BLATT 4, BEISPIELE 2 UND 4

In Beispiel 2 ist zu zeigen, dass $F = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n}$ eine Fundamentallösung von div ist.

Idee: wenn u eine Fundamentallösung von $\Delta = \operatorname{div} \circ \nabla$ ist und $\nabla u = F$ gilt, dann ist $\operatorname{div} F = \operatorname{div}(\nabla u) = \delta$ – oder?

Eine einfache Rechnung ergibt

$$u = \frac{1}{2\pi} \ln r, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \frac{x_i}{r^2} \Rightarrow \nabla u = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2} = F \quad (n = 2)$$
$$u = \frac{1}{(2-n)\sigma_n} r^{2-n}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{\sigma_n} r^{1-n} \frac{x_i}{r} \Rightarrow \nabla u = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n} = F \quad (n \geq 3),$$

also $\nabla u = F$ punktweise für $x \neq 0$. Daraus folgt aber **nicht** direkt das gewünschte, denn die Gleichung $\nabla u = F$ muss distributionell gelten, genauer gesagt: $\partial_i u = F_i$ mit $F_i = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x_i}{|x|^n}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder

$$\langle \partial_i u, \varphi \rangle = \langle F_i, \varphi \rangle \quad \forall i \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} f, \varphi \rangle &= \langle \sum_i \partial_i F_i, \varphi \rangle = -\sum_i \langle F_i, \partial_i \varphi \rangle = -\sum_i \langle \partial_i u, \partial_i \varphi \rangle \\ &= \sum_i \langle \partial_i^2 u, \varphi \rangle = \langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Um (1) zu zeigen berechnet man für $n = 2$

$$\begin{aligned} \langle \partial_1 u, \varphi \rangle &= -\int \frac{1}{2\pi} \ln r \partial_1 \varphi \, \mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|x_1| > \varepsilon \\ |x_2| > \varepsilon}} \ln r \partial_1 \varphi \, \mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|x_2| > \varepsilon} \int_{|x_1| > \varepsilon} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \partial_1 \varphi(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x_2| \geq \varepsilon} \ln \sqrt{\varepsilon^2 + x_2^2} \cdot \big(\varphi(-\varepsilon, x_2) - \varphi(\varepsilon, x_2) \big) \, \mathrm{d}x_2 \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int \frac{x_1}{|x|^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Das vorletzte Integral geht wie $\varepsilon \ln \varepsilon$ gegen 0. Für $n = 3$ macht man eine ähnliche Rechnung. Damit ist (1) gezeigt und die ursprüngliche Idee gerechtfertigt.

Ein ähnliches Problem gibt es in Beispiel 4: um zu zeigen, dass $u(x,y) = (8\pi)^{-1} r^2 \ln r$ eine Fundamentallösung von Δ^2 ist, reicht es

$$\Delta u = v := \frac{1}{2\pi} \ln r$$

zu zeigen, denn dann gilt

$$\Delta(\Delta u) = \Delta(\frac{1}{2\pi} \ln r) = \delta.$$

Auch hier muss man die Gleichheit jedoch in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ zeigen, d.h. die Rechnung ist

$$\int u(x) \Delta\varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} u \nabla\varphi \cdot \nu \,\mathrm{d}s}_{\sim \varepsilon^3 \ln\varepsilon \to 0} - \underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} \varphi \nabla u \cdot \nu \,\mathrm{d}s}_{\sim \varepsilon^2 \ln \varepsilon + \varepsilon \to 0} + \underbrace{\int_{|x|>\varepsilon} \Delta u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x}_{\to \langle v, \varphi\rangle} \right).$$

Problem ist hier jeweils, dass aus $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}$ und $f' = g$ punktweise nicht unbedingt $\langle f', \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ folgt. Einfaches Gegenbeispiel: die punktweise Ableitung der Heaviside-Funktion H ist 0, aber die distributionelle Ableitung ist δ.