8.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kann durch
$$f(x) = \sum_n \frac{x_n}{2^n}$$
auf $[0,1]$ abgebildet werden. f ist allerdings nicht injektiv. Das lässt sich beheben, indem wir
$$A = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 : x_n = x_{n_0} : n \geq n_0\}$$
und
$$B = \{\frac{k}{2^n} : n, k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq 2^n\}$$
setzen. f bildet A^C bijektiv auf B^C ab; A und B sind beide abzählbar, deshalb gibt es eine bijektive Abbildung $h : A \to B$.
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in A^C, \\ h(x) & \text{wenn } x \in A \end{cases}$$
ist dann bijektiv. Zeigen Sie, dass f, g, und g^{-1} messbar sind (mit den Borelmengen auf $[0,1]$ und der Produktsigmaalgebra $(2^{\{0,1\}})^{\mathbb{N}}$ auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). (damit können wir Maß-Isomorphismen (d.h., Bijektionen, die gemeinsam mit ihrer Umkehrung messbar sind) zwischen $[0,1]^n$ und $[0,1]$ und $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und $[0,1]$ erhalten).

2. Mischungen: Y sei diskret, mit $\mathbb{P}(Y = i) = p_i, i = 1, \ldots, n$. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Folge von Zufallsvariablen, unabhängig von Y. Wir bezeichnen mit F_i, m_i, s_i^2 Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz von X_i. Wir verwenden Y, um eine Variable aus $X_1, \ldots, X_n$ auszuwählen:
$$Z = X_Y.$$
Die Verteilungsfunktion von Z ergibt sich als
$$F_Z(X) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x),$$
dieser Ausdruck wird als "Mischung" der Verteilungsfunktionen F_i mit den Gewichten p_i bezeichnet. Weiters gilt:
$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(m_Y) = \sum_{i=1}^n p_i m_i,$$
und
$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(s_Y^2) + \mathbb{V}(m_Y).$$
Es ist also das Mittel der Mischung als Mittel der Mittelwerte, die Varianz der Mischung ergibt sich als die Summe aus dem Mittel der Varianzen und der Varianz der Mittel.

3. X und Y seien unabhängige reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Zeigen Sie (mit Fubini):

   (a) $F_{X+Y}(z) = \int F_X(z-y)d\mu_{F_Y}(y)$.

   (b) Wenn die Verteilung von X absolutstetig ist mit Dichte f_X, dann ist auch die Verteilung von $X+Y$ absolutstetig mit Dichte

   $$f_{X+Y}(z) = \int f_X(z-y)d\mu_{F_Y}(y),$$

   (c) ist auch noch die Verteilung von Y absolutsteig, dann ist

   $$f_{X+Y}(z) = \int f_X(z-y)f_Y(y)d\lambda(y).$$

   Die Ausdrücke in (a) und (c) werden als die Faltung der Verteilungsfunktionen bzw. Dichten bezeichnet.

4. X und Y seien unabhängig mit absolutstetigen Verteilungen, f_X und f_Y seien die entsprechenden Dichten. Dann gilt

   $$f_{X/Y}(z) = \int |y| f_X(zy)f_Y(y)d\lambda(y).$$

5. X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$.

6. X und Y seien unabhängig, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ (vgl. Bsp. 7, 7. Übung), $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$.

7. X und Y seien unabhängig, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$. Bestimmen Sie die Verteilung von X/Y.