2.3.3 Satz (Rekursionssatz). Sei A eine Menge, $a \in A$, $g: \quad \to A$ (Rekursionsfunktion). Dann existiert genau eine Abbildung $\phi: \mathbb{N} \to A$ mit $\phi(1) = a$ und $\phi(n') = g(\phi(n))$.

Beweis. Betrachte alle Teilmengen $H \subseteq \mathbb{N} \times A$ mit den Eigenschaften

(a) $(1, a) \in H$

(b) Ist $(n, b) \in H$, so gilt auch $(n', g(b)) \in H$.

Das sind genau die Eigenschaften von ϕ, nur anders aufgeschrieben. Solche Teilmengen existieren, da z. B. $\mathbb{N} \times A$ die Eigenschaften (a) und (b) hat. $\mathbb{N}$ besitzt ein erstes Element 1 oder 0, und ist rekursiv definiert (hat ein Nachfolge-Element). $\mathbb{N} \times A$ ist allerdings keine wohldefinierte Funktion, weil wenn $a, b \in A$, so sind $(1, a), (1, b) \in \mathbb{N} \times A$. Sei D der Durchschnitt aller solchen Teilmengen

$$D := \bigcap_{H \text{ erfüllt (a) und (b)}} H$$

Das ist die Menge, die alle Elemente (Paare) enthält, die alle H, die (a) und (b) erfüllen, teilen. Also quasi das kleinste H mit (a) und (b). Da $(1, a) \in H$ für alle H, die (a) und (b) erfüllen, ist auch $(1, a) \in D$. ... weil alle H das Element $(1, a)$ teilen. Ist $(n, b) \in D$, so gilt $(n, b) \in H$ für alle (a) und (b) erfüllenden H. So ist der Durchschnitt definiert. Nach (b) folgt $(n', g(b)) \in H$ für alle solchen H, und somit

$(n; g(b)) \in D$. Die Eigenschaft (b) gilt für alle H, die vereinigt werden, also auch für die Vereinigung selbst. Das kann man auch mit anderen Eigenschaften als (b) machen.
Also hat D auch die Eigenschaften (a) und (b), und ist damit die kleinste Teilmenge mit diesen Eigenschaften.
Die Eigenschaften wurden wie gesagt erfolgreich vererbt.
Wir behaupten, dass D eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach A ist, also, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein $b \in A$ gibt, sodass $(n, b) \in D$; vgl. Definition 1.2.1. D muss also überall definiert und wohldefiniert sein. Dazu reicht es zu zeigen, dass[5]

[5] $\exists!$ steht für ' Es gibt genau ein

$$M = \{n \in \mathbb{N} : \exists! b \in A, (n, b) \in D\}$$

mit $\mathbb{N}$ übereinstimmt. In der Bedingung für M steht genau das, was die Definitionsmenge einer Funktion ausmachen soll.
Wir prüfen das mit Hilfe von (S3) nach. Das Induktionsaxiom: „Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$ und $m' \in M$ für alle $m \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$."
Zunächst ist $1 \in M$, da einerseits $(1, a) \in D$. Das wissen wir wegen oben und, weil es in der Bedingung für M steht. Gäbe es ein weiteres $c \in A$, $c \neq a$ mit $(1, c) \in D$, so betrachte $D \setminus \{(1, c)\}$. Das heißt, falls D nicht wohldefiniert wäre. Klarerweise hat $D \setminus \{(1, c)\}$ die Eigenschaft (a). ... weil ja $(1, c) \neq (1, a) \in D \setminus \{(1, c)\}$. Wegen (S2) bleibt auch die Eigenschaft (b) erhalten. (S2): „Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n' = 1$." Den „Nachfolger" $(1, c)$ zu entfernen, hat keinen Einfluss auf (b), weil $(1, c)$ keinen Vorgänger hat, der dann keinen „Nachfolger" $(1, c)$

mehr hätte. Das ist ein Widerspruch dazu, dass D kleinstmöglich ist. ... weil $D \setminus \{(1,c)\} \subsetneq D$, also ist D für 1 wohldefiniert.

Nun zeigen wir, dass mit n auch n' in M liegt. Dann wäre (S3) erfüllt und $M = \mathbb{N}$. Das ist jetzt der Induktionsschritt.

Für $n \in M$ gibt es genau ein $b \in A$ mit $(n, b) \in D$. Das steht ja in der Bedingung für M. Also ist auch $(n', g(b)) \in D$. Wir benützen die Eigenschaft (b) von D. Wäre noch $(n', c) \in D$ mit $c \neq g(b)$, so kann man wieder $D \setminus \{(n', c)\}$ betrachten. Die „Funktion" wird abermals eingeschränkt. Weil $n' \neq 1$, erfüllt $D \setminus \{(n', c)\}$ Eigenschaft (a). Das heißt: $(1, a)$ bzw. $(1, c)$ (die sind ja mittlerweile gleich) werden ja nicht aus D entfernt (mit „$\setminus$").

Aus $(k, d) \in D \setminus \{(n', c)\} \subseteq D$ folgt $(k', g(d)) \in D$. ... weil D die Eigenschaft (b) besitzt. Ist $k \neq n$, so folgt wegen (S1) daher auch $(k', g(d)) \neq (n', c)$. (S1): „$'$ ist injektiv." Dabei wird möglicherweise die Kontraposition der Injektivität benützt. Ist $n = k$, so muss wegen $n \in M$ die Gleichheit $d = b$ gelten. Laut Induktionsvoraussetzung ist D für n wohldefiniert. Es gibt also für $n = k$ nur einen Funktionswert $d = b$. Es folgt $(k', g(d)) = (n', g(b)) \neq (n', c)$. Also wie im Fall $k \neq n$ gilt $(k', g(d)) \neq (n', c)$. In jedem Fall gilt also $(k', g(d)) \in D \setminus \{(n', c)\}$, und $D \setminus \{(n', c)\}$ erfüllt auch (b). ... weil $(k', g(d))$ nicht aus D entfernt wird (durch „$\setminus$"). In dem Fall ist (b) mit k statt n und d statt b erfüllt. Das ist wieder ein Widerspruch dazu, dass D kleinstmöglich ist. ... weil $D \setminus \{(n', c)\} \subsetneq D$, also ist D auch für n' wohldefiniert.

Aus (S3) folgt $M = \mathbb{N}$. Ok. Nach Definition 1.2.1 kann man also

D auffassen als Abbildung $\phi: \mathbb{N} \to A$. Das ist wie gesagt genau die Bedingung für M (, der jetzt offiziellen Definitionsmenge von D bzw. ϕ). Die Eigenschaft (a) bedeutet $\phi(1) = a$, und (b) besagt $\phi(n') = g(\phi(n))$. Klar, ist ja nur eine andere Schreibweise: $\phi(n) = b \wedge \phi(n') = g(b) \Rightarrow \phi(n') = g(\phi(n))$.

Wäre $\tilde{\phi}$ eine weitere Funktion mit $\tilde{\phi}(1) = a$ und mit $\tilde{\phi}(n') = g(\tilde{\phi}(n))$, und betrachte man $\tilde{\phi}$ als Teilmenge $\tilde{D}$ von $\mathbb{N} \times A$, so erfüllt $\tilde{D}$ Eigenschaften (a), (b). Das ist jetzt der Eindeutigkeits-Beweisteil. $\tilde{D}$ erfüllt (a) und (b) wegen des Beweisteils von vorher (der mit D). Weil wir schon wissen, dass D die kleinste solche Menge ist, folgt $D \subseteq \tilde{D}$. Wenn D am kleinsten ist, so liegen alle Elemente aus D auch in der möglicherweise größeren Menge $\tilde{D}$ (das natürlich unter der Voraussetzung, dass D und $\tilde{D}$ die Eigenschaften (a) und (b) erfüllen.) Da aber beide Funktionen sind, muss $D = \tilde{D}$ bzw. $\phi = \tilde{\phi}$. Weil D und $\tilde{D}$, bzw ϕ und $\tilde{\phi}$ wohldefiniert sind, und die selbe Definitionsmenge $\mathbb{N}$ besitzen, sind sie gleichmächtig. Daher folgt $D \subseteq \tilde{D} \Rightarrow D = \tilde{D}$ und ϕ ist tatsächlich eindeutig. $\square$