Übungen zu Analysis 2, 2. Übung 19. 3. 2019

11. Beweisen Sie die Ungleichung von Young: Für $A, B > 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt
$$A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$$
Hinw.: Verwenden Sie die Konvexität der Exponentialfunktion.

12. Beweisen Sie die Ungleichung von Hölder: Für $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt für $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1 \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q}$$

13. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < \infty$ $(\sum_{n=1}^{n} x_n^p)^{1/p}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist. Hinw.: Für die Dreiecksungleichung zeige man
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$
und wende die Hölder-Ungleichung an.

14. Man zeige, dass alle Normen $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p, q \leq \infty$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Man zeige insbesondere, dass für $(1 \leq p < q < \infty$ $\|\cdot\|_p \geq \|\cdot\|_q \geq \|\cdot\|_\infty$ Hinweis: Man verwende, dass aus $0 < p < q$ und $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda^q \leq \lambda^p$ folgt.

15. Bestimmen Sie die Operatornormen der Identität als Abbildung
$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q) \text{ für } 1 \leq p < q \leq \infty$$
und von
$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1),$$
sowie von $A_x : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $\quad A_x y = (x, y)$ $((\cdot, \cdot)$ Skalarprodukt).

16. Zeigen Sie, dass die Gruppe $SO(n)$ der orthogonalen $n \times n$–Matrizen mit Determinante 1 abgeschlossen in $GL(n)$ ist, wenn man $GL(n)$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times n}$ auffasst.

    Hinw.: Verwenden Sie, dass eine $n \times n$–Matrix genau dann orthogonal ist, wenn alle ihre Spaltenvektoren Euklidische Norm 1 haben und ihre Determinante ± 1 ist. Verwenden Sie dann Prop. 6.1.12.

17. Zeigen Sie, dass für $A: \ (\mathbb{R}^n.\|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n.\|\cdot\|_p)$ und $\|A\| < \ln 2$ die Abbildung $x \mapsto e^A x$ bijektiv ist.

18. Zeigen Sie, dass für $r, s \in \mathbb{R}$ und A eine $n \times n$–Matrix $e^{rA}e^{sA} = e^{(r+s)A}$ gilt.

    Hinweis: Berechnen Sie $\frac{d}{dr}(e^{rA}e^{(u-r)A})$.

19. Für

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \begin{pmatrix} t \cosh t \\ te^{t^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

    berechne man $\int_0^1 F(t)\,dt$ und F'.

20. Bechnen Sie die Abbildungsnorm der lin. Abbildung T:

$$Tf(x) = \begin{pmatrix} \int_0^x f(t)\,dt \\ \int_x^1 f(s)\,dt \end{pmatrix}$$

    als Abbildung

$$(C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to ((C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \times (C[0,1], \|\cdot\|_\infty), \|\cdot\|_1)$$

    bzw. nach

$$(C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to ((C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \times (C[0,1], \|\cdot\|_\infty), \|\cdot\|_\infty).$$