Goldstern, 2017,2019

Kochrezept[1] für Jordan-Matrizen

Sei V Vektorraum, sei $f \in L(V, V)$ eine Abbildung, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und sei λ ein Eigenwert.

Dann kann man die Größen und Anzahlen der in der Jordan-Normalform vorkommenden Jordan-Kästchen zum Eigenwert λ aus den Rängen (oder Defekten) der Potenzen der Abbildung $g = g_\lambda := f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ so berechnen:

- Zunächst berechnet man die Ränge und/oder Defekte der Potenzen von g:
  Sei $d_j := \mathrm{def}(g^j)$ und $r_j := \mathrm{rg}(g^j)$ für $j = 0, 1, \ldots$.
  Die Folge $(d_0, d_1, \ldots)$ ist schwach monoton steigend (d.h. $d_0 \leq d_1 \leq \cdots$), beginnt mit $d_0 = 0$ und ist schließlich konstant mit einem Wert n_λ, der die algebraische Vielfachheit von λ ist. Die Folge der Ränge ist natürlich schwach monoton fallend.

- Dann bildet man die sukzessiven Differenzen dieser Folge: $u_j = d_j - d_{j-1}$ für $j = 1, 2, \ldots$. (Oder $u_j := r_{j-1} - r_j$.) Die Folge $(u_1, u_2, \ldots)$ ist schwach monoton fallend und schließlich konstant mit Wert 0.

  (Bemerkung: u_1 ist die Anzahl aller Kästchen zum Eigenwert λ. Was für eine Bedeutung haben die Zahlen u_2, u_3, etc?)

- Dann bildet man die sukzessiven Differenzen dieser Folge: $k_j = u_j - u_{j+1}$ für $j = 1, 2, \ldots$.

- Die so gefundenen k_j sind die Anzahlen der entsprechenden Kästchen: k_1 gibt die Anzahl der 1x1-Kästchen $J_1(\lambda)$ an, k_2 die Anzahl der Kästchen $J_2(\lambda)$, etc.

- Zur „Probe" sollte man überprüfen, ob tatsächlich $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots = n_\lambda$ gilt.

- Wenn es noch andere Eigenwerte λ', etc gibt, dann muss man die obigen Berechnungen für $f - \lambda' \cdot \mathrm{id}$, etc wiederholen.

BEISPIEL: Sei A eine 13×13-Matrix in Jordan-Normalform zum Eigenwert λ, die aus zwei 5×5-Kästchen $J_5(\lambda)$ und einem 3×3-Kästchen $J_3(\lambda)$ besteht:

$$\begin{pmatrix} J_5(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_5(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(\lambda) \end{pmatrix}$$

Da die Potenzen $(J_5 - \lambda E_5)^j$ für $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ die Ränge $5, 4, 3, 2, 1, 0$ haben, und die Potenzen $(J_3 - \lambda E_3)^j$ für $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ die Ränge $3, 2, 1, 0, 0, 0$ haben, ergibt sich nach obigem Rezept die folgende Tabelle:

j	0	1	2	3	4	5	6	7	
r_j	13	10	7	4	2	0	0	0	$\cdots$
d_j	0	3	6	9	11	13	13	13	$\cdots$
u_j		3	3	3	2	2	0	0	$\ldots$
k_j		0	0	1	0	2	0	0	$\ldots$

Die gleiche Tabelle erhält man, wenn man statt einer Matrix in Jordan-NF eine dazu äquivalente Matrix verwendet. (Warum?)

Aus der letzten Zeile ergibt sich bereits die Jordan-NF, ohne dass man eine Basis bestimmen muss.

[1] Das Wort „Kochrezept" weist darauf hin, dass Sie Ihr Verständnis von Jordan-Matrizen nicht dadurch verbessern können, dass Sie dieses Rezept unreflektiert anwenden. Sie müssen sich selbst überlegen, warum es funktioniert.