1. Gg: μ, ν Maße auf $\mathcal{R}$ Ring.

(a) Zz: $(\mu+\nu)^* = \mu^* + \nu^*$

„$\geq$" $(\mu+\nu)^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu+\nu)(E_n) : E_n \in \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$

$= \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) : E_n \in \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$

$\geq \mu^*(A) + \nu^*(A)$.

„$\leq$" Seien $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}, (C_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ (oBdA. disjunkte)
Folgen, die A überdecken, mit $(\varepsilon > 0)$

$\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\nu^*(A) \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(C_m) \leq \nu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$

Ww: $(B_n \cap C_m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ überdeckt wieder A (disjunkt),
und $\forall n,m \in \mathbb{N}: B_n \cap C_m \subseteq B_n, C_m$.

$\Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) \leq \sum_{n,m\in\mathbb{N}} (\mu+\nu)(B_n \cap C_m)$

$= \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(B_n \cap C_m) + \nu(B_n \cap C_m) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(C_m)$

$\leq \mu^*(A) + \nu^*(A) + \varepsilon$.

(b) Zz: $\mathcal{M}_{\mu^*} \cap \mathcal{M}_{\nu^*} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*+\nu^*} \subseteq 2^{\Omega}$

Sei $A \in \mathcal{M}_{\mu^*} \cap \mathcal{M}_{\nu^*}$ und $B \in 2^{\Omega}$.

$(\mu^*+\nu^*)(B) = \mu^*(B) + \nu^*(B)$
$\geq \mu^*(B\cap A) + \mu^*(B \cap A^c) + \nu^*(B\cap A) + \nu^*(B\cap A^c)$
$= (\mu^*+\nu^*)(B\cap A) + (\mu^*+\nu^*)(B\cap A^c)$.

2.

(a) Gg: $\mu^*(A) \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ ✓

(ii) $\forall A: \mu^*(A) \geq 0$ ✓

(iii) $\forall A, B: A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ✓

(iv) $\forall A, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}: A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$.

Fall 1: $A = \emptyset$ ✓

Fall 2: $A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mu^*(A) = 1, \exists k \in \mathbb{N}: \mu^*(B_k) = 1$ ✓

(b) Gg: $\mu^*(A) \begin{cases} 0 & \mathrm{card}(A) \leq \aleph_0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

(i), (ii), (iii) ✓

(iv) Kontraposition:

d.h. $\forall n \in \mathbb{N}: \mu^*(B_n) = 0, \mu^*(A) = \infty$

$\Rightarrow A \not\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, laut Cantor - Verfahren.

(c) Gg: $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & |A| < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

(iv) Betrachte $B_n := \{n\}$, $A := \mathbb{N}$.

(d) Gg: $\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{|A| + 10} & |A| < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

(i), (ii), (iii) ✓

(iv) oBdA. $\forall n \in \mathbb{N}: |B_n| < \infty$

Fall 1: $|A| = \infty$

$\Rightarrow$ $\exists$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$: $B_n \neq \emptyset$

oBdA. $\forall n: |B_n| = 1$ ✓

Fall 2: $|A| < \infty$

Ww: $\frac{n-1}{n+9} + \frac{1}{11} \geq \frac{n}{n+10}$

„Elemente sollten möglichst aufgeteilt sein, für größere Werte."

oBdA. $\exists k \in \mathbb{N}: B_k = A$ ✓

Ges.: Alle $A \in 2^{\Omega}$:

$\forall B \in 2^{\Omega}: \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$.

Ww: $A = \emptyset, \Omega$ geht immer.

(a) Betrachte B, mit $B \cap A \neq \emptyset \neq B \cap A^c$.

(b) Fall 1: $\mu^*(B) = 0$ ✓

Fall 2: $\mu^*(B) = \infty$ ✓

(d) Fall 1: $|A| = \infty$

Betrachte $B := \Omega$.

Fall 2: $|A| < \infty$

Betrachte oberes „Ww".

3. Geg.: Semiring $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$ über $\Omega = \{1,\dots,5\}$.

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \vee A = \{1,2\} \\ 2 & A = \{3,4\} \\ 1 & A = \{5\} \end{cases}$$

Ges.: Fortsetzung auf erzeugten Ring.

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \cup \{\{1,\dots,4\}, \{3,4,5\}, \{1,2,5\}, \Omega\}$$
$$= \mathfrak{U}(\mathcal{T})$$

Wir berufen uns auf die Additivität:

$\mu(\{1,\dots,4\}) = 0 + 2 = 2$,

$\mu(\{3,4,5\}) = 2 + 1 = 3$,

$\mu(\{1,2,5\}) = 0 + 1 = 1$,

$\mu(\Omega) = 0 + 2 + 1 = 3$;

Ges.: erzeugtes äußeres Maß μ^*.

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$$

$\left.\begin{array}{l} \mu^*(\{1\}) = 0 \\ \mu^*(\{2\}) = 0 \end{array}\right]$ alle „neuen" mit 0 ✓

$\mu^*(\{3\}) = 2$

$\mu^*(\{4\}) = 2$

$\mu^*(\{5\}) = 1$

$\mu^*(A) = 3$ sonst;

$\mu^*(A) = 1$, wenn $\{1,2\} \not\supseteq A \subseteq \{1,2,5\}$,

$\mu^*(A) = 2$, wenn $\{1,2,5\} \not\supseteq A \subseteq \{1,2\} \cup \{3,4\}$,

weil $5 \in A \Rightarrow \mu(A) \neq 2$, Ges.: System der μ^*-messbaren Mengen.

A ist messbar (weil Ω endlich), wenn

$$\underbrace{\mu(\Omega)}_{3} = \mu^*(A) + \mu^*(A^c).$$

Außerdem, A messbar $\Rightarrow$ A^c messbar,

$A \in R$ $\Rightarrow$ A messbar;

$\Rightarrow$ 12 Mengen müssen gesondert betrachtet werden!

Wir vergleichen die Fälle $\mu = 0 \leftrightarrow \mu = 3$ und

$\mu = 1 \leftrightarrow \mu = 2$.

4. Gg: $\mathcal{C}$ Mengensystem, $\emptyset \in \mathcal{C}$,
$f: \mathcal{C} \to [0, \infty]$ mit $f(\emptyset) = 0$.

Zz: $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} f(B_n) : B_n \subseteq \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$
äußeres Maß.

(i), (ii), (iii) ✓

(iv) Sei $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, mit $A \in \mathcal{C}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$.

Zz: $\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

Ww: $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists (B_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}} : A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{nk}$,

$\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} f(B_{nk}) \geq \mu^*(A_n) =$

$\inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} f(C_{nk}) : C_{nk} \in \mathcal{C}, A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_{nk}\}$.

Ww: $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} B_{nk}$.

$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} f(B_{nk}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) =$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon$.

5. Gg: $(\mu_i^*)_{i\in I}$ äußere Maße.

Zz: $\mu^* := \sup_{i\in I} \mu_i^*$ äußeres Maß

(i), (ii), (iii) ✓

(iv) Sei $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Ww: $\forall i\in I: \mu_i^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_i^*(B_n)$.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{i\in I} \mu_i^*(B_n) \geq \sup_{i\in I} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_i^*(B_n)\right)$$

$$\geq \sup_{i\in I} \mu_i^*(A) = \mu^*(A).$$

7. Gg: $\Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$, $f: \Omega_1 \to \Omega_2$.

(a) Zz: $\forall A \subseteq \Omega_2 : f(f^{-1}(A)) = A \cap f(\Omega_1)$

$f^{-1}(A) := \{x \in \Omega_1 : f(x) \in A\}$

$f(B) := \{f(x) \in \Omega_2 : x \in B\}$

$f(f^{-1}(A)) = \{f(x) \in \Omega_2 : x \in f^{-1}(A)\}$

$= \{f(x) \in \Omega_2 : x \in \Omega_1, f(x) \in A\} = A \cap f(\Omega_1)$.

(b) Gg: μ_2^* äußeres Maß über Ω_2.

Zz: $\mu_1^*(A) = \mu_2^*(f(A))$ definiert äußeres Maß über Ω_1.

(i), (ii), (iii) ✓

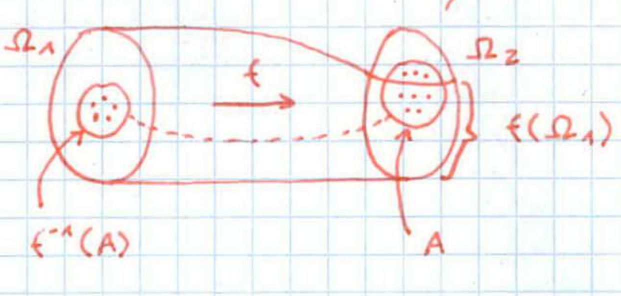
(iv) Sei $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, mit $A \in \Omega_1$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega_1^{\mathbb{N}}$.

Ww: $f(A) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(B_n)$

$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1^*(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2^*(f(B_n))$

$\geq \mu_2^*(f(A)) = \mu_1^*(A)$.

Zz: A messbar auf $\mu_2^* \Rightarrow f^{-1}(A)$ messbar auf μ_1^*.



$$\mu_1^*(f^{-1}(B)) = \mu_2^*(f(f^{-1}(B))) = \mu_2^*(B \cap f(\Omega_1))$$
$$\geq \mu_2^*((B \cap A) \cap f^{-1}(\Omega_1)) + \mu_2^*(\cdots)$$
$$= \mu_2^*(f(f^{-1}(B \cap A))) + \mu_2^*(\cdots)$$
$$= \mu_1^*(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A)) + \mu_1^*(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A)^c).$$