 ► **Übungsaufgabe 3.5.2.8.** (B) Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Ordnungsrelationen gibt, die die Gruppe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ zu einer geordneten Gruppe machen. Hinweis: Betrachten Sie für irrationales α die Abbildung $\varphi_\alpha\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi_\alpha(a,b) := a+\alpha b$, und übertragen Sie damit die Struktur von $\mathbb{R}$ als geordnete Gruppe auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. ◄

Sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ bel. ; $\varphi_\alpha: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}: (a,b) \mapsto a+\alpha b$; $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +, (0,0), -)$

$(a,b) \leq_\alpha (p,q) :\Leftrightarrow \varphi_\alpha(a,b) \leq \varphi_\alpha(p,q)$

•) „Totalordnung"

1) „reflexiv" $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: a+\alpha b \leq a+\alpha b \Rightarrow \varphi_\alpha(a,b) \leq \varphi_\alpha(a,b) \Rightarrow (a,b) \leq_\alpha (a,b)$

2) „transitiv" Seien $(a,b),(p,q),(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mit $(a,b) \leq_\alpha (p,q)$ und $(p,q) \leq_\alpha (x,y)$

also: $a+\alpha b \leq p+\alpha q \leq x+\alpha y \Rightarrow (a,b) \leq_\alpha (x,y)$

3) „antisymmetrisch" Sei $(a,b) \leq_\alpha (p,q)$ und $(p,q) \leq_\alpha (a,b)$

also: $a+\alpha b \leq p+\alpha q$ und $p+\alpha q \leq a+\alpha b$

bzw.: $a-p \leq \alpha(q-b) \leq a-p \Rightarrow \alpha(q-b) = a-p$

Fall 1: „$q-b \neq 0$"

dann gilt $\alpha = \frac{a-p}{q-b} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$ ↯

Fall 2: $q-b=0$

also $q=b$ und $a=p$ das heißt $(a,b)=(p,q)$

4) „Vergleichbarkeit" (a,b) und (p,q) aus $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sind vglb., weil $\varphi_\alpha(a,b)$ und $\varphi_\alpha(p,q)$ vglb. sind.

5) „Monotoniegesetz": Seien $(a,b),(p,q),(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mit $(a,b) \leq_\alpha (p,q)$

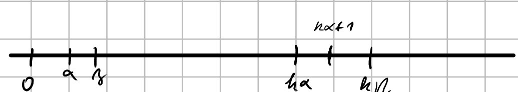
z.z. $\Rightarrow (a,b)+(x,y) \leq_\alpha (p,q)+(x,y) \Leftrightarrow (a+x)+\alpha(b+y) \leq (p+x)+\alpha(q+y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+\alpha b \leq p+\alpha q \Leftrightarrow (a,b) \leq_\alpha (p,q)$

Wegen der Kommutativität von „+" gilt auch $(x,y)+(a,b) \leq_\alpha (x,y)+(p,q)$

Sei nun $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$. Wir wollen die Ordnungen $\leq_\alpha$ und $\leq_\beta$ betrachten

o.B.d.A.: $(0<)\ \alpha < \beta \Leftrightarrow 0 < \beta-\alpha$



$\exists k \in \mathbb{N}: k(\beta-\alpha) > 1 \Leftrightarrow k\beta > k\alpha+1$

$n := \lceil k\alpha \rceil \Rightarrow n-1 < k\alpha < n \Rightarrow n < k\alpha+1 < k\beta$

Es gilt $k\alpha < n < k\beta \Rightarrow (0,k) <_\alpha (n,0) \wedge (0,k) >_\beta (n,0) \Rightarrow \leq_\alpha \neq \leq_\beta$

$\text{card}(\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}) = \text{card}(\mathbb{R}) \leq \text{card}(\text{Ordnungen auf } \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\text{, geordnete Gruppe})$

Theorem 3.5.3.16. Auf dem Körper $\mathbb{Q}(x)$ der gebrochen rationalen Funktionen sei eine Relation $<$ definiert durch $q_1(x) \leq q_2(x)$, falls $q_1 = q_2$ oder es ein $r_0 > 0$ gibt mit $q_1(r) < q_2(r)$ (in $\mathbb{R}$) für alle $r > r_0$. Zeigen Sie:

1. Die so definierte Relation $\leq$ macht $Q(x)$ zu einem nichtarchimedisch angeordneten Körper.
2. $Q(x)$ lässt sich als angeordneter Körper solcher in jeden anderen nichtarchimedisch angeordneten Körper isomorph einbetten.

UE 228 ▶ **Übungsaufgabe 3.5.3.17.** (B) Beweisen Sie Theorem 3.5.3.16. ◀ **UE 228**

1) $Q(x)$ ist ein Körper.

1.1) „reflexiv" $q_1 = q_2 \Rightarrow q_1 \leq q_2$

1.2) „transitiv" $q_1 \leq q_2 \wedge q_2 \leq q_3$

Fall 1: $q_1 = q_2 \vee q_2 = q_3$ klar

Fall 2: $q_1 < q_2 \wedge q_2 < q_3$

$\exists\, a, b \in \mathbb{Q}: \quad \forall r > a: \quad q_1(r) < q_2(r) \;\wedge\; \forall r > b: q_2(r) < q_3(r)$

$\Rightarrow \forall r > \max\{a, b\}: \; q_1(r) < q_2(r) < q_3(r)$

also: $q_1 \leq q_3$

1.3) „antisymmetrisch" $q_1 \leq q_2 \wedge q_2 \leq q_1$

Fall 1: $q_1 = q_2$

Fall 2: $q_1 < q_2 \wedge q_2 \leq q_1 \Rightarrow q_1 < q_2 \wedge q_2 < q_1$

$\exists\, s \in \mathbb{Q}: \forall r > s: \; q_1(r) < q_2(r) < q_1(r) \quad \Rightarrow q_1 < q_1 \;↯$

Fall 3: $q_1 \leq q_2 \wedge q_2 < q_1$ wie Fall 2

1.4) „Vergleichbarkeit" Seien $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2}$ aus $\mathbb{Q}(x)$ vergleichen wir die Auswertungen in $\mathbb{R}$ so gilt

$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \underset{(>)}{<} \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = p_1(x) q_2(x) \underset{(>)}{<} p_2(x)\, q_1(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j \quad (*)$

Da $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2}$ können wir $k := \max\{ i \in \{1, \dots, \max\{m,n\}\} \mid a_i \neq b_i \}$ finden. Es gilt weiter

$(*) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i x^i \underset{(>)}{<} \sum_{i=1}^{k} b_i x^i \Leftrightarrow 0 \underset{(>)}{<} \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)\, x^i \xrightarrow{x \to \infty} \begin{cases} +\infty, \text{ falls } b_k - a_k > 0 \\ -\infty, \text{ falls } b_k - a_k < 0 \end{cases}$

dürfen wir dieses Wissen voraussetzen?

also: $\exists\, s \in \mathbb{Q}: \forall r > s: \; 0 \underset{(>)}{<} \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)\, r^i \quad \Rightarrow \frac{p_1(r)}{q_1(r)} \underset{(>)}{<} \frac{p_2(r)}{q_2(r)}$

1.5) „Monotonie +" Seien $p, q, r \in \mathbb{Q}(x)$ und $p < q$

z.z. $\Rightarrow p(x) + r(x) < q(x) + r(x) \Leftrightarrow p(x) < q(x)$ Nach Vor. gilt das ab $z \in \mathbb{Q}$

1.6) „Monotonie ·" Seien $p, q, r \in \mathbb{Q}(x)$ mit $p < q \wedge r > 0$

z.z.: $\Rightarrow p(x) r(x) < q(x) r(x) \Leftrightarrow p(x) < q(x)$ ist für hinr. große x erfüllt

für hinr. große x mit $r(x) > 0$

1.7) „nichtarchimedisch" z.z.: $\exists\, p,q \in Q(x)^*$ (betrachtet als $(Q(x),0,+,\cdot)$) : $\forall k \in \mathbb{Z}: p \geq kq$

$p(x) := x$, $q(x) := 1$; $k \in \mathbb{Z}$ bel.

z.z. $\hookrightarrow p(x) \geq kq(x) \Leftrightarrow x \geq k$ es gibt ein $z \in \mathbb{Q}: \forall x > z: \quad x \geq k$

2) Sei nun K ein weiterer nichtarchimedisch angeordneter Körper und sei $\mathbb{Q}_K$ der Primkörper von K d.h. $\mathbb{Q}_K = \bigcap \{P \mid \mathbb{Q}_K \subseteq P \subseteq K \land P$ Unterkörper von $K\}$ (Def. 6.1.1.3)

P Unterkörper von $K :\Leftrightarrow P \subseteq K$ Unteralgebra als Ring mit 1 und P Körper (Def. 6.1.1.1.)

Aus der VO bzw. Übungsaufgabe 3.5.37. wissen wir für jeden angeordneten Körper mit $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}_K$; Isomorphismus mit dem Isomorphismus $\alpha: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_K$

Nach Übungsaufgabe 3.5.3.8: $\exists a \in K: \forall n \in \mathbb{N}_K \setminus \{0\}: \quad a \leq \frac{1}{n} \land a > 0$ also $n \leq a$

$\iota_1: \mathbb{Q}[x] \to K: \sum_{i=0}^{n} q_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \alpha(q_i)\, a^i$

ι_1 ist eine isomorphe Einbettung

•) „Homomorphismus": klar

•) „Injektivität" $\quad \iota_1(\sum_{i=0}^{n} q_i x^i) = \iota_1(\sum_{j=0}^{m} p_j x^j) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha(q_i)\, a^i = \sum_{j=0}^{m} \alpha(p_j)\, a^j$

o.B.d.A. $n \geq m$ und $\forall i \in \{m+1, \dots, n\}: p_i := 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\alpha(q_i - p_i)}_{\gamma_i :=} a^i = 0 \quad (\star)$

•) $\forall n \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}_K \quad a^{-n} < \frac{1}{k}$

IA: $\forall k \in \mathbb{N}_K: a^{-1} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_K\; k < a$ nach Wahl von a

IS: $\forall k \in \mathbb{N}: \; a^{-n} < \frac{1}{k}$

$l \in \mathbb{N}: \; a^{-(n+1)} < \frac{1}{l} \Leftrightarrow a^{-n} < \frac{1}{l} a \Leftarrow \exists k \in \mathbb{N}: \frac{1}{k} < \frac{1}{l} a$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \; \frac{l}{k} < a$

•) $\forall n \in \mathbb{N}\; \forall k \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} \gamma_i a^{-i} < \frac{1}{k}$

IA: $k \in \mathbb{N}$ bel. $\gamma_1 a^{-1} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \gamma_1 k < a$ nach def. von a

IS: gelte $\forall k \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i a^{-i} < \frac{1}{k}$

$l \in \mathbb{N}$ bel.: $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i a^{-i} < \frac{1}{l} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i a^{-i} < \frac{1}{l} - \gamma_n a^{-n} \Leftarrow \exists k \in \mathbb{N} \;\; \frac{1}{k} < \frac{1}{l} - \gamma_n a^{-n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \; \gamma_n a^{-n} < \frac{1}{l} - \frac{1}{k}$

Fall 1: „$\gamma_n \leq 0$": wähle $\frac{1}{l} - \frac{1}{k} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{l} > \frac{1}{k} \Leftrightarrow k > l$

Fall 2: „$\gamma_n > 0$": $\exists k \in \mathbb{N} \; a^{-n} < (\frac{1}{l} - \frac{1}{k})\gamma_n^{-1} \Leftarrow \exists k, j \in \mathbb{N}: \frac{1}{j} < (\frac{1}{l} - \frac{1}{k})\gamma_n^{-1}$

letzte Aussage gilt, weil $\mathbb{Q}_K$ archimedisch angeordnet ist.

Analog: $\forall n \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}\; -\frac{1}{k} < \sum_{i=1}^{n} \gamma_i a^i$

Endlich weiter $(*) \iff -r_n a^n = \sum_{i=0}^{n-1} r_i a^i \iff -r_n = \sum_{i=0}^{n-1} r_i a^{i-n} = \sum_{i=1}^{n} r_{n-i} a^{-i}$

Nach dem eben gezeigten:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad -\frac{1}{k} < \sum_{i=1}^{n} r_{n-i} a^{-i} = -r_n = \sum_{i=1}^{n} r_{n-i} a^{-i} < \frac{1}{k} \wedge -r_n \in \mathbb{Q}_K \Rightarrow r_n = 0$$

Wiederholen: $\forall i \in \{0, \dots, n\}: r_i = 0$ also $\alpha(q_i - p_i) = 0 \Rightarrow q_i = p_i$

Damit ist die Injektivität gezeigt, also können wir verwenden, dass $\mathbb{Q}(x)$ Quotientenkörper ist und erhalten

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}[x] \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\iota"'] & K \\ & \mathbb{Q}(x) \arrow[u, "\exists!\, \varphi \text{ isomorphe Einbettung}"'] \end{tikzcd}$$

mit $\varphi \circ \iota = \iota_1$

•) „Verträglichkeit mit $\leq$"

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}(x)$; $\frac{p}{q} > 0 \Rightarrow p > 0 \wedge q > 0$

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(p)(\varphi(q))^{-1} = \varphi(\iota(p))\,(\varphi(\iota(q)))^{-1} = \underbrace{\iota_1(p)}_{>0}(\underbrace{\iota_1(q)}_{>0})^{-1} > 0$$

nach Def.

Mit Übungsaufgabe 3.5.3.12 Punkt (4) ist damit φ monoton.

UE 279 ▶ Übungsaufgabe 3.6.9.10. (W) Sei B eine unendliche Boolesche Algebra. Zeigen Sie, dass es einen Ultrafilter gibt, der kein Atom enthält. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Menge I aller $b \in B$, zu denen es Atome $a_1, \ldots, a_k$ von B mit $b \le a_1 \vee \cdots \vee a_k$ gibt, ein echtes Ideal von B ist, und betrachten Sie B/I.) ◀ **UE 279**

$I := \{ b \in B \mid \exists a_1, \ldots, a_k : b \le a_1 \vee \ldots \vee a_k \ , k \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_k \text{ Atome} \}$

1) „I ist Ideal" $\qquad x \le y \Leftrightarrow x \vee y = y$

1.1) $x, y \in I$ mit $x \le a_1 \vee \ldots \vee a_n$ und $y \le b_1 \vee \ldots \vee b_m$

Aus der Monotonie (Satz 3.6.1.1. Punkt (1)) erhalten wir

$x \vee y \le a_1 \vee \ldots \vee a_n \vee b_1 \vee \ldots \vee b_m \Rightarrow x \vee y \in I$

1.2) $x \in I$, $y \in B$ mit $y \le x$

Wieder wegen der Monotonie: $y \le x \le a_1 \vee \ldots \vee a_n \Rightarrow y \in I$

2) „echtes Ideal" Ang. $1 \in I$, dann ist $1 \le a_1 \vee \ldots \vee a_n$

und $1 \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_n) = 1$ also $1 = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ mit $a_k \neq a_l$

also gilt $a_k \wedge a_l = 0$

$b \in B$ bel. $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : b \wedge a_j = a_j$ oder $b \wedge a_j = 0$, sonst wäre $b \wedge a_j < a_j$ ↯ zu a_j Atom

also $\exists J \subseteq \{1, \ldots, n\} : b = \bigvee_{i \in J} a_i$

aber dann wäre B endlich ↯

3) „B/I" Nach Lemma 3.66.7 ist I auch ein Ideal im zugeordneten Boolschen Ring R $(= B)$

wegen $x \cdot y := x \wedge y$ gilt $x \cdot y = x \wedge y = y \wedge x = y \cdot x$, also ist R kommutativer Ring mit 1

I ist auch in R ein echtes Ideal, weil $1 \notin I$ (vgl. Satz 3.3.2.4 Punkt 1). Punkt 4 des gleichen Satzes sagt, dass es ein maximales Ideal J gibt mit $I \subseteq J$.

J maximales Ideal $:\Leftrightarrow$ J echtes Ideal und $\forall K \subseteq R : (J \subseteq K \Rightarrow J = K$ oder $K = R)$

J ist dann ebenfalls echtes Ideal in der Boolschen Algebra B

$F := J' = \{ b' \mid b \in J \}$ ist nach Lemma 3.6.6.7 ein Filter und wegen $1 \notin J$ also $0 \notin F$ auch ein echter Filter.

fehlt!

Satz 4.1.3.4. *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät und $\mathfrak{F}$ frei in $\mathcal{V}$ über (X, ι). Die Variablenmenge X enthalte mindestens n verschiedene Elemente $x_1, \ldots, x_n$. Gelte das Gesetz $\gamma = (t_1, t_2)$ mit Termen $t_1 = t_1(x_1, \ldots, x_n)$ und $t_2 = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, die von nicht mehr als n Variablen abhängen, in $\mathfrak{F}$. Dann gilt γ in $\mathcal{V}$, d.h. in allen $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$.*

UE 291 ▶ **Übungsaufgabe 4.1.3.5.** (W) Seien $t(x_1, \ldots, x_n)$ und $t'(x_1, \ldots, x_n)$ Terme (in einer festen Sprache L), in denen jeweils nur die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ (oder Teilmengen davon) vorkommen. Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät (zur Sprache L). Für $C \in \mathcal{V}$ schreiben wir $C \models t \approx t'$ (gelesen „das Gesetz $t = t'$ gilt in C") als Abkürzung für ◀ **UE 291**

$$\forall c_1, \ldots, c_n \in C : t(c_1, \ldots, c_n) = t'(c_1, \ldots c_n).$$

Sei $F \in \mathcal{V}$ frei über der n-elementigen Menge $\{b_1, \ldots, b_n\}$ in $\mathcal{V}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind, und schließen Sie daraus, dass 4.1.3.4 gilt:

(a) In F gilt $t(b_1, \ldots, b_n) = t'(b_1, \ldots, b_n)$.

(b) Für alle $C \in \mathcal{V}$ gilt $C \models t \approx t'$.

(c) Es gilt $F \models t \approx t'$.

„(a) ⇒ (b)" $C \in \mathcal{V}$ bel. und $c_1, \ldots, c_n \in C$ bel.

$$\begin{tikzcd} \{b_1, \ldots, b_n\} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "j"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Sei $j : \{b_1, \ldots, b_n\} \to C$ mit $j(b_1) = c_1, \ldots j(b_n) = c_n$

$t(c_1, \ldots, c_n) = t(j(b_1), \ldots j(b_n)) = t(\varphi(\iota(b_1)), \ldots, \varphi(\iota(b_n))) =$

$= \varphi(t(\iota(b_1), \ldots, \iota(b_n))) = \varphi(t(b_1, \ldots, b_n)) = \varphi(t'(b_1, \ldots, b_n)) =$

$= t'(\varphi(\iota(b_1)), \ldots, \varphi(\iota(b_n))) = t'(c_1, \ldots, c_n)$

„(b) ⇒ (c)" In Satz 4.1.3.1. haben wir gesehen $F \in \mathcal{V}$, also ist diese Implikation trivial

„(c) ⇒ (a)" $\forall a_1, \ldots, a_n \in F : t(a_1, \ldots, a_n) = t(a_1, \ldots, a_n) \wedge b_1, \ldots, b_n \in F$ also

$t(b_1, \ldots, b_n) = t(b_1, \ldots, b_n)$

<u>zu Satz 4.1.3.4</u> $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$ bel mit A als Trägermenge und $a_1, \ldots, a_n \in A$ bel.

$t_1(a_1, \ldots, a_n) = \ldots = t_2(a_1, \ldots, a_n)$ (wie in „(a) ⇒ (c)")

UE 296 ► **Übungsaufgabe 4.1.4.1.** (B,E) Sei $(\mathcal{G}, i_1, i_2)$ ein Koprodukt von C_2 und C_2. (Ja, 2 Mal die 2-elementige Gruppe.) Wir schreiben $\mathcal{G} = (G, *, 1, {}^{-1})$. Sei F_2 die von 2 Elementen frei erzeugte Gruppe. ◄ **UE 296**

1. Beschreiben Sie die Elemente von G sowie die Gruppenoperation $*$ möglichst explizit (zum Beispiel durch eine „Normalform“, ähnlich wie wir die Elemente von F_2 beschrieben haben); jedenfalls so explizit, dass die nächste Teilaufgabe trivial wird.

2. Zeigen Sie, dass G unendlich viele Elemente hat, indem sie explizit unendlich viele (verschiedene) Elemente angeben. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ nicht abelsch ist, indem Sie 2 Elemente $x, y \in G$ angeben mit $x * y \neq y * x$.

3. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ nicht zu F_2 isomorph ist.

1) $\mathcal{G} = C_2 \amalg C_2$, $i_1 : C_2 \to \mathcal{G}$, $i_2 : C_2 \to G$ Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dd, bend left=60, "\exists! h"] & \\
C_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & & C_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

H bel. Gruppe und $f_1, f_2 : C_2 \to H$ Homomorphismen

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\exists! h$ Homomorphismus mit $h \circ i_1 = f_1$ und $h \circ i_2 = f_2$

$i_1 \overset{?}{\neq} i_2$ ang. es ist so

dann ist $i_1(a) \neq i_2(a)$

Ang. $i_1(a)^{-1} = i_2(a) = i_1(a^{-1}) = i_2(a) \Rightarrow i_1(a) = i_2(a)$ ↯

Ang. $i_1(a) = 1 \Rightarrow \forall H : (H$ Gruppe und $f_1 : C_2 \to H$ Homomorphismus: $\Rightarrow f_1(a) = h(i_1(a)) = 1_H)$

betrachte $H = C_2$ mit $f_1 = id$ ↯

also: $1 \neq i_1(a)^{-1} = i_1(a) \overset{?}{\neq} i_2(a) = i_2(a)^{-1} \neq 1$

Wegen der Eindeutigkeit von inversen Elementen ist $1 \neq i_1(a) * i_2(a) \in G$

$(i_1(a) * i_2(a))^{-1} = (i_2(a))^{-1} * (i_1(a))^{-1} = i_2(a) * i_1(a)$

Beh. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $g_n := \prod_{i=1}^{n} i_{(i \bmod 2)+1}(a) \in G$ und $\forall k < n :$ $g_k = \prod_{i=1}^{k} i_{(i \bmod 2)+1}(a) \neq g_n$

$g_n \in G$ ist klar

IA: $n = 0 : 1 \in G$ ✓

fehlt!

IS: Sei also $\forall k, l \leq n : g_k \neq g_l$

Ang.: $k < n+1$ und $g_k = g_{n+1}$

Fall 1: „$k = 0$“ also $1 = g_{n+1}$

UE 312 ▶ **Übungsaufgabe 4.2.3.6.** (W) Zeigen Sie, dass Polynomalgebren $A[X]$ für gegebenes A und X bis auf Äquivalenz in einer geeigneten Kategorie eindeutig bestimmt sind. In Varietäten sind Polynomalgebren bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. ◀ **UE 312**