61. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n+1}{n^2+2}$$

konvergent, absolut konvergent, divergent? Für welche $x > 0$ ist die Reihe bestimmt divergent?

Falls $x < -1$, ist sie divergent, falls $-1 \leq x < 1$, absolut konvergent und falls $1 \leq x$, bestimmt divergent.

Beweis: Sei $x < -1$. Wir finden eine Minorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n+1}{n^2+2} \geq \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n},$$

wobei $\frac{x^n}{2n}$ monoton steigt für gerade n (Folgenglieder positiv):

$$\frac{x^{2k+2}}{2(2k+2)} \geq \frac{x^{2k}}{2 \cdot 2k} \Leftrightarrow x^2 \cdot 4k \geq 4k+4 \Leftrightarrow x^2 \cdot 4k - 4k \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 4k(x^2-1) \geq 4 \Leftrightarrow k(x^2-1) \geq 1,$$

und monoton fällt für ungerade n (Folgenglieder negativ):

$$\frac{x^{2k+1}}{2(2k+1)} \leq \frac{x^{2k-1}}{2(2k-1)} \Leftrightarrow \frac{x^1}{2k+1} \leq \frac{x^{-1}}{2k-1} \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{2k+1}{2k-1} =$$

$$\frac{2k-1+2}{2k-1} = 1 + \frac{2}{2k-1}.$$

Also ist $\frac{x^n}{2n}$ keine Nullfolge und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$, nach Proposition 3.9.7, divergent.

Sei $x = -1$. Wir verwenden Korollar 3.10.7 (Leibniz-Kriterium) und zeigen, dass

- $\frac{n+1}{n^2+2} =: a_n$ eine Nullfolge ist:

$$0 \leq a_n \leq \frac{n+n}{n^2} = 2 \cdot \frac{n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n}.$$

- und monoton fällt:

$$\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} \leq \frac{n+1}{n^2+2} \Leftrightarrow (n+2)(n^2+2) \leq (n+1)(n^2+2n+3)$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 2n + 2n^2 + 4 \leq n^3 + 2n^2 + 3n + n^2 + 2n + 3.$$

Sei $-1 < x < 1$. Wir finden die Majorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| x^n \frac{n^2+2}{n^2+2} \right| \geq \sum_{n=0}^{\infty} \left| x^n \frac{n+1}{n^2+2} \right|.$$

Sei $1 \leq x$. Wir finden eine bestimmt divergente Minorante (alle Summanden sind positiv)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n}{4n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n}{2n^2+2n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n+1}{n^2+2},$$

deren Summanden Monoton steigen ($\Rightarrow$ keine Nullfolge):

$$\frac{x^n}{4n} \leq \frac{x^{n+1}}{4(n+1)} \Leftrightarrow n+1 \leq x \cdot n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq x. \qquad \square$$

62. Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n+2}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Die Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Beweis: Wir betrachten vorerst die Konvergenz. Laut Korollar 3.10.7, genügt es, zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+2n^2}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^3+2n^2}} =: a_n$$

eine monoton fallende Nullfolge ist.

Wir betrachten vorerst die Monotonie

$$\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{(n+1)^3+2(n+1)^2}} \leq \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+2n^2}} \Leftrightarrow$$

$$((n+1)^2+1)(n^3+2n^2) \leq (n^2+1)((n+1)^3+2(n+1)^2) \Leftrightarrow$$

$$(n^2+2n+2)(n^3+2n^2) \leq (n^2+1)(n^3+3n^2+3n+1+2n^2+4n+2) \Leftrightarrow$$

$$n^5+2n^4+2n^4+4n^3+2n^3+4n^2 = n^5+4n^4+6n^3+4n^2 \leq$$

$$(n^2+1)(n^3+5n^2+7n+3) = n^5+5n^4+7n^3+3n^2+n^3+5n^2$$

$$+7n+3 = n^5+5n^4+8n^3+8n^2+7n+3,$$

was offensichtlich stimmt.

Wir zeigen nun, dass a_n^2, also auch a_n, eine Nullfolge ist.

$$0 \leq a_n^2 \leq \frac{n^2+n^2}{n^3} = 2 \cdot \frac{n^2}{n^3} = 2 \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

Für die absolute Konvergenz betrachten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n+2}} .$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist eine Minorante, weil

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n+2}} \Leftrightarrow \sqrt{n+2} \leq \sqrt{n^2+1} \Leftrightarrow n+2 \leq n^2+1 \Leftrightarrow$$

$$n+1 \leq n^2,$$

wenn $n \geq 2$. $\square$

63. Untersuchen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+1} - n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)^2$$

auf Konvergenz.

Die erste Reihe ist divergent.

Beweis: Wir formen vorerst etwas um.

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

Es gilt

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2} + n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

und somit haben wir eine Minorante gefunden:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

$\square$

Die zweite Reihe ist konvergent.

Beweis: Durch die selbe Umformung von oben, kommen wir auf

$$\frac{1}{(\sqrt{n^2+1} + n)^2} = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)^2$$

Weiters finden wir eine Majorante mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2+1} + n)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2} + n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

$\square$

64. Untersuchen Sie auf Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2^k},$$

Zeigen Sie dann für die 2. Reihe mit vollst. Induktion:

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right)$$

und berechnen Sie damit diese Reihe.

Beide Reihen sind konvergent. **Die erste Reihe ist absolut konvergent.**

Beweis. Für die erste Reihe verwenden wir das Quotientenkriterium.

$$\left|\frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{3^k}{k!}}\right| = \left|\frac{k!}{(k+1)!}\right| \cdot \left|\frac{3^k \cdot 3}{3^k}\right| = \frac{3}{k+1} < 1 \Leftrightarrow 3 < k+1 \Leftrightarrow$$

$2 < k$.

Also gilt für $a_k := \frac{3^k}{k!}$ und für alle $k \geq 3$, dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1.$$

Für die zweite Reihe verwenden wir das Leibnizkriterium, und zeigen, dass

- $\frac{k+1}{2^k}$ monoton fällt, also

$$\frac{(k+1)+1}{2^{k+1}} \leq \frac{k+1}{2^k} \Leftrightarrow (k+2)\, 2^k \leq (k+1)\, 2^k \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$k+2 \leq 2k+2 \Leftrightarrow 1 \leq k,$$

- und, dass es eine Nullfolge ist.

Dazu betrachte

$$0 \leq \frac{k+1}{2^k} \leq \frac{2k}{2^k} \leq \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k} \to 0,$$

wobei $\frac{2k}{2^k} \leq \frac{2k}{k^2} \Leftrightarrow k^2 \leq 2^k \Leftrightarrow \sqrt[k]{k}^2 \leq 2$. Das gilt sicher ab einem gewissen k, da $\sqrt[k]{k} \to 1$. $\square$

Wir induzieren jetzt die obere Gleichung

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right). \qquad \text{(IV)}$$

- Induktionsanfang: $\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \frac{k+1}{2^k} = (-1)^0 \frac{0+1}{2^0} = 1 =$
$\frac{1}{9}\left(4 + (-1)^0 \frac{3 \cdot 0 + 5}{2^0}\right) = \frac{1}{9}(4+5)$.

- Induktionsschritt: $\sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{k+1}{2^k} + (-1)^{N+1} \cdot$
$\frac{(N+1)+1}{2^{N+1}} \overset{IV}{=} \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^N \frac{3N+5}{2^N}\right) + \frac{1}{9}\left((-1)^N \frac{-(N+2)}{2^{N+1}} \cdot 9\right) =$
$\frac{1}{9}\left(4 + (-1)^N \frac{2 \cdot (3N+5) + 9 \cdot (N+2)}{2^{N+1}}\right) = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^N \cdot \right.$
$\left.\frac{6N+10-9N-18}{2^{N+1}}\right) = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^N \cdot \frac{-3N-8}{2^{N+1}}\right) =$
$\frac{1}{9}\left(4 + (-1)^{N+1} \frac{3N+8}{2^{N+1}}\right) = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^{N+1} \frac{3N+3+5}{2^{N+1}}\right) =$
$\frac{1}{9}\left(4 + (-1)^{N+1} \frac{3(N+1)+5}{2^{N+1}}\right)$.

Um den Grenzwert der 2. Reihe zu bestimmen, betrachten wir also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right) =: S_n.$$

Nun ist aber $(-1)^n$ beschränkt, und $\frac{3n+5}{2^n}$ eine Nullfolge:

$$\frac{3n+5}{2^n} = 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 5 \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Dass $\frac{n}{2^n} \to 0$, wissen wir ja bereits, also auch $\frac{1}{2^n}$.

Es bleibt $S_n \to 4/9$ übrig.

65. Untersuchen Sie auf Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Die erste Reihe ist absolut Konvergent.

Beweis: Laut Satz 3.10.3 (Quotientenkriterium), genügt es zu zeigen, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{n!}{n^n}.$$

Also

$$\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| \cdot \left|\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n < n+1 \Leftrightarrow 0 < 1. \qquad \square$$

Die zweite Reihe ist absolut konvergent.

Beweis: Wir wenden das Wurzelkriterium an.

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \longleftrightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n \cdot n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \to e^{-1}.$$

Es gilt also

$$\exists q \in [0,1): e^{-1} < q. \qquad \square$$

66. Zeigen Sie folgende Version des Quotientenkriteriums:
Gilt $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis: Laut Fakta 3.4.6, 5, gilt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} x_n < \xi \Leftrightarrow \exists q < \xi : x_n \leq q,$$

für alle, bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.
Setzen wir nun $\xi := 1$ und

$$x_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

so bekommen wir:

Wenn $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \exists q \in [0,1) : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$,
für fast alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. für alle $n \geq N \in \mathbb{N}$.
Dabei braucht man $q < 0$ nicht betrachten, wegen des Betrags des Quotienten. $\square$

67. Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ untersuche man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

auf Konvergenz.

Falls $z = 1$, so divergiert die Reihe. Ansonsten konvergiert sie.

Beweis: Sei $z = 1 + 0i = 1$. Dann finden wir die Minorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}}.$$

Beachte, dass $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq n \Leftrightarrow n \leq n^2 \Leftrightarrow 1 \leq n$.

Sei $z = 1 + 0i$, $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$, und $b_n := z^n$. Laut Satz 3.10.6 (Dichichletsches Kriterium), zeigen wir, dass

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} \Leftrightarrow n \leq n+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$$

und

$$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

- Für eine Zahl $C > 0$ folgendes gilt:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} b_j \right| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

In unserem Fall gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{m} z^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{m} z^n \frac{1-z}{1-z} \right| = \frac{\sum_{n=1}^{m} z^n - z^{n+1}}{|1-z|} = \frac{\sum_{n=1}^{m} z^n - \sum_{n=1}^{m} z^{n+1}}{|1-z|} =$$

$$\frac{z + \sum_{n=2}^{m} z^n - \sum_{n=2}^{m+1} z^n}{|1-z|} = \frac{z + \sum_{n=2}^{m} z^n - \sum_{n=2}^{m} z^n - z^{n+1}}{|1-z|} = \frac{z - z^n}{|1-z|} \overset{(*)}{\leq}$$

$$\frac{2}{|1-z|} =: C, \text{ wobei}$$

$$(*) :\Leftrightarrow |z + (-z^{n+1})| \leq |z| + |-z^{n+1}| = |z| + |z|^{n+1} =$$

$$2.$$

$\square$

68. Untersuchen Sie (wenn möglich) und ohne dem Quotientenkriterium für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

konvergent bzw. divergent ist.

Ist $|z| < 1$, so ist die Reihe konvergent. Ist $|z| > 1$, so ist die Reihe divergent. Ist $z = 1$, so ist die Reihe divergent. Ist $|z| = 1$ und $z \neq 1$, so ist die Reihe konvergent.

Beweis: Sei $|z| < 1$, so verwenden wir Satz 3.10.3 (Quotientenkriterium).

$$\left| \frac{z^{n+1} \frac{(n+1)^2-1}{\sqrt{n+1}((n+1)^2+1)}}{z^n \frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)}} \right| = |z| \cdot \frac{((n+1)^2-1)\sqrt{n}(n^2+1)}{(n^2-1)\sqrt{n+1}((n+1)^2+1)} =$$

$$|z| \cdot \frac{(n^2+2n)\sqrt{n}(n^2+1)}{(n^2+2n+2)\sqrt{n+1}(n^2-1)} = |z| \cdot \underbrace{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}}_{=:a_n} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{=:b_n} \cdot \underbrace{\frac{n^2+1}{n^2-1}}_{=:c_n}$$

Wir betrachten nun

$$a_n = \frac{1+2/n}{1+2/n+2/n^2} \to 1,$$

$$b_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} \to 1,$$

$$c_n = \frac{1+1/n^2}{1-1/n^2} \to 1.$$

Weil $|z| < 1$, muss $\limsup_{n\to\infty} |z| a_n b_n c_n < 1$.

Sei $|z| > 1$, so verwenden wir Satz 3.10.1 (Wurzelkriterium).

$$\sqrt[n]{\left| z^n \cdot \frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)}\right|} = \sqrt[n]{|z|^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)}} = |z| \cdot \frac{\sqrt[n]{n^2-1}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}(n^2+1)}}$$

$$=: |z| \cdot \frac{a_n}{b_n}.$$

Wir betrachten nun

$$1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[2]{2-1} \leq a_n \leq \sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n}^2 \to 1,$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{n}^2 = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot n^2} \leq b_n \leq \sqrt[n]{\sqrt{n^4}(n^2+n^2)} =$$

$$\sqrt[n]{n^2 \cdot 2n^2} = \sqrt[n]{2n^4} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}^4 \to 1.$$

Weil $|z| > 1$, muss $\limsup_{n\to\infty} |z| \frac{a_n}{b_n} > 1$.

Sei $|z| = 1$ und sogar $z = 1$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n \frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1^2}{\sqrt{n}(n^2+2n+1^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{\sqrt{n}(n+1)^2} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n}(n+1)} \overset{(*)}{\geq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n},$$

also haben wir eine divergente Minorante gefunden.

Merke, dass

$$\sqrt{n} \leq n-1 \Leftrightarrow n \leq (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \Leftrightarrow 1 \leq n - 2 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq n - 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow: (*).$$

Sei $|z| = 1$ und $z \neq 1$, so verwenden wir Satz 3.10.6 (Dirichletsches Kriterium). Dazu zeigen wir, dass folgende Folge eine monotone Nullfolge ist:

$$a_n := \frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)}.$$

- Die Nullfolge folgt, wie folgt:

$$0 \leq a_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n}\, n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0.$$

- Die Monotonie ... folgt:

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2-1}{\sqrt{n+1}\,((n+1)^2+1)} \leq \frac{n^2-1}{\sqrt{n}\,(n^2+1)} \Leftrightarrow$$

$$(n^2+2n)\sqrt{n}\,(n^2+1) \leq (n^2-1)\sqrt{n+1}\,(n^2+2n+2) \Leftrightarrow$$

$$(n^2+2n)^2 n\,(n^2+1)^2 \leq (n^2-1)^2(n+1)\,(n^2+2n+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(n^4+4n^3+4n^2)\,n\,(n^4+2n^2+1) \leq (n^4-2n^2+1)(n+1)\,(n^4 + 2n^3+2n^2+2n^3+4n^2+4n+2n^2+4n+4) =$$
$$(n^5+n^4-2n^3-2n^2+n+1)(n^4+4n^3+8n^2+8n+4) \Leftrightarrow$$

$$(n^5+4n^4+4n^3)(n^4+2n^2+1) = n^9+2n^7+n^5+4n^8+8n^6+4n^4 + 4n^7+8n^5+4n^3 \leq n^9+4n^8+8n^7+8n^6+4n^5+n^8+\dots$$

Wir bekommen also

$$n^9+4n^8+\text{etwas} \leq n^9+4n^8+n^8+\text{noch etwas},$$

was ja wohl stimmt (ab einem gewissen n).

Setzen wir nun $b_n := z^n$, so finden wir, laut Beispiel 67, ein $C > 0$, sodass

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(In dem Fall auch $C := \frac{2}{|1-z|}$.) □

70. Zeigen Sie: Ist (a_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

Beweisen Sie damit die Divergenz der harmonischen Reihe und die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

für $\alpha > 1$.

Beweis: „⇒": $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend, also

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots .$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \cdots .$$

Durch geschickter Ersetzen bekommt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + \cdots =$$

$$a_1 + 1a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + 16a_{32} + \cdots \geq$$

$$\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} \cdot 2a_2 + \frac{1}{2} \cdot 4a_4 + \frac{1}{2} \cdot 8a_8 + \frac{1}{2} \cdot 16a_{16} + \cdots =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \cdots) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} .$$

Weil die Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} 2a_k$ konvergiert, tut dies auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} .$$

„$\Leftarrow$": $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + 2^2 a_{2^n} + 2^3 a_{2^3} + \dots =$

$$a_1 + \underbrace{2a_2}_{\geq a_2 + a_3} + \underbrace{4a_4}_{\geq a_4 + a_5 + a_6 + a_7} + 8a_8 + \dots \geq a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Also ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist für $\alpha = 1$ divergent und für $\alpha > 1$ konvergent.

Beweis: Sei $\alpha = 1$, also $a_n := \frac{1}{n}$. Somit divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

klarerweise divergiert. (Wir haben hier die Kontraposition der oberen Aussage verwendet.)

Betrachten wir nun $\alpha > 1$, so gilt $a_n := \frac{1}{n^\alpha}$, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot 1/(2^n)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot (2^n)^{-\alpha} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n)^{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^n.$$

Wir wenden Satz 3.10.1 (Wurzelkriterium) an und bekommen

$$\sqrt[n]{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt[\alpha-1]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}} < \sqrt[\alpha-1]{1} = 1. \quad \square$$

70.* Fun Fact, mit Aufgabe 70 können wir nun auch die Konvergenz von folgender Folge (no pun intended) nachweisen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k, \quad \text{wobei} \quad \alpha > 1.$$

Beweis: $\frac{1}{k^\alpha} \geq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k = \frac{1}{\alpha^k} \Leftrightarrow \alpha^k \geq k^\alpha \Leftrightarrow$

$$\alpha = \sqrt[k]{\alpha^k} \geq \sqrt[k]{k^\alpha} = \sqrt[k]{k}^{\alpha} \to 1^\alpha = 1,$$

also gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, ab dem

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \geq \frac{1}{\alpha^k}$$

für alle $k \geq N$ gilt. Daher gilt in folge (n.p.i.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},$$

wenn $\alpha > 1$.

Schreibt man $x := \frac{1}{\alpha}$, so gilt $0 < x \leq 1$. Das kann man in Aufgabe 61 verwenden. $\square$