1. $\int (x^3 + x^2 - 1) e^{2x-4} \, dx =$

$$\underbrace{\int x^3 e^{2x-4} \, dx}_{A} + \underbrace{\int x^2 e^{2x-4} \, dx}_{B} - \underbrace{\int e^{2x-4} \, dx}_{C}$$

$C = \int e^{2x-4} \, dx \; \left| \begin{array}{l} u = 2x-4 \\ du/dx = 2 \end{array} \right. \Rightarrow dx = 1/2 \, du \; = \int e^{u} \cdot 1/2 \, du =$

$1/2 \, e^{2x-4}.$

$B = \int x^2 e^{2x-4} \, dx = 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot x^2 - \int 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot 2x \, dx =$

$= \dots - \int e^{2x-4} \cdot x \, dx = \dots - 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot x + \int 1/2 \cdot e^{2x-4} dx$

$= \dots + 1/4 \cdot e^{2x-4}$

$= 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot x^2 - 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot x + 1/4 \cdot e^{2x-4}.$

$A = \int x^3 e^{2x-4} dx = 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot x^3 - \int 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot 3x^2 \, dx =$

$= 1/2 \cdot e^{2x-4} \cdot x^3 - 3/2 \cdot B.$

$\int x^2 e^{\omega x} dx = 1/\omega \cdot e^{\omega x} \cdot x^2 - \int 1/\omega \cdot e^{\omega x} \cdot 2x \, dx =$

$= \dots - 2/\omega \int e^{\omega x} \cdot x \, dx = \dots - 2/\omega \left(1/\omega \cdot e^{\omega x} \cdot x - \int 1/\omega \cdot e^{\omega x} \, dx \right)$

$= 1/\omega \cdot e^{\omega x} \cdot x^2 - 2/\omega \cdot e^{\omega x} \cdot x + 2/\omega^3 \cdot e^{\omega x} =$

$= 1/\omega \cdot e^{\omega x} \cdot \left(x^2 - 2/\omega \cdot x + 2/\omega^2 \right).$

2. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx \;\Big|\; \begin{array}{l} u = e^x \\ du/dx = e^x = u \Rightarrow dx = 1/u \cdot du \end{array} = \int \frac{t^2-1}{(t+1)t}\,dt$

$= \int \frac{t^2+2t-2t-1}{t^2+2t}\,dt = \int 1\,dt - \int \frac{2t+1}{t(t+2)} = \dots$

$\frac{2t+1}{t(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} \Rightarrow 2t+1 = At + A2 + Bt$

$\Rightarrow A = 1/2 \Rightarrow B = 3/2.$

$\dots = \int 1\,dt - \int \frac{1}{2t}\,dt - \int \frac{3}{2(t+2)}\,dt = t - \frac{1}{2}\ln t -$

$\frac{3}{2}\ln(t+2) = e^x - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\ln(e^x+2).$

$\int x^2 \sin x\,dx = -\cos x \cdot x^2 + \int \cos x \cdot 2x\,dx =$

$-\cos x \cdot x^2 + \sin x \cdot 2x - 2\int \sin x\,dx =$

$-\cos x \cdot x^2 + \sin x \cdot 2x + \cos x \cdot 2.$

3. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx \overset{(2.)}{=} \int \frac{u-1}{(u+1)u}\, du = \cdots$

$$\frac{u-1}{(u+1)u} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \Rightarrow u - 1 = Au + A + Bu$$

$$\Rightarrow A = -1 \Rightarrow B = 2$$

$$\cdots = -\int \frac{1}{u}\, du + 2\int \frac{1}{u+1}\, du \;\Bigg|\; \begin{array}{l} t = u+1 \\ dt/du = 1 \Rightarrow dt = du \end{array}$$

$$= -\ln u + 2\ln t = \cdots + 2\ln(u+1) = -\ln e^x + 2\ln(e^x+1)$$

$$= -x + 2\ln(e^x+1).$$

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx \;\Bigg|\; \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ du/dx = 1/2\sqrt{x} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, dx \end{array} = 2\int \frac{u^2 - u}{u+1}\, du = \cdots$$

$$(u^2 - u) : (u+1) = (u-2) + \frac{2}{u+1}$$

$$\begin{array}{l} -u^2 + u \\ \quad -2u \\ \quad +2u + 2 \\ \qquad 2 \end{array}$$

$$\cdots = 2\left(\int \frac{2}{u+1}\, du + \int u\, du - \int 2\, du\right) \;\Bigg|\; \begin{array}{l} t = u+1 \\ dt/du = 1 \Rightarrow dt = du \end{array}$$

$$= 2\left(2\int \frac{1}{t}\, dt + \frac{u^2}{2} - 2u\right) = 2\left(2\ln(u+1) + \cdots\right) =$$

$$= 4\ln(\sqrt{x}+1) + x - 4\sqrt{x}.$$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{x^2} = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ beliebig. Wähle $K := \lceil |x| \rceil$, dann

$$f(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=-K}^{K} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

Wohldefiniertheit folgt durch abschätzen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Seien

$$g(x) := \frac{1}{(x-k)^2} \quad \text{und} \quad h(x) := \frac{1}{(x+k)^2}.$$

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in[-K,K]} |g(x)| = \sup_{x \in [-K,K]} \frac{1}{(x-k)^2} = \frac{1}{(K-k)^2};$$

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(K-k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-k)^2}$$

ist konvergent (h analog). Laut Weierstraß ist

$$\sum_{k=K+1}^{n} g \text{ bzw. } h \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=K+1}^{\infty} g \text{ bzw. } h$$

gleichmäßig. Weil die Funktionen der Folge stetig sind, ist die Grenzfunktion für g bzw h stetig.

Infolge dessen, ist f stetig.

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ lässt sich, weil $\frac{1}{n \ln^\alpha n}$ monoton fällt, durch

$$\int_a^\infty \frac{1}{x \ln^\alpha x}\, dx = \ldots$$

abschätzen (Reihe ist eine Untersumme; vgl. Lemma 8.2.4).

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^\alpha x}\, dx \;\Bigg|\; \begin{array}{l} u = \ln x \\ du/dx = 1/x \Rightarrow dx = x\, du \end{array} = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{u^\alpha} \cdot x\, du =$$

$$\int u^{-\alpha} du = \frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{(-\alpha+1) \ln^{\alpha-1} x}.$$

$$\ldots = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{(-\alpha+1) \ln^{\alpha-1} b} - \frac{1}{(-\alpha+1) \ln^{\alpha-1} a}.$$

Fall I: $\alpha > 1$: Konvergent

Fall II: $\alpha = 1$: Divergent

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln 2^n} \cdot 2^n = \ln 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Fall III: $\alpha < 1$: Divergent (Minorante: Fall II)

7. $\int_0^\infty e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx = \cdots$

$$\int e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin\beta x - \int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \beta \cos\beta x \, dx =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin\beta x - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos\beta x - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \int e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx.$$

$$\Rightarrow \int e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx = e^{\alpha x} \cdot \frac{\sin\beta x - \beta/\alpha \cos\beta x}{(1 + (\beta/\alpha)^2)\,\alpha}.$$

Fall I: $\alpha > 0$: nicht existent

Fall II: $\alpha = 0$:

Fall i: $\beta = 0$: existent

Fall ii: $\beta \neq 0$: nicht existent

Fall III: $\alpha < 0$: existent

$$\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{2/\pi}^t \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \, dx = \cdots$$

$$\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \, dx \,\Bigg|\, \begin{array}{l} u = 1/x \\ du/dx = -1/x^2 \Rightarrow dx = -x^2 du \end{array} = \int \frac{1}{x^2} \sin u \,(-x^2)\, du$$

$$= -\int \sin u \, du = \cos\frac{1}{x}.$$

$$\cdots = \lim_{t\to\infty} \cos\frac{1}{t} - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

8. $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \;\Big|\; \begin{array}{l} u = \arctan x \\ du/dx = 1/(1+x^2) \Rightarrow dx = (1+x^2)\,du \end{array}$

$$= \int_0^\infty \frac{u}{1+x^2}(1+x^2)\,du = \lim_{t\to\infty}\int_0^t u\,du = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan^2 x}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sin x^2\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_{\sqrt{\pi}}^t \sin x^2\,dx = \cdots$$

$$\int_{\sqrt{\pi}}^t \sin x^2\,dx \;\Big|\; \begin{array}{l} u = x^2/\pi \\ du/dx = 2x/\pi = 2\sqrt{u}/\sqrt{\pi} \Rightarrow dx = \sqrt{\pi}/(2\sqrt{u})\,du \end{array} =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{\sqrt{\pi}^2/\pi}^{t^2/\pi} \frac{\sin(\pi u)}{\sqrt{u}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_1^\beta \frac{\sin(\pi u)}{\sqrt{u}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_1^{[\beta]} \frac{\sin(\pi u)}{\sqrt{u}}\,du +$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{[\beta]}^\beta \frac{\sin(\pi u)}{\sqrt{u}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{[\beta]-1}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{|\sin(\pi u)|}{\sqrt{u}}\,du + \cdots.$$

Konvergenz „$\lim_{\beta\to\infty}$" nach Leibniz.

$$\left|\int_{[\beta]}^\beta \frac{\sin(\pi u)}{\sqrt{u}}\,du\right| \le \frac{1}{\sqrt{[\beta]}}\int_{[\beta]}^{[\beta]+1}|\sin(\pi u)|\,du \xrightarrow{\beta\to 0} 0.$$

9. Weil A injektiv ist, ist A^{-1} wohldefiniert.
Laut Satz 9.2.6, ist $A: X \to Y$ genau dann gleichmäßig stetig, wenn sie beschränkt ist. d.h., laut Bemerkung 9.2.5,

$$\exists C > 0 : \forall y \in A(X) : \frac{\|A^{-1}y\|_Y}{\|y\|_X} \leq C.$$

Sei $y = Ax$, so ist dies äquivalent zu

$$\|A^{-1}Ax\|_X \leq C\|Ax\|_Y \Leftrightarrow \frac{\|x\|_X}{C} \leq \|Ax\|_Y \text{ mit } \rho := \frac{1}{C}.$$

10. Sei $A =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Laut Definition 9.2.4, gilt

$$\|A\| := \sup\left\{ \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_2} : x \in X \setminus \{0\} \right\} = \cdots .$$

Nun, weil Ax eine Matrix-Vektor-Multiplikation ist, gilt

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_2} = \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \leq \cdots$$

Mit Lemma 3.1.4 (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung), folgt

$$\cdots \leq \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\cdots} = \max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Sei j jener „maximale Index". Dann wähle

$$x := (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T.$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\cdots} = \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i.$$

Also gilt sogar Gleichheit.