31. $df(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 15,\ 6xy - 12)$,

$$d^2f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix} = H_f(x,y);$$

Satz 10.3.1. $\forall v \in D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, v lokales Extremum :
$df(v) = 0$.

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ 6xy - 12 \end{matrix}\right\} (x,y)_{ext} \in \{(2,1), (-2,-1), (1,2), (-1,-2)\}.$$

Satz 10.3.6. $\forall v \ldots;\ df(v) = 0$:

- $d^2f(v)$ negativ definit $\Rightarrow$ v lokales Maximum
- $d^2f(v)$ positiv definit $\Rightarrow$ v lokales Minimum
- $d^2f(v)$ indefinit $\Rightarrow$ v kein Maximum bzw. Minimum

Hauptminoren : Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine Matrix, so ist $\det(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k \leq n}$ der k-te Hauptminor.

$H_f(x,y)$ positiv definit $\Leftrightarrow$ $\forall k = 1,\ldots,n$: k-ter Hauptminor > 0.
$H_f(x,y)$ negativ definit $\Leftrightarrow$ $\forall k \ldots \neq 0 \wedge$ abwechselndes Vorzeichen, 1-ter HM < 0.

zB. Für $(2,1)$:

$$\det\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = 12^2 - 6^2 > 0,\quad \det(12) > 0$$

$\Rightarrow$ $H_f(2,1)$ positiv definit $\Rightarrow$ $(2,1)$ lokales Minimum.

Analog : $(-2,-1)$ lokales Maximum, sonst nix;

32. $df(x,y) = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{5} + \frac{y}{5}, \frac{x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{1}{5} \right).$

$$df^2(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{5} & 1/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix} = H_f(x,y);$$

$df(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (4,3).$

$\det H_f(0,3) > 0 \Rightarrow (4,3)$ lokales Maximum

33. $df(x,y) = (4x - 4y,\ 4y - 4x + 4(y^2 - 1)y)$,

$$d^2f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix};$$

$$df(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \{(0,0), \underbrace{(1,1), (-1,-1)}_{\text{Minima}}\}$$

34. $F := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} : 2x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Sei $(a,b,c)^T \in F$, so folgt

$$a = \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{2}}, \quad b = \sqrt{1-2x^2-z^2}, \quad c = \sqrt{1-2x^2-y^2}.$$

Ww: Jener Quader wird vollkommen durch $\mathcal{O}$ und ein $(a,b,c)^T \in F$ bestimmt (raum-diagonale Eckpunkte).

$$\Rightarrow V = abc = \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{2}(1-2x^2-z^2)(1-2x^2-y^2)} = \cdots$$

Ww: Weil $(a,b,c)^T \in F$, kann man z durch c, also x und y beschreiben.

$$\cdots = xy\sqrt{1-2x^2-y^2} =: V(x,y).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2x - 4y^2x^3 - y^4x}{\sqrt{(x^2y^2 - 2x^4y^2 - x^2y^2)}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2y - 2x^4y - 2x^2y^3}{\sqrt{(x^2y^2 - 2x^4y^2 - x^2y^4)}};$$

$$\Rightarrow (x,y)_{min} = \mathcal{O} \text{ (trivialerweise)},$$
$$(x,y)_{max} = (\sqrt{1/6}, \sqrt{1/3}) \Rightarrow z_{max} = \sqrt{1/3}.$$

Damit kann man nun die Fläche bestimmen.

35. Sei $\mathfrak{R}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a,b]$, $R = ((\xi_j)_{j=0}^{n(R)}, (\alpha_j)_{j=1}^{n(R)})$ und $R' := ((\alpha_j)_{j=0}^{n(R)+1}, (\xi_{j-1})_{j=1}^{n(R)+1})$, wobei $\alpha_0 := a$ und $\alpha_{n(R)+1} := b$, dann

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df =$$

$$\lim_{R \in \mathfrak{R}} \sum_{j=1}^{n(R)} f(\alpha_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})) + \lim_{R \in \mathfrak{R}} \Big(\sum_{j=1}^{n(R)} g(\xi_{j-1})(f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))$$
$$+ g(\xi_{n(R)})(f(\alpha_{n(R)+1}) - f(\alpha_{n(R)})\Big)$$

$$= \lim_{R \in \mathfrak{R}} \sum_{j=1}^{n(R)} f(\alpha_j)g(\xi_j) - \cancel{f(\alpha_j)g(\xi_{j-1})} + \cancel{g(\xi_{j-1})f(\alpha_j)} - g(\xi_{j-1})f(\alpha_{j-1})$$
$$+ \cdots$$

$$= -g(a)f(a) + \cancel{f(\alpha_{n(R)})g(\xi_{n(R)})} + g(b)f(b) - \cancel{g(\xi_{n(R)})f(\alpha_{n(R)})}.$$

Die Partielle Integration folgt aus Satz 11.2.5.

36. Wären f, g unbeschränkt, so auch nicht von beschränkter Variation (siehe Definition).

$$\infty > \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) =$$

$$\sup_{Z \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(Z)} \|f\|_\infty \|g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 + \|g\|_\infty \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\|_2 \geq$$

$$\sup_{Z \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(Z)} \|f(\xi_j) g(\xi_j) - f(\xi_j) g(\xi_{j-1})\|_2 + \|f(\xi_j) g(\xi_{j-1}) - f(\xi_{j-1}) g(\xi_{j-1})\|_2 \geq$$

$$\sup_{Z \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(Z)} \|(fg)(\xi_j) - (fg)(\xi_{j-1})\|_2 = V(fg).$$

37. 11.3. Gg: $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [1,2] \to \mathbb{R}^n$,

$\gamma_3 : [0,2] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_3 : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0,1) \\ \gamma_2(t), & t \in [1,2] \end{cases}$,

γ_1 bei 1 stetig, γ_1, γ_2 rektifizierbar.

Zz: γ_3 rektifizierbar, mit

$\ell(\gamma_3) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) + \|\gamma_2(1) - \gamma_1(1)\|_2$.

Seien $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ die Mengen aller endlichen Zerlegungen von $[0,1)$ bzw. $[1,2]$ und $\mathfrak{Z}_3$ jene von $[0,2]$.

Seien $(\mu_j)_{j=0}^{n(\mathfrak{z})} \in \mathfrak{Z}_1$, $(\eta_j)_{j=0}^{n(\mathfrak{z})} \in \mathfrak{Z}_2$, so gilt

$\mu_{n(\mathfrak{z})} \xrightarrow{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_1} \eta_0$, also $\lim\limits_{\mu_{n(\mathfrak{z})} \to 1-} \|\gamma_1(\mu_{n(\mathfrak{z})}) - \gamma_2(\eta_0)\|_2 =$

$\|\gamma_1(\lim\limits_{\mu_{n(\mathfrak{z})} \to 1-} \mu_{n(\mathfrak{z})}) - \gamma_2(\eta_0)\|_2 = \|\gamma_1(1) - \gamma(1)\|_2$.

Betrachte nun alle Zerlegungen $(\xi_j)_{j=0}^{n(\mathfrak{z})} = (\mu_j)_{j=0}^{n(\mathfrak{z})} \cup (\eta_j)_{j=0}^{n(\mathfrak{z})}$.

$$\ell(\gamma_3) = \sup_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_3} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{z})} \|\gamma_3(\xi_j) - \gamma_3(\xi_{j-1})\|_2 =$$

$$\sup_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_1} \left(\sum_{j=1}^{n(\mathfrak{z})-1} \|\gamma_1(\mu_j) - \gamma_1(\mu_{j-1})\|_2 + \|\gamma_1(\mu_{n(\mathfrak{z})}) - \gamma_2(\eta_0)\|_2 \right) +$$

$$\sup_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_2} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{z})} \|\gamma_2(\eta_j) - \gamma_2(\eta_{j-1})\|_2 =$$

$$\ell(\gamma_1) + \|\gamma_1(1) - \gamma_2(1)\|_2 + \ell(\gamma_2) < \infty.$$

38. 11. 4.

(i) Zz: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f+g$, λf auch und

$$V_x^y(f+g) \leq V_x^y(f) + V_x^y(g), \quad V_x^y(\lambda f) = |\lambda| V_x^y(f).$$

Bemerkung 11.1.6. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation $\Leftrightarrow$ $\ell(\gamma) < \infty$.

Sei $\mathfrak{Z}$ die Menge aller Zerlegungen $\mathcal{Z} = (\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{Z})}$ von $[x, y]$.

$$V_x^y(f) + V_x^y(g) = \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) \|_2 + \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \| g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) \|_2 \geq$$

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \| (f+g)(\xi_j) - (f+g)(\xi_{j-1}) \|_2 = V_x^y(f+g).$$

Wegen eben dieser Ungleichung, gilt auch $V_x^y(f+g) < \infty$. Analog sieht man dies für λf.

(ii) Zz: f monoton wachsend $\Rightarrow$ $V_x^y(f) = f(y) - f(x)$.

Man beachte die Teleskop-Summe, $\xi_0 = x$, $\xi_{n(\mathcal{Z})} = y$ und $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ für $\mathbb{R}$ was wegen der Monotonie redundant ist.

(iii) Zz: $\exists\, g, h$ monoton wachsend: $f = g - h$ $\Rightarrow$ $\ell(f) < \infty$.

Laut (ii), sind g, h rektifizierbar und laut (i) also auch f.

(iv) „$\Leftarrow$" von (iii).

$g: t \mapsto V_a^t(f)$ ist monoton wachsend (siehe Definition).

Sei $h: t \mapsto g(t) - f(t)$ und $x < y$.

$$h(x) = g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y) = h(y) \Leftrightarrow$$

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$$

$$= V_a^y(f) - V_a^x(f) = V_x^y(f)$$

$$= \sup_{Z \in \mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(Z)} \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) \|_2 .$$

Man beachte nun die Δ-Ungleichung.

39. 11.5. Korollar 11.1.10. $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\|_2 \, dx. = \cdots$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} f'(t)\cos t - \sin t\, f(t) \\ f'(t)\sin t + \cos t\, f(t) \end{pmatrix} \overset{\|\cdot\|_2}{\Rightarrow} \sqrt{(f'(t)\cos t - \sin t\, f(t))^2 \cdots} =$$

$$\sqrt{(f'(t)\cos t)^2 - \cancel{2f'(t)f(t)\cos t \sin t} + (\sin t\, f(t))^2 + (f'(t)\sin t)^2 + \cancel{2f'(t)f(t)\sin t\cos t} \, (\cos t\, f(t))^2} =$$

$$\sqrt{f^2(t)(\cancel{\sin^2 t + \cos^2 t}) + f'(t)^2(\cancel{\cos^2 t + \sin^2 t})}$$

$$\Rightarrow \cdots = \int_0^{\pi/2} \sqrt{f^2(t) + f'(t)^2} \, dt. = \cdots$$

Sei nun $f(t) = t$, dann

$$\int \sqrt{t^2+1}\, dt \,\Bigg|\, \begin{matrix} t = \sinh u \\ dt/du = \cosh u \end{matrix} \overset{A}{=} \int \cancel{\sqrt{\cosh^2 u}} \cdot \cancel{\cosh} u \, du \overset{B}{=}$$

$$\frac{1}{2}\left(\int \cosh(2u)\, du + \int 1 \, du\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot \sinh(2u) + u\right) =$$

$$\frac{1}{4}\cdot \sinh(2 \operatorname{areasinh}(t) + \frac{1}{2} \operatorname{areasinh}(t)).$$

$$\cdots \approx 2.0791\ldots$$

$$A: \cosh^2 t - \sinh^2 t = \left(\frac{\exp t + \exp(-t)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp t - \exp(-t)}{2}\right)^2$$

$$= 1/4 \cdot (\cancel{\exp(2t)} + 2\exp t \exp(-t) + \cancel{\exp(-2t)} - \cancel{\exp(2t)} + 2\exp t\exp(-t) - \cancel{\exp(-2t)}) = 1.$$

$$B: \cosh^2 t = \left(\frac{\exp t + \exp(-t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\exp(2t) + 2 + \exp(-2t)}{2}$$

$$= 1/2\,(\cosh(2t) + 1).$$

40. 11.6.

$$\ell(\gamma) = \int_0^{4\pi} \left\| \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}' \right\|_2 dt = \int_0^{4\pi} \left\| \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} \right\|_2 dt =$$

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{r^2(\underline{\sin^2 t + \cos^2 t}) + h^2}\, dt = 4\pi \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Wähle nun $t(s) := \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}$, dann

$$\int_0^{4\pi} \left\| \begin{pmatrix} r\cos t(s) \\ r\sin t(s) \\ h\,t(s) \end{pmatrix} \right\|_2 ds = \int_0^{4\pi} t'(s) \left\| \begin{pmatrix} -r\sin t(s) \\ r\cos t(s) \\ h \end{pmatrix} \right\|_2 ds =$$

$$\sqrt{r^2+h^2}\,(t(4\pi) - \cancel{t(0)}) = 4\pi.$$