1 (10P): Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{6}x^3 - x - \frac{1}{4}xy^2.$$

Bestimmen Sie jenen Richtungsvektor ν mit $\|\nu\|_2 = 1$ für den $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ in $(1,1)$ maximal ist.

Lösung. f ist differenzierbar, also ist $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$ notwendig für lokales Extremum. Diese Gleichungen geben $\frac{1}{2}x^2 - 1 - \frac{1}{4}y^2 = 0$, $-\frac{1}{2}xy = 0$. Aus der zweiten Glg. folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Für $x = 0$ folgt für die 1. Glg. $1 + \frac{1}{4}y^2 = 0$, die offensichtlich keine reelle Lösung besitzt. Für $y = 0$ folgt $x = \pm\sqrt{2}$. Mögliche lokale Extrema sind also in $(\sqrt{2}, 0)$ und $(-\sqrt{2}, 0)$

Die Hessematrix H von f in $(\pm\sqrt{2}, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

mit Hauptminoren $\pm\sqrt{2}$ und $\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

indefinit und

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

negativ definit, womit kein lokales Extremum in $(\sqrt{2}, 0)$ und ein lokales Maximum un $(-\sqrt{2}, 0)$ vorliegt.

Für $\nu = (\nu_x, \nu_y) \neq (0,0)$ gilt $\frac{\partial f}{\partial \nu} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})(\nu_x, \nu_y)$. Nach Cauchy–Schwarz gilt aber $\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| \leq \|(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})\|_2 \|(\nu_x, \nu_y)\|_2$ mit Gleichheit für $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ und (ν_x, ν_y) liner abhängig. Wegen $\|\nu\| = 1$ folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ für

$$\nu = \frac{1}{\|(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})\|_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)^T,$$

also für den auf 1 normierten Gradienten von f maximal ist. (Oder Sie zitieren Bsp. 22 3. Übung. klarerweise ohne Nennung der Beispielnummer aber mit genauer Formulierung des Ergebnisses)

Für den Punkt $(1,1)$ erhält man $\nabla f = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})^T$ und $\nu = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3, -2)^T$.

2 (10P): Bestimmen Sie die Abbildungsnorm der Abbildung

$$T:\ (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$$

$$Tf = (T_1 f, T_2 f) \qquad \text{mit } T_1 f = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx, \quad T_2 f = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} f(x^2)\,dx.$$

Lösung

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{1}{\|f\|_\infty} \sqrt{\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} f(x^2)\,dx\right)^2}\ :\ \|f\|_\infty \neq 0 \right\}.$$

Wegen $\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|\,dx$ folgt

$$\begin{aligned} \|T\| &\leq \sqrt{\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx\right)^2} \\ &= \sqrt{(\arctan x|_0^1)^2 + (-\mathrm{e}^{-x})|_0^1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (1-\mathrm{e}^{-1})^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Für $f(x) = 1,\ x \in [0,1]$ gilt

$$\|Tf\|_2 = \sqrt{\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x})\,dx\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (1-\mathrm{e}^{-1})^2}$$

und $\|f\|_\infty = 1$, also gilt $\|T\| \geq \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (1-\mathrm{e}^{-1})^2}$. Mit (1) folgt $\|T\| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (1-\mathrm{e}^{-1})^2}$.