1. Ges.: μ Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, σ-endl., nicht regulär von oben

d.h. 1, $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n\in\mathbb{N}: \mu(A_n) < \infty$

2, $\exists A \in \mathcal{B} : \mu(A) \neq \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ offen}\}$

Sei $\mu(A) := |A \cap \{1/n : n\in\mathbb{N}\}|$

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ ✓

(ii) $\forall A \in \mathcal{B} : \mu(A) \geq 0$ ✓

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, disjunkt:

$$\mu\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \{1/n : n\in\mathbb{N}\}\right|$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n \cap \{1/n : n\in\mathbb{N}\}| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

1, $$\mathbb{R} = \underbrace{(-\infty, 0]}_{\mu=0} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \{1/n\}}_{\mu=1} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} (1/n+1, 1/n)}_{\mu=0} + \underbrace{(1, \infty)}_{\mu=0}$$

2, Ww.: $\mu(]-\infty, 0]) = 0$, aber

$$\inf\{\mu(U) :]-\infty, 0] \subseteq U \text{ offen}\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(]-\infty, 1/n[)}_{=\infty \text{ für alle } n\in\mathbb{N}} = \infty$$

Ges.: μ Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, nicht σ-endl.,

regulär von oben

d.h. 1, $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \exists n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) = \infty$

2, $\forall A \in \mathcal{B} : \mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ offen}\}$

Sei $\mu(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$

(i), (ii), (iii) ✓

1, Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, sodass $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, dann

$\exists n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A_n) = \infty$

2, • $A = \emptyset$. $\mu(A) = \mu(\underbrace{\emptyset}_{\text{offen und } \subseteq})$

• sonst. $\mu(A) = \infty = \inf\{\underbrace{\mu(U)}_{= \infty \text{ für alle } U \supseteq A} : A \subseteq U \text{ offen}\}$

2. Gg.: $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \{0,1\}^n$, $\mathcal{G}_n = 2^{\Omega_n}$,

$$\forall A \subseteq \Omega_n : \mathbb{P}_n(A) = 2^{-n}|A|$$

$A \subseteq \Omega$ monoton $:\Leftrightarrow \forall x \in A : x \leq y \Rightarrow y \in A$

Zz.: A, B monoton $\Rightarrow \mathbb{P}_n(A \cap B) \geq \mathbb{P}_n(A)\,\mathbb{P}_n(B)$

IA. $n = 0$ ✓

IS. Sei $A \in \Omega_n$, $i = 0, 1$,

$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n, i) \in A\}$

Beh.: $\mathbb{P}_n(A) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_{n-1}(A_0) + \mathbb{P}_{n-1}(A_1))$

$$\frac{|A|}{2^n} \overset{!}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{|A_0|}{2^{n-1}} + \frac{|A_1|}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\underbrace{(|A_0| + |A_1|)}_{|A|}$$

A monoton $\Rightarrow A_0, A_1$ monoton

$\Rightarrow A_0 \subseteq A_1$, weil

$\forall x \in A_0 : y \in A_0, A_1$, wobei

$\forall i < n : y_i = x_i$, $y_n = 1$

$$\mathbb{P}_{n+1}(A \cap B) = 1/2\,(\mathbb{P}_n(A \cap B)_0 + \mathbb{P}_n(A \cap B)_1)$$

$$= 1/2\,(\mathbb{P}_n(A_0 \cap B_0) + \mathbb{P}_n(A_1 \cap B_1))$$

$$\overset{(IV)}{\geq} 1/2\,(\mathbb{P}_n(A_0)\,\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}_n(A_1)\,\mathbb{P}_n(B_1))$$

$$= 1/4\,[(\mathbb{P}_n(A_0) + \mathbb{P}_n(A_1))(\mathbb{P}_n(B_0) + \mathbb{P}_n(B_1))] +$$
$$1/4\,[\mathbb{P}_n(A_0)\mathbb{P}_n(B_0) + \mathbb{P}_n(A_1)\mathbb{P}(B_1) -$$
$$\mathbb{P}_n(A_0)\mathbb{P}_n(B_1) - \mathbb{P}_n(A_1)\mathbb{P}(B_0)]$$

$$= 1/2\,(\mathbb{P}_n(A_0) + \mathbb{P}_n(A_1))\,1/2\,(\mathbb{P}_n(B_0) + \mathbb{P}_n(B_1))$$
$$1/4\,[\mathbb{P}_n(A_0)(\mathbb{P}_n(B_0) - \mathbb{P}_n(B_1)) + \mathbb{P}_n(A_1)(\mathbb{P}_n(B_1) - \mathbb{P}_n(B_0))]$$

$= \mathbb{P}_{n+1}(A)\,\mathbb{P}_{n+1}(B) +$

$1/4\,[\,(\mathbb{P}_n(A_1) - \mathbb{P}(A_0))\,(\mathbb{P}_n(B_1) - \mathbb{P}_n(B_0))\,]$

$\geqslant \mathbb{P}_{n+1}(A)\,\mathbb{P}_{n+1}(B)$

3. Gg.: $\varepsilon \in]0,1]$, $C_0 = [0,1]$,

$C_{n,\varepsilon}$ = „Vereinigung aller Teilintervalle von $C_{n-1,\varepsilon}$, ohne das jeweils mittlere, offene Intervall, der Länge $\varepsilon / 3^n$"

$C_\varepsilon := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{n,\varepsilon}$

Zz.: C_ε abgeschlossen

d.h. Zz.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $C_{n,\varepsilon}$ abgeschlossen

Das gilt, weil $C_0 = [0,1]$ abgeschlossen ist, und für $C_{n,\varepsilon}$ bloß offene Intervalle „$\setminus$" werden, bzw. deren abgeschlossene „$\subseteq$", „$\cap$".

Zz.: C_ε nirgends dicht (d.h. $\nexists (a,b), a<b : (a,b) \subseteq C_\varepsilon$).

Beh.: $C_{n,\varepsilon}$ besteht aus 2^n Intervallen der Länge

$$\frac{1-\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{3^n}.$$

IA: $n = 0$ ✓

IS: $\lambda(I_{n+1}) = \lambda(I_n) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{2}$

$\overset{(IV)}{=} \left(\frac{1-\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{3^n}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{3^{n+1}}$,

wobei I_n ein Teilintervall von $C_{n,\varepsilon}$ ist.

$\Rightarrow \neg$ dicht, weil $(C_{n,\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton ist

Zz.: $|C_\varepsilon| > \aleph_0$

Ww: $\aleph_0 < |C| \leq |C_\varepsilon|$

Zz.: $1-\varepsilon = \lambda(C_\varepsilon)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(C_{n,\varepsilon}) \to 1-\varepsilon.$

6. Gg.: $f \in C^1(\mathbb{R})$

Zz.: f' Borel-messbar

Ww.: $f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}}_{=: f_n(x)}$

$= \lim_{n \to \infty} f_n(x).$

Ww.: f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f messbar

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n messbar

$\Rightarrow$ $f_n \to f'$ messbar

7. Gg.: $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B} : x \in A \Rightarrow -x \in A\}$

Zz.: $\mathcal{C}$ σ-Alge.

1, $\forall A \in \mathcal{C} : A^c \in \mathcal{C}$

Sei $x \in A^c$, dann $-x \in A^c$, weil $-x \notin A$, da sonst $-(-x) = x \in A$ ↯

2, $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$

Sei $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, dann $\exists k \in \mathbb{N} : x \in A_k \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow -x \in A_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Ges.: $\{n \in \mathbb{N} : f(x) = x^n, \mathcal{C}\text{-messbar}\} \stackrel{?}{=} 2\mathbb{N}$

- $\forall n \in 2\mathbb{N}$. $y \in A^+ \Rightarrow \pm\sqrt[n]{y} \in f^{-1}(A^+)$
  $y \in A^- \Rightarrow f^{-1}(A^-) = \emptyset$
- Sei $n \in 2\mathbb{N} - 1$. $f^{-1}(]0,1]) =]0,1] \notin \mathcal{C}$