Maß 1, Übung 3

March 2, 2020

1 Aufgabe 2

Lemma 1. *Sei $\mathfrak{A}$ eine Sigmaalgebra und μ ein endlicher Inhalt auf $\mathfrak{A}$ sowie $C \subset \Omega$, wobei $C \notin \mathfrak{A}$ sei. Dann kann μ zu einem Inhalt auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{C\})$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Aus der ersten Übung wissen wir bereits aus Aufgabe 5, dass $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{C\}) = \{(A \cap C) \cup (B \cap C^C) \mid A, B \in \mathfrak{A}\}$. Wählen wir also eine beliebige Menge $A \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{C\})$, so gibt es $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} : A = (A_1 \cap C) \cup \left(A_2 \cap C^C\right)$. Das bedeutet, falls es einen Inhalt $\tilde{\mu}$ als Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{C\})$ geben sollte, so erfüllt dieser sicher $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}((A_1 \cap C) \cup (A_2 \cap C^C)) = \tilde{\mu}(A_1 \cap C) + \tilde{\mu}(A_2 \cap C^C)$, da $(A_1 \cap C) \cap (A_2 \cap C^C) = \emptyset$. Nun reicht es uns für ein beliebiges $U \in \mathfrak{A} : \tilde{\mu}(U \cap C) := \sup\{\mu(B) \mid B \subset A \cap C \wedge B \in \mathfrak{A}\}$ zu definieren, weil dann $\tilde{\mu}(A_1 \cap C)$ bereits direkt definiert ist und $\tilde{\mu}(A_2 \cap C^C) = \mu(A_2) - \tilde{\mu}(A_2 \cap C)$ sein muss.

Nun weist man noch nach, dass $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{C\})$ tatsächlich ein Inhalt ist und der Beweis ist fertig. □

2 Aufgabe 3

Lemma 2. *Für ein endliches Maß μ auf dem Sigmaring $\mathfrak{R}$ gilt:*

(a) μ ist beschränkt.

(b) μ lässt sich zu einem endlichen Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ fortsetzen.

Beweis. Um (a) zu beweisen nehmen wir an μ wäre unbeschränkt. Dann gilt jedenfalls $\forall n \in \mathbb{N} : \exists A_n \in \mathfrak{R} : \mu(A_n) > n$. Da es sich bei $\mathfrak{R}$ um einen Sigmaring handelt ist auch $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ und damit gilt $\forall k \in \mathbb{N} : \mu(A) > k$, also $\mu(A) = \infty$, was im Widerspruch zur Endlichkeit von μ steht.

Um (b) zu beweisen machen wir gleich Gebrauch von (a) und setzen $\tilde{\mu}(\Omega) := \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathfrak{R}\} < \infty$. Von Aufgabe 6 aus der ersten Übung wissen wir bereits, dass $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \{A \subset \Omega \mid A \in \mathfrak{R} \vee A^C \in \mathfrak{R}\}$, es ist also sofort ersichtlich, dass die Definition von $\tilde{\mu}(\Omega)$ ausreicht um $\tilde{\mu}$ auf ganz $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ festzulegen. Nun bleibt noch nachzuweisen, dass es sich tatsächlich um ein Maß handelt. □

3 Aufgabe 6

Lemma 3. *Wenn μ ein Maß auf einem Sigmaring $\mathfrak{R}$ über der Grundmenge Ω ist, dann ist durch*

$$\tilde{\mu} : \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R}) \to \overline{\mathbb{R}} : A \mapsto \sup\{\mu(B) \mid B \in \mathfrak{R} \wedge B \subset A\}$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ definiert.

Beweis. Offensichtlich sind die ersten beiden Eigenschaften $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ und $\forall A \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R}) : \tilde{\mu}(A) \geq 0$ eines Maßes erfüllt. Für die Sigmaadditivität betrachten wir ein disjunkte Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ und ein beliebiges $\epsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nun ein $C_n \in \mathfrak{R} : C_n \subset A_n$ welches $\tilde{\mu}(A_n) - \frac{\epsilon}{2^n} \leq \mu(C_n)$ erfüllt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n) - \epsilon &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\tilde{\mu}(A_n) - \frac{\epsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n) \\ &= \mu\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \leq \tilde{\mu}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).\end{aligned}$$

Es gibt auch ein $B \in \mathfrak{R} : B \subset \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $\mu(B) \geq \tilde{\mu}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \epsilon$. Von Aufgabe 6 aus der ersten Übung wissen wir bereits, dass $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \{A \subset \Omega \mid A \in \mathfrak{R} \vee A^C \in \mathfrak{R}\}$, also für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ entweder $A_k \in \mathfrak{R}$ oder $A_k^C \in \mathfrak{R}$ gilt. Falls $A_k \in \mathfrak{R}$ ist, dann ist sicher auch $B \cap A_k \in \mathfrak{R}$. Ist $A_k^C \in \mathfrak{R}$, dann ist $B \cap A_k = B \setminus A_k^C$ ebenfalls in $\mathfrak{R}$. Mit dieser Tatsache folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n) &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap B) = \mu\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)\right) \\ &= \mu(B) \geq \tilde{\mu}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \epsilon\end{aligned}$$

In beiden Ungleichungen war ϵ beliebig, also haben wir insgesamt die Sigamadditivität bewiesen und damit, dass $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ ist. □

4 Aufgabe 7

Lemma 4. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Das Urbild eines monotonen Systems $\mathfrak{M}$ ist im Allgemeinen kein monotones System.

(b) Das Urbild eines Semirings $\mathfrak{T}$ ist ein Semiring.

(c) Das Urbild eines Dynkinsystems $\mathfrak{D}$ ist im Allgemeinen kein Dynkinsystem.

Beweis. Ich glaube für (a) und (c) gibt es geeignete Beispiele, bin aber nicht sicher, es könnte auch sein, dass die Aussagen falsch sind.

Um (b) zu beweisen betrachten wir beliebige $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathfrak{T})$, also sind $A, B \in \mathfrak{T}$. Es gilt $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(\mathfrak{T})$. Nun wählen wir wieder $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathfrak{T})$ beliebig, diesmal aber mit $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Wir wissen, dass

$$\begin{aligned}\exists n \in \mathbb{N} : \exists C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{T} : \Bigg(&\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\} : C_i \cap C_j = \emptyset \\ &\wedge \forall k \in \{1, \ldots, n\} : A \cup \bigcup_{i=1}^{k} C_i \in \mathfrak{T} \wedge B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i\Bigg).\end{aligned}$$

Diese Mengen nehmen wir und erkennen, dass $f^{-1}(C_1), \dots, f^{-1}(C_n) \in f^{-1}(\mathfrak{T})$ die Leiter zwischen unseren Mengen $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ bilden. Damit ist gezeigt, dass $f^{-1}(\mathfrak{T})$ ein Semiring ist. $\square$