

2.1 NEWTON VS. LAGRANGE: TEILCHEN AUF KUGELOBERFLÄCHE (SPHÄRISCHES PENDEL)

Wir führen die selbe Rechnung im Newton'schen und Lagrange'schen Formalismus aus. Ein Teilchen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius r_0 . Durch eine Zwangsbedingung kann das Teilchen die Kugeloberfläche nicht verlassen. Zusätzlich wirke auf das Teilchen die Gravitationskraft $\mathbf{F}_G = -mg\mathbf{e}_z$. Verwenden Sie θ und ϕ als generalisierte Koordinaten

$$\begin{aligned}x(\theta, \phi) &= r_0 \sin(\theta) \cos(\phi) \\y(\theta, \phi) &= r_0 \sin(\theta) \sin(\phi) \\z(\theta, \phi) &= r_0 \cos(\theta).\end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_ϕ und zeigen Sie die folgenden Relationen für Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z \\&= [r_0\dot{\theta}]\mathbf{e}_\theta + [r_0\sin(\theta)\dot{\phi}]\mathbf{e}_\phi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z \\&= [-r_0\ddot{\theta} - r\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2]\mathbf{e}_r + [r_0\ddot{\theta} - r_0\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2]\mathbf{e}_\theta + [r_0\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2r_0\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

\mathbf{e}_r ist hierbei der Einheitsvektor in radiale Richtung in Kugelkoordinaten

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

- b) Wie lautet die Lagrangefunktion in den generalisierten Koordinaten θ, ϕ ?
- c) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten θ, ϕ indem Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft \mathbf{F}^R auf die Einheitsvektoren \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_ϕ projizieren.
- d) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten θ, ϕ indem Sie die Euler-Lagrange Gleichungen verwenden.

2.2 PRINZIP DER KLEINSTEN WIRKUNG

Gegeben ist ein Rechteck der Länge $x = 2L$ und der Höhe $y = H$. Wir werden nun verschiedene Teilchen von links unten $(0,0)$ nach rechts oben $(2L, H)$ über den Punkt (L, h) laufen lassen, wobei sich die Geschwindigkeit der Teilchen an $x = L$ ändert. Die Winkel Θ_1 und Θ_2 geben den Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel an.

2

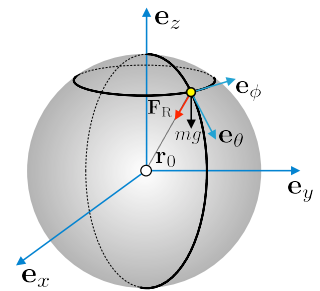


FIGURE 2.1: Sphärisches Pendel

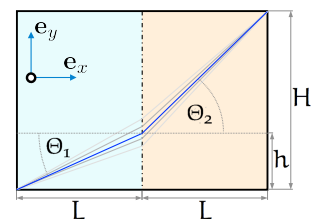


FIGURE 2.2: Ein Teilchen durchläuft das Rechteck mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten im linken und rechten Teil.

- a) Die Brechzahl $n = c/v$ der Optik gibt das Verhältnis zwischen der Phasengeschwindigkeit von Licht im Vakuum (c) und in einem Medium (v) an. Wir betrachten den Übergang zwischen zwei verschiedenen Medien an $x = L$, daher zwei verschiedene Geschwindigkeiten v_1 für $x < L$ und v_2 für $x > L$. Parametrisieren Sie einen stückweise linearen Pfad von $(0, 0)$ über (L, h) , $0 < h < H$, nach $(2L, H)$ mit den zwei Geschwindigkeiten v_1, v_2 und berechnen die Laufzeit T . Minimieren Sie $T(h)$ als Funktion von (h) und leiten Sie so das Snelliussches Brechungsgesetz her. Machen Sie eine Skizze! Läuft das Licht eine längere Strecke im schnelleren oder langsameren Medium?
- b) Wir betrachten nun ein Teilchen mit Masse m sowie zwei verschiedene Potentiale U_1 für $x < L$ und U_2 für $x > L$. Benutzen Sie Impulserhaltung in y -Richtung ($mv_y = \text{const}$) um einen Ausdruck für $\sin \Theta_1 / \sin \Theta_2$ zu finden. Schreiben Sie nun die Wirkung des Teilchens als stückweises Integral an. Ersetzen Sie $v_{1,2} = s_{1,2}/t_{1,2}$ und benutzen Sie die Relation $t_2 = T - t_1$, wobei T die Gesamtlaufzeit ist (Warum müssen wir T fixieren?). Finden Sie das Minimum der Wirkung als Funktion der Laufzeit t_1 im linken Teil des Rechtecks. Was haben Sie nun hergeleitet? Berechnen Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten v_1/v_2 . Machen Sie eine Skizze! Läuft das Teilchen eine längere Strecke mit schnellerer oder langsamerer Geschwindigkeit?

BONUS) (mit (a) und (b) gekreuzt) Machen Sie das Experiment zu (a) oder zu (b) und dokumentieren es in einem Foto.

2.3 SPIRALBEWEGUNG

Ein Teilchen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Oberfläche eines Tisches. An dem Teilchen sei eine masselose Schnur befestigt, welche genau so durch das Loch in der Tischplatte gezogen wird dass die zeitlich veränderliche Länge $l(t)$ durch $l_0 - c\sqrt{t}$ beschrieben wird. Anfänglich zur Zeit $t = 0$ habe das Teilchen die Winkelgeschwindigkeit ω_0 und die Schnurlänge sei $l(0) = l_0$.

- a) Wie lautet die Zwangsbedingung an die kartesischen Koordinaten (x, y) des Teilchens. Handelt es sich dabei um eine holonome Zwangsbedingung? Ist die Zwangsbedingung skleronom oder rheonom?
- b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Zeigen Sie, dass eine geeignete generalisierte Koordinate φ gegeben ist durch

$$x(\varphi, t) = (l_0 - c\sqrt{t}) \cos(\varphi)$$

$$y(\varphi, t) = (l_0 - c\sqrt{t}) \sin(\varphi)$$

- c) Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichung auf und berechnen Sie die generalisierte Koordinate $\varphi(t)$ als Funktion der Zeit, mit $\varphi(0) = 0$.
- d) Skizzieren sie die generalisierte Position $\varphi(t)$ modulo 2π als Funktion der Zeit t und beschreiben sie die Trajektorie des Teilchens.

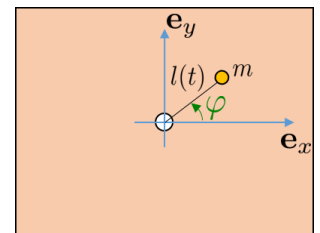


FIGURE 2.3: Ein Teilchen wird durch den Tisch gezogen.

2.4 YUKAWA-POTENTIAL IN ZWEI DIMENSIONEN

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewege sich in zwei Dimensionen durch ein Yukawa-Potential (\approx abgeschirmtes Coulomb Potential), gegeben durch

$$V(x, y) = -\alpha q^2 \frac{e^{-\beta m \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten

$$x(r, \varphi) = r \cos(\varphi)$$

$$y(r, \varphi) = r \sin(\varphi)$$

und stellen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen auf.

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ eine Erhaltungsgröße ist.

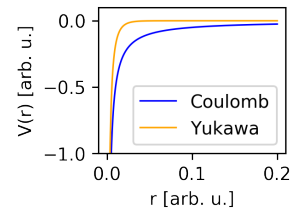


FIGURE 2.4: Vergleich von Yukawa- und Coulomb Potential

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
2.1a-b / 2.1c-d / 2.2 / Bonus / 2.3a-b / 2.3c-d / 2.4