Satz 2.7.3 Sei $A \in K^{n \times k}$. Dann kann A schrittweise durch elementare Spaltenumformungen in eine $n \times k$ Matrix übergeführt werden, die – abgesehen von der Reihenfolge der Zeilen – die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} & E_r & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

besitzt. Dabei tritt im linken oberen Teil eine $r \times r$ Einheitsmatrix auf mit $r \geq 0$. Die Sterne bezeichnen beliebige Elemente von K.

Beweis. (a) Wir beschreiben zunächst eine Matrixumformung, die aus elementaren Spaltenumformungen zusammengesetzt ist. Diese Funktion $f(A, i, j)$ wird später benutzt. Wir multiplizieren die j-te Spalte mit a_{ij}^{-1} und addieren dann für alle $s \neq j$ zur s-ten Spalte $(-a_{is})$-mal die j-te Spalte, also

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & * & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & * & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

... Wir erhalten so eine Matrix, die in der i-ten Zeile mit Ausnahme der Stelle (i,j) nur Nullen besitzt. An der Stelle (i,j) steht 1 statt 0. Das geht in jedem Körper.

(b) Wir gehen wie folgt vor:

· Falls A eine Nullmatrix[7] ist, sind wir schon fertig. Laut Fußnote, wird jede leere Matrix als Nullmatrix, als auch jene mit nur Einträgen 0, gewertet. Daher „eine" statt „die".

· Andernfalls ist ein Element der Matrix ungleich Null. ... Da wir auf die Reihenfolge der Zeilen keine Rücksicht nehmen, können wir annehmen, dass dieses Element in der ersten Zeile ist. In der Praxis muss man natürlich schon darauf Rücksicht nehmen. Nur wird hier davon ausgegangen, damit man die Matrix (siehe oben) besser aufschreiben kann. Die Einheitsmatrix kann aber auch „verstreut" sein. Siehe Seite 66:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{5 \times 6}.$$

Durch höchstens eine Spaltenvertauschung erreichen wir, dass dieses Element an die Stelle $(1,1)$ kommt. ... eine Spaltenvertauschung mit der 1-ten Spalte. Auf die so umgeformte Matrix wenden wir nun die Umformung aus (a) an. ... also $f(A,1,1)$. Das geht, weil jenes Element nicht 0 ist, also kann mit dem Inversen multipliziert werden. Das Ergebnis ist eine Matrix

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Eigentlich bekäme man folgendes Ergebnis. Die Notation ist so, wie sie oben steht, aber leichter.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & * & \vdots \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & * & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

· Sind alle Elemente der Teilmatrix rechts unten gleich Null, so sind wir fertig. Im Fall der Matrix auf dieser Seite oben, müsste man sich auf die rechte Teilmatrix (inklusive Oen) beziehen.

· Falls es im rechten unteren Teil der Matrix ein Element ungleich Null gibt, so nehmen wir an, es sei in der zweiten Zeile. Wieder, der „rechte untere" Teil ist bei unser Matrix der „rechte" Teil. JETZT würde die Notation schwierig werden, weil jenes Element über oder unter der Zeile $1\ 0 \cdots 0$ sein könnte. Wir bringen dieses Element durch höchstens eine Spaltenvertauschung an die Stelle $(2,2)$ und wenden die Umformung (a) an, ... eine ... mit der 2-ten Spalte. Die Umformung (a) kann auf unsere obere Matrix im rechten Teil getrost angewendet werden, da jenes Element nicht in der ausgezeichneten Zeile $0 \cdots 0$ ist und diese durch Spalten-Addition erhalten bleibt $(0 + 0 \cdot x = 0)$. Dabei ändert sich die erste Zeile nicht, ... bzw. bei uns, die ausgez. Zeile. Das Ergebnis ist eine Matrix der Form

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Das Ergebnis sicht bei uns vielleicht so aus:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Damit die Einheitsmatrix „ordentlich", also so wie im Beispiel auf Seite 66, dasteht, kann man einfach die Spalten links entsprechend vertauschen. (Hier also die erste Spalte mit der zweiten.)

Dieses Verfahren kann so lange widerholt werden, bis wir nach endlich vielen Schritten eine Matrix der gewünschten Form erhalten. Es sind tatsächlich endlich viele Schritte, weil die Matrix endlich ist und die ausgezeichneten Zeilen jeweils immer, bei jeder Anwendung von (a), erhalten bleiben. $\square$