Satz 3.3.2 Sind $f_1, f_2 \in L(V, W)$ und ist $(m_j)_{j \in I}$ ein Erzeugendensystem von V, so gilt $f_1 = f_2$ genau dann, wenn

$$f_1(m_j) = f_2(m_j) \text{ für alle } j \in I. \tag{3.4}$$

Beweis: Jeder Vektor $x \in V$ kann auf mindestens eine Art als Linearkombination $\sum_{j \in I} x_j m_j$ mit Skalaren $x_j \in K$ dargestellt werden. Laut Satz 2.5.6, besitzt jeder Vektorraum mindestens eine Basis, und laut Satz 2.5.3, besitzt jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung als Linearkombination von Basisvektoren. Aus (3.4) folgt daher

$$f_1(x) = \sum_{j \in I} x_j f_1(m_j) = \sum_{j \in I} x_j f_2(m_j) = f_2(x) \text{ für alle } x \in V.$$

Genauer $f_1(x) = f_1\left(\sum_{j \in I} x_j m_j\right) = \sum_{j \in I} f_1(x_j m_j) = \sum_{j \in I} x_j f_1(m_j) \overset{(3.4)}{=} \sum_{j \in I} x_j f_2(m_j) = \cdots = f_2(x)$.

Die Umkehrung ist klar. ... weil wenn $f_1 = f_2$, dann gilt natürlich (3.4). $\square$