Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 2

Übungstermin: 25.3.2020 18. März 2020

Aufgabe 6:
Sei $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$ mit $y(0) = y_0$. Programmieren Sie einen allgemeinen Löser für solche Probleme. Eingabedaten sollten die Funktion f, eine Diskretisierung des Intervalls $[0,T]$, der Startwert y_0 und das Butcher-Schema eines beliebigen, expliziten Runge-Kutta-Verfahrens sein. Ausgabedaten wären die Approximationen y_i an $y(t_i)$ aus dem zugehörigen Runge-Kutta-Verfahren. Verwenden Sie Ihr Programm, um folgendes Räuber-Beute-Modell numerisch zu lösen.

Modell: Sei $y_{\mathrm{J}}(t)$ zu jedem Zeitpunkt t die Größe einer Jäger-Population und $y_{\mathrm{B}}(t)$ die Größe einer Beutepopulation. Die Wachstumsrate der Populationen ergibt sich aus der Differenz der Geburtenrate und der Sterberate. Dabei nehmen wir an, dass für die Beutepopulation genügend Nahrung vorhanden sei, sodass die Geburtenrate $\alpha > 0$ konstant ist. Bei jedem Zusammentreffen zwischen Jäger und Beute wird mit einer ebenfalls konstanten Rate $\beta > 0$ die Beute gefressen. Die natürliche Sterberate der Beute sei im Vergleich dazu vernachlässigbar. Dann ergibt sich für die Beute-Population die Differentialgleichung

$$y'_{\mathrm{B}}(t) = \alpha y_{\mathrm{B}}(t) - \beta y_{\mathrm{J}}(t) y_{\mathrm{B}}(t). \tag{1a}$$

Für die Jäger-Population nehmen wir an, dass diese proportional mit Faktor $\gamma > 0$ zur Anzahl der Begegnungen mit der Beute wächst. Die natürliche Sterberate der Jäger $\delta > 0$ ist hier nicht vernachlässigbar. Insgesamt ergibt sich damit für die Jäger-Population

$$y'_{\mathrm{J}}(t) = \gamma y_{\mathrm{J}}(t) y_{\mathrm{B}}(t) - \delta y_{\mathrm{J}}(t). \tag{1b}$$

Zum Testen können Sie z.B. die Modellparameter $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 0.01$, $\delta = 1$, $y_{\mathrm{J}}(0) = 150$ und $y_{\mathrm{B}}(0) = 300$ verwenden. Zur Diskretisierung könnten Sie mit einer äquidistanten Zerlegung von $t \in [0, 100]$ mit $h = 0.01$ und dem den expliziten Runge-Kutta-Verfahren aus der Vorlesung (Example 2.23 und Example 2.25) starten. Variieren Sie aber Modellparameter und Diskretisierung und studieren Sie die Effekte auf die numerischen Ergebnisse.

Aufgabe 7:
Man spricht von einem autonomen Anfangswertproblem, wenn die rechte Seite der Differentialgleichung nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. wenn Y Lösung des Anfangswertproblems

$$Y'(t) = F(Y(t)), \qquad t \in J, \qquad Y(t_0) = Y_0 \tag{2}$$

ist. Jedes „normale" Anfangswertproblem

$$y = f(t, y(t)), \qquad t \in J, \qquad y(t_0) = y_0 \tag{3}$$

kann äquivalent in ein autonomes Anfangswertproblem mit $Y(t) := (t, y(t))^\top$, $Y_0 := (t_0, y_0)^\top$ und $F(x) := (1, f(x))^\top$ umgeformt werden. Ein Einschrittverfahren heisst invariant gegenüber Autonomisierung, wenn es angewendet auf (2) für beliebiges f exakt die gleichen Approximationen erzeugt wie bei Anwendung auf (3).

Zeigen Sie: Ein explizites, s-stufiges Runge-Kutte-Verfahren ist genau dann invariant gegenüber Autonomisierung, wenn gilt

$$c_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji}, \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{4}$$

Aufgabe 8:
Beweisen Sie: Ein gegen Autonomisierung invariantes, s-stufiges, explizites Runge-Kutta-Verfahren hat die Ordnung 3, wenn

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = 1, \tag{5a}$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}, \tag{5b}$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^2 = \frac{1}{3}, \tag{5c}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{j-1} b_j a_{ji} c_i = \frac{1}{6}. \tag{5d}$$

Vergleichen Sie mit Proposition 2.17 aus dem Vorlesungsskript.

Dazu folgende Hinweise: Entwickeln Sie zunächst k_j, $j = 1, \ldots, s$, mit dem Satz von Taylor. Mit den Abkürzungen aus Proposition 2.17 sollten Sie erhalten

$$k_j = f + h\left(c_j f_t + f_y \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i\right) + h^2 \left(\frac{c_j^2}{2} f_{tt} + c_j f_{yt} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i + \frac{1}{2} f_{yy} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i\right)^2\right) + \mathcal{O}(h^3). \tag{6}$$

Ersetzen Sie dann in dieser Formel die k_i durch ihre entsprechenden Entwicklungen in ausreichender Ordnung.

Nun können Sie wie in Proposition 2.17 die Ordnungsbedingungen herleiten.

Aufgabe 9:
Konstruieren Sie alle gegen Autonomisierung invarianten 3-stufigen Runge-Kutta-Verfahren maximaler Ordnung, welche die Gewichte (nicht die Stützstellen) der Simpson-Regel verwenden.

Aufgabe 10:
Berechnen Sie für das klassische Runge-Kutta-Verfahrens aus Example 2.25 eine obere Schranke für die Stabilitätskonstante C_{stab}, indem Sie die Koeffizienten μ_j aus (2.38) für dieses Beispiel explizit berechnen.