ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020
BLATT 7 (12. 11. 2020)

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Zeigen Sie, dass

$$u(x,y) = \ln\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in H^1\big(B_{1/2}(0)\big)\,.$$

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Zeigen Sie:
(a) Sind $u \in H^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$) und $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so folgt $uv \in H^k(\Omega)$.
(b) Sind $u \in H^1(\Omega)$ und $v \in C_0^\infty(\Omega)$, so folgt $uv \in H_0^1(\Omega)$.

3. Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\, x^{1/5} < y < 1\}$.
(a) Finden Sie eine Funktion $u \in H^2(\Omega)$, so dass $u \notin C^0(\overline{\Omega})$. *Hinweis:* $u(x,y) = y^\alpha$.
(b) Ist dies nicht ein Widerspruch zur stetigen Einbettung von $H^2(\Omega)$ in $C^0(\overline{\Omega})$ in zweidimensionalen Gebieten?

4. Zeigen Sie die *2. poincarésche Ungleichung:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\|u - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei $\overline{u} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.
Hinweis: Sie dürfen folgende Aussage ohne Beweis verwenden: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $u \in H^1(\Omega)$ mit $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Dann folgt, dass u eine konstante Funktion ist.

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.