Kapitel 3

Lineare Systeme

In diesem Kapitel behandeln wir die Theorie linearer Differentialgleichungssysteme. Das Anfangswertproblem für ein allgemeines System 1. Ordnung lautet

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0,\ t \in J := [t_0, t_1]. \tag{3.1}$$

Dabei sind $A \in C(J, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ gegebene Funktionen. Das System heißt *homogen* falls $b \equiv 0$ ist, andernfalls nennt man es *inhomogen*.

3.1 Homogene Systeme

Sei $b(t) \equiv 0$, und u, v Lösungen der *homogenen* Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{3.2}$$

Dann ist auch die Funktion $(\alpha u + \beta v)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, eine Lösung von (3.2), denn es gilt aufgrund der Linearität

$$\frac{d}{dt}(\alpha u + \beta v) = \alpha\dot{u} + \beta\dot{v} = \alpha A u + \beta A v = A(\alpha u + \beta v).$$

Die Menge aller Lösungen von (3.2) ist also ein Vektorraum, genauer ein Teilraum $\mathcal{L} \subset C^1(J, \mathbb{R}^n)$. Sei $x = x(\cdot, x_0)$ eine Lösung des AWPs

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dann definiert die Abbildung $Tx_0 := x(\cdot, x_0)$ einen linearen Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}$. Denn aus Korollar 2.5.2 folgt, dass das Anfangswertproblem (3.3) zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x(\cdot, x_0) \in \mathcal{L}$ besitzt. Daher ist T

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*,
Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_3, © Springer Basel AG 2010

injektiv. Die Abbildung T ist surjektiv, da jede Lösung einen Anfangswert besitzt. Schließlich ist T linear, denn mit

$$\begin{aligned} T(\alpha x_0 + \beta x_1) &= x(\cdot, \alpha x_0 + \beta x_1), \\ T x_0 = x(\cdot, x_0),\ & T x_1 = x(\cdot, x_1) \end{aligned}$$

gilt

$$\alpha T x_0 + \beta T x_1 = \alpha x(\cdot, x_0) + \beta x(\cdot, x_1)$$

und aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt

$$T(\alpha x_0 + \beta x_1) = \alpha T x_0 + \beta T x_1.$$

Wegen der Isomorphie von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{L}$ gilt $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^n = n$. Es existiert somit in $\mathcal{L}$ eine Basis, die aus n linear unabhängigen Lösungen von (3.2) besteht.

Definition 3.1.1. *Eine Basis von $\mathcal{L}$ heißt* **Fundamentalsystem (FS)** *zu* (3.2). *n Lösungen $y^i \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ fasst man zu einer* **Lösungsmatrix** $Y(t) = (y^1, \ldots, y^n)$ *zusammen, wobei die Lösungen y^i die Spalten von $Y(t)$ darstellen. Ist $\{y^1, \ldots, y^n\}$ ein FS, so nennt man $Y(t)$ eine* **Fundamentalmatrix (FM)**. *Gilt außerdem $Y(t_0) = I$, so heißt $Y(t)$* **Hauptfundamentalmatrix (HFM)** *in t_0 und deren Spalten nennt man* **Hauptfundamentalsystem (HFS)**.

Folgerungen.

1. Für jede Lösungsmatrix $Y(t)$ gilt $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$.
2. Ist $Y(t)$ eine FM, so lässt sich *jede* Lösung von (3.2) durch
$$y(t) = Y(t)c, \quad t \in J, \tag{3.4}$$
mit einem eindeutig bestimmten Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ darstellen.
3. Für jede Lösungsmatrix $Z(t)$ von (3.2) und jede konstante Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist auch $Y(t) = Z(t)C$ eine Lösungsmatrix von (3.2), denn es ist
$$\dot{Y}(t) = \dot{Z}(t)C = A(t)Z(t)C = A(t)Y(t).$$

Sei $Y(t)$, $t \in J$, eine Lösungsmatrix. Dann heißt $\varphi(t) := \det Y(t)$ *Wronski-Determinante* von $Y(t)$. Die Wronski-Determinante ist entweder für alle $t \in J$ von Null verschieden oder sie ist identisch Null. Dies folgt aus

Lemma 3.1.2. *Sei $Y(t)$ eine Lösungsmatrix für* (3.2) *und $\varphi(t) = \det Y(t)$. Dann gilt $\dot{\varphi}(t) = (\operatorname{sp} A(t))\varphi(t)$, $t \in J$, also*

$$\varphi(t) = \varphi(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \operatorname{sp} A(s)\, ds \right), \ t, \tau \in J,$$

wobei $\operatorname{sp} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$ die **Spur** *von $A(t)$ bezeichnet. Insbesondere verschwindet die Wronski-Determinante eines Fundamentalsystems in keinem $t \in J$.*

Beweis. Sei $\tau \in J$ beliebig fixiert und $Z(t)$ die HFM für (3.2) mit $Z(\tau) = I$. Da dann $\tilde{Y}(t) := Z(t)Y(\tau)$ ebenfalls eine Lösungsmatrix von (3.2) mit Anfangswert $\tilde{Y}(\tau) = Y(\tau)$ ist, folgt $Y(t) = \tilde{Y}(t)$ aus der Eindeutigkeit der Lösung. Daher gilt

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}(\det Y(t)) = \frac{d}{dt}(\det Z(t) \det Y(\tau)) = \frac{d}{dt}(\det Z(t))\varphi(\tau).$$

Da $\det Z(t)$ linear in den Spalten $z^j(t)$ von $Z(t)$ ist, ergibt die Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \det Z(t) = \sum_{j=1}^{n} \det[z^1(t), \ldots, \frac{d}{dt} z^j(t), \ldots, z^n(t)].$$

Aufgrund von $z^j(\tau) = e^j$ und $\frac{dz^i}{dt}(\tau) = A(\tau)e^i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt folglich

$$\frac{d}{dt} \det Z(t)\Big|_{t=\tau} = \sum_{i=1}^{n} \det\left(e^1, \ldots, A(\tau)e^i, \ldots, e^n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau) = \operatorname{sp} A(\tau),$$

also $\frac{d\varphi}{dt}(\tau) = (\operatorname{sp} A(\tau))\varphi(\tau)$. Da $\tau \in J$ beliebig fixiert war, gilt $\dot{\varphi}(t) = (\operatorname{sp} A(t))\varphi(t)$ für alle $t \in J$ und die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\varphi(t) = \varphi(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \operatorname{sp} A(s)\, ds\right),\ t, \tau \in J. \qquad \square$$

Im nächsten Abschnitt über inhomogene Systeme wird die zur Fundamentalmatrix $Y(t)$ inverse Matrix $Y^{-1}(t)$ benötigt. Man beachte, dass diese aufgrund von Lemma 3.1.2 wohldefiniert ist. $Y^{-1}(t)$ ist auch wieder die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung, denn es ist nach der Produktregel

$$0 = \frac{d}{dt} I = \frac{d}{dt}(Y(t)Y^{-1}(t)) = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t) + Y(t)\frac{d}{dt}Y^{-1}(t),$$

also gilt $\frac{d}{dt}Y^{-1}(t) = -Y^{-1}(t)A(t)$ und $\frac{d}{dt}Y^{-\mathsf{T}}(t) = -A^{\mathsf{T}}(t)Y^{-\mathsf{T}}(t)$.

Bemerkungen 3.1.3.

1. Hauptfundamentalmatrizen werden im Weiteren mit $X(t)$ bezeichnet.
2. Das Anfangswertproblem (3.3) besitzt die Lösung $x(t) = X(t)x_0$, da $x(t_0) = X(t_0)x_0 = x_0$ gilt. Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, dann existiert die Inverse $Y^{-1}(t)$, sodass die Matrix $X(t) := Y(t)Y^{-1}(t_0)$ eine Hauptfundamentalmatrix ist und die Lösung von (3.3) dementsprechend durch $x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0$ gegeben ist.

3.2 Inhomogene Systeme

Sei $Y \in C^1(J, \mathbb{R}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix zu (3.2) und $z \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine spezielle Lösung von (3.1). Dann sind durch $y(t) = Y(t)c,\ c \in \mathbb{R}^n$, alle Lösungen von (3.2) gegeben und der Ansatz $x(t) := y(t) + z(t)$ liefert *alle* Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (3.1). Denn sind z, w Lösungen der inhomogenen Gleichung, dann löst ihre Differenz die homogene Gleichung (Superpositionsprinzip).

Ähnlich wie in Kapitel 1 wird auch hier die *Methode der Variation der Konstanten* helfen, eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen. Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix für (3.2). Man setze $z(t) = Y(t)c(t)$, wobei $c \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ zu bestimmen ist. Aus der Produktregel folgt

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + Y(t)\dot{c}(t).$$

Ist also $z(t)$ eine spezielle Lösung von (3.1), so gilt $Y(t)\dot{c}(t) = b(t),\ t \in J$, also ist $\dot{c}(t) = Y^{-1}(t)b(t)$, weil $Y(t)$ als Fundamentalmatrix invertierbar ist. Integration von t_0 bis t liefert

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{c}(s)\ ds = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\ ds,\ t \in J.$$

Da wir nur an einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung interessiert sind, setzen wir $c(t_0) = 0$ und erhalten für $z = z(t)$ die Darstellung

$$z(t) = Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\ ds,\ t \in J.$$

Nach unserer Vorbemerkung lautet also die allgemeine Lösung von (3.1)

$$x(t) = Y(t)c + Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\ ds,\ t \in J. \tag{3.5}$$

Mit einem gegebenen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\ ds,\ t \in J \tag{3.6}$$

die Lösung des Anfangswertproblems (3.1). Alternativ gilt

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)\ ds,\ t \in J, \tag{3.7}$$

mit der HFM $X(t) := Y(t)Y^{-1}(t_0)$ in t_0.

Bemerkungen 3.2.1.

1. Gleichung (3.7) geht für $n = 1$ in die Lösungsformel (1.13) über.
2. Sind $A(t)$ und $b(t)$ komplexwertig, so führe man eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil durch:

$$A(t) = B(t) + iC(t) \quad b(t) = c(t) + id(t) \quad x(t) = u(t) + iv(t)$$

Daraus ergeben sich die beiden gekoppelten *reellen* Systeme

$$\dot{u} = Bu - Cv + c \quad \text{und} \quad \dot{v} = Bv + Cu + d,$$

die man als *reelles* System mit $w := [u^\top, v^\top]$ auffassen kann.

3. Es sei daran erinnert, dass sich Systeme m-ter Ordnung der Dimension N in ein System 1. Ordnung der Dimension $n = mN$ überführen lassen, wie in Abschnitt 1.2 gezeigt.

3.3 Bestimmung von Fundamentalsystemen

1. Die d'Alembert-Reduktion

Es sei $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ mit $y_k(t) \neq 0$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ als Lösung von (3.2) bekannt. Mit Hilfe der d'Alembert-Reduktion kann ein $n \times n$-System auf ein $(n-1) \times (n-1)$-System reduziert werden. Dazu setzt man

$$x(t) = \varphi(t)y(t) + z(t),$$

wobei $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$ und $z(t) = [z_1(t), \dots, z_{k-1}(t), 0, z_{k+1}(t), \dots, z_n(t)]^\top$ ist. Dann gilt

$$\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t)y(t) + \varphi(t)\dot{y}(t) + \dot{z}(t) = \dot{\varphi}(t)y(t) + \varphi(t)A(t)y(t) + \dot{z}(t).$$

Wegen $\dot{x}(t) = A(t)x(t) = A(t)\varphi(t)y(t) + A(t)z(t)$ muss also

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) - \dot{\varphi}(t)y(t) \tag{3.8}$$

sein. Mit $z_k(t) \equiv 0$ liefert (3.8) für die k-te Komponente

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{y_k(t)} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(t) z_l(t), \tag{3.9}$$

also für $j \neq k$

$$\dot{z}_j(t) = \sum_{l=1}^{n} \left(a_{jl}(t) - a_{kl}(t) \frac{y_j(t)}{y_k(t)} \right) z_l(t), \tag{3.10}$$

wenn man (3.9) in (3.8) einsetzt. Das System (3.10) ist ein homogenes System von $(n-1)$ Gleichungen. Hat man ein Fundamentalsystem $\{z^1(t), \dots, z^{n-1}(t)\}$ für (3.10) bestimmt, so errechnet man damit $(n-1)$ Lösungen der Differentialgleichung (3.2). Zusammen mit der Lösung $y(t)$ bilden diese ein Fundamentalsystem für (3.2). Denn aufgrund von $z_k \equiv 0$ ist $\{z^1 \dots, z^{n-1}\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $\{y, \varphi y + z^1, \dots, \varphi y + z^{n-1}\}$ diese Eigenschaft hat.

Beispiel.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{bmatrix} x, \quad t \in J = (0, \infty). \tag{3.11}$$

Offensichtlich ist die Funktion $y(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ -t \end{bmatrix}$ eine Lösung von (3.11). Aus (3.10) erhalten wir mit $z_1(t) = 0$ die Differentialgleichung

$$\dot{z}_2(t) = \left(a_{22}(t) - a_{12}(t)\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right) z_2(t) = \frac{1}{t}\, z_2(t),$$

das heißt, $z_2(t) = ct$ mit einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$. Da wir nur an einer speziellen Lösung $z_2(t)$ interessiert sind, setzen wir $c = 1$. Aus Gleichung (3.9) folgt somit

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{a_{12}(t)z_2(t)}{y_1(t)} = -\frac{1}{t},$$

also $\varphi(t) = -\log(t),\ t > 0$, da wir wieder nur an einer speziellen Lösung interessiert sind. Aus dem Ansatz $x(t) = \varphi(t)y(t) + z(t)$ erhalten wir die zusätzliche Lösung

$$x(t) = \begin{bmatrix} -t^2 \log(t) \\ t\log(t) + t \end{bmatrix}.$$

Mit der Lösung $y(t)$ ist dann

$$Y(t) = \begin{bmatrix} t^2 & -t^2 \log(t) \\ -t & t\log(t) + t \end{bmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix für (3.11); es gilt $\det Y(t) = t^3 \neq 0$ für alle $t > 0$.

2. Systeme mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt sei $A(t) = A$ eine von der Variablen t unabhängige reelle Matrix. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)+b(t),\ t \in J$, mit $b \in C(J; \mathbb{R}^n)$. Für $b \equiv 0$ und im Fall $n = 1$ ist $x(t) = e^{a(t-t_0)}c$ eine Lösung der Differentialgleichung. Es stellt sich daher die Frage, ob eine analoge Lösungsformel auch im $\mathbb{R}^n$ existiert. Dies führt zum Begriff der *Matrix-Exponentialfunktion.*

Definition 3.3.1. *Die Funktion $z \mapsto e^{Az}$, definiert durch*

$$e^{Az} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.12}$$

heißt **Matrix-Exponentialfunktion** *zur Matrix A.*

Um zu sehen, dass die Abbildung $z \mapsto e^{Az}$ auf $\mathbb{C}$ wohldefiniert ist, definieren wir zunächst

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

Die Menge $\sigma(A)$ heißt *Spektrum* von A, $\rho(A) := \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ *Resolventenmenge* von A. Es gilt

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda - A \text{ ist nicht invertierbar.}$$

Daher ist $\sigma(A)$ die Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms $p_A(z) = \det(z - A)$. Die Zahl

$$r(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

heißt *Spektralradius* von A und es gilt die *Spektralradiusformel*

$$r(A) = \limsup_{k\to\infty} |A^k|^{1/k};$$

vgl. Übung 3.10. Die gewählte Norm ist hier unerheblich.

Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|A^k| \leq (r(A)+\varepsilon)^k$ für alle $k \geq k_0(\varepsilon)$, also $|A^k z^k/k!| \leq [(r(A)+\varepsilon)|z|]^k/k!$. Damit sind die Reihenglieder dominiert durch die Glieder einer skalaren Exponentialreihe, also konvergiert (3.12) nach dem Majorantenkriterium von Weierstraß absolut und gleichmäßig bezüglich z auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ferner ist $z \mapsto e^{Az}$ holomorph und es gilt $\frac{d}{dz}(e^{Az}) = Ae^{Az}$, denn

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{N}\frac{A^k z^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{l=0}^{N-1}\frac{A^l z^l}{l!} \to Ae^{Az},$$

für $N \to \infty$, gleichmäßig bezüglich z auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$. Daraus folgt insbesondere, dass $x(t) = e^{At}c$, $c \in \mathbb{R}^n$, eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ ist, und

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.3) mit $A(t) \equiv A$. Die Matrix $X(t) = e^{A(t-t_0)}$ ist die Hauptfundamentalmatrix in t_0, denn es ist $X(t_0) = I$. Ferner gilt unter der Voraussetzung $AB = BA$

$$e^{At}e^{Bs} = e^{At+Bs}, \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}.$$

Man beachte aber, dass diese Identität für nichtkommutierende Matrizen falsch ist!

Die Lösungsformel für (3.1) mit $A(t) \equiv A$ folgt nun direkt aus (3.5) bzw. (3.7). Es ist

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)\,ds,\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Im Allgemeinen lässt sich der Wert der Reihe (3.12) nur schwierig berechnen. Man sucht daher nach einem direkteren Weg, um ein Fundamentalsystem für den Fall konstanter Koeffizienten zu bestimmen. Dazu machen wir den folgenden *Exponential-Ansatz*: Sei c ein nichttrivialer *Eigenvektor* von A zum *Eigenwert* λ, es gelte also $Ac = \lambda c$. Dann ist

$$e^{At}c = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\right)c = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A^k c}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k \lambda^k c}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda^k}{k!}\right)c = e^{\lambda t}c.$$

Daher löst $x(t) := e^{\lambda t}c$ die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Wir müssen also die Eigenräume $E(\lambda) := N(\lambda - A)$ von A diskutieren.

1. Fall: *Die Matrix A besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren $\{c^1, \ldots, c^n\}$.*

Dies ist der einfachste Fall, da hier der Exponential-Ansatz ausreicht.

Lemma 3.3.2. *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von A und existieren zugehörige Eigenvektoren $\{c^1, \ldots, c^n\}$, die linear unabhängig sind, so ist*

$$Y(t) = (e^{\lambda_1 t}c^1, \ldots, e^{\lambda_n t}c^n)$$

eine Fundamentalmatrix für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Insbesondere ist dies der Fall, falls alle Eigenwerte λ_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, paarweise verschieden sind.

Beweis. Es gilt

$$\det Y(0) = \det(c^1, \ldots, c^n) \neq 0.$$

Nach Lemma 3.1.2 ist somit $\det Y(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix für $\dot{x} = Ax$.

Seien nun alle Eigenwerte λ_j paarweise verschieden und seien c^j nichttriviale Eigenvektoren zu den λ_j. Angenommen $\{c^1, \ldots, c^n\}$ sind linear abhängig. Nach einer eventuellen Umordnung sei $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ so gegeben, dass die Vektoren $\{c^1, \ldots, c^k\}$ linear unabhängig sind und

$$\operatorname{span}\{c^1, \ldots, c^k\} = \operatorname{span}\{c^1, \ldots, c^n\}.$$

Folglich gibt es ein $l > k$ und α_j mit

$$c^l = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j c^j.$$

Wendet man A auf diese Gleichung an und verwendet, dass die Vektoren c^j Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_j sind, so erhält man

$$\lambda_l c^l = Ac^l = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_j c^j,$$

folglich

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_l) c^j = 0.$$

Da $c^1, \ldots, c^k$ linear unabhängig sind, und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt, folgt $\alpha_j = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ und somit $c^l = 0$, im Widerspruch zu $c^j \neq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

Bemerkung 3.3.3. Sei A reellwertig, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ komplexer Eigenwert von A mit komplexem Eigenvektor $c \in \mathbb{C}^n$. Dann ist die zu λ konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\bar{c}$, denn es gilt

$$A\bar{c} = \overline{Ac} = \overline{\lambda c} = \bar{\lambda}\bar{c}.$$

Sei $x = u + iv$ eine komplexe Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Dann sind $\operatorname{Re} x = u$ und $\operatorname{Im} x = v$ ebenfalls Lösungen von $\dot{x} = Ax$, denn $\dot{x} = \dot{u} + i\dot{v}$ und $A(u + iv) = Au + iAv$. Mit $\lambda = \mu + i\nu$ und $c = c^1 + ic^2$ erhält man aus der Eulerschen Formel die Lösungsdarstellung

$$x(t) = e^{\mu t}[(c^1 \cos(\nu t) - c^2 \sin(\nu t)) + i(c^2 \cos(\nu t) + c^1 \sin(\nu t))],$$

welche nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil die beiden linear unabhängigen *reellen* Lösungen

$$\begin{aligned} x^1(t) &= \operatorname{Re} x(t) = e^{\mu t}(c^1 \cos(\nu t) - c^2 \sin(\nu t)) \\ x^2(t) &= \operatorname{Im} x(t) = e^{\mu t}(c^2 \cos(\nu t) + c^1 \sin(\nu t)) \end{aligned}$$

liefert. Der konjugiert komplexe Eigenwert $\bar{\lambda}$ kann daher weggelassen werden, da dieser keine neuen Lösungen liefert.

2. Fall: *Sei λ_k ein m-facher Eigenwert von A und* $\dim E(\lambda_k) < m$.

Da nun nicht mehr ausreichend viele Eigenvektoren zu einem m-fachen Eigenwert vorhanden sind, ist man gezwungen sich zusätzliche Lösungen zu besorgen, die in geeigneter Weise zusammen mit den Exponentiallösungen ein Fundamentalsystem bilden. Dazu benötigen wir die

Spektralzerlegung von Matrizen. Fixiere einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A und definiere die verallgemeinerten Eigenräume N_k durch $N_k := N((\lambda - A)^k)$. Offenbar ist $N_1 = E(\lambda)$ der Eigenraum zum Eigenwert λ, und es gilt $N_k \subset N_{k+1}$. Da diese Teilräume des $\mathbb{C}^n$ sind, ist die Menge $\{k \in \mathbb{N} : N_k = N_{k+1}\} \subset \mathbb{N}$ nichtleer, enthält also ein kleinstes Element $k(\lambda)$. Es gilt dann $N_k = N_{k(\lambda)}$ für alle $k \geq k(\lambda)$. Außerdem setzen wir $R_k = R((\lambda - A)^k)$ und haben $R_k \supset R_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das kleinste k aus der Menge $\{k \in \mathbb{N} : R_k = R_{k+1}\}$ bezeichnen wir mit $m(\lambda)$; dann gilt $R_k = R_{m(\lambda)}$ für alle $k \geq m(\lambda)$.

Nun gilt $R_k \cap N_k = \{0\}$ für alle $k \geq k(\lambda)$; denn ist $x \in R_k \cap N_k$, so gibt es ein $y \in \mathbb{C}^n$ mit $x = (\lambda - A)^k y$, und $(\lambda - A)^k x = 0$, also $y \in N_{2k} = N_k$ und somit $x = (\lambda - A)^k y = 0$. Andererseits, für $k \geq m(\lambda)$ gibt es zu jedem $x \in \mathbb{C}^n$ ein $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $(\lambda - A)^k x = (\lambda - A)^{2k}\tilde{x}$; damit zeigt die Zerlegung $x = (\lambda - A)^k \tilde{x} + [x - (\lambda - A)^k \tilde{x}]$, dass $R_k + N_k = \mathbb{C}^n$ gilt.

Wäre nun $k(\lambda) < m(\lambda)$ so folgt mit $k = m(\lambda)$ aus dem Dimensionssatz der Widerspruch

$$n = \dim N_k + \dim R_k = \dim N_{k(\lambda)} + \dim R_k < \dim N_{k(\lambda)} + \dim R_{k(\lambda)} = n,$$

also ist $k(\lambda) \geq m(\lambda)$. Ähnlich erhält man auch $k(\lambda) \leq m(\lambda)$, folglich gilt $m(\lambda) = k(\lambda)$.

Mit $N(\lambda) = N((\lambda - A)^{m(\lambda)})$ und $R(\lambda) = R((\lambda - A)^{m(\lambda)})$ gilt somit die Zerlegung

$$\mathbb{C}^n = N(\lambda) \oplus R(\lambda) = N((\lambda - A)^{m(\lambda)}) \oplus R((\lambda - A)^{m(\lambda)}).$$

Die Zahl $m(\lambda)$ heißt *Riesz-Index* des Eigenwerts λ, die Dimension $l(\lambda)$ des verallgemeinerten Eigenraums $N(\lambda)$ *algebraische Vielfachheit* von λ. Dies ist die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms $p_A(z)$. Die *geometrische Vielfachheit* von λ ist durch die Dimension von $E(\lambda) = N(\lambda - A)$ definiert. λ heißt *halbeinfach* wenn $m(\lambda) = 1$ ist, also wenn die geometrische Vielfachheit von λ gleich der algebraischen Vielfachheit ist. λ heißt *einfach* wenn λ algebraisch einfach ist. Ein Eigenwert ist also genau dann einfach, wenn er halbeinfach und seine geometrische Vielfachheit 1 ist.

Sei nun $\mu \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert von A. Aufgrund von $AN(\lambda) \subset N(\lambda)$ und $AR(\lambda) \subset R(\lambda)$ folgt $N(\mu) \subset R(\lambda)$. Denn ist $x \in N(\mu)$, so gilt $x = y + z$ mit $y \in R(\lambda)$ und $z \in N(\lambda)$; folglich ist

$$0 = (\mu - A)^{m(\mu)} x = (\mu - A)^{m(\mu)} y + (\mu - A)^{m(\mu)} z,$$

sowie $(\mu - A)^{m(\mu)} y \in R(\lambda)$, $(\mu - A)^{m(\mu)} z \in N(\lambda)$, also aufgrund von $N(\lambda) \cap R(\lambda) = \{0\}$

$$0 = (\mu - A)^{m(\mu)} y = (\mu - A)^{m(\mu)} z.$$

Es folgt $z \in N(\lambda) \cap N(\mu)$, also $z = 0$, da dieser Schnitt Null ist. Dies sieht man folgendermaßen: Sei $z \in N(\lambda) \cap N(\mu)$, $\lambda \neq \mu$; dann ist mit $k = m(\mu)$ und $l = m(\lambda)$

$$0 = (\mu - A)^k z = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mu - \lambda)^{k-j} (\lambda - A)^j z.$$

Nach Anwendung von $(\lambda - A)^{l-1}$ folgt $(\lambda - A)^{l-1} z = 0$, und dann sukzessive mittels Induktion

$$(\lambda - A)^{l-1} z = (\lambda - A)^{l-2} z = \cdots = (\lambda - A) z = z = 0.$$

Diese Argumente ergeben nach Durchlaufen aller Eigenwerte die **Spektral-Zerlegung**

$$\mathbb{C}^n = N(\lambda_1) \oplus N(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus N(\lambda_r),$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die r verschiedenen Eigenwerte von A bezeichnen.

Nach diesem Ausflug in die lineare Algebra kommen wir zu den gesuchten Lösungen. Definiere $V_1 := E(\lambda)$, $V_k := N_k \ominus N_{k-1}$, $k \in \{2, \ldots, m(\lambda)\}$.

1. Sei $c \in V_1$. Dann ist $x(t) = e^{\lambda t} c$ eine Lösung zum Eigenwert λ, also $p_0(t) \equiv c$.

2. Sei $c \in V_k,\ k \in \{2, \ldots, m(\lambda)\}$. Aus der Definition der Menge V_k schließt man $(A-\lambda)^j c \neq 0,\ j \in \{1, \ldots, k-1\}$ und $(A-\lambda)^j c = 0,\ j \in \{k, \ldots, m(\lambda)\}$. Wir verwenden dies und (3.12), um folgende Lösung zu erhalten:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}c = e^{At}e^{-\lambda t}e^{\lambda t}c = e^{(A-\lambda)t}e^{\lambda t}c \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda)^l t^l}{l!}\right) e^{\lambda t}c \\ &= \left(c + (A-\lambda)ct + \ldots + (A-\lambda)^{k-1}c\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{\lambda t} \\ &=: p_{k-1}(t)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$N(\lambda) = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_{m(\lambda)},$$

also haben wir insgesamt $l(\lambda) := \dim N(\lambda)$ linear unabhängige Lösungen.

Wir fassen nun die vorangegangenen Ergebnisse zusammen.

Satz 3.3.4. *Sei λ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit $l(\lambda)$. Dann besitzt die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ genau $l(\lambda)$ linear unabhängige Lösungen bezüglich λ. Diese sind von der Form*

$$p_0(t)e^{\lambda t}, p_1(t)e^{\lambda t}, \ldots, p_{m(\lambda)-1}(t)e^{\lambda t},$$

wobei p_k Polynome vom Grad $k \leq m(\lambda) - 1$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}^n$ sind und $m(\lambda) \geq 1$ ist die kleinste natürliche Zahl, sodass $N_{k+1} = N_k$ gilt. Setzt man $V_1 = E(\lambda)$, $V_k = N_k \ominus N_{k-1}$, $k \in \{2, \ldots, m(\lambda)\}$, so existieren $\dim E(\lambda)$ *Polynome 0-ten Grades (also die Eigenvektoren) und* $\dim V_k$ *Polynome $(k-1)$-ten Grades, also*

$$p_{k-1}(t) = c + (A-\lambda)ct + \ldots + (A-\lambda)^{k-1}c\frac{t^{k-1}}{(k-1)!},\ c \in V_k,$$

$k \in \{2, \ldots, m(\lambda)\}$. Nach Durchlaufen aller Eigenwerte von A erhält man so ein komplexes Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

Ist λ ein l-facher komplexer *Eigenwert der reellen Matrix A, so liefert die Zerlegung der komplexen Lösungen $p_k(t)e^{\lambda t}$ in Real- und Imaginärteile* $2l$ reelle, *linear unabhängige Lösungen.*

Beispiele. (a)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Das *charakteristische Polynom* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ zur Bestimmung der Eigenwerte lautet $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8$. Es ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2$ und $\lambda_3 = -2$, wobei $\lambda = 2$ ein doppelter Eigenwert ist.

Bestimmung der Eigenvektoren:
$\lambda = 2$:

$$(A - 2I)c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Zeilen bzw. Spalten der Matrix sind allesamt linear abhängig, das heißt, es verbleibt die Gleichung $c_1 + c_2 - 2c_3 = 0$. Wir setzen $c_2 = \alpha \in \mathbb{R}$ und $c_3 = \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \beta.$$

Als Eigenvektoren wählen wir $c^1 = [2, 0, 1]^\mathsf{T}$ und $c^2 = [-1, 1, 0]^\mathsf{T}$. Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes ist also gleich der geometrischen Vielfachheit $\dim E(2) = 2$.
$\lambda = -2$:

$$(A + 2I)d = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Durch Umformen der Zeilen ergeben sich die beiden Gleichungen $d_2 + d_3 = 0$ und $3d_1 - d_2 + 2d_3 = 0$. Daraus folgt $d_1 = d_2 = -d_3$. Wir setzen $d_3 = -\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha$$

und als Eigenvektor wählen wir $d^1 = [1, 1, -1]^\mathsf{T}$. Aus Lemma 3.3.2 folgt, dass

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} \right\}$$

ein Fundamentalsystem bildet, da die Vektoren $\{c^1, c^2, d^1\}$ linear unabhängig sind.

(b)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x.$$

Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)^2$. Wie in (a) haben wir einen einfachen Eigenwert $\lambda = 3$ und einen doppelten Eigenwert $\lambda = 1$.

Bestimmung der Eigenvektoren:
$\lambda = 3$:

$$(A - 3I)c = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $c_1 = c_2 = c_3$, also

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha$$

mit $c_3 = \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Als Eigenvektor nehmen wir z.B. $c^1 = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$.
$\lambda = 1$:

$$(A - I)d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass $d_1 = d_3 = 0$ gilt und $c_2 = \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig. Es gilt also

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha.$$

Wir wählen den Vektor $d^1 = [0, 1, 0]^\mathsf{T}$ als Eigenvektor. Im Gegensatz zu (a) ist hier die geometrische Vielfachheit $\dim E(1) = 1$ des Eigenwertes kleiner als die algebraische Vielfachheit. Nach Satz 3.3.4 bestimme man einen zusätzlichen Vektor aus $V_2 = N_2 \ominus E(1)$. Dies gelingt offenbar durch den Ansatz $(A - I)v = d^1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nun ist $v_1 = 1$, $v_3 = 0$ und $v_2 = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, also gilt für v:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha$$

und wir wählen $v^1 = [1, 0, 0]^\mathsf{T} \in V_2$. Ein Fundamentalsystem lautet demnach

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{t} \right\}.$$

Es soll nun noch die Anfangswertaufgabe $x(0) = [0, 0, 1]^\mathsf{T}$ gelöst werden. Man verwende dazu (3.4). Die Fundamentalmatrix $Y(t)$ ergibt sich aus dem Fundamentalsystem. Sei $d \in \mathbb{R}^3$. Es folgt $x(0) = Y(0)c$, also

$$c = Y^{-1}(0)x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$x(t) = Y(t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - (1+t)e^t \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Bemerkung. Der Exponentialansatz liefert auch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (3.1), sofern $A(t) \equiv A$ konstant und $b(t)$ von der Form $b(t) = e^{\mu t}\sum_{k=1}^m b_k t^k$ mit $\mu \notin \sigma(A)$ ist. Dazu setzt man für die gesuchte Lösung die Form $x(t) = e^{\mu t}\sum_{k=0}^m x_k t^k$ an, und erhält nach Einsetzen in (3.1) die Beziehung

$$e^{\mu t}\sum_{k=0}^m [x_{k+1} + (\mu - A)x_k - b_k]t^k = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$

dabei ist $x_{m+1} = 0$ zu setzen. Da die Monome t^k linear unabhängig sind, folgt

$$(\mu - A)x_k = b_k - x_{k+1}, \quad k = m, \ldots, 0,$$

also mit $\mu \notin \sigma(A)$

$$x_k = (\mu - A)^{-1}(b_k - x_{k+1}), \quad k = m, \ldots, 0.$$

Auf diese Weise kann man sukzessive die Koeffizientenvektoren x_k bestimmen.

3.4 Lineare Gleichungen höherer Ordnung

Wir betrachten die lineare skalare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)x^{(j)} = b(t),\ a_j, b \in C(J),\ J = [t_0, t_1], \tag{3.14}$$

mit gegebenen Anfangswerten

$$x(t_0) = x_0,\, \dot{x}(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Mittels der Transformation $u_k = x^{(k-1)}$ und $u_{k0} := u_k(t_0) = x^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ erhalten wir aus (3.14) das äquivalente System erster Ordnung $\dot{u} = A(t)u + f(t)$, mit

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix},$$

und $a_k = a_k(t),\ k \in \{0, \dots, n-1\}$. Nach Korollar 2.5.2 besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

genau eine globale Lösung auf J, also ist auch die Differentialgleichung (3.14) mit Anfangswerten $x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_1, \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ eindeutig lösbar. Aus unseren Überlegungen in Abschnitt 3.1 folgt $\dim \mathcal{L} = n$ für den Lösungsraum $\mathcal{L}$ der homogenen Differentialgleichung (3.14). Sind $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ Lösungen von (3.14) mit $b = 0$, so ist die Wronski-Determinante gegeben durch

$$\varphi(t) = \det Y(t) = \det\{u^1(t), \dots, u^n(t)\} = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

wobei die Funktionen $u^j \in C^1(J; \mathbb{R}^n),\ j \in \{1, \dots, n\}$, Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$ sind. Nach Lemma 3.1.2 gilt ferner

$$\varphi(t) = \det Y(t) = \varphi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{sp} A(s)\, ds} = \varphi(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s)\, ds},\ t \in J.$$

1. Die d'Alembert-Reduktion für Gleichungen höherer Ordnung

Sei $v(t) \neq 0$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)} = 0,\ a_j \in C(J),\ J = [t_0, t_1]. \tag{3.15}$$

Um die Ordnung der Differentialgleichung (3.15) zu reduzieren, wählen wir den Ansatz $x(t) = \varphi(t)v(t)$. Das Ziel ist es, die Funktion $\varphi(t)$ so zu bestimmen, dass $x(t)$ eine Lösung von (3.15) ist. Nach der Formel von Leibniz gilt

$$x^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \varphi^{(k)}(t) v^{(j-k)}(t),$$

für alle $j \in \{0, \dots, n\}$. Substitution in (3.15) liefert mit $a_n \equiv 1$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \varphi^{(k)}(t) v^{(j-k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} a_j(t) \binom{j}{k} v^{(j-k)}(t) \right) \varphi^{(k)}(t).$$

Setze

$$c_k(t) = \sum_{j=k}^{n} a_j(t) \binom{j}{k} v^{(j-k)}(t).$$

Dann gilt

$$c_0(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)v^{(j)}(t) = 0,$$

für alle $t \in J$, da $v(t)$ eine Lösung von (3.15) ist. Außerdem ist $c_n(t) = v(t) \neq 0$! Die Funktion $\varphi(t)$ löst also die Differentialgleichung

$$0 = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi^{(k)}(t). \tag{3.16}$$

Mittels $\psi = \dot{\varphi},\ k \in \{1, \dots, n\}$ erhält man so eine Differentialgleichung der Ordnung $(n-1)$ für die Funktion ψ. Hat man $(n-1)$ linear unabhängige Lösungen $\varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ von (3.16) bestimmt, so bilden die n Funktionen $v(t)$ und $v(t)\varphi_k(t),\ k = 1, \dots, n-1$, ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung (3.15). Denn aus

$$b_0 v(t) + b_1 v(t)\varphi_1(t) + \cdots + b_{n-1} v(t)\varphi_{n-1}(t) = 0$$

folgt

$$b_0 + b_1\varphi_1(t) + \cdots + b_{n-1}\varphi_{n-1}(t) = 0$$

da $v(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Differenziert man diese Gleichung, so erhält man

$$b_1\dot{\varphi}_1(t) + \cdots + b_{n-1}\dot{\varphi}_{n-1}(t) = 0$$

und daher gilt $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$, also auch $b_0 = 0$.

Von speziellem Interesse ist der Fall $n = 2$; wir können dann $a_2 = 1$ annehmen. Mit $c_0 = 0$, $c_2 = v$ und $c_1 = a_1 v + 2a_2\dot{v}$ erhalten wir die folgende Gleichung für ψ:

$$\dot{\psi} + [a_1(t) + 2a_2(t)\dot{v}(t)/v(t)]\psi(t) = 0,$$

deren Lösung durch

$$\psi(t) = \exp(-\int_{t_0}^{t} [a_1(s) + 2a_2(s)\dot{v}(s)/v(s)]ds), \quad t \in J,$$

gegeben ist.

Beispiel.

$$\ddot{x} - (\cos t)\dot{x} + (\sin t)x = 0. \tag{3.17}$$

Eine Lösung ist gegeben durch $v(t) = e^{\sin t}$. Wir bestimmen nun die Koeffizienten $c_1(t)$ und $c_2(t)$. Es gilt

$$c_1(t) = a_1(t)v(t) + 2a_2(t)\dot{v}(t) = -(\cos t)e^{\sin t} + 2(\cos t)e^{\sin t} = (\cos t)e^{\sin t},$$

und

$$c_2(t) = a_2(t)v(t) = e^{\sin t}.$$

Wir müssen also die Differentialgleichung

$$0 = (\cos t)e^{\sin t}\dot{\varphi} + e^{\sin t}\ddot{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad 0 = (\cos t)\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}$$

lösen. Mit der Transformation $\psi = \dot{\varphi}$ und $\dot{\psi} = \ddot{\varphi}$ erhalten wir die homogene Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{\psi} + (\cos t)\psi = 0$. Das Prinzip der Trennung der Variablen liefert die spezielle Lösung $\psi(t) = e^{-\sin t}$. Damit bildet zum Beispiel

$$\left\{ e^{\sin t}, \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\sin s}\, ds \right) e^{\sin t} \right\}$$

ein Fundamentalsystem für (3.17).

2. Variation der Konstanten

Wie im Fall $n = 1$ lässt sich die allgemeine Lösung von (3.14) darstellen als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (3.15) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.14). Das Ziel ist es, eine spezielle Lösung von (3.14) in Abhängigkeit von der Funktion $b(t)$ anzugeben. Sei $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ ein Fundamentalsystem für (3.15). Dann ist

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \ldots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für das äquivalente System erster Ordnung $\dot{u} = A(t)u$. Nach Abschnitt 3.2 ist

$$u_*(t) = Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) f(s)\, ds$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u + f(t)$. Der Vektor $z := Y^{-1}(s)f(s)$ löst das Gleichungssystem $Y(s)z = f(s)$. Nach der Cramerschen Regel gilt $z_i = \det Y_i(s)/\det Y(s)$ mit

$$Y_i(s) = \begin{bmatrix} x_1(s) & \ldots & x_{i-1}(s) & 0 & x_{i+1}(s) & \ldots & x_n(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(s) & \ldots & x_{i-1}^{(n-1)}(s) & b(s) & x_{i+1}^{(n-1)}(s) & \ldots & x_n^{(n-1)}(s) \end{bmatrix},$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entwickelt man $\det Y_i(s)$ nach der i-ten Spalte, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\det Y_i(s) \\ &\quad = (-1)^{n+i} b(s) \det \begin{bmatrix} x_1(s) & \ldots & x_{i-1}(s) & x_{i+1}(s) & \ldots & x_n(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(s) & \ldots & x_{i-1}^{(n-2)}(s) & x_{i+1}^{(n-2)}(s) & \ldots & x_n^{(n-2)}(s) \end{bmatrix} \\ &\quad =: \varphi_i(s) b(s). \end{aligned}$$

Mit $\varphi(s) = \det Y(s) \neq 0$ besitzt z also die Darstellung

$$z(s) = \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \vdots \\ \varphi_n(s) \end{bmatrix} \frac{b(s)}{\varphi(s)}.$$

Also ist

$$x_*(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \int_{t_0}^{t} b(s) \frac{\varphi_i(s)}{\varphi(s)}\, ds$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (3.14), denn wir benötigen nur die erste Komponente von $u_*(t)$.

Im besonders wichtigen Fall $n = 2$ ergibt sich für die Wronski-Determinate $\varphi(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)$ und $\varphi_1(t) = -x_2(t)$, $\varphi_2(t) = x_1(t)$. Daher ist eine partikuläre Lösung durch

$$x_*(t) = -x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{x_2(s)b(s)}{\varphi(s)} ds + x_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)b(s)}{\varphi(s)} ds, \quad t \in J,$$

gegeben.

Beispiel.

$$\ddot{x} + x = \sin t,\ t_0 = 0.$$

$x_1(t) = \cos t$ und $x_2(t) = \sin t$ sind offenbar Lösungen der homogenen Gleichung $\ddot{x} + x = 0$. Dann ist

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

eine FM, denn $\varphi(t) = \det Y(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Berechnung von $\varphi_1(t)$ bzw. $\varphi_2(t)$ ist hier besonders einfach, denn: $\varphi_1(t) = -\sin t$ bzw. $\varphi_2(t) = \cos t$. Damit erhält man die spezielle Lösung

$$x_*(t) = -\cos t \int_0^t \sin^2 s\ ds + \sin t \int_0^t \sin s \cos s\ ds = -\frac{1}{2}(t \cos t - \sin t).$$

3. Konstante Koeffizienten

Sei nun $a_j(t) \equiv a_j \in \mathbb{R}$ und sei $a_n = 1$. In diesem Fall kann man den *Exponentialansatz* $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, direkt verwenden, um ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)} = 0, \tag{3.18}$$

zu bestimmen. Es gilt $x^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$. Dann löst $x(t) = e^{\lambda t}$ die Differentialgleichung (3.18) genau dann, wenn

$$e^{\lambda t}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right) = 0$$

gilt, also genau dann, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j \tag{3.19}$$

ist. Hier ist also das charakteristische Polynom direkt aus der Gleichung ablesbar.

Proposition 3.4.1. *Ist λ_k eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms* (3.19) *von der Vielfachheit ν_k, so bilden*

$$\{e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{\nu_k - 1}e^{\lambda_k t}\}$$

ν_k linear unabhängige Lösungen von (3.18).

Beweis. Die lineare Unabhängigkeit ist klar, da die Monome t^j linear unabhängig sind. Man muss nur noch zeigen, dass eine Funktion der Form $y(t) = t^l e^{\lambda_k t}$, $l \in \{0, \ldots, \nu_k - 1\}$ eine Lösung von (3.18) ist. Das stimmt offenbar für $l = 0$. Ferner gilt

$$\partial_t^j (t^l e^{\lambda t}) = \partial_t^j \partial_\lambda^l (e^{\lambda t}) = \partial_\lambda^l \partial_t^j (e^{\lambda t}) = \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t}),$$

folglich

$$y^{(j)}(t) = \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t})|_{\lambda = \lambda_k}.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung (3.18) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(t) &= \sum_{j=0}^{n} a_j \partial_\lambda^l (\lambda^j e^{\lambda t})|_{\lambda=\lambda_k} \\ &= \partial_\lambda^l \left[\left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right) e^{\lambda t}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_k} = \partial_\lambda^l \left(p(\lambda)e^{\lambda t}\right)|_{\lambda=\lambda_k}.\end{aligned}$$

Aus der Formel von Leibniz folgt

$$\partial_\lambda^l \left(p(\lambda)e^{\lambda t}\right)|_{\lambda=\lambda_k} = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda_k) t^{l-j} e^{\lambda_k t} = 0,\ l \in \{0, \ldots, \nu_k - 1\},$$

denn wegen der Vielfachheit von λ_k ist $p^{(j)}(\lambda_k) = 0$ für $j \in \{0, \ldots, l\}$, $l \in \{0, \ldots, \nu_k - 1\}$. $\square$

Satz 3.4.2. *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $p(\lambda)$. Dann bildet*

$$\{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{\nu_j - 1} e^{\lambda_j t},\ j = 1, \ldots, m\}$$

ein komplexes Fundamentalsystem für (3.18)*, wobei ν_j die Vielfachheit von λ_j angibt. Sind alle Koeffizienten a_j reell, so ignoriere man alle Eigenwerte mit negativem Imaginärteil, und bilde Real- und Imaginärteile der verbleibenden Lösungen. Diese bilden dann ein reelles Fundamentalsystem.*

Beweis. Im komplexen Fall verwende man die Eulersche Formel und spalte die komplexe Lösung in Real- und Imaginärteil auf. Sei

$$q(t) := \sum_{j=1}^{m} q_j(t) e^{\lambda_j t}$$

eine Linearkombination der n Lösungen aus Satz 3.4.2, wobei die $q_j(t)$ Polynome der Ordnung $\leq \nu_j - 1$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ sind. Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass $q(t) \equiv 0$ genau dann gilt, wenn alle $q_j(t) \equiv 0$ sind.

Offenbar ist das für $m = 1$ der Fall. Angenommen unsere Behauptung sei für ein $m > 1$ bewiesen. Multipliziere nun

$$0 \equiv \sum_{j=1}^{m} q_j(t) e^{\lambda_j t} + q(t) e^{\lambda t},\ \lambda \neq \lambda_j$$

mit $e^{-\lambda t}$:

$$0 \equiv \sum_{j=1}^{m} q_j(t) e^{\mu_j t} + q(t),\ \mu_j = \lambda_j - \lambda \neq 0.$$

Differenziert man diese Gleichung so oft, bis $q(t)$ verschwindet, so ergibt sich

$$0 \equiv \sum_{j=1}^{m} r_j(t) e^{\mu_j t},$$

mit gewissen Polynomen $r_j(t)$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $r_j(t) \equiv 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$, da die μ_j paarweise verschieden sind. Dann müssen aber auch alle $q_j(t) \equiv 0$ sein, denn nach der Produktregel gilt für ein Polynom $p(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)e^{\mu t}\right) = (\dot{p}(t) + \mu p(t))e^{\mu t} = r(t)e^{\mu t},$$

wobei $r(t)$ wieder ein Polynom ist mit der gleichen Ordnung wie $p(t)$. Somit ist auch $q(t) \equiv 0$ und wir haben die lineare Unabhängigkeit der n Lösungen. $\square$

Beispiele. (a) *Bernoulli-Balken.* Die Biegung eines Balkens kann im einfachsten Fall nach Skalierung durch die Differentialgleichung

$$x^{(4)} + x = f(t), \quad t \in J,$$

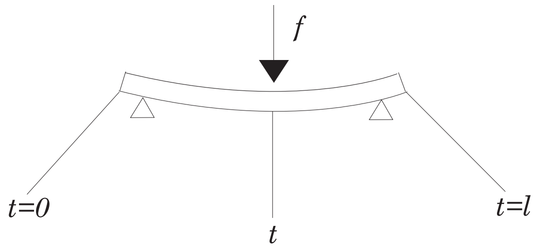

Abbildung 3.1: Bernoulli-Balken

modelliert werden. Dabei ist $x(t)$ die vertikale Auslenkung des Balkens am Ort t und $f(t)$ beschreibt eine Lastkraft. Dies ist eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung, für die wir mit Hilfe des Exponentialansatzes ein Fundamentalsystem bestimmen können. Die Eigenwertgleichung lautet dann $\lambda^4 + 1 = 0$. Diese besitzt die vier komplexen Nullstellen $\lambda = \pm\sqrt{\pm i} = \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2})$. Wie gewohnt vernachlässigen wir die konjugiert komplexen Eigenwerte und erhalten somit $\lambda_1 = (1+i)/\sqrt{2}$ sowie $\lambda_2 = -(1+i)/\sqrt{2}$. Ein *reelles* Fundamentalsystem ist dann gegeben durch

$$\left\{e^{t/\sqrt{2}}\cos(t/\sqrt{2}), e^{t/\sqrt{2}}\sin(t/\sqrt{2}), e^{-t/\sqrt{2}}\cos(t/\sqrt{2}), e^{-t/\sqrt{2}}\sin(t/\sqrt{2})\right\}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung findet man zum Beispiel mittels Variation der Konstanten, wie in Abschnitt 3.4.

Das nächste Beispiel ist ein zweidimensionales System 2. Ordnung, und soll zeigen, dass sich die Eigenwertmethode, also ein Exponential-Ansatz auch auf solche Probleme anwenden lässt.

(b) *Das gefederte Doppelpendel.* Wir betrachten hier den Fall gleicher Massen, gleicher Pendellängen, und kleiner Auslenkungen, da man dann lineare Näherungen verwenden kann. Das entsprechende System lautet

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -\frac{mg}{l}x + k(y-x), \\ m\ddot{y} &= -\frac{mg}{l}y + k(x-y), \end{cases}$$

wobei m die Masse, l die Länge der Pendel und k die Federkonstante sind. Wir vereinfachen weiter, indem wir $m = l = 1$ setzen:

$$(DP)\begin{cases} \ddot{x} &= -gx + k(y-x), \\ \ddot{y} &= -gy + k(x-y). \end{cases}$$

Das Ziel ist es, ein Fundamentalsystem für (DP) zu bestimmen. Dazu wählen wir die Ansätze $x(t) = ae^{\lambda t}$ und $y(t) = be^{\lambda t}$; hier ist dasselbe λ zu verwenden, a, b

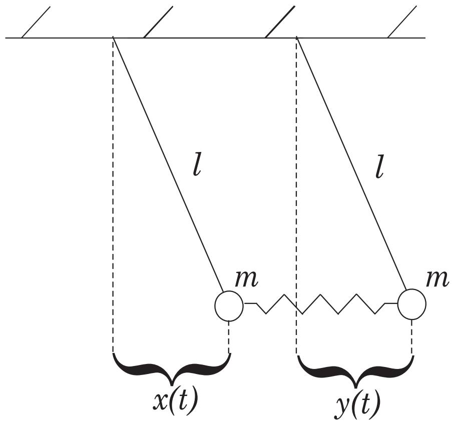

Abbildung 3.2: Gefedertes Doppelpendel

hingegen dürfen unterschiedlich sein. Dann erhält man die beiden Gleichungen $[(\lambda^2+g+k)a-kb]e^{\lambda t}=0$ bzw. $[(\lambda^2+g+k)b-ka]e^{\lambda t}=0$, oder in Matrix-Vektor-Notation:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+g+k & -k \\ -k & \lambda^2+g+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0.$$

Die Eigenwertgleichung für (DP) lautet $(\lambda^2+g+k)^2-k^2=0$. Diese erhält man auch, wenn man (DP) auf ein 4×4-System 1. Ordnung transformiert und dann das charakteristische Polynom berechnet.

Die Eigenwertgleichung ist gerade gleich der Determinante der obigen Matrix. Wir berechnen daher diejenigen Werte von λ, für die das Gleichungssystem *nicht* eindeutig lösbar ist. Es gilt also

$$\lambda^2 = -g-k\pm k = \begin{cases} -g, \\ -g-2k. \end{cases}$$

Es ergeben sich insgesamt 4 rein imaginäre Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = i\sqrt{g}$, $\lambda_2 = i\sqrt{g+2k}$ und jeweils die konjugiert komplexen Eigenwerte, die wir jedoch vernachlässigen.

Um zugehörige Eigenvektoren $[a,b]^\mathsf{T}$ zu erhalten, wähle man z.B. $a=k$ und $b=\lambda_j^2+g+k,\ j=1,2$. Wir erhalten so die beiden Lösungen

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} \right\}.$$

Nach Satz 3.4.2 gewinnen wir daraus das reelle Fundamentalsystem

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(t\sqrt{g}), \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t\sqrt{g}), \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(t\sqrt{g+2k}), \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \sin(t\sqrt{g+2k}) \right\}.$$

Die allgemeine Lösung ist also eine Linearkombination der Form

$$x(t) = \alpha\cos(t\sqrt{g}) + \beta\sin(t\sqrt{g}) + \gamma\cos(t\sqrt{g+2k}) + \delta\sin(t\sqrt{g+2k}),$$
$$y(t) = \alpha\cos(t\sqrt{g}) + \beta\sin(t\sqrt{g}) - \gamma\cos(t\sqrt{g+2k}) - \delta\sin(\sqrt{g+2k}).$$

Schließlich soll noch die Anfangswertaufgabe $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 0$ gelöst werden. Aus den ersten beiden Bedingungen folgt $\alpha = \gamma = 0$. Die anderen beiden liefern $\beta = \frac{1}{2\sqrt{g}}$ und $\delta = \frac{1}{2\sqrt{g+2k}}$. Den resultierenden Bewegungsvorgang nennt man eine *quasiperiodische Schwingung* mit den Frequenzen $\sqrt{g}$ und $\sqrt{g+2k}$.

Übungen

1. Bestimmen Sie reelle Fundamentalsysteme für $\dot{x} = A_i x$, wobei die Matrizen A_i durch

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ -12 & 8 & 2 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 6 & -17 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

gegeben sind.

2. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/t & -1/t^2 \\ 2 & -1/t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Systems

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3t-1 & 1-t \\ t+2 & t-2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} te^{t^2} \\ e^{t^2} \end{bmatrix}.$$

Tipp: Das homogene System besitzt eine nichttriviale Lösung mit $x_1 \equiv x_2$.

4. Es seien A, B, C $n \times n$-Matrizen. Man zeige, dass die Matrixfunktion $\exp(A)$ die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\exp(A(t+s)) = \exp(At)\exp(As)$, für alle $t, s \in \mathbb{R}$, $\exp(A0) = I$;
2. $\exp(A)$ ist invertierbar; man berechne $[\exp(A)]^{-1}$;
3. Ist C invertierbar so gilt $C^{-1}\exp(A)C = \exp(C^{-1}AC)$;
4. $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ ist i.a. falsch; geben Sie ein Gegenbeispiel an.

5. Zeigen Sie, dass die Matrixfunktion $e^{\int_0^t A(s)ds}$ im Allgemeinen *kein* Fundamentalsystem für $\dot{x} = A(t)x$ ist. Unter welchen Bedingungen ist sie eins?

6. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die DGL

$$x^{(3)} - 3\dot{x} + 2x = 0,$$

und suchen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x^{(3)} - 3\dot{x} + 2x = 9e^t$$

(a) mittels Variation der Konstanten
(b) mit einem Ansatz der Form $x(t) = p(t)e^t$, p ein Polynom.

7. In drei Fässern (nummeriert mit 1, 2, 3) befinden sich je 100 Liter Wasser. Im Fass 1 sei 1 kg Salz gelöst, während Fässer 2 und 3 kein Salz enthalten. Mit drei Pumpen werde mit einer Rate von 1 l/min Wasser von Fass 1 in Fass 2, von Fass 2 in Fass 3, und von Fass 3 in Fass 1 gepumpt.

Unter der Voraussetzung, dass in jedem der Fässer stets eine homogene Mischung vorliegt, ermittle man, wieviel Salz sich zu jedem Zeitpunkt in jedem der drei Fässer befindet.

8. Es sei A eine $n \times n$-Matrix und $\omega > s(A) := \max_i\{\mathrm{Re}\lambda_\mathrm{i}\}$, wobei λ_i die Eigenwerte von A bezeichnen. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $M = M(\omega) > 0$ gibt, sodass

$$|\exp At| \leq M(\omega)e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

gilt. Diese Behauptung ist i.Allg. falsch für $\omega \leq s(A)$; Gegenbeispiel?

9. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die DGL vom Eulerschen Typ

$$2t^3x^{(3)} + 10t^2\ddot{x} - 4t\dot{x} - 20x = 0.$$

Tipp: Substituieren Sie $t = e^s$.

10. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie die *Spektralradiusformel*

$$r(A) = \limsup_{k\to\infty} |A^k|^{1/k},$$

und zeigen Sie $r(e^A) = e^{s(A)}$.