3.4.6 Fakta.

1. Aus $\inf_{n\geq N} \leq \sup_{n\geq N} x_n$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ folgt unmittelbar

$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Es folgt „unmittelbarer", wenn man statt $\inf_{n\geq N} \leq \sup_{n\geq N}$, $\inf\{x_n : n\geq N\} \leq \sup\{x_n : n \geq N\}$ schreibt. Dann ist das bloß noch ein Korollar von Lemma 3.3.1 (iii), also „Gilt ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \leq y_n$, so folgt $x \leq y$."

2. Weiters folgt aus den Rechenregeln für Suprema und Infima sofort, dass $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$ sowie $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$ für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \leq b_n$ ab einem Index $N \in \mathbb{N}$. Also, zuerst mal schreiben wir $\lim_{N\to\infty} \sup\{-x_n : n\geq N\} = \lim_{N\to\infty} -\inf\{x_n : n \geq N\} = -\lim_{N\to\infty} \inf\{x_n : n \geq N\}$, wegen Übungsbeispiel 2.13, also „Man zeige: Ist $M \subseteq K$, so existiert $\sup M$ genau dann, wenn $\inf(-M)$ existiert. In diesem Falle gilt $-\sup M = \inf(-M)$.", und wegen Satz 3.3.5 (ii), also $\lim_{n\to\infty}(-z_n) = -z$. (Die Argumente gelten jeweils für die erste bzw. zweite Gleichheit.) Aus $a_n \leq b_n$ ab $N \in \mathbb{N}$ folgt zuerst mal insbesondere $\sup\{a_n : n \geq N\} \leq \sup\{b_n : n\geq N\}$ (als Spezialfall) und mittels oberem Lemma 3.3.1 (iii) auch $\lim_{N\to\infty} \sup\{a_n : n \geq N\} \leq \lim_{N\to\infty} \sup\{b_n : n \geq N\}$, was sich dann nur noch durch Schreibweise von oben unterscheidet. Für's inf folgt's analog.

3. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so folgt aus Lemma 3.4.5 und Satz 3.2.8 (iv), dass

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{3.8}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, also insbesondere, laut Proposition 2.3.13, Geschränkt. Daher gibt es, laut Lemma 3.4.5, zwei Teilfolgen, die jeweils nach $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\limsup_{n\to\infty} x_n$ konvergieren. Nach Satz 3.2.8(iv), konvergiert jede Teilfolge einer Konvergenten Folge gegen den selben Wert, wie die Folge selbst. Daher die Gleichheit. Gilt umgekehrt $y := \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $y - \epsilon < \inf_{n\geq N} x_n \leq y$ für alle $N \geq N_1$, und ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $y \leq \sup_{n\geq N} x_n < y + \epsilon$ für alle $N \geq N_2$. Bei der ersten Ungleichungskette, wird die zweite Ungleichheit klar, wenn man $\inf\{x_n : n \geq N\} \leq \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \inf\{x_n : n \geq N\}$ betrachtet (für y wurde eingesetzt), weil ja $(y_N)_{N\in\mathbb{N}} := (\inf\{x_n : n \geq N\})_{N\in\mathbb{N}}$ streng monoton, also insbesondere monoton, steigt (und $\{x_n : n \geq N\} \subseteq \{x_n : n \geq \infty\}$ mit $N \in \mathbb{N}$). $\liminf_{n\to\infty} x_n = y$ ist der Grenzwert von $\inf_{n\geq N} x_n$, also kann man in (3.3), also $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$, einsetzen und $d(\inf_{n\geq N} x_n, y) = |y - \inf_{n\geq N} x_n| =$ (wegen zweiter Ungleichheit) $= y - \inf_{n\geq N} x_n < \epsilon \Leftrightarrow$ erste Ungleichheit. Die zweite Ungleichungskette folgt analog mit „fallend" und $\sup_{n\geq N} x_n - y$ (wegen erster Ungleichheit) $= \epsilon \Leftrightarrow$ zweite Ungleichheit. Für $N \geq \max(N_1, N_2)$ folgt

$$y - \epsilon < \inf_{n \geq N} x_n \leq x_N \leq \sup_{n \geq N} x_n < y + \epsilon,$$

und damit die Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen y; also gilt (3.8). $\inf\{x_n : n \geq N\} \leq x_N \leq \sup\{x_n : n \geq N\}$ gilt laut Definition einer unteren bzw. oberen Schranke, also insbesondere für das inf bzw. sup. Dann verwendet man nur noch den Satz 3.3.2 (Einschluss-Satz) und bekommt $\lim_{N \to \infty} \inf\{x_n : n \geq N\} = \lim_{N \to \infty} x_N = \lim_{N \to \infty} \sup\{x_n : n \geq N\}$, wobei sich dass erste und letzte Glied dieser Gleichheitskette jeweils nur durch Schreibweise von denen von (3.8) unterscheiden und $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{N \to \infty} x_N$.

4.* Aus $\limsup_{n \to \infty} x_n = \lim_{N \to \infty} \sup_{n \geq N} x_n$ zusammen mit Satz 2.8.3 und Lemma 3.3.1 zeigt man, dass $\limsup_{n \to \infty} x_n < \xi$ genau dann, wenn es ein $q < \xi$ gibt, sodass $x_n \leq q$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ ist vollständig angeordnet, also insbesondere, laut Lemma 2.9.2, archimedisch angeordnet. Für „$\Rightarrow$", wendet man Satz 2.8.3., also „... Sind $x, y \in K$, $x < y$, dann existiert ein $p \in \mathbb{Q}$ mit $x < p < y$" [12], an und betrachtet $\lim_{n \to \infty} x_n$ als x und ξ als y. $x_n \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daraus, dass $\sup_{n \geq N} x_n$ mit steigendem N immer (monoton fallend) kleiner wird und daher $x_n \leq q$ für endlich viele $\hat{x}_n \geq \limsup_{n \to \infty} x_n$ nicht immer gelten muss, aber sehr wohl für $x_n \leq \limsup_{n \to \infty} x_n < p$ (ups p statt q; egal, jetzt offiziell $p = q$). Für „$\Leftarrow$", geht man von $x_n \leq q < \xi$, also $x_n < \xi$, für fast alle $\forall n \in \mathbb{N}$ aus. Folglich gilt $x_n < \xi$ für endlich viele $\hat{x}_n$ nicht. Jetzt ist aber $\limsup_{n\to\infty} x_n \notin \{\hat{x}_n : n \in \mathbb{N} \wedge \hat{x}_n \nless \xi\}$, weil sich n, dadurch, dass diese obere Menge endlich ist, nicht ∞ weit erhöhen ließe (die Indizes von $\hat{x}_n$ sind ja auch nur endlich viele, also auch endlich groß). Für jene unendlich viele $x_n \leq p < \xi$ ist also insbesondere $\sup\{x_n : n \geq N\} (\leq p) < \xi$ und damit folgt durch Lemma 3.3.1 (iii), also „Gilt ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \leq y_n$, so folgt $x \leq y$.", tatsächlich $\limsup_{n\to\infty} x_n < \xi$ mit $\sup\{x_n : n \geq N\}$ statt x_n, $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \sup\{x_n : n \geq N\}$ statt x und ξ als konstante Folge $(\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ statt y und y_n.

5.* Ähnlich gilt $\limsup_{n\to\infty} x_n > \xi$ genau dann, wenn es ein $q > \xi$ gibt, sodass $x_n \geq q$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Man wendet für „$\Rightarrow$" also wieder Satz 2.8.3 an, um q mit $\limsup_{n\to\infty} x_n \geq x_n \geq q > \xi$ durch $\limsup_{n\to\infty} x_n > \xi$ zu bekommen. Tatsächlich gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, für die die Ungleichungskette gilt. Für „$\Leftarrow$" muss man nur an die Ungleichungskette und Transitivität glauben.

* Entsprechendes gilt für $\liminf_{n\to\infty} x_n < \xi$. Ups, vergessen. Das führe ich jetzt nicht mehr weiter aus.