Prüfung Differentialgleichungen 1 (Melenk) 16.12.2020

Matrikelnr.:	Familienname:
Platznr.:	Vorname:

1:	2:	3:	4:	5:	Summe:

Bemerkungen:

1) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

2) **Taschenrechner mit einzeiligem Display (keine Graphik) sind erlaubt.**

3) Insgesamt können 26 Punkte erreicht werden.

4) Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein. Besser zu viel als zu wenig hinschreiben.

1. (6 Punkte) Betrachten Sie das System

$$y' = Ay, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung an.

b) Für ein gegebenes Fundamentalsystem Y sei $\det Y(0) = 1$. Was ist $\det Y(10)$?

c) Betrachten Sie das inhomogene System $y' = Ay + b(t)$ mit $b(t) = (0, 0, e^t)^\top$. Geben Sie eine Partikulärlösung an.

---

2. (4 Punkte) Geben Sie eine (nichttriviale) Funktion F an, so dass die Lösung des AWP

$$y'(1 + 2t^2y^2) + ty^3 = 0 \qquad y(0) = 1$$

die Gleichung $F(t, y(t)) = 0$ erfüllt.

Hinweis: Verwenden Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(t, y) = \varphi(y)$.

---

3. (4 Punkte) Betrachten Sie die (skalare) ODE

$$y^{(3)} - y^{(2)} = e^{-t}e^{\beta t},$$

wobei $\beta \in \mathbb{C}$ ein Parameter ist.

a) Geben Sie ein Fundamentalsystem für die ODE an.

b) Geben Sie einen Ansatz für eine (komplexwerte) Partikulärlösung für die inhomogene Gleichung in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{C}$ an.

c) Ist die Nullösung $y^* \equiv 0$ stabil für das homogene System

$$y^{(3)} - y^{(2)} = 0?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

---

bitte wenden

4. (6 Punkte) Betrachten Sie das AWP

$$\begin{aligned} x' &= x - \tfrac{1}{3}x^3 - y \\ y' &= x - 1 - y \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Equilibria, und skizzieren Sie das Phasendiagramm.

b) Sind Ihre Equilibria asymptotisch stabil? Begründen Sie.

c) Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutige Lösung auf $(0, \infty)$ für beliebige Startwerte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass geeignete Rechtecke invariante Mengen sind.

---

5. (6 Punkte) Betrachten Sie für ein $\alpha > 0$ das System

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3 \\ y' &= -x \end{aligned}$$

a) Konstruieren Sie eine Ljapunovfunktion von der Form $V(x, y) = ax^2 + by^2$ für eine Anwendung in der Nähe der Ruhelage $(0, 0)$.

b) Ist die Ruhelage $(0, 0)$ stabil?

c) Zeigen Sie, dass es keine (echten) periodischen Orbits in der Nähe der Ruhelage $(0, 0)$ gibt.

d) Betrachten Sie Startwerte $\mathbf{y}_0 := (x_0, y_0)$ hinreichend nahe bei $(0, 0)$. Der Satz von Poincaré-Bendixson besagt nun, dass die Limesmenge $\omega_+(\mathbf{y}_0)$ die Ruhelage $(0, 0)$ enthält. Verwenden Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass damit die Lösung $t \mapsto \mathbf{y}_{\mathbf{y}_0}(t)$ für $t \to \infty$ gegen $(0, 0)$ strebt.