Satz 1.11.6 Sei $\varphi : G \to G'$ ein Homomorphismus.

(a) Der Kern von φ ist eine Untergruppe von G.

(b) Zwei Elemente $a, b \in G$ haben genau dann dasselbe Bild unter φ, falls mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$ab^{-1} \in \ker\varphi$, $ba^{-1} \in \ker\varphi$, $a^{-1}b \in \ker\varphi$, $b^{-1}a \in \ker\varphi$.

(c) Genau für $\ker\varphi = \{e\}$ ist φ injektiv.

Beweis. Laut 1.11.4 gilt (und wird in Übungsaufgaben bewiesen)

$$\varphi(e) = e' \tag{1.5}$$
$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \text{ für alle } a \in G. \tag{1.6}$$

(a) Aus (1.5) folgt $e \in \ker\varphi \neq \emptyset$. ... Weiters gilt für alle $x, y \in \ker\varphi$, wegen

$$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(y^{-1}) \overset{(1.6)}{=} \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1} = e'e'^{-1} = e'e' = e';$$

dann $xy^{-1} \in \ker\varphi$; es erfüllt also $\ker\varphi$ das Untergruppenkriterium 1.9.9. ...

(b) Es ist $\varphi(a) = \varphi(b)$ äquivalent zu

$$e' = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} = \varphi(ab^{-1})$$

also $ab^{-1} \in \ker\varphi$. ... laut Definition von $\ker\varphi$. Die Gleichwertigkeit der restlichen Bedingungen kann analog nachgewiesen werden. ... durch hinschauen.

(c) Nach (b) ist $\ker \varphi = \{e\}$ für die Injektivität von φ kennzeichnend.

Angenommen, $\varphi(a) = \varphi(b)$, so gilt

$$e' = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} = \varphi(ab^{-1}) \overset{(*)}{\Rightarrow} ab^{-1} = e \Rightarrow a = b,$$

wobei (*) laut Voraussetzung gilt.

Angenommen, φ ist injektiv, also $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Setze $a = e$ und nutze (1.5). $\square$