Serie 1

Thema: separierbare ODEs

Separierbare ODEs sind von der Bauart:

$$y' = f(y)g(t)$$

Für $f(y) \neq 0$ löst man diese indem man formal die Form

$$\frac{dy}{f(y)} = g(t)dt$$

erzeugt und dann beide Seiten integriert. Mit den Stammfunktionen F (von $1/f$) und G (von g) muß damit die Beziehung

$$F(y) = G(t) + C$$

für ein $C \in \mathbb{R}$ gelten. Nicht immer kann man diese Beziehung nach y explizit auflösen.
Eine Variante von separierbaren ODEs sind solche der Form

$$y' = f(at + by);$$

hier führt die Einführung einer neuen Funktion $\widetilde{y}(t) := at + by(t)$ auf separierbare Form.

Aufgaben

$$y'(1+t^2) + (1+y^2) = 0 \tag{1}$$
$$y'ty + (1+y^2) = 0 \tag{2}$$
$$y' \sin t - y \cos t = 0, \qquad y(\pi/2) = 1 \tag{3}$$
$$ty' = (1+y^2) \tag{4}$$
$$yy'\sqrt{1+t^2} + t\sqrt{1+y^2} = 0 \tag{5}$$
$$t\sqrt{1-y^2} + yy'\sqrt{1-t^2} = 0, \quad y(0) = 1 \tag{6}$$
$$e^{-y}(1+y') = 1 \tag{7}$$
$$y \ln y + ty' = 0, \qquad y(1) = 1 \tag{8}$$
$$y' = a^{t+y}, \quad (a > 0, a \neq 1) \tag{9}$$
$$e^y(1+t^2)y' - 2t(1+e^y) = 0 \tag{10}$$
$$2t\sqrt{1-y^2} = y'(1+t^2) \tag{11}$$
$$y^2 \sin t + y' \cos^2 t \ln y = 0 \tag{12}$$
$$y' = \sin(t-y) \tag{13}$$
$$y' = at + by + c \qquad (a, b, c = \text{Konstanten}) \tag{14}$$
$$(t+y)^2 y' = a^2 \tag{15}$$
$$y + ty' = a(1+ty), \qquad y(1/a) = -a \tag{16}$$
$$\tag{17}$$

Lösungen

$$\arctan t + \arctan y = C \tag{1}$$

$$t^2(1+y^2) = C \tag{2}$$

$$y = \sin t \tag{3}$$

$$y = \tan(C + \ln t) \tag{4}$$

$$\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1+y^2} = C \tag{5}$$

$$\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-y^2} = 1 \tag{6}$$

$$e^t = C(1 - e^{-y}) \tag{7}$$

$$y \equiv 1 \tag{8}$$

$$a^t + a^y = C \tag{9}$$

$$1 + e^y = C(1+t^2) \tag{10}$$

$$y = \sin(C + \ln(1+t^2)) \tag{11}$$

$$y = (1 + Cy + \ln y)\cos t \tag{12}$$

$$t + C = \cot\left(\frac{y-t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{13}$$

$$b(at + by + c) + a = Ce^{bt} \tag{14}$$

$$t + y = a\tan\left(C + \frac{y}{a}\right) \tag{15}$$

$$y = -\frac{1}{t} \tag{16}$$