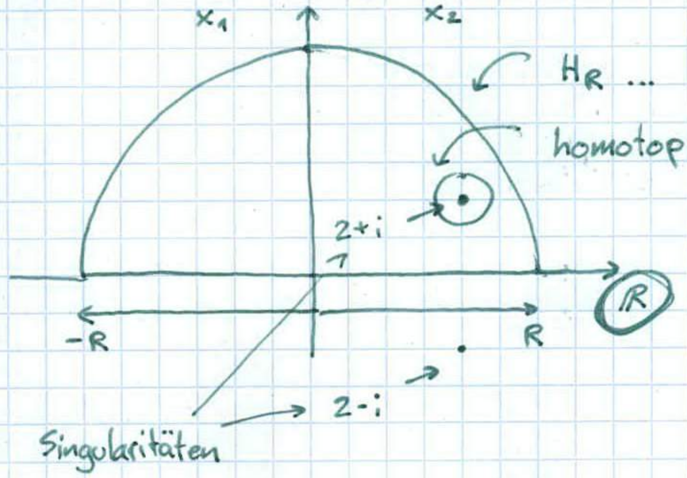
71. Ges.: $\int_{\mathbb{R}} \frac{x\,dx}{(x^2-4x+5)^2}$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\,dx}{(x-\underbrace{(2+i)}_{x_1})^2(x-\underbrace{(2-i)}_{x_2})^2} = \dots$$



H_R ... Halbkreis

homotop (für einen passenden Radius $\varepsilon > 0$) zu $\Gamma_R \sim H_R \oplus \overrightarrow{-R,R}$.

$$\dots = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_R} \frac{x\,dx}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} - \underbrace{\cancel{\int_{H_R} \frac{x\,dx}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2}}}_{\dots} \right) = \dots$$

Ww.: $\left\| \int_\gamma f(z)dz \right\| \leq \max_{t\in[a,b]} \| f\circ\gamma(t)\| \cdot \ell(\gamma)$

$$\Rightarrow |\dots| \leq \frac{R}{(R/2)^4}\cdot \left.\frac{2\pi R}{2}\right\} \ell(\Gamma_R) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$|x-(2\pm i)| \geq \frac{|x|}{2} \leftarrow \text{auf Halbkreis} = R$$

$$\Rightarrow \dots = \int_{\underbrace{\Gamma_{x_1}(\varepsilon)}_{\text{Weg um } U_\varepsilon(x_1)\text{-Kugel}}} \frac{x\,dx}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} \overset{(11.33)}{=} 2\pi i \left(\frac{x}{(x-x_2)^2}\right)'\Big|_{x=x_1}$$

$$= -2\pi i \frac{x+x_2}{(x-x_2)^3}\Big|_{x=x_1} = \pi$$

72. Ges.: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} - \frac{x}{x^2+1}\,dx \Big|_{z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1+xz}{(x-z)(x+i)(x-i)}\,dx = \ldots$$

Fall 1. $\operatorname{Im} z < 0$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1+xz}{(x-z)(x+i)(x-i)}\,dx - \cancel{\int_{H_R} \frac{1+xz}{(x-z)(x+i)(x-i)}\,dx} \Big)$$

$$= \int_{\Gamma_i(\varepsilon)} \frac{1+xz}{(x-z)(x+i)(x-i)}\,dx \overset{(11.33)}{=} 2\pi i \left(\frac{1+xz}{(x-z)(x+i)}\right)\Big|_{x=i}$$

$$= \cancel{2}\pi i \frac{1+iz}{(i-z)\cancel{2}i} = \pi i \frac{1+iz}{i^2-iz} = -\pi i \frac{\cancel{1+iz}}{\cancel{1+iz}}.$$

73. Ges.: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = \dots$

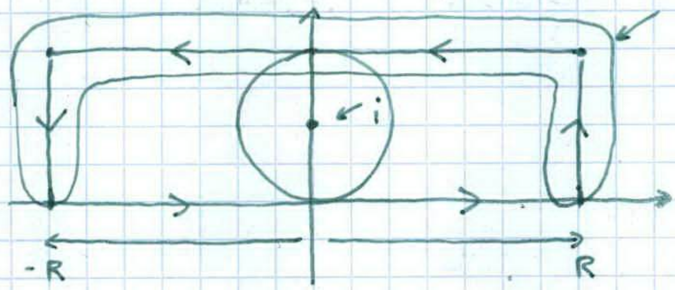
Ww: $|\cos z| = \left| \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \right|$

$$\le \frac{1}{2} \Big(|\exp(\underbrace{i(\mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z)}_{i\mathrm{Re}z - \mathrm{Im}z})| + |\exp(\underbrace{-i(\mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z)}_{-i\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z})| \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \Big(\cancel{|\exp(i\mathrm{Re}z)|} \left| \frac{1}{\exp(\mathrm{Im}z)} \right| + \cancel{|\exp(i\mathrm{Re}z)|}\, |\exp(\mathrm{Im}z)| \Big)$$

$$\le \exp(\mathrm{Im}z),$$

also ändern wir unsere Konstruktion:



H_R mit $\ell(H_R) = 4 + 2R$

$$\dots = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{\Gamma_R} \frac{\cos x \, dx}{(x-i)(x+i)} - \underbrace{\cancel{\int_{H_R} \frac{\cos x \, dx}{(x-i)(x+i)}}}_{\dots} \right) = \dots$$

$$|\dots| \le \frac{e^2}{(R/2)^2} \cdot (4 + 2R) \to 0$$

$$\Rightarrow \dots = \int_{\Gamma_i(1)} \frac{\cos x}{x+i} \cdot \frac{1}{x-i}\, dx \overset{(11.33)}{=} 2\pi i \left(\frac{\cos x}{x+i} \right) \Big|_{x=i}$$

$$= \pi \cos i = \pi \cosh 1.$$

75.

Gg.: $f: \begin{cases} U_1(0) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \sin(z^n) \end{cases}$.

Zz.: f Konvergiert (bzw. ist wohldefiniert), und ist holomorph;

Ww.: $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$|\sin z| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh|z| ,$$

und für $x := |z| \leq 1$, gilt $\sinh x \leq |x| \cosh 1$

$$\Leftrightarrow \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq |x| \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq |x| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} ,$$

weil $\forall k \in \mathbb{N}: \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{(2k)!}$.

Also Konvergiert $f(z)$ absolut, weil

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \sin(z^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\sin(z^n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sinh|z^n| \leq \cosh 1 \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n .$$

Insbesondere, konvergiert $\left(\sum_{n=0}^{N} \sin(z^n) \right)_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf Kompaktem $K_r(0) \subseteq U_1(0)$, mit $r \in (0,1)$.

Nachdem alle Partialsummen als Funktionenreihe holomorph sind, so auch, laut Satz 11.6.16, f.

76. Ges.: Laurentreihe von

$\frac{\sin z}{z-2}$ mit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$.

Ww.: Laut Satz 11.7.2, lässt sich jedes holomorphe $f: D \to Y$, für $w \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_w < R_w \leq +\infty$, $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w) \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$, als

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-w)^n a_n \quad \text{für alle } z \in U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w),$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} \, d\zeta$ und $\gamma_\rho : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto w + \rho e^{it} \end{cases}$, $\rho \in (r_w, R_w)$, schreiben.

Sei $w := 2$, dann

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{\sin \zeta}{(\zeta - 2) \cdot (\zeta - w)^{n+1}} \, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{\sin \zeta}{(\zeta - w)^{n+2}} \, d\zeta$$

$$\leadsto \overset{n \geq -1}{=} \frac{\sin^{(n+1)}(2)}{(n+1)!}$$

$$\leadsto \overset{n < -1}{=} \frac{\sin 2}{(2-2)^{n+1}} = (2-2)^{|n|-1} \sin 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z-2} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\sin^{(n+1)}(2)}{(n+1)!} (z-2)^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{n-1}}{n!} \sin^{(n)}(2)}{z-2}.$$

77. Ges.: Laurentreihe von

$\frac{1}{(z^2+1)^2}$ mit $0 < |z-i| < 2$.

Sei $\gamma_\rho(t) := w + \rho e^{it}$ mit $\rho := 2$, $w := i$, dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \frac{1}{(z-i)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{(z+i)^2} \frac{1}{(z-i)^3}\, dz$$

$$\overset{n \geq -2}{=} \left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)^{(n+2)} \frac{1}{(n+2)!}\Bigg|_{z=i} = (-1)^n (n+3)! \frac{1}{(z+i)^{n+4}} \frac{1}{(n+2)!}\Bigg|_{z=i}$$

$$= (-1)^n (n+3)(2i)^{n+4}$$

$$\overset{n < -2}{=} \frac{(z-i)^{|n|-2}}{(z+i)^2}\Bigg|_{z=i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z^2+1)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{(2i)^{n+4}} (z-i)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2i)^{n+2}} (z-i).$$

78. Ges.: Laurentreihe von

$\frac{1}{4z-z^2}$ mit $|z| > 4$ bzw. $0 < |z| < 4$.

(i) $$\frac{1}{4z-z^2} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-4/z} = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -4^n\,\frac{1}{z^{n+2}}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-2} -\frac{1}{4^{n+2}}\,z^n.$$

(ii) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z-0)(4-z)}\cdot\frac{1}{(z-0)^{n+1}}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{4-z}\cdot\frac{1}{(z-0)^{n+2}}\,dz$$
$$\leadsto \overset{n\geq -1}{=} \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4-z}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=0} \overset{(V1)}{=} \frac{1}{(n+1)!}\left(n!\,\frac{1}{(4-z)^{n+1}}\right)'\Bigg|_{z=0}$$
$$= \frac{1}{\cancel{(n+1)!}}\left(\cancel{(n+1)!}\,\frac{1}{(4-z)^{n+2}}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{4^{n+2}}$$
$$\leadsto \overset{n<-1}{=} \left(\frac{1}{(4-z)(z-0)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=0} = \left(\frac{1}{4-z}\cdot z^{|n|-1}\right)\Bigg|_{z=0} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+2}}\cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}\cdot z^{n-1}.$$

79.

Gg.: $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin 1/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Zz.: f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, mit $f'(0) = 1$

oBdA. $x = 0$, dann

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \left(\cancel{h} + 2\cancel{h^2} \sin 1/h^2 \right)$$

$$= 1 + \lim_{h \to 0} 2h \underbrace{\sin 1/h^2}_{\text{beschr}} = 1$$

Zz.: $\forall \varepsilon > 0 : \nexists f^{-1} : f^{-1}$ Umkehrfunktion von $f|_{K_\varepsilon(0)}$

d.h. $f|_{K_\varepsilon(0)}$ ist nich bijektiv (bzw. injektiv)

Ww.: $f'(x) = \begin{cases} 4x \sin 1/x^2 - 4\cos(1/x^2)/x + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\right) < 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2 + \pi k}}\right) > 0, \quad k \in 2\mathbb{N} + 1$$

Mit dem Zwischenwertsatz, folgt die Existenz von Extrema, was die Injektivität von f in $K_\varepsilon(0)$ widerlegt.

Zz.: Das ist kein „$\lightning$" zum Hauptsatz über implizite Funktionen.

Ww.: Seien $F_i \in C^k(D, \mathbb{R})$, $k \geq 1$, $D \subseteq \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$, $i = 1, \dots, n$, $F = (F_1, \dots, F_n)^T$, $x_0 \in \mathbb{R}^q$, $u_0 \in \mathbb{R}^r$, $(x_0, u_0) \in D$,

$F(x_0, u_0) = \mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$, $\det\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x_0, u_0)\right) \neq 0$;

$\Rightarrow \exists \varepsilon, \delta > 0 : \forall x \in K_\varepsilon(x_0) \; \exists! \, u \in K_\delta(u_0) :$

$\forall i = 1, \dots, n : F_i(x, u) = 0 ,$

und wenn $G(x) := u \Rightarrow G \in C^k(K_\varepsilon(x_0))$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, G(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, G(x)) .$$

Fassen wir $f(x)$ als $\frac{\partial F}{\partial u}(x, G(x))$ auf, dann $u \in \mathbb{R}$

und $F(x; u) = f(x)\, u$, aber für $x_0 = 0$,

$\det\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x_0, u_0)\right) = \det f(0) = 0$ ↯