Serie 10

Besprechung: Donnerstag, 4.6

10.1. Betrachten Sie für $r \in \mathbb{R}$ die autonome ODE

$$y' = y + \tanh(ry).$$

Wieviele Ruhelagen hat die Gleichung abhängig von r? Um welchen Typ von Bifurkation handelt es sich beim Bifurkationspunkt $r = 1$?

10.2. **a)** Betrachten Sie das RWP (auf $(0, 1)$)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hat das RWP eine Lösung?

b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit des RWP (auf $(0, \pi)$)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

10.3. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme, falls diese existieren:

a) $(yy')' = 1 - 3t$ mit $y(0) = y(1) = 0$,

b) $y'' + 4y = 0$ sowie $y'' + 4y = 4t$ mit $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(\pi) = y'(-\pi)$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$ mit $y(0) = 2, y(\pi/4) = 1$

10.4. Betrachten Sie das RWP

$$Ly := -(py')' + qy = f \quad \text{auf } (a, b), \qquad R_1 y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = \rho_1, \qquad R_1 y := \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = \rho_2,$$

wobei p, q hinreichend glatt sind, $p > 0$ auf $[a, b]$. Sei $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ und $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$. Nehmen Sie an, daß das RWP für $f = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ nur trivial lösbar sei. Seien weiters y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen von $Ly = 0$ mit $R_1 y_1 = 0$ und $R_2 y_2 = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \kappa(x) &:= p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') = \text{ const} \neq 0 \\ G(x, t) &= \frac{1}{\kappa} \begin{cases} y_1(t) y_2(x) & a \leq t \leq x \leq b \\ y_1(x) y_2(t) & a \leq x \leq t \leq b \end{cases} \end{aligned}$$

10.5. Betrachten Sie das RWP

$$Ly = -(py')' + qy = f, \quad \text{auf } (a, b), \qquad R_1 y = 0 = R_2 y$$

Es sei G die Greensche Funktion für dieses RWP (Sie fordern also insbesondere eindeutige Lösbarkeit). Es soll gezeigt werden, daß $LG(\cdot, t) = \delta_t$, wobei δ_t die "δ-Distribution" ist. Genauer: Zeigen Sie für $t \in (a, b)$:

$$\int_a^b G(x, t)(L\varphi)(x)\, dx = \varphi(t) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b) = \{\varphi \in C^\infty(a, b) \mid \operatorname{supp} \varphi \subset (a, b)\}$$

10.6. Betrachten Sie die Schwingung einer einseitig eingespannten Saite, welche die Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

mit den Randbedingungen

$$y(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x} y(1,t) = 0, \qquad t > 0,$$

erfüllt.[1] Die Anfangsbedingungen seien $y(\cdot,0) = y_0(\cdot)$ und $\frac{\partial}{\partial t} y(\cdot,0) = y_1(\cdot)$. Formulieren und lösen Sie das Sturm-Liouville Eigenwertproblem, welches durch den Ansatz der Separation der Variablen entsteht. Geben Sie eine (formale) Lösung als Reihe an.

10.7. **a)** Zeigen Sie, daß für jedes $f \in C([0,1])$ die Randwertaufgabe

$$-y'' + ay = f, \quad y'(0) = y'(1) = 0, \quad a \in (0,\infty)$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion für das Randwertproblem.

c) Gegeben sei eine stetige Funktion $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die global Lipschitz stetig bezüglich u ist, d.h.

$$|F(t,u) - F(t,\tilde{u})| \leq L|u - \tilde{u}| \qquad \forall t \in [0,1], u, \tilde{u} \in \mathbb{R}$$

mit Lipschitzkonstante $0 < L < a$. Zeigen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen das nichtlineare Randwertproblem

$$-y'' + ay = F(t,y), \qquad y'(0) = y'(1) = 0$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

d) Falls $L \geq a$, dann besitzt dieses Randwertproblem im Allgemeinen keine eindeutige Lösung.

[1] physikalisch gesehen schwingt eine einseitig eingespannte Saite natürlich nicht. Eine einseitig offene Orgelpfeife könnte aber durch die Differerentialgleichung beschrieben werden.