11 / 1: Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Finde einen kompakten Hausdorffraum K, sodass $(X, \|.\|)$ isometrisch isomorph zu einem abg. TR von $(C(K), \|.\|_\infty)$ ist.

Hinweis. Betrachte $\iota : X \to X''$.

$C(K) = \{ f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig} \}$

$$\iota : \begin{cases} X \longrightarrow X'' : \\ x \longmapsto f \begin{cases} X' \to \mathbb{C} \\ g \mapsto g(x) \end{cases} \end{cases}$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu 5.5.6 ist

$K := \{ f \in X' : \|f\| \leq 1 \}$ bzgl. $\sigma(X', \iota(X))$ kompakt

Wir wissen bereits, dass $(X', \sigma(X', \iota(X)))$ lokalkonvexer top. Vektorraum ist, insbes. also ein Hausdorffraum

Es ist also $(K, \sigma(X', \iota(X))|_K)$ ein kompakter Hausdorffraum

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\iota(X)"] & \mathbb{C} \\ K \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "C(K)"'] & \end{tikzcd}$$

Damit ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum (vgl. Bsp. 2.3.5)

Nach Lemma 5.5.2. ist $\iota : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (\iota(X), \|\cdot\|_{X''}|_{\iota(X)})$ isometrisch und linear,

Bemerkung 5.5.3 entnehmen wir, dass ι auch bijektiv ist, also ist ι Homöomorphismus

Sei $A := \{ f : K \to \mathbb{C} \mid \exists g \in \iota(X) : f = g \circ \alpha \}$ mit $\alpha : K \to X' : x \mapsto x$

Klarerweise ist $A \subseteq C(K)$

$\varphi : X \to A : x \mapsto \iota(x) \circ \alpha$

„Injektivität" $x \neq y \in X$

Nach Korollar 5.2.7 (i) ist X' punktetrennend, d.h. $\exists g \in X' : g(x) \neq g(y)$

$h := \frac{1}{\|g\|_{X'}} g$ hat $\|h\|_{X'} = 1$ also $h \in K \wedge h(x) \neq h(y) \Rightarrow \varphi(x)(h) \neq \varphi(y)(h)$

$\Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$

„Surjektivität" klar

„Isometrie": $x \in X$: $\|\varphi(x)\|_\infty = \sup\{ |f(x)| : f \in K \} = \sup\{ |f(x)| : f \in X' \wedge f \leq 1 \} =$

$= \|\varphi(x)\|_{X''} = \sup\{ |f(x)| : f \in X' \wedge f = 1 \} \overset{\text{Kor. 5.2.7.}}{=} \|x\|_X$

„Stetigkeit" Als bijektive Isometrie ein Homöomorphismus

„Linearität": $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in K$: $\varphi(x + \lambda y)(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = \varphi(x)(f) + \lambda \varphi(y)(f)$

Da X ein Banachraum ist, erhalten wir mit Lemma 4.3.6., dass $\varphi(X) = A$ ein abg. Teilraum von $C(K)$ ist

11 / 2:* [Dieses Beispiel benötigt Lecture 10]

Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:

(*i*) X ist reflexiv.

(*ii*) X' ist reflexiv.

(*iii*) Die abgeschlossene Einheitskugel B_X von X ist w-kompakt, d.h. kompakt bezüglich $\sigma(X, X')$.

Hinweis. Zeige mit Hilfe des Satzes von Banach-Alaoglu und der Aufgabe 06/2, dass “X reflexiv $\Rightarrow$ $B_X, B_{X'}$ w-kompakt”. Mit dem Satz von Goldstine zeige, dass “ B_X w-kompakt $\Rightarrow$ $\iota(B_X) = B_{X''}$”. Für “ $(ii) \Rightarrow (i)$” erinnere man sich zusätzlich daran dass der schwache Abschluss bei konvexen Mengen gleich dem Norm-Abschluss ist.

„(i) ⇒ (iii)" Sei X reflexiv. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist $B_{X''}$ kompakt bzgl. $\sigma(X'', \iota_1(X'))$. Nach Aufgabe 6/2 ist $\iota : (X, \sigma(X, X')) \to (\iota(X), \sigma(X'', \iota_1(X'))|_{\iota(X)})$ ein Homöomorphismus und wegen der Reflexivität von X ist $\iota(X) = X''$.

$\iota^{-1}(B_{X''}) = \{x \in X : \|\iota(x)\|_{X''} \leq 1\} = \{x \in X : \sup\{|f(x)| : f \in X' \wedge \|f\|_{X'} = 1\} \leq 1\} =$

Kor. 5.2.4 $= \{x \in X : \|x\| \leq 1\} = B_X$ ist als Bild einer kompakten Menge $B_{X''}$ unter einer stetigen Abb. kompakt

„(iii) ⇒ (i)" Sei also B_X kompakt bzgl. $\sigma(X, X')$. Nach dem Satz von Goldstine ist

$\overline{\iota(B_X)}^{\sigma(X'', \iota_1(X'))} = B_{X''}$ und ι ist Homöomorphismus (siehe „(i) ⇒ (iii)") also

ist $\iota(B_X)$ bzgl. $\sigma(X'', \iota_1(X'))$ kompakt und da $(X'', \sigma(X'', \iota_1(X')))$ Hausdorff ist insbes. auch abgeschlossen (vgl. Kaltenbäck Lemma 12.11.7), also $\iota(B_X) = \overline{\iota(B_X)} = B_{X''}$

ι ist jedenfalls injektiv und linear (Lemma 5.5.2 und Bem. 5.5.3)

Sei nun $y \in X''$ mit $y \neq 0$, betrachte $z := \frac{y}{\|y\|_{X''}} \in X''$, $\|z\|_{X''} = 1 \Rightarrow z \in B_{X''}$, also:

$\exists\, x \in B_X : \iota(x) = z$. $u := \|y\|_{X''} x \in X$, dann gilt

$$\iota(u) = \|y\|_{X''} \iota(x) = \|y\|_{X''} z = \|y\|_{X''} \frac{y}{\|y\|_{X''}} = y, \text{ also ist } \iota(X) = X''$$

„(i) ⇒ (ii)" Sei X reflexiv. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist $B_{X'}$ abg. bzgl. $\sigma(X', \iota(X)) = \sigma(X', X'')$ also bzgl. der w-Topologie. Nun erhalten wir mit „(iii) ⇒ (ii)", dass X' reflexiv ist.

„(ii) ⇒ (i)" Sei X' reflexiv. Dann ist (wie schon vorhin argumentiert) mit dem Satz von Banach Alaoglu, $B_{X''}$ kompakt bzgl. $\sigma(X'', \iota_1(X')) = \sigma(X'', X''')$ und mit dem Satz von Goldstine und der Konvexität von $\iota(B_X)$ (weil B_X konvex ist und ι linear) mit Satz 5.3.8:

$\overline{\iota(B_X)}^{\|\cdot\|_{X''}} = \overline{\iota(B_X)}^{\sigma(X'', X''')} = B_{X''}$ Da B_X abg. bzgl $\|\cdot\|$ ist und

$\iota^{-1} : (\iota(X), \|\cdot\|_{X''}|_{\iota(X)}) \to (X, \|\cdot\|)$ stetig und surjektiv (vgl. Lemma 5.5.2 und Bem. 5.5.3)

ist $(\iota^{-1})^{-1}(B_X)$ abg. bzgl. $\|\cdot\|_{X''}$, also $\iota(B_X) = \overline{\iota(B_X)}^{\|\cdot\|_{X''}} = B_{X''}$ wie in „(iii) ⇒ (i)" ist dann $\iota(X) = X''$

15 / 1: Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei ($\mathbb{R}_n[z]$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$)

$$K := \{p \in \mathbb{R}_n[z] : p''(x) \geq 0, x \in [-1,1]\}.$$

Zeige, dass es für jedes $f \in L^2([-1,1])$ genau ein $p_0 \in K$ gibt, sodass

$$\int_{[-1,1]} |f(t) - p_0(t)|^2 \, dt \leq \int_{[-1,1]} |f(t) - p(t)|^2 \, dt$$

für alle $p \in K$.

Hinweis. Die Menge aller komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ ist ein endlich dimensionaler Unterraum und $p \mapsto p(t)$ sowie $p \mapsto p''(t)$ ist ein lineares Funktional auf diesem Unterraum für jedes $t \in [a,b]$. Schliesse, dass K abgeschlossen und konvex ist.

Wir befinden uns im Hilbertraum $L^2([-1,1])$ mit $(f,g) := \int_{[-1,1]} f \bar{g} \, d\lambda$

$P_n := \{p : [-1,1] \to \mathbb{C} : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \forall i \in \{1,\dots,n\} : a_i \in \mathbb{C}\}$ $\overset{?}{0}$

P_n ist ein $n+1$-dimensionaler Unterraum von $L^2([-1,1])$ weil für $f,g \in P_n$ jedenfalls $\|f\|_{L^2}, \|g\|_{L^2} < \infty$ (ausrechnen) und $\text{grad}(f+g) \leq \max\{\text{grad}(f), \text{grad}(g)\} \leq n$ (vgl. Winkler Prop. 3.3.6.5) also für bel. $\lambda \in \mathbb{C}$ sicher $f + \lambda g \in P_n$; P_n ist als endlichdim. UR abgeschlossen (Satz 2.2.1)

Sei $\forall t \in [-1,1] : \alpha_t : P_n \to \mathbb{C} : p \mapsto p(t)$ (Auswertung des stetigen Repräsentanten)

„Linearität von α_t": Seien $p, q \in \mathbb{C}_n[z]$ bel. und $\lambda \in \mathbb{C}$ bel.

$$\alpha_t(p + \lambda q) = p(t) + \lambda q(t) = \alpha_t(p) + \lambda \alpha_t(q)$$

„Stetigkeit von α_t": Da $\dim P_n < \infty$ gibt es nur eine Topologie mit der P_n zu einem top. VR wird (vgl. Kor. 2.2.2.) Also betrachten wir

$$\|\alpha_t\| = \sup\{|p(t)| : \|p\|_\infty = 1, p \in P_n\} = 1 < \infty,$$ also ist α_t stetig

Sei weiters $\forall t \in [-1,1] : \beta_t : P_n \to \mathbb{C} : p \mapsto p''(t)$, die Linearität ist wieder klar

„Stetigkeit von β_t": $\forall t \in [-1,1] : p''(t) = \lim_{h \searrow 0} \frac{p(t+h) - 2p(t) + p(t-h)}{h^2}$

Sei nun $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{R}^+$ und $\forall k \in \mathbb{N}$

$\gamma_{tk} := h_k^{-2}(\alpha_{t+h_k} - 2\alpha_t + \alpha_{t-h_k})$, ein stetiges und lineares Funktional

$\forall p \in P_n$ existiert der Grenzwert $\lim_{k \to \infty} \gamma_{tk}(p) = p''(t)$

P_n ist ein Banachraum, also ist nach Korollar 4.2.3

$\beta_t : P_n \to \mathbb{C} : p \mapsto \lim_{k \to \infty} \gamma_{tk} = p''(t)$ ein stetiges lineares Funktional

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ sind abgeschlossen und konvex, also sind $\forall t \in [-1,1]$:

$\alpha_t^{-1}(\mathbb{R}) = \{p \in P_n \mid p(t) \in \mathbb{R}\}$ und $\beta_t^{-1}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) = \{p \in P_n \mid p''(t) \geq 0\}$ abgeschlossen und konvex

also ist auch $L := \bigcap_{t \in [-1,1]} \alpha_t^{-1}(\mathbb{R})$ abg. und konvex. $p = \sum_{i=0}^{n} a_i \, \mathrm{id}^i \in L \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1] : p(t) \in \mathbb{R}$

mit $t = 0$: $p(0) = a_0 \in \mathbb{R}$ Sei nun $k := \min\{i \in \mathbb{N} : \mathrm{Im}(a_i) \neq 0\}$ also $\mathrm{Im}(p(t)) = \sum_{i=k}^{n} \mathrm{Im}(a_i) t^i$

und $b := \max\{|\mathrm{Im}(a_i)| : i \in \{k+1,\dots,n\}\}$ $\leftarrow$ o.B.d.A. $\neq \emptyset$. Wir wünschen uns ein $t \in]0,1]$ mit $t^{k+1} b < \frac{|\mathrm{Im}(a_k)|}{n} t^k$

also $t^k\left(tb - \frac{|\mathrm{Im}(a_k)|}{n}\right) < 0 \Leftarrow t < \frac{|\mathrm{Im}(a_k)|}{nb}$ dann ist insbes. $\forall l \geq k+1 : t^l b \leq t^{k+1} b < \frac{|\mathrm{Im}(a_k)|}{n} t^k$

$\left|\sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{Im}(a_i) t^i\right| \leq \sum_{i=k+1}^{n} |\mathrm{Im}(a_i)| t^i \leq \sum_{i=k+1}^{n} b t^i < |\mathrm{Im}(a_k)| t^k$

also: $|\mathrm{Im}(p(t))| = \left|\sum_{i=k}^{n} \mathrm{Im}(a_i) t^i\right| \geq \left| |\mathrm{Im}(a_k)| t^k - \left|\sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{Im}(a_i) t^i\right| \right| > 0$ ↯ zu $p(t) \in \mathbb{R}$

also ist $L = \mathbb{R}^n[z] = \{p : [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \forall i \in \{0, \dots, n\} : a_i \in \mathbb{R}\}$

außerdem ist $M = \bigcap_{t \in [-1,1]} h_t^{-1}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ konvex und abg.

also auch $L \cap M = K$ Nun folgt mit Satz 3.2.3 (1) die Aussage.

15 / 2:* Sei H ein Hilbertraum. Zeige: Ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von orthogonalen Projektionen ($P_n \neq 0$), für die gilt

$$\operatorname{ran} P_n \perp \operatorname{ran} P_m,\ n \neq m\ ,$$

und ist $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, mit $\alpha_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, so ist für jedes $x \in H$ die Reihe

$$Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n x$$

konvergent. Es gilt $A \in \mathcal{B}(H)$, $\|A\| = \|\alpha\|_\infty$. Bestimme $\ker A$. Ist $\alpha_n \to 0$, so konvergiert die Reihe in der Operatornorm. Gilt auch die Umkehrung?

15/3: [Dieses Beispiel benötigt Lecture 04]

Man zeige: Sei H ein Hilbertraum, $A : H \to H$ linear und symmetrisch, d.h.

$$(Ax, y) = (x, Ay), \ \ x, y \in H \ .$$

Dann ist A stetig.

Die Vollständigkeit spielt hier eine entscheidende Rolle: Betrachte den Vektorraum X aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die beliebig oft differenzierbar sind und außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ verschwinden, und versehe ihn mit dem inneren Produkt

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \ \ f, g \in X \ .$$

D.h. wir betrachten jenen Teilraum von $L^2(0, 1)$, der aus C^∞-Fuktionen besteht, die am Rand verschwinden. Da X in $L^2(0, 1)$ dicht liegt, aber sicher $X \neq L^2(0, 1)$ ist, kann X nicht vollständig sein.

Zeige, dass der Operator

$$A : \begin{cases} X & \to \quad X \\ f(t) & \mapsto \quad if'(t) \end{cases}$$

in diesem Sinne symmetrisch ist, aber nicht stetig.

Die Aussage dieses Beispiels ist einer der ersten Sätze der Funktionalanalysis (Hellinger, Töplitz 1910).

1) H ist ein lokalkonvexer top. Vektorraum (als normierter Raum) nach Kor. 5.2.7 (i) ist daher H' punktetrennend. Nach Prop. 3.25. ist H' die Menge bestehend aus $f_y : H \to \mathbb{C} : x \mapsto (x, y)$.

sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus H mit $\|x_n\| \to 0$ und $y \in H$ bel.

Dann gilt wegen der Symmetrie von A und der Stetigkeit von f_{Ay}

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Ay) = (\lim_{n\to\infty} x_n, Ay) = (0, Ay) = 0$$

Nach Kor. 4.4.4 ist dann A beschränkt.

2) $X := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \operatorname{supp} f \subseteq [0,1], \ f \in C^\infty\}$ als Teilraum von $L^2(0,1)$

„Symmetrie": $f, g \in X$ bel.

$$(f, Ag) = \int_{[0,1]} f \, \overline{ig'} \, d\lambda = \int_{[0,1]} f \, (-i) \, \overline{g}' \, d\lambda = -i \int_{[0,1]} f \, \overline{g}' \, d\lambda =$$

$$= -i \Big(\underbrace{f(1)\overline{g}(1)}_{=0} - \underbrace{f(0)\overline{g}(0)}_{=0} - \int_{[0,1]} f' \, \overline{g} \, d\lambda \Big) =$$

$$= \int_{[0,1]} i f' \overline{g} \, d\lambda = \int_{[0,1]} Af \, \overline{g} \, d\lambda = (Af, g)$$

„nicht stetig": X ist ein topologischer Raum und Hausdorff.

Ang. A ist stetig, dann ist nach Lemma 4.4.1 $G := \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ abg.

Nach Prop. 1.2-8. ist $\pi_1 : X \times X \to X : (x, y) \mapsto$ offen also ist

$\pi_1(G) = X$ abg., also $X = \overline{X} = L^2(0,1)$ ↯

15 / 4: Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum, und $[\cdot,\cdot]$ ein weiteres Skalarpodukt auf H. Sei vorausgesetzt dass $[\cdot,\cdot]$ eine stetige koerzive Sesquilinearform ist, d.h., dass (hier bezeichnet $\|.\|_H$ die von $(\cdot,\cdot)_H$ induzierte Norm)

$$\exists C > 0\, \forall x, y \in H: \ |[x,y]| \le C\|x\|_H \|y\|_H, \qquad \exists m > 0\, \forall x \in H: \ [x,x] \ge m\|x\|_H^2.$$

Weiters bezeichne G den Gram-Operator der Sesquilinearform $[\cdot,\cdot]$ bzgl. $(\cdot,\cdot)_H$.

Zeige, dass es einen eindeutigen Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ gibt, sodass $GT = TG = \mathrm{id}_H$ gilt.

Hinweis. Zeige, dass $(H, [\cdot,\cdot])$ ein Hilbertraum ist.

16 / 1:*Sei μ das normierte Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi} dx$. Betrachte die Elemente bzw. Teilräume im $L^2([0, 2\pi), \mu)$ die definert sind als

$$e_n(t) := e^{int}, \; n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n(t) := \frac{e_{-n}(t) + n e_n(t)}{\sqrt{1+n^2}}, \; n \in \mathbb{N},$$

$$M := \overline{\operatorname{span}\{e_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}}, \quad N := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n = 1, 2, \ldots\}}.$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Die Räume M und N sind, versehen mit dem $L^2(\mu)$–Skalarprodukt, Hilberträume. Die Mengen $\{e_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ bzw. $\{u_n : n = 1, 2, \ldots\}$ sind Orthonormalbasen von M bzw. N.

(b) $M \cap N = \{0\}$.

(c) $M \dot{+} N$ ist dicht in $L^2([0, 2\pi), \mu)$, aber nicht gleich ganz $L^2([0, 2\pi), \mu)$.

(d) Die Projektion des normierten Raumes $X := M \dot{+} N$ mit Bild M und Kern N ist nicht stetig.

(e) Finde eine stetige Projektion von $L^2([0, 2\pi), \mu)$ auf M.