**7.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019**

1. $F$ und $G$ seien zwei eindimensionale Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie:

$$\int_{]a,b]} G(x) d\mu_F(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{]a,b]} F(x-0) d\mu_G(x).$$

(Hinweis: $G(x) = G(a) + \int_{]a,x]} d\mu_G$)

2. $F$ sei eine eindimensionale Verteilungsfunktion im engeren Sinn. Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F(x+c) - F(x)) dx = c.$$

3. Eine zweidimensionale Normalverteilung hat bezüglich des zweidimensionalen Lebesguemaßes die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} (|\rho| < 1).$$

Bestimmen Sie die Randdichte von $Y$ und die bedingte Dichte von $X$ unter $Y = y$.

4. $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2$ seien zwei sigmaendliche Maßräume, $\nu_1$ und $\nu_2$ zwei weitere (sigmaendliche) Maße mit $\nu_i \ll \mu_i$. Zeigen Sie , dass dann auch

$$\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$$

und

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(\omega_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(\omega_2).$$

5. $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathfrak{T}$ eine Untersigmaalgebra von $\mathfrak{S}$ und $p$ eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit unter $\mathfrak{T}$, also ein Markovkern mit

$$p(\omega, A) = \mathbb{E}(A|\mathfrak{T})(\omega).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}(X|\mathfrak{T})(\omega) = \int X(x) p(\omega, dx).$$

6. Die gemeinsame Verteilung von $X$ und $Y$ hat bezüglich des zweidimensionalen Lebesguemaßes die Dichte

$$f(x,y) = c(x+y)[0 \leq x, y, \leq 1].$$

Bestimmen Sie $c$, $\mathbb{P}(X < 1/2|Y = y)$ und $\mathbb{E}(X|Y = y)$.

7. Die Zufallsvariable $Y$ hat eine Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$ mit der Dichte

$$f(y) = \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y}[y > 0].$$

Die bedingte Verteilung von $X$ unter $Y = y$ ist Poisson mit Parameter $y$:

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{y^x e^{-y}}{x!},\ x = 0, 1, \ldots$$

Bestimmen Sie die Verteilung von $X$.