Musterlösung des vierten Analysis I Übungstests

22. Jänner 2016

Gruppe B

Beispiel 1

Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) & x \leq 0 \\ e^{2x} & 0 < x < 1 \\ x + b & x \geq 1 \end{cases}$$

in Abhängigkeit der reellen Parameter a, b stetig?
Was ist die größte Teilemenge von $\mathbb{R}$ auf die die Funktion

$$g : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - x}$$

stetig fortgesetzt werden kann? Wie und warum.

<u>**Lösung:**</u> Die Funktion f ist bei x_0 genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x). \tag{1}$$

Zuerst werden die Punkte im inneren der jeweiligen Definitionsbereiche überprüft

- Für $x_0 < 0$ gilt sicherlich (1), da es eine offene Kugel $U_\delta(x_0)$ gibt, die ganz im Definitionsbereich enthalten ist und $x \mapsto a\cos(x)$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist. Die Aussage gilt unabhängig von a und b.
- Analog zeigt man, dass f bei $0 < x_0 < 1$ stetig ist.
- Auch für $x_0 > 1$ lässt sich dieses Argument anwenden.

$$\boxed{\text{Das heißt } f \text{ ist bei } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \text{ unabhängig von } a \text{ und } b \text{ stetig}}$$

Die einzigen kritischen Punkte bleiben 0 und 1. Daher wird die notwendige und hinreichende Bedingung (1) überprüft.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0-} f(x) &= \lim_{x \to 0-} a\cos(x) \\ &= a\cos(0) = a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} e^{2x} \\ &= e^{2 \cdot 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Außerdem liest man der Definition ab, dass $f(0) = a$. Daher ist Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn $a = 1$ gilt.

$$\boxed{\text{Das heißt } f \text{ ist bei 0 genau dann stetig, wenn } a = 1.}$$

Das ganze noch einmal für den kritischen Punkt 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} f(x) &= \lim_{x\to 1-} e^{2x} \\ &= e^2\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+} x+b \\ &= 1+b\end{aligned}$$

Man sieht wieder einfach, dass $f(1) = 1 + b$. Deswegen muss $b = e^2 - 1$ gelten, um die Bedingung (1) zu erfüllen.

$$\boxed{\text{Das heißt } f \text{ ist bei 1 genau dann stetig, wenn } b = e^2 - 1.}$$

Da die Nullstellen des Nenners von $\frac{x^3+x-2}{x^2-x}$ genau 0 und 1 sind, ist g überall sonst stetig als Zusammensetzung stetiger Funkionen. Die Funktion g kann genau dann bei x_0 stetig fortgesetzt werden, wenn $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existiert.

Um das für 0 und 1 zu überprüfen wird $g(x)$ zu nächst umgeformt. Um den Zähler zu faktorisieren, kann man alle ganzzahligen Teiler des Koeffizienten von x^0 als potentielle Nullstelle testen. Man erkennt einfach, dass 1 eine Nullstelle ist. Somit teilt $x - 1$ den Zähler.

$$g(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x^2 + x + 2)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{x^2 + x + 2}{x} = x + 1 + \frac{2}{x}$$

Alternativ hätte man auch eine Polynomdivision durchführen können. Laut den Rechenregeln für konvergente Netze gilt

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x + 1 + \frac{2}{x} = 4$$

$$\boxed{\text{Das heißt } g \text{ kann bei 1 stetig fortgesetzt werden mit } g(1) = 4.}$$

Nachdem $\frac{1}{x}$ für $x \to 0$ unbeschränkt ist und $\lim_{x\to 0}(x + 1) = 0$ gilt, dass die Summe der beiden Netze sicherlich auch unbeschränkt ist. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} g(x)$ nicht.

$$\boxed{\text{Das heißt } g \text{ kann bei 0 NICHT stetig fortgesetzt werden.}}$$

Beispiel 2

Ist die Teilmenge $M := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{Re}(z) > 0\} \cup \{\mathrm{i}\}$ von $\mathbb{C}$ offen, abgeschlossen oder kompakt? Warum bzw. warum nicht?

Lösung:

- offen: Die Menge M ist genau dann offen wenn

  $$\forall x \in M : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } U_\epsilon(x) \subseteq M$$

  Mit $x = \mathrm{i}$ und $\epsilon > 0$ beliebig gilt: $\mathrm{i}(1-\frac{\epsilon}{2}) \in U_\epsilon(\mathrm{i})$ aber $\mathrm{Re}(\mathrm{i}(1-\frac{\epsilon}{2}))\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}(1-\frac{\epsilon}{2})) = 0$, also gilt $x \notin M$ und $U_\epsilon(\mathrm{i}) \nsubseteq M$. Da ϵ beliebig war gilt

  $$\exists x \in M : \forall \epsilon > 0 \text{ gilt: } U_\epsilon(x) \nsubseteq M$$

  $$\boxed{\text{Die Menge } M \text{ ist NICHT offen.}}$$

- abgeschlossen: Die Menge M ist genau dann abgeschlossen wenn jeder Häufungspunkt von M in M enthalten ist.
  Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt wenn es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in M gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.
  Mit $z_n = \frac{1}{n} + \frac{\mathrm{i}}{n}$ gilt:

  $$\operatorname{Re}(z_n)\operatorname{Im}(z_n) = \frac{1}{n^2} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

  also $z_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
  Weiters gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Das heißt 0 ist Häufungspunkt von M, wegen $\operatorname{Re}(0)\operatorname{Im}(0) = 0$ ist $0 \notin M$. Also gilt

  $$\exists\, z : z \text{ ist Häufungspunkt von } M \wedge z \notin M.$$

  In anderen Worten

  $$\boxed{\text{Die Menge } M \text{ ist NICHT abgeschlossen.}}$$

- kompakt: Im metrischen Raum $(\mathbb{C}, d_2)$ gilt

  $$M \subseteq \mathbb{C} \text{ kompakt } \Rightarrow M \text{ abgeschlossen}$$

  Da M nicht abgeschlossen ist gilt demnach

  $$\boxed{\text{Die Menge } M \text{ ist NICHT kompakt.}}$$