Satz 3.2.2 Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper. Eine Abbildung $f: V \to W$ ist genau dann linear, falls gilt

$f(x + cy) = f(x) + c f(y)$ für alle $x, y \in V$ und alle $c \in K$. (3.1)

Beweis. (a) ist f linear, so folgt (3.1) aus

$$f(x + cy) \overset{1.}{=} f(x) + f(cy) \overset{2.}{=} f(x) + c f(y). \quad \text{„}\Rightarrow\text{"}$$

(b) Sei (3.1) erfüllt. „$\Leftarrow$". Die Gültigkeit des ersten Axioms einer linearen Abbildung erhalten wir, indem wir $c := 1$ in (3.1) setzen. $f(x + 1 \cdot y) = f(x) + 1 \cdot f(y) \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$. Damit ist f ein Gruppenhomomorphismus, was $f(0) = 0$ liefert. f führt von $(V, +)$ nach $(W, +)$ und letzteres folgt aus (1.5), also $\Psi(e) = e'$. Wir substituieren nun $x := 0$ in (3.1), womit auch das zweite Axiom erfüllt ist. $f(x) + c f(y) = f(x + cy) \Rightarrow f(0_V) + c f(y) = f(0_V + cy) \Rightarrow 0_W + cf(y) = cf(y) = f(cy)$. $\square$