2.2.3 Lemma. In einem angeordneten Körper K gelten für beliebige $a, b, x, y, z \in K$ folgende Regeln:

(i) Reflexivität: $x \leq x$

(ii) Antisymmetrie: $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$.

(iii) Transitivität: $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

(iv) Totalität: $x \leq y \vee y \leq x$.

(v) $(x \leq y) \wedge (a \leq b) \Rightarrow x + a \leq y + b$.

(vi) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$.

(vii) $(z > 0 \wedge x \leq y) \Rightarrow xz \leq yz$ und $(z < 0 \wedge x \leq y)$ $\Rightarrow xz \geq yz$.

(viii) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Insbesondere: $1 > 0$.

(ix) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$ und $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$.

(x) $0 < x \leq y \Rightarrow \left(\frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{y}{x} \wedge x^{-1} \geq y^{-1}\right)$.

(xi) $(0 < x \leq y \wedge 0 < a \leq b) \Rightarrow xa \leq yb$.

(xii) $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$, wobei $2 := 1 + 1$.

Beweis: Wir beweisen exemplarisch (ii), (iii), (v) und (xii):

(ii) $(x \leq y \wedge y \leq x)$ ist per Definitionem dasselbe, wie $y - x \in P \cup \{0\} \wedge x - y \in P \cup \{0\}$. OK. Also $y - x \in (P \cup \{0\}) \cap (-P \cup \{0\}) = \{0\}$, und damit $x = y$. Wir wissen, dass $P \cap -P \cap \{0\} = \emptyset$ und $x = y \Leftrightarrow y - x = 0 \in \{0\}$.

(iii) $(x \leq y \wedge y \leq z) \Leftrightarrow (y - x \in P \cup \{0\} \wedge z - y \in P \cup \{0\})$. ... per Definitionem. Aus (p2) folgt $z - x = (z - y) + (y - x) \in P \cup \{0\}$, also $x \leq z$. (p2) bedeutet: „$x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$." IdFa. $x := (z - y)$ und $y := (y - x)$, mit dem Unterschied, dass $\{0\}$ dabei steht. Und per Definitionem gilt $z - x \in P \cup \{0\}$ $\Leftrightarrow: x \leq z$.

(v) $(x \le y \wedge a \le b)$ bedeutet $y-x,\ b-a \in P \cup \{0\}$ ... per Definitionem. Aus (p2) folgt dann $(y+b)-(x+a) = (y-x)+(b-a) \in P \cup \{0\}$; also $x+a \le y+b$. Aus (p2) folgt $(y-x)+(b-a) \in P \cup \{0\}$. Mittels Assoziativität, also (a1), und Kommutativität, also (a4), und 2.1.5 Lemma (ii) folgt die Gleichheit mit $(y+b)-(x+a)$, was noch immer in $P \cup \{0\}$ enthalten ist und per Definitionem $x+a \le y+b$ impliziert.

(viii) Aus $x \neq 0$ folgt $x \in P \cup -P$. $x \in K = P \cup \{0\} \cup -P$, aber $x \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{0\}$, also $x \in K \setminus \{0\} = P \cup -P$.
Ist $x \in P$, so folgt wegen (p3), dass $x^2 = xx \in P$ und damit $x^2 > 0$. Teil 1 einer Fallunterscheidung: (p3) bedeutet: „$x, y \in P \Rightarrow xy \in P$." IdFg. $x := x$ und $y := x$. $\forall x \in P$: $x > 0$. Ist $x \in -P$, so folgt $-x \in P$ und wieder wegen (p3), dass $x^2 = xx = (-x)(-x) \in P$. Das additive Inverse vom negativen x ist positiv. Abgesehen von (p3) wird 2.1.5 Lemma (iv) benützt, wobei IdFg. $(-x) := (-x)$ und $(-y) := (-x)$.

(xii) Aus $x < y$ und (v) folgt $x+x \le x+y \le y+y$, wobei weder links noch rechts ein Gleichheitszeichen stehen kann, da sonst durch addieren von $-x$ bzw. $-y$ die Gleichung $x = y$ folgen würde; also $x+x < x+y < y+y$. $x < y \Rightarrow x \le y$ und $(x \le y \wedge y \le y) \Rightarrow x+y \le y+y$, $(x \le x \wedge x \le y) \Rightarrow x+x \le x+y$. Nun ist wegen des Distributivgesetzes $x+x = x(1+1)$ und $y+y = y(1+1)$. Außerdem gilt $x \cdot 1 = x$ und $y \cdot 1 = y$. Da wegen (p2), $1+1 \in P$, folgt aus (vii), dass $x < \frac{x+y}{2} < y$. Für (vii) gldF. $z := (1+1)^{-1}$, $x := x(1+1)$, und $y := y(1+1)$. Schließlich ist $(x+y) \cdot (1+1)^{-1} = \frac{x+y}{2}$. $\square$