Lineare Algebra und Geometrie 1 (WS 2018/19 - Pinsker)

Prüfung am 10.1.2019

Name: Matrikelnummer:

Nickname:

Übungsgruppe (falls zutreffend) (Zeit / Gruppenleiter):

Ihre Antworten - bitte W (wahr) oder F (falsch) eintragen!

Aufgabe	Antwort A	Antwort B	Antwort C
1	*W*	*W*	*W*
2	*W*	*W*	*F*
3	*W*	*F*	*W*
4	*W*	*W*	*F*
5	*W*	*F*	*W*
6	*F*	*F*	*W*
7	*F*	*F*	*W*
8	*F*	*F*	*W*
9	*W*	*F*	*W*
10	*F*	*F*	*F*
11	*W*	*F*	*W*
12	*F*	*F*	*W*
13	*W*	*F*	*F*
14	*W*	*W*	*F*
15	*W*	*F*	*F*

Erklärungen zum Prüfungsmodus:

- Bitte wählen Sie einen beliebigen Nickname - die Ergebnisse werden als für alle einsehbare Liste unter den Nicknamen veröffentlicht.
- Es sind 15 Aufgaben zu lösen, und jede Aufgabe besteht aus drei Teilfragen (A,B,C), welche jeweils mit WAHR (W) oder FALSCH (F) zu beantworten sind.
- **WICHTIG:** WAHR (W) bedeutet, daß die jeweilige Behauptung für ALLE $X, f, K, \ldots$ aus der gegebenen Annahme folgt. Das heißt, daß die Behauptung notwendig ist (und nicht nur möglich).
- Sie bekommen die bei einer Aufgabe angegebene Punktezahl (diesmal immer 4), wenn Sie **ALLE** drei Teilfragen der Aufgabe richtig beantworten.
- Wenn Sie mindestens eine Teilfrage einer Aufgabe falsch beantworten, so bekommen Sie 0 Punkte.
- In allen anderen Fällen (also Aufgabe entweder gar nicht oder korrekt, aber unvollständig gelöst) bekommen Sie 1 Punkt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X ein unendlichdimensionaler Vektorraum, und sei S ein Erzeugendensystem von X.

(A) S ist unendlich.

(B) S hat eine endliche linear unabhängige Teilmenge.

(C) S hat eine unendliche linear unabhängige Teilmenge.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, und seien $\{b_1, b_2, b_3\}$ und $\{c_1, c_2, c_3\}$ zwei Basen des K^3. Sei $B \in K^{3\times 3}$ jene Matrix, deren Spalten die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind; weiters sei $C \in K^{3\times 3}$ jene Matrix, deren Spalten die Vektoren c_1, c_2, c_3 sind.

(A) B ist regulär.

(B) $\exists D \in K^{3\times 3}\ (C = B \cdot D)$.

(C) $B \cdot C$ ist nicht regulär.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein unendlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, und sei S eine endliche linear unabhängige Teilmenge von X. Sei weiters $f\colon S \to \mathbb{R}^3$ eine Funktion.

(A) f läßt sich zu einer linearen Abbildung von X nach $\mathbb{R}^3$ fortsetzen.

(B) f läßt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung von X nach $\mathbb{R}^3$ fortsetzen.

(C) Es gibt unendlich viele paarweise verschiedene Fortsetzungen von f zu einer linearen Abbildung von X nach $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X ein Vektorraum über einem Körper K der Charakteristik 0.

(A) Wenn X mindestens zwei Elemente besitzt, dann ist X unendlich.

(B) Wenn die Dimension von X mindestens 1 beträgt, dann ist X unendlich.

(C) X ist unendlich.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Auf $K^{5\times 5}$ definieren wir eine binäre Relation R, indem wir für $A, B \in K^{5\times 5}$ folgendes festlegen:

$$R(A,B) :\leftrightarrow \; \exists C \in K^{5\times 5} \, (A = C \cdot B) \, .$$

(A) R ist reflexiv.

(B) R ist symmetrisch.

(C) R ist transitiv.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Es gelten die Bedingungen von Aufgabe 5.

(A) R ist eine Äquivalenzrelation.

(B) R ist eine Halbordnung.

(C) Es existiert ein $D \in K^{5\times 5}$ sodass für alle $A \in K^{5\times 5}$ die Relation $R(A, D)$ erfüllt ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$, und sei $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von V. Sei weiters $f \in L(V, (\mathbb{Z}_2)^2)$ so, daß

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, .$$

(A) f ist injektiv.

(B) Der Rang von f beträgt 1.

(C) f ist surjektiv.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Es gelten die Bedingungen von Aufgabe 7.

(A) $f(b_1 + b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(B) Der Defekt von f beträgt 2.

(C) Der Kern von f enthält genau 2 Elemente.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $\{b_1, b_2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$, und seien

$$c_1 := b_1 - b_2, \quad c_2 := -b_1 + 2b_2 \ .$$

(A) $\{c_1, c_2\}$ ist linear unabhängig.

(B) $b_1 = (-2)c_1 + (-1)c_2$.

(C) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist regulär.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Es gelten die Bedingungen von Aufgabe 9. Seien $v := -7b_1 + 3b_2$ und $w := -4c_1 + c_2$.

(A) $v = 3c_1 - c_2$.

(B) $w = 2b_1 + 4b_2$.

(C) $\{v, w\}$ ist linear abhängig.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei V ein unendlichdimensionaler Vektorraum, $B \subseteq V$ eine Basis von V, und $C \subseteq V$ eine endliche linear unabhängige Teilmenge von V. Sei

$$S := \{B' \subseteq B \mid C \cup B' \text{ ist linear unabhängig}\} \ .$$

Die Elemente von S sind natürlich durch die Inklusion ($\subseteq$) geordnet.

(A) S enthält sowohl eine endliche, als auch eine unendliche Menge.

(B) S enthält ein maximales Element B', und B' ist eine Basis von V.

(C) S enthält ein maximales Element B', und $B' \cup C$ ist eine Basis von V.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K der Charakteristik 0. Sei $c \in V$ ungleich dem Nullvektor, und $\{b_1, b_2\}$ ein Erzeugendensystem eines Komplements von $[\{c\}]$ in V.

(A) $\{b_1, b_2, b_1 + b_2\}$ ist linear unabhängig.

(B) $\{c, b_1, b_2\}$ ist linear abhängig.

(C) $\{c, b_1, b_1 + b_2\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Es gelten die Bedingungen von Aufgabe 12.

(A) $[\{b_1 + c, b_2 + c\}]$ ist ein Komplement von $[\{c\}]$ in V.

(B) $[\{b_1 + c, b_2 + c\}] = [\{b_1, b_2\}]$.

(C) $[\{b_1 + c + c, b_2 + c + c\}] = [\{b_1, b_2\}]$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Es gelten die Bedingungen von Aufgabe 12.

(A) $[\{c\}]$ besitzt unendlich viele paarweise verschiedene Komplemente in V.

(B) Wenn U, W verschiedene Komplemente von $[\{c\}]$ in V sind, dann ist V die Summe von U und W.

(C) Wenn U, W verschiedene Komplemente von $[\{c\}]$ in V sind, dann ist V die direkte Summe von U und W.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Sei $V := (\mathbb{Z}_2)^{<\mathbb{N}>}$ der Vektorraum jener Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}_2$, welche nur endlich oft einen Wert ungleich 0 annehmen. Sei $\phi\colon V \to \mathbb{Z}_2$ durch

$$\phi(f) := \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

definiert. Weiters sei für alle $j \in \mathbb{N}$ eine Funktion $g_j \in V$ durch

$$g_j(n) := \begin{cases} 1, & j = n \\ 0, & j \neq n \end{cases}$$

gegeben.

(A) ϕ ist eine surjektive Linearform von V.

(B) ϕ läßt sich als Linearkombination über $\{g_j^* \mid j \in \mathbb{N}\}$ darstellen.

(C) ϕ läßt sich eindeutig als Linearkombination über $\{g_j^* \mid j \in \mathbb{N}\}$ darstellen.