71. Zeigen Sie, dass man im Abel'schen Konvergenzkriterium monoton und beschränkt nicht durch konvergent ersetzen darf.

3.10.9 Korollar (Abelsches Konvergenzkriterium*). Sei die reell- oder komplexwertige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone und beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent.

Beweis: Wir widerlegen die obere Aussage mit einem Gegenbeispiel. Seien

$$a_k = b_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left((-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^2)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

die harmonische Reihe (also nicht konvergent), obwohl $a_k = b_k \to 0$. $\square$

72. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{3n}$$

auf Konvergenz.

Diese Reihe ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Beweis: Angenommen, die Reihe konvergiert. Dann konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},$$

aber die harmonische Reihe divergiert $\lightning$. $\square$

73. Zeigen Sie: Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.

Beweis: Weil die erste Reihe konvergiert, muss, laut Proposition 3.9.7, $a_n z_0^n$ eine NF sein. Ergo, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$: $a_n z_0^n < 1$. Weiters

$$|a_n z^n| \cdot \left|\frac{z_0}{z_0}\right|^n = |a_n z_0^n| \cdot \frac{|z|^n}{|z_0|^n} < \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Weil $|z| < |z_0| \Leftrightarrow \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < 1$, ist, laut Wurzelkriterium, $\sum_{n=1}^{\infty} |z/z_0|^n$ eine absolut konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n|$.

Merke, dass fast alle $n \geq N$ und $n < N$ nichts am Konvergenzverhalten der oberen Reihe ändern. $\square$

74. Für welche $\alpha > 0$ konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \right) ?$$

Hinw.: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$

Die Reihe konvergiert für alle $\alpha > 0$.

Beweis: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \right) \overset{\text{Hinw.}}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot$$

$$\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \overset{\text{Hinw.}}{\leq} e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}. \qquad \square$$

75. 3.47 Man zeige, dass $(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}), d)$ ein vollständig metrischer Raum ist!

Hinweis: Ist $((z_n^k)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $(z_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Warum?. Man zeige für $z_n := \lim_{k\to\infty} z_n^k$ die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ liegt und dass $\lim_{k\to\infty}(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. d.

Man ersetze im Hinweis z_n^k durch $z_n^{(k)}$, d.h. k bezeichnet nicht die k-te Potenz sondern einen zweiten Index.

$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ ist „die Menge aller Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $\sum_{n=1}^\infty |z_n|^2$ konvergiert. ... $d((z_n),(w_n)) := (\sum_{n=1}^\infty |z_n - w_n|^2)^{1/2}$."

Beweis: Wenn $((z_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, dann

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+ \exists K\in\mathbb{N} : \forall k,l \geq K : \left(\sum_{n=1}^\infty |z_n^{(k)} - z_n^{(l)}|^2\right)^{1/2} < \varepsilon .$$

Für ein festes $k\in\mathbb{N}$, ist $(z_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge, weil

$$|z_n^{(k)} - z_n^{(l)}|^2 < \sum_{n=1}^\infty |z_n^{(k)} - z_n^{(l)}|^2 \Rightarrow |z_n^{(k)} - z_n^{(l)}| < \left(\sum_{n=1}^\infty |z_n^{(k)} - z_n^{(l)}|\right)^{1/2}.$$

Sei nun $z_n := \lim_{k\to\infty} z_n^{(k)}$. Damit $z_n \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$, muss $\sum_{n=1}^\infty |z_n|^2$ konvergieren. Wir wissen, dass

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |z_n^{(k)} - z_n|^2\right)^{1/2} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon\cdot\varepsilon > \sum_{n=1}^\infty |(z_n^{(k)} - z_n)^2| =$$

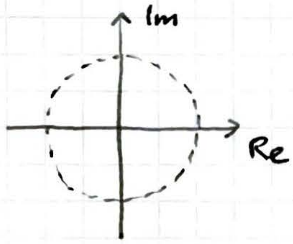
$$\sum_{n=1}^\infty |(z_n^{(k)})^2 - 2 z_n^{(k)} z_n + (z_n)^2| \geq \sum_{n=1}^\infty |(z_n)^2 - 2 z_n^{(k)} z_n| \geq$$

$$\left|\sum_{n=1}^\infty |z_n|^2 - 2\sum_{n=1}^\infty z_n^{(k)} z_n\right| < \varepsilon\cdot\varepsilon$$

? ? ?

76. 5.2 Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte sowie den Abschluss von $U_1(0)$ und von $(\mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}) \cap U_1(0)$ in dem metrischen Raum $\langle \mathbb{C}, d_2 \rangle$, wobei $U_1(0)$ die offene Einheitskugel bezüglich d_2 ist.

$K_1(0)$ ist die Menge aller Häufungspunkte, sowie der Abschluss von $U_1(0)$ und $U_1(0) \cap (\mathbb{Q}^+ i\,\mathbb{Q})$.



Für einen Häufungspunkt von $E \subseteq X$ im metrischen Raum $\langle X, d \rangle$ muss folgendes gelten:

$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, oder
$\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in E, x \neq y : d(x,y) < \varepsilon$.

Der Abschluss von E besteht aus E, vereinigt mit der Menge aller HP von E.

Beweis: In dem Fall gilt $U_1(0) \subseteq \mathbb{C}$. Wir wissen, dass
$\forall z \in U_1(0) : d_2(z, 0) < 1 \Leftrightarrow \forall z \in U_1(0) : |z| < 1$.

Wir zeigen vorerst, dass $\forall z \in K_1(0)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z_0 \in U_1(0)$, $z \neq z_0 : d_2(z, z_0) < \varepsilon$. (oBdA. seien $z \neq 0$ und ε hinreichend klein)
Wir wählen dazu $z_0 := z - \frac{z}{|z|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Klarerweise gilt
$\left| z - \frac{z}{|z|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right| = |z| \cdot \left| 1 - \frac{1}{|z|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{|z|}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, also

$$d_2(z, z_0) = \left| z - \left(z - \frac{z}{|z|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right) \right| = \left| \frac{z}{|z|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Wir wissen also, dass $\forall z \in K_1(0) : z$ ist HP von $U_1(0)$.

Um zu zeigen, dass $\forall z \notin K_1(0)$: z ist kein HP von $U_1(0)$ gilt, setzen wir voraus, dass $z \notin K_1(0)$.
Setze $\delta := |z| - 1$, also $\delta > 0$, weil nun $|z| > 1$ gelten muss, und $\varepsilon :< \delta$.
Angenommen, z ist ein HP von $U_1(0)$, dann müsste laut ersterer Definition gelten, dass $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(z) \cap (U_1(0) \setminus \{z\}) \neq \emptyset$, also $\exists z_0: z_0 \in U_\varepsilon(z) \cap U_1(0)$.
Dann müsste $d(z_0, 0) < 1 \wedge d(z_0, z) < \varepsilon$.
Weil $\delta = |z| - 1 \Rightarrow d(z, 0) = |z| = 1 + \delta$. Aber

$$1 + \delta = d(z, 0) \leq \underbrace{d(z, z_0)}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(z_0, 0)}_{< 1} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \delta < \varepsilon.$$

Da nun $U_1(0) \subseteq K_1(0)$, folgt, dass $K_1(0) = c(U_1(0))$.

Betrachten wir nun $U_1(0) \cap \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Normalerweise gilt $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, und $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet. Also müss es nach Satz 2.8.3 für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{Q}$ geben mit $x < p < y$.

Analog zu vorher findet man also nicht nur ein z_0 aus $U_1(0)$ zu jedem $z \in K_1(0)$, sodass $d(z, z_0) < \varepsilon$ beliebig. Sondern auch ein $z_1 := a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, sodass $|\mathrm{Re}\, z_0| \leq a \leq |\mathrm{Re}\, z| \wedge |\mathrm{Im}\, z_0| \leq b \leq |\mathrm{Im}\, z|$. $\square$

77. 5.8 Man zeige anhand eines Beispiels in $\mathbb{R}$, dass der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Teilmengen nicht mehr offen sein muss.

Weiters gebe man ein Beispiel einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die nur aus isolierten Punkten besteht, aber nicht abgeschlossen ist.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ist nicht offen.

Eine Teilmenge O von X heißt offen, wenn es zu jedem Punkt $x \in O$ eine ε-Kugel mit $U_\varepsilon(x) \subseteq O$ gibt.

Beweis: Dass $\forall n \in \mathbb{N} : \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ offen ist sieht man anhand Beispiel 5.1.5 (i).

Weiters muss

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

gelten. Wenn $\exists x \neq 0 : x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, dann gilt, $\forall n \in \mathbb{N} : -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{x} > n$. $\mathbb{N}$ ist aber unbeschränkt.

Um zu zeigen, dass $\{0\}$ nicht offen ist, zeigen wir $\exists x \in \{0\} : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \nsubseteq \{0\}$. Dabei wählen wir natürlich $x = 0$ und zeigen $U_\varepsilon(0) \nsubseteq \{0\}, \forall \varepsilon > 0$. Nun gilt aber $U_\varepsilon(0) = \{y \in \mathbb{R} : |y| < \varepsilon\}$, weil $|y| = d(0, y)$. Nach Satz 2.8.3 wissen wir, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists y \in \mathbb{Q} : 0 < y < \varepsilon$, aber $y \notin \{0\}$. $\square$

Die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ besteht aus isolierten Punkten und ist nicht abgeschlossen.

Wir sagen eine Menge $A \subseteq X$ ist abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A schon in A enthalten ist.

Beweis: 0 ist ein HP von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, da $\forall \varepsilon > 0 :$ $\exists n \in \mathbb{N} : d(1/n, 0) < \varepsilon$, also $1/n < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon$.

Kein $x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein HP der Menge. Wähle dazu $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. $\exists \varepsilon > 0 : d(1/n, 1/m) \geq \varepsilon$, weil $0 < d(1/n, 1/m)$. Wendet man wieder Satz 2.8.3 an, so findet man ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, sodass $0 < \varepsilon < d(1/n, 1/m)$. $\square$

78. 5.11 Sind folgende Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt? Warum?

(i) $M = \{z : -\mathrm{Re}(z) + 1 \in (-1, 3)\}$, als Teilmenge von $\mathbb{C}$,

(ii) $M = \{x : x^2 - 3x + 2 > 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

(iii) $M = \{z : z^2 - z - 2 \neq 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{C}$,

(iv) $M = \{x : x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

$M = \{z : -\mathrm{Re}(z) + 1 \in (-1, 3)\}$ ist offen und unbeschränkt.

Beweis: $M = \{z : -1 < -\mathrm{Re}\, z + 1 < 3\} = \{z : -2 < \mathrm{Re}\, z < 2\}$.
Setze

$$\varepsilon := \left| \min\left(\frac{(-2) + \mathrm{Re}\, z}{2}, \frac{\mathrm{Re}\, z + 2}{2} \right) \right|,$$

dann gilt $\forall z \in M : U_\varepsilon(z) \subseteq M$.
Da $\mathrm{Im}\, z$ beliebig groß/klein werden kann, ist M nicht beschränkt. $\square$

$M = \{x : x^2 - 3x + 2 > 0\}$ ist offen und unbeschränkt.

Beweis: $M = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ laut Übungsbeispiel 2.36. Wähle

$$x \in (-\infty, 1) \Rightarrow \varepsilon := \left| \frac{x+1}{2} \right|,$$
$$x \in (2, +\infty) \Rightarrow \varepsilon := \frac{2+x}{2},$$

Laut Proposition 5.1.6, ist die Vereinigung von offenen Mengen offen.
M ist trivialerweise unbeschränkt. $\square$

$M = \{z : z^2 - z - 2 \neq 0\}$ ist offen und unbeschränkt.

Beweis: Betrachte $M^c = \{z : z^2 - z - 2 = 0\}$ und setze $z := a + bi$. Dann folgt

$$z^2 - z - 2 = (a+bi)^2 + (a+bi) - 2 = (a^2 - b^2 - a - 2) + (2a-1)bi = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 - a - 2 = 0 = (2a-1)bi$$

Für den Imaginärteil erkennt man sofort $a = 1/2 \vee b = 0$. Setzt man $b = 0$ in den Realteil ein, so folgt

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \{-1, 2\},$$

aber für $a = 1/2$ gibt es keine reelle Lösung. Daher schließen wir $a = 1/2$ aus und wissen, dass $b = 0$. Mit $a \in \{-1, 2\}$ gibt uns das

$$M^c = \{-1, 2\},$$

was eine abgeschlossene (aus isolierten Punkten bestehende) Menge ist. Ihr Kompliment M ist, laut Proposition 5.1.14, allerdings offen.
M ist trivialerweise unbeschränkt.

$M = \{x : x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ ist geschlossen und beschränkt.

Beweis: $\{x : x^2 - 3x + 2 > 0\} = M^c$ ist offen, also ist M, laut Proposition 5.1.14, geschlossen.
Weil $M = [-1, 2]$, ist sie (wiedermal) trivialerweise beschränkt. $\square$

79. 5.24 Zeigen Sie: Hat eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ mindestens ein maximales Element, also gibt es ein $j \in I$ mit $j \succeq i$ für alle $i \in I$, so konvergiert ein Netz genau dann, wenn $x_j = x_k$ für alle maximalen $j, k \in I$, und zwar gegen x_j, wobei $j \in I$ ein solches maximales Element ist.

Führen sie aus, warum I mindestens ein maximale's Element hat, wenn I endlich ist.

Beweis: „⇒": Ein Netz konvergiert genau dann, wenn
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists i_0 \in I : d(x_i, x) < \varepsilon, \; \forall i \succeq i_0.$
Seien $j, k \in I$ maximal und $x_i \to x$. Weil $j, k \succeq i_0$, ist $d(x_j, x), d(x_k, x) < \varepsilon/2$. Weiters ist

$$0 \leq d(x_j, x_k) \leq d(x_j, x) + d(x, x_k) < \varepsilon.$$

Weil ε beliebig klein werden kann, muss $x_j = x_k$.
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \text{ maximal} : d(x_i, x_j) = 0 < \varepsilon, \; \forall i \succeq k.$*

„⇐": Seien nun $j, k \in I$ maximale Elemente, so gelte $x_j = x_k$.
Wähle $i_0 = j$, so gilt,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists i_0 \in I : d(x_k, x_j) = 0 < \varepsilon, \; \forall k \geq i_0. \qquad \square$$

Wenn I endlich ist, so existiert ein maximales Element, da die Richtungseigenschaft (5.2), also $\forall i, j \in I \; \exists k \in I : i \leq k \wedge j \leq k$, für endlich viele Elemente angewendet werden kann. Nach endlich vielen Schritten wurde ein maximales Element

* Einen anderen GW gibt es nicht. Und $i \leq k$

80. Zeigen Sie: Ist K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $(O_i)_{i\in I}$ offene Teilmengen von X mit $X \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit: $\forall x \in K$ gibt es $i \in I$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq O_i$.

Hinw.: Nehmen Sie indirekt an, es gibt (x_n) in K mit $U(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq O_i$.

Beweis: „Eine Teilmenge O von X heißt offen, wenn es zu jedem Punkt $x \in O$ eine ε-Kugel mit $U_\varepsilon(x) \subseteq O$ gibt."

Angenommen, es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus K, sodass $\overset{\forall}{\cancel{\exists}}\, i \in I: \; U_{1/n}(x_n) \nsubseteq O_i$.
Weil $x_n \in K \subseteq X \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, muss $\forall n \in \mathbb{N}: \exists i \in I: x_n \in O_i$. Dabei ist O_i offen, $\forall i \in I$.
Also $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x_n) \subseteq O_i$.
Aber $U_{1/n}(x_n) \nsubseteq O_i \supseteq U_\varepsilon(x_n) \Rightarrow \frac{1}{n} > \varepsilon \Rightarrow n < 1/\varepsilon$ $\lightning$.

Weil $U_{1/n}(x_n) \subseteq O_i$, und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N: 1/n < \varepsilon$, und alle O_i offen sind, also $\forall i \in I \; \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq O_i$, muss $\forall x \in K \; \exists i \in I: U(x, 1/N) \subseteq O_i$. $\square$

Alternativer Beweis: Angenommen, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in K: \forall i \in I: U_\varepsilon(x) \nsubseteq O_i$ und $\exists n \in \mathbb{N}: \exists x_n \in K: U_{1/n}(x_n) \nsubseteq O_i, \forall i \in I$
$\Rightarrow U_{1/n}(x_n) \nsubseteq \bigcup_{i\in I} O_i$.

Weil $\forall i \in I: O_i$ ist offen, folgt

$x_n \notin \bigcup_{i\in I} O_i \Rightarrow x_n \notin X \Rightarrow x_n \notin K$,

was aber $x_n \in K$ widerspricht. $\square$

Falsch, weil von zwei falschen Aussagen ausgegangen wird.

Man müsste zeigen, dass $\forall i \in I: U_{1/n}(x_n) \nsubseteq O_i$ falsch ist. Dabei weiß man, dass K kompakt ist, also $\exists (x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}: x_{n(k)} \rightarrow x \in K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_i$. Also $\exists i \in \mathbb{N}: x \in O_i$ und weil jenes O_i offen ist, $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq O_i$. Laut oben würde das, wegen $\forall i \in I: U_{1/n(k)}(x_{n(k)}) \nsubseteq O_i$, den Widerspruch $1/n(k) > \varepsilon \Rightarrow n(k) < 1/\varepsilon$ herbeiführen, dass $n(k) \in \mathbb{N}$, also $k \in \mathbb{N}$, beschränkt wäre.

Der untere Absatz passt.