Serie 2

"Besprechung": Donnerstag, 19.3

2.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ein Gebiet und $f \in C(G; \mathbb{R}^d)$.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

1. Für jedes $(t, y) \in G$ existiert eine Umgebung U und ein $L_U > 0$, so daß $\|f(\widetilde{t}, x) - f(\widetilde{t}, y)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_U \|x - y\|_{\mathbb{R}^d}$ für alle $(\widetilde{t}, x)$, $(\widetilde{t}, y) \in U$.
2. Für jedes kompakte $K \subset G$ existiert ein $L_K > 0$, so daß $\|f(\widetilde{t}, x) - f(\widetilde{t}, y)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_K \|x - y\|_{\mathbb{R}^d}$ für alle $(\widetilde{t}, x)$, $(\widetilde{t}, y) \in K$.

b) Zeigen Sie: Eine Funktion $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$ ist lokal lipschitzstetig im 2. Argument. Geben Sie eine stetige Funktion f an, die nicht lipschitzstetig im 2. Argument ist.

2.2. Die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes im Satz von Picard-Lindelöf ist konstruktiv, denn die dem Banachschen Fixpunktsatz zugrundeliegende Iteration liefert den Fixpunkt. Im Kontext von AWP (wie im Satz von Picard-Lindelöf) heißt das Vorgehen "Picardsche Fixpunktiteration".

a) Wenden Sie die Picardsche Fixpunktiteration (mit Startfunktion $y_0 = 0$) auf das AWP

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

an. Gegen welche Funktion konvergiert die Iteration? Wie groß ist das Existenzintervall der Lösung?

b) Wenden Sie die Picardsche Fixpunktiteration (mit Startfunktion $y_0 = 0$) auf das AWP

$$y'(t) = 2t - 2\sqrt{\max\{0, y\}}, \qquad y(0) = 0$$

an Was beobachten Sie?

2.3. Betrachten Sie das AWP

$$y_1' = y_2 y_3, \quad y_2' = -y_1 y_3, \quad y_3' = 2, \qquad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0.$$

Machen Sie 2 Schritte der Picarditeration, ausgehend von der Startfunktion $y(t) = (0, 1, 0)^\top$. Würde die Iteration konvergieren? *Zusatzaufgabe:* Geben Sie die n-te Iterierte explizit an.

2.4. Betrachten Sie die Funktion f definiert durch

$$f(t, y) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & t > 0 \text{ und } y < 0 \\ 2t - \frac{4y}{t} & t > 0 \text{ und } 0 \leq y \leq t^2 \\ -2t & t > 0 \text{ und } t^2 < y \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$? Ist es lokal lipschitzstetig im 2. Argument?

2.5. Die Picarditeration ist nicht das einzige Iterationsverfahren, um (approximative) Lösungen von AWPs zu erhalten. Ein klassisches Vorgehen ist, beim Startpunkt t_0 eine Taylorreihe der Lösung y zu finden. Die Idee ist, durch Differenzieren der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

nach t die Werte $y^{(n)}(t_0)$, $n = 0, \ldots,$ zu bestimmen. Geben Sie Formeln für die gesuchten Werte $y^{(n)}(t_0)$ für $n = 1$, 2, 3 an.

Betrachten Sie das AWP

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1,$$

Um die Koeffizienten der Taylorreihe von y bei $t_0 = 0$ zu bestimmen, ist es geschickt, mit dem Ansatz $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$ zu arbeiten. Geben Sie eine Rekurrenz für die Koeffizienten y_n an. Konvergiert die Taylorreihe? Was ist das Konvergenzintervall?

2.6. Sei I ein abgeschlossenes (endliches) Intervall, $L \in \mathbb{R}$. Versehen Sie den Raum $C(I; \mathbb{R}^d)$ der stetigen Funktionen auf I mit der Norm

$$\|z\|_X := \max_{t \in I} e^{-2Lt} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Zeigen Sie, daß dieser Raum ein Banachraum ist (Sie dürfen verwenden, daß der Raum $C(I; \mathbb{R}^d)$ versehen mit der "üblichen" Norm ein Banachraum ist). Geben Sie einen Teilraum von $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ (und eine Norm) an, so daß ein Banachraum entsteht.