61. Gg: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\overline{\gamma} : t \mapsto \overline{\gamma(t)}$,

$f : \gamma[a,b] \to X$ B.R., $\int_\gamma f(z)\,dz$ existiert;

Zz: $\overline{\int_\gamma f(z)dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,dz$ existiert

Ww: Es existiert also $\overline{\int_\gamma f(z)\,dz}$

$$= \lim_{|\mathfrak{Z}| \to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{Z})} (\overline{\gamma}(\xi_j) - \overline{\gamma}(\xi_{j-1}))\, \overline{f(\overline{\overline{\gamma}(\alpha_j)})} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,dz,$$

weil $\overline{\phantom{x}}$ stetig, involutrisch, und bzgl. „+" und „·" verträglich ist.

62. Bsp. 11.24 Gg: $w \in \mathbb{C}, \notin \gamma[a,b]$, wobei

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ geschlossen, stetig, stückweise stetig differenzierbar,

Umlaufzahl von $\gamma$ um $w$ ... $n(\gamma, w) := \frac{1}{2i\pi} \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{z-w}\, dz}_{g(b)}$;

Zz: $n(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$.

$g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w}\, ds = \ln(\gamma(t)-w) - \ln(\gamma(a)-w)$

$\Rightarrow e^{-g(t)}(\gamma(t)-w) = \gamma(a)-w$

ist Konstant (alternativ durch ableiten verifizieren).

$\Rightarrow \underbrace{e^{-g(a)}}_{1}(\cancel{\gamma(a)-w}) = e^{-g(b)}(\cancel{\gamma(b)-w})$

Ww: $\exp g(b) = 1 \Leftrightarrow g(b) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

63. Bsp. 11.25 Gg: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar

Zz: $\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{C} \\ w \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-w}\, dz \end{cases}$ stetig

Ww: stückweise stetig differenzierbar heißt, dass
$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists (t_j)_{j=0}^{n} \in [a,b]^{n+1},\ a = t_0 < \cdots < t_n = b:$
$\forall j = 1,\dots,n\ \exists \gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ stetig: $\gamma_j|_{(t_{j-1},t_j)} = \gamma'|_{(t_{j-1},t_j)}$.

Laut Bemerkung 8.2.3, ist das Integral über offene und geschlossene Intervalle das selbe.

$$\int_\gamma \frac{1}{z-w}\, dz = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\, dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j(t)}{\gamma(t)-w}\, dt =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\gamma_j(t)}{\gamma(t)-w}\, dt$$

ist als Summe von Parameterintegralen (lokal) stetig im Kompakten $K_{\delta/2}(w) \subseteq U_\delta(w) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) = \gamma([a,b])^c$ offen, weil $\gamma([a,b])$ durch die Stetigkeit von $\gamma$ kompakt, also abgeschlossen ist.

64. Bsp. 11.26 Gg: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ geschlossener, stetiger, stetig differenzierbarer Weg, $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma([a,b]) \cap G = \emptyset$;

Zz: $\exists! n \in \mathbb{N} : \forall w \in G : n(\gamma, w) = n$

Angenommen, $\exists w_1, w_2 \in G : n(\gamma, w_1) \neq n(\gamma, w_2)$, dann sind die Mengen

$A_i := \{ w \in G : n(\gamma, w) = n(\gamma, w_i) \} \neq \emptyset, \quad i = 1,2.$

Sie sind sogar getrennt, weil $\forall w \in c(A_1) \, \exists (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A_1^{\mathbb{N}} : w_n \to w$. $n$ ist stetig, also $\lim_{n\to\infty} n(\gamma, w_n) = n(\gamma, w)$ und, weil $\forall n \in \mathbb{N} : w_n \in A_1 \Rightarrow n(\gamma, w) = n(\gamma, w_a)$.
Also $w \notin A_2$ und somit $c(A_1) \cap A_2 = \emptyset$. Analog folgt $c(A_2) \cap A_1$ und somit, dass $G$ nicht zusammenhängt und kein Gebiet ist $\lightning$

Gg: $G$ unbeschränkt

Zz: $\forall w \in G : n(\gamma, w) = 0$

Ww: $\left| \int_\gamma \frac{1}{z-w} \, dz \right| \leq \max_{t\in[a,b]} \frac{1}{|\gamma(t) - w|} \cdot \underbrace{\ell(\gamma)}_{<\infty, \text{ weil } \gamma \text{ rektifizierbar}}$

$= 0$, wenn $<$ alle positive Zahlen.
Dazu wählt man ein $w$ (das geht, weil $G$ unbeschränkt ist), sodass $\forall z \in \underbrace{\gamma([a,b])}_{\text{beschränkt}} : |z - w|$ hinreichend groß ist.

Weil $n(\gamma, w)$ konstant ist, kommt es nicht auf das $w$ an.

65. Bsp. 11.28 Zz: Kettenregel für holomorphe Funktionen

Eindimensional: Proposition 11.8.6

Mehrdimensional: Zz: $\frac{d(f\circ g)}{dz}(z) = \frac{dg}{dz}(z) \cdot \frac{df}{dg(z)}(z)$

Ww: $\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} z}(f\circ g)(z) = df(g(z)) \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} z} g(z)$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Re} g(z)}(g(z)), \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Im} g(z)}(g(z)) \right) \begin{pmatrix} \mathrm{Re} \frac{\partial g}{\partial \mathrm{Re} z}(z) \\ \mathrm{Im} \frac{\partial g}{\partial \mathrm{Re} z}(z) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Re} g(z)}(g(z)) \cdot \mathrm{Re} \frac{\partial g}{\partial \mathrm{Re} z}(z) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Im} g(z)}(g(z))}_{i \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Re} g(z)}(z)} \cdot \mathrm{Im} \frac{\partial g}{\partial \mathrm{Re} z}(z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Re} g(z)}(g(z)) \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathrm{Re} z}(z).$$

Leitet man nun noch nach „Imz" ab, so bekommt man

$$\underbrace{\frac{\partial (f\circ g)}{\partial \mathrm{Im} z} = i \frac{\partial (f\circ g)}{\partial \mathrm{Re} z}}_{\Rightarrow\ f\circ g \text{ holomorph}} = \frac{d(f\circ g)}{dz}.$$

66. Bsp. 11.31 Ug: $f: D \to Y$ holomorph,

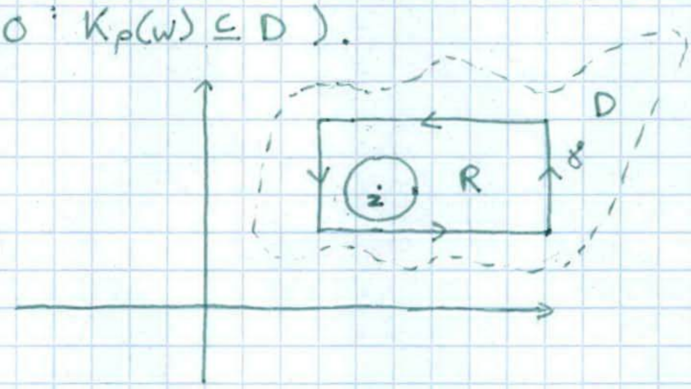
$R = \{x + iy : x \in [a,b],\ y \in [c,d]\} \subseteq D$,

$z \in R^\circ = \{x + iy : x \in (a,b),\ y \in (c,d)\}$,

$\gamma \sim \overrightarrow{a+ic,\ b+ic},\ \overrightarrow{b+ic,\ b+id},\ \overrightarrow{b+id,\ a+id},\ \overrightarrow{a+id,\ a+ic}$;

Zz: $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$

Wir zeigen, dass $\gamma$ ein in $D \setminus \{z\}$ zu $\gamma_\rho : t \mapsto w + \rho e^{it}$ homotoper, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg ist ($\exists w \in \mathbb{C}\ \exists \rho > 0 : K_\rho(w) \subseteq D$).




Dazu wähle $w = z$ und $\rho$ hinreichend klein, sodass $K_\rho(z) \subseteq R^\circ$.

Wir setzen oBdA. $\gamma(0) = b + ic$ (äquivalente Wege sind homotop).

Betrachte nun die Homotopie

$$\Gamma(t,s) := s\,\gamma_\rho(t) + (1-s)\,\gamma(t).$$

67. Bsp. 11.32 Zz: exp, sin, cos : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllen:

Cauchy-Riemannsche-Differenzialgleichungen,

stetige Differenzierbarkeit, (Holomorphie).

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a + bi = z \in \mathbb{C}$.

$$\exp(z) = \exp(a)\cos(b) + \exp(a)\sin(b)i,$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\exp}{\partial b}(z) = -\exp(a)\sin(b) = -\frac{\partial \operatorname{Im}\exp}{\partial a}(z),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\exp}{\partial a}(z) = \exp(a)\cos(b) = \frac{\partial \operatorname{Im}\exp}{\partial b}(z),$$

$$\Rightarrow \exp'(z) = \exp(z).$$

$$\sin(z) = \frac{(\exp(b)+\exp(-b))\sin(a)}{2} + \frac{(\exp(b)-\exp(-b))\cos(a)}{2} i,$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\sin}{\partial b}(z) = \frac{(\exp(b)-\exp(-b))\sin(a)}{2} = -\frac{\partial \operatorname{Im}\sin}{\partial a}(z),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\sin}{\partial a}(z) = \frac{(\exp(b)+\exp(-b))\cos(a)}{2} = \frac{\partial \operatorname{Im}\sin}{\partial b}(z),$$

$$\Rightarrow \sin'(z) = \cos(z).$$

$$\cos(z) = \frac{(\exp(-b)+\exp(b))\cos(a)}{2} + \frac{(\exp(-b)-\exp(b))\sin(a)}{2} i,$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\cos}{\partial b}(z) = \frac{(\exp(b)-\exp(-b))\cos(a)}{2} = -\frac{\partial \operatorname{Im}\cos}{\partial a}(z),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\cos}{\partial a}(z) = -\frac{(\exp(-b)+\exp(b))\sin(a)}{2} = \frac{\partial \operatorname{Im}\cos}{\partial b}(z),$$

$$\Rightarrow \cos'(z) = -\sin(z).$$

Ges.: $\int z^2 \cos^2 z$

$$= \frac{1}{24}\left(4z^3 + (6z^2-3)\sin(2z) + 6z\cos(2z)\right)$$

68. Bsp. 11.33 Gg: $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph;

Zz: $\Delta \mathrm{Re}\, f = \Delta \mathrm{Im}\, f = 0$

$$\Delta \mathrm{Re}\, f(z) := \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial^2 \mathrm{Re} z}(z) + \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial^2 \mathrm{Im} z}(z)$$

$$= \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial \mathrm{Re} z\, \partial \mathrm{Im} z}(z) - \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial \mathrm{Im} z\, \partial \mathrm{Re} z}(z) = 0.$$

Analog für $\Delta \mathrm{Im} f$.

Zz: $\Delta(|f|^2) \geq 0$

$$\Delta |f|^2 = \Delta(\mathrm{Re}^2 f + \mathrm{Im}^2 f)$$

$$= \frac{\partial^2(\mathrm{Re}^2 f + \mathrm{Im}^2 f)}{\partial^2 \mathrm{Re} z} + \frac{\partial^2(\mathrm{Re}^2 f + \mathrm{Im}^2 f)}{\partial^2 \mathrm{Im} z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} z} \frac{\partial \mathrm{Re}^2 f}{\partial \mathrm{Re} z} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} z} \frac{\partial \mathrm{Im}^2 f}{\partial \mathrm{Re} z} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} z} \frac{\partial \mathrm{Re}^2 f}{\partial \mathrm{Im} z} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} z} \frac{\partial \mathrm{Im}^2 f}{\partial \mathrm{Im} z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} z}\left(2 \mathrm{Re} f \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial \mathrm{Re} z}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} z}\left(2 \mathrm{Im} f \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial \mathrm{Re} z}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} z}\left(2 \mathrm{Re} f \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial \mathrm{Im} z}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} z}\left(2 \mathrm{Im} f \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial \mathrm{Im} z}\right)$$

$$= 2\left(\mathrm{Re} f \frac{\partial^2 \mathrm{Re} f}{\partial^2 \mathrm{Re} z} + \left(\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial \mathrm{Re} z}\right)^2 + \mathrm{Im} f \frac{\partial^2 \mathrm{Im} f}{\partial^2 \mathrm{Re} z} + \left(\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial \mathrm{Re} z}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \mathrm{Re} f \frac{\partial^2 \mathrm{Re} f}{\partial^2 \mathrm{Im} z} + \left(\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial \mathrm{Im} z}\right)^2 + \mathrm{Im} f \frac{\partial^2 \mathrm{Im} f}{\partial^2 \mathrm{Im} z} + \left(\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial \mathrm{Im} z}\right)^2\right)$$

$$= 2\left(\cancel{\mathrm{Re} f\, \Delta \mathrm{Re} f + \mathrm{Im} f\, \Delta \mathrm{Im} f} + (\cdots\cdots)^2\right) \geq 0.$$

69. Geg.: $\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$

Ges.: $\int_\gamma \frac{\sin z}{z^n}\, dz = \dots$

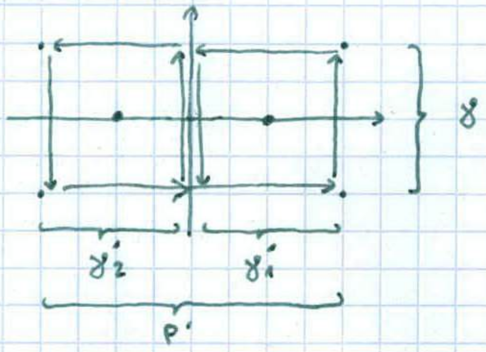
Laut Korollar 11.6.13, gilt

$$\sin^{(n-1)}(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\zeta)^n}\, dz$$

$$\Rightarrow \dots = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \sin^{(n-1)}(0) = \begin{cases} 0, & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k-1 \\ (-1)^{k+1} \frac{2\pi i}{(n-1)!}, & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \end{cases}$$

70. Geg.: $\gamma$ Polygonzug verbindet $\pm 2 \pm i$,

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{e^z}{(z+1)^2} \end{cases}$$




$$\overbrace{\begin{array}{l} \gamma_1' \text{ ist homotop zu} \\ \gamma_1(t) := 1 + e^{it}, \\ \gamma_2' \text{ ist homotop zu} \\ \gamma_2(t) := -1 + e^{it}, \end{array}}^{t \in [0, 2\pi]}$$

Ges.: $\int_\gamma f(z)dz$

$$= \int_\gamma \frac{1}{z-1} + \frac{e^z}{(z+1)^2}\, dz + \overbrace{\left[ \int_{\overrightarrow{(i,-i)}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{(-i,i)}} f(z)\,dz \right]}^{0}$$

$$= \int_{p'} f(z)dz = \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z)\,dz$$

jeweilige Gebiete einfach zshg.

$$= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1}\,dz + \cancel{\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+1)^2}} + \cancel{\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1}\,dz} + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z+1)^2}\,dz = \ldots$$

$g(z) := 1$, $h(z) := e^z$

$$\Rightarrow g(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big|_{z=1}$$

$$\Rightarrow e^{-1} = \frac{1!}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big|_{z=-1}$$

$$\Rightarrow \ldots = 2\pi i \left( 1 + \frac{1}{e} \right).$$