Satz 2.7.2 Wird eine Matrix $A \in K^{n \times k}$ einer elementaren Spaltenumformung s unterworfen, so erzeugen die Spalten der Matrix A denselben Unterraum von $K^{n \times 1}$ wie die Spalten der umgeformten Matrix $s(A)$.

Beweis. Wir wenden eine elementare Umformung s auf die Spalten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von A an und zerlegen die umgeformte Matrix $s(A)$ wieder in Spalten. Diese Spalten sollen nun den Unterraum $[(a_1, a_2, \ldots, a_k)]$ aufspannen. Wir bekommen auf diese Weise Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_k \in K^{n \times 1}$ mit

$$[(b_1, b_2, \ldots, b_k)] = [(a_1, a_2, \ldots, a_k)].$$

... Das ist zu zeigen. Das ist für eine Spaltenvertauschung trivial und folgt für die anderen Typen von Umformungen aus der Variante des Austauschlemmas 2.6.2 für Erzeugendensysteme. Ersteres ist trivial, weil klarer Weise $[(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_k)] = [(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_k)] = [(b_1, \ldots, b_k)]$. Angenommen, die i-te Spalte wird mit $y \neq 0$ multipliziert, so gilt, weil $(a_1, \ldots, a_k)$ ein ES von $[(a_1, \ldots, a_k)]$ ist, und weil

$$a_i \cdot y = \sum_{l=1}^{k} x_l a_l \quad \text{mit } x_i := y, \text{ und sonst } x_l := 0,$$

laut Austauschlemma 2.6.2 für ES, dass $(a_1, \ldots, a_i \cdot y, \ldots a_k)$ auch ein ES dieses Unterraums ist. Dasselbe mit

$$a_i \cdot y + a_j = \sum_{l=1}^{k} x_l a_l \quad \text{mit } x_i := y,\ x_j := 1, \text{ und sonst } \ldots \quad \square$$