1. Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit C^∞-Rand und 1_Ω ihre Indikatorfunktion. Zeigen Sie

$$\langle \Delta 1_\Omega, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist.

Satz 1.5 (Gauß). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und äußerem Normaleneinheitsvektor ν, definiert auf $\partial\Omega$. Ferner sei $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ eine vektorwertige Funktion. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds.$$

$$\langle \Delta \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbb{1}_\Omega}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 \mathbb{1}_\Omega}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \mathbb{1}_\Omega, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \, d\lambda^n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega \Delta \varphi \, d\lambda^n = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla \varphi) \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi \cdot \nu \, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, ds$$

2. Zeigen Sie, dass
$$F = \frac{1}{\sigma_n}\frac{x}{|x|^n}$$
eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(u) = \operatorname{div} u$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, wobei σ_n die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist. Achtung: obwohl F eigentlich eine vektorwertige Distribution in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)^n$ ist, wird das nicht gebraucht um die Behauptung
$$\langle \operatorname{div} F, \varphi\rangle = \varphi(0)$$
zu zeigen, da $\operatorname{div} F = \frac{1}{\sigma_n}\sum_i \partial_i\left(\frac{x_i}{|x|^n}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

Wir betrachten die Menge $B_\varepsilon(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \varepsilon\}$, $\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$ und berechnen

$\langle \operatorname{div} F, \varphi\rangle = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n \langle \partial_i(\frac{x_i}{|x|^n}), \varphi\rangle = -\frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n \langle \frac{x_i}{|x|^n}, \partial_i\varphi\rangle = -\frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{x_i}{|x|^n}\partial_i\varphi(x)\,dx$ betrachte also

$-\int_{\Omega_\varepsilon} F\cdot\nabla\varphi\,dx \overset{(1)}{=} -\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\varphi F\cdot\nu\, \underbrace{dH^{n-1}}_{\text{Hausdorffmaß - bei uns } ds} + \int_{\Omega_\varepsilon}\varphi \operatorname{div} F\, d\lambda^n$, wobei $\nu(x) = \frac{-x}{|x|}$ der ins Äußere zeigende Normalvektor von $\partial\Omega_\varepsilon$ ist.

Bei (1) verwenden wir „mehrdimensionale partielle Integration" die sich als Folgerung des Satzes von Gauß ergibt, vgl. Skriptum S. 9, Formal wird Ω_ε beschränkt mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega_\varepsilon$

$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\varphi F\cdot\nu\, dH^{n-1} = \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\varphi(x)\frac{|x|^2}{|x|^{n+1}}\,dH^{n-1}(x) = \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{|x|^{n-1}}\,dH^{n-1}(x) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\sigma_n}\varphi(x_\varepsilon)\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{1}{|x|^{n-1}}\,dH^{n-1}$

$= \frac{1}{\sigma_n}\varphi(x_\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} dH^{n-1} = \frac{1}{\sigma_n}\varphi(x_\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\sigma_n\varepsilon^{n-1} = \varphi(x_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \varphi(0)$

(2) ist hier der Mittelwertsatz der Integralrechnung

$\partial_i(\frac{x_i}{|x|^n}) = \partial_i\left(x_i\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right) = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}} - x_i\frac{n}{2}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}-1} 2x_i = \frac{1}{|x|^n} - \frac{n x_i^2}{|x|^{n+2}}$ wegen $-\frac{n}{2}-1 = -\frac{n}{2}-\frac{2}{2} = -\frac{n+2}{2}$

also $\operatorname{div} F = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n \partial_i(\frac{x_i}{|x|^n}) = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{|x|^n} - \frac{n x_i^2}{|x|^{n+2}}\right) = \frac{n}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|x|^n} - \frac{|x|^2}{|x|^{n+2}}\right) = 0$ und daher

$\int_{\Omega_\varepsilon}\varphi \operatorname{div} F\, d\lambda^n = 0$

In sphärischen Koordinaten lautet das Integral über den Radialanteil der Funktion $f(x) = |x|^{-(n-1)}$ (in sphärischen Koord. $f(r) = r^{-(n-1)}$)

$\int_0^r \rho^{-(n-1)}\rho^{n-1}\,d\rho = r < \infty$ und daher gilt für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ auch $\int_K |x|^{-(n-1)}\,d\lambda^n(x) < \infty$

Somit erhalten wir $\int_K |\sum_{i=1}^n x_i|\,|x|^{-n}\,d\lambda^n(x) \overset{\text{Cauchy-Schwarz-Bunjakowski}}{\leq} \int_K n\,|x|\,|x|^{-n}\,d\lambda^n(x) = n\int_K |x|^{n-1}\,d\lambda^n(x) < \infty$

also $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^n} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

3. Gegeben $v \in C^2(\mathbb{R})$, sei $u(x,t) = v(x/\sqrt{t})$ für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie:

$$u_t = u_{xx} \Longleftrightarrow v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung v und damit u.

(ii) Wählen sie die Konstanten in u so, dass

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = 0 \text{ für } x < 0, \quad \lim_{t\to 0+} u(t,x) = 1 \text{ für } x > 0.$$

(iii) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Funktion $f(x,t) = ((\partial_x u(.,t)) * \varphi)(x)$ (Faltung in der x-Variablen) folgendes Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung löst:

$$f_t - f_{xx} = 0$$
$$\lim_{t\to 0+} f(t,x) = \varphi(x)$$

(i) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(v(xt^{-1/2})) = v'(xt^{-1/2})\,(-\tfrac{1}{2})\,x\,t^{-3/2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{t}$

also $u_t = u_{xx} \Leftrightarrow -v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{2}\,x\,t^{-3/2} = v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)t^{-1} \Leftrightarrow v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{t}} = 0 \overset{z=\frac{x}{\sqrt{t}}}{\Leftrightarrow} v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0$

Betrachte also $v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0$ also $v''(z) = -\frac{z}{2}v'(z) \rightsquigarrow 2\frac{v''}{v'} = -z \rightarrow (\ln(v'))' = -\frac{z}{2}$

$\rightarrow \ln(v') = -\frac{1}{4}z^2 + c_1 \rightarrow v' = c_2 e^{-\frac{z^2}{4}} \rightsquigarrow v(z) = c_2 \int_{-\infty}^{z} e^{-(\frac{y}{2})^2}\,dy + c_3 \left| \begin{matrix} s = \frac{y}{2} \\ \frac{ds}{dy} = \frac{1}{2} \\ dy = 2ds \end{matrix} \right| = 2c_2 \int_{-\infty}^{\frac{z}{2}} e^{-s^2}\,ds$

also $u(x,t) = \underbrace{c_4}_{=2c_2} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\,ds + c_3$

vgl. Koltenbach Bsp. 8.7.13

(ii) $x<0$: $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = c_3 \overset{!}{=} 0$ und $x>0$: $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = c_4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds \overset{!}{=} c_4\sqrt{\pi} \overset{!}{=} 1$ also $c_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

damit $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\,ds \left| \begin{matrix} r = 2\sqrt{t}\,s \\ \frac{dr}{ds} = 2\sqrt{t} \\ ds = \frac{dr}{2\sqrt{t}} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dr$

(iii) $\partial_x u(\cdot,t) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ also: $f(x,t) = ((\partial_x u(\cdot,t)) * \varphi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4t}} \varphi(x-y)\,dy$

$f_t - f_{xx} = \partial_t((\partial_x u(\cdot,t) * \varphi)(x)) = (\partial_{tx} u(\cdot,t) * \varphi)(x) - (\partial_{xxx} u(\cdot,t) * \varphi)(x) =$

$= ((\partial_{tx} u(\cdot,t) - \partial_{xxx} u(\cdot,t)) * \varphi)(x) = ((\partial_x \underbrace{(\partial_t u(\cdot,t) - \partial_{xx} u(\cdot,t))}_{=0}) * \varphi)(x) = 0$

$\lim_{t\to 0+} f(x,t) \overset{\text{Lemma 3.14 (1)}}{=} \lim_{t\to 0+} (u(\cdot,t) * \varphi')(x) = \lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}} u(x-y,t)\,\varphi'(y)\,dy \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0+} u(x-y,t)\,\varphi'(y)\,dy =$

$|u(x-y,t)| \leq \sqrt{\pi}$ also majorisierte Konvergenz

$= \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\lim_{t\to 0+} u(x-y,t)}_{=1} \varphi'(y)\,dy + \int_{x}^{\infty} \underbrace{\lim_{t\to 0+} u(x-y,t)}_{=0} \varphi'(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \varphi'(y)\,dy = \varphi(x)$

(1) $u(\cdot,t)$ ist als stetige Funktion auch lokal integrierbar.

4. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(x,y) = (8\pi)^{-1}(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

ist eine Fundamentallösung von Δ^2 mit Pol in $(0,0)$ im $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_i x_j x_j}.$$

Wir definieren $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ und $\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\varepsilon}$ und berechnen

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta^2 \varphi \, d\lambda^n \overset{\text{Erster Green}}{=} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u \nabla(\Delta\varphi)\cdot\nu \, dH^{n-1} - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla(\Delta\varphi)\, d\lambda^n \overset{\text{part. Integration}}{=} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\nabla(\Delta\varphi)\cdot\nu\, dH^{n-1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\varphi \operatorname{div}(\nabla u)\, d\lambda^n - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta\varphi\, (\nabla u\cdot\nu)\, dH^{n-1} =$$

$$= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\nabla(\Delta\varphi)\cdot\nu\, dH^{n-1} - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta\varphi \ \nabla u\cdot\nu\ dH^{n-1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\varphi\Delta u\, d\lambda^n$$

Satz 5.3.9 (Erster Green'scher Integralsatz)**.** *Sind f und g aus $C^2(\Omega)$ für eine offene beschränkte Menge Ω mit $\bar{A} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}$, A beschränkt und offen sowie* **n** *der normierte in das Äußere von A zeigende Normalvektor auf $\partial_r A$ und $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \setminus \partial_r A) = 0$, so gilt, wenn beide Integrale existieren:*

$$\int_A g\Delta f\, d\lambda^n = \int_{\partial_r A} g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_A \nabla f^T \nabla g\, d\lambda^n,$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}\nabla f$ die Richtungsableitung von f nach **n** *bezeichnet.*

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, und es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ergibt die Produktregel $\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F$ und damit

$$\int_\Omega u \operatorname{div} F dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial\Omega} u(F\cdot\nu) ds.$$

Dies ist das mehrdimensionale Analogon der partiellen Integration.

Nun können wir u in sphärischen Koordinaten schreiben: $u(r) = (8\pi)^{-1} r^2 \ln(r)$; $u'(r) = (8\pi)^{-1}(2r\ln(r) + r)$;

Mit dem Laplace-Operator in sphärischen Koordinaten gilt $\Delta u(r) = u''(r) + r^{-1}u'(r) = (8\pi)^{-1}((2\ln(r)+3) + 2\ln(r)+1) = \frac{1}{2\pi}(\ln(r)+1)$

Wir können also mit $\tilde{u}(x,y) := \frac{1}{2\pi}\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ die Gleichung $\Delta u = \tilde{u} + \frac{1}{2\pi}$ anschreiben

und wir wissen aus Satz 4.1, dass $\tilde{u}$ Fundamentallösung des Laplace-Operators ist, daher

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\varphi\Delta u\, d\lambda^n = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\varphi\,\tilde{u}\, d\lambda^n + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_\varepsilon}\Delta\varphi\, d\lambda^n = \varphi(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \nabla\varphi\cdot\nu\, dH^{n-1}$$ und

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\nabla\varphi\cdot\nu\, dH^{n-1}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sup\{|\nabla\varphi(x)| : x\in\mathbb{R}^n\}\, H^{n-1}(\partial\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$ weiters

$$\left|\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\nabla(\Delta\varphi)\cdot\nu\, dH^{n-1}\right| \leq |u(\varepsilon)|\, H^{n-1}(\partial\Omega_\varepsilon)\sup\{|\nabla(\Delta\varphi)| : x\in\mathbb{R}^n\} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$ und

$\nu(x) = \frac{-x}{|x|}$ und in sphärischen Koordinaten $\nu(r,\alpha) = \begin{pmatrix}1\\ \alpha+\pi\end{pmatrix}$, also $v(r) := \nabla u(r)\cdot\nu(r) = \frac{r\ln(r)}{4\pi} + \frac{r}{8\pi} \xrightarrow{r\to 0} 0$ und damit

$$\left|\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\Delta\varphi\ \nabla u\cdot\nu\ dH^{n-1}\right| \leq |v(\varepsilon)|\sup\{|\Delta\varphi(x)| : x\in\mathbb{R}^n\}\, H^{n-1}(\partial B_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Insgesamt erhalten wir so $\langle\Delta^2 u, \varphi\rangle = \langle u, \Delta^2\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} u\Delta^2\varphi\, d\lambda^n = \varphi(0)$

$\lim_{r\to 0+} r^2\ln(r) = \lim_{r\to 0+}\frac{\ln(r)}{r^{-2}} = \lim_{r\to 0+}\frac{r^{-1}}{-2r^{-3}} = \lim_{r\to 0+} -\frac{1}{2}r^2 = 0$, also kein Pol in $(0,0)$?

Bemerkung: H^{n-1} ist das $n-1$ dimensionale Hausdorffmaß, formal beschränken wir $\Omega_\varepsilon \supseteq \operatorname{supp}\varphi$ um den Satz von Gauß anwenden zu dürfen

5. Bestimmen Sie die formal adjungierten Operatoren von

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ L\phi &= a(x,y)\phi_x + b(x,y)\phi_y + c(x,y)\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\,, \\ \text{(ii)}\ L\phi &= x^2\phi'' + \phi' - 3x^2\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \\ \text{(iii)}\ L\phi &= \Delta\phi + v(x)\cdot\nabla\phi\,, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,, \end{aligned}$$

mit $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

(i) $L^*\varphi = -\partial_x(a\varphi) - \partial_y(b\varphi) + c\varphi = -\partial_x a\varphi - a\partial_x\varphi - \partial_y b\varphi - b\partial_y\varphi + c\varphi$

(ii) $L^*\varphi = (x^2\varphi)'' - \varphi' - 3x^2\varphi = (2x\varphi + x^2\varphi')' - \varphi' - 3x^2\varphi = 2\varphi + 2x\varphi' + 2x\varphi' + x^2\varphi'' - \varphi' - 3x^2\varphi = x^2\varphi'' + (2x-1)\varphi' + (2-3x^2)\varphi$

(iii) $L\phi = \sum_{i=1}^{n}\left(\partial_{x_ix_i}\phi + v_i\,\partial_{x_i}\phi\right)$

$L^*\phi = \sum_{i=1}^{n}\left(\partial_{x_ix_i}\phi - \partial_{x_i}(v_i\phi)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\partial_{x_ix_i}\phi - \partial_{x_i}v_i\,\phi - v_i\,\partial_{x_i}\phi\right) = \Delta\phi - \mathrm{div}(v)\,\phi - v\cdot\nabla\phi$

6. Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von ∂^α in $\mathbb{R}^n$ mit Träger in

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ \forall i = 1 \dots n\},$$

wobei alle $\alpha_i > 0$ sind.

$n=1$: $k=1$: $u_1 = \mathbb{1}_{]0,\infty[} \to \langle u_1', \phi\rangle = -\langle u_1, \phi'\rangle = -\int_0^\infty \phi'(x)dx = -\left(\lim_{r\to\infty}\phi(r) - \phi(0)\right) = \phi(0)$

$k=2$: $u_2 = id\, \mathbb{1}_{]0,\infty[} \rightsquigarrow \langle u_2'', \phi\rangle = \langle u_2, \phi''\rangle = \int_0^\infty x\,\phi''(x)\,dx = \left[x\,\phi'(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0)$

$k=3$: $u_3(x) = \frac{x^2}{2}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \rightsquigarrow \langle u_3''', \phi\rangle = -\langle u_3, \phi'''\rangle = -\int_0^\infty \frac{x^2}{2}\phi'''(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2}\phi''(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty x\,\phi''(x)dx = \phi(0)$

ang. $u_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$ mit $\langle u_k^{(k)}, \phi\rangle = \phi(0)$

So gilt $u_{k+1}(x) = \frac{x^k}{k}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$ erfüllt $\langle u_{k+1}^{(k+1)}, \phi\rangle = (-1)^{k+1}\langle u_{k+1}, \phi^{(k+1)}\rangle = (-1)^{k+1}\int_0^\infty \frac{x^k}{k}\phi^{(k+1)}(x)dx$

$= \left[(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\phi^{(k)}(x)\right]_0^\infty + (-1)^{k+2}\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{k-1}\phi^{(k)}(x)dx = (-1)^k\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{k-1}\phi^{(k)}(x)dx = (-1)^k\langle u_k, \phi^{(k)}\rangle = \langle u_k^{(k)}, \phi\rangle = \phi(0)$

Behauptung: $u_{n\alpha}(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^n(\alpha_i-1)!\right)^{-1}$

$\langle D^\alpha u_{n+1,\alpha}, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_{n+1,\alpha}, D^\alpha\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left(\prod_{i=1}^n(\alpha_i-1)!\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x_i)\right)\int_0^\infty \frac{x^{\alpha_{n+1}-1}}{(\alpha_{n+1}-1)!}D^\alpha\phi(x)\,dx_{n+1}\,dx'$

wobei $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$= (-1)^{|\alpha|}\left(\prod_{i=1}^n(\alpha_i-1)!\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x_i)\right)D^{\alpha'}\phi(x',0)\,dx' = \langle D^{\alpha'}u_{n,\alpha'}, \phi\rangle = \phi(0)$

7. Bestimmen Sie Fundamentallösungen mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$ folgender Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}$:

(i) $L(u) = u'$

(ii) $L(u) = u''$

(iii) $L(u) = u' - au$ $(a \neq 0)$ (*Hinweis:* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung u_{hom} der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ und verwenden Sie einen Ansatz der Form $U_0(x) = C_1 u_{hom}(x)$ für $x < 0$, $U_0(x) = C_2 u_{hom}(x)$ für $x > 0$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

(i) Vermutung: $u_\xi(x) = \left(-\mathbb{1}_{]-\infty,\xi]}(x) + \mathbb{1}_{]\xi,\infty[}(x)\right)\frac{1}{2}$

$\langle u_\xi', \phi\rangle = -\langle u_\xi, \phi'\rangle = \left(\int_{-\infty}^{\xi} \phi'(x)dx - \int_{\xi}^{\infty} \phi'(x)dx\right)\frac{1}{2} = \phi(\xi)$

(ii) $u_\xi(x) = x(\xi-1)\mathbb{1}_{]-\infty,\xi]}(x) + \xi(x-1)\mathbb{1}_{]\xi,\infty[}(x)$; siehe dazu Beispiel 3.20 (im Skriptum)

(iii) $u' - au = 0 \rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom $\chi(\lambda) = \lambda - a$ also $u_{hom}(x) = Ce^{ax}$

Ansatz: $U_0(x) = C_1 e^{ax}\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + C_2 e^{ax}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$

$\langle U_0', \phi\rangle = -C_1\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\phi'(x)dx - C_2\int_{0}^{\infty} e^{ax}\phi'(x)dx = [-C_1 e^{ax}\phi(x)]_{-\infty}^{0} + C_1 a\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\phi(x)dx + [-C_2 e^{ax}\phi(x)]_{0}^{\infty} + C_2 a\int_{0}^{\infty} e^{ax}\phi(x)dx$

$a\langle U_0, \phi\rangle = C_1 a\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\phi(x)dx + C_2 a\int_{0}^{\infty} e^{ax}\phi(x)dx$

$\langle U_0', \phi\rangle - a\langle U_0, \phi\rangle = -C_1\phi(0) + C_2\phi(0)$, also $C_2 - C_1 \stackrel{!}{=} 1$ wähle $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_1 = -\frac{1}{2}$

daher $U_0(x) = \frac{1}{2}e^{ax}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) - \frac{1}{2}e^{ax}\mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x)$

$U_\xi(x) = T_{-\xi}(U_0)(x) = U_0(x-\xi) = \frac{1}{2}e^{a(x-\xi)}\mathbb{1}_{]\xi,\infty[}(x) - \frac{1}{2}e^{a(x-\xi)}\mathbb{1}_{]-\infty,\xi]}(x)$