41. Gg: X metr. R., A zusammenhängend, $A \subseteq X$.

Zz: $\forall B, A \subseteq B \subseteq c(A)$: B zusammenhängend.

Angenommen,
$\exists B_1, B_2 \subseteq X, \neq \emptyset, c(B_1) \cap B_2 = \emptyset = B_1 \cap c(B_2)$:
$B_1 \dot\cup B_2 = B$,
so gelte $A \subseteq B_1 \dot\cup B_2 \subseteq c(A)$.
Es folgt $A \subseteq B_1 \dot\vee A \subseteq B_2$, da A zusammenhängt.
oBdA. $\Rightarrow c(A) \subseteq c(B_1)$
$\Rightarrow c(A) \cap B_2 = \emptyset$.
Weil $B_1 \dot\cup B_2 \subseteq c(A)$, muss
$(B_1 \dot\cup B_2) \cap B_2 = \emptyset =$
$\cancel{(B_1 \cap B_2)} \cup (B_2 \cap B_2) = B_2$. ↯

Zz: Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

Das sind Äquivalenzklassen $[x]_\sim = \bigcup_{\substack{x \in Z \\ Z \text{ zusammenhängend}}} Z$.

Sei $E \subseteq X$, so partitioniere E bzgl. oben als Q.
Sei $K \in Q$, so ist $K \neq \emptyset$, laut Lemma 11.3.5, die größtmögliche zusammenhängende Menge, die $x \in K$ enthält.
Ww: Laut oben, muss $c(K)$ zusammenhängen
$\Rightarrow K = c(K)$.

42. Gg: X metr. R., $c(A) = A \subseteq X$.

Zz: A zusammenhängend $\Leftrightarrow$
$\nexists A_1, A_2 \subseteq X, \neq \emptyset$, abgeschlossen: $A_1 \dot\cup A_2 = A$.

„$\Leftarrow$" Sei A nicht zusammenhängend, d.h.
$\exists A_1, A_2$ getrennt: $A_1 \dot\cup A_1 = A$, d.h.
$c(A_1) \cap A_2 = \emptyset = A_1 \cap c(A_2)$.

Zz: A_1, A_2 abgeschl.

$c(A_1) \dot\cup A_2 = A = A_1 \dot\cup A_2 \Rightarrow c(A_1) = A_1$.

43. Gg: A, B abgeschlossen, $A \cap B$, $A \cup B$ zusammenhängend.

Zz: A, B zusammenhängend.

oBdA. Angenommen, A sei nicht zusammenhängend, d.h.
$\exists A_1, A_2 \neq \emptyset, c(A_1) \cap A_2 = \emptyset = c(A_2) \cap A_1 : A = A_1 \dot\cup A_2$.

A_1, A_2 sind abgeschlossen, weil sonst (oBdA.)
$\exists x \in c(A_1), \in A \setminus A_1 \Rightarrow x \in A_2$
$\Rightarrow x \in c(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$.

Ww: $A \cap B \subseteq A = A_1 \dot\cup A_2$.
$\Rightarrow A \cap B \subseteq A_1 \dot\vee \subseteq A_2$, weil $A \cap B$ zusammenhängt.
oBdA. $A \cap B \subseteq A_1$.

$$A \cup B = \underbrace{(A_1 \cup B)}_{\text{abgeschlossen}} \dot\cup \underbrace{A_2}_{\text{abgeschl.}}$$

„$\dot\cup$", weil $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$\Rightarrow \emptyset = A_2 \cap B \subseteq A \cap B \subseteq A_1$

$\Rightarrow A \cup B$ nicht zusammenhängend $\lightning$

4h. Geg.: $\phi(x,y) = (x+y, y)$ Vektorfeld,

$\gamma_k = \overrightarrow{(0,0),(0,1)}, \overrightarrow{(0,1),(1,1)}$

$\gamma_t = \overrightarrow{(0,0),(t,1)}, \overrightarrow{(t,1),(1,1)}$ mit $t \in [0,1]$

$\gamma_d = \overrightarrow{(0,0),(1,1)}$.

Ges.: $\int_\gamma \phi(s)\, ds$ für alle 3 Polygonzüge.

Sei $\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m} = \gamma$ ein Polygonzug, so gilt

$\gamma(t) = x_{j-1} + (t-(j-1))(x_j - x_{j-1})$ für $j = 1, \dots, m$.

Also gilt für $\gamma_{t_1} \oplus \gamma_{t_2} := \gamma_t$

$$\gamma_{t_1}(s) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + (s-(1-1))\left(\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= s\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} \text{ für } s \in [0,1],$$

$$\gamma_{t_2}(s) = \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} + (s-(2-1))\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}\right) \text{ für } s \in [1,2]$$

$$= \begin{pmatrix}t + s(1-t)\\1\end{pmatrix} \text{ für } s \in [0,1].$$

Laut Satz 11.2.5, berechne $\int \phi(\gamma(s))\,\gamma'(s)\, ds$:

$$\int_0^1 s\,(t+1, 1)\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(t^2+t+1).$$

$$\int_0^1 (t+(1-t)s+1, 1)\begin{pmatrix}1-t\\0\end{pmatrix} ds = \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow$ Weglänge von γ_t ist $2 - t/2$,

$\Rightarrow$ Weglänge von γ_k ist 2.

$\Rightarrow$ Weglänge von γ_d ist $3/2$.

Weil die Weglänge von $\overrightarrow{(0,0),(1,0)}, \overrightarrow{(1,0),(1,1)}$ aber 1 ist, ist ϕ, laut Satz 11.4.7, kein Gradientenfeld.

45. 11.7 Gg: $\beta : [0, c] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

Zz: $\forall s \in [0, c] : \|\beta'(s)\|_2 = 1 \Leftrightarrow$
$\forall s \in [0, c] : \ell(\beta|_{[0,s]}) = s.$

„⇒" Sei $s \in [0, c]$, so gilt, laut Satz 11.1.8

$$\ell(\beta|_{[0,s]}) = \int_0^s \|\beta'(t)\|_2 \, dt = s.$$

„⇐" Laut Hauptsatz, gilt

$$\|\beta'(s)\|_2 = \lim_{r \to s} \frac{\int_0^s \|\beta'(t)\|_2 \, dt - \int_0^r \|\beta'(t)\|_2}{s - r} = \lim_{r \to s} \frac{s-r}{s-r} = 1.$$

46. 11.8 Geg.:

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ges.: $\int_\gamma ((x^2 + 5y + 3yz)dx +$

$(5x + 3xz - 2)\,dy +$

$(3xy - 4z)dz$

$$\Rightarrow \phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 5y + 3yz \\ 5x + 3xz - 2 \\ 3xy - 4z \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} \phi(\gamma(t))\, \gamma'(t) =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t) + 5\cos^2(t) + 3\cos^2(t)\cdot t - 5\sin^2(t)$$

$$- 3\sin^2(t)\cdot t + 2\sin(t) + 3\sin(t)\cos(t) - 4t \quad dt = \dots$$

$$\int \sin^2 t \cos t \, dt = \sin^3 t - \int 2\sin^2 t \cos t \, dt$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{3}\sin^3 t.$$

$$\int \cos^2 t \, dt = \cos t \sin t - \int \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} dt \Rightarrow = \frac{1}{2}(\cos t \sin t + t).$$

$$\int \cos t \sin t \, dt = \sin^2 t - \int \sin t \cos t \Rightarrow = \frac{1}{2}\sin^2 t.$$

$$\int t \cos^2 t \, dt = t\,\frac{\cos t \sin t + t}{2} - \int \frac{\cos t \sin t + t}{2}$$

$$= \dots - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}\sin^2 t,$$

usw.

$$\dots = -8\pi^2.$$

47. 11.9

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] \to D \\ t \mapsto t x_1 + (1-t) x_0 \end{cases}$$

$$\int_\gamma \phi(x)dx = \int_0^1 \phi(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_0^1 \phi(tx_1 + (1-t)x_0)\, dt \; (x_1 - x_0),$$

weil man das „$\int$" in den Vektor ziehen kann.

48. 11.10 Geg.: $\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ t \end{pmatrix} \end{cases}$

$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ x & y \end{pmatrix} \end{cases}$

Ges.: $\int_\gamma \phi(s)\,ds = \cdots$

$$\int \phi(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = \int \begin{pmatrix} e^{\sqrt{t}} & e^t \\ \sqrt{t} & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{t} \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$\begin{pmatrix} \int 1/2\sqrt{t}\, e^{\sqrt{t}} + e^t\, dt \\ \int 1/2 + t\, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{t}} + e^t \\ 1/2\, t + 1/2\, t^2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \cdots = \begin{pmatrix} 2e \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(e-1) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

49. 11.11 Geg.: $\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1+t^3 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\phi : \begin{cases} (1,+\infty) \times \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 2} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (\sin\sqrt{x-1},\ xy) \end{cases}$$

Ges.: $\ell(\gamma) = \cdots$

$$\int \| \gamma'(t) \|_2 \, dt = \int \left\| \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \int t \sqrt{4+9t^2}\, dt \,\Bigg|\, \begin{matrix} u = 4+9t^2 \\ dt = 1/18t \, du \end{matrix} =$$

$$\frac{1}{18} \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{18} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{27} \sqrt{(9t^2+4)^3}.$$

$$\Rightarrow \cdots = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

Ges.: $\int_\gamma \phi(s)\, ds = \cdots$

$$\int (\sin\sqrt{1+t^2-1},\ (1+t^2)(1+t^3)) \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt =$$

$$\int 2t \sin t + (1 + t^3 + t^2 + t^6)\, 3t^2 \, dt =$$

$$\frac{t^9}{3} + \frac{t^6}{2} + \frac{3t^5}{5} + t^3 + 2\sin t - 2t\cos t.$$

$$\Rightarrow \cdots = \frac{73}{30} + 2\sin(1) - 2\cos(1).$$

50. 11.13 Geg.: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar,

$\forall t \in [a,b] : \rho(t)$ Dichte.

Gesamtmasse des Weges:

$$M = \int_a^b \rho \, dl, \text{ wobei } l(x) = l(\gamma|_{[a,x]}),$$

Schwerpunkt des Weges:

$$S = \frac{1}{M} \int_a^b f \, dl, \text{ wobei } f : \begin{cases} [a,b] \to L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 1} \\ t \mapsto \rho(t)\,\gamma(t) \end{cases},$$

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{cases}, \qquad \forall t \in [a,b] : \rho(t) = 1.$$

Ges.: M, S.

$$M = \int_0^1 \rho \, dl = \int_0^1 \cancel{\rho(t)}\, l'(t)\, dt = l(1) - \cancel{l(0)} =$$

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2} \, dt = \dots$$

$$\int \sqrt{1+(2t)^2}\, dt \,\Big|\, \begin{matrix} u = 2t \\ dt = 1/2 \, du \end{matrix} = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+u^2}\, du = \frac{1}{4}\left(u\sqrt{1+u^2} + \sinh^{-1} u \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+(2t)^2} + \sinh^{-1}(2t) \right).$$

$$\Rightarrow \dots = \frac{1}{4} \cdot \left(2\sqrt{5} + \sinh^{-1}(2) \right).$$

$$S = \frac{1}{M} \int_0^1 f \, dl = \frac{1}{M} \int_0^1 \cancel{\rho(t)}\, \gamma(t)\, l'(t)\, dt =$$

$$\frac{1}{M} \int_0^1 \gamma(t) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \int_0^1 t\sqrt{1+(2t)^2}\, dt \\ \int_0^1 t^2 \sqrt{1+(2t)^2}\, dt \end{pmatrix}.$$

$$\int t\sqrt{1+(2t)^2}\, dt \,\Big|\, \begin{matrix} u = 1+(2t)^2 \\ dt = 1/8t \, du \end{matrix} = \frac{1}{8} \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{12}\left(1+(2t)^2\right)^{3/2}.$$

$$\int t^2 \sqrt{1+(2t)^2}\, dt = \int t \cdot t\sqrt{1+(2t)^2}\, dt =$$

$$t \cdot \frac{1}{12}\left(1+(2t)^2\right)^{3/2} - \frac{1}{12} \underbrace{\int \left(1+(2t)^2\right)^{3/2}}_{\cdots}$$

$$\cdots = \int \left(1+(2t)^2\right)\sqrt{1+(2t)^2}\, dt =$$

$$\left(1+(2t)^2\right)\frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+(2t)^2} + \sinh^{-1}(2t)\right) - \underbrace{\int \cancel{4}t \cdot \frac{1}{\cancel{4}}(\cdots)\, dt}_{\cdots}.$$

$$\cdots = 2\int t^2\sqrt{1+(2t)^2}\, dt + \underbrace{\int t \sinh^{-1}(2t)}_{\cdots}.$$

$$\int \sinh^{-1}(2t)\,dt \,\Bigg|\, \begin{matrix} u = 2t \\ dt = 1/2\, du \end{matrix} = \cdots$$

$$\frac{1}{2}\int \sinh^{-1} u\, du = \frac{1}{2}\left(u \cdot \sinh^{-1} u - \underbrace{\int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\, du}_{\cdots} \,\Bigg|\, \begin{matrix} s = 1+u^2 \\ du = 1/2u\, du \end{matrix}\right).$$

$$\cdots = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{s}}\, ds = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{s} = \sqrt{1+u^2}.$$

$$\cdots = t \cdot \left(t \sinh^{-1}(2t) - \frac{1}{2}\sqrt{1+(2t)^2}\right) -$$

$$\int t \cdot \sinh^{-1}(2t)\, dt + \frac{1}{2}\int \sqrt{1+(2t)^2}\, dt.$$

Jetzt stehen nur noch Sachen da, die wir kennen.