Satz 2.5.5 Sind M eine Teilmenge von V und $A \subset M$ eine linear unabhängige Menge, so existiert unter allen linear unabhängigen Mengen Y mit der Eigenschaft $A \subset Y \subset M$ mindestens eine maximale Menge B. Das heißt, jede Menge B_1 mit $B \subsetneqq B_1 \subset M$ ist linear abhängig.

Beweis. Wir setzen zunächst $A_0 := A$ und gehen schrittweise vor:

- Ist A_0 maximal, so sind wir fertig. Die Existenz einer maximalen Menge $A_0 = B$ wäre gezeigt.

- Andernfalls gibt es einen Vektor $m_1 \in M \setminus A_0$ mit $A_1 := A_0 \cup \{m_1\}$ l.u. ...

Diese Überlegung ist jetzt mit A_1 zu widerholen, usw. $A_{n+1} := A_n \cup \{m_{n+1}\}$ l.u., wobei $m_{n+1} \in M \setminus A_n$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

Fall 1: Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, d.h., für ein $r \in \mathbb{N}$ ist die Menge $B := A_r$ maximal. Das Lemma von Zorn würde idF. also erst garnicht gebraucht werden. Dieser Fall tritt sicherlich ein, wenn M eine endliche Menge ist. Im Grenzfall ist $A_r = M$, sodass $M \setminus A_r = \emptyset$, also ist M die maximale Menge, weil $M' \supsetneqq M \Rightarrow M' \not\subset M$. Dabei ist natürlich M l.u.

Fall 2: Das Verfahren bricht nicht ab; wir erhalten eine unendliche Folge

$A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq A_{k+1} \subsetneq \cdots$

von l.u. Teilmengen der Menge M. Jetzt involvieren wir das Lemma von Zorn. Keine diese Teilmengen ist maximal. Wäre eine maximal, so wäre das Verfahren doch nach endlich vielen abgebrochen. Hier betrachten wir die halbgeordnete Menge $(2^V, \subset)$ und in dieser die halbgeordnete Teilmenge

$N := \{Y \mid Y$ ist l.u. und $A \subset Y \subset M\}$.

Die Potenzmenge 2^V von V (Menge aller Teilmengen von V) bildet mit „$\subset$" eine HO, weil „Reflexivität", „Antisymmetrie" und „Transitivität" erfüllt ist. Diese Eigenschaften werden auf $(N, \subset)$ vererbt.
Wir zeigen nun, dass wir das Lemma von Zorn aus 1.8.5 auf die halbgeordnete Menge N anwenden können. „Sei $(M, \sqsubseteq)$ eine nicht leere halbgeordnete Menge mit der Eigenschaft, das jede nicht leere Teilkette von M eine obere Schranke in M besitzt. ..." Daraus folgt die Existenz mindestens eines maximalen Elements B in N. Genau das, was wir wollen, wenn man die Bedingungen für N betrachtet.
Wir haben in der Tat $A \in N \neq \emptyset$. N ist also nicht leer; check! Sei ferner T eine nicht leere Teilkette von N. $T \subseteq N$ ist totalgeordnet, also $\forall Y_1, Y_2 \in T$: $Y_1 \subset Y_2 \vee Y_1 \supset Y_2$. Wir bilden $S := \bigcup_{Y \in T} Y$. Man beachte, dass N und T Mengen von Mengen sind.

Es folgt $A \subset S \subset M$ für alle $Y \in T$. Erstere Inklusion gilt, weil $\forall m \in A \; \forall Y \in N : m \in Y$ und weil $T \subseteq N$ auch für T. Insbesondere gilt dies für $S = \bigcup_{Y \in T} Y$. Letztere Inklusion folgt daraus, dass $\forall m \in S \; \exists Y \in T : m \in Y$, wobei laut Definition von $N \supseteq T$ gilt $Y \subset M$. Somit ist $S \subset V$ eine obere Schranke von T. $\forall Y \in T : Y \subset \bigcup_{Y \in T} Y = S$. Obere Schranke in N, fast check ?! Es fehlt noch die erste Bedingung für N. Wir zeigen, dass $S \in N$ erfüllt ist: $A \subset S \subset M$ ist klar. Hatten wir schon ... Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit von S verwenden wir Satz 2.4.5 und zeigen daher, dass eine beliebige Linearkombination

$$\mathcal{O} = \sum_{m \in S} x_m m \tag{2.23}$$

mit Skalaren $x_m \in K$ trivial sein muss. Das ist äquivalent dazu, dass S l.u. ist, laut Satz 2.4.5. Mit Hilfe der endlichen Menge $S' := \{m \in S \mid x_m \neq 0\}$ läuft das auf den Nachweis von $S' = \emptyset$ hinaus. S' ist endlich, weil bei allen LK, fast Koeffizienten 0 sind. Um zu zeigen, dass (2.23) trivial ist, müssen aber alle 0 sein, also $S' = \emptyset$. Für jedes (möglicherweise existierende) $m \in S'$ gibt es mindestens eine Menge aus T – wir nennen sie Y_m – mit $m \in Y_m$. $m \in S = \bigcup_{Y \in T} Y \Rightarrow \exists Y_m \in T : m \in Y_m$. Es existiert mindestens eine Menge $X \in T$ mit

$Y_m \subset X$ für alle $m \in S'$. $\exists X \in T : \forall m \in S' : Y_m \subset X$. Das sehen wir so: Da T eine nicht leere Kette ist, kann X für $S' = \emptyset$ beliebig in T und andernfalls als die größte der endlich vielen Y_m gewählt werden. $\forall m \in S' : Y_m \in T$ ist totalgeordnet. Es gibt nur endlich viele Y_m, weil $S' \ni m$ endlich ist (siehe oben), also kann (wie ganz am Anfang) in endlich vielen Schritten ein größtes Element Y_m gewählt werden. Weil X l.u. ist, trifft dies nach A 2.4.4 (a) auch auf $S' \subset X$ zu. ... Formel (2.23) bleibt richtig, wenn wir S durch die l.u. Menge S' ersetzen. Die (redundanten) Summanden $x_m m$, mit $m \in S \setminus S' = \{m \in S \mid x_m = 0\}$, fallen also weg. Satz 2.4.5 zeigt nun $x_m = 0$ für alle $m \in S'$, was auf Grund der Definition von S' nur für $S' = \emptyset$ möglich ist. Weil S' (laut ein Bisschen oben) l.u. ist, ist $\mathcal{O} = \sum_{m \in S'} x_m m = \sum_{m \in S} x_m m$ trivial, also $\forall m \in S' : x_m = 0$, laut Satz 2.4.5. Es folgt, dass eigentlich $S' = \{m \in S \mid x_m \neq 0 \land x_m = 0\} = \emptyset$. Die erste Bedingung für „ein Element von N" ist nun auch gezeigt, also $S \in N$ ist eine obere Schranke von der beliebigen Teilkette T. Alle Prämissen für das Lemma von Zorn sind erfüllt; das maximale Element Existiert also in jedem Fall (1 und 2). $\square$