Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 10

Übungstermin: 10.6.2020 29. Mai 2020

Aufgabe 46:
Schreiben Sie ein Programm, welches das Stabilitätsgebiet eines beliebigen, linearen Mehrschritverfahrens grafisch darstellt. Testen Sie mit den Ihnen bekannten impliziten und expliziten linearen Mehrschrittverfahren. Insbesondere sollen Sie Adams-Bashforth Verfahren (Example 5.5), Adams-Moulton Verfahren (Example 5.6) und BDF Verfahren (Aufgabe 41) verschiedener Ordnung testen.

Hinweis: Sie können ein Computeralgebrasysten verwenden. Alternativ können die Nullstellen eines Polynoms über die Eigenwerte der Begleitmatrix numerisch berechnet werden.

Aufgabe 47:
Lösen Sie das Hamilton System aus Example 6.4 des Vorlesungskriptes numerisch mit dem RK4 Verfahren aus Example 2.25, der impliziten Mittelpunktsregel aus Example 3.5 und einem symplektischen Eulerverfahren aus Example 6.29. Beobachten Sie die Hamilton-Funktion der numerischen Lösung für lange Zeiträume. Erklären Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 48:
Beweisen Sie, dass das N-Körper Problem aus Example 6.5 wirklich ein Hamilton System ist. Beweisen Sie auch die Aussage in Exercise 6.6.

Aufgabe 49:
Sei $H \in C^2(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{R})$ eine Hamilton-Funktion und $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{R}^{2d})$ ein Diffeomorphismus, d.h. auch die inverse Abbildung Ψ^{-1} sei stetig differenzierbar. Weiter sei Ψ symplektisch.

Zeigen Sie folgende Aussage: Wenn $y \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{2d})$ wie in Remark 6.2 des Vorlesungsskriptes eine Lösung des Hamilton Systems

$$y' = J^{-1}\nabla H(y) \tag{1}$$

ist, dann ist $u := \Psi \circ y$ die Lösung des Hamilton Systems mit Hamilton-Funktion $K := H \circ \Psi^{-1}$.

Aufgabe 50:
Zeigen Sie, dass alle expliziten, konsistenten und linearen Mehrschrittverfahren der Form (5.2) lineare Invarianten erhalten, sofern die Startwerte geeignet gewählt werden.