Musterlösung zum 1. Übungstest

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Lösen Sie das folgende Cauchy-Problem mit der Methode der Charakteristiken:

$$\begin{aligned}(u+y)u_x + u_y &= u, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) &= x\end{aligned}$$

Das charakteristische System lautet

$$\frac{dx}{ds} = u + y, \quad \frac{dy}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = u$$
$$x(0,t) = t,\ y(0,t) = 0,\ u(0,t) = t$$

Dadurch ergibt sich

$$u(s,t) = te^s, \quad y(s,t) = s.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung für x ergibt

$$\frac{dx}{ds} = te^s + s.$$

Integrieren und Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf

$$x(s,t) = te^s + \frac{s^2}{2}.$$

Nach s und t auflösen ergibt

$$\begin{aligned} s &= y \\ t &= \left(x - \frac{y^2}{2}\right) e^{-y} \end{aligned}$$

und daher die gesuchte Lösung

$$u(x,y) = \left(x - \frac{y^2}{2}\right) e^{-y} e^y = x - \frac{y^2}{2}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(i) Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $a \in C^\infty(\mathbb{R})$.

  (a) Ist das Produkt au ein Element aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ oder $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

  (b) Zeigen Sie $(au)' = a'u + au'$. (1 Punkt)

(ii) Sei $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ die Delta-Distribution mit Pol in 0. Für welche $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt $a\delta_0' = 0$? (2 Punkte)

(i) (a) Die Abbildung $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\phi \mapsto a\phi$ ist linear und selbstadjungiert. Wir definieren $\langle au, \phi\rangle = \langle u, a\phi\rangle$. Es bleibt zu zeigen, dass diese Abbildung stetig auf dem Raum der Testfunktionen ist. Dann folgt die Aussage aus Satz 3.10.

Alternative: Direkter Beweis: Wir definieren für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ das Funktional $au : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\phi \mapsto \langle u, a\phi\rangle$. Das Funktional ist wohldefiniert und linear. Da $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt: für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}$ existieren $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ sodass $|\langle u, \phi\rangle| < C\|\phi\|_{C^k(K)}$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(K)$. Damit gilt für das Produkt au und $\phi \in \mathcal{D}(K)$ dass

$$\begin{aligned}|\langle au, \phi\rangle| = |\langle u, a\phi\rangle| &\le C\|a\phi\|_{C^k(K)} = C\sum_{j=0}^{k} \|(a\phi)^{(j)}\|_{C(K)} \\ &\le C\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\|a^{(j-i)}\|_{C(K)}\|\phi^{(i)}\|_{C(K)} \le \tilde{C}\|\phi\|_{C^k(K)}.\end{aligned}$$

Also ist au nach Lemma 3.4 eine Distribution.

  (b) Für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}\langle (au)', \phi\rangle &= -\langle au, \phi'\rangle = -\langle u, a\phi'\rangle = -\langle u, (a\phi)' - a'\phi\rangle = \langle u', a\phi\rangle + \langle u, a'\phi\rangle \\ &= \langle au' + a'u, \phi\rangle\end{aligned}$$

(ii) $a\delta_0' = 0$ bedeutet dass $\langle a\delta_0', \phi\rangle = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Für $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle a\delta_0', \phi\rangle = -\langle \delta_0, (a\phi)'\rangle = -\langle \delta_0, a'\phi\rangle - \langle \delta_0, a\phi'\rangle = -a'(0)\phi(0) - a(0)\phi'(0)$$

Damit gilt $a\delta_0' = 0$ für alle $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, die $a(0) = a'(0) = 0$ erfüllen.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Betrachten Sie für $k \in \mathbb{R}$ den Differentialoperator

$$Lu := u'' + k^2 u \quad \text{für} \quad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(i) Berechnen Sie alle reell-wertigen Fundamentallösungen U_ξ von L mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)

(ii) Besteht ein Zusammenhang zwischen U_0 und U_ξ? Falls ein Zusammenhang besteht, wie kann U_ξ aus U_0 berechnet werden? (1 Punkt)

(iii) Bestimmen Sie eine Greensche Funktion für $\Omega = (0, \infty)$. (2 Punkte)

(i) Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ ist gegeben durch

$$u_{hom}(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx).$$

Um eine Fundamentallösung mit Pol an ξ zu erhalten verwenden wir den Ansatz

$$U_\xi(x) = \begin{cases} c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) & \text{für } x < \xi \\ c_3 \sin(kx) + c_4 \cos(kx) & \text{für } x > \xi. \end{cases}$$

Die Koeffizienten c_i werden nun durch $\phi(\xi) = \langle LU_\xi, \phi \rangle$ für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) = \langle LU_\xi, \phi \rangle =& \langle U_\xi, L^*\phi \rangle \\ =& \int_{-\infty}^{\xi} (c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx))(\phi''(x) + k^2\phi(x))dx \\ &+ \int_{\xi}^{\infty} (c_3 \sin(kx) + c_4 \cos(kx))(\phi''(x) + k^2\phi(x))dx \end{aligned}$$

Mit partieller Integration folgt für diese Integrale

$$\begin{aligned} &\int (a \sin(kx) + b \cos(kx))(\phi''(x) + k^2\phi(x))dx \\ &\qquad = (a \sin(kx) + b \cos(kx))\phi'(x) + (-a \cos(kx) + b \sin(kx))k\phi(x). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\phi(\xi) = ((c_1 - c_3)\sin(k\xi) + (c_2 - c_4)\cos(k\xi))\phi'(\xi) + ((c_3 - c_1)\cos(k\xi) + (c_2 - c_4)\sin(k\xi))k\phi(\xi)$$

Daraus folgt, dass $c_1 - c_3 = -\frac{1}{k}\cos(k\xi)$ und $c_2 - c_4 = \frac{1}{k}\sin(k\xi)$ und damit lauten die gesuchten Fundamentallösungen mit Pol in ξ

$$\begin{aligned} U_\xi(x) &= \begin{cases} c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) & \text{für } x < \xi \\ (c_1 + \frac{1}{k}\cos(k\xi))\sin(kx) + (c_2 - \frac{1}{k}\sin(k\xi))\cos(kx) & \text{für } x > \xi \end{cases} \\ &= \begin{cases} c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) & \text{für } x < \xi \\ c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) + \frac{1}{k}\sin(k(x - \xi)) & \text{für } x > \xi. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Da L ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, ist durch $\tau_{-\xi}U_0$ eine Fundamentallösung mit Pol in $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben (siehe Satz 3.21), also $U_\xi(x) = U_0(x-\xi)$.

(iii) Eine Greensche Funktion $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ muss für festes $y \in \Omega$ erfüllen, dass

$$LG(\cdot, y) = \delta_y \quad \text{in } \Omega, \qquad G(\cdot, y) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega = \{0\}.$$

Also ist $G(x, y) = U_y(x)$, wobei die Konstanten so bestimmt werden müssen, dass $G(0, y) = 0$ erfüllt wird. Da $G(0, y) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_2$, ist die gesuchte Greensche Funktion

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1 \sin(kx) & \text{für } x < y \\ c_1 \sin(kx) + \frac{1}{k} \sin(k(x-y)) & \text{für } x > y. \end{cases}$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{für } (x,y) \in \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass für $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$ eine eindeutige klassische Lösung existiert. (2 Punkte)

(ii) Berechnen Sie für $\Omega = (0,\infty) \times (0,\pi)$ eine Lösung mithilfe des Separationsansatzes $u(x,y) = v(x)w(y)$. (2 Punkte) Diskutieren Sie die Eindeutigkeit der Lösung. (1 Punkt) Falls die Lösung nicht eindeutig ist, warum ist dies kein Widerspruch zum schwachen Maximumsprinzip? (1 Punkt)

(i) $u \equiv 0$ ist eine klassische Lösung des RWP. Das schwache Maximumsprinzip (Satz 4.10.ii) besagt: Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u \geq (\leq) 0$ gilt, dass $\sup\limits_{x\in\Omega} u = \sup\limits_{x\in\partial\Omega} u$ $\big(\inf\limits_{x\in\Omega} u = \inf\limits_{x\in\partial\Omega} u\big)$. Für eine klassische Lösung des RWP sind die Voraussetzungen erfüllt und $\sup\limits_{x\in\partial\Omega} u = \inf\limits_{x\in\partial\Omega} u = 0$. Daraus folgt $\sup\limits_{x\in\Omega} u = \inf\limits_{x\in\Omega} u = 0$, also ist $u \equiv 0$ die eindeutige klassische Lösung.

(ii) Durch Einsetzen des Separationsansatzes in die Differentialgleichung erhält man

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v''w + vw'' = 0.$$

Für $v, w \neq 0$ gilt also

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von y abhängt, müssen beide Seiten gleich einer Konstante k sein.
w kann nun durch die Differentialgleichung $w''(y)+kw(y) = 0$ mit den Randbedingungen $w(0) = 0 = w(\pi)$ berechnet werden. Wir unterscheiden 3 Fälle nach dem Vorzeichen von k:

(a) $k < 0$: Die allgemeine Lösung lautet $w(y) = c_1 e^{\sqrt{-k}x} + c_2 e^{-\sqrt{-k}x}$. Die RB können nur durch $c_1 = c_2 = 0$ erfüllt werden, also die triviale Lösung.

(b) $k = 0$: Die allgemeine Lösung lautet $w(y) = c_1 y + c_2$, wieder führen die RB auf die triviale Lösung $c_1 = c_2 = 0$.

(c) $k > 0$: Die allgemeine Lösung lautet $w(y) = c_1 \sin(\sqrt{k}x) + c_2 \cos(\sqrt{k}x)$. Die RB $w(0) = 0$ führt auf $c_2 = 0$ und aus $w(\pi) = 0$ folgt $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$, also $k = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$w(y) = c\sin(ny)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung $v''(x) = n^2 v(x)$ ist $v(x) = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}$. Aus der Randbedingung $v(0) = 0$ folgt $c_1 + c_2 = 0$. Damit ist eine Lösung des Randwertproblems durch

$$u_n(x,y) = c_1\big(e^{nx} - e^{-nx}\big)\sin(ny)$$

gegeben. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ so eine Lösung des RWP definiert ist, ist das RWP nicht eindeutig lösbar. Das schwache Maximumsprinzip ist in diesem Fall nicht anwendbar, da Ω unbeschränkt ist.