2.3.17 Lemma. Jede endliche nichtleere Teilmenge M einer total geordneten Menge $\langle T, \leq \rangle$ hat ein Minimum und ein Maximum, das wir mit $\min(M)$ bzw. mit $\max(M)$ bezeichnen. Insbesonbere gilt diese Aussage für endliche Teilmengen von angeordneten Körpern und von $\mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen die Existenz eines Maximums von endlichen Mengen M, durch vollständige Induktion nach der Mächtigkeit von M. Also zeigen wir zuerst, dass die Aussage für Mengen mit der Mächtigkeit 1 (einelementige Mengen) gilt und dann, dass wenn eine Menge n Elemente hat und die Aussage gilt, dass sie auch für Mengen mit $n+1$ Elementen gilt. Die Existenz eines Minimums von endlichen Mengen wird analog bewiesen. Man muss dazu nur im folgenden Text „$\leq$" mit „$\geq$" vertauschen und umgekehrt, sowie „Maximum" mit „Minimum". Enthält M nur ein Element m, so ist klarerweise m das Maximum von M. Formal müsste man mit der Definition 2.2.5, also „gibt es ein $a_0 \in A$, sodass $a \leq a_0$ ($a_0 \leq a$) für alle $a \in A$, so nennt man a_0 das Maximum (Minimum) von A,", und der Reflektivität der Relation $\leq$, also $\forall m \in M: m \leq m$, argumentieren.

Angenommen alle $\tilde{M} \subseteq T$ mit n Elementen haben ein Maximum. Das ist wohl die Induktionsvoraussetzung. Es wird $\tilde{M}$ geschrieben, damit keine Verwechslungsgefahr mit M besteht. Hat nun $M \subseteq T$ genau $n+1$ Elemente und ist $m_1 \in M$, so hat $M \setminus \{m_1\}$ genau n Elemente und laut Induktionsvoraussetzung ein Maximum $m_2 \in M \setminus \{m_1\}$. Weil $m_1 \in M$, $\{m_1\}$ nur 1

Element hat und M $n+1$ Elemente hat, hat $\tilde{M} = M \setminus \{m_1\}$ $\subseteq T$ n Elemente, unter denen eines davon, laut Induktions-Voraussetzung, das Maximum ist. Da $\langle T, \leq \rangle$ eine Totalordnung ist, gilt $m_1 \leq m_2$ oder $m_1 \geq m_2$. Dazu betrachte man Definition 2.2.4, also „Eine Relation R heißt total, wenn für je zwei $x, y \in M$ immer xRy oder yRx." . Im ersten Fall ist dann m_2 das Maximum von M und im zweiten ist m_1 das Maximum von M. OK, Fallunterscheidung: das Maximum ist also entweder in $\tilde{M} \ni m_2$ oder in $\{m_1\} \ni m_1$, wobei $\tilde{M} \dot\cup \{m_1\} = M$, daher hat M ein Maximum. $\square$