Für den Spezialfall $k = 1$ und $x_0 = 1$ von (4.1) haben wir in Beispiel 4.2 bereits festgestellt, dass die Lösung $x_n = c_0^n$ ist. Es liegt also nahe, Lösungen von der Form $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ zu betrachten. Für eine solche Lösung gilt

$$\alpha^n - c_{k-1}\alpha^{n-1} - \cdots - c_0\alpha^{n-k} = 0.$$

für alle $n \geq k$ und insbesondere für $n = k$:

$$\alpha^k - c_{k-1}\alpha^{k-1} - \cdots - c_1\alpha - c_0 = 0.$$

Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition:

Definition 4.4. Das *charakteristische Polynom* der Rekursionsgleichung (4.1) ist

$$\chi(z) = z^k - c_{k-1}z^{k-1} - \cdots - c_1 z - c_0$$

Das heißt also: falls $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ Lösung von (4.1) ist, dann ist α Nullstelle von $\chi(z)$. Es gilt auch eine (stärkere) Implikation in die andere Richtung so dass wir das folgende Resultat erhalten:

Satz 4.2. *Sei $\chi(z)$ das charakteristische Polynom von (4.1) mit Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$. Dann ist $\{(n^j\alpha_i^n)_{n\geq 0} \mid 1 \leq i \leq r, 0 \leq j < m_i\}$ eine Basis des Lösungsraums von (4.1).*

Beweis. Sei α eine Nullstelle von $\chi(z)$, dann ist

$$\alpha^k = c_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0$$

und nach Multiplikation mit α^{n-k}

$$\alpha^n = c_{k-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha^{n-k+1} + c_0\alpha^{n-k}.$$

Somit ist $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ eine Lösung.

Sei α Doppelnullstelle von $\chi(z)$, dann ist α auch Nullstelle von $\chi'(z)$ und damit vom Polynom $\psi(z) = (n-k)\chi(z) + z\chi'(z)$. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\alpha\chi'(\alpha) &= k\alpha^k - (k-1)c_{k-1}\alpha^{k-1} - \cdots - 2c_2\alpha^2 - c_1\alpha \text{ und}\\ (n-k)\chi(\alpha) &= (n-k)\alpha^k - (n-k)c_{k-1}\alpha^{k-1} - \cdots - (n-k)c_1\alpha - (n-k)c_0\end{aligned}$$

und damit

$$\psi(\alpha) = n\alpha^k - (n-1)c_{k-1}\alpha^{k-1} - \cdots - (n-k+1)c_1\alpha - (n-k)c_0.$$

Nach Multiplikation mit α^{n-k} erhalten wir

$$n\alpha^n = (n-1)c_{k-1}\alpha^{n-1} - \cdots - (n-k+1)c_1\alpha^{n-k+1} - (n-k)c_0\alpha^{n-k}$$

also ist auch $(n\alpha^n)_{n\geq 0}$ eine Lösung.

Falls α eine dreifache Nullstelle von $\chi(z)$ ist, ist α eine Doppelnullstelle von $\psi(z)$ und wir wenden die Abbildung $\chi \mapsto \psi$ ein zweites Mal, diesmal auf ψ, an. Induktiv folgt damit: falls α eine m-fache Nullstelle von $\chi(z)$ ist, dann sind $(\alpha^n)_{n\geq 0}, (n\alpha^n)_{n\geq 0}, \ldots, (n^m\alpha^n)_{n\geq 0}$ Lösungen.

Diese k Lösungen sind linear unabhängig, also handelt es sich wegen Lemma 4.1 um eine Basis des Lösungsraums. □

Die allgemeine Lösung von (4.1) hat also die Form

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \alpha_i^n$$

wobei die $c_{i,j}$ Konstanten sind, die von den Anfangswerten abhängen.

Beispiel 4.3. Mit Hilfe des obigen Satzes lässt sich leicht eine explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen berechnen. Das charakteristische Polynom von $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ist $\chi(z) = z^2 - z - 1$. Dieses hat die Nullstellen

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

woraus sich die allgemeine Lösung

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ergibt, wobei c_1 und c_2 von den Anfangsbedingungen abhängen. Für $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) &= 1 \end{aligned}$$

für c_1 und c_2, das die Lösung $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ hat. Wir erhalten also die Darstellung

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Bemerkung 4.1. Die obige Darstellung der Fibonacci-Zahlen ist nicht nur von rein theoretischem Interesse, sie bietet auch einen effizienteren Algorithmus zur Berechnung von F_n. Der direkt auf der Definition $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ basierende Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Zeit zur Berechnung von F_n. Zur Verwendung der obigen Darstellung muss im Wesentlichen a^n (für $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$) berechnet werden. Das ist in Zeit $O(\log n)$ wie folgt möglich: zunächst berechnen wir a^n für hinreichend viele Zweierpotenzen n, also $a^0, a^1, a^2, a^4, a^8, \ldots$. Aus a^i kann $a^{2i} = (a^i)^2$ mit einer einzigen Multiplikation berechnet werden. Wir schreiben dann n binär und multiplizieren die entsprechenden Potenzen, also z.B. $(37)_\mathrm{b} = 100101$ und damit $a^{37} = a^{32}a^4a^1$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts über lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten wollen wir nun auch noch den inhomogenen Fall betrachten. Dieser ist leicht zu behandeln.

Definition 4.5. Eine *inhomogene lineare Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten k-ter Ordnung* ist von der Form

$$x_n = c_{k-1}x_{n-1} + \cdots + c_0 x_{n-k} + d \text{ für } n \geq k \tag{4.2}$$

Satz 4.3. *Sei K ein Körper, seien $c_0, \ldots, c_{k-1}, d \in K$, dann hat (4.2) die Lösung $(x_n)_{n\geq 0}$ definiert durch $x_n = y_n - \frac{d}{C-1}$ wobei $C = \sum_{i=0}^{k-1} c_i$ und y_n ist Lösung von*

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + \frac{d}{C-1} \textit{ für } 0 \leq n < k \\ y_n &= c_{k-1} y_{k_1} + \cdots + c_0 y_{n-k} \textit{ für } n \geq k \end{aligned}$$

Beweis. Wir gehen mit Induktion nach n vor. Der Fall $n < k$ folgt direkt aus der Definition von x_n und y_n. Für $n \geq k$ haben wir

$$\begin{aligned} x_n &= c_{k-1}x_{n-1} + \cdots + c_0 x_{n-k} + d = c_{k-1}(y_{n-1} - \frac{d}{C-1}) + \cdots + c_0(y_{n-k} - \frac{d}{C-1}) + d \\ &= c_{k-1}y_{k-1} + \cdots + c_0 y_{n-k} - C \cdot \frac{d}{C-1} + d = y_n - \frac{d}{C-1}. \end{aligned}$$

□

4.3 Die Substitutionsmethode

Als Substitutionsmethode bezeichnet man die aus den folgenden beiden Schritten bestehende Vorgehensweise zum Auflösen einer Rekursionsgleichung:

1. Errate die Form der Lösung.

2. Beweise dass die Form korrekt ist.

Üblicherweise wird der zweite Schritt mit Induktion gemacht wobei die Verwendung der Induktionshypothese die Form einer *Substitution* eines T-Terms durch die erratene rechte Seite hat. Man verwendet dabei einen Lösungsansatz mit unbekannten Konstanten und bestimmt diese Konstanten erst im Lauf des zweiten Schritts (bzw. deren Existenz zu zeigen). Eine ähnliche Vorgehensweise (Beweisansatz mit unbekannten Konstanten, die erst nach Abschluss des Beweises bestimmt werden) ist in vielen Situationen zum Beweis von Abschätzungen nützlich.

Beispiel 4.4. Eine etwas vereinfachte Variante der Rekursionsgleichung von Sortieren durch Verschmelzen ist

$$T(n) = T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n.$$

Wir wollen uns jetzt nicht mehr für die exakte Lösung interessieren, sondern nur noch für eine asymptotische Lösung. Deswegen sind die konkreten Zahlenwerte eines endlichen Anfangs von T irrelevant und werden gar nicht mehr angegeben. Zunächst erraten wir die obere Schranke $T(n) = O(n \log n)$. Wir müssen also zeigen dass $\exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : T(n) \leq cn \log n$. Die Konstanten c und n_0 lassen wir noch offen und setzen zu einem Induktionsbeweis an.

Bezüglich des Induktionsanfangs bemerken wir, dass die Funktion $n \mapsto n \log n$ die Nullstellen 0 und 1 hat, danach ist sie positiv. Nachdem wir nicht garantieren können dass $T(0) = T(1) = 0$ müssen wir uns auf $n_0 \geq 2$ einschränken. Dann muss als Induktionsbasis ein hinreichend großes Intervall $[n_0, b[$ gewählt werden, so dass sowohl $n \mapsto \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ als auch $n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, angewandt auf $n \geq b$ immer noch größer gleich n_0 ist. Offensichtlich reicht dafür $b = 2n_0$. Damit schränken wir uns ein auf c mit $T(m) \leq cm \log m$ für $m \in [n_0, 2n_0[$.

Für den Induktionsschritt sei $n \geq 2n_0$. Wir nehmen an dass $T(m) \leq cm \log m$ für alle $m \in [n_0, n[$ und setzen an mit

$$T(n) \leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \log \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n = (*).$$

Falls $n = 2k$, dann

$$\begin{aligned} (*) &= cn \log \frac{n}{2} + n = cn \log n - cn \log 2 + n. \\ &= cn \log n - cn + n \end{aligned}$$

Nun schränken wir uns ein auf $c \geq 1$ und erhalten damit

$$\leq cn \log n.$$

Falls $n = 2k + 1$, dann

$$(*) = c(k+1)\log(k+1) + ck\log k + n \leq cn\log(k+1) + n$$

und da $k = \frac{n-1}{2}$ ist $k + 1 = \frac{n+1}{2}$ und damit

$$= cn \log \frac{n+1}{2} + n = cn\log(n+1) - cn + n.$$

Wir wollen $(*) \leq cn \log n$ erreichen und müssen uns dazu wieder einschränken auf $c \geq 1$. Das allein reicht aber noch nicht, der Term $-cn$ muss zusätzlich zu n auch $cn(\log(n+1) - \log n)$ entfernen. Wir brauchen also ein n_0 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$cn\log(n+1) - cn + n \leq cn\log n, \text{ d.h.}$$
$$\log(n+1) - 1 + \frac{1}{c} \leq \log n, \text{ d.h.}$$
$$\log(n+1) - \log n \leq 1 - \frac{1}{c}, \text{ d.h.}$$
$$\log \frac{n+1}{n} \leq 1 - \frac{1}{c}.$$

Wir müssen also c, n_0 finden so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $n_0 \geq 2$
2. $\forall m \in [n_0, 2n_0[: T(m) \leq cm \log m$
3. $c \geq 1$
4. $\forall n \geq 2n_0 : \log \frac{n+1}{n} \leq 1 - \frac{1}{c}$

Dazu wählen wir zuerst ein $c > 1$, dann gibt es n_0 das 4. wahr macht da $c > 1$ impliziert dass $1 - \frac{1}{c} > 0$ und $\frac{n+1}{n} \searrow 1$ und damit $\log \frac{n+1}{n} \searrow 0$ für $n \to \infty$. Falls dieses n_0 zu klein war erhöhen wir es um $n_0 \geq 2$ zu erfüllen wodurch 4. beibehalten wird. Es bleibt noch, 2. zu erfüllen. Das geschieht durch hinreichende Erhöhung von c bei gleichbleibendem n_0 und die Beobachtung dass dadurch 1., 3. und 4. beibehalten werden.

Damit haben wir also gezeigt dass c und n_0 existieren die den Bedingungen 1.-4. genügen und damit dass $T(n) = O(n \log n)$.

Beispiel 4.5. Sei

$$T(n) = T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + 1.$$

Eine Vermutung ist $T(n) = O(n)$, d.h. $\exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : T(n) \leq cn$. Auf direkte Weise würde das zum folgenden Ansatz für den Induktionsschritt führen:

$$T(n) \leq c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = cn + 1$$

Wir wollen $T(n) \leq cn$ erreichen was offensichtlich unmöglich ist. Jetzt ist aber $T(n) = O(n)$ trotzdem wahr was durch den folgenden, verbesserten, Ansatz auch gezeigt werden kann: $\exists c > 0, d > 0, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : T(n) \leq cn - d$. Dann erhalten wir

$$T(n) \leq c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - d + c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - d + 1 = cn - 2d + 1 \leq cn - d$$

unter der Voraussetzung $d \geq 1$. Der Induktionsanfang wird wie oben behandelt und so erhält man $T(n) = O(cn - d) = O(n)$.