1. Seien $T > 0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, wobei $G := \Omega \times (0, T]$ und $\Gamma := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T))$. Betrachten Sie die Differentialoperatoren

$$L_1 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

und $L_2 u = L_1 u + c(x,t)u$, für eine symmetrische und gleichmäßig elliptische Matrix $A = (a_{ij}(x,t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} \in C(\overline{G})$, einen Vektor $b = (b_i(x,t)) \in \mathbb{R}^n$ und $c \in C(\overline{G})$. Zeigen Sie:

(i) Für $u \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $u_t + L_2 u \leq 0$ in G und $u \leq 0$ auf Γ, dass $u \leq 0$ in G.
Hinweis: *Beachten Sie, dass c negative Werte annehmen darf. Welche Differentialungleichung erfüllt $v = e^{\lambda t}u$?*

(ii) Für $u, v \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ mit

$$u_t + L_1 u + f(x,t,u) \leq v_t + L_1 v + f(x,t,v) \quad \text{in } G \text{ und } u \leq v \text{ auf } \Gamma$$

gilt $u \leq v$ in G.

(iii) Für eine stetig differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ gilt, dass das Anfangsrandwertproblem für die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_t + L_1 u + f(x,t,u) = 0 & \text{in } G, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

höchstens eine klassische Lösung haben kann.

(i) Was heißt gleichmäßig elliptisch?

$\forall x\ \forall t$: $\lambda_1(x,t), \dots, \lambda_n(x,t) > 0$ bzw. < 0, wobei das die EW von $A(x,t)$ sind.

Sei also $u \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $u_t + L_2 u \leq 0$ in G und $u \leq 0$ auf γ.

$v := e^{\lambda t} u$; $\quad \partial_t v = \lambda e^{\lambda t} u + e^{\lambda t} u_t = \lambda v + e^{\lambda t} u_t \leq \lambda v - e^{\lambda t} L_2 u = \lambda v - L_2 v$

$$\Rightarrow v_t + L_2(v) \leq \lambda v \Rightarrow v_t + (L_1 v - c(x,t)v) - \lambda v \leq 0 \Rightarrow v_t + L_1 v + \underbrace{(-c(x,t) - \lambda)}_{\tilde{c}_\lambda(x,t)} v \leq 0$$

Wegen $c \in C(\overline{G})$ gilt für hinr. kleines μ, dass $\tilde{c}_\mu \geq 0$

Wir definieren $\tilde{L}_2 := L_1 + \tilde{c}_\mu$, es gilt also $v_t + \tilde{L}_2 v \leq 0$

$u \leq 0$ auf $\gamma \Rightarrow v = e^{\lambda t} u \leq 0$ auf γ

Nach dem schwachen Maximumprinzip Satz 6.37. gilt $\quad \sup\limits_{(x,t)\in G} v(x,t) \leq \max\{0, \sup\limits_{(x,t)\in\Gamma} v(x,t)\} = 0$

also $0 \geq v = e^{\lambda t} u$ in G, daher auch $u \leq 0$ in G

(ii) Betrachte $w := u - v$

mit $\xi_{x,t} \in [\min(u,v), \max(u,v)]$

$$\text{es gilt } w_t = u_t - v_t \leq L_1 v + f(x,t,v) - L_1 u - f(x,t,u) = -L_1 w + (f(x,t,v) - f(x,t,u)) \overset{(*)}{=} -L_1 w - \underbrace{\partial_3 f(x,t,\xi_{x,t})}_{c(x,t):=} w$$

$L_2 := L_1 + c$, es gilt $w_t + L_2 w \leq 0$ in G

und $w \leq 0$ auf Γ; nach (i) gilt $w \leq 0$ in G, also $u \leq v$ in G

(*) für x, t betrachte $\varphi_{x,t}(z) := f(x,t,z)$, es gilt $\varphi_{x,t}(v(x,t)) - \varphi_{x,t}(u(x,t)) = -\varphi'_{x,t}(\xi_{x,t})\, w(x,t) = -\partial_3 f(x,t,\xi_{x,t})\, w(x,t)$

$$\varphi'_{x,t}(z) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\varphi_{x,t}(z+h) - \varphi_{x,t}(z)}{h}} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x,t,z+h) - f(x,t,z)}{h}} = \partial_3 f(x,t,z)$$

(iii) Seien u, v Lösungen des Problems.

es gilt $u_t + L_1 u + f(x,t,u) = v_t + L_1 v + f(x,t,v)$ in G und $\begin{cases} u(x,t) = u_0 = v(x,t) \text{ in } \Omega \\ u = g = v \text{ auf } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$

$\to u = v$ auf Γ

mit (ii) folgt $u \leq v$ und $u \geq v$ also $u = v$

2. Betrachten Sie die skalare Reaktions-Diffusionsgleichung

$$u_t = \Delta u + \lambda u - u^3 \quad \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\,,$$

für $u(x,t) \in \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ und einem negativen Parameter λ.

(i) Bestimmen Sie die räumlich homogenen Lösungen $u = u(t)$ und untersuchen Sie deren asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$.
Hinweis: Die räumlich homogenen Lösungen erfüllen eine gewöhnliche DGl. Bestimmen Sie die Stationärzustände dieser DGl und deren Stabilität.

(ii) Betrachten Sie das ARWP mit der Randbedingung

$$u(x,t) = 0 \text{ für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)\,,$$

und beschränkten Anfangsdaten

$$m \le u(x,0) \le M \text{ für alle } x \in \Omega\,.$$

Zeigen Sie, dass klassische Lösungen $u(x,t)$ des ARWP und die räumlich homogenen Lösungen $\underline{u}(t)$ bzw. $\overline{u}(t)$ von dem ARWP mit Anfangsbedingungen $\underline{u}(0) = \min\{0,m\}$ bzw. $\overline{u}(0) = \max\{0,M\}$ die Ungleichungen

$$\underline{u}(t) \le u(x,t) \le \overline{u}(t) \quad \text{für } x \in \Omega\,,\ t \ge 0\,,$$

erfüllen.

(iii) Was können Sie aus diesen Ungleichungen für das zeitlich asymptotische Verhalten von klassischen Lösungen $u(x,t)$ des ARWP schließen?

(i) Für eine räumlich homogene Lsg. gilt $u_t = \lambda u - u^3$, wobei $\lambda < 0$

$\rightsquigarrow \frac{u_t}{\lambda u - u^3} = 1$; $\int \frac{1}{\lambda u - u^3}\, du \;\Big|\, \begin{smallmatrix} u^2 = v \\ \frac{dv}{du} = 2u \end{smallmatrix} \Big| = \int \frac{1}{2v(\lambda - v)}\, dv \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\lambda v}\, dv + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\lambda(\lambda - v)}\, dv = \frac{1}{2\lambda} \ln(v) - \frac{1}{2\lambda} \ln(\lambda - v)$

$\frac{a}{v} + \frac{b}{\lambda - v} \overset{!}{=} \frac{1}{v(\lambda - v)}$, also $a(\lambda - v) + b\, v = 1$

mit $v = \lambda$: $b\lambda = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{\lambda}$

und: $v = 0$: $a\lambda = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\lambda}$

(*)

also $\int \frac{1}{\lambda u - u^3}\, du = \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{u^2}{u^2 - \lambda}\right)$

$\frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{u^2}{u^2 - \lambda}\right) = t + \tilde{c} \Rightarrow \frac{u^2}{u^2 - \lambda} = c\, e^{2\lambda t} \Rightarrow u^2 = c e^{2\lambda t} u^2 - c e^{2\lambda t} \lambda$

$\Rightarrow u^2 (1 - c e^{2\lambda t}) = -c\lambda e^{2\lambda t}$

$\Rightarrow u = \pm\sqrt{\frac{c\lambda e^{2\lambda t}}{c e^{2\lambda t} - 1}} = \Big(\pm \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\in \mathbb{C}}\, e^{\lambda t} (e^{2\lambda t} - \tfrac{1}{c})^{-1/2}\Big)$

$\partial_t u(t) = \sqrt{\lambda}\, \Big(\lambda e^{\lambda t} (e^{2\lambda t} - \tfrac{1}{c})^{-\frac{1}{2}} + e^{\lambda t} (-\tfrac{1}{2}) (e^{2\lambda t} - \tfrac{1}{c})^{-\frac{3}{2}} 2\lambda e^{2\lambda t}\Big)$

$= \lambda\, (u^{-1} + \cdots)$ ✓ (mit Maple)

$c \neq 0$, weil $c = e^{2\lambda \tilde{c}}$

$\Big(\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} \pm e^{\lambda t} \Big(\lambda\, (e^{2\lambda t} - \tfrac{1}{c})^{-1}\Big)^{1/2} = 0$

$\lambda u - u^3 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \lor \lambda = u^2 \Leftrightarrow u = 0 \lor u = \pm \overbrace{\sqrt{\lambda}}^{\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$

$\partial_u (\lambda u - u^3)\Big|_{u=0} = \lambda - 3u^2 \big|_{u=0} = \lambda < 0$ also asymptotisch stabil

(ii) Wir wollen $\underline{u}(0) = \pm\sqrt{-\lambda}\; 1\; (\tfrac{1}{c} - 1)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{(\underline{u}(0))^2}{(-\lambda)} = \left(\frac{1}{c} - 1\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{c} - 1 = -\frac{\lambda}{(\underline{u}(0))^2} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{((\underline{u}(0))^2 - \lambda)}{(\underline{u}(0))^2} \Leftrightarrow c = \frac{(\underline{u}(0))^2}{(\underline{u}(0))^2 - \lambda}$

Es gilt $u_t - \Delta u - \lambda u + u^3 = 0 = \bar{u} - \Delta\bar{u} - \lambda\bar{u} + u^3$ in $\Omega \times]0,T]$ für bel. $T > 0$

und $u(x,0) \le M \le \max\{0, M\} = \bar{u}(0)$ für $x \in \Omega$

wir haben die räuml. homogene Lsg. $\bar{u}(t) = \pm\sqrt{-\lambda}\, e^{\lambda t} \left(\frac{1}{c} - e^{2\lambda t}\right)^{-1/2}$

da 0 eine Ruhelage von $\bar{u}$ ist und $\bar{u}(0) \geq 0$ folgt $\forall t \geq 0$: $\bar{u}(t) \geq 0$

und daher auf $\partial\Omega \times]0,\infty[$: $u(x,t) = 0 \leq \bar{u}(t)$

Nach Aufgabe 1 gilt deshalb $u(x,t) \leq \bar{u}(t)$ für $x \in \Omega$, $t \in]0,T]$, aber weil T bel. ist für $t \geq 0$

iii) für $t \to \infty$ gehen die Lsg. gegen 0

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und sei u eine klassische Lösung des parabolischen Problems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\,, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega\,, \end{cases}$$

wobei $u_0 \geq 0$ in Ω und $c \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie: $u \geq 0$ in $\Omega \times (0,\infty)$. *Achtung:* c ist also nicht notwendig nichtnegativ!

Hinweis: Welche Differentialgleichung löst $v = \exp(\lambda t)u$?

$v := e^{\lambda t} u$ also $v_t = \lambda e^{\lambda t} u + e^{\lambda t} u_t = \lambda v + e^{\lambda t}(\Delta u - cu) = \Delta u - \underbrace{(c+\lambda)}_{\tilde{c} :=} v$

also mit $L := -\Delta + \tilde{c}$ gilt $v_t - L = 0$

und wegen $c \in L^\infty(\Omega)$ gilt für λ hinr. groß $c \geq 0$

es gilt nach dem schwachen Maximumprinzip, Satz 6.31

für $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$, dass $u(x,t) \geq \inf_{(x,t)\in G} u(x,t) \geq \min\{0, \underbrace{\inf_{(x,t)\in \Gamma} u(x,t)}_{\geq 0}\} \geq 0$

4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $g, u_0 \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass das semilineare Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta(u^\alpha) = g(x) & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\,, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega\,, \end{cases} \qquad (1)$$

höchstens eine nichtnegative Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie zwei Lösungen u und v des obigen Anfangsrandwertproblems und benutzen Sie die Lösung $w(t)$ von

$$\Delta w(t) = u(t) - v(t) \quad \text{in}\, \Omega\,, \quad w(t) = 0 \quad \text{auf}\, \partial\Omega \qquad (2)$$

als Testfunkton.

Nach Satz 5.20 existiert für jedes t eindeutige schwache Lsg. $w \in H_0^1(\Omega)$ von (2)

also $T(w(t)) = 0$ und für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$ gilt $\int_\Omega \nabla w(t) \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega (u(t) - v(t))\, \phi \, dx$