Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 37 – Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren"

---

37 / 1: Sei $k \in C([0,1]^2)$ und $K \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ der Integraloperator mit Kern k. Sei weiters $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, sodass K selbstadjungiert ist. Schließlich sei

$$K = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n$$

die Spektralzerlegung von K. Zeige:

(a) Die Eigenfunktionen e_n sind stetig auf $[0,1]$.

(b) Für jedes $f \in L^2(0,1)$ konvergiert die Reihe $Kf = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(f,e_n)e_n$ absolut und gleichmäßig auf $[0,1]$.

37 / 2: Sei $A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ definiert durch

$$(Af)(x) = i\int_{[0,x]} f\,d\lambda - \frac{i}{2}\int_{[0,1]} f\,d\lambda\,.$$

Zeige, dass A kompakt und selbstadjungiert ist. Bestimme das Spektralmaß von A, und finde eine Orthonormalbasis des $L^2([0,1])$ die aus aus Eigenvektoren von A besteht.

37 / 3: Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Zeige mit Hilfe des Spektralsatzes, dass für $\lambda > \|A\|$ gilt

$$(A-\lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tA}\,dt.$$
