~~Lgm~~ 7.0] •) Für eine Formel φ sagen wir, dass $\mathfrak{M}$ ein Modell von φ ist, wenn für alle Belegungen b die Gleichung $b(\varphi) = 1$ gilt, also $\mathfrak{M} \models \varphi$

•) Für jede geschlossene Formel φ, das ist eine Formel ohne freie Variable ist das Spektrum $Sp(\varphi) := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein endliches Modell von } \varphi \text{ mit genau} \\ n \text{ Elementen} \end{array} \right\}$

ges. geschlossene Formel φ, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt mit

$Sp(\varphi) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\}$

$$\varphi := \overset{1}{\forall x : (\neg R(x,x))} \wedge \overset{2}{\forall x,y,z\, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))} \wedge \cancel{\overset{3}{\forall x,y\, (R(x,y) \to \neg R(y,x))}}$$
$$\cancel{\wedge\, (\underset{4}{\forall x \exists y\, (R(x,y) \vee R(y,x))})} \wedge \underset{4}{\exists x_1, \dots, x_6\, (R(x_1,x_2) \wedge R(x_2,x_3) \wedge \dots \wedge R(x_5,x_6))}$$

•) Betrachte für $n > 5$ die Strukturen $(\{1, \dots, n\}, \overset{R}{\overset{\shortparallel}{<}})$

so erfüllt $<$ natürlich alle Eigenschaften $\underset{1,2}{}$ und $1 < 2 < \dots < 6$

•) Betrachte nun $n \leq 5$ und $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ mit der Relation R

Ang. 1, 2 und 4 gelten für eine Bel. b. Wegen des Schubfachprinzips gibt es $j < k \in \{1, \dots, 5\} : b(x_k) = b(x_j)$,

also wegen der Transitivität (2) gilt $(b(x_j), b(x_k)) \in R^{\mathfrak{M}}$ und daher

$(b(x_j), b(x_j)) \in R^{\mathfrak{M}}$ also ~~gilt~~ 1 nicht.

Agm 78) a) z.z.: $\vDash \underbrace{(\forall x\, \exists y\ R(x,y))}_{\varphi :=} \to \underbrace{(\forall y\, \exists x\ R(y,x))}_{\psi :=}$

Sei $\mathfrak{M}$ bel. Modell und b Belegung mit $\hat{b}(\varphi) = 1$ (sonst ist $\varphi \to \psi$ ohnehin wahr)

$\hat{b}(\psi) = \inf\{ \sup\{ \widehat{(b_{y \to k})_{x \to m}}(R(y,x)) \mid m \in M\}\ k \in M\} =$

$= \inf\{ \sup\{ \widehat{(b_{x \to m})_{y \to k}}(R(y,x)) \mid m \in M\}\ k \in M\} = \hat{b}(\varphi) = 1$

z.z.: $\vDash (\forall x\, \exists y : x \leq y) \to (\forall y\, \exists x : y \leq x)$

Spezialfall vom vorigen Teil a)

Agm 85) Seien φ und ψ Formeln einer Sprache $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$ eine Struktur über $\mathcal{L}$ und b eine Belegung.

a) z.z.: Wenn $\mathfrak{M} \vDash \varphi[b]$ und $\mathfrak{M} \vDash (\varphi \to \psi)[b]$, dann $\mathfrak{M} \vDash \psi[b]$

also $\hat{b}(\varphi) = 1$ und $1 = \hat{b}(\varphi \to \psi) = \hat{b}(\varphi) \to \hat{b}(\psi)$ also ist auch $\hat{b}(\psi) = 1$

z.z.: Wenn $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ und $\mathfrak{M} \vDash (\varphi \to \psi)$ dann $\mathfrak{M} \vDash \psi$

Wähle bel. Belegung b, dann wie vorher in a)

Agm 93) (a) Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M}$ gilt: Wenn $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ dann $\mathfrak{M} \vDash \psi$

(b) Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M}$ gilt $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \psi$

Suche Formeln φ, ψ für die (a), aber nicht (b) gilt

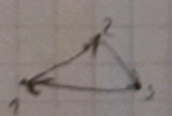
$\varphi := \exists y\, \forall x\, (R(x,y))$, $\psi := \forall x\, \exists y\, (R(x,y))$

Sei b eine Belegung mit $\hat{b}(\varphi) = 1$

$\hat{b}(\psi) = \inf\{ \sup\{ \widehat{(b_{x \to k})_{y \to m}}(R(x,y)) \mid m \in M\} \mid k \in M\}\} \geq$

$\geq \inf\{ \sup\{ \inf\{ \widehat{((b_{x \to k})_{y \to m})_{x \to l}}(R(x,y)) \mid l \in M\} \mid m \in M \mid k \in M\} =$

$= \inf\{ \hat{b}(\varphi) \mid k \in M\} = 1$

allerdings:  $M = \{1,2,3\}$, $R^{\mathfrak{M}} = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$

für bel. Belegung b ist zwar $\hat{b}(\varphi) = 0$, aber $\hat{b}(\psi) = 1$

also $\hat{b}(\varphi \to \psi) = 0$

Agm 94) suche Formeln φ, ψ für die (b) aus 93, aber nicht (a) gilt: geht nach 85 nicht!

Lemma 94 b) 1) $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ Taut

2) $\vdash \forall x (\varphi \to \varphi \vee \psi)$ Allquantor vor Axiom

3) $\vdash \forall x (\varphi \to \varphi \vee \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x (\varphi \vee \psi))$ Distrib

4) $\vdash \forall x \varphi \to \forall x (\varphi \vee \psi)$ MP (2,3)

a)

96) die folgenden Aussagen sind äquivalent

(a) $\Sigma \vdash \bot$

(b) Für alle φ gilt $\Sigma \vdash \varphi$

(c) Es gibt eine endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma' \vdash \varphi$

„(a) ⇒ (b)" Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ formaler Beweis von $\Sigma \vdash \bot$, dann ist

$\varphi_1, \dots, \varphi_n, \bot \to \varphi, \varphi$ Beweis von $\Sigma \vdash \varphi$

„(b) ⇒ (c)" Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Beweis von $\Sigma \vdash \varphi$, sei $\Sigma' := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cap \Sigma$ endl

dann ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Beweis von $\Sigma' \vdash \varphi$

„(c) ⇒ (a)" Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Beweis von $\Sigma' \vdash \bot$, dann ist

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Beweis von $\Sigma \vdash \bot$

$\square$

Lem 98) Wenn $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ dann $\Sigma \vdash \neg\varphi$

Sei $\psi_1, \dots, \psi_n$ Beweis von $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$

Fall 1: ψ_i ist log. Axiom oder $\psi_i \in \Sigma$

$\psi_{i_1} := \psi_i$, $\psi_{i_2} := \psi_i \to (\varphi \to \psi_i)$, $\psi_{i_3} := \varphi \to \psi_i$

Fall 2: $\psi_i = \varphi$ Setze $\psi_{i_1} = \psi_{i_2} = \psi_{i_3} = \varphi \to \psi_i$

Fall 3: $\psi_i (= B)$ folgt durch MP aus $\psi_k (= A \to B)$ und $\psi_l (= A)$

so ist $\psi_{k_3} = \varphi \to (A \to B)$ und $\psi_{l_3} = \varphi \to A$

$\psi_{i_1} := [\varphi \to (A \to B)] \to [(\varphi \to A) \to (\varphi \to B)]$ Tautologie

$\psi_{i_2} := [(\varphi \to A) \to (\varphi \to B)]$ MP

$\psi_{i_3} := \varphi \to B$

also kommt sicher $\varphi \to \bot$ vor im neuen Beweis

$(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$ Taut

$\neg\varphi$ MP anhängen und fertig