2.1.5 Lemma. Für einen Körper $\langle K, +, \cdot \rangle$ gelten folgende Rechenregeln:

(i) Die Inverse von der Inversen ist die Zahl selbst:

$-(-x) = x$ für $x \in K$ und $(x^{-1})^{-1} = x$ für $x \in K \setminus \{0\}$.

(ii) $-(x+y) = (-x) + (-y)$ für $x, y \in K$.

(iii) $x \cdot 0 = 0$, aus $x, y \neq 0$ folgt $x \cdot y \neq 0$, $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, sowie $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$. Insbesondere gilt $(-1)(-1) = 1$.

(iv) $x(-y) = -xy$, $(-x)(-y) = xy$, $x(y-z) = xy - xz$.

(v) $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Beweis. Exemplarisch wollen wir $x \cdot 0 = 0$ und $-(x+y) = (-x) + (-y)$ nachweisen. Also (iii) und (ii).

Wegen (a2) gilt $0 + 0 = 0$ und mit (d) damit auch $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$. (a2) bedeutet: „0 ist ein neutrales Element bezüglich $+$: $x + 0 = 0$ für alle $x \in K$." In dem Fall gilt $x := 0$. (d) bedeutet: „Es gilt das Distributivgesetz: $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ für alle $x, y, z \in K$." In dem Fall gilt $y = z := 0$. Addieren wir nach (a3) existierende additiv Inverse von $x \cdot 0$, so folgt mit Hilfe von (a1), dass

$$0 = x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$$

(a3) bedeutet: „Jedes Element $x \in K$ besitzt ein Inverses $-x \in K$ bezüglich $+$: $x + (-x) = 0$." In dem Fall gilt $-x := -x \cdot 0$. (a1) bedeutet: „Die Addition ist assoziativ: $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x, y, z \in K$." In dem Fall gilt

$x = y := x \cdot 0$ und $z := -x \cdot 0$. Bei der zweiten Gleichheit wird das oben bewiesene $x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$ benützt. Die letzte Gleichheit benützt (a2), wobei IdFg. $x := x \cdot 0$.

Wegen dem Kommutativgesetz und Assoziativgesetz gilt

$$(x+y) + ((-x) + (-y)) = ((x+y) + (-x)) + (-y) =$$
$$((y+x) + (-x)) + (-y) = (y + (x + (-x))) + (-y) =$$
$$((y+0) + (-y)) = y + (-y) = 0.$$

Zuerst wird umgeklammert, dann wird $x+y = y+x$ benützt, dann wird nochmal umgeklammert, dann wirt $x + (-x) = 0$ benützt (und eine Klammer-Schale zu viel gelassen), dann wird (a2) benützt, wobei IdFg. $x := y$, dann wird abermals (a3) benützt, wobei IdFg. $x := y$. Also ist $(-x) + (-y)$ eine additive Inverse von $x+y$. (a3). Wegen Bemerkung 2.1.3 ist diese additiv Inverse aber eindeutig. „$\tilde{a} = \tilde{a} + (a + (-a)) = (\tilde{a} + a) + (-a) = 0 + (-a) = -a$." Also $(-x) + (-y) = -(x+y)$. $\square$