Berechenbare Funktionen und (semi-)entscheidbare Mengen

Die Menge der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Menge von (möglicherweise partiellen) Funktionen, die alle primitiv rekursiven Funktionen enthält, unter Komposition und primitiver Rekursion abgeschlossen ist, und außerdem Folgendes erfüllt:

> Wenn $f : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$ total und μ-rekursiv ist,
> dann ist die partielle Funktion $\vec{x} \mapsto \min\{y : f(\vec{x}, y) = 0\}$ auch μ-rekursiv.

212. Es gibt eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, die zwar semi-entscheidbar ist, aber nicht entscheidbar.

213. Es gibt eine berechenbare partielle[1] Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass die partielle Funktion $g(x) := \min\{y : f(x, y) = 0\}$ nicht berechenbar ist.
Hinweis: Verwenden Sie die vorige Aufgabe. Man kann eine Funktion f mit $f(x, 1) = 0$ für alle x finden.

214. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine berechenbare streng monotone totale Funktion. ($x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.) Dann ist die Wertemenge von f entscheidbar.

215. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine berechenbare schwach monotone totale Funktion. ($x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.) Dann ist die Wertemenge von f entscheidbar.

216. Für alle $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ definieren wir $\langle n_1, \ldots, n_k\rangle := p_1^{n_1+1} \cdots \cdot p_k^{n_k+1}$, wobei $(p_1, p_2, p_3, \ldots) = (2, 3, 5, 7, \ldots)$ die Folge der Primzahlen ist. (Runde Klammern für Folgen, spitze Klammern für einzelne Zahlen, die Folgen codieren.)

Für jede Funktion $f : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir $\hat{f} : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so:

$$\hat{f}(\vec{x}, y) = \langle f(\vec{x}, 0), \ldots, f(\vec{x}, y - 1)\rangle,$$

also inbesondere $f(\vec{x}, 0) = \langle\rangle = 1$, und $f(\vec{x}, 1) = \langle f(\vec{x}, 0)\rangle = 2^{f(\vec{x},0)+1}$.

Zeigen Sie:

(a) f is primitiv rekursiv genau dann, wenn $\hat{f}$ primitiv rekursiv ist.

(b) Wenn f total ist, dann ist f genau dann berechenbar, wenn $\hat{f}$ berechenbar ist.

217. Sei $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Fibonacci-Folge: $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ für alle $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass F primitiv rekursiv ist, indem Sie zunächst eine primitive Rekursion für $\hat{F}$ angeben.

218. Zeigen Sie (mit Induktion nach Aufbau der Formeln), dass jedes Σ_0-Menge entscheidbar ist.

219. Zeigen Sie, dass jede Σ_1-Menge semientscheidbar ist.

220. Wenn $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion ist, die (als Relation) eine Σ_1-Menge ist, dann ist f auch Δ_1 (d.h., die Menge $(\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}) \setminus f$ ist auch Σ_1).

221. Es gibt eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die zwar Σ_1 aber nicht Δ_1 ist. (Für ein k; für beliebige $k \geq 1$.) Hinweis: Verwenden Sie den noch unbewiesenen Satz aus der Vorlesung, dass es Σ_1-Mengen gibt, deren Komplement nicht Σ_1 ist.

222. Geben Sie ein primitiv rekursive Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ an, sodass f eine Bijektion ist, und g surjektiv ist und jede Menge $g^{-1}(\{(n, m)\})$ unendlich groß ist.
Verallgemeinern Sie dies zu $f_k, g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$.

[1] „Es gibt eine partielle Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ldots$“ heißt: „Es gibt eine Menge $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ (also mit Definitionsbereich A) …“ So eine Funktion darf also durchaus auch auf ganz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert sein.

223. Seien $A \subseteq \mathbb{N}^k$ und $B \subseteq \mathbb{N}$, und sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine (totale oder partielle) Funktion, deren Graph eine Σ_1-Menge ist. Zeigen Sie (am besten durch Angabe von expliziten Σ_1-Formeln):
    (a) Wenn A und B jeweils Σ_1-Mengen sind, dann auch $f[A] := \{f(\vec{x}) : \vec{x} \in A\}$ und $f^{-1}[B] := \{\vec{x} : f(\vec{x}) \in B\}$.
    (b) Wenn B eine Δ_1-Menge ist, dann auch $f^{-1}[B]$.
    (c) Es gibt eine Σ_1-Funktion f und eine Δ_1-Menge A, sodass $f[A]$ keine Δ_1-Menge ist (äquivalent: nicht entscheidbar ist). (Hinweis: Verwenden Sie den (noch unbewiesenen) Satz aus der VO, dass es Σ_1-Mengen gibt, deren Komplement nicht Σ_1 ist. .)

224. Für $i = 0, 1$ sei P_i die Menge aller Programme p, die bei Eingabe p halten und i ausgeben. Es gilt offenbar $P_0 \cap P_1 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Mengen P_0 und P_1 semi-entscheidbar sind (indem Sie Programme skizzieren, die die jeweiligen partiellen charakteristischen Funktionen $\tilde{\chi}_{P_i}$ berechnen), es aber keine entscheidbare Menge E mit $P_0 \subseteq E$, $P_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus E$ gibt.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt Π_1-Menge, wenn $\mathbb{N} \setminus A$ eine Σ_1-Menge ist. Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ heißt Δ_1-Menge, wenn B sowohl Σ_1- als auch Π_1-Menge ist.

225. a. Seien $S_0, S_1 \subseteq \mathbb{N}$ Σ_1-Mengen mit $S_0 \cup S_1 = \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Δ_1-Menge E, sodass $S_0 \setminus S_1 \subseteq E \subseteq S_0$ gilt. (Hinweis: für $n \in S_0 \cap S_1$ vergleiche die jeweils kleinsten Zeugen für $n \in S_0$ und $n \in S_1$.)
    b. Seien $Q_0, Q_1 \subseteq \mathbb{N}$ Π_1-Mengen mit $Q_0 \cap Q_1 = \emptyset$. Dann gibt es eine Δ_1-Menge E, die Q_0 und Q_1 trennt. (D.h., $Q_0 \subseteq E$, $Q_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus E$.) (Hinweis: (a))

Berechenbare Funktionen auf Strings

Im Folgenden sei S die Menge aller Strings über einem festen endlichen Alphabet A. Für $x \in S$ sei $|x|$ die Länge von x.
Um zu zeigen, dass eine Menge A von Strings entscheidbat oder semi-entscheidbar ist, geben Sie (informell) eine Algorithmus an, der χ_A bzw. $\tilde{\chi}_A$ berechnet.

226. Seien $f : S \times S \to S$ und $g : S \to S$ berechenbare Funktionen; für $B \subseteq S$ definieren wir $\bar{B}$ als die kleinste Menge, die B enthält und unter f und g abgeschlossen ist. Zeigen Sie: Wenn B semi-entscheidbar ist, dann auch $\bar{B}$.

227. Seien f und g wie in der vorigen Aufgabe, mit der zusätzlichen Eigenschaft, $|f(x, y)| > \max(|x|, |y|)$ und $|g(x)| > |x|$ für alle x, y. Wenn B entscheidbar ist, dann auch $\bar{B}$.

228. Schließen Sie aus einer geeigneten Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe, dass die Menge aller Formeln entscheidbar ist.

Für jede Menge Σ von geschlossenen Formeln sei $cl(\Sigma)$ die Menge aller aus Σ ableitbaren geschlossenen Formeln.

229. Die Menge aller logischen Axiome ist entscheidbar.

230. Wenn Σ semi-entscheidbar ist, dann auch $cl(\Sigma)$.

231. Sei Σ semi-entscheidbar. Dann gibt es eine *entscheidbare* Menge Σ' mit $cl(\Sigma') = cl(\Sigma)$. Hinweis: $\varphi \wedge \varphi$.

232. Sei Σ eine vollständige semi-entscheidbare Theorie. Dann ist $cl(\Sigma)$ entscheidbar.

233. Gegeben sei eine beliebige semi-entscheidbare aber nicht entscheidbare Menge A. Geben Sie eine vollständige semi-entscheidbare Theorie Σ_A (in einer geeigneten Sprache an, die nicht entscheidbar ist. (Hinweis: $\top^1 := \top$, $\top^{n+1} := (\top^n) \wedge \top$.)

Unentscheidbare Mengen; universelle Mengen

234. Geben Sie für $k = 2, 3, \ldots$ eine Bijektion $p_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft an: Für alle $A \subseteq \mathbb{N}^k$ gilt: A ist Σ_1-Menge genau dann, wenn $p_k[A]$ eine Σ_1-Menge ist.

235. Es gibt eine Σ_1-Menge $U_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Σ_1-Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $B = \{y \in \mathbb{N} : (k, y) \in A\}$. (Eine Menge mit dieser Eigenschaft heißt „universelle Σ_1-Menge“.)

236. (a) Sei $A \subseteq \mathbb{N}^2$ eine Σ_1-Menge. Dann sind die Mengen $\{y \in \mathbb{N} : (5, y) \in A\}$ und $\{x \in \mathbb{N} : (x, x) \in A\}$ auch Σ_1-Mengen.
   (b) Es gibt eine Σ_1-Menge $U \subseteq \mathbb{N}$, die keine Π_1-Menge ist. (Das heißt: $\mathbb{N} \setminus U$ ist keine Σ_1-Menge.) Hinweis: Verwenden Sie (a) sowie die beiden vorigen Aufgaben.

Wohlordnungen

Eine strikte lineare Ordnung $(A, <)$ (mit der zugehörigen reflexiven Ordnung $\leq$) heißt Wohlordnung, wenn jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element hat:
$\forall B \subseteq A : (B \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in B\ \forall x \in B : b \leq x)$.

237. Wenn $(A, <)$ eine Wohlordnung ist, in der jede nichtleere Teilmenge ein größtes Element hat, dann ist A endlich.

238. Seien $(A, <)$ und $(B, <)$ Wohlordnungen, $A \cap B = \emptyset$. Finden Sie eine Wohlordnung auf $A \cup B$.

239. Seien $(A, <)$ und $(B, <)$ Wohlordnungen. Finden Sie eine Wohlordnung auf $A \times B$. (Hinweis: lexikographische Ordnung: $(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow (x < x' \ \vee\ (x = x' \wedge y < y'))$.)

240. Definieren Sie die lexikographische Ordnung auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Gibt es ein kleinstes Element? Zeigen Sie, dass diese Ordnung eine lineare Ordnung aber keine Wohlordnung ist.

241. Geben Sie eine Menge $A \neq \emptyset$ und eine Funktion $g : A \to A$ an, sodass es keine Funktion $f : \mathbb{Z} \to A$ gibt, die $\forall x \in \mathbb{Z} :\ f(x + 1) = g(f(x))$ erfüllt.

242. Wie in der vorigen Aufgabe, aber diesmal soll es *genau zwei verschiedene* Funktionen f geben, die die obige Bedingung erfüllen.

Bijektionen

Beachten Sie, dass wir $f(x)$ für den Funktionswert von f an der Stelle x schreiben. Für $U \subseteq \mathrm{dom}(f)$ nennen wir die Menge $\{f(u) : i \in U\}$ nicht $f(U)$ sondern $f[U]$.

243. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv. Der Einfachkeit halber seinen A und B disjunkt. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $h : A \to B$ gibt, indem Sie den folgenden Beweis vervollständigen: Wir definieren $A_0 := A$, $B_0 := B$, $A_{n+1} := g[B_n]$, $B_{n+1} := f[A_n]$.

   Sei $X_1 :=: \bigcup_k A_{2k} \setminus A_{2k+1}$, $X_2 := \bigcup_k A_{2k+1} \setminus A_{2k+2}$, $X_3 := \bigcap_k A_k$, und definieren Sie $Y_1, Y_2, Y_3 \subseteq B$ analog.

   a. Zeigen Sie, dass $\{X_1, X_2, X_3\}$ eine Partition von A ist.
   b. Definieren Sie $h : A \to B$ mit eine Fallunterscheidung: Für $x \in X_1$ verwenden Sie f, um $h(x)$ zu definieren, für $x \in X_2$ hingegen g. Und für $x \in X_3$?
   c. Zeigen Sie, dass die so definierte Funktion wohldefiniert ist, und überdies eine Bijektion.