5.1 DER (HERMANN-BERNOULLI-LAPLACE-HAMILTON-PAULI-) RUNGE-LENZ VEKTOR

Der Vektor mit vielen Entdeckern und Namensgebern lautet

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m}\mathbf{p} \times \mathrm{L} - k\hat{\mathbf{r}}, \tag{5.1}$$

mit Masse m, Impuls $\mathbf{p}$, Drehimpuls $\mathbf{L}$, und Einheitsvektor in Radialrichtung ist $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|r|$. Reihen wir uns hinter die Größen der Physik und lernen den Vektor ein bisschen kennen.

a) Zeigen Sie, dass

$$\{A_x, A_y\} = -\frac{2}{m}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}\right) L_z. \tag{5.2}$$

Für welchen Hamiltonian (bzw. welche Art von Potential) erwarten Sie daher, dass der Runge-Lenz Vektor wichtig wird? *Hinweis: Es ist diesmal kürzer das die Poisson-Klammer über ihre Definition (Ableitungen) zu rechnen. Falls Sie es mit Poisson Klammern rechnen, lautet jene von einem Impuls p_i und dem Einheitsvektor $1/r$ in Radialrichtung $\{p_i, 1/r\} = x_i/r^3$.*

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

$$I := \{x, y, z\}$$

a) $$p \times L = p \times (r \times p) = |p|^2 r - p(p \cdot r)$$

$$A = \frac{1}{m}(p \times L) - k\hat{r} = \frac{1}{m}|p|^2 r - \frac{1}{m}(p \cdot r)\, p - \frac{k}{|r|} r$$

$$\forall j \in I: \; A_j = \frac{1}{m} r_j \sum_{i \in I} p_i^2 - \frac{1}{m} p_j \sum_{i \in I} r_i p_i - k\left(\sum_{i \in I} r_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} r_j$$

$$\ell \in I: \; \frac{\partial}{\partial r_\ell} A_j = \begin{cases} k\left(\sum_{i \in I} r_i^2\right)^{-\frac{3}{2}} r_\ell r_j - \frac{1}{m} p_j p_\ell & , \text{ falls } \ell \neq j \\ \frac{1}{m}\sum_{i \in I} p_i^2 + k\left(\sum_{i \in I} r_i^2\right)^{-\frac{3}{2}} r_j^2 - k\left(\sum_{i \in I} r_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{m} p_j^2 & , \text{ falls } \ell = j \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\ell} A_j = \begin{cases} \frac{2}{m} r_j p_\ell - \frac{1}{m} p_j r_\ell & , \text{ falls } \ell \neq j \\ \frac{2}{m} r_j p_j - \frac{1}{m}\sum_{i \in I} r_i p_i - \frac{1}{m} p_j r_j & , \text{ falls } \ell = j \end{cases}$$

$$\{A_x, A_y\} = \sum_{\ell \in I}\left(\frac{\partial A_x}{\partial r_\ell}\frac{\partial A_y}{\partial p_\ell} - \frac{\partial A_x}{\partial p_\ell}\frac{\partial A_y}{\partial r_\ell}\right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial r_x}\frac{\partial A_y}{\partial p_x} - \frac{\partial A_x}{\partial p_x}\frac{\partial A_y}{\partial r_x} + \frac{\partial A_x}{\partial r_y}\frac{\partial A_y}{\partial p_y} - \frac{\partial A_x}{\partial p_y}\frac{\partial A_y}{\partial r_y} + \frac{\partial A_x}{\partial r_z}\frac{\partial A_y}{\partial p_z} - \frac{\partial A_x}{\partial p_z}\frac{\partial A_y}{\partial r_z}$$

$$= \left(\frac{1}{m}|p|^2 + k|r|^{-3} r_x^2 - k|r|^{-1} - \frac{1}{m}p_x^2\right)\left(\frac{2}{m} r_y p_x - \frac{1}{m} p_y r_x\right) - \left(\frac{2}{m} r_x p_x - \frac{1}{m}(r \cdot p) - \frac{1}{m} p_x r_x\right)\left(k|r|^{-3} r_y r_x - \frac{1}{m} p_y p_x\right) +$$
$$\left(k|r|^{-3} r_x r_y - \frac{1}{m} p_x p_y\right)\left(\frac{2}{m} r_y p_y - \frac{1}{m}(r \cdot p) - \frac{1}{m} p_y r_y\right) - \left(\frac{2}{m} r_x p_y - \frac{1}{m} p_x r_y\right)\left(\frac{1}{m}|p|^2 + k|r|^{-3} r_y^2 - k|r|^{-1} - \frac{1}{m} p_y^2\right) +$$
$$\left(k|r|^{-3} r_x r_z - \frac{1}{m} p_x p_z\right)\left(\frac{2}{m} r_y p_z - \frac{1}{m} p_y r_z\right) - \left(\frac{2}{m} r_x p_z - \frac{1}{m} p_x r_z\right)\left(k|r|^{-3} r_y r_z - \frac{1}{m} p_y p_z\right)$$

$$= \frac{2}{m^2}|p|^2 r_y p_x - \frac{1}{m^2}|p|^2 p_y r_x + \frac{2k}{m}|r|^{-3} r_x^2 r_y p_x - \frac{k}{m}|r|^{-3} r_x^3 p_y - \frac{2k}{m}|r|^{-1} r_y p_x + \frac{k}{m}|r|^{-1} p_y r_x$$
$$- \frac{2}{m^2} r_y p_x^3 + \frac{1}{m^2} p_y p_x^2 r_x - \frac{k}{m}|r|^{-3} r_x^2 r_y p_x + \frac{1}{m^2} r_x p_y p_x^2 + \frac{k}{m}|r|^{-3} r_x r_y^2 p_y - \frac{1}{m^2} p_x r_y p_y^2$$
$$- \frac{2}{m^2}|p|^2 r_x p_y - \frac{2k}{m}|r|^{-3} r_y^2 r_x p_y + \frac{2k}{m}|r|^{-1} r_x p_y + \frac{2}{m^2} r_x p_y^3 + \frac{1}{m^2}|p|^2 p_x r_y + \frac{k}{m}|r|^{-3} p_x r_y^3 - \frac{k}{m}|r|^{-1} p_x r_y$$
$$- \frac{1}{m^2} p_x r_y p_y^2 + \frac{2k}{m}|r|^{-3} \cancel{r_x} r_y r_z p_z - \frac{k}{m}|r|^{-3} r_x r_z^2 p_y - \frac{2}{m^2} p_x r_y p_z^2 + \frac{1}{m^2} \cancel{p_x p_y} p_z r_z$$
$$- \frac{2k}{m} \cancel{|r|^{-3}} r_x p_z r_y r_z + \frac{2}{m^2} r_x p_z^2 p_y + \frac{k}{m}|r|^{-3} p_x r_z^2 r_y - \frac{1}{m^2} \cancel{p_x p_y} p_z r_z$$

$$= r_y p_x \frac{k}{m}|r|^{-3}\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right) - r_x p_y \frac{k}{m}|r|^{-3}\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right) - \frac{2}{m^2} r_y p_x\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) +$$
$$\frac{2}{m^2} r_x p_y\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{3k}{m}|r|^{-1} r_y p_x + \frac{3k}{m}|r^{-1}| p_y r_x - \frac{3}{m^2}|p|^2 r_x p_y + \frac{3}{m^2}|p|^2 p_x r_y$$

$$= \frac{2k}{m}|r|^{-1} L_z - \frac{1}{m^2}|p|^2 L_z = -\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2m}|p|^2 - k|r|^{-1}\right) L_z$$

5.3 KANONISCHE TRANSFORMATION FÜR EIN TEILCHEN IM GRAVITATIONSFELD

Die Hamiltonfunktion $H(q,p)$ eines Teilchen der Masse m sei gegeben durch

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

Durch die geschickte kanonische Transformation

$$\bar{q}(q,p) = -p \quad \text{und} \quad \bar{p}(q,p) = q + Ap^2, \quad A \in \mathbb{R}$$

kann die Berechnung der Bewegungsgleichungen erleichtert werden.

a) Beweisen Sie, dass es sich bei der obigen Koordinatentransformation um eine kanonische Transformation handelt.

Def.: Sei $d \in \mathbb{N}$ und $H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}: (x,y) \mapsto H(x,y)$ und seien $p,q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ mit

$\dot{q} = \nabla_y H(q,p)$ und $\dot{p} = -\nabla_x H(q,p)$, sei weiters $\tau: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

ein Diffeomorphismus, dann heißt τ kanonische Transformation,

wenn für $\bar{H}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}: (\bar{x},\bar{y}) \mapsto H(\tau^{-1}(\bar{x},\bar{y}))$ und $\bar{q}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d: t \mapsto \pi_1(\tau(q(t),p(t)))$

sowie $\bar{p}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d: t \mapsto \pi_2(\tau(q(t),p(t)))$ die Glg. $\dot{\bar{q}} = \nabla_{\bar{y}} \bar{H}(\bar{q},\bar{p})$ und $\dot{\bar{p}} = -\nabla_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{q},\bar{p})$ gilt.

Bew. In unserem Fall ist $\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}: (x,y) \mapsto (-y, x+Ay^2)$ mit $A \in \mathbb{R}$

$(u,v) = \tau(x,y) = (-y, x+Ay^2) \Leftrightarrow u = -y \wedge v = x + Ay^2 \Leftrightarrow y = -u \wedge x = v - Au^2$

daher $\tau^{-1}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}: (u,v) \mapsto (v - Au^2, -u)$

also $\bar{H}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}: (\bar{x},\bar{y}) \mapsto H(\bar{y} - A\bar{x}^2, -\bar{x})$

$\bar{q}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto -p(t)$ $\qquad$ $\bar{p}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto q(t) + A(p(t))^2$

$\partial_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = -2A\bar{q}\, \partial_x H(q,p) - \partial_y H(q,p) = -(\dot{q} + 2Ap\dot{p}) = -\dot{\bar{p}}$

$\partial_{\bar{y}} \bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = \partial_x H(q,p) = -\dot{p} = \dot{\bar{q}}$ $\qquad \square$

b) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q},\bar{p})$ in den neuen Koordinaten $(\bar{q},\bar{p})$. Für welchen Wert von A wird $\bar{q}$ eine zyklische Koordinate in $\bar{H}(\bar{q},\bar{p})$?

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

$\bar{H}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}: (\bar{x},\bar{y}) \mapsto H(\bar{y} - A\bar{x}^2, -\bar{x}) = \frac{\bar{x}^2}{2m} + mg(\bar{y} - A\bar{x}^2) = \bar{x}^2\left(\frac{1}{2m} - mgA\right) + mg\bar{y}$

$\bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = \bar{q}^2\left(\frac{1}{2m} - mgA\right) + mg\bar{p}$

$\frac{1}{2m} - mgA = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2m^2 g}$ dann ist $\bar{q}$ (bzw. $\bar{x}$) eine zyklische Koordinate

c) Lösen Sie für $A = 1/(2m^2 g)$ die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für $\bar{q}$ und $\bar{p}$. Transformieren Sie zurück um die alten Koordinaten $q(q_0, p_0, t)$ und $p(q_0, p_0, t)$ als Funktion der Zeit und der Anfangsbedingungen $q_0 = q(0)$ und $p_0 = p(0)$ zu finden.

$\bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = mg\bar{p}$ und $\dot{\bar{q}} = \partial_{\bar{y}} \bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = mg \Rightarrow \bar{q}(t) = mgt + c_1$ für ein $c_1 \in \mathbb{R}$

$\dot{\bar{p}} = -\partial_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = 0 \Rightarrow \bar{p}(t) = c_2$ für ein $c_2 \in \mathbb{R}$

$\tau^{-1}(\bar{q}(t), \bar{p}(t)) = (\bar{p}(t) - A(\bar{q}(t))^2, -\bar{q}(t)) = \left(c_2 - \frac{1}{2m^2 g}(mgt + c_1)^2, mgt + c_1\right)$

$q(t) = c_2 - \frac{1}{2m^2 g}(mgt + c_1)^2$ und $p(t) = mgt + c_1$ und $p(0) = c_1 = p_0$ und $q(0) = c_2 - \frac{1}{2m^2 g} p_0^2 = q_0$

also ist $c_2 = q_0 + \frac{1}{2m^2 g}$ und daher $q(t) = q_0 + \frac{1}{2m^2 g}(mgt + p_0)^2$ und $p(t) = mgt + p_0$

a) Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{\bar{q}, \bar{p}\}$ und zeigen damit, dass folgende Transformation kanonisch ist:

$\Omega_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 1+\sqrt{x}\cos(y) > 0\}$

$$\bar{q}(q,p) = \ln\left(1+\sqrt{q}\cos(p)\right)$$
$$\bar{p}(q,p) = 2(1+\sqrt{q}\cos(p))\sqrt{q}\sin(p) = 2\sqrt{q}\sin(p) + 2q\cos(p)\sin(p)$$

$$\{\bar{q},\bar{p}\} = \frac{\partial\bar{q}}{\partial q}\frac{\partial\bar{p}}{\partial p} - \frac{\partial\bar{q}}{\partial p}\frac{\partial\bar{p}}{\partial q} = \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos(p)} q^{-\frac{1}{2}}\cos(p)\left(\sqrt{q}\cos(p) + q\left((\cos(p))^2 - (\sin(p))^2\right)\right) +$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{q}\cos(p)}\sqrt{q}\sin(p)\left(q^{-\frac{1}{2}}\sin(p) + 2\cos(p)\sin(p)\right)$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos(p)}\left((\cos(p))^2 + \sqrt{q}\cos(p)\left((\cos(p))^2 - (\sin(p))^2\right) + (\sin(p))^2\left(1+2\sqrt{q}\cos(p)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos(p)}\left((\cos(p))^2 + \sqrt{q}(\cos(p))^3 - \sqrt{q}\cos(p)(\sin(p))^2\right) + (\sin(p))^2 + 2\sqrt{q}\cos(p)(\sin(p))^2\Big)$$
$$= \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos(p)}\left(1+\sqrt{q}\cos(p)\right)\left((\cos(p))^2 + (\sin(p))^2\right) = 1$$

$\{\bar{q},\bar{q}\} = -\{\bar{q},\bar{q}\} \Leftrightarrow 2\{\bar{q},\bar{q}\} = 0 \Rightarrow \{\bar{q},\bar{q}\} = 0$, analog $\{\bar{p},\bar{p}\} = 0$

wir wissen $\Rightarrow$ kanonische Transformation

b) Zeigen Sie weiters, dass

$$F_3(p,\bar{q}) = -(e^{\bar{q}}-1)^2\tan(p).$$

eine generierende Funktion dieser Transformation ist.

$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}(p,\bar{q}) = (\cos(p))^{-2}(e^{\bar{q}}-1)^2 \Leftarrow e^{\bar{q}}-1 = \sqrt{q}\cos(p) \Leftarrow \bar{q} = \ln(1+\sqrt{q}\cos(p))$

$\bar{p} = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}}(p,\bar{q}) = \tan(p)\,2(e^{\bar{q}}-1)e^{\bar{q}} = \tan(p)\,2(\sqrt{q}\cos(p))(1+\sqrt{q}\cos(p)) = 2(1+\sqrt{q}\cos(p))\sqrt{q}\sin(p)$

c) Für welche Werte α und β ist die folgende Transformation kanonisch?

$$\bar{q}(q,p) = q^{\alpha}\cos(\beta p)$$
$$\bar{p}(q,p) = q^{\alpha}\sin(\beta p)$$

Fall 1: $\alpha = 0$: $\{\bar{q},\bar{p}\} = \underbrace{\frac{\partial\bar{q}}{\partial q}}_{=0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial p} - \frac{\partial\bar{q}}{\partial p}\underbrace{\frac{\partial\bar{p}}{\partial q}}_{=0} = 0 \rightarrow$ nicht kanonisch

Fall 2: $\beta = 0$: $\{\bar{q},\bar{p}\} = \frac{\partial\bar{q}}{\partial q}\underbrace{\frac{\partial\bar{p}}{\partial p}}_{=0} - \frac{\partial\bar{q}}{\partial p}\underbrace{\frac{\partial\bar{p}}{\partial q}}_{=0} = 0 \rightarrow$ nicht kanonisch

Fall 3: $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$: $\{\bar{q},\bar{p}\} = \frac{\partial\bar{q}}{\partial q}\frac{\partial\bar{p}}{\partial p} - \frac{\partial\bar{q}}{\partial p}\frac{\partial\bar{p}}{\partial q} = \beta\alpha q^{\alpha-1}(\cos(\beta p))^2 q^{\alpha} + \beta q^{\alpha}\alpha q^{\alpha-1}(\sin(\beta p))^2 = \beta\alpha q^{2\alpha-1}$

Fall 3.1: $\alpha = \frac{1}{2}$: so gilt $\{\bar{q},\bar{p}\} = \frac{\beta}{2}$ also
- für $\beta = 2$: kanonische Transformation
- für $\beta \neq 2$: nicht kanonisch

Fall 3.2: $\alpha > \frac{1}{2}$: so gilt $\gamma := 2\alpha - 1 > 0$ und $\{\bar{q},\bar{p}\} = \beta\alpha q^{\gamma}$, seien $q_1 \neq q_2$ im Def. Bereich der Transformation

ang. $\beta\alpha q_1^{\gamma} = 1 = \beta\alpha q_2^{\gamma} \Rightarrow q_1^{\gamma} = q_2^{\gamma}$ und wegen Injektivität

$q_1 = q_2$ $\rightarrow$ nicht kanonisch

Fall 3.3: $\alpha < \frac{1}{2}$ so gilt $\gamma := 2\alpha - 1 < 0$ und $\{\bar{q},\bar{p}\} = \beta\alpha q^{\gamma}$ seien $q_1 \neq q_2$ o.B.d.A. positiv so gilt wegen

Inj.: $q_1^{\gamma} \neq q_2^{\gamma}$ $\rightarrow$ nicht kanonisch