3. Übungstest Analysis 2 26. 6. 2019

1 (10P): Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y) = x^{1/5}y^{4/5}$ unter der Nebenbedingung $x + 2y = 2$ mithilfe von Lagrangemultiplikatoren für $x, y > 0$.

Lösung.: $\nabla f \neq (0,0)$ für $x, y > 0$, also ist etwaiges Maximum Lösung der Gleichungen $\nabla F = (0,0,0)$ mit $F(x,y,\lambda) = x^{1/5}y^{4/5} + \lambda(x + 2y - 2)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x^{-4/5}y^{4/5} + \lambda =& 0 \\ \frac{4}{5}x^{1/5}y^{-1/5} + 2\lambda =& 0 \\ x + 2y - 2 =& 0. \end{aligned}$$

Gibt $2x^{-4/5}y^{4/5} = 4x^{1/5}y^{-1/5} = -10\lambda$ bzw. $y = 2x$ und mit der 3. Glg. $5x - 2 = 0$, also ist $(x,y) = (2/5, 4/5)$ einziges mögliches Maximum von f unter der Nebenbedingung. Die Funktion $g(x) = f(x, 1 - x/2)$ ist auf der kompakten Menge $[0,1]$ stetig mit $g(0) = g(1) = 0$ und $g(x) \geq 0$. Sie hat damit ein Maximum in $(0,1)$. Da der Wertebereich von g in $(0,1)$ gleich dem Wertebereich von f in $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ unter der Nebenbedingung ist, folgt dass f in $(2/5, 4/5)$ das Maximum $(2/5)^{1/5}(4/5)^{4/5} = 4/5\sqrt[5]{2}$ unter der Nebenbedingung in $\{(x,y) : x, y > 0\}$ hat.

2 (10P): Zeigen Sie:

– Ein Unterraum eines Hausdorffraumes ist mit der Relativtopologie ein Hausdorffraum.

– Sind X_i, $i \in I$ Hausdorffräume, so ist $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie ein Hausdorffraum.

Lösung: Sei $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffraum, $A \subseteq X$ und $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$. Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffraum ist, gibt es $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $a_i \in O_i$, $i = 1, 2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dann sind nach der Definition der Relativtop. die Mengen $A \cap O_1$ und $A \cap O_2$ disjunkte, in der Relativtopologie von A offene Mengen. Wegen $a_i \in A \cap O_i$, $i = 1, 2$ sind dies disjunkte Umgebungen von a_1, a_2 bez. der Relativtopologie. Damit ist A mit der Relativtopologie ein Hausdorffraum.

Für $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ mit $x \neq y$ gibt es $j \in I$ mit $x_j \neq y_j$. Da X_j Hausdorffraum ist, gibt es disjunkte Umgebungen O_{x_j}, O_{y_j} von x_j, y_j in X_j. Da pr_j stetig auf $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttop. ist, sind $\mathrm{pr}_j^{-1}(O_{x_j})$, $\mathrm{pr}_j^{-1}(O_{y_j})$ offen und disjunkt im Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$. Wegen $x \in \mathrm{pr}_j^{-1}(O_{x_j})$, $y \in \mathrm{pr}^{-1}(O_{y_j})$ sind dies disjunkte Umgebungen von x resp. y im Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$. Damit ist $\prod_{i \in I} X_i$ ein Hausdorffraum.