon h_*/3 \\
&= \varepsilon h_*,
\end{aligned}$$

sofern $|x_j - x_*| \leq \varepsilon h_*/3$ und $|t_j - t_*| \leq h_*$ gilt, d.h. falls j groß genug ist. Für alle hinreichend großen j gilt daher $h_{j+1} \geq h_*$, denn h_{j+1} ist maximal. Dies impliziert aber $t_{j+1} \to \infty$ für $j \to \infty$, ein Widerspruch. Das Verfahren bricht also nach endlich vielen Schritten ab.

Wir definieren nun die Treppen $\bar{x}_\varepsilon(t) = x_j$ und $\bar{f}_\varepsilon(t) = f(t_j, x_j)$ für $t \in [t_j, t_{j+1})$, und den Spline $x_\varepsilon(t)$ als den durch diese Punktfolge definierten Polygonzug, also

$$x_\varepsilon(t) = \frac{t - t_j}{h_{j+1}} x_{j+1} + \frac{t_{j+1} - t}{h_{j+1}} x_j, \quad t_j \leq t < t_{j+1}.$$

Es gilt dann nach (7.2)

$$|\dot{x}_\varepsilon| = |x_{j+1} - x_j| / h_{j+1} \leq M + 1,$$

und

$$|x_\varepsilon(t) - x_j| \leq |x_{j+1} - x_j| \leq h_{j+1}(M+1) \leq \varepsilon(M+1), \quad t \in [t_j, t_{j+1}).$$

Für $t \in [t_j, t_{j+1})$ gilt ferner

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \bar{f}_\varepsilon(s) ds &= \sum_{k=0}^{j} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, x_k) ds - (t_{j+1} - t) f(t_j, x_j) \\
&= \sum_{k=0}^{j} f(t_k, x_k) h_{k+1} - (t_{j+1} - t) f(t_j, x_j),
\end{aligned}$$

also erhalten wir mit $r_k = x_{k+1} - x_k - h_{k+1} f(t_k, x_k)$ die Identität

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{f}_\varepsilon(s)ds + \sum_{k=0}^{j} r_k - \frac{t_{j+1} - t}{h_{j+1}}(x_{j+1} - x_j - h_{j+1} f(t_j, x_j)),$$

für $t \in [t_j, t_{j+1})$. Folglich gilt $|x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \bar{f}_\varepsilon(s)ds| \leq \varepsilon a$, wie man aus (7.2) leicht sieht. Die Funktionen x_{ε_k}, $\varepsilon_k = 1/k$, sind auf dem Intervall $[t_0, t_0 + a]$ gleichmäßig beschränkt und Lipschitz mit Konstante $M + 1$, also sind sie gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzéla-Ascoli besitzt die Folge x_{ε_k} eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $x_{\varepsilon_{k_m}} \to x$, mit einer stetigen D-wertigen Grenzfunktion $x(t)$. Die Treppenfunktionen $\bar{x}_{\varepsilon_{k_m}}(t)$ konvergieren ebenfalls gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $x(t)$, und da f auf der kompakten Menge $[t_0, t_0 + a] \times [D \cap \bar{B}_r(x_0)]$ gleichmäßig stetig ist, gilt außerdem $\bar{f}_{\varepsilon_{k_m}}(t) \to f(t, x(t))$ gleichmäßig. Also erhalten wir die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a],$$

und somit ist $x(t)$ eine Lösung von (7.1), mit $x(t) \in D$ für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$. $\square$

Bemerkungen 7.1.5.

1. Man beachte, dass der Beweis dieses Satzes f nur auf $\mathbb{R} \times D$ verwendet. Im Fortsetzungssatz gilt dann die Alternative, dass $x(t)$ nach rechts global existiert oder einen blow up hat. Insbesondere existiert sie global, falls D selbst beschränkt ist. Man beachte auch, dass die Menge D klein sein kann, in dem Sinne, dass sie keine inneren Punkte besitzt. So kann $D = \Sigma$ z.B. eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit sein, darauf gehen wir in Kapitel 13 näher ein.

2. Sind die Lösungen von (7.1) nicht eindeutig, so ist die Subtangentialbedingung (S) äquivalent zur Existenz *mindestens* einer Lösung in D. Diese Eigenschaft von D nennt man **positiv schwach invariant**. Es kann aber Lösungen geben, die in D starten, aber D sofort verlassen. Ein Standardbeispiel dafür ist $\dot{x} = -3x^{2/3}$ mit $D = \mathbb{R}_+$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$; vgl. Abschnitt 1.5.

7.2 Invarianzkriterien

Bevor wir zu Anwendungen von Satz 7.1.4 kommen, wollen wir erneut die Subtangentialbedingung (S) diskutieren.

Satz 7.2.1. *Sei $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und gelte $\nabla\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \phi^{-1}(a)$, d.h. a ist regulärer Wert für ϕ. Dann sind äquivalent:*

1. *$D = \phi^{-1}((-\infty, a])$ ist positiv invariant für* (7.1).

2. $(f(t,x)|\nabla\phi(x)) \leq 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$, $x \in \phi^{-1}(a) = \partial D$.

Beweis. Es gelte 1. Seien $t \in \mathbb{R}$, $x \in \partial D$ fixiert und sei $z = f(t,x)$. Nach Satz 7.1.4 gilt für f und D die Subtangentialbedingung (S), d.h. es existiert eine Funktion $p(h) \in D$, sodass für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ ein $\delta > 0$ existiert, mit $|x + hz - p(h)|_2 \leq \varepsilon h$ für alle $h \in (0,\delta]$. Da ϕ nach Voraussetzung C^1 ist, existiert zu $\varepsilon \in (0,1)$ ein $\rho > 0$, sodass

$$|\phi(p(h)) - \phi(x) - (\nabla\phi(x)|p(h) - x)| \leq \varepsilon|p(h) - x|_2$$

gilt, falls $|p(h) - x|_2 \leq \rho$. Wegen $|p(h) - x|_2 \leq (1 + |z|_2)h$ nehmen wir im Weiteren $0 < h \leq \min\{\delta, \rho/(1 + |z|_2)\}$ an. Nun ist $\phi(x) = a$ und $\phi(p(h)) \leq a$. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\nabla\phi(x)|z) &= \left(\nabla\phi(x)\middle|z - \frac{p(h) - x}{h}\right) + \left(\nabla\phi(x)\middle|\frac{p(h) - x}{h}\right)\\
&\leq |\nabla\phi(x)|_2\varepsilon + \frac{1}{h}|\phi(p(h)) - \phi(x) - (\nabla\phi(x)|p(h) - x)|\\
&\leq |\nabla\phi(x)|_2\varepsilon + \varepsilon(1 + |z|_2)\\
&\leq C\varepsilon,
\end{aligned}$$

für alle h mit $0 < h \leq \min\{\delta, \rho/(1 + |z|_2)\}$. Da $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Sei nun 2. erfüllt und $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ fixiert. Wir betrachten die gestörte DGL

$$\dot{x} = f(t,x) - \varepsilon\nabla\phi(x).$$

Nach dem *Satz von Peano* existiert mindestens eine Lösung $x_\varepsilon(t)$ mit $x_\varepsilon(t_0) = x_0$. Sei $\varphi(t) = \phi(x_\varepsilon(t))$; es gilt $\varphi(t_0) = \phi(x_0) \leq a$, sowie

$$\dot{\varphi}(t) = (\nabla\phi(x_\varepsilon(t))|\dot{x}_\varepsilon(t)) = (\nabla\phi(x_\varepsilon(t))|f(t, x_\varepsilon(t))) - \varepsilon|\nabla\phi(x_\varepsilon(t))|^2.$$

Angenommen, $x_\varepsilon(t) \notin D$ für ein $t > t_0$; dann existiert ein $t_1 \geq t_0$ mit $x_\varepsilon(t) \in D$ für $t \leq t_1$, $x_\varepsilon(t_1) \in \partial D$. Hier gilt nun

$$\dot{\varphi}(t_1) \leq -\varepsilon|\nabla\phi(x_\varepsilon(t_1))|_2^2 < 0,$$

da a regulärer Wert von ϕ ist, also mit

$$\dot{\varphi}(t_1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_1 - h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{a - \varphi(t_1 - h)}{h} \geq 0$$

ein Widerspruch. Daher bleibt $x_\varepsilon(t)$ solange in D, wie die Lösung existiert. Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $x_\varepsilon(t)$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen gegen $x(t)$, die Lösung von (7.1). Daher ist D positiv invariant. □

Korollar 7.2.2. *Seien* $\phi_1, \ldots, \phi_k \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *und* $a_j \in \mathbb{R}$ *regulärer Wert von* ϕ_j, $j = 1, \ldots, k$. *Gilt dann*

$$(f(t,x)|\nabla\phi_j(x)) \leq 0 \quad \textit{für alle } x \in \phi_j^{-1}(a_j),\ j = 1, \ldots, k,\ t \geq 0,$$

so ist

$$D = \bigcap_{j=1}^{k} \phi_j^{-1}((-\infty, a_j])$$

positiv invariant.

Beweis. Nach Satz 7.2.1 ist $D_j = \phi_j^{-1}((-\infty, a_j])$ positiv invariant bzgl. (7.1); damit ist auch $D = \bigcap_{j=1}^{k} D_j$ positiv invariant. □

7.3 Konvexe invariante Mengen

In diesem Abschnitt betrachten wir abgeschlossene Mengen, die positiv invariant für (7.1) sind, unter der Zusatzannahme der Konvexität. Zur Erinnerung: $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit $x, y \in D$ auch die Verbindungsstrecke zwischen x und y zu D gehört, also

$$x, y \in D \implies tx + (1-t)y \in D \quad \text{für alle } t \in (0,1).$$

Im Folgenden benötigen wir einige Eigenschaften konvexer Mengen, insbesondere die Existenz der **metrischen Projektion** auf D.

Lemma 7.3.1. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Dann existiert zu jedem $u \in \mathbb{R}^n$ genau ein $Pu \in D$ mit $\mathrm{dist}(u, D) = |u - Pu|_2$. $P : \mathbb{R}^n \to D$ ist* **nichtexpansiv**, *d.h. Lipschitz mit Konstante 1 und es gilt*

$$(u - Pu|v - Pu) \leq 0 \quad \textit{für alle } u \in \mathbb{R}^n,\ v \in D. \tag{7.4}$$

Ferner ist $u - Pu \in \mathcal{N}(Pu)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$, die Funktion $\phi(u) := \frac{1}{2}\mathrm{dist}(u, D)^2$ ist stetig differenzierbar, und es gilt

$$\nabla\phi(u) = u - Pu, \qquad \textit{für alle } \ u \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Sei $u \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $u \in D$, so setzen wir $Pu = u$. Sei nun $u \notin D$. Dann existiert eine Folge $x_n \in D$ mit

$$|u - x_n|_2 \to \mathrm{dist}(u, D);$$

da x_n beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $x_{n_k} \to x \in D$ und es gilt $\mathrm{dist}(u, D) = |u - x|_2$. Wir zeigen, dass x dadurch eindeutig bestimmt ist. Dazu sei $y \in D$ mit $\mathrm{dist}(u, D) = |u - y|_2$. Es gilt dann aufgrund der Konvexität von D

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(u, D)^2 \leq \left|u - \frac{x+y}{2}\right|_2^2 &= \frac{|u-x|_2^2}{4} + \frac{|u-y|_2^2}{4} + \frac{1}{2}\,(u - x|u - y) \\ &\leq \frac{1}{4}(|u-x|_2 + |u-y|_2)^2 = \mathrm{dist}(u, D)^2,\end{aligned}$$

also $|u - \frac{x+y}{2}|_2 = \mathrm{dist}(u, D)$. Es folgt $(u - x|u - y) = |u - x|_2|u - y|_2$ und daher $u - x = u - y$, also $x = y$, denn $|u - x|_2 = |u - y|_2$. Setzt man nun $Pu = x$, so ist $P : \mathbb{R}^n \to D$ wohldefiniert.

Wir zeigen (7.4). Es gilt für alle $w \in D$

$$\begin{aligned}|u - Pu|_2^2 = \mathrm{dist}(u, D)^2 \leq |u - w|_2^2 &= |(u - Pu) + (Pu - w)|_2^2 \\ &= |u - Pu|_2^2 + 2(u - Pu|Pu - w) + |Pu - w|_2^2,\end{aligned}$$

folglich

$$(u - Pu|w - Pu) \leq \frac{1}{2}\ |w - Pu|_2^2,$$

für alle $w \in D$. Mit $v \in D$ ist auch $w = tv + (1 - t)Pu \in D,\ t \in (0, 1)$, da D konvex ist, und es gilt $w - Pu = t(v - Pu)$. Nach Division durch t erhält man

$$(u - Pu|v - Pu) \leq \frac{t}{2}\ |v - Pu|_2^2.$$

Für $t \to 0_+$ ergibt sich die Relation (7.4).

Als nächstes zeigen wir, dass P nichtexpansiv ist. Dazu seien $u, y \in \mathbb{R}^n$; setzt man $v = Py$ in (7.4), so erhält man

$$(u - Pu|Py - Pu) \leq 0,$$

also

$$\begin{aligned}|Py - Pu|_2^2 &\leq (Py - u|Py - Pu) = \underbrace{(y - Py|Pu - Py)}_{\leq 0 \text{ nach } (7.4)} + (y - u|Py - Pu) \\ &\leq |y - u|_2|Py - Pu|_2,\end{aligned}$$

woraus $|Py - Pu|_2 \leq |y - u|_2$ für alle $u, y \in \mathbb{R}^n$ folgt.

Die Differenzierbarkeit von ϕ sieht man folgendermaßen. Es ist zum Einen

$$\begin{aligned}&\phi(x + h) - \phi(x) - (x - Px|h) \\ &\qquad = \frac{1}{2}|h + Px - P(x + h)|_2^2 + (x - Px|Px - P(x + h)) \geq 0,\end{aligned}$$

und zum Anderen

$$\begin{aligned}&\phi(x + h) - \phi(x) - (x - Px|h) \\ &= \left[|h|_2^2 - |P(x + h) - Px|_2^2\right]/2 + (x + h - P(x + h)|Px - P(x + h)) \leq \frac{|h|_2^2}{2},\end{aligned}$$

wie eine kurze Rechnung und (7.4) zeigen. Damit sind alle Behauptungen des Lemmas bewiesen. $\square$

Bemerkungen 7.3.2.

1. (7.4) ist sogar charakteristisch für die metrische Projektion P, denn es gilt die Implikation: Für $x \in D$ und $u \in \mathbb{R}^n$ mit $(u-x|v-x) \leq 0$ für alle $v \in D$, folgt $x = Pu$. Es gelte also (7.4). Dann ist
$$|u-x|_2^2 = (u-x|u-x) = (u-x|v-x) + (u-x|u-v) \leq |u-x|_2 |v-u|_2,$$
also $|u-x|_2 \leq |u-v|_2$, für alle $v \in D$, falls $u \neq x$ gilt. Daraus folgt $x = Pu$. Für $u = x \in D$ ist $Pu = u = x$.

2. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex, dann ist $\mathcal{N}(x)$ für jedes $x \in \partial D$ nichtleer. Dies sieht man folgendermaßen. Sei $x \in \partial D$. Wähle eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}^n \setminus D$ mit $x_n \to x$. Dann gilt
$$\nu_n := \frac{x_n - Px_n}{|x_n - Px_n|_2} \in \mathcal{N}(Px_n).$$
Die Folge (ν_n) besitzt eine konvergente Teilfolge $\nu_{n_k} \to \nu$ und $\nu \in \mathcal{N}(x)$. Diese äußere Normale erfüllt $(z|\nu) \leq (x|\nu)$ für alle $z \in D$; sie definiert damit eine Stützhyperebene an D in $x \in \partial D$.

Für allgemeinere abgeschlossene D ist die Umkehrung von Lemma 7.1.3 leider falsch, da es mitunter nicht genügend viele äußere Normalen gibt. Für konvexe Mengen jedoch ist sie richtig, wie wir nun zeigen werden.

Lemma 7.3.3. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex und sei $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \partial D$. Dann sind äquivalent:*

1. $\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \mathrm{dist}(x+hz, D) = 0$*;*
2. $(z|y) \leq 0$ *für alle $y \in \mathcal{N}(x)$.*

Beweis. Wir haben nur noch 2. $\Rightarrow$ 1. zu zeigen. Gelte also 2., aber wir nehmen an, 1. sei falsch. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $h_n \to 0_+$ mit
$$\varepsilon_0 h_n \leq \mathrm{dist}(x+h_n z, D) \leq h_n |z|_2.$$
Es folgt
$$\varepsilon_0 \leq \left| \frac{x - P(x+h_n z)}{h_n} + z \right| \leq |z|_2;$$
daher existiert eine Teilfolge, welche wir wieder mit h_n bezeichnen, derart, dass $h_n \to 0_+$ und
$$y_n := \frac{x - P(x+h_n z)}{h_n} + z \to y$$
gilt; insbesondere ist $y \neq 0$. Dieses y ist eine äußere Normale an D in x, denn mit (7.4) erhalten wir für $v \in D$
$$0 \leq (y_n|P(x+h_n z) - v) \to (y|x-v),$$

also $(y|x-v) \geq 0$, und daher

$$|x+y-v|_2^2 = |x-v|_2^2 + 2(x-v|y) + |y|_2^2 \geq |y|_2^2, \quad \text{für alle } v \in D,$$

d.h. $B_{|y|_2}(x+y) \cap D = \emptyset$, also $y \in \mathcal{N}(x)$. Außerdem ergibt (7.4) mit $v = x$ und $u = x + h_n z$ die Ungleichung

$$(x + h_n z - P(x + h_n z)|x - P(x + h_n z)) \leq 0,$$

also nach Division durch h_n^2 und mit $n \to \infty$

$$(y|y-z) \leq 0, \quad \text{d.h.} \quad (z|y) \geq |y|_2^2 > 0,$$

was einen Widerspruch zu 2. bedeutet. □

Als direkte Folgerung aus Satz 7.1.4 und Lemma 7.3.3 erhalten wir den

Satz 7.3.4. *Sei $D \subset G$ abgeschlossen und konvex. Dann sind äquivalent:*

1. *D ist positiv invariant für* (7.1)*;*
2. $(f(t,x)|y) \leq 0$ *für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in \partial D$, $y \in \mathcal{N}(x)$.*

Ist $D \subset G$ abgeschlossen, positiv invariant und beschränkt, so existieren alle in D startenden Lösungen global nach rechts; das ist eine direkte Konsequenz des Satzes über die Fortsetzbarkeit von Lösungen. Ist D außerdem konvex, so können wir noch mehr sagen.

Satz 7.3.5. *Sei $D \subset G$ abgeschlossen, beschränkt und konvex und sei D positiv invariant für* (7.1)*. Dann gilt:*

1. *Ist f τ-periodisch in t, so existiert mindestens eine τ-periodische Lösung $x_*(t)$ von* (7.1) *in D.*
2. *Ist f autonom, so besitzt* (7.1) *mindestens ein Equilibrium x_* in D.*

Beweis. 1. Definiere eine Abbildung $T : D \to D$ durch $Tx_0 = x(\tau; 0, x_0)$; da D positiv invariant ist, gilt $TD \subset D$. T ist stetig nach dem Satz über die stetige Abhängigkeit. Da D abgeschlossen, beschränkt und konvex ist, liefert der Fixpunktsatz von Brouwer einen Fixpunkt $x_0 \in D$ von T, d.h. $Tx_0 = x_0$. Die Lösung $x(t; 0, x_0)$ erfüllt daher $x_0 = x(\tau; 0, x_0)$, also gilt auch $x(t; 0, x_0) = x(t + \tau; 0, x_0)$, da f τ-periodisch in t ist. Damit ist $x(t; 0, x_0)$ periodische Lösung (7.1).

2. Setze $\tau_n = 2^{-n}$; da f autonom ist, ist f insbesondere τ_n-periodisch, nach (i) existieren daher τ_n-periodische Lösungen $x_n(t)$ von (7.1) in D. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1], D)$ ist beschränkt, da D beschränkt ist; sie ist aber auch gleichgradig stetig, da $\dot{x}_n = f(x_n)$ und f auf D beschränkt ist. Der Satz von Arzéla-Ascoli ergibt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x_\infty$; es ist $\dot{x}_\infty = f(x_\infty)$ und $x_\infty \in D$, wie man anhand der äquivalenten Integralgleichung sieht. Wir zeigen, dass $x_\infty(t)$ sogar konstant ist. Dazu muss man nur beachten, dass jedes $x_n(t)$

τ_m-periodisch für $n \geq m$ ist; mit $n \to \infty$ folgt daher: $x_\infty(t)$ ist τ_m-periodisch für alle $m \in \mathbb{N}$. Das heißt aber

$$x_\infty(0) = x_\infty(k\tau_m) \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, 2^m\},\ m \in \mathbb{N};$$

die Menge $\{k2^{-m} : k \in \{0, \dots, 2^m\},\ m \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $[0,1]$, folglich muss $x_\infty(t)$ konstant sein. □

7.4 Positiv homogene autonome Systeme

Im Abschnitt 6.6 hatten wir ein Modell zur Paarbildung kennengelernt, das auf ein homogenes System führte. Hier wollen wir solche *positiv homogenen Systeme* allgemein untersuchen. Dazu betrachten wir das autonome Problem

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \tag{7.5}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und quasipositiv sei (vgl. Abschnitt 4.2). Wir nehmen ferner wieder Eindeutigkeit der Lösungen nach rechts an. Dann ist der Standardkegel $K := \mathbb{R}^n_+$ positiv invariant für (7.5). Die Funktion f heißt **positiv homogen**, wenn $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ für alle $\alpha \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n_+$ gilt. Insbesondere ist dann $f(0) = 0$, also 0 ein Equilibrium für (7.5), das triviale Equilibrium.

Homogene Differentialgleichungen erlauben nichttriviale **Exponentiallösungen** der Form $x_*(t) = e^{\lambda_* t} z_*$, mit $\lambda_* \in \mathbb{R}$ und $z_* \in K$, $z_* \neq 0$. Denn aufgrund der positiven Homogenität von f gilt für ein solches $x_*(t)$

$$\lambda_* e^{\lambda_* t} z_* = \dot{x}_*(t) = f(x_*(t)) = f(e^{\lambda_* t} z_*) = e^{\lambda_* t} f(z_*),$$

also ist $x_*(t)$ genau dann eine Lösung von (7.5), wenn das Paar (z_*, λ_*) Lösung des *nichtlinearen Eigenwertproblems*

$$f(z_*) = \lambda_* z_* \tag{7.6}$$

ist. Aufgrund der positiven Homogenität ist mit (z_*, λ_*) auch jedes $(\alpha z_*, \lambda_*)$, $\alpha \geq 0$ eine Lösung von (7.6). Daher ist es naheliegend eine Normierung einzuführen. Dazu sei $\mathsf{e} = [1, 1, \dots, 1]^\mathsf{T}$. Ist nun $x(t)$ eine nichttriviale Lösung von (7.5) in K, so gilt $\rho(t) := (x(t)|\mathsf{e}) > 0$, und damit ist $z(t) := x(t)/\rho(t)$ wohldefiniert. Die Zerlegung $x(t) = \rho(t) z(t)$ ergibt

$$\dot{\rho}(t) z(t) + \rho(t) \dot{z}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(\rho(t) z(t)) = \rho(t) f(z(t)),$$

aufgrund der Homogenität von f. Ferner gilt

$$\dot{\rho}(t) = (\dot{x}(t)|\mathsf{e}) = (f(x(t))|\mathsf{e}) = (f(\rho(t) z(t))|\mathsf{e}) = \rho(t)(f(z(t))|\mathsf{e}),$$

folglich

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) - (f(z(t))|\mathsf{e}) z(t),$$

also ist z von ρ entkoppelt. Die Funktion ρ ergibt sich durch Integration zu

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\{\int_0^t (f(z(s))|\mathsf{e})ds\},$$

wenn $z(t)$ bekannt ist. Daher ist das System (7.5) auf $K \setminus \{0\}$ mit positiv homogenem f äquivalent zu

$$\dot{z} = f(z) - (f(z)|\mathsf{e})z, \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0, \tag{7.7}$$

mit der Nebenbedingung $(z(t)|\mathsf{e}) = 1$. Setzt man nun $\mathbb{D} := \{z \in K : (z|\mathsf{e}) = 1\}$, das ist das *Standardsimplex* im $\mathbb{R}^n$, so ist $\mathbb{D} \subset K$ abgeschlossen, konvex und beschränkt, sowie positiv invariant für (7.7). Nach Satz 7.3.5 besitzt das System (7.7) mindestens ein Equilibrium z_* in $\mathbb{D}$. Das bedeutet aber $f(z_*) = (f(z_*)|\mathsf{e})z_*$, also ist (z_*, λ_*) eine nichttriviale Lösung des Eigenwertproblems (7.6) mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_* := (f(z_*)|\mathsf{e})$.

Satz 7.4.1. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, quasipositiv und positiv homogen, und seien die Lösungen von* (7.5) *eindeutig nach rechts. Dann sind* (7.5) *auf $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ und* (7.7) *auf dem Standardsimplex $\mathbb{D}$ in $\mathbb{R}^n$ äquivalent, und zwar mittels der Transformation*

$$x = \rho z, \quad (z|\mathsf{e}) = 1.$$

Das System (7.7) *besitzt mindestens ein Equilibrium $z_* \in \mathbb{D}$, das nichtlineare Eigenwertproblem die Lösung (z_*, λ_*) mit $\lambda_* = (f(z_*)|\mathsf{e})$, und* (7.5) *hat die Schar $\alpha e^{\lambda_* t} z_*$ ($\alpha > 0$) nichttrivialer Exponentiallösungen.*

Ist ferner f positiv, *gilt also $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^n_+$, so ist $\lambda_* \geq 0$, und ist f* strikt positiv, *gilt also $f(\mathbb{D}) \subset \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$, so sind $\lambda_* > 0$ und $z_* \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$.*

Dieses Resultat ist ohne weitere Voraussetzungen auf das (nichtlineare!) Paarbildungsmodell aus Abschnitt 6.6 anwendbar. Man erhält damit exponentielle, sog. *persistente* Lösungen für dieses Modell.

Eine weitere Bemerkung ist die Folgende. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ positiv homogen. Dann gilt für alle $\lambda > 0$,

$$f'(\lambda x)x = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda x) = \frac{d}{d\lambda}[\lambda f(x)] = f(x).$$

Mit $\lambda \to 0_+$ folgt damit $f(x) = f'(0)x$, d.h. f ist linear, und wenn f quasipositiv ist, dann auch $f'(0)$. Dies zeigt, dass wir hier nicht sehr weit vom linearen Fall entfernt sind.

Aber selbst im Spezialfall $f(x) = Ax$, mit einer **quasipositiven** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, ist das Resultat interessant. Satz 7.4.1 liefert uns dann nämlich einen positiven Eigenvektor $z_* \in \mathbb{R}^n_+$ von A zum reellen Eigenwert $\lambda_* = (Az_*|\mathsf{e})$. Ist A positiv, d.h. $a_{ij} \geq 0$, dann ist $\lambda_* \geq 0$, und ist A strikt positiv, d.h. $a_{ij} > 0$, dann sind $\lambda_* > 0$ und $z_* \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$. Dies ist ein zentraler Teil des Satzes von Perron und Frobenius, den wir nun formulieren wollen. Dazu benötigen wir den Begriff der Irreduzibilität.

Definition 7.4.2. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt* **reduzibel***, falls es eine Permutationsmatrix P gibt mit*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{bmatrix}.$$

Andernfalls nennt man A **irreduzibel**.

Man überlegt sich leicht, dass A genau dann irreduzibel ist, wenn es zu jeder echten Teilmenge I von $\{1,\dots,n\}$ Indizes $i \in I$ und $k \notin I$ gibt mit $a_{ik} \neq 0$. Damit ist klar, dass A genau dann irreduzibel ist, wenn die transponierte Matrix A^{T} diese Eigenschaft hat. Eine reduzible Matrix lässt sich mittels einer Permutationsmatrix P auf Block-Dreiecksform bringen, wobei die Blöcke auf der Hauptdiagonalen irreduzibel sind.

Satz 7.4.3 (Perron-Frobenius).

1. (a) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv. Dann ist $\lambda = r(A)$ Eigenwert von A mit einem positiven Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n_+$.*

   (b) *Ist A positiv und irreduzibel, dann ist v strikt positiv, also $v \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, $r(A)$ algebraisch einfach, und kein weiterer Eigenwert besitzt einen positiven Eigenvektor.*

   (c) *Ist A strikt positiv, dann gilt $|\lambda| < r(A)$ für alle $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{r(A)\}$.*

2. (a) *Sei A quasipositiv. Dann ist $\lambda = s(A)$ Eigenwert von A mit einem positiven Eigenvektor v.*

   (b) *Ist A quasipositiv und irreduzibel, dann ist v strikt positiv, $s(A)$ algebraisch einfach, und kein weiterer Eigenwert besitzt einen positiven Eigenvektor. Ferner gilt* $\operatorname{Re}\lambda < s(A)$ *für alle $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{s(A)\}$.*

Beweis. 1.(a) Für $s > r = r(A)$ gilt $(s-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{-(k+1)}A^k$, also ist $(s-A)^{-1}$ positiv. Angenommen $r \notin \sigma(A)$; dann ist $(z-A)^{-1}$ holomorph in einer Umgebung von r, also stetig, daher existiert $(r-A)^{-1}$ und ist positiv. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, $|\mu| = r$ und sei $w \neq 0$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Definiere $y \in \mathbb{R}^n_+$ mittels der Einträge $y_i = |w_i|$; es gilt dann $ry_i = |\mu w_i| = |(Aw)_i| \le (Ay)_i$, also ist $(A-r)y \ge 0$. Durch Anwendung von $(r-A)^{-1}$ folgt $0 \le y \le 0$, also $y = 0$ im Widerspruch zur Annahme $w \neq 0$. Daher ist r Eigenwert von A.

Um zu sehen, dass es zu r einen positiven Eigenvektor gibt, beachte man, dass die Resolvente $(s-A)^{-1}$ eine rationale Matrixfunktion ist. $s = r$ ist ein Pol für $(s-A)^{-1}$ mit der Ordnung $l \ge 1$, also haben wir

$$R := \lim_{s\to r_+} (s-r)^l (s-A)^{-1} \ge 0, \quad R \neq 0,$$

da $(s-A)^{-1}$ für $s > r$ positiv ist, und es gilt $AR = rR$, denn $A(s-A)^{-1} = s(s-A)^{-1} - I$. Wähle ein $w \in \mathbb{R}^n_+$ mit $v := Rw \neq 0$, also $v \ge 0$. Dann gilt $Av = rv$ und v ist positiv.

1.(b) Ist A irreduzibel und v positiver Eigenvektor zum Eigenwert $r := r(A)$, so ist v strikt positiv. Denn ist $I := \{i : v_i = 0\} \neq \emptyset$, so gibt es aufgrund der Irreduzibilität von A Indizes $i \in I$ und $j \notin I$ mit $a_{ij} > 0$. Folglich erhält man den Widerspruch

$$0 = rv_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \geq a_{ij} v_j > 0,$$

also ist $I = \emptyset$, d.h. v ist strikt positiv. Da A^{T} ebenfalls irreduzibel ist, gibt es einen strikt positiven Eigenvektor v^* von A^{T} zum Eigenwert r. Insbesondere ist $(v|v^*) > 0$, also kann man $(v|v^*) = 1$ annehmen. Damit steht v_* senkrecht auf allen Eigenräumen $E(\mu)$ von A, $\mu \neq r$, und so kann es keine weiteren positiven Eigenvektoren zu Eigenwerten $\mu \neq r$ geben.

Um zu zeigen, dass r einfach ist, sei $Aw = rw$ ein weiterer Eigenvektor; durch Übergang zu $w - (w|v^*)v$ kann man $(w|v^*) = 0$ annehmen, also ist $w \notin \mathbb{R}^n_+$. Da v strikt positiv ist, gilt $w + tv \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ für große $t \in \mathbb{R}_+$, also gibt es ein $t_0 > 0$ mit $w_0 := w + t_0 v \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Ist $w_0 \neq 0$ so ist w_0 positiver Eigenvektor von A, und somit $w_0 \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$, was aber nicht sein kann, da mindestens eine Komponente von w_0 Null sein muss. Also ist $w_0 = 0$, und daher sind w und v linear abhängig. Somit ist r geometrisch einfach. Sei nun $Aw - rw = v$; Skalarmultiplikation mit v^* ergibt dann den Widerspruch

$$1 = (v|v^*) = (Aw - rw|v^*) = (w|A^{\mathsf{T}} v^* - rv^*) = 0,$$

also ist r halbeinfach und daher algebraisch einfach.

1.(c) Sei A strikt positiv und sei $Aw = \lambda w$, $w \neq 0$, $\lambda \neq r$. Definiere den Vektor y durch $y_i = |w_i|$. Dann folgt

$$|\lambda| y_i = |\lambda w_i| = |\sum_{k=1}^{n} a_{ik} w_k| < \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = (Ay)_i,$$

da $a_{ij} > 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gilt, und w kein Vielfaches eines positiven Vektors ist. Durch Multiplikation mit v_i^* und Summation über i ergibt sich

$$|\lambda|(y|v^*) < (Ay|v^*) = r(y|v^*),$$

also $|\lambda| < r$, da $w \neq 0$ also y positiv und v^* strikt positiv ist.

2. Wir kennen schon die Identität $r(e^A) = e^{s(A)}$ aus Übung 3.10., die für alle Matrizen A gilt. Ferner folgt aus Übung 7.13., dass e^A positiv ist, falls A quasipositiv ist, und e^A ist strikt positiv, falls A außerdem irreduzibel ist. Damit kann man 1. auf e^A anwenden, und alle Behauptungen in 2. folgen aus dem Satz 11.1.1 über den Funktionalkalkül, den wir in Kapitel 11 beweisen. $\square$

7.5 Differentialungleichungen und Quasimonotonie

Als weitere Anwendung der Invarianz abgeschlossener Mengen betrachten wir Differentialungleichungen der Form

$$\begin{cases} \dot{x}_i - f_i(t,x) \le \dot{y}_i - f_i(t,y), \\ x_i(t_0) \le y_i(t_0), \end{cases} \qquad t \in J = [t_0, t_1],\ i = 1, \ldots, n. \tag{7.8}$$

Unter welcher Voraussetzung an $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$x_i(t) \le y_i(t), \quad t \in J,\ i = 1, \ldots, n\ ?$$

Um zu sehen, was diese Frage mit Invarianz zu tun hat, setzen wir $u(t) = y(t) - x(t)$, $t \in J$; es ist dann $u_i(t_0) \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, also $u(t_0) \in \mathbb{R}^n_+$. Wir möchten $u(t) \in \mathbb{R}^n_+$ für alle $t \in J$ zeigen, d.h. die Invarianz von $\mathbb{R}^n_+$ bzgl. einer noch zu definierenden DGL für $u(t)$. Nun ist

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = \dot{y}(t) - \dot{x}(t) &= f(t, y(t)) - f(t, x(t)) \\ &\quad + [\dot{y}(t) - f(t, y(t)) - (\dot{x}(t) - f(t, x(t)))] \\ &= f(t, u(t) + x(t)) - f(t, x(t)) + d(t) =: g(t, u(t)), \end{aligned}$$

wobei

$$d(t) = \dot{y}(t) - f(t, y(t)) - (\dot{x}(t) - f(t, x(t))) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ für alle } t \in J$$

gilt. Ist also $\mathbb{R}^n_+$ positiv invariant für $\dot{u} = g(t,u)$, so folgt $u(t) \in \mathbb{R}^n_+$, für alle $t \in J$. Nach dem Positivitätskriterium ist $\mathbb{R}^n_+$ positiv invariant für diese Gleichung, falls $g_i(t,u) \ge 0$ für alle $u \ge 0$ mit $u_i = 0$ gilt. Dabei beachte man, dass die Lösungen von $\dot{u} = g(t,u)$ eindeutig sind, falls f lokal Lipschitz in x ist, oder allgemeiner die Eindeutigkeitsbedingung aus Satz 6.5.1 erfüllt. Da $d_i(t) \ge 0$ ist, werden wir daher auf die folgende Definition geführt.

Definition 7.5.1. *Sei $f : J \times G \to \mathbb{R}^n$. Die Funktion f heißt* **quasimonoton** *(wachsend), falls für alle $t \in J$, $x, y \in G$, $i = 1, \ldots, n$ gilt*

$$(QM) \quad x \le y,\ x_i = y_i \implies f_i(t,x) \le f_i(t,y).$$

Beispiele. $f(t,x) = A(t)x$ mit $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist quasimonoton, falls $a_{ij}(t) \ge 0$ für alle $i \ne j$ gilt, also $A(t)$ quasipositiv ist. Ist f stetig differenzierbar in x, so ist f genau dann quasimonoton, wenn die Matrix $\partial_x f(t,x)$ in jedem Punkt (t,x) quasipositiv ist. Für $n = 1$ ist *jedes* f quasimonoton. In Worten: f ist quasimonoton, wenn jede Komponentenfunktion f_i in allen x_j mit $j \ne i$ monoton wachsend ist.

Fassen wir unser Ergebnis zusammen im folgenden

Satz 7.5.2. *Sei $f : [t_0, t_1] \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig und quasimonoton, und sei die Eindeutigkeitsbedingung aus Satz* 6.5.1 *erfüllt. Seien $x, y : [t_0, t_1] \to G$ stetig differenzierbar und gelte*

$$\begin{array}{r} \dot{x}_i(t) - f_i(t, x(t)) \leq \dot{y}_i(t) - f_i(t, y(t)), \\ x_i(t_0) \leq y_i(t_0), \end{array} \quad t \in [t_0, t_1],\ i = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt $\quad x_i(t) \leq y_i(t) \quad$ *für alle* $t \in [t_0, t_1]$, $i = 1, \ldots, n$.

In vielen Fällen ist es angemessen, andere Ordnungen auf $\mathbb{R}^n$ als die Standardordnung zu verwenden. Es ist nicht schwer, das Analogon von Satz 7.5.2 zu formulieren, indem man Invarianz allgemeiner Kegel betrachtet.

Definition 7.5.3. *Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **Kegel**, *wenn K abgeschlossen, konvex und positiv homogen (d.h. $\lambda K \subset K$ für alle $\lambda \geq 0$) ist. Ein Vektor $v \in K$, $v \neq 0$ wird* **positiv** *genannt. Ein Kegel K heißt* **echt**, *wenn außerdem $K \cap (-K) = \{0\}$ gilt. Ist K ein Kegel, so heißt*

$$K^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n : (x|x^*) \geq 0, \quad \textit{für alle} \ \ x \in K\}$$

der zu K **duale Kegel**.

Der duale Kegel ist tatsächlich ein Kegel, wie man leicht nachprüft. Man beachte, dass $x \in K$ genau dann gilt, wenn $(x|x^*) \geq 0$ für alle $x^* \in K^*$ erfüllt ist; insbesondere ist $K^{**} = K$. Dies sieht man z.B. folgendermaßen: Sei P die metrische Projektion auf K, und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x|x^*) \geq 0$ für alle $x^* \in K^*$. Dann gilt nach Lemma 7.3.1 $(x - Px|k) \leq (x - Px|Px)$ für alle $k \in K$. Setzt man $k = \tau v$ mit $v \in K$ und schickt $\tau \to \infty$, so erhält man $(x - Px|v) \leq 0$ für alle $v \in K$, also $Px - x \in K^*$, und andererseits gilt mit $k = 0$ die Ungleichung $(x - Px|Px) \geq 0$. Es folgt $(Px - x|Px - x) = (Px - x|Px) - (Px - x|x) \leq 0$, also $x = Px \in K$.

Sei K ein Kegel im $\mathbb{R}^n$; mittels

$$x \overset{K}{\leq} y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K$$

wird auf $\mathbb{R}^n$ eine teilweise Ordnung definiert mit den Eigenschaften

(α) $x \overset{K}{\leq} y \quad \text{und} \quad y \overset{K}{\leq} z \quad \Longrightarrow \quad x \overset{K}{\leq} z$ (Transitivität)

(β) $\alpha \geq 0,\ x \overset{K}{\leq} y \quad \Longrightarrow \quad \alpha x \overset{K}{\leq} \alpha y$ (Homogenität)

(γ) $x \overset{K}{\leq} y,\ z \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad x + z \overset{K}{\leq} y + z$ (Additivität);

(δ) $x_n \overset{K}{\leq} y_n,\ x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow x \overset{K}{\leq} y$ (Abgeschlossenheit);

ist K außerdem echt, so gilt auch

(ϵ) $x \overset{K}{\leq} y \quad \text{und} \quad y \overset{K}{\leq} x \quad \Longrightarrow \quad x = y$ (Symmetrie).

Umgekehrt überlegt man sich auch leicht, dass eine teilweise Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}^n$ mittels $K := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ einen Kegel definiert, falls $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ gelten; (ϵ) ist dann äquivalent zur Echtheit des Kegels. Die Bedeutung des dualen Kegels klärt

Lemma 7.5.4. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Dann gilt für $x \in \partial K$:*

$$\mathcal{N}(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : -z \in K^* \text{ und } (x|z) = 0\}.$$

Insbesondere ist K genau dann positiv invariant für (7.1), wenn

$$(f(t,x)|z) \geq 0, \qquad \text{für alle } x \in \partial K,\ z \in K^* \text{ mit } (x|z) = 0$$

erfüllt ist.

Beweis. "$\supset$" Sei $-z \in K^*$. Wir zeigen, dass z äußere Normale an K in $x \in \partial K$ ist, falls außerdem $(x|z) = 0$ gilt. Angenommen, es ist $u \in B_{|z|_2}(x+z) \cap K$. Es folgt dann

$$0 \leq (u|-z) = (u-x-z|-z) + (x+z|-z) \leq |u-(x+z)|_2|z|_2 - |z|_2^2 < 0,$$

ein Widerspruch, folglich gilt $z \in \mathcal{N}(x)$.

"$\subset$" Sei nun umgekehrt $z \in \mathcal{N}(x)$. Dann gilt

$$|x+z-u|_2 \geq |z|_2, \quad \text{für alle } u \in K,$$

also

$$|x-u|_2^2 + 2(x-u|z) \geq 0. \tag{7.9}$$

Setzt man $u = x + ty,\ y \in K$ beliebig, $t > 0$, so ergibt (7.9) nach Division durch t

$$t|y|^2 - 2(y|z) \geq 0,$$

also mit $t \to 0_+$ $(y|z) \leq 0$ für alle $y \in K$, d.h. $-z \in K^*$.

Setzt man $u = (1-t)x$ in (7.9) und dividiert durch $t \in (0,1)$, so ergibt sich entsprechend

$$t|x|^2 + 2(x|z) \geq 0,$$

also mit $t \to 0_+$ auch $(x|z) \geq 0$, d.h. $(x|z) = 0$.

Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 7.3.4. □

Um die geeignete Verallgemeinerung der Quasimonotonie zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass $(\mathbb{R}^n_+)^* = \mathbb{R}^n_+$ gilt. Nun ist für $K = \mathbb{R}^n_+$ die Bedingung

$$x \leq y, \quad x_i = y_i \quad \Longrightarrow \quad f_i(t,x) \leq f_i(t,y)$$

dann und nur dann erfüllt, wenn

$$x \leq y, \quad z \in K^* \quad \text{mit} \quad (x|z) = (y|z) \quad \Longrightarrow \quad (f(t,x)|z) \leq (f(t,y)|z)$$

gilt. Diese Beobachtung ergibt die

Definition 7.5.5. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel, $\overset{K}{\leq}$ die erzeugte Ordnung, und sei $f : J \times G \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt f* **quasimonoton** *(bzgl. K), falls für alle $t \in J$, $x, y \in G$ gilt:*

$$(QM) \quad x \overset{K}{\leq} y,\ z \in K^*,\ (x-y|z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (f(t,y) - f(t,x)|z) \geq 0.$$

Unter Verwendung von Satz 7.3.4 können wir nun Satz 7.5.2 direkt auf allgemeine Kegel bzw. Ordnungen übertragen.

Satz 7.5.6. *Sei $f : [t_0, t_1] \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig und sei die Eindeutigkeitsbedingung aus Satz 6.5.1 erfüllt. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel, $\overset{K}{\leq}$ die von K erzeugte Ordnung, und sei f quasimonoton bzgl. K. Seien $x, y : [t_0, t_1] \to G$ stetig differenzierbar und gelte*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - f(t, x(t)) \overset{K}{\leq} \dot{y}(t) - f(t, y(t)), \\ \qquad\qquad\quad x(t_0) \overset{K}{\leq} y(t_0), \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Dann gilt $\quad x(t) \overset{K}{\leq} y(t) \quad$ *für alle* $t \in [t_0, t_1]$.

7.6 Autonome quasimonotone Systeme

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und quasimonoton bezüglich eines echten Kegels K mit induzierter Ordnung $\overset{K}{\leq}$. Wir betrachten in diesem Abschnitt das autonome System

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{7.10}$$

und nehmen an, dass die Lösungen eindeutig sind. Gegeben seien $\underline{x}_0 \overset{K}{\leq} \overline{x}_0$, mit

$$f(\underline{x}_0) \overset{K}{\geq} 0 \quad \text{und} \quad f(\overline{x}_0) \overset{K}{\leq} 0;$$

$\underline{x}_0$ heißt **Sub-Equilibrium**, $\overline{x}_0$ **Super-Equilibrium** von (7.8). Setze

$$D = [\underline{x}_0, \overline{x}_0] := \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{x}_0 \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \overline{x}_0\}.$$

D heißt das von $\underline{x}_0$ und $\overline{x}_0$ erzeugte **Ordnungsintervall**. Aus Satz 7.5.6 folgt, dass D positiv invariant für (7.10) ist; denn ist $x_0 \in D$, so gilt $\underline{x}_0 \overset{K}{\leq} x_0 \overset{K}{\leq} \overline{x}_0$, und die Lösung $x(t)$ mit Anfangswert $x(0) = x_0$ erfüllt

$$\dot{x} - f(x) = 0 \overset{K}{\geq} -f(\underline{x}_0), \quad \dot{x} - f(x) = 0 \overset{K}{\leq} -f(\overline{x}_0),$$

folglich $\underline{x}_0 \overset{K}{\leq} x(t) \overset{K}{\leq} \overline{x}_0$ für alle $t \geq 0$, d.h. $x(t) \in D$ für alle $t \geq 0$.

Echte Kegel haben gute Eigenschaften, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 7.6.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel mit der erzeugten Ordnung $\overset{K}{\leq}$. Dann sind äquivalent:*

1. *K ist ein echter Kegel;*
2. *K ist* normal, *d.h. es gibt $\gamma > 0$, sodass aus $0 \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} y$ folgt: $|x| \leq \gamma |y|$;*
3. *Aus $x_n \overset{K}{\leq} y_n \overset{K}{\leq} z_n$ und $x_n \to x_\infty \leftarrow z_n$ folgt $y_n \to x_\infty$;*
4. *Ordnungsintervalle $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} b\}$ sind kompakt;*
5. *$x \in K$, $(x|x^*) = 0$ für alle $x^* \in K^*$ impliziert $x = 0$;*
6. *$\operatorname{int} K^* \neq \emptyset$;*
7. *es gibt ein $x_0^* \in K^*$ mit $(x|x_0^*) > 0$ für alle $0 \neq x \in K$, also einen* strikt positiven *dualen Vektor.*

Ist dies der Fall, so sind monotone ordnungsbeschränkte Folgen konvergent.

Beweis. (i) Sei K ein echter Kegel, aber nicht normal. Dann gibt es Folgen $0 \overset{K}{\leq} x_n \overset{K}{\leq} y_n$ mit $|x_n| > n|y_n|$. Setze $u_n = x_n/|x_n|$, $v_n = y_n/|x_n|$; dann gibt es eine Teilfolge mit $u_{n_k} \to u_\infty \neq 0$ und es gilt $v_n \to 0$. Da K abgeschlossen ist, ist einerseits $u_\infty \in K$, aber andererseits auch $-u_\infty = \lim_{k\to\infty}(v_{n_k} - u_{n_k}) \in K$, im Widerspruch zur Echtheit von K. Also impliziert 1. K normal, also 2.

(ii) Sei $x_n \overset{K}{\leq} y_n \overset{K}{\leq} z_n$ und $x_n \to x_\infty \leftarrow z_n$. Ist K normal, so folgt $|y_n - x_n| \leq \gamma |z_n - x_n| \to 0$, also auch $y_n \to x_\infty$. Daher folgt 3. aus 2.

(iii) Es gelte 3. Angenommen, es existiert ein unbeschränktes Ordnungsintervall $[a, b]$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in [a, b]$ mit $|x_n| \to \infty$. Setze $u_n = x_n/|x_n|$; dann gilt $a/|x_n| \overset{K}{\leq} u_n \overset{K}{\leq} b/|x_n|$ also mit 3. $u_n \to 0$ im Widerspruch zu $|u_n| = 1$. Daher folgt 4. aus 3.

(iv) Gelte 4. Das Ordnungsintervall $[0, 0] = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} 0\}$ ist gleich $K \cap (-K)$. Ist $v \in K \cap (-K)$, dann auch tv für alle $t \in \mathbb{R}$, also ist $[0, 0] = K \cap (-K)$ genau dann beschränkt, wenn $K \cap (-K) = \{0\}$ ist, also wenn der Kegel echt ist. Daher ist 4. äquivalent zu 1.

(v) Es ist $x_0 \in K \cap (-K)$ dann und nur dann, wenn $(x_0|x^*) = 0$ für alle $x^* \in K^*$ gilt. Dies zeigt die Äquivalenz von 1. und 5.

(vi) Ist $x^* \in K^*$ strikt positiv, also $(x|x^*) > 0$ für alle $x \in K \backslash \{0\}$, dann schon uniform positiv, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$ mit $\phi(x) := (x|x^*) \geq c|x|$ für alle $x \in K$. Denn $\phi(x)$ hat auf $K \cap \partial B_1(0)$ ein strikt positives Minimum. Andererseits ist ein $x^* \in K^*$ genau dann uniform positiv, wenn $x^* \in \operatorname{int} K^*$ gilt. Dies zeigt die Äquivalenz von 6. und 7.

(vii) Sei $x^* \in K^*$ strikt positiv und $x_0 \in K \cap (-K)$, $x_0 \neq 0$. Dann gilt $0 < (x_0|x^*) < 0$, ein Widerspruch. Also impliziert 6., dass K echt ist. Umgekehrt sei K echt. Da $K^* \cap \partial B_1(0)$ kompakt ist, gibt es eine dichte Folge $\{x_k^*\} \subset K^* \cap \partial B_1(0)$. Setze $x^* = \sum_{k=1}^\infty k^{-2} x_k^*$; offenbar ist $x^* \in K^*$ wohldefiniert. Ist nun $(x|x^*) = 0$ für ein $x \in K$, so folgt $(x|x_k^*) = 0$ für alle k, also aufgrund der Dichtheit der Folge sogar $(x|y^*) = 0$ für alle $y^* \in K^*$. Dies impliziert mit 5. aber $x = 0$, also ist x^* strikt positiv. □

Da K nach Voraussetzung echt ist, ist das Ordnungsintervall D nach Lemma 7.6.1 beschränkt, also kompakt und konvex. Daher folgt aus Satz 7.3.5 die Existenz eines Equilibriums $x_\infty \in D$. Es gilt aber noch viel mehr. Dazu betrachten wir die speziellen Lösungen $\underline{x}(t)$ und $\overline{x}(t)$ von (7.10) zu den Anfangswerten $\underline{x}_0$ bzw. $\overline{x}_0$. Diese bleiben in D, und für jede andere in D startende Lösung $x(t)$ gilt $\underline{x}(t) \overset{K}{\leq} x(t) \overset{K}{\leq} \overline{x}(t)$, $t > 0$. Folglich erhalten wir

$$\underline{x}(t) \overset{K}{\leq} \underline{x}(t+h) \overset{K}{\leq} \overline{x}(t+h) \overset{K}{\leq} \overline{x}(t), \;\; t, h > 0,$$

d.h. $\underline{x}(t)$ ist monoton wachsend und $\overline{x}(t)$ monoton fallend bzgl. der Ordnung $\overset{K}{\leq}$. Diese Funktionen besitzen daher nach Lemma 7.6.1 Grenzwerte $\underline{x}_\infty$ und $\overline{x}_\infty$, welche Equilibria von (7.10) sind. Insbesondere ist $D_\infty = [\underline{x}_\infty, \overline{x}_\infty]$ wieder positiv invariant und jede in D startende Lösung konvergiert gegen D_∞, d.h. D_∞ ist *global attraktiv* in D. Ferner liegen alle Equilibria von (7.10) (aus D) und auch alle periodischen Lösungen von (7.10) in D_∞.

Gilt weiter $\underline{x}_\infty = \overline{x}_\infty$, d.h. (7.10) besitzt nur ein Equilibrium in D, dann konvergieren alle in D startenden Lösungen gegen dieses Equilibrium x_∞, d.h. x_∞ ist global attraktiv in D. Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.6.2. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und quasimonoton bezüglich eines echten Kegels K und seien $\underline{x}_0 \overset{K}{\leq} \overline{x}_0$ Sub- bzw. Superequilibria für* (7.10). *Dann ist $D = [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ positiv invariant, und es existieren Equilibria $\underline{x}_\infty \overset{K}{\leq} \overline{x}_\infty$ in D derart, dass für alle Equilibria $x_\infty \in D$ von* (7.10) *gilt: $x_\infty \in D_\infty = [\underline{x}_\infty, \overline{x}_\infty]$. D_∞ ist positiv invariant und global attraktiv in D. Besitzt* (7.10) *höchstens ein Equilibrium $x_\infty \in D$, so ist x_∞ global attraktiv in D.*

Dieses Resultat wollen wir jetzt verwenden, um das qualitative Verhalten der chemischen Kinetik aus Abschnitt 6.6 zu untersuchen.

Beispiel. *Chemische Kinetik.* Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 - x_1 - r(x_1, x_2), \quad & x_1(0) = x_{01} > 0, \\ \dot{x}_2 &= a_2 - x_2 - r(x_1, x_2), \quad & x_2(0) = x_{02} > 0, \end{aligned} \tag{7.11}$$

aus Abschnitt 6.6, wobei $a_i > 0$ und $r : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ stetig und wachsend in beiden Variablen, $r(x_1, 0) = r(0, x_2) = 0$, sind. O.B.d.A. kann man $a_2 \geq a_1$ annehmen, ansonsten vertausche man x_1 und x_2. Wir hatten schon gezeigt, dass dieses System einen globalen Halbfluss auf $D := \mathbb{R}^2_+$ erzeugt. Es gibt genau ein Equilibrium in $\operatorname{int} D$, das durch die Gleichungen $x_2 = a_2 - a_1 + x_1$ und $r(x_1, a_2 - a_1 + x_1) = a_1 - x_1$ bestimmt ist; die letzte Gleichung besitzt genau eine Lösung $x \in (0, a_1)$, da r in beiden Variablen wachsend ist. Das System ist quasimonoton bzgl. der vom Kegel $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0\}$ induzierten Ordnung. Man sieht leicht, dass $\overline{x} = (b_1, 0)$ ein Super-Equilibrium ist, sofern $b_1 \geq a_1$ ist, und ebenso ist $\underline{x} = (0, b_2)$ ein Sub-Equilibrium, wenn $b_2 \geq a_2$ ist, es gilt $\underline{x} \leq \overline{x}$. Jeder Anfangswert $x_0 \in D$ liegt in einem dieser Ordnungsintervalle. Daher ist Satz 7.6.2 anwendbar, und das Equilibrium ist global asymptotisch stabil in D.

7.7 Ein Klassenmodell für Epidemien

Die mathematische Modellierung von Infektionskrankheiten erfordert häufig eine weitergehende Differenzierung der Populationsklassen S der Suszeptiblen und I der Infektiösen. Im Folgenden betrachten wir ganz allgemein n Unterklassen der Population mit jeweils S_k Infizierbaren und I_k Infektiösen, $k = 1, \ldots, n$. Ferner nehmen wir an, dass die Individuen die Klasse nicht wechseln können und berücksichtigen keine Geburts- und Sterbevorgänge. Folglich ist die Anzahl $S_k + I_k =: N_k > 0$ der k-ten Unterklasse konstant. Ferner sei $a_k > 0$ die (pro Kopf) Gesundungsrate der k-ten Unterklasse und r_{kl} die Kontaktrate der Infektion eines Infizierbaren der Klasse k durch einen Infektiösen der l-ten Klasse. Damit ergibt sich das System

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= -a_k I_k + \sum_{l=1}^{n} r_{kl} S_k I_l \\ &= -a_k I_k + \sum_{l=1}^{n} r_{kl} N_k I_l - \sum_{l=1}^{n} r_{kl} I_k I_l \end{aligned}$$

für $k \in \{1, \ldots, n\}$, wobei wir $S_k = N_k - I_k$ eingesetzt haben. Wir normalisieren die Variablen, indem wir $v_k = I_k / N_k$ und $b_{kl} = r_{kl} N_l \geq 0$ setzen, und erhalten so das System

$$\begin{aligned} \dot{v}_k &= -a_k v_k + \sum_{l=1}^{n} b_{kl} v_l - \sum_{l=1}^{n} b_{kl} v_k v_l\,, \quad t \geq 0,\ k = 1, \ldots, n, \\ v_k(0) &= v_k^0\,, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Wir nehmen ferner an, dass die Population bezüglich der Infektion *irreduzibel* ist, das heißt:

$$\text{Für jede echte Teilmenge } J \neq \emptyset \text{ von } \{1, \ldots, n\}, \tag{7.13}$$

$$\text{existieren } \ l \in J,\ k \in \{1, \cdots, n\} \setminus J \ \text{ mit } \ b_{kl} > 0. \tag{7.14}$$

Diese wesentliche Annahme besagt, dass eine gegebene Gruppe J von Unterklassen stets mindestens eine der nicht in J enthaltenen Unterklassen infizieren kann. Andernfalls könnte man die Gruppe J und ihr Komplement getrennt behandeln.

Wir fassen die Komponenten zu den Vektoren $v = [v_1, \ldots, v_n]^{\mathsf{T}}$ und $v^0 = [v_1^0, \ldots, v_n^0]^{\mathsf{T}}$ zusammen. Ferner definieren wir die $n \times n$–Matrix $A = [a_{kl}]$ durch $a_{kl} = b_{kl}$ für $k \neq l$ und $a_{kk} = b_{kk} - a_k$, sowie die nichtlinearen Abbildungen

$$g(v) = \Big(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} v_k v_l \Big)_{k=1,\ldots,n} \qquad \text{und} \qquad f(v) = Av - g(v).$$

Man beachte, dass auf Grund der angenommenen Irreduzibilität der Population die Matrix A und damit auch ihre Transponierte A^{T} irreduzibel sind. Mit diesen Vereinbarungen lässt sich das System (7.12) als

$$\dot{v} = Av - g(v), \quad t \geq 0, \qquad v(0) = v^0, \tag{7.15}$$

schreiben. In unserem Modell sind dabei nur Anfangswerte v^0 im Einheitswürfel $W_n = [0,1]^n$ von Interesse.

Die Existenz einer eindeutigen positiven Lösung von (7.12) ergibt sich leicht aus dem Satz von Picard–Lindelöf und dem Positivitätssatz. Sei $x \in \partial W_n$ ein Vektor, der nicht auf den Koordinatenhyperebenen liegt, und sei ν eine äußere Normale an ∂W_n in x. Dann gilt $\nu_k = 0$, wenn $x_k \in (0,1)$, und $\nu_k \geq 0$, wenn $x_k = 1$ ist. Somit folgt die Ungleichung

$$(\nu | f(x)) = \sum_{x_k = 1} \Big(-a_k \nu_k + \sum_{l=1}^{n} b_{kl} x_l \nu_k - \sum_{l=1}^{n} b_{kl} x_l \nu_k \Big) \leq 0.$$

Damit ist W_n nach Satz 7.3.4 positiv invariant, und da W_n beschränkt ist, existieren alle in W_n startenden Lösungen global nach rechts und bleiben in W_n.

Sei nun $v^0 \neq 0$ und $t > 0$. Wenn $v_k(t)$ für ein k gleich 1 wäre, dann wäre t ein lokales Maximum und $\dot{v}_k(t)$ müsste gleich 0 sein. Andererseits folgte aus (7.12), dass $\dot{v}_k(t)$ strikt negativ wäre. Also sind alle Komponenten von $v(t)$ strikt kleiner als 1. Wir nehmen an, dass mindestens eine Komponente von $v(t)$ gleich 0 sei. Da 0 eine stationäre Lösung ist, können nicht alle Komponenten von $v(t)$ verschwinden. Weil die Population irreduzibel ist, gibt es also Indizes $k, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $b_{kj} > 0$, $v_k(t) = 0$ und $v_j(t) > 0$. Aus der Differentialgleichung (7.12) und der schon gezeigten Positivität von $v(t)$ folgt nun

$$\dot{v}_k(t) = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} v_l(t) > 0.$$

Wieder ergibt sich ein Widerspruch, also sind alle Komponenten von $v(t)$ größer Null. Daher gilt $v(t) \in \operatorname{int} W_n$, sofern $t > 0$ und $v_0 \in W_n$, $v_0 \neq 0$ ist, d.h. die nichttriviale Lösungen gehen instantan ins Innere von W_n.

Da die Matrix A^{T} quasipositiv und irreduzibel ist, hat sie nach dem Satz von Perron–Frobenius einen strikt positiven Eigenvektor y zum Eigenwert $s(A) = s(A^{\mathsf{T}})$. Wir setzen nun $\Phi(x) = (x|y)$ für $x \in W_n$. Mit $\delta = \min_k y_k > 0$ gilt zunächst

$$\delta\,|x|_1 \le \Phi(x) \le |y|_\infty |x|_1. \tag{7.16}$$

Die Differentialgleichung (7.15) impliziert

$$\dot{\Phi}(v) = (Av|y) - (g(v)|y) = s(A)\Phi(v) - \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} y_k v_k v_l \tag{7.17}$$

für $v \in W_n$. Seien $s(A) \le 0$ und $v^0 \ne 0$. Dann ist $s(A)\Phi(v) \le 0$ und die Doppelsumme ist für $t > 0$ strikt positiv. Also ist $\dot{\Phi}(v)$ für $v \in W_n \setminus \{0\}$ strikt negativ. Somit ist Φ eine strikte Ljapunov-Funktion auf W_n und (7.15) hat außer 0 kein weiteres Equilibrium v_* in W_n. Mit Satz 5.5.6 folgt $v(t) \to 0$ für $t \to \infty$, und die Ungleichung (7.16) zeigt auch die Stabilität des Equilibriums $\overline{v} = 0$.

Damit haben wir den ersten Teil des Hauptresultats dieses Abschnitts gezeigt, das wie folgt lautet:

Satz 7.7.1. *Das System* (7.12) *sei irreduzibel im Sinne von* (7.13) *und sei v Lösung von* (7.12) *mit $v(0) = v^0 \in W_n = [0,1]^n$. Dann gelten die folgenden Aussagen, wobei A vor* (7.15) *definiert wurde.*

(i) *Sei $s(A) \le 0$. Dann konvergiert $v(t)$ für $t \to \infty$ gegen das einzige Equilibrium $\overline{v} = 0$ in W^n. $\overline{v}$ ist global asymptotisch stabil in W_n, die Infektion stirbt aus.*

(ii) *Seien $s(A) > 0$ und $v^0 \ne 0$. Dann konvergiert $v(t)$ für $t \to \infty$ gegen das einzige Equilibrium v_* in $W^n \setminus \{0\}$, v_* ist global asymptotisch stabil in $W_n \setminus \{0\}$. Dabei liegt v_* in $(0,1)^n$, die Infektion bleibt also in allen Unterklassen erhalten.*

Beweis. Wir müssen nur noch den zweiten Teil zeigen. Dazu verwenden wir Satz 7.6.2; im Folgenden sei also $s(A) > 0$.

Seien $0 \le v \le w \le \mathsf{e} = [1,\dots,1]^{\mathsf{T}}$, $k \in \{1,\dots,n\}$ und $v_k = w_k$. Dann gilt

$$f_k(v) = -a_k w_k + (1 - w_k)\sum_{l=1}^{n} b_{kl} v_l \le f_k(w),$$

sodass (7.12) quasimonoton ist. Die Funktion e ist ein Super-Equilibrium von (7.12), da $f(\mathsf{e})$ negativ ist. Nach dem Satz von Perron–Frobenius hat A einen strikt positiven Eigenvektor z zum Eigenwert $s(A)$. Setze $\zeta = \min_k z_k > 0$; dann ist

$$f_k(\eta z) = \eta s(A) z_k - \eta^2 \sum_{l=1}^{n} b_{kl} z_k z_l \ge \eta(\zeta s(A) - \eta |B| |z|_\infty |z|_1) \ge 0,$$

sofern $\eta > 0$ genügend klein gewählt wird. Daher ist ηz ein Sub-Equilibrium, für jedes $\eta \in (0, \eta_0)$.

Wir nehmen an, dass es zwei stationäre Lösung v_* und v' in $W_n \setminus \{0\}$ gäbe; beide strikt positiv. Wir können annehmen, dass $m = \max_k v_{*k}/v'_k > 1$ und dass $m = v_{*1}/v'_1$. Dann ergeben sich die Ungleichungen $v_{*1} > v'_1$ und $v_{*1} \geq v'_1 v_{*k}/v'_k$ für $k = 2, \ldots, n$. Aus

$$0 = -a_1 v_{*1} + (1 - v_{*1}) \sum_{k=1}^{n} b_{1l} v_{*l}$$

folgt die Identität

$$0 = -a_1 v'_1 + (1 - v_{*1}) \sum_{k=1}^{n} b_{1l} v_{*l} \, \frac{v'_1}{v_{*1}}.$$

Andererseits haben wir

$$0 = -a_1 v'_1 + (1 - v'_1) \sum_{k=1}^{n} b_{1l} v'_l.$$

Es gelten $1 - v_{*1} < 1 - v'_1$ und $v'_1 v_{*l}/v_{*1} \leq v'_l$, und es gibt ein j mit $b_{1j} > 0$ auf Grund der Annahme (7.13). Somit führen die obigen Gleichungen auf einen Widerspruch, und es folgt $v' = v_*$.

Satz 7.6.2 impliziert daher, dass jede Lösung $v(t)$ mit Anfangswert $v_0 \in [\eta z, \mathsf{e}]$ gegen das eindeutige Equilibrium konvergiert. Lösungen werden instantan positiv, sind dann also in einem der Ordnungsintervalle $[\eta z, \mathsf{e}]$; damit konvergieren alle Lösungen $v(t)$ mit Startwert $v_0 \in W_n$, $v_0 \neq 0$, gegen das nichttriviale Equilibrium.

□

Übungen

1. Berechnen Sie die äußeren Normalen für die Kugeln in den l_p-Normen, $1 \leq p \leq \infty$.

2. Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, und sei $|x|_Q := \sqrt{(Qx|x)}$ die induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die äußeren Normalen der Einheitskugel in dieser Norm. Sehen Sie den Bezug zur entsprechenden Klammer $[\cdot,\cdot]_Q$? (Vgl. Abschnitt 6.4.)

3. *Endliche Markov-Prozesse.* Sei $A = [a_{ij}]$ eine *Markov-Matrix*, d.h. A ist quasipositiv, und $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n_+$ und die Hyperebene $(x|\mathsf{e}) = c$ positiv invariant für $\dot{x} = Ax$ sind. Daher ist auch das Standardsimplex $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : (x|\mathsf{e}) = 1\}$, also die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen, positiv invariant. Zeigen Sie, dass es mindestens ein $x_* \in \mathbb{D}$ mit $Ax_* = 0$ gibt.

4. Es seien die Mengen K_j definiert durch

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2\}, \qquad K_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, \; x_3 \geq 0\},$$
$$K_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, \; x_2 = x_3 = 0\}, \qquad K_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_3 \geq 0\}.$$

Welche dieser Mengen sind Kegel, welche sind echt? Berechnen Sie die dualen Kegel, welche davon sind echt und welche haben innere Punkte? Interpretieren Sie Quasimonotonie bzgl. der Kegel.

5. Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und stetig differenzierbar bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f genau dann quasimonoton bzgl. des Standardkegels $\mathbb{R}^n_+$ ist, wenn $\partial_x f(t, x)$ für alle $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ quasipositiv ist.

6. Diskutieren Sie achsenparallele positiv invariante Rechtecke des Fitzhugh-Nagumo-Systems (vgl. Übung 4.6).

7. Betrachten Sie das SIS-Klassenmodell aus Abschnitt 7.7 für den Fall zweier Klassen weiblicher, bzw. männlicher, heterosexueller Individuen. Dann gilt $b_{11} = b_{22} = 0$,

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & b_{12} \\ b_{21} & -a_2 \end{bmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Equilibria und das asymptotische Verhalten dieses Modells.

8. Wenden Sie die Ergebnisse über homogene Systeme aus Abschnitt 7.4 auf das Paarbildungsmodell aus Abschnitt 6.6 an. Unter welchen Bedingungen gibt es exponentiell wachsende persistente Lösungen?

9. Untersuchen Sie die Existenz und Eigenschaften der metrischen Projektionen für kompakte konvexe Mengen bzgl. der l_p-Normen, für $p \in [1, \infty]$, $p \neq 2$. Für welche p ist sie einwertig, für welche stetig, für welche Lipschitz?

10. Betrachten Sie das Holling-Modell

$$\dot{u} = u - \lambda u^2 - v f(u), \quad \dot{v} = -\mu v + v f(u),$$

wobei $\mu, \lambda > 0$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ aus C^2 streng wachsend mit $f(0) = 0$ sei. Zeigen Sie, dass es genau dann ein Koexistenz-Equilibrium gibt, wenn $\mu < \lim_{s\to\infty} f(s)$ gilt, und beweisen Sie mit Invarianz-Techniken, dass dann alle Lösungen mit positiven Anfangswerten beschränkt sind.

11. Formulieren und beweisen Sie das Analogon zu Satz 7.4.1 über homogene Systeme für einen echten Kegel mit inneren Punkten.

12. Formulieren und beweisen Sie das Analogon zu Satz 7.4.3 von Perron und Frobenius für einen echten Kegel mit inneren Punkten. Wie sollte man *irreduzibel* für solche Kegel definieren?

13. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

(a) Ist A quasipositiv, so ist e^A positiv.

(b) Ist A quasipositiv und irreduzibel, so ist e^A strikt positiv.