A 4.8.1

- Die Dimensionen lauten wie folgt:
  - $\dim U_1 = 1$,
  - $\dim U_2 = 1$,
  - $\dim U_3 = 2$, weil $c = 3a + 2b$.

- Weil $\dim \mathbb{R}^{5\times 1} = 5$, folgt aus Satz 4.8.4, dass
  - $\dim U_1^\circ = 5 - 1 = 4$,
  - $\dim U_2^\circ = 4$,
  - $\dim U_3^\circ = 3$.

- Um eine Basis von U_i° zu finden, gehen wir wie folgt vor:

$$U_i^\circ = \{ v^* \in (\mathbb{R}^{5\times 1})^* \mid \forall u \in U_i : \langle v^*, u \rangle = 0 \}.$$

Laut Satz 4.3.2, ist $[(e_i^*)_{i=1}^5] = \mathbb{R}^{5\times 1}$ möglich.
Seien also $v^* \in (\mathbb{R}^{5\times 1})^*$ und $u \in U_1 = [a]$, also

$$u = \sum_{i=1}^5 u_i e_i \quad \text{und} \quad v^* = \sum_{i=1}^5 v_i e_i^*.$$

Um die Bedingung für U_1° zu erfüllen, muss

$$0 = \langle v^*, u \rangle = \langle \sum_{i=1}^5 v_i e_i^*, \sum_{i=1}^5 u_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^5 v_i u_i \langle e_i^*, e_i \rangle =$$

$v_1 \xi + v_4 \xi$, für $\xi := u_1 = u_4$.

oBdA. Sei $\xi \neq 0$, dann folgt $v_1 = -v_4$.
Das gibt uns die Basis von U_1°:

$$\{ e_1^* - e_4^*, e_2^*, e_3^*, e_5^* \}$$

Analog findet man die Basis von U_2°:

$\{e_1^*, e_2^* - e_5^*, e_3^*, e_4^*\}$

Weil $[a] + [b] = [\{a, b, c\}] = U_3$, folgt mit

$$\left(\sum_{i \in I} U_i\right)^\circ = \bigcap_{i \in I} (U_i^\circ),$$

dass eine Basis von U_3°

$\{e_3^*, e_4^* - e_1^*, e_5^* - e_2^*\}$

ist.

A 4.8.4

Um zu zeigen, dass $f: Sub(V) \to Sub(V^*): U \mapsto U^\circ$ nicht surjektiv ist, weisen wir nach, dass

$$\exists U^* \in Sub(V^*): \forall T \in Sub(V): T^\circ \neq U^*.$$

Sei $U^* = [(b_i^*)_{i\in I}] \subsetneq V^*$.
Ein $T \in Sub(V)$ mit $f(T) = T^\circ = U^*$, müsste

$$\forall t \in T: \langle a^*, t\rangle = 0 \text{ für alle } a^* \in [(b_i^*)_{i\in I}],$$

$$\Rightarrow \langle \sum_{i\in I} a_i b_i^*, t\rangle = \sum_{i\in I} a_i \langle b_i^*, t\rangle = 0,$$

und weil dies für alle $(a_i)_{i\in I} \in K^I$ gilt, folgt $\langle b_i^*, t\rangle = 0$, für alle $i \in I$.
Das geht höchstens für $t = \mathcal{O}$, also muss $T = \{\mathcal{O}\}$.
Laut 4.8.1. gilt aber $T^\circ = \{\mathcal{O}\}^\circ = V^* \neq [(b_i)_{i\in I}]$, weil, laut Satz 4.3.2, $(b_i^*)_{i\in I}$ keine Basis von V^* ist, wenn $\dim V = \infty$.

A 4.8.10

(α) $\exists U_1, U_2 \in \mathrm{Sub}(V): U_1 + U_2 = V \wedge U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$

$\Leftrightarrow$

$\ldots: U_1 \cap U_1 = \{\theta\} \wedge U_1 + U_2 = V$,

weil $X \in \mathrm{Sub}(V) \wedge \dim X = 0 \Rightarrow X = \{\theta\}$

$\wedge \dim X = \dim V \Rightarrow X = V$,

wobei hier $n \overset{\leftrightarrow}{} n - r$ mit $r = 0$ gilt.

Standard- und Dualaussage sind nicht nur äquivalent, sondern sogar ident ($U_1 \oplus U_2 = V$ bleibt erhalten).

(β) $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists U_1, \ldots, U_n \in \mathrm{Sub}(V): (\forall i \in I_n: \dim U_i = 1)$

$\wedge \sum_{i \in I} U_i = V$

$\Leftrightarrow$

$\ldots: (\forall i \in I_n: \dim U_i = n-1) \wedge \bigcap_{i \in I} U_i = \{\theta\}$,

wobei $I_n := \{m \in \mathbb{N}: m \leq n\}$.

(η) $\forall U_1, U_2, X \in \mathrm{Sub}(V), U_1 \oplus U_2 = V:$

$\dim((U_1 + X) \cap U_2) \leq \dim X \Leftrightarrow X \cap U_1 = \{\theta\}$

$\Leftrightarrow$

$\ldots: n - \dim((U_1 \cap X) + U_2) \leq n - \dim X \Leftrightarrow$

$\dim((U_1 \cap X) + U_2) \geq \dim X \Leftrightarrow X + U_1 = V$.

Anschauungen:

(α) Betrachte $U_1 = [e_1]$ und $U_2 = [\{e_2, e_3\}]$.

(β) $U_1 = [\{e_1, e_2\}]$, $U_2 = [\{e_2, e_3\}]$, $U_3 = [\{e_3, e_1\}]$

und $U_i = [e_i]$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

A 4.9.3

(a) $\langle f^T(c_i^*), x\rangle = [c_i^* \circ f](x) = \langle c_i^*, f(x)\rangle$,

wobei $\forall x \in V: f(x) \in f(V) \subseteq W$.
Weil $c_i^*: y = \sum_{j\in I} y_j c_j \mapsto x_i$ und $\forall^\infty i \in I: y_i = 0$,
muss auch $\forall^\infty i \in I: \langle c_i^*, f(x)\rangle = 0$, wenn $y := f(x)$.

(b) Sei $\varphi: L(V,W) \to L(W^*, V^*): f \mapsto f^T$.

φ ist linear, weil laut (4.24)

$(f_1 + c f_2)^T = f_1^T + c f_2^T$, für $f_1, f_2 \in L(V,W)$, $c \in \mathbb{R}$,

was aus (3.12) folgt.

Für die Injektivität von φ, wähle $f^T \in L(W^*, V^*)$,
sodass

$\forall c^* \in W^*: c^* \circ f = f^T(c^*) = \mathcal{O}_V^*$.

Weil im Allgemeinen $\exists w \in W: \langle c^*, w\rangle \neq 0$, muss
$\forall v \in V: f(v) = \mathcal{O}_W$, damit $\langle c^*, w\rangle = 0$.
Somit ist $\ker \varphi = \{f_0\}$, mit f_0 als Nullabbildung.

(c) „$\Leftarrow$" Fall I: Gg: $V = \{\mathcal{O}\}$; Zz: φ surjektiv;
Es folgen $V^* = \{\mathcal{O}_V^*\}$ und $L(V,W) = \{\mathcal{O}_{L(V,W)}\}$ aus der Linearität. Somit auch $L(W^*, V^*) = \{\mathcal{O}_{L(W^*,V^*)}\}$.
Wegen $w^* \circ f = f^T(w^*) = g(w^*) = \mathcal{O}_V^*$, für alle $w^* \in W^*$ und das $g \in L(W^*, V^*)$, haben wir ein f mit $\varphi(f) = g$ gefunden.

Fall II: Gg: $\dim W < \infty$; Zz$_1$: φ ist surjektiv;

Zz$_2$: $\forall g \in L(W^*, V^*) \exists f \in L(V, W) : f^T = g$;

Sei $g \in L(W^*, V^*)$ beliebig.

Zz$_3$: $\exists f \in L(V,W) : \forall w^* \in W^* : f^T(w^*) = g(w^*)$;

Sei $w^* \in W^*$ beliebig.

Ww: Gg $\Rightarrow (c_i)_{i\in I}$ Basis von $W \Rightarrow (c_i^*)_{i\in I}$ Basis von W^*;

Ww $\Rightarrow w^* =: \sum_{i\in I} w_i c_i$ ist wohldefiniert.

Zz$_4$: $\sum_{i\in I} w_i f^T(c_i^*) = \sum_{i\in I} w_i g(c_i^*)$;

Zz$_5$: $\forall i \in I \; \forall x \in V : \langle c_i^*, f(x) \rangle = [g(c_i^*)](x)$;

Sei $g(c_i^*) =: a_i^* \in V^*$ für alle $i \in I$.

Sei $f \in L(V,W) : v \mapsto \sum_{i\in I} c_i \langle a_i^*, v \rangle$.

f ist trivialerweise linear.

Seien $i \in I$, $x \in V$ beliebig.

Zz$_6$: $\langle a_i^*, x \rangle = \langle c_i^*, f(x) \rangle = \cdots$;

$$\cdots = \langle c_i^*, \sum_{j\in I} c_j \langle a_j^*, x \rangle \rangle = \sum_{j\in I} \langle a_j^*, x \rangle \langle c_i^*, c_j \rangle.$$

„$\Rightarrow$" Gg$_1$: φ surjektiv; Zz$_1$: $V = \{\mathcal{O}\} \vee \dim W < \infty$;

Kontraposition: Gg$_2$: $V \neq \{\mathcal{O}\} \wedge \dim W = \infty$;

Zz$_2$: φ ist nicht surjektiv;

Zz$_3$: $\exists g \in L(W^*, V) : \forall f \in L(V,W) : f^T \neq g$.

Sei $x \in V \setminus \{\mathcal{O}\}$ beliebig. $\{x\}$ kann zu einer Basis erweitert werden. Somit gibt es eine Linearform (verifiziert durch den Fortsetzungssatz) $a^* \in V^*$, mit $\langle a^*, x \rangle = 1$.

Wähle $g \in L(W^*, V^*) : \forall i \in I : c_i^* \mapsto a^*$.

Dass $\exists f \in L(V, W) : f^T = g$, widerspräche (a).

A 5.2.4

„$\subseteq$" Sei $v \in f^{-1}(T) = \{x \in V : f(x) \in T\}$.

$f(v) \in T := \ker c^* \Rightarrow \langle c^*, f(v)\rangle = [c^* \circ f](v) =$
$[f^T(c^*)](v) = 0 \Rightarrow v \in \ker(f^T(c^*))$.

„$\supseteq$" Analog.

Sei H eine Hyperebene von W, so gilt laut 4.2.4

$\exists c^* \in W^* : W \neq \ker c^* = H$.

Laut vorher, gilt weiters

$\{x \in V : f(x) \in \ker c^*\} = f^{-1}(\ker c^*) = \ker(\underbrace{f^T(c^*)}_{=: a^* \in V^*})$.

Daher folgt der Rest aus 4.2.4:

$\forall a^* \in V^* : \langle a^*, V\rangle \in \mathrm{Sub}(K)$. Weil $\dim K = 1$:

- $\langle a^*, V\rangle = \{0\} \Leftrightarrow V = \ker a^*$
- $\langle a^*, V\rangle = K \Leftrightarrow V \neq \ker a^* =: \tilde{H}$ ist wiederum eine Hyperebene.

A 5.3.4

Sei U die Menge aller konstanten Funktionen $\{f_c \mid f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c\} \subseteq C^1(\mathbb{R})$. U ist insbesondere der Kern von $\varphi : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, also der Nullvektor von $C^1(\mathbb{R})/U$.
Laut Satz 1.11.14, ist die Abbildung

$$\varphi : G/\ker\varphi \to \varphi(G) : g + \ker\varphi \mapsto \varphi(g)$$

ein Isomorphismus, also eine lineare Bijektion.