5.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. Zeigen Sie: eine Treppenfunktion f liegt genau dann in $\mathcal{L}_p$, wenn $\mu([f \neq 0]) < \infty$, und die Menge $\mathcal{T}$ dieser Funktionen liegt dicht in L_p $(0 < p < \infty)$ (d.h., für jedes $f \in \text{Ł}_p$ gibt es eine Folge $f_n \in \mathcal{T}$ mit $f_n \to_p f$).

2. Wenn μ endlich ist und $0 \leq p \leq q \leq \infty$, dann gilt $L_q \subseteq L_p$. Ist insbesonders μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dann gilt $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

3. Im allgemeinen gilt für $p \leq q \leq r$, dass $L_p \cap L_r \subseteq L_q$ (und liegt dicht).

4. (Vgl. 1.Übung, Bsp. 1). $a_1, \ldots, a_n$ seien reelle Zahlen, $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable mit $\mathcal{P}(X_i = 1) = \mathcal{P}(X_i = -1) = 1/2$ und

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

Zeigen Sie für $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

(Bestimmen Sie $\mathbb{E}(e^{tS_n})$, verwenden Sie die Abschätzung $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$ und die Markov-Ungleichung).

5. (Fortsetzung) Die Khinchine-Ungleichung: für $0 < p < \infty$ gibt es Konstanten $C_p < \infty$, sodass

$$\|S_n\|_p \leq C_p (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2}.$$

($\|S_n\|_2$ sollte nicht allzu schwer zu bestimmen sein, und damit C_p für $p \leq 2$; für $p > 2$ hilft die Formel

$$\mathbb{E}(|S_n|^p) = \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{P}(|S_n| > y) dy,$$

die mit unserer Definition des Integrals nicht allzu schwer zu beweisen ist, was Sie auch — als freiwillige Zusatzaufgabe — tun dürfen).

6. (Fortsetzung) Die Khinchine-Ungleichung 2: für $0 < p < \infty$ gibt es Konstanten $c_p > 0$, sodass

$$c_p (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} \leq \|S\|_p.$$

(für $p < 2$: $|S|^2 = |S|^{p/2} |S|^{2-p/2}$ und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakowski (=Hölder mit $p = q = 2$)).

7. Gleichmäßige Integrierbarkeit: man kann dafür im Internet (mindestens) vier Definitionen finden:

   Die Menge $\mathcal{F}$ von integrierbaren Funktionen heißt gleichmäßig integrierbar,

   UI (unsere Definition) wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine integrierbare Funktion g_ϵ existiert, sodass $\int |f|[|f| > g_\epsilon] < \epsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

   UI1 (https://terrytao.wordpress.com/tag/uniform-integrability/) wenn $\sup\{\|f\|_1 : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ und

   $$\lim_{M\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{[|f|>M]\cup[|f|\leq 1/M]} |f| = 0.$$

   UI2 (Wikipedia) wenn

   $$\lim_{M\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{[|f|>M]} |f| = 0.$$

   UI3 (auch Wikipedia) wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass aus $\mu(A) < \delta$ $\int_A |f| < \epsilon$ folgt. Zeigen Sie:

   (a) **UI** $\Rightarrow$ **UI1** $\Rightarrow$ **UI2** $\Rightarrow$ **UI3**.

   (b) Wenn μ endlich ist, sind die ersten drei Definitionen äquivalent.

   (c) Nimmt man zusätzlich an, dass $\sup\{\|f\|_1 : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ gilt, dann gilt **UI3** $\Rightarrow$ **UI2**.

   (d) Aus $f_n \to f$ im Maß und (f_n) **UI1** folgt $\int f_n \to \int f$. Beweisen Sie das für den Sonderfall $f = 0$, der allgemeine Fall hat seine Tücken; er folgt aus dem Sonderfall, wenn man zusätzlich zeigt, dass auch $f_n - f$ **UI1** ist, aber auch das ist ein wenig kompliziert.

   (e) Wenn eine Folge f_n **UI1** ist und fast überall gegen f konvergiert, dann muss nicht $\int f_n \to \int f$ gelten.

   (f) Wenn eine Folge f_n **UI2** ist und im Maß gegen f konvergiert, dann muss nicht $\int f_n \to \int f$ gelten.