# Analysis 3 - Übung

*11. UE am 13.01.2020*


Richard Weiss    Florian Schager    Christian Sallinger    Fabian Zehetgruber
Paul Winkler    Christian Göth


**Aufgabe 89.** *Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & 0 < x < 1, \\ ax - 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ *schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwachen Ableitungen.*

*Zeigen Sie: Für* $u(\boldsymbol{x}) = \log |\boldsymbol{x}|$ *und* $\nu_i(\boldsymbol{x}) = \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^2}$ *ist* $\nu_i$ *die schwache Ableitung* $D^i u$ *in* $\mathbb{R}^n$.

*Lösung.* Widmen wir uns vorerst der Betragsfunktion $f(x) = |x|$ und erraten ihre schwache Ableitung sgn. Nachdem id sogar klassisch differenzierbar ist, so auch schwach, laut Blümlinger Proposition 6.1.3. Wir rechnen die Definition der schwachen Ableigung nach, also $\forall\, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\, d\lambda(x) &= -\int_{\mathbb{R}^-} \phi(x)\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}^+} \phi(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^-} x\phi'(x)\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}^+} x\phi'(x)\, d\lambda(x) \\ &= -\int |x|\phi'(x)\, d\lambda(x). \end{aligned}$$

Laut Blümlinger Proposition 6.1.4 gilt: Für $n = 1$ ist eine Funktion genau dann schwach differnezierbar, wenn sie f.ü. mit einer lokal absolut stetigen Funktion übereinstimmt. In diesem Fall ist die schwache Ableitung genau die f.ü. existierende lokal integrierbare Ableitung dieser lokal absolut stetigen Funktion.

$$f \text{ schwach differenzierbar} \Leftrightarrow \exists\, g \text{ lokal absolut stetig} : g = f \text{ f.ü.}$$

$$f \text{ lokal absolut stetig} :\Leftrightarrow \forall\, K \subseteq \mathbb{R}, \text{ kompakt} : f|_K \text{ absolut stetig}$$

$$\begin{aligned} g|_K \text{ absolut stetig} :\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, (]a_i, b_i[)_{i=1}^n \subseteq K^n, \text{ disjunkt} : \\ \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |g|_K(b_i) - g|_K(a_i)| < \epsilon \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass sgn nicht mehr schwach differenzierbar ist. Sei sonst $g = f$ f.ü., $\delta > 0$ beliebig und $K := [-1, 1]$. Seinen weiters $N := (-\delta/2, 0)$ und $P := (0, \delta/2)$.

Wegen $\lambda(P), \lambda(N) = \frac{\delta}{2} > 0$, sind $P$ und $N$ keine $\lambda$-Nullmengen. Die Wahl $\epsilon \leq 2$ schließt somit die absolute Stetigkeit von $g|_K$ aus, weil $\forall\, a \in N, \forall\, b \in P$ :

$$|g|_K(b) - g|_K(a)| = |\mathrm{sgn}(b) - \mathrm{sgn}(a)| = 2 \not< \epsilon.$$

Man kann ähnlich überprüfen, dass für $a \neq 2$ die andere Funktion $f$ nie $f = g$ f.ü. mit $g$ absolut stetig. Laut Blümlinger Proposition 6.1.3, erhalten wir für $a = 2$ die schwache bzw. klassische Ableitung, weil dann $f \in C(\mathbb{R})$,

$$Df = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 2x & 0 < x < 1, \\ 2 & x \geq 1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist lokal absolutstetig, daher können wir auch die zweite schwache bzw. klassische Ableitung berechnen.

$$D^2 f = 2 \cdot \mathbb{1}_{(1,2)}$$

Dafür betrachten wir $\varphi \in C_c^\infty$ beliebig, mit $T \in \mathbb{R} : \operatorname{supp} \varphi \in [-T, T]$. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \varphi'' d\lambda &= -\int_{\mathbb{R}} f' \varphi' d\lambda \\ &= -\int_0^1 2x\varphi' d\lambda - \int_1^T 2\varphi' d\lambda \\ &= -2\varphi(1) + \int_0^1 2\varphi d\lambda + 2\varphi(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(1,2)} 2\varphi d\lambda. \end{aligned}$$

Damit ist die maximale Ordnung der schwachen Ableitung zwei, da in $0, 1$ Sprungstellen existieren.

Um zuletzt zu zeigen, dass $\nu_i$ wirklich die schwache Ableitung von $u$ ist, bemerken wir, dass beide Funktionen nur auf dem offenen $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert sind. Weil $u$ auf dieser Menge stetig differenzierbar ist, stimmt die schwache Ableitung mit der klassischen überein.

$$u(\mathbf{x}) = \log(\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2})$$

$$D_i u(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \log(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{2x_i}{2\,|\mathbf{x}|} = \nu_i$$

**Aufgabe 90.** *Sind $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, so ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $D_i(uv) = D_i uv + uD_i v$*

*Lösung.* Durch die Hölder-Ungleichung und $u, v \in L^2(\Omega)$, erhält man unmittelbar, dass $\|uv\|_1 \leq \|u\|_2 \|v\|_2 < \infty$, also $uv \in L^1(\Omega)$.

Laut Blümlinger Satz 6.2.8 bzw. Meyers, Serrin, liegt der Unterraum $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, für $1 \leq p < \infty$ und $\Omega$ offen in $\mathbb{R}^n$, dicht in $W^{m,p}(\Omega)$. $u, v$ lassen sich also durch glatte Funktionen, in der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{m,p}$, approximieren.

$$\|f\|_{m,p,\Omega} = \|f\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

$$\exists\, (u_k), (v_k) \in C^\infty(\Omega) : \lim_{k \to \infty} u_k = u, \; \lim_{k \to \infty} v_k = v$$

Eine, zur Sobolevnorm $\|\cdot\|_{m,p}$, äquivalente Norm $\|\cdot\|_{m,p}^\sim$, ist, laut Blümlinger Korollar 6.2.2, gegeben durch

$$\|f\|_{m,p}^\sim := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p .$$

Weil $(u_k), (v_k)$ bezüglich der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{1,2}$ konvergieren, folgt mit der Hölder-Ungleichung auch, dass $\forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \|D_i u_k v_k \phi - D_i uv\phi\|_1 &\leq \|D_i u_k v_k \phi - D_i u_k v\phi\|_1 + \|D_i u_k v\phi - D_i uv\phi\|_1 \\ &\leq \|D_i u_k \phi(v_k - v)\|_1 + \|(D_i u_k - D_i u)v\phi\|_1 \\ &\leq \|D_i u_k \phi\|_2 \|v_k - v\|_2 + \|D_i u_k - D_i u\|_2 \|v\phi\|_2 \xrightarrow{k \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Analog erhält man auch

$$\|u_k D_i v_k \phi - uD_i v\phi\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0, \; \|u_k v_k \phi - uv\phi\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Laut Kusolitsch Satz 13.25 gilt: Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$, so konvergiert eine Folge $(f_n)$ aus $\mathcal{L}_p$ genau dann im $p$-ten Mittel, wenn $(f_n)$ im Maß gegen ein $f \in \mathcal{L}_p$ konvergiert und gilt $\lim_n \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

$$\|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} \mu(|f - f_n| > \epsilon) = 0, \; \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$$

Daher sind die folgenden Grenzwertvertauschungen gerechtfertigt, wenn man den Integranden in Positiv- und Negativ-Teil aufsplittet. Nachdem, wegen der Produktregel, $D_i(u_k v_k) = D_i u_k v_k + u_k D_i v_k$ durchaus gilt, erhält man also $\forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ :

$$
\begin{aligned}
-\int uvD_i\phi\, d\lambda^n &= \lim_{k\to\infty} -\int u_k v_k D_i\phi\, d\lambda^n \\
&= \lim_{k\to\infty}\int D_i(u_k v_k)\phi\, d\lambda^n \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\int D_i u_k v_k\phi\, d\lambda^n + \int u_k D_i v_k\phi\, d\lambda^n\right) \\
&= \int D_i uv\phi\, d\lambda^n + \int uD_i v\phi\, d\lambda^n \\
&= \int (D_i uv + uD_i v)\phi\, d\lambda^n.
\end{aligned}
$$

*Lösung.* Um zu zeigen, dass $uv \in L^1(\Omega)$ ist benötigt man nur einmal die Ungleichung von Hölder (siehe Kusolitsch Satz 13.4) um

$$
\|uv\|_1 \le \|u\|_2\,\|v\|_2 < \infty
$$

einzusehen.
Für den zweiten Teil wollen wir zuerst den Fall betrachten, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $v \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Wählen wir eine beliebige Testfunktion $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)$ so gilt auch $v\Phi \in C_c^\infty(\Omega)$ und daher auch $D_i(c\Phi) \in C_c^\infty(\Omega)$. Mit diesem Wissen und Proposition 6.2.6 aus dem Analysis 3 Skriptum vom Professor Blümlinger, das es erlaubt $D_i(v\Phi) = D_i v\Phi + vD_i\Phi$ zu schreiben, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int (D_i uv + uD_i v)\Phi \mathrm{d}\lambda &= \int (D_i uv\Phi + uD_i v\Phi)\mathrm{d}\lambda \\
&= \int (D_i uv\Phi + uD_i(v\Phi) - uvD_i\Phi)\mathrm{d}\lambda \\
&= \int D_i uv\Phi \mathrm{d}\lambda + \int uD_i(v\Phi)\mathrm{d}\lambda - \int uvD_i\Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= \int D_i uv\Phi \mathrm{d}\lambda - \int D_i uv\Phi \mathrm{d}\lambda - \int uvD_i\Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= -\int uvD_i\Phi \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
$$

Damit folgt bereits unmittelbar die gewünschte Aussage $D_i(uv) = D_i uv + uD_i v$.
Nun betrachten wir den Allgemeinen Fall, nämlich $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$. Nach dem Satz von Meyers-Serrin (siehe Analysis 3 Skriptum Blümlinger Satz 6.2.8) wissen wir, dass $W^{1,2}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt. Deshalb können wir eine Folge $(v_l)$ aus $W^{1,2}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ finden mit $lim_{l\to\infty} v_l = v$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Natürlich ist $(v_l)$ in $W^{1,2}(\Omega)$ auch eine Cauchy-Folge und daher gilt für ein beliebiges $\epsilon > 0$ und hinreichend große $m, l \in \mathbb{N}$ unter Benützung der Ungleichung von Hölder

$$
\begin{aligned}
\|uv_l - uv_m\|_1 &\le \|u\|_2\,\|v_l - v_m\|_2 \le \|u\|_{1,2}\,\|v_l - v_m\|_{1,2} < \frac{\epsilon}{n+1}, \\
\|D_i(uv_l - uv_m)\|_1 &\le \|D_i uv_l - D_i uv_m\|_1 + \|uD_i v_l - uD_i v_m\|_1 \\
&\le \|D_i u\|_2\,\|v_l - v_m\|_{1,2} + \|u\|_{1,2}\,\|v_l - v_m\|_{1,2} < \frac{\epsilon}{n+1}
\end{aligned}
$$

Damit folgt sofort

$$
\|uv_l - uv_m\|_{1,1}^{\sim} = \|uv_l - uv_m\|_1 + \sum_{i=1}^{n} \|D_i(uv_l - uv_m)\|_1 < \epsilon,
$$

also dass $uv_l$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,1}(\Omega)$ ist. Da nach Satz 6.2.3 gilt, dass $W^{1,1}(\Omega)$ ein Banachraum ist konvergiert also $uv_l \to u\tilde{v} \in W^{1,1}(\Omega)$. Da mit der Ungleichung von Hölder offensichtlich $uv_l \to uv$ in $L^1(\Omega)$ muss $u\tilde{v} = uv$ gelten. Also wissen wir jetzt, dass $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt. Genauso kann man zeigen, dass $D_i uv_l + uD_i v_l$ im Banachraum $L^1(\Omega)$ gegen $D_i uv + uD_i v$ konvergiert. Nun können wir nützen, dass für eine beliebige Testfunktion $\Phi \in C_c^\infty$ die Funktion $\zeta : W^{1,1}(\Omega) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int u\Phi \mathrm{d}\lambda$ eine stetiges lineares Funktional auf $W^{1,1}(\Omega)$ ist (vgl. Analysis 3 Skriptum Blümlinger Seite 131). Indem man einfach $|\Phi| \leq \|\Phi\|_\infty$ nützt erkennt man auch leicht, dass $\xi : L^1(\Omega) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int u\Phi \mathrm{d}\lambda$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^1(\Omega)$ ist. Damit sind die folgenden Grenzwertvertauschungen erlaubt und wir dürfen

$$\begin{aligned}
\int (D_i uv + uD_i v)\Phi \mathrm{d}\lambda &= \int \lim_{n\to\infty} (D_i uv_n + uD_i v_n)\Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int D_i(uv_n)\Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} - \int uv_n D_i \Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= - \int \lim_{n\to\infty} uv_n D_i \Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= - \int uv D_i \Phi \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

schreiben und sind fertig.

**Aufgabe 91.** *Verschwindet für eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die schwache Ableitung der Ordnung $n$, so ist $f$ ein Polynom der Ordnung $n-1$ fast überall.*

*Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Testfunktion als Summe der $n$-ten Ableitung einer Testfunktion und einer Linearkombination der Funktionen $\Psi_0^{(l)}, l < n, \Psi_0$ wie im Beweis von 6.1.4. dargestellt werden kann und berechnen Sie $\int x^k \xi^{(l)}(x)dx$ für Testfunktionen $\xi$ und $k \leq l$.*

*Lösung.* Es seinen $\Phi \in C_c^\infty$ eine beliebige Testfunktion und $m \in \mathbb{N}$. Sei $\Psi_0 \in C_c^\infty$ eine weitere Testfunktion mit $\int \Psi_0 d\lambda = 1$. Wir zeigen, dass $\exists\, \zeta \in C_c^\infty : \exists\, \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$ :

$$\Phi = \zeta^{(m)} + \sum_{l=0}^{m-1} \alpha_l \Psi_0^{(l)}.$$

Wir benützen vollständige Induktion. Für $m = 0$, ist die Aussage richtig. Es gebe eine Darstellung

$$\Phi = \theta^{(m)} + \sum_{l=0}^{m-1} \alpha_l \Psi_0^{(l)},\ \theta \in C_c^\infty.$$

Laut dem Beweis von Blümlinger Satz 6.1.4, ist folgendes $\eta \in C_c^\infty$ eine Testfunktion mit

$$\eta := \theta - \int \theta d\lambda \Psi_0,\ \int \eta d\lambda = 0.$$

Deren Stammfunktion $\zeta \in C_c^\infty$ ist auch eine Testfunktion.

$$\zeta : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \eta d\lambda$$

Wegen $\zeta' = \eta$ und der Definition von $\eta$ erhalten wir

$$\theta = \zeta' + \int \theta d\lambda \Psi_0.$$

Mit $\alpha_m := \int \theta d\lambda$ erhalten wir durch die Induktionsvoraussetzung

$$\Phi = \theta^{(m)} + \sum_{l=0}^{m-1} \alpha_l \Psi_0^{(l)} = \zeta^{(m+1)} + \sum_{l=0}^{m} \alpha_l \Psi_0^{(l)}.$$

Nun können wir uns der eigentlichen Aufgabe widmen. Dafür definieren wir ein Polynom

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j x^j$$

Um $f = p$ zu zeigen, genügt es, laut Blümlinger Lemma 6.1.1 bzw. dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, wenn $\exists\, \beta_0, \ldots, \beta_{n-1} : \forall\, \Phi \in C_c^\infty$ :

$$\int (f - p) \Phi d\lambda = 0. \tag{1}$$

Da für $i > j$ und eine beliebige Testfunktion $\xi \in C_c^\infty$ aufgrund n-facher partieller Integration

$$\int x^j \xi^{(i)}(x) d\lambda(x) = 0.$$

und

$$\int f \xi^{(n)}(x) d\lambda(x) = 0.$$

gilt, erhalten wir:

$$\int (f - p) \Phi d\lambda = \underbrace{\int (f - p) \zeta^{(n)} d\lambda}_{0} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\int (f - p) \Psi_0^{(i)} d\lambda}_{0} \overset{!}{=} 0$$

Der erste Summand Verschwindet wegen obiger Überlegung. Damit das auch für die anderen gilt, muss

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \int f \Psi_0^{(i)} d\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \int p \Psi_0^{(i)} d\lambda.$$

Summandenweise heißt das $\forall\, i = 0, \ldots, n-1$ :

$$\underbrace{\int f \Psi_0^{(i)} d\lambda}_{=: b_i} = \int p \Psi_0^{(i)} d\lambda = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \underbrace{\int x^j \Psi_0^{(i)}(x) d\lambda(x)}_{=: a_{ij}}.$$

Dies führt uns auf das lösbare Gleichungssystem $A\beta = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0,n-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist die Matrix $A$ regulär, da $\forall\, i = 0, \ldots, n-1$ :

$$a_{ii} = (-1)^i i! \int \Psi_0 d\lambda(x) = (-1)^i i!$$

**Aufgabe 92.** *Zeigen Sie, dass aus der Existenz der schwachen Ableitung der Ordnung 2 im Allgemeinen für $n \geq 2$ nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1 folgt.*

*Hinweis: Betrachten Sie eine Funktion $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.*

*Zeigen Sie, dass für $n = 1$ aus der Existenz einer schwachen $k$-ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen $l$-ter Ordnung für $l < k$ folgt.*

*Lösung.* Trivial!

**Aufgabe 93.** *Zeigen Sie, dass $f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ genau dann in $W^{m,p}(\Omega)$ liegt, wenn die Abbildungen $\kappa : \varphi \mapsto \int_\Omega f D^\alpha \varphi d\lambda^n$ für $|\alpha| \leq m$ stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der $L^q$-Norm nach $\mathbb{R}$ ist.*

*Hinweis: Verwenden Sie, dass der Dualraum von $L^p$ der $L^q$ ist, das heißt jede beschränkte lineare Abbildung von einem dichten Teilraum des $L^p$ nach $\mathbb{C}$ ist von der Form $\varphi \mapsto \int \varphi g$ mit $g \in L^q$.*

*Lösung.* Beginnen wir mit $\Rightarrow$ : Dazu verwenden wir die Hölder-Ungleichung und erhalten:

$$\left| \int_\Omega f D^\alpha \varphi d\lambda^n \right| = \left| \int_\Omega D^\alpha f \varphi d\lambda^n \right| \leq \int_\Omega |D^\alpha f|\, |\varphi|\, d\lambda^n \leq \|D^\alpha f\|_p \, \|\varphi\|_q$$

Somit ist die Abbildung in der $q$-Norm stetig.
Um nun $\Leftarrow$ zu zeigen, definieren wir für $g \in L^q$ und $\varphi_n \in C_c^\infty$:

$$\xi(g) = \lim_{n\to\infty} \kappa(\varphi_n)$$

Wobei $g = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$. Das ist möglich da laut Satz 2.5.1 $C_c^\infty$ dicht in $L^q$ liegt. (Dieser Grenzwert ist als GW in der $\|\cdot\|_q$ zu verstehen.)
Aus der Stetigkeit von $\kappa$ und der Tatsache, dass $\varphi_n$ eine Cauchyfolge ist, folgt, dass auch $\kappa(\varphi_n)$ eine CF-Folge ist und somit konvergent. Dass dieser GW eindeutig ist, folgt direkt aus der Linearität von $\kappa$. Somit ist die Abbildung $\xi$ wohldefiniert.

Da $\xi$ eine Verkettung zweier Linearer Abbildungen ist (Linearität des Limes nach Bibel Kapitel 9), ist auch $\xi$ linear. Ebenfalls in dem Kapitel ist erwähnt, dass aus der Stetigkeit von $\kappa$ auch die Beschränktheit (im Sinne der Abbildungsnorm) folgt. Somit ist auch $\xi$ beschränkt, da der Grenzübergang die Ungleichung erhält.

Nach dem Hinweis (Darstellungssatz von Riesz) gibt es nun zu $(-1)^{|\alpha|}\xi$ eine Funktion $h \in L^p$, sodass

$$\forall g \in L^q : (-1)^{|\alpha|}\xi(g) = \int_\Omega hg d\lambda^n$$

Da erst recht alle Testfunktionen in $L^q$ liegen und für diese auch $\xi(\varphi) = \kappa(\varphi)$ gilt, haben wir also:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty : (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi d\lambda^n = \int_\Omega h \varphi d\lambda^n$$

Somit ist $h$ die schwache Ableitung zu $f$ und $f \in W^{m,p}(\Omega)$.

*Lösung.* "$\Rightarrow$": Durch die Hölder-Ungleichung erhält man $\forall \varphi, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ :

$$|\kappa(\varphi) - \kappa(\phi)| = \left| \int D^\alpha f \varphi d\lambda^n - \int D^\alpha f \phi d\lambda^n \right| \leq \|D^\alpha f(\varphi - \phi)\|_1 \leq \|D^\alpha f\|_p \|\varphi - \phi\|_q ,$$

und damit die Stetigkeit von $\kappa$ in der $\|\cdot\|_q$.

"$\Leftarrow$": Laut Blümlinger Satz 2.5.1, liegt $C_c^\infty$ dicht in $L^q$. Weil $\kappa$ linear und stetig ist, so auch beschränkt im Sinne der Abbildungsnorm. Laut Hinweis bzw. dem Darstellungssatz von Riesz, folgt dass $\forall |\alpha| \leq m : \exists g \in L^p : \forall \varphi \in C_c^\infty$ :

$$\int g\varphi \, d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|}\kappa(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int f D^\alpha \varphi \, d\lambda^n.$$

Daher ist $g$ die f.ü. eindeutige schwache Ableitung von $f \in W^{m,p}(\Omega)$.

**Aufgabe 94.** *Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge $E$ von $\mathbb{R}^n$, wenn $x$ Lebesguepunkt der Funktion $\mathbb{1}_{E \cup \{x\}}$ ist.*

*Zeigen Sie: Ist jeder Punkt $x \in [0,1]^n$ ein Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge $E$ von $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^n(E) \geq 1$.*

*Gibt es eine messbare Teilmenge $E$ von $\mathbb{R}$, für die $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ die Menge der Dichtepunkte von $E$ ist?*

*Lösung.* Laut Blümlinger Satz 6.3.6 bzw. dem Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue gilt, dass $\lambda^n$-f.a. Punkte aus $E$ Dichtepunkte von $E$ sind und $\lambda^n$-f.a. Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus E$ erfüllen

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\lambda^n(E \cap B(x,r))}{r^n \omega_n} = 0.$$

$\omega_n$ sei das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel. Angenommen,

$$\lambda^n([0,1]^n \setminus E) > 0.$$

Laut Blümlinger Lemma 6.3.5, sieht man (hoffentlich) ein, dass

$$\lambda^n(E \cap [0,1]^n) > 0.$$

Setze für beliebiges $r > 0$

$$d_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\lambda^n(E \cap B(x,r))}{r^n \omega_n}.$$

Damit $\exists \, y_1 \in [0,1]^n \setminus E$ :

$$\lim_{r \searrow 0} d_r(y_1) = 0$$

Ebenso $\exists\, z_1 \in [0,1]^n \cap E$ :

$$\lim_{r \searrow 0} d_r(z_1) = 1$$

Daher $\exists\, r_1 > 0$ :

$$B(y_1, r_1) \subseteq [0,1]^n,\ B(z_1, r_1) \subseteq [0,1]^n.\ d_{r_1}(y_1) < \frac{1}{4},\ d_{r_1}(z_1) > \frac{3}{4}.$$

Jetzt definieren wir eine Funktion.

$$f_{r_1} : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto d_{r_1}(y_1(1-t) + z_1 t)$$

Diese Funktion $f_{r_1}$ ist stetig, weshalb es nach dem Zwischenwertsatz und der Konvexität von $[0,1]^n$, gilt $\exists\, x_1 \in [0,1]^n$ :

$$d_{r_1}(x_1) = \frac{1}{2},\ B(x_1, r_1) \subseteq [0,1]^n.$$

Nehmen wir nun an wir haben für $l \in \mathbb{N}$

$$x_l \in [0,1]^n, r_l \in \mathbb{R}^+ : B(x_l, r_l) \subseteq [0,1]^n,\ d_{r_l}(x_l) = \frac{1}{2}.$$

Laut Definition, erhalten wir

$$\lambda^n(E \cap B(x_l, r_l)) = \frac{r_l^n \omega_n}{2} > 0,$$

sowie

$$\lambda^n(B(x_l, r_l) \setminus E) = \lambda^n(B(x_l, r_l)) - \lambda^n(E \cap B(x_l, r_l)) = r_l^n \omega_n - \frac{r_l^n \omega_n}{2} = \frac{r_l^n \omega_n}{2} > 0.$$

Wie davor, wählen wir $y_{l+1} \in B(x_l, r_l) \setminus E$ und $z_{l+1} \in B(x_l, r_l) \in B(x_l, r_l) \cap B$ und ein hinreichend kleines $r_{l+1} \in \mathbb{R}^+$ :

$$d_{r_{l+1}}(y_1) < \frac{1}{4},\ d_{r_{l+1}}(z_1) > \frac{3}{4},\ r_{l+1} < \frac{r_l}{2}.$$

Nun definieren wir wieder eine (hoffentlich) stetige Funktion.

$$f_{r_{l+1}} : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto d_{r_{l+1}}(y_l(1-t) + z_l t)$$

Wegen dem Zwischenwertsatz und der Konvexität von $B(x_l, r_l)$, $\exists\, x_{l+1} \in B(x_l, r_l)$ :

$$d_{r_{l+1}}(x_{l+1}) = \frac{1}{2}.$$

Sei $r_{l+1}$ so klein, dass $B(x_{l+1}, r_{l+1}) \subseteq B(x_l, r_l)$. Nun haben wir zwei Folgen $(r_k)$ und $(x_k)$ definiert mit $r_k \to 0$ und

$$\{\tilde{x}\} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \overline{B(x_l, r_l)} \Rightarrow x_k \to \tilde{x} \in [0,1]^n.$$

Da $(\tilde{x})$ ein Dichtepunkt von $E$ ist wissen wir

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda^n(B(\tilde{x}, 2r_k) \cap (E \cup \tilde{x}))}{2^n r_k^n \omega_n} &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda^n(B(\tilde{x}, 2r_k)) + \lambda^n(B(x_k, 2r_k) \cap E)}{2^n r_k^n \omega_n} \\ = \lim_{k\to\infty} \frac{2^n r_k^n \omega_n + \frac{2^n r_k^n \omega_n}{2}}{2^n r_k^n \omega_n} &= \lim_{k\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} < 1. \end{aligned}$$

Nun haben wir den Widerspruch und daher $\lambda^n([0,1]^n \setminus E) = 0$, also

$$\lambda^n(E) \geq \lambda^n(E \cap [0,1]^n) = \lambda^n([0,1]^n) - \lambda^n([0,1]^n \setminus E) = 1.$$

**Aufgabe 95.** *Ist $X$ ein Fixpunktraum und $Y$ ein Retrakt von $X$, so ist $Y$ ein Fixpunktraum.*

*Lösung.* Dass $X$ **Fixpunktraum** ist heißt, $X$ ist ein topologischer Raum, auf dem jede stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt.

$$X \text{ topologischer Raum} : \forall\, T_X \in C(X,X) : \exists\, x \in X : T_X(x) = x$$

Eine Teilmenge $Y$ eines topologischen Raumes $X$ heißt **Retrakt**, wenn es eine stetige Abbildung (**Retraktion**) $R$ von $X$ auf $Y$ mit $R|_Y = \mathrm{id}_Y$ gibt.

$$Y \subseteq X, \exists\, R \in C(X,Y) : R|_Y = \mathrm{id}_Y$$

Sei $R$ die besagte Retraktion und $T_Y \in C(Y,Y)$ beliebig. Die wohldefinierte Komposition dieser stetigen Funktionen, ist stetig.

$$T_X := T_Y \circ R \in C(X,Y) \subseteq C(X,X).$$

Nun besitzt $T_X$ also laut Voraussetzung einen Fixpunkt, also $\exists\, x \in X$ :

$$T_Y(R(x)) = T_X(x) = x.$$

Weil $T_X(Y) \subseteq Y$, muss $x \in Y$. Wegen $R|_Y = \mathrm{id}_Y$, gilt $x = R|_Y(x) = R(x) =: y$. Zuletzt, erhält man $T_Y(y) = y$, also einen Fixpunkt $y$ von $T_Y$.

**Aufgabe 96.** *Zeigen Sie (Satz von Perron-Frobenius): Jede $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} \geq 0$ für $1 \leq i,j \leq n$ hat einen Eigenwert $\lambda \geq 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$.*

*Hinw.: Betrachten Sie die Abbildung $\zeta : x \to \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax$ auf dem Simplex $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.*

*Lösung.* $\zeta$ ist tatsächlich eine Selbstabbildung in $(\Delta, \|\cdot\|_1)$, weil $\forall\, x \in \Delta$ :

$$\begin{aligned} A, x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0 \Rightarrow \zeta(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^n \langle e_i, \zeta(x) \rangle = \|\zeta(x)\|_1 = \left\| \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \right\|_1 = 1. \end{aligned}$$

Nachdem $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\|\cdot\|_1 \in C(\mathbb{R}^n)$, muss $\zeta \in C(\Delta, \Delta)$ ebenfalls stetig sein. Laut Blümlinger Satz 7.2.7 bzw. dem Fixpunktsatz von Brouwer, ist unsere (offensichtlich) kompakt und konvexe Menge $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Fixpunktraum, und $\zeta$ besitzt einen Fixpunkt $\exists\, x \in \Delta$ :

$$x = \zeta(x) = \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax \Leftrightarrow \lambda x = Ax,$$

wobei $\lambda := \|Ax\|_1 \geq 0$ und $x \geq 0$.

**Aufgabe 97.** *Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 &= x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{4} &= x_2 \end{aligned}$$

*eine Lösung besitzt.*

*Lösung.* $[-1,1]^2 \in \mathbb{R}^2$!!! Es ist kompakt, es ist konvex, es ist ein ... (laut Brouwer) ... ein Fixpunktraum! $T$ besitzt darin einen Fixpunkt.

$$T : \begin{cases} [-1,1]^2 & \to [-1,1]^2 \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Lieblingsfrage: "Wieso existiert das $T$?"
Antwort: Dreiecksungleichung, d.h. $\forall\, x \in [-1,1]^2$ :

$$\begin{aligned} |\langle e_1, T(x)\rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \leq 1, \\ |\langle e_2, T(x)\rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq 1. \end{aligned}$$

**Aufgabe 98.** *Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung $u$ der Gleichung*

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x)$$

*in $C[-1,1]$ gibt.*

*Lösung.* Betrachte die, auf dem vollständigen metrischen Raum $(C[-1,1], d_\infty)$ lebende, Selbstabbildung

$$T : u \mapsto \left( x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x) \right).$$

Da $\sin' = \cos$, erhalten wir aus dem MWS der Differentialrechnung, dass $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \exists\, \xi \in [-1,1]$ :

$$\left| \frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b} \right| = |\cos(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

Damit gilt $\forall\, u, v \in C[-1,1]$ :

$$
\begin{aligned}
d_\infty(T(u), T(v)) &= \sup_{x\in[-1,1]} \left| \left( x + \frac{1}{2}\sin(u(x)+x) \right) - \left( x + \frac{1}{2}\sin(v(x)+x) \right) \right| \\
&= \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} |\sin(u(x)+x) - \sin(v(x)+x)| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} |u(x)+x-(v(x)+x)| \\
&= \frac{1}{2} d_\infty(u,v).
\end{aligned}
$$

Somit ist die Selbstabbildung $T$ eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raumes $(C[-1,1], d_\infty)$ mit Kontraktionsfaktor $\kappa := \frac{1}{2} < 1$. Es existiert also, laut Blümlinger Satz 7.1.1 bzw. dem Banach'schen Fixpunktsatz, eine eindeutige Lösung.