Funktionalanalysis für TM

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 34 – Spektralmaße"

---

34 / 1: Sei E ein Spektralmaß. Zeige, dass der Operator $\int \phi \, dE$ genau dann kompakt ist, wenn

$$\forall r > 0 : \quad \dim \operatorname{ran} E\big(\{w \in \mathbb{C} : |\phi(w)| \geq r\}\big) < \infty.$$

34 / 2: Sei μ ein endliches positives Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und sei $E(\Delta) := M_{\mathbb{1}_\Delta} \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ wobei $M_{\mathbb{1}_\Delta}$ der Multiplikationsoperator mit $\mathbb{1}_\Delta$ ist (d.h. $M_{\mathbb{1}_\Delta} f = \mathbb{1}_\Delta \cdot f$). Zeige, dass E ein Spektralmaß ist, und berechne $\int \phi \, dE$ für $\phi \in \mathrm{BM}(\Omega, \mathbb{C})$.

34 / 3: Sei E ein Spektralmaß auf den Borelmengen von $\mathbb{R}$ welches kompakten Träger hat, und sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall $[a, b]$ dessen Komplement eine E-Nullmenge ist. Definiere $E_\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$ als $E_\lambda := E((-\infty, \lambda])$.

Sei $\phi \in \mathrm{BM}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $\phi|_{[a,b]}$ stetig. Zeige, dass der Limes (das Riemann-Stieltjes Integral)

$$\lim_{|\mathcal{R}| \to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}\big),$$

wobei die Riemannzerlegung $\mathcal{R}$ des Intervalles $[a, b]$ die Stützstellen ξ_j und die Zwischenstellen α_j hat, bezüglich der Operatornorm existiert und gleich der (wie in der Vorlesung definierte) Operator $\int (\phi|_{[a,b]}) \, dE$ ist.
