Satz 3.4.5 Zwei Vektorräume über K sind genau dann linear isomorph, falls sie gleichmächtige Basen haben. Insbesondere sind zwei endlichdimensionale Vektorräume über K genau dann linear isomorph, falls sie dieselbe Dimension haben.

Beweis. (a) Sei $f \in L(V, W)$ bijektiv. 3.4.4 „Wir nennen zwei Vektorräume V, W über demselben Körper K linear isomorph, falls es mindestens eine lineare Bijektion $V \to W$ gibt ...". $f \in L(V, W)$ ist immer ein Homomorphismos und wegen der Bijektivität sogar ein Isomorphismos von $(V, +)$ nach $(W, +)$. Nach Satz 2.5.6 gibt es eine Basis $(b_i)_{i \in I}$ von V. ... Dann liegt nach Satz 3.2.5 (c) mit $(f(b_i))_{i \in I}$ eine dazu gleichmächtige Basis von W vor.
„f ist genau dann bijektiv, falls $(f(b_i))_{i \in I}$ eine Basis von W ist." Die Basen sind gleichmächtig, weil f bijektiv ist, also auch $f|_{(b_i)_{i \in I}}$ und laut Definition von „gleichmächtig".
(b) Haben die Vektorräume V und W gleichmächtige Basen $(b_i)_{i \in I}$ bzw. $(c_j)_{j \in J}$, so gibt es eine Bijektion $\varphi : I \to J$.
... laut Definition von „gleichmächtig". Dann wird aber durch die Forderung $b_i \mapsto c_{\varphi(i)}$ für alle $i \in I$ nach dem Fortsetzungssatz 3.3.3 und nach Satz 3.2.5 (c) eine lineare Bijektion $V \to W$ festgelegt. ... genau eine. $\square$