Übungstest Analysis 2

26. 3. 2010

1A (5P): Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx.$$

Lsg.: Mit $\sqrt{x} = t$ und $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}2t\,dt = 2\int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt = 2 - 2\arctan|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

1B (5P): Berechnen Sie

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$$

und begründen Sie, warum das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$$

existiert oder nicht.

Lsg.: Mit $u = 1 - x^3, \quad du = -3x^2\,dx$ erhält man

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx = \frac{-1}{3}\int \frac{x^2}{\sqrt{u}}\frac{du}{x^2} = \frac{-1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{-2}{3}\sqrt{u} = \frac{-2}{3}\sqrt{1-x^3}.$$

Der Integrand ist um $x = 1$ unbeschränkt, also existiert das eigentliche Riemann-Integral $\int_0^1$ nicht. Wegen

$$\lim_{\beta\to 1-}\int_0^\beta \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}},dx = \lim_{\beta\to 1-}\frac{-2}{3}\sqrt{1-\beta^3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

existiert es als uneigentliches Riemann Integral.

2 (5P). Begründen Sie warum die Funktion

$$f(x) := \int_0^1 t^2 e^{x(t^2+t)}\,dt$$

zwei mal differenzierbar ist und bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades mit Anschlussstelle 0.

Lsg.: Die Ableitung des Integranden nach x ist $(t^4+t^3)e^{x(t^2+t)}$, also sind der Integrand und seine Ableitung nach x stetig. Mit Korollar 8.7.6 folgt, dass f stetig ist und mit Korollar 8.7.9 dass f differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(t^2 e^{x(t^2+t)}\right)\, dt = \int_0^1 (t^4+t^3)e^{x(t^2+t)}\, dt.$$

Dieselbe Argumentation zeigt dass f' differenzierbar ist mit

$$f''(x) = \int_0^1 (t^6+2t^5+t^4)e^{x(t^2+t)}\, dt.$$

Es folgt

$$f(0) = \int_0^1 t^2 e^{0(t^2+t)}\, dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}, \quad f'(0) = \int_0^1 t^4+t^3\, dt = \frac{1}{5}+\frac{1}{4},$$

$$f''(0) = \int_0^1 t^6+2t^5+t^4\, dt = \frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{71}{105}.$$

Es folgt

$$T_2(x) = \frac{1}{3}+\frac{9}{20}x+\frac{71}{210}x^2.$$

Lsg: 1:

2: