Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 5

Übungstermin: 29.4.2020 — 22. April 2020

Aufgabe 21:
Das folgende Anfangswertproblem modelliert die Reaktion dreier Spezies x, y, z:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -0.04x(t) + 10^4 y(t)z(t), \\ y'(t) &= 0.04x(t) - 10^4 y(t)z(t) - 3 \cdot 10^7 y(t)^2, \\ z'(t) &= 3 \cdot 10^7 y(t)^2, \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0$ und $t \in [0, 1]$. Approximieren Sie die Lösung der Gleichung zunächst mit dem eingebetteten RK5(4) Verfahren mit verschiedenen Fehlertoleranzen und betrachten Sie die sich ergebenden Schrittweiten. Approximieren Sie nun die Lösung mit dem expliziten RK4 und dem impliziten Eulerverfahren. Versuchen Sie dabei die Schrittweiten zu optimieren. Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen. Welches der verwendeten Verfahren erscheint Ihnen bei diesem Beispiel am effizientesten?

Hinweis: Sie können die im TUWEL zur Verfügung gestellten Programme verwenden.

Aufgabe 22:
Sei $x_0, \ldots, x_r \in [0, h]$ mit $x_i \neq x_j$ für $1 \leq i < j \leq r$. Gesucht sei für beliebiges $g \in C^r([a, b])$ die Lösung $p \in \Pi_r$ von

$$p(x_0) = g(x_0), \qquad p'(x_j) = g'(x_j), \quad j = 1, \ldots, r. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass dieses Problem eindeutig lösbar ist.
b) Zeigen sie die Fehlerabschätzung

$$\sup_{x \in [0,h]} |p(x) - g(x)| \leq \frac{h^{r+1}}{r!} \sup_{x \in [0,h]} \left| g^{(r)}(x) \right|. \tag{2}$$

Aufgabe 23:
Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen Normen auf dem Raum der Polynome Π_r vom maximalen Grad r sind. Sei dazu $p \in \Pi_r$.

a) $\|p\|_k := \sup_{x \in [a,b]} |p(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |p^{(k)}(x)|$ für $k \in \mathbb{N}$.

b) $\|p\| := \sup_{j=0,\ldots,r} |p(x_j)|$ mit paarweise verschiedenen $x_j \in [a, b]$ für $j = 0, \ldots, r$.

c) $\|p\|_k := |p(x_0)| + \sup_{j=1,\ldots,r} |p^{(k)}(x_j)|$ für $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [a, b]$ und paarweise verschiedenen $x_j \in [a, b]$ für $j = 1, \ldots, r$.

d) $\|p\|_k := |p(x_0)| + |p(x_1)| + \sup_{j=2,\ldots,r} |p^{(k)}(x_j)|$ für $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \neq x_1 \in [a, b]$ und paarweise verschiedenen $x_j \in [a, b]$ für $j = 2, \ldots, r$.

Hinweis zum Fall $k = 1$ bei d): Zeigen Sie, dass diese Abbildung genau dann eine Norm ist, wenn

$$\int_{x_0}^{x_1} \prod_{j=2}^{r} (\xi - x_j)\, d\xi \neq 0.$$

Aufgabe 24:
Berechnen Sie sich die Butcher-Schemata der 3-stufigen, impliziten Runge-Kutta Verfahren, welche als Kollokationspunkte die Stützstellen einer offenen bzw. abgeschlossenen Newton-Cotes Formel verwenden.

Aufgabe 25:
Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine diagonalisierbare Matrix und sei $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = My, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass ein Runge-Kutta-Verfahren angewendet auf dieses Anfangswertproblem exakt dem gleichen Runge-Kutta-Verfahren angewendet auf die separierten Anfangswerprobleme

$$\tilde{y}_j : [0,T] \to \mathbb{C} : \qquad \tilde{y}_j' = \lambda_j \tilde{y}_j, \qquad \tilde{y}_j(0) = \tilde{y}_{j,0} \in \mathbb{C}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

entspricht (in welchem Sinne?), wobei λ_j für $j = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte der Matrix M gemäß ihrer Vielfachheit sind. Wie müssen die Anfangsdaten $\tilde{y}_{j,0}$ gewählt werden?