2.7.8 Proposition. Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\phi : \mathbb{Q} \to K$, die nicht identisch gleich 0_K ist, und welche mit der Addition und Multiplikation verträglich ist. Diese Abbildung ist dann injektiv und auch mit $-$ sowie mit den Ordnungen $<$ (und daher auch $\leq$) verträglich.

Beweis.

$\rightsquigarrow$ Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$ haben wir im Abschnitt über die natürlichen Zahlen eine Funktion $n \mapsto nx$ von $\mathbb{N}$ nach K rekursiv durch $1x = x$ und $(n')x = nx + x$ definiert, siehe Beispiel 2.3.4. Ok. Nun nehmen wir für $x \in K$ das multiplikativ neutrale Element 1_K von K, und bezeichnen mit $\phi : \mathbb{N} \to K$ die entsprechende Funktion $n \mapsto n1_K$, welche offensichtlicherweise $\phi(1) = 1_K$ und $\phi(n+1) = \phi(n) + 1_K$ erfüllt. ... weil $\phi(1) = 1 \cdot 1_K = 1_K$ und $\phi(n+1) = (n+1) \cdot 1_K = n \cdot 1_K + 1 \cdot 1_K = \phi(n) + 1_K$.

Mit vollständiger Induktion nach m zeigt man leicht, dass $\phi(n+m) = \phi(n) + \phi(m)$ und $\phi(n \cdot m) = \phi(n) \cdot \phi(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Induktionsanfang: $A^+(1)$: Wir fangen mit 1 und nicht mit 0 an, weil $0 \notin \mathbb{N}$. Wegen oben ist $\phi(1) = 1_K \wedge \phi(n+1) = \phi(n) + 1_K \Rightarrow \phi(1+m) = \phi(1) + \phi(m)$;
Induktionsschritt: $A^+(n) \Rightarrow A^+(n+1)$: $\phi(n+1+m) = \phi(n) + \phi(1+m) = \phi(n) + \phi(1) + \phi(m) = \phi(n+1) + \phi(m)$;
Induktionsanfang: $A^\times(1)$: $\phi(1 \cdot m) = \phi(m) = 1_K \cdot \phi(m) = \phi(1) \cdot \phi(m)$;
Induktionsschritt: $A^\times(n) \Rightarrow A^\times(n+1)$: $\phi((n+1) \cdot m) =$

$\phi(n \cdot m + 1 \cdot m) = \phi(n \cdot m) + \phi(m) =$
$(\phi(n) \cdot \phi(m)) + \phi(m) = (\phi(n) + 1_K) \cdot \phi(m) =$
$\phi(n+1) \cdot \phi(m)$;

Wegen $1_K \in P$ (siehe Lemma 2.2.3) sieht man ebenfalls mit vollständiger Induktion, dass $\phi(n) \in P$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktionsanfang: $A(1): \phi(1) = 1_K \in P$; Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1): \phi(n+1) = \phi(n) + \phi(1)$. Weil $\phi(n), \phi(1) \in P$ gilt auch $\phi(n) + \phi(1) \in P$; Insbesondere gilt immer $\phi(n) = 0_K$.
... weil $0_K \notin P$.

⇝ Nun setzen wir ϕ auf $\mathbb{Z}$ dadurch fort, dass wir $\phi(0) = 0_K$ und $\phi(-n) = -\phi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ setzen. Dabei folgt $\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0) + \phi(0) \Leftrightarrow 0_K = \phi(0)$ und $\phi(0) = \phi(n-n) = \phi(n) + \phi(-n) = 0_K \Leftrightarrow -\phi(n) = \phi(-n)$. Man beweist durch Fallunterscheigungen mit der in Definition 2.4.2 angegebenen Form von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$ auf elementare Art und Weise, dass diese Fortsetzung die Addition und Multiplikation erhält. ... aber etwas elegante ist die obere Variante (Blue - Style).

Wegen $(p, q \in \mathbb{Z})$

$$p < q \Leftrightarrow q - p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \phi(q-p) = \phi(q) - \phi(p) \in P \Leftrightarrow \phi(p) < \phi(q)$$

ist ϕ auch mit der Ordnung verträglich. Bis auf $\phi(q-p) = \phi(q + (-p)) = \phi(q) + \phi(-p) = \phi(q) + (-\phi(p)) = \phi(q) - \phi(p)$, ist alles auf Definitionen (erste und letzte Äquivalenz), sowie das oben gezeigte $\forall n \in \mathbb{N}: \phi(n) \in P$ (mittlere Äquivalenz) zurückzuführen.

⇝ Da ganz $\mathbb{Q}$ von den Quotienten $\frac{x}{n}$ mit $x \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, ausgeschöpft wird, lässt sich ϕ durch die Vorschrift

$$\phi\left(\frac{x}{n}\right) := \frac{\phi(x)}{\phi(n)}$$

zu einer Abbildung von $\mathbb{Q}$ nach K fortsetzen. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ stellt analog zu $P \subseteq K$ die positiven Zahlen dar. Dies lässt sich mit $\forall n \in \mathbb{N}: \phi(n) \in P$ von $\mathbb{Q}$ nach K übertragen. Weiters stehen $x \in \mathbb{Z}$ und $\phi(x) \in K$ durch $\mathbb{Q}$ in Verbindung. Man beachte hier, dass aus $\frac{x}{n} = \frac{\hat{x}}{\hat{n}}$ folgt, dass $x\hat{n} = \hat{x}n$ und daher $\phi(x)\,\phi(\hat{n}) = \phi(\hat{x})\,\phi(n)$ bzw. $\frac{\phi(x)}{\phi(n)} = \frac{\phi(\hat{x})}{\phi(\hat{n})}$. Ok! Also ist diese Abbildung wohldefiniert.
Ok!

Diese Fortsetzung erhält ebenfallst die Addition und Multiplikation, denn für $\frac{x}{n}, \frac{y}{m} \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\phi\left(\frac{x}{n} + \frac{y}{m}\right) = \phi\left(\frac{xm + yn}{nm}\right) = \frac{\phi(xm + yn)}{\phi(nm)} =$$

$$\frac{\phi(xm) + \phi(yn)}{\phi(n)\,\phi(m)} = \frac{\phi(x)}{\phi(n)} + \frac{\phi(y)}{\phi(m)} = \phi\left(\frac{x}{n}\right) + \phi\left(\frac{y}{m}\right),$$

$$\phi\left(\frac{x}{n} \cdot \frac{y}{m}\right) = \phi\left(\frac{xy}{nm}\right) = \frac{\phi(xy)}{\phi(nm)} = \frac{\phi(x)\,\phi(y)}{\phi(n)\,\phi(m)} =$$

$$\frac{\phi(x)}{\phi(n)} \cdot \frac{\phi(y)}{\phi(m)} = \phi\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \phi\left(\frac{y}{m}\right).$$

Die Gleichungsketten sind ausnahmslos auf Definitionen zurückzuführen. Sie erhält auch die Ordnung, denn es gilt

$\frac{x}{n} < \frac{y}{m} \Leftrightarrow xm < yn \Leftrightarrow \phi(x)\phi(m) < \phi(y)\phi(n) \Leftrightarrow$

$\frac{\phi(x)}{\phi(n)} < \frac{\phi(y)}{\phi(m)}$.

Die erste und letzte Gleichheit folgen aus (2.8) aus 2.7.7 Satz und die mittlere ... ja, is trivial. Es folgt insbesondere, dass ϕ injektiv ist. ... weil wenn $\frac{x}{n} \neq \frac{y}{m}$, dann $\frac{x}{n} < \frac{y}{m}$ (oder umgekehrt), also $\frac{\phi(x)}{\phi(n)} < \frac{\phi(y)}{\phi(m)} \Leftrightarrow$ $\phi\left(\frac{x}{n}\right) < \phi\left(\frac{y}{m}\right)$ und somit $\phi\left(\frac{x}{n}\right) \neq \phi\left(\frac{y}{m}\right)$. (Darauf kommt man auch mit $\frac{x}{n} > \frac{y}{m}$.)

⇝ Um die Eindeutigkeit von ϕ nachzuweisen, sei Ψ eine weitere mit Addition und Multiplikation verträgliche Abbildung, sodass $\Psi(x) \neq 0$ für zumindest ein $x \in \mathbb{Q}$. Bei einem Eindeutigkeitsbeweis nimmt man ein „anderes" Objekt mit den selben Eigenschaften und zeigt, das es dasselbe ist (, also doch nicht anders ist). Aus $\Psi(x)\Psi(1) = \Psi(x1) = \Psi(x)$ folgt $\Psi(1) = 1_K$, und aus $\Psi(0) + \Psi(0) = \Psi(0+0) = \Psi(0)$ folgt $\Psi(0) = 0_K$. Das haben WIR schon vorher gemacht.

Durch vollständige Induktion zeigt man, dass $\Psi(n) = \phi(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Induktionsanfang: $A(1)$: $\Psi(1) = 1_K = \phi(1)$; Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $\Psi(n) = \phi(n) \Rightarrow$ $\Psi(n) + \Psi(1) = \phi(n) + \phi(1) \Rightarrow \Psi(n+1) = \phi(n+1)$; Aus $\Psi(-n) + \Psi(n) = \Psi(0) = 0_K = \phi(-n) + \phi(n)$ folgt $\Psi(p) = \phi(p)$, $p \in \mathbb{Z}$. Wegen $\Psi(n) = \phi(n)$, kann man diese wegstreichen und erhält $\Psi(-n) = \phi(-n)$, also gilt die Gleichheit auch für $-n \in -\mathbb{N}$. Schließlich folgt aus $\Psi(\frac{p}{n})\Psi(n) = \Psi(p) = \phi(p) = \phi(\frac{p}{n})\phi(n)$, dass $\Psi = \phi$. ..., weil $\Psi(\frac{p}{n})\Psi(n) = \Psi(\frac{p}{n} \cdot n) = \Psi(p)$ und dasselbe für ϕ. $\square$