Satz 3.2.5 Es seien $f \in L(V, W)$ und $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Dann gilt:

(a) f ist genau dann injektiv, falls $(f(b_i))_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie in W ist.

(b) f ist genau dann surjektiv, falls $(f(b_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(c) f ist genau dann bijektiv, falls $(f(b_i))_{i\in I}$ eine Basis von W ist.

Beweis. (a) Alleine aus der Linearität von f folgt für alle $x_i \in K$:

$$\sum_{i\in I} x_i f(b_i) \overset{(1)}{=} f\Big(\sum_{i\in I} x_i b_i\Big) = \mathcal{O} \Leftrightarrow \sum_{i\in I} x_i b_i \overset{(2)}{\in} \ker f. \qquad (3.2)$$

(1) f ist linear und die Summe „endlich". (2) Definition des Kerns.

Nach Satz 1.11.6 ist die Injektivität von f äquivalent zu $\ker f = \{\mathcal{O}\}$. ... Letzteres ist nach (3.2) gleichbedeutend damit, dass sich der Nullvektor von W aus der Familie $(f(b_i))_{i\in I}$ nur in trivialer Weise kombinieren lässt, also zur linearen Unabhängigkeit. Wenn $\ker f = \{\mathcal{O}_V\}$, also nur $\mathcal{O}_V \in \ker f$, dann $\mathcal{O}_V = \sum_{i\in I} x_i b_i$ und weil $(b_i)_{i\in I}$ l.u. ist, ist diese LK trivial, also $\forall i \in I$: $x_i = 0$. Daher ist $\sum_{i\in I} x_i f(b_i) = \mathcal{O}_W$, laut (1), auch trivial und, laut Satz 2.4.5, $(f(b_i))_{i\in I}$ l.u. „$\Rightarrow$" folgt ähnlich.

(b) Alleine aus der Linearität von f folgt nach Satz 3.2.4 (c):

$$f(V) \overset{(*)}{=} f([(b_i)_{i\in I}]) = [(f(b_i))_{i\in I}].$$

$(*) \Leftrightarrow V = [(b_i)_{i\in I}]$, weil $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis ist. Das heißt, das Bild der gegebenen Basis ist ein Erzeugendensystem von $f(V)$., wobei $f(V)$ ja, nach Satz 3.2.4 (a), ein Unterraum ist. Die Abbildung f ist genau für $f(V) = W$ surjektiv., laut Definition von $f(V)$. Mit (3.3) ist das äquivalent dazu, dass die Familie $(f(b_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von W ist. Wenn f surjektiv ist, dann

$$W \overset{(1)}{=} f(V) = [(f(b_i))_{i\in I}] \overset{(2)}{=} W$$

und $(f(b_i))_{i\in I}$ ist ein ES von W. „$\Leftarrow$" folgt via (2) statt (1).

(c) folgt aus (a) und (b). „$\Rightarrow$": f ist bijektiv, also injektiv $\Rightarrow$ $(f(b_i))_{i\in I}$ ist l.u. und surjektiv $\Rightarrow$ $(f(b_i))_{i\in I}$ ist ES von W, also eine Basis. „$\Leftarrow$" folgt ähnlich. $\square$