3.1.4 Lemma Seien $p \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$. Dann gilt (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{p} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} b_i^2\right)$$

und (Minkowskische Ungleichung)

$$\left(\sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{p} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{p} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen $a := (a_1, \dots, a_p)$, $b := (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ und definieren[2]

[2] Also ist $(.,.)$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}$.

$$(a, b) := \sum_{i=1}^{p} a_i b_i.$$

Also $(.,.) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} : (a_1, \dots, a_p) \times (b_1, \dots, b_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} a_i b_i$.

Für Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^p$ setzen wir

$$\lambda a + \mu b := (\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_p + \mu b_p).$$

Ok, das ist fast so, wie Vektoraddition. Offenbar gilt für $a, b, c \in \mathbb{R}^p$

$$(\lambda a + \mu b, c) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_i + \mu b_i) c_i =$$
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda a_i c_i + \sum_{i=1}^{p} \mu b_i c_i = \lambda (a, c) + \mu (b, c).$$

Für die erste Gleichheit wird bloß die Definition angewendet. Bei der zweiten wird c_i ausmultipliziert und die Summe lässt sich aufgrund der Assoziativität aufspalten. Für die letzte Gleichheit wird abermals die Definition verwendet, wobei bei der ersten Summe $\mu = 1$ und bei der zweiten $\lambda = 1$. Man spricht von der Linearität von $(.,.)$ in der vorderen Komponente. Das ist dann wohl eine Art Distributivgesetz. Wegen $(a,b) = (b,a)$ ist $(.,.)$ auch in der hinteren Komponente linear (vgl. den Begriff des Skalarproduktes auf einen Vektorraum in der Linearen Algebra). Also $(c, \lambda a + \mu b) = (c,a)\lambda + (c,b)\mu$ und der Vergleich mit dem Skalarprodukt aus der Schulmathematik macht irgendwie Sinn.

Um die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung zu zeigen, gehen wir von der trivialen Bemerkung aus, dass für jedes p-Tupel $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$

$$(x,x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \geq 0. \qquad (3.2)$$

Erstens, in die obere Definition einsetzen; zweitens, das Quadrat $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ (zeigen durch Fallunterscheidung und $-(-x) = x$).

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$0 \leq (a + tb, a + tb) = (a,a) + 2t(a,b) + t^2(b,b).$$

Jetzt ist $x = a + tb$ und wir benutzen die Binomische Formel. Ist $(b,b) \neq 0$, so setze man $t = -\frac{(a,b)}{(b,b)}$ in obige Ungleichung ein und erhält

$$0 \leq (a,a) - \frac{(a,b)^2}{(b,b)}.$$

$(a,a) + 2\left(-\frac{(a,b)}{(b,b)}\right)(a,b) + \left(-\frac{(a,b)}{(b,b)}\right)^2(b,b) = (a,a) - 2\frac{(a,b)^2}{(b,b)} + \frac{(a,b)^2}{(b,b)^2}(b,b) = (a,a) - 2\frac{(a,b)^2}{(b,b)} + 1\frac{(a,b)^2}{(b,b)}$. Wenn $(b,b) = 0$, dann wäre $t = \frac{(a,b)^2}{0}$! Daraus folgt unmittelbar die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Aber auch nur unmittelbar: $0 \leq (a,a) - \frac{(a,b)^2}{(b,b)} \Leftrightarrow \frac{(a,b)^2}{(b,b)} \leq (a,a) \Leftrightarrow (a,b)^2 \leq (a,a)\cdot(b,b)$. Die Definition erledigt den Rest.

Im Falle $(b,b) = 0$ folgt $b = (0,\dots,0)$, und damit $(a,b) = 0$. Für die erste Implikation, nützt man die Definition von ganz oben und den Fakt, dass $\mathbb{R}$ (und $\mathbb{R}^p$?) nullteilerfrei sind, also $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. Also $b_1, \dots, b_p = 0$ und daher $a_1 b_1, \dots, a_p b_p = 0$, was zur zweiten Implikation führt. Es gilt also auch in diesem Fall die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Ah ja ... voll, da war eine Fallunterscheidung!

Die Minkowskische Ungleichung folgt wegen $(a_i + b_i)^2 = a_i \cdot (a_i + b_i) + b_i (a_i + b_i)$ aus

$$\sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{p} a_i (a_i + b_i) + \sum_{i=1}^{p} b_i (a_i + b_i) \leq$$

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot (a_i + b_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{p} b_i \cdot (a_i + b_i)\right| \leq$$

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{p} b_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} =$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{p} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{p} b_i^2\right)^{1/2}\right] \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2}.$$

Für die oberste Gleichheit braucht man bloß ausmultiplizieren und jeweils a_i und b_i herausheben. Dann setzt man in die oberste Definition ein. Danach weiß man, dass $x \leq |x|$ und benutzt Lemma 2.2.3 (v) für die erste Ungleichheit. Die nächste folgt aus der „gewurzelten" Version der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 2.2.3 (v). Dann muss man nur noch herausheben und durch $\left(\sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}$ dividieren. Ganz rechts fällt es weg und ganz links lässt sich auch als $\left(\sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}$, also fällt auch einer dieser Terme weg. Tadaaa!!! $\square$