Analysis 3 - Übung

11. UE am 13.01.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 89. *Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & 0 < x < 1, \\ ax - 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ *schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwachen Ableitungen.*

Zeigen Sie: Für $u(\boldsymbol{x}) = \log|\boldsymbol{x}|$ *und* $\nu_i(\boldsymbol{x}) = \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^2}$ *ist* ν_i *die schwache Ableitung* $D^i u$ *in* $\mathbb{R}^n$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 90. *Sind* $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$*, so ist* $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ *mit* $D_i(uv) = D_i uv + uD_i v$

Lösung. Trivial!

Aufgabe 91. *Verschwindet für eine Funktion* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *die schwache Ableitung der Ordnung* n*, so ist* f *ein Polynom der Ordnung* $n - 1$ *fast überall.*

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Testfunktion als Summe der n*-ten Ableitung einer Testfunktion und einer Linearkombination der Funktionen* $\Psi_0^{(l)}, l < n, \Psi_0$ *wie im Beweis von 6.1.4. dargestellt werden kann und berechnen Sie* $\int x^k \xi^{(l)}(x)dx$ *für Testfunktionen* ξ *und* $k \leq l$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 92. *Zeigen Sie, dass aus der Existenz der schwachen Ableitung der Ordnung 2 im Allgemeinen für* $n \geq 2$ *nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1 folgt.*

Hinweis: Betrachten Sie eine Funktion $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Zeigen Sie, dass für $n = 1$ *aus der Existenz einer schwachen* k*-ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen* l*-ter Ordnung für* $l < k$ *folgt.*

Lösung. Trivial!

Aufgabe 93. *Zeigen Sie, dass* $f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ *genau dann in* $W^{m,p}(\Omega)$ *liegt, wenn die Abbildungen* $\varphi \mapsto \int_\Omega f D^\alpha \varphi d\lambda^n$ *fpr* $|\alpha| \leq m$ *stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der* L^q*-Norm nach* $\mathbb{R}$ *ist.*

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Dualraum von L^p *der* L^q *ist, das heißt jede beschränkte lineare Abbildung von einem dichten Teilraum des* L^p *nach* $\mathbb{C}$ *ist von der Form* $\varphi \mapsto \int \varphi g$ *mit* $g \in L^q$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 94. *Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$, wenn x Lebesguepunkt der Funktion $\mathbb{1}_{E\cup\{x\}}$ ist.*

Zeigen Sie: Ist jeder Punkt $x \in [0,1]^n$ ein Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^n(E) \geq 1$.

Gibt es eine messbare Teilmenge E von $\mathbb{R}$, für die $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Menge der Dichtepunkte von E ist?

Lösung. Trivial!

Aufgabe 95. *Ist X ein Fixpunktraum und Y ein Retrakt von X, so ist Y ein Fixpunktraum.*

Lösung. Dass X **Fixpunktraum** ist heißt, X ist ein topologischer Raum, auf dem jede stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt.

$$X \text{ topologischer Raum} : \forall\, T_X \in C(X,X) : \exists\, x \in X : T_X(x) = x$$

Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X heißt **Retrakt**, wenn es eine stetige Abbildung (**Retraktion**) R von X auf Y mit $R|_Y = \mathrm{id}_Y$ gibt.

$$Y \subseteq X, \exists\, R \in C(X,Y) : R|_Y = \mathrm{id}_Y$$

Sei R die besagte Retraktion und $T_Y \in C(Y,Y)$ beliebig. Die wohldefinierte Komposition dieser stetigen Funktionen, ist stetig.

$$T_X := T_Y \circ R \in C(X,Y) \subseteq C(X,X).$$

Nun besitzt T_X also laut Voraussetzung einen Fixpunkt, also $\exists\, x \in X$:

$$T_Y(R(x)) = T_X(x) = x.$$

Weil $T_X(Y) \subseteq Y$, muss $x \in Y$. Wegen $R|_Y = \mathrm{id}_Y$, gilt $x = R|_Y(x) = R(x) =: y$. Zuletzt, erhält man $T_Y(y) = y$, also einen Fixpunkt y von T_Y.

Aufgabe 96. *Zeigen Sie (Satz von Perron-Frobenius): Jede $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} \geq 0$ für $1 \leq i,j \leq n$ hat einen Eigenwert $\lambda \geq 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $x = (x_1,\ldots,x_n)$ mit $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$.*

Hinw.: Betrachten Sie die Abbildung $\zeta : x \to \frac{1}{\|Ax\|_1}Ax$ auf dem Simplex $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

Lösung. ζ ist tatsächlich eine Selbstabbildung in $(\Delta, \|\cdot\|_1)$, weil $\forall\, x \in \Delta$:

$$A, x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0 \Rightarrow \zeta(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^n \langle e_i, \zeta(x)\rangle = \|\zeta(x)\|_1 = \left\|\frac{Ax}{\|Ax\|_1}\right\|_1 = 1.$$

Nachdem $A \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ und $\|\cdot\|_1 \in C(\mathbb{R}^n)$, muss $\zeta \in C(\Delta,\Delta)$ ebenfalls stetig sein. Laut dem Fixpunktsatz von Brouwer, ist unsere (offensichtlich) kompakt und konvexe Menge $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Fixpunktraum, und ζ besitzt einen Fixpunkt $\exists\, x \in \Delta$:

$$x = \zeta(x) = \frac{1}{\|Ax\|_1}Ax \Leftrightarrow \lambda x = Ax,$$

wobei $\lambda := \|Ax\|_1 \geq 0$ und $x \geq 0$.

Aufgabe 97. *Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 &= x_1\\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2x_2^4 + \frac{1}{4} &= x_2\end{aligned}$$

eine Lösung besitzt.

Lösung. $[-1,1]^2 \in \mathbb{R}^2$!!! Es ist kompakt, es ist konvex, es ist ein ... (laut Brouwer) ... ein Fixpunktraum! T besitzt darin einen Fixpunkt.

$$T : \begin{cases} [-1,1]^2 & \to [-1,1]^2 \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2x_2^4 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Lieblingsfrage: "Wieso existiert das T?"
Antwort: Dreiecksungleichung, d.h. $\forall\, x \in [-1,1]^2$:

$$\begin{aligned}|\langle e_1, T(x)\rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \leq 1,\\ |\langle e_2, T(x)\rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 98. *Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung u der Gleichung*

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x)$$

in $C[-1,1]$ gibt.

Lösung. Betrachte die, auf dem vollständigen metrischen Raum $(C[-1,1], d_\infty)$ lebende, Selbstabbildung

$$T : u \mapsto \left(x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x)\right).$$

Da $\sin' = \cos$, erhalten wir aus dem MWS der Differentialrechnung, dass $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \exists\, \xi \in [-1,1]$:

$$\left|\frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b}\right| = |\cos(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

Damit gilt $\forall\, u, v \in C[-1,1]$:

$$\begin{aligned}d_\infty(T(u), T(v)) &= \sup_{x\in[-1,1]} \left|\left(x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x)\right) - \left(x + \frac{1}{2}\sin(v(x) + x)\right)\right|\\ &= \frac{1}{2}\sup_{x\in[-1,1]} |\sin(u(x) + x) - \sin(v(x) + x)|\\ &\leq \frac{1}{2}\sup_{x\in[-1,1]} |u(x) + x - (v(x) + x)|\\ &= \frac{1}{2}d_\infty(u, v).\end{aligned}$$

Somit ist die Selbstabbildung T eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raumes $(C[-1,1], d_\infty)$ mit Kontraktionsfaktor $\kappa := \frac{1}{2} < 1$. Es existiert also, laut dem Banach'schen Fixpunktsatz, eine eindeutige Lösung.