Differentialgleichungen 1 - Übung 3

3. UE am 26.03.2020

Florian Schager

Aufgabe 1. Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ein Gebiet, $f \in C(G;\mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2.Argument. Sei $y \in C^1((a,b);\mathbb{R}^d)$ eine Lösung von $y' = f(t,y)$. Zeigen Sie: Falls es eine Folge $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty}(t_n, y(t_n)) = (b, y_b) \in G$ gibt, so kann y über b hinaus fortgesetzt werden, d.h. es gibt ein $b' > b$ und ein $\bar{y} \in C^1((a,b');\mathbb{R}^d)$ mit $\bar{y}' = f(t,\bar{y})$ auf (a,b') und $y = \bar{y}$ auf (a,b).
Hinweis: Zeigen Sie $\lim_{t\to b_-} y(t) = y_b$ mittels Widerspruch. Betrachten Sie hierzu Folgen $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \leq \tau_n$ und $||y(\tau_n) - y_b||_{\mathbb{R}^d} = \epsilon > 0$, sowie $||y(t) - y_b||_{\mathbb{R}^d} \leq \epsilon$ für $t \in [t_n, \tau_n]$. Verwenden Sie, dass f in einer Umgebung von (b, y_b) beschränkt ist.

Lösung. Angenommen $\lim_{t\to b_-} y(t) \neq y_b$.
Da $(b, y_b) \in G$ ist f bei (b, y_b) stetig und es existiert eine Umgebung U von (b, y_b) und ein $M > 0$, sodass:

$$\forall (t,y) \in U : ||f(t,y)|| < M$$

Dann existiert ein $\epsilon_0 > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}, \epsilon < \epsilon_0 : \exists \tau_n^* : t_n \leq \tau_n^* < b$ und $||y(\tau_n^*) - y_b||_{\mathbb{R}^d} > \epsilon$.
Wähle nun ϵ, so dass $U_{2\epsilon}(b, y_b) \subset U$. Betrachte nun die Funktion $\phi : t \mapsto ||y(t) - y_b||_{\mathbb{R}^d}$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \phi(\tau_n^*) > \epsilon, \quad \phi(t_n) < \epsilon \quad \text{und} \quad |t_n - b| < \epsilon.$$

Also existiert nach dem Zwischenwertsatz, angewandt auf ϕ, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein τ_n, sodass: $t_n \leq \tau_n < b$ und $||y(\tau_n) - y_b||_{\mathbb{R}^d} = \epsilon$. Wähle nun jeweils das kleinste τ_n, welches die obige Gleichung erfüllt und wir erhalten

$$||y(t) - y_b||_{\mathbb{R}^d} \leq \epsilon \text{ für } t \in [t_n, \tau_n].$$

Da $\forall n \geq n_0, t \in [t_n, \tau_n] : (t, y(t)) \in U_{2\epsilon}(b, y_b) \subset U$ gilt, berechnen wir

$$||y(\tau_n) - y(t_n)||_{\mathbb{R}^d} = ||\int_{t_n}^{\tau_n} f(t, y(t))dt|| \leq \int_{t_n}^{\tau_n} ||f(t, y(t))||dt \leq M(\tau_n - t_n).$$

Da wir wissen, dass $\lim_{n\to\infty}(\tau_n - t_n) = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} ||y(t_n) - y(\tau_n)|| = 0$.
Das ist aber ein Widerspruch zu $\forall n \in \mathbb{N} : ||y(\tau_n) - y_b||_{\mathbb{R}^d} = \epsilon > 0$. Damit haben wir gezeigt, dass $\lim_{t\to b_-} y(t) = y_b$ und mit dem "Klebelemma" aus dem Skript folgt das gewünschte Resultat.

Aufgabe 2. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(J \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2.Argument. Es gelte zusätzlich für ein $\omega \geq 0$

$$\langle f(t,x), x\rangle_2 \leq \omega ||x||_2^2 \quad \forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}^d,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet und $|| \cdot ||_2$ entsprechend die euklidische Norm. Zeigen Sie: Jede Lösung y von $y' = f(t,y)$ existiert bis an den rechten Rand von J. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto v(t) := ||y(t)||_2^2$ und zeigen Sie $v'(t) \leq 2\omega v(t)$.

Lösung. Durch Differenzieren von v erhalten wir

$$v'(t) = \sum_{i=1}^{n} 2y_i(t)y_i'(t) = 2\langle y'(t), y(t)\rangle_2 = 2\langle f(t, y(t)), y(t)\rangle_2 \leq 2\omega ||y(t)||_2^2 = 2\omega v(t).$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir

$$v(t) \leq ||y(t_0)||_2^2 + \int_{t_0}^{t} 2\omega v(\tau) d\tau.$$

Wenn wir nun darauf das Grönwall-Lemma anwenden, erhalten wir

$$v(t) \leq ||y(t_0)||_2^2 \exp(2\omega(t - t_0)).$$

Damit ist ein blow-up nicht möglich und mit Satz 2.13. (iii) schließen wir, dass die Lösung bis zum rechten Intervallrand, falls das Intervall beschränkt ist, oder sonst, bis in alle Zeiten, existieren muss.

Aufgabe 3. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$. Eine Funktion $y_+ \in C^1(J; \mathbb{R})$ heißt Oberlösung, falls

$$y_+'(t) > f(t, y_+(t)) \quad \forall t > t_0$$

(entsprechend wird eine Unterlösung definiert). Zeigen Sie: Falls $y_+ \in C^1(J; \mathbb{R})$ eine Oberlösung ist und $y \in C^1(J; \mathbb{R})$ eine Lösung der ODE $y' = f(t, y)$ ist, dann gilt: Falls $y(t_0) < y_+(t_0)$, dann gilt $y(t) < y_+(t)$ für alle $t \in (t_0, b)$.

Lösung. Definiere $A := \{t \in (t_0, b) : y(t) = y_+(t)\}$. Angenommen $A \neq \emptyset$, dann betrachte $t^* := \inf(A)$. Direkt aus der Definition von t^* folgt, dass

$$\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \lim_{n \to \infty} t_n = t \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} y(t_n) - y_+(t_n) = 0.$$

Da $y - y_+$ stetig ist, folgt daraus bereits $y(t^*) = y_+(t^*)$. Für alle $t_0 < t < t^*$ gilt folglich $y_+(t) - y(t) > 0$. Da $y_+ - y$ sogar stetig differenzierbar ist, gilt:

$$y_+'(t^*) - y'(t^*) = (y_+ - y)'(t^*) = \lim_{t \to t^*_-} \frac{y_+(t) - y(t)}{t - t^*} < 0.$$

Damit folgt

$$f(t^*, y(t^*)) = f(t^*, y_+(t^*)) < y_+'(t^*) < y'(t^*) = f(t^*, y(t^*))$$

und wir haben unseren Widerspruch.
Also gilt für alle $t > t_0 : y_+'(t) > f(t, y_+(t))$

Aufgabe 4. In der Vorlesung wurde behauptet, dass die Lösung des AWP

$$y' = -2 + \sin\left(\frac{1}{y}\right), \quad y(0) = 1, \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

bei $t \approx 0.7$ kollabiert. Zeigen Sie, dass tatsächlich ein Kollaps bei $t^* \leq 1$ eintreten muss. Hinweis: Verwenden Sie $y_+(t) = 1 - (1 - \epsilon)t$ (für $\epsilon > 0$ beliebig klein) als Oberlösung und überlegen Sie sich damit, dass die anderen Fälle nicht eintreten können.

Lösung. Um Satz 2.13 überhaupt anwenden zu können, müssen wir als erstes die lokale Lipschitzstetigkeit im zweiten Argument von $f(t, y) = -2 + \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ nachweisen. Sei $y \in \mathbb{R}^+, \epsilon > 0 : y_1, y_2 \in U_\epsilon(y)$. Dann folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left|\sin\left(\frac{1}{y_1}\right) - \sin\left(\frac{1}{y_2}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right| = \frac{|y_2 - y_1|}{y_1 y_2} \leq \frac{1}{(y - \epsilon)^2}|y_1 - y_2|.$$

Zunächst sei bemerkt, dass y_+ auf dem Intervall $[0,1]$ wirklich eine Oberlösung darstellt.

$$y_+'(t) = \epsilon - 1$$
$$y_+'(t) > -1 \geq \sin\left(\frac{1}{y}\right) - 2$$

Damit gilt laut dem vorherigen Beispiel

$$\forall \epsilon > 0 : y(1) \leq y_+(1) = \epsilon.$$

Daraus folgt $y(1) \leq 0$. Also kann die Lösung nicht für alle Zeiten existieren. Ebenso kann im Intervall $[0,1]$ kein Blow-Up stattfinden. Dafür betrachte die Unterlösung $y_-(t) = -4t$ und es gilt:

$$y(t) > y_-(t) = -4t$$

Zusammen mit der Oberlösung können wir also y beschränken:

$$-4t < y(t) < 1 - (1-\epsilon)t.$$

Damit muss also bei $t^* \leq 1$ ein Kollaps stattfinden.

Aufgabe 5. Eine skalare ODE ist separabel, falls sie von der Form

$$y' = f(y)g(t)$$

ist. Betrachten Sie das AWP $y' = f(y)g(t)$ mit $y(t_0) = y_0$. Definieren Sie die Stammfunktionen F und G durch die Bedingungen

$$F'(y) = \frac{1}{f(y)}, \quad G'(t) = g(t)$$

a) Zeigen Sie: Falls f und g stetig (bei y_0 und t_0) sind und $f(y_0) \neq 0$, dann ist das AWP (eindeutig) lösbar. Die Lösung ist charakterisiert durch

$$F(y(t)) - G(t) + c = 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt ist. Was ist c? Was passiert im Fall $f(y_0) = 0$?

b) Lösen Sie das AWP

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0$$

c) Lösen Sie das AWP (“Logistische ODE”)

$$y' = y(1-y), \quad y(0) = y_0$$

d) Lösen Sie das AWP

$$y' = \cos(t)\cos^2(y), \quad y(0) = 0$$

Lösung. a) Betrachten wir zuerst den Fall $f(y_0) = 0$. Dann könne wir natürlich die Stammfunktion F so nicht definieren. In dem Fall erhalten wir die Triviallösung $y(t) = y_0$. Die Eindeutigkeit geht allerdings im Allgemeinen verloren, wie es das Beispiel 2.4 im Skript zeigt:

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$
$$y_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{4}t^2, & t > 0 \end{cases}$$
$$y_2(t) = 0$$

Anderenfalls existiert aufgrund der Stetigkeit von f auf jeden Fall zumindest eine Umgebung U von y_0, sodass $0 \notin f(U)$. Weiters existiert eine Umgebung V von t_0, sodass $y(V) \subset U$. Wir können zeigen, dass das Anfangswertproblem zumindest in dieser Umgebung V eindeutig lösbar ist.
Da $f(y(t))g(t)$ als Produkt zweier stetiger Funktionen wieder stetig ist, erhalten wir mit dem Existenzsatz von Peano, dass dieses Anfangswertproblem zumindest lösbar ist. Um einzusehen, dass die Lösungen dieses Problems durch

$$F(y(t)) - G(t) = c$$

charakterisiert werden, betrachte zunächst eine Lösung y des AWPs. Dann gilt

$$(F(y(t)) - G(t))' = \frac{y'(t)}{f(y(t))} - g(t) = g(t) - g(t) = 0.$$

Damit muss $F(y(t)) - G(t)$ konstant sein. Sei nun y eine Lösung der Gleichung $F(y(t)) - G(t) = c$. Dann folgt durch Ableiten beider Seiten

$$0 = (F(y(t)) - G(t))' = \frac{y'(t)}{f(y(t))} - g(t) \iff y'(t) = f(y(t))g(t)$$

Die Konstante c ist dabei also die Integrationskonstante und muss dementsprechend derart gewählt werden, dass die Anfangwertbedingung des Problems erfüllt wird: $c = G(t_0) - F(y_0)$.
Seien nun $y \in C^1(J; \mathbb{R}), z \in C^1(\widetilde{J}; \mathbb{R})$ zwei Lösungen des AWPs. Da $f(y_0) \neq 0$ existiert eine Umgebung U von y_0, in der f keinen Vorzeichenwechsel hat. Damit ist F auf U streng monoton und somit injektiv.

$$\forall t \in V : g(t) = \frac{y'(t)}{f(y(t))} = \frac{z'(t)}{f(z(t))}$$

und daraus folgt wegen $y(t_0) = y_0 = z(t_0)$ auch $F(y(t)) = F(z(t))$. Aufgrund der Injektivität von f, muss in V sicher $y(t) = z(t)$ gelten.

b)

$$f(y) = y^2, \quad g(t) = 1$$
$$F'(y(t)) = \frac{y'}{y^2}, \quad G'(t) = 1$$

Mit dem Ansatz $F(y(t)) - G(t) + c = 0$ erhalten wir

$$t = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{y'(t)}{f(y(\tau))} d\tau = \int_0^t \frac{y'(t)}{y(\tau)^2} d\tau = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}.$$

Daraus folgt

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}.$$

c)

$$f(y) = y - y^2, \quad g(t) = 1$$
$$F'(y(t)) = \frac{y'}{y - y^2}, \quad G'(t) = 1$$

Mit dem Ansatz $F(y(t)) - G(t) + c = 0$ erhalten wir wieder

$$t = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{u-u^2} du = -\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{(u-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} du\Big|_{dx=du}^{x=u-\frac{1}{2}} = -\int_{y_0-\frac{1}{2}}^{y(t)-\frac{1}{2}} \frac{1}{(x)^2 - \frac{1}{4}} dx\Big|_{ds=\frac{1}{2}dx}^{s=2x} = 2\int_{2y_0-1}^{2y(t)-1} \frac{1}{1-s^2} ds$$
$$= 2\left(\operatorname{artanh}(2y(t)-1) - \operatorname{artanh}(2y_0-1)\right) = \ln\left(\frac{y(t)}{1-y(t)}\right) - \ln\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right) = \ln\left(\frac{(1-y_0)y(t)}{(1-y(t))y_0}\right).$$

Wir erhalten mit $\frac{(1-y_0)y(t)}{(1-y(t))y_0} = \exp(t)$

$$y(t) = \exp(t)\frac{(1-y(t))y_0}{(1-y_0)} = \frac{\exp(t)\frac{y_0}{(1-y_0)}}{1+\exp(t)\frac{y_0}{(1-y_0)}}.$$

d)

$$f(y) = \cos^2(y), \quad g(t) = \cos(t)$$
$$F'(y(t)) = \frac{y'}{\cos^2(y)}, \quad G'(t) = \cos(t)$$

Verwenden wir nun wieder den Ansatz $F(y(t)) = G(t) + c$ erhalten wir

$$\sin(t) = \int_0^{y(t)} \frac{1}{\cos^2(y)} du = \tan(y(t))$$

Daraus erhalten wir unsere Lösung $y(t) = \arctan(\sin(t))$.