Satz 3.2.8 (Rangformel) Ist $f \in L(V, W)$ und gilt $\dim V < \infty$, so folgt

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{def} f = \dim V.$$

Beweis. Wir wählen ein Komplement T von $\ker f$ bezüglich V. T mit $T \oplus \ker f = V$ existiert, laut Satz 2.8.7. Dann folgt aus dem Dimensionssatz 2.8.9

$$\dim T + \operatorname{def} f = \dim V.$$

Dimensionssatz: $\dim(T + \ker f) + \dim(T \cap \ker f) = \dim T + \dim \ker f$. Weil $T \oplus \ker f = V$, gilt $T + \ker f = V$ und $T \cap \ker f = \{0\}$ und $\dim \{0\} = 0$. Zudem ist $\operatorname{def} f := \dim \ker f$.
Wegen $\ker(f|_T) = T \cap \ker f = \{0\}$ ist $f|_T$ injektiv.
... laut Satz 1.11.6 (c). Mit Satz 3.2.6 (a) folgt $\dim T = \dim f(T)$. $\dim V < \infty$ und „f ist genau dann injektiv, falls $\dim V = \dim f(V)$." Weiters zeigt

$$f(V) \overset{(1)}{=} f(T + \ker f) \overset{(2)}{=} f(T) + f(\ker f) \overset{(3)}{=} f(T) + \{0\} = f(T).$$

dann $\operatorname{rg} f = \dim f(T) = \dim T$. (1) $\Leftrightarrow$ $V = T \oplus \ker f$, (2) $\Leftrightarrow$ f ist linear, (3) $\Leftrightarrow$ Definition von $\ker f$.
Außerdem $\operatorname{rg} f := \dim f(V)$ mit $f(V) = f(T)$. Die letzte Gleichheit steht oben. $\square$