34 / 1: Sei E ein Spektralmaß. Zeige, dass der Operator $\int \phi\, dE$ genau dann kompakt ist, wenn

$$\forall r > 0: \quad \dim \operatorname{ran} E\big(\{w \in \mathbb{C} : |\phi(w)| \geq r\}\big) < \infty.$$

„$\Rightarrow$" Sei also $A := \int \phi \, dE \in \mathcal{L}_b(H)$ kompakt, , wobei H Hilbertraum ist und $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{U}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, eine beschränkte, $\mathcal{U}$-messbare Funktion, wobei $\mathcal{U}$ eine σ-Algebra auf einer Grundmenge Ω ist.

$\forall g, h \in H: \quad (Ag, h) = \int\limits_{\Omega} \phi \, dE_{g,h}$, wobei $\forall \Delta \in \mathcal{U}: E_{g,h}(\Delta) = (E(\Delta)g, h)$

Außerdem gilt nach Lemma 7.1.5: $\|A\| \leq \|\phi\|_\infty$; Sei $r \in \mathbb{R}^+$ bel.

$M_r := \{w \in \mathbb{C} ; |\phi(w)| \geq r\}$;

$(Ag, h) = \int\limits_{\Omega} \phi \, dE_{g,h}$ $\qquad \psi \in \mathcal{B}^{\mathcal{U}}(\mathbb{C}, \mathbb{R}_0^+): w \mapsto |\phi(w)|$

$(E(\Delta)g, h)$

„$\Leftarrow$" $(A_n g, h) =$

$$\int\limits_{|\phi|^{-1}([\frac{1}{n}, \infty[)} |\phi| \, dE_{g,h} = \int\limits_{[\frac{1}{n}, \infty[} \mathrm{id} \; dE_{g,h}|\phi|^{-1}$$

$E_{g,h}|\phi|^{-1}(\Delta) = (E(|\phi|^{-1}(\Delta))g, h)$

34 / 2: Sei μ ein endliches positives Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und sei $E(\Delta) := M_{\mathbb{1}_\Delta} \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ wobei $M_{\mathbb{1}_\Delta}$ der Multiplikationsoperator mit $\mathbb{1}_\Delta$ ist (d.h. $M_{\mathbb{1}_\Delta} f = \mathbb{1}_\Delta \cdot f$). Zeige, dass E ein Spektralmaß ist, und berechne $\int \phi \, dE$ für $\phi \in \mathrm{BM}(\Omega, \mathbb{C})$.

34 / 3: Sei E ein Spektralmaß auf den Borelmengen von $\mathbb{R}$ welches kompakten Träger hat, und sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall $[a,b]$ dessen Komplement eine E-Nullmenge ist. Definiere $E_\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$ als $E_\lambda := E((-\infty,\lambda])$.

Sei $\phi \in \mathrm{BM}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mit $\phi|_{[a,b]}$ stetig. Zeige, dass der Limes (das Riemann-Stieltjes Integral)

$$\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}\big),$$

wobei die Riemannzerlegung $\mathcal{R}$ des Intervalles $[a,b]$ die Stützstellen ξ_j und die Zwischenstellen α_j hat, bezüglich der Operatornorm existiert und gleich der (wie in der Vorlesung definierte) Operator $\int(\phi|_{[a,b]})\,dE$ ist.

•) Seien R_1, R_2 zwei Riemann-Zerlegungen. Wähle eine weitere Riemann-Zerlegung R, die alle Stützstellen von R_1 und von R_2 umfasst. Seien $(\xi_i)_{i=0}^{n(R_1)}$ die Stützstellen von R_1 und $(\alpha_i)_{i=1}^{n(R_1)}$ die Zwischenstellen von R_1, genauso $(\eta_i)_{i=0}^{n(R)}$ und $(\beta_i)_{i=1}^{n(R)}$

Für jedes $j \in \{1,\dots,n(R_1)\}$ seien $k(j-1) < k(j)$ Indizes mit

$$\xi_{j-1} = \eta_{k(j-1)} < \eta_{k(j-1)+1} < \dots < \eta_{k(j)-1} < \eta_{k(j)} = \xi_j$$

Kaltenbäck S. 369

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n(R_1)} \phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}\big) - \sum_{i=1}^{n(R)} \phi(\beta_i)\big(E_{\eta_i} - E_{\eta_{i-1}}\big)\Big\| =$$

$$= \Big\| \sum_{j=1}^{n(R_1)} \Big(\phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}\big) - \sum_{i=k(j-1)+1}^{k(j)} \phi(\beta_i)\big(E_{\eta_i} - E_{\eta_{i-1}}\big)\Big)\Big\| =$$

$$= \Big\| \sum_{j=1}^{n(R_1)} \sum_{i=k(j-1)+1}^{k(j)} \big(\phi(\alpha_j) - \phi(\beta_i)\big)\big(E_{\eta_i} - E_{\eta_{i-1}}\big)\Big\| \le \sum_{j=1}^{n(R_1)} \sum_{i=k(j-1)+1}^{k(j)} |\phi(\alpha_j) - \phi(\beta_i)| \, \|E_{\eta_i} - E_{\eta_{i-1}}\| \le$$

$$\le \rho(|R_1|) \sum_{j=1}^{n(R_1)} \sum_{i=k(j-1)+1}^{k(j)} \|E_{\eta_i} - E_{\eta_{i-1}}\| \overset{?}{=} \rho(|R_1|) \Big\| \sum_{j=1}^{n(R_1)} \sum_{i=k(j-1)+1}^{k(j)} \big(E_{\eta_i} - E_{\eta_{i-1}}\big)\Big\| \overset{?}{=}$$

?

$$= \rho(|R_1|)\,\|E_b - E_a\| \xrightarrow{|R_1|\to 0} 0$$, wobei $\rho(\delta) := \sup\{|\phi(s) - \phi(t)| : s,t \in [a,b],\ |s-t| \le \delta\}$

$$A := \lim_{|R|\to 0} \sum_{j=1}^{n(R)} \phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}\big)$$

$$(Ag, h) = \Big(\lim_{|R|\to 0} \sum_{j=1}^{n(R)} \phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} g - E_{\xi_{j-1}} g\big), h\Big) = \lim_{|R|\to 0} \sum_{j=1}^{n(R)} \phi(\alpha_j)\big((E_{\xi_j} g, h) - (E_{\xi_{j-1}} g, h)\big) =$$

$$= \lim_{|R|\to 0} \sum_{j=1}^{n(R)} \phi(\alpha_j)\, E_{g,h}\big((\xi_{j-1}, \xi_j]\big) \overset{?}{=} \int_{[a,b]} \phi \, dE_{g,h} = \int \phi|_{[a,b]} \, dE_{g,h} = \Big(\int \phi|_{[a,b]} \, dE\, g, h\Big)$$

gilt für alle g, h, also $A = \int \phi|_{[a,b]} \, dE$

37 / 1: Sei $k \in C([0,1]^2)$ und $K \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ der Integraloperator mit Kern k. Sei weiters $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, sodass K selbstadjungiert ist. Schließlich sei

$$K = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n$$

die Spektralzerlegung von K. Zeige:

(a) Die Eigenfunktionen e_n sind stetig auf $[0,1]$.

(b) Für jedes $f \in L^2(0,1)$ konvergiert die Reihe $Kf = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(f,e_n)e_n$ absolut und gleichmäßig auf $[0,1]$.

$K: L^2(0,1) \to L^2(0,1): f \mapsto \left(s \mapsto \int_0^1 k(s,t) f(t)\, d\lambda(t)\right)$

Für bel. $f,g \in L^2(0,1)$: $\langle Kf, g\rangle = \int_0^1 \int_0^1 k(s,t) f(t)\, d\lambda(t)\, \overline{g(s)}\, d\lambda(s) =$

$= \iint \mathbb{1}_{[0,1]}(s)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, k(s,t) f(t) \overline{g(s)}\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) = \int_0^1 f(t) \int_0^1 \overline{\overline{k(s,t)}\, g(s)}\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) =$

$= \int_0^1 f(t) \overline{\int_0^1 k(t,s)\, g(s)\, d\lambda(s)}\, d\lambda(t) = \langle f, K^* g\rangle$ also $K = K^*$ (Selbstadjungiertheit)

Aus Aufgabe ~~10/4~~ wissen wir außerdem, dass K kompakt ist.
– hier braucht man was anderes!

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ bel.. Nach Konstruktion der e_n gilt $e_n \in \ker(K - \lambda_n I)$ (vgl. S. 171) also

$Ke_n - \lambda_n e_n = 0$, also $(Ke_n)(s) = \int_0^1 k(s,t)\, e_n(t)\, dt = \lambda_n e_n(s) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e_n(s) = \int_0^1 k(s,t)\, e_n(t) \lambda_n^{-1}\, dt$; wähle $s \in [0,1]$ bel.

Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $s_n \to s$

$h_\ell(t) := k(s_\ell, t)\, e_n(t) \lambda_n^{-1}$; $h_\ell(t) \to h(t) := k(s,t)\, e_n(t) \lambda_n^{-1}$ wegen der Stetigkeit von k

$\forall \ell \in \mathbb{N}: \forall t \in [0,1]\ \ |h_\ell(t)| = |k(s_\ell,t)|\, |e_n(t) \lambda_n^{-1}| \leq \|k\|_\infty |\lambda_n^{-1}|\, |e_n(t)| =: g(t)$

$\int_0^1 |g(t)|\, d\lambda(t) = \|k\|_\infty |\lambda_n^{-1}| \int_0^1 |e_n(t)|\, dt \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|k\|_\infty |\lambda_n^{-1}|\, \|e_n\|_2 \|1\|_2 < \infty$, weil $e_n \in L^2(0,1)$

Mit Konvergenz durch Majorisierung erhalten wir damit $\lim_{\ell\to\infty} \int_0^1 h_\ell(t)\, dt = \int_0^1 h(t)\, dt$

(vgl. Kusolitsch Satz 9.33). Also ist e_n folgenstetig, da $[0,$ …

Umgebungsbasis hat nach Blümlinger Satz 1.2.4. sogar stetig.

37 / 1: Sei $k \in C([0,1]^2)$ und $K \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ der Integraloperator mit Kern k. Sei weiters $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, sodass K selbstadjungiert ist. Schließlich sei

$$K = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n$$

die Spektralzerlegung von K. Zeige:

(a) Die Eigenfunktionen e_n sind stetig auf $[0,1]$.

(b) Für jedes $f \in L^2(0,1)$ konvergiert die Reihe $Kf = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(f,e_n)e_n$ absolut und gleichmäßig auf $[0,1]$.

b) Sei $f \in L^2(0,1)$ bel.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_n (f,e_n) e_n\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n (f,e_n)|\, \|e_n\|_\infty \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (|\lambda_n|\, \|e_n\|_\infty)^2\right)^{\frac{1}{2}} \overbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}^{= \|f\|_2 \text{ (Parseval, Kor. 3.3.4)}} =$

$= \|f\|_2 \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2\, \|e_n\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$

?

$\lambda_n e_n = Ke_n$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_n e_n (f,e_n)\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,e_n)|\, \|\lambda_n e_n\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,e_n)|\, \|Ke_n\|_\infty =$

$= \sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,e_n)|\, \left\| \int_0^1 k(s,t)\, e_n(t)\, dt \right\|_\infty \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,e_n)|\, \left\| \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \|e_n\|_2 \right\|_\infty \leq \|k\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,e_n)| \overset{\text{Parseval}}{=} \|k\|_\infty \|f\|_2$

37 / 2: Sei $A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ definiert durch

$$(Af)(x) = i \int_{[0,x]} f \, d\lambda - \frac{i}{2} \int_{[0,1]} f \, d\lambda \, .$$

Zeige, dass A kompakt und selbstadjungiert ist. Bestimme das Spektralmaß von A, und finde eine Orthonormalbasis des $L^2([0,1])$ die aus aus Eigenvektoren von A besteht.

•) Sei $f \in L^2([0,1])$ bel.

$A_1 : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]) : (A_1 f)(x) = \int_{[0,x]} f d\lambda$

$A_2 : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]) : (A_2 f)(x) = \int_{[0,1]} f d\lambda$ (Kern ist konstant 1)

nochmal überprüfen

Aus Aufgabe 10/2 wissen wir, dass $A_2 \in B(L^2(0,1))$ kompakt ist und aus 10/1: $A_2^* = A_2$

und aus Aufgabe 10/3 wissen wir, dass $A_1 \in B(L^2(0,1))$ kompakt ist und $(A_1^* f)(x) = \int_{[x,1]} f d\lambda$

Nach Prop. 6.5.4 (iii) ist die Menge der kompakten Operatoren linearer TR, daher

$A = i A_1 - \frac{i}{2} A_2$ kompakt ist.

•) Seien $f, g \in L^2(0,1)$ bel.

$(Af, g) = i(A_1 f - \frac{1}{2} A_2 f, g) = i (A_1 f, g) - \frac{i}{2} (A_2 f, g) = i (f, A_1^* g) - \frac{i}{2} (f, A_2 g) =$

$= i (f, A_1^* g - \frac{1}{2} A_2 g) = (f, -i A_1^* g + \frac{i}{2} A_2 g)$

$(-i A_1^* g + \frac{i}{2} A_2 g)(x) = -i \int_{[x,1]} g \, d\lambda + \frac{i}{2} \int_{[0,1]} g \, d\lambda = -i \int_{[x,1]} g \, d\lambda + \frac{i}{2} \int_{[0,x]} g \, d\lambda + \frac{i}{2} \int_{[x,1]} g \, d\lambda =$

$= i \int_{[0,x]} g \, d\lambda - \frac{i}{2} \int_{[0,x]} g \, d\lambda - \frac{i}{2} \int_{[x,1]} g \, d\lambda = i \int_{[0,x]} g \, d\lambda - \frac{i}{2} \int_{[0,1]} g \, d\lambda = (Ag)(x)$, also $A = A^*$

•) Sei $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf $\sigma(A) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

37 / 3: Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Zeige mit Hilfe des Spektralsatzes, dass für $\lambda > \|A\|$ gilt

$$(A - \lambda)^{-1} = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA}\, dt.$$

·)