A 8.6.2 (α)

Geg.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ges.: A^3, A^4 als LK von A^0, A, A^2

Ww.: $0 = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-A & 0 & -1 \\ 1 & 2-A & 0 \\ 0 & -1 & 1-A \end{vmatrix} = (1-A)^2(2-A)$

$\Leftrightarrow \quad A^3 = 4A^2 - 5A + 3,$

wobei zB $3 \mathrel{\hat{=}} 3 \cdot A^0 = 3 \cdot E_3$.

$\Rightarrow \quad A^4 = 4A^3 - 5A^2 + 3A = \cdots$

A 8.6.3 Geg.: $v \in V$, $a^* \in V^*$

Ges.: Minimalpolynom von $f: V \to V: x \mapsto \langle a^*, x \rangle v$

- $f = 0$. $\mu_f(X) = X$, falls $\dim V \geq 1$

  $\mu_f(X) = 1$, sonst

- sonst. $\mu_f(X) = X^2 - \langle a^*, v \rangle X$, weil

$$(f \circ f)(x) = f(\langle a^*, x \rangle v) = \langle a^*, \langle a^*, x \rangle v \rangle v$$
$$= \langle a^*, v \rangle \langle a^*, x \rangle v = \langle a^*, v \rangle f(x).$$

A 8.6.4 Gg.: $f \in L(V, V)$

(a) Gg.: $n = \dim V$, $\exists t_1, \dots, t_n$: verschiedene EW v. f

Zz.: $\mu_f(X) = (-1)^n \chi_f(X)$.

Ww.: Weil $\chi_f(X)$ ein Annullatorpolynom ist und somit $\mu_f(X) \mid \chi_f(X)$, muss $0 \leq \operatorname{grad} \mu_f(X) \leq n$.

Ww.: Weil $t_1, \dots, t_n$ Nullstellen von $\chi_f(X)$ und $(-1)^n$ der Führungskoeffizient sind, muss

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (t_i - X).$$

Wäre $\operatorname{grad} \mu_f(X) < n$, dann fiele mindestens ein Faktor $(X - t_i)$ weg, und es wäre $\mu_f(f)(t_i) \neq 0$.
Schließlich, sorgt $(-1)^n$ für die Normierung.

(b) Ges.: Gegenbeispiel für „$\Leftarrow$" von oben

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$, mit $\chi_A(X) = (1-X)^2 = \mu_A(X)$, aber nur 1 als EW.

A 8.6.8 Gg.: $f \in L(V,V)$, $a \in V \setminus \{\mathcal{O}\}$

Zz.: (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c)

(a) $a \in U_k$ f-invariant, $\dim U_k =: k$,

$a \notin U_\ell$ f-invariant, $\dim U_\ell =: \ell < k$;

(b) $(f^i(a))_{i=0}^{k}$ l.a, $(f^i(a))_{i=0}^{k-1}$ l.u.;

(c) $\operatorname{grad} \mu_{f,a}(X) = k$

„(a) $\Rightarrow$ (b)". Ww.: $a \in U_k$, $f(U_k) \subseteq U_k$

$\Rightarrow \forall i = 0, \dots, k: f^i(a) \in U_k$

Weil $\dim U_k = k$ und $(f^i(a))_{i=0}^{k}$, $k+1$ Vektoren in U_k sind, folgt l.a.

Wäre $(f^i(a))_{i=0}^{k-1}$ l.a., dann bilden $\ell < k$ dieser Vektoren eine Basis von U_ℓ ↯

„(b) $\Rightarrow$ (a)". Ww.: $(f^i(a))_{i=0}^{k-1}$ bildet eine Basis eines

$U_k \in Sub(V)$, $\dim U_k = k$

Ww.: $\forall x \in U_k \; \exists x_0, \dots, x_{k-1} \in K$:

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i f^i(a) \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i f^{i+1}(a) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_{i-1} f^i(a)}_{\in U_k}$$

„(b) $\Rightarrow$ (c)". Ww.: $\mu_{f,a}(X)$ ist das

kleinste Polynom mit $P(f)(a) = \mathcal{O}$

Ww.: l.a. $\Rightarrow f^k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i f^i(a)$

$\Leftrightarrow f^k(a) - \sum_{i=0}^{k-1} x_i f^i(a) = \mathcal{O}(a) = \mu_{f,a}(f)$,

weil für Grad gleich $\ell < k$, ist die LK von $\mathcal{O}$ trivial.

„(c) ⇒ (b)":

- $(a, f(a), \dots, f^k(a))$ l.a., weil

Ww.: $\mu_{f,a}(f) = x_0 f^0(a) + \dots + \underbrace{x_k}_{\neq 0} f^k(a) = \mathcal{O}(a)$
$\Rightarrow f^k(a) = \dots$.

- Das folgt, durch Kontraposition, aus „(b) ⇒ (c)".

A 8.7.3 Gg.: $f \in L(V)$, B Basis v. V mit $\langle B^*, f(B)\rangle$

Jordan Matrix, $\dim V =: n < \infty$;

Zz.: $\forall i = 0,\dots,n \; \exists!\, U_i \in \mathrm{Sub}(V)$: U_i f-inv., $\dim U_i = i$,

$\{0\} = U_0 \subseteq \cdots \subseteq U_n = V$

Sei $B =: (b_1,\dots,b_n)$ und $U_i := [b_1,\dots,b_i]$.

- $\dim U_i = i$. ✓
- $f(U_i) \subseteq U_i$. $\underbrace{J_n(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & & 0 \\ & t & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & t \end{bmatrix}}_{\langle B^*, f(B)\rangle} \in K^{n\times n}$,

d.h. $\forall b \in B: \exists (x_j)_{j=1}^{i} \in K^i$:

$f(b) = \sum_{j=1}^{i} x_j b_j$, wobei $x_j \in \{0, 1, t\}$.

- „$\exists!$". Sei $U_i \neq \tilde{U}_i \in \mathrm{Sub}(V)$ f-inv. mit $\dim \tilde{U}_i = i$

  und $u \in \tilde{U}_i \setminus U_i$.

Durch „$\cdot$" mit $J_n(t)$ merkt man, dass

$\langle B^*, u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \tilde{U}_i$, $\langle B^*, f(u)\rangle = \begin{bmatrix} tu_1 + u_2 \\ \vdots \\ tu_{n-1} + u_n \\ tu_n \end{bmatrix} \in \tilde{U}_i$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ 0 \end{bmatrix} = \langle B^*, f(u) - tu\rangle \in \tilde{U}_i$ $=: u'$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \langle B^*, f(u') - tu'\rangle \in \tilde{U}_i$ $=: u''$ ...

Nun gilt aber wegen $u \notin U_i$, dass $\exists j > i: u_j \neq 0$.

Also wäre $(u, u', u'', \ldots, u^{(j)} \ldots)$ L.U., aber $\dim \tilde{U}_i = i$ ↯.

A 8.7.10 Gg.: $K[X]$ Polynomalgebra über K

(a) Zz.: $f : \begin{cases} K[X] \to K[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$ automorph

Ww.: $P(X), Q(X) \in K[X]$ kann man schreiben als ...

IV. $f\left(\sum_{i=0}^{n} q_i X^i \cdot \sum_{i=0}^{m} p_i X^i\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} q_i X^i\right) f\left(\sum_{i=0}^{m} p_i X^i\right)$.

IA. $(n=0)$

$$\ldots_{lhs} = \sum_{i=0}^{m} q_0 p_i (X+1)^i = \underbrace{f(q_0 X^0)}_{q_0 \cancel{(X+1)}^0} \sum_{i=0}^{m} p_i (X+1)^i = \ldots_{rhs}$$

IS. $f\left(\sum_{i=0}^{n+1} q_i X^i \cdot \sum_{i=0}^{m} p_i X^i\right)$

$$\overset{(IV)}{=} \underbrace{f\left(q_{n+1} X^{n+1} \sum_{i=0}^{m} p_i X^i\right)} + f\left(\sum_{i=0}^{n} q_i X^i\right) f\left(\sum_{i=0}^{m} p_i X^i\right) = \ldots$$

$$f\left(\sum_{i=0}^{m} q_{n+1} p_i X^{i+n+1}\right) = f\left(\sum_{i=0}^{m+n+1} q_{n+1} p_{i-(n+1)} X^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m+n+1} q_{n+1} p_{i-(n+1)} (X+1)^i = \sum_{i=0}^{m} q_{n+1} p_i (X+1)^{i+n+1}$$

$$= q_{n+1} (X+1)^{n+1} \sum_{i=0}^{m} p_i (X+1)^i$$

$$\Rightarrow \ldots = f\left(\sum_{i=0}^{n+1} q_i X^i\right) f\left(\sum_{i=0}^{m} p_i X^i\right).$$

Ww.: $f^{-1} : P(X) \mapsto P(X-1)$

(b) Zz.: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n := [(X^i)_{i=0}^{n}]$ f-invariant

Sei $P(X) \in U_n$, dann $\exists\, p_0, \dots, p_n$:

$$f(P(X)) = f\left(\sum_{i=0}^{n} p_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} p_i (X+1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} p_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X^j = \sum_{i=0}^{n} \tilde{p}_i X^i \in U_n ,$$

für gewisse $\tilde{p}_i$.

(c) (x) Geg.: Char $K \neq 2, 3$

Ges.: EW, ER (durch Basis) von $f|_{U_3} \in L(U_3)$

Ww.: $(X^i)_{i=0}^{3} = \underbrace{(1, X, X^2, X^3)}_{=:B}$ Basis v. U_3

Ww.: $1 \mapsto 1$

$X \mapsto X + 1$

$X^2 \mapsto X^2 + 2X + 1$

$X^3 \mapsto X^3 + 3X^2 + 3X + 1$

$$\Rightarrow \langle B^*, f(B)\rangle = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow X^0 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^3 \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow \chi_{f|_{U_3}}(X) = (1-X)^4 \Rightarrow 1$ ist der EW

$$ER = \ker\left(\langle B^*, f(B)\rangle - 1 \cdot E_4\right)$$

$$= \ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = [e_1]$$

Ges.: Koordinatenmatrix von $f|_{U_3}$ in Jordan - Form

Ww.: $J_m(t) := \begin{bmatrix} t & 1 & & \emptyset \\ & t & 1 & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & t \; 1 \end{bmatrix} \in K^{m \times m}, \; m \geq 1, \; t \in K ,$

ist eine solche Matrix.

Wir suchen eine Basis $(c_0, \ldots, c_3)$ mit $\overset{C}{\overline{J_4(1)}}$, also

$$
\begin{array}{cccc}
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{Koordinaten bzgl. } C
$$

Wähle vorerst $c_0 := 1$, $c_1 := X$.

Wir wollen

$$
\begin{aligned}
c_2 &= a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \\
&\overset{f}{\mapsto} a_3 X^3 + (3a_3 + a_2) X^2 + (3a_3 + 2a_2 + a_1) X \\
&\qquad + (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \\
&\overset{!}{=} c_1 + c_2 \\
&= a_3 X^3 + a_2 X^2 + (a_1 + 1) X + a_0 \\
&\overset{LGS}{\Rightarrow} c_2 = \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} X.
\end{aligned}
$$

Analog, bestimmt man $c_3 = \frac{1}{6} X^3 - \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3} X$.

(c) (y)

A 8.7.x Gg.: $U_1, U_2 \in Sub(V)$, $U_1 \subseteq U_2$

(a) Gg.: $U \in Sub(V)$, $U_1 + U = U_2$

Zz.: $\exists U' \in Sub(U): U_1 \oplus U' = U_2$

Sei $H := \{U' \in Sub(U) : U_1 \cap U' = \{0\}\}$ eine HO
mit „$\subseteq$" und $H \supseteq T \neq \emptyset$ eine Teilkette.
$S := \bigcup_{R \in T} R$ ist eine obere Schranke für alle $R \in T$,
und $S \in Sub(U)$, weil T totalgeordnet und $R \in Sub(V)$.
$U_1 \cap S = \{0\}$, weil sonst $\exists R \in T: U_1 \cap R \neq \{0\}$.
Weil nun $S \in H$, gilt das LvZ, und U' ist maximal.

„$\subseteq$" $U_1 + \underbrace{U'}_{\subseteq U} \subseteq U_1 + U = U_2$

„$\supseteq$" Sei $u_2 \in U_2$, dann $\exists u_1 \in U_1, u \in U: u_1 + u = u_2$.
Seien B_1, B Basen, von U_1 bzw. U, mit $B_1 \cup B = B_2$,
einer Basis von B_2 (B ragt in B_1 hinein).

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{b \in B_1} x_b b}_{:= u_1} + \underbrace{\sum_{b \in B} y_b b}_{:= u} = \underbrace{\sum_{b \in B_1} \tilde{x}_b b}_{\in U_1} + \underbrace{\sum_{b \in B \setminus B_1} y_b b}_{\in U'} \in U_1 + U',$$

weil alle $b \in B \setminus B_1$ eine Kette $T \subseteq H$ bilden.

(b) Gg.: $f \in L(V, W)$, $f(U_1) = f(U_2)$

Zz.: $U_1 + (\operatorname{Ker} f \cap U_2) = U_2$

„$\subseteq$": ✓

„$\supseteq$". Sei $x \in U_2$, dann $\exists x_1 \in U_1 : f(x_1) = f(x)$.

Weiters, ist

$$\underbrace{f(x - x_1)}_{=: x_2 \in \ker f \cap U_2} = f(x) - f(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = x_1 + x_2 \in U_1 + (\ker f \cap U_2).$$

(c) Zz.: (a), (b) $\Rightarrow$ A 3.2.5:

$f \in L(V,W)$, $U_1, U_2 \in Sub(V)$, $U_1 \subseteq U_2$, $f(U_1) = f(U_2)$

$\Rightarrow \exists T \in Sub(V), \subseteq \ker f : T \oplus U_2$

Man kann mit $\tilde{T} := \ker f \cap U_2$ ansetzen (b) und mit (a) dann T bekommen.