

# Analysis 3 - Übung

11. UE am 13.01.2020

Richard Weiss

Florian Schager  
Paul Winkler

Christian Sallinger  
Christian Göth

Fabian Zehetgruber

**Aufgabe 89.** Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & 0 < x < 1, \\ ax - 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$  schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwachen Ableitungen.

Zeigen Sie: Für  $u(\mathbf{x}) = \log |\mathbf{x}|$  und  $\nu_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^2}$  ist  $\nu_i$  die schwache Ableitung  $D^i u$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 90.** Sind  $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ , so ist  $uv \in W^{1,1}(\Omega)$  mit  $D_i(uv) = D_i u v + u D_i v$

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 91.** Verschwindet für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  die schwache Ableitung der Ordnung  $n$ , so ist  $f$  ein Polynom der Ordnung  $n - 1$  fast überall.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Testfunktion als Summe der  $n$ -ten Ableitung einer Testfunktion und einer Linearkombination der Funktionen  $\Psi_0^{(l)}, l < n, \Psi_0$  wie im Beweis von 6.1.4. dargestellt werden kann und berechnen Sie  $\int x^k \xi^{(l)}(x) dx$  für Testfunktionen  $\xi$  und  $k \leq l$ .

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 92.** Zeigen Sie, dass aus der Existenz der schwachen Ableitung der Ordnung 2 im Allgemeinen für  $n \geq 2$  nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1 folgt.

Hinweis: Betrachten Sie eine Funktion  $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ .

Zeigen Sie, dass für  $n = 1$  aus der Existenz einer schwachen  $k$ -ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen  $l$ -ter Ordnung für  $l < k$  folgt.

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 93.** Zeigen Sie, dass  $f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$  genau dann in  $W^{m,p}(\Omega)$  liegt, wenn die Abbildungen  $\varphi \mapsto \int_{\Omega} f D^{\alpha} \varphi d\lambda^n$  für  $|\alpha| \leq m$  stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der  $L^q$ -Norm nach  $\mathbb{R}$  ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Dualraum von  $L^p$  der  $L^q$  ist, das heißt jede beschränkte lineare Abbildung von einem dichten Teilraum des  $L^p$  nach  $\mathbb{C}$  ist von der Form  $\varphi \mapsto \int \varphi g$  mit  $g \in L^q$ .

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 94.** Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge  $E$  von  $\mathbb{R}^n$ , wenn  $x$  Lebesguepunkt der Funktion  $\mathbb{1}_{E \cup \{x\}}$  ist.

Zeigen Sie: Ist jeder Punkt  $x \in [0, 1]^n$  ein Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge  $E$  von  $\mathbb{R}^n$ , so gilt  $\lambda^n(E) \geq 1$ .

Gibt es eine messbare Teilmenge  $E$  von  $\mathbb{R}$ , für die  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Menge der Dichtepunkte von  $E$  ist?

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 95.** Ist  $X$  ein Fixpunktraum und  $Y$  ein Retrakt von  $X$ , so ist  $Y$  ein Fixpunktraum.

Lösung. Dass  $X$  **Fixpunktraum** ist heißt,  $X$  ist ein topologischer Raum, auf dem jede stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt.

$$X \text{ topologischer Raum} : \forall T_X \in C(X, X) : \exists x \in X : T_X(x) = x$$

Eine Teilmenge  $Y$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt **Retrakt**, wenn es eine stetige Abbildung (**Retraktion**)  $R$  von  $X$  auf  $Y$  mit  $R|_Y = \text{id}_Y$  gibt.

$$Y \subseteq X, \exists R \in C(X, Y) : R|_Y = \text{id}_Y$$

Sei  $R$  die besagte Retraktion und  $T_Y \in C(Y, Y)$  beliebig. Die wohldefinierte Komposition dieser stetigen Funktionen, ist stetig.

$$T_X := T_Y \circ R \in C(X, Y) \subseteq C(X, X).$$

Nun besitzt  $T_X$  also laut Voraussetzung einen Fixpunkt, also  $\exists x \in X$  :

$$T_Y(R(x)) = T_X(x) = x.$$

Weil  $T_X(Y) \subseteq Y$ , muss  $x \in Y$ . Wegen  $R|_Y = \text{id}_Y$ , gilt  $x = R|_Y(x) = R(x) =: y$ . Zuletzt, erhält man  $T_Y(y) = y$ , also einen Fixpunkt  $y$  von  $T_Y$ .

**Aufgabe 96.** Zeigen Sie (Satz von Perron-Frobenius): Jede  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{i,j})$  mit  $a_{i,j} \geq 0$  für  $1 \leq i, j \leq n$  hat einen Eigenwert  $\lambda \geq 0$  mit zugehörigem Eigenvektor  $x = (x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$ .

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 97.** Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 &= x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2x_2^4 + \frac{1}{4} &= x_2 \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt.

Lösung. Trivial!

**Aufgabe 98.** Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung  $u$  der Gleichung

$$u(x) = x + \frac{1}{2} \sin(u(x) + x)$$

in  $C[-1, 1]$  gibt.

*Lösung.* Betrachte die, auf dem vollständigen metrischen Raum  $(C[-1, 1], d_\infty)$  lebende, Selbstabbildung

$$T : u \mapsto \left( x \mapsto x + \frac{1}{2} \sin(u(x) + x) \right).$$

Da  $\sin' = \cos$ , erhalten wir aus dem MWS der Differentialrechnung, dass  $\forall a, b \in \mathbb{R} : \exists \xi \in [-1, 1] :$

$$\left| \frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b} \right| = |\cos(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

Damit gilt  $\forall u, v \in C[-1, 1] :$

$$\begin{aligned} d_\infty(T(u), T(v)) &= \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \left( x + \frac{1}{2} \sin(u(x) + x) \right) - \left( x + \frac{1}{2} \sin(v(x) + x) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1, 1]} |\sin(u(x) + x) - \sin(v(x) + x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1, 1]} |u(x) + x - (v(x) + x)| \\ &= \frac{1}{2} d_\infty(u, v). \end{aligned}$$

Somit ist die Selbstabbildung  $T$  eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor  $\frac{1}{2}$ . Es existiert also, laut Banach'schem Fixpunktsatz, eine eindeutige Lösung.