03 / 1: Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Zeige die folgende Version des Satzes von Baire: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, und seien V_n, $n \in \mathbb{N}$, offene dichte Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in X.

Orientierung am Beweis von Satz 4.1.1. :

Sei W eine nichtleere, offene Teilmenge von X

induktiv:

•) $\exists x_1 \in W \cap V_1$, weil V_1 dicht in X ist also $V_1 \cap W \neq \emptyset$

weiter ist $W \cap V_1$ als Schnitt zweier offener Mengen offen also Umgebung von x_1, es gibt also Umgebung K_1 von x_1

mit $K_1 \subseteq W \cap V_1$ und K_1 kompakt, weil ja $(X, \mathcal{T})$ lokalkompakt ist.

•) Sei nun $n > 1$ und seien x_{n-1}, K_{n-1} bereits definiert

da K_{n-1} Umgebung von x_{n-1} ist gibt es $U_{n-1} \subseteq K_{n-1}$ offen mit $x_{n-1} \in U_{n-1}$

da V_n dicht in X ist gilt $V_n \cap U_{n-1} \neq \emptyset$ offen $\Rightarrow \exists x_n \in V_n \cap U_{n-1}$ und K_n kompakte Umgebung von x_n mit $K_n \subseteq V_n \cap K_{n-1}$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K_1, das kompakt ist. Nun gibt es eine Teilfolge $(x_i)_{i\in I}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$, die

gegen ein $x \in K_1$ konvergiert (vgl. Kaltenbäck Prop. 12.11.2)

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ bel. dann ist $(x_i)_{\substack{i\in I\\ i\geq k}}$ eine Folge in K_k und da $(X, \mathcal{T})$ hausdorff ist, ist

K_k abgeschlossen (vgl. Kaltenbäck Lemma 12.11.7). Die Folge $(x_i)_{\substack{i\in I\\ i\geq k}}$ konvergiert gegen x

also ist nach Kaltenbäck Prop. 12.2.7. $x \in \overline{K_k} = K_k$

da $k \in \mathbb{N}$ bel. war gilt $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq W \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ also $W \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$

03 / 2: Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Zeige, dass die Mächtigkeit einer algebraischen Basis von X als $\mathbb{C}$-Vektorraum entweder endlich oder überabzählbar ist.

Hinweis. Zeige, dass ein linearer Teilraum $Y \subsetneq X$ keinen inneren Punkt hat.

Sei also $Y \subsetneq X$ linearer Teilraum und sei $(b_j)_{j \in J}$ Basis von Y und $(b_i)_{i \in I}$ die Erweiterung zu einer Basis von X, wobei $k \in I \setminus J$ das es sicher gibt weil $Y \subsetneq X$

Wähle nun beliebige Nullumgebung U in X. Da U Nullumgebung ist folgt, dass es absorbierend ist, also gibt es $t \in \mathbb{R}^+$ mit $t b_k \in U$, aber $t b_k \notin Y$ also $U \not\subseteq Y$ und da U bel. war ist 0 nicht innerer Punkt von Y. Da Translation ein Homöomorphismus ist hat Y keinen inneren Punkt.

Nehmen wir nun an X hat eine abzählbare Basis $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Sei $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung aller endl. Teilmengen von $\mathbb{N}$ (sind die endl. Teilmengen abzählbar?)

und sei $Y_k := \operatorname{span}\{b_i \mid i \in M_k\}$ und $V_k := Y_k^c$

Sei $x \in X$ bel. mit $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n b_n$, wobei $\forall^\infty n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 0$

also $\exists l \in \mathbb{N} : x \in Y_l \Rightarrow x \notin V_l \Rightarrow x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ und weil x bel. war $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \emptyset$

aber:

- $l \in \mathbb{N}$ bel. und W bel. offene nichtleere Teilmenge von X. Da Y_l keine inneren Punkte besitzt gilt $\emptyset \neq Y_l^c \cap W = V_l \cap W$ und da W bel. war ist V_l dicht also $\forall n \in \mathbb{N} : \overline{V_n} = X$
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist Y_n als endlichdim. Teilraum nach Satz 2.2.1 (ii) abg. also V_n offen

Nach dem Satz von Baire bzw. Korollar 4.1.2 ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$ ↯

03 / 3: Eine Menge heisst G_δ–Menge, wenn sie der abzählbare Durchschnitt offener Mengen ist. Zeige, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen dichten G_δ-Mengen eines vollständigen metrischen Raumes wieder eine dichte G_δ-Menge ist.

(X, d) vollst. metr. Raum und sei $\forall n \in \mathbb{N}: M_n$ eine G_δ-Menge mit $M_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_{nk}$ und seien weiters alle M_n dicht in X

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_{nk} = \bigcap_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} P_{nk}$ ist nach dem Satz von Baire 4.1.1. dicht, weil die P_{nk} offen sind und als Obermenge von dichten Mengen $M_n \subseteq P_{nk}$ dicht.

03 / 4:*Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$ an denen f stetig ist eine G_δ–Menge ist.

$M := \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R}: |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon\}$

Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{R}^+$

$\forall n \in \mathbb{N}: U_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R}: |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon_n\}$

•) $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ$ bel. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \exists \delta_n \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R}: |t-x| < \delta_n \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon_n$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel., da $\varepsilon_n \to 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \varepsilon_k \leq \varepsilon$ und $\exists \delta_k \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R}: |t-x| < \delta_k \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon_k \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ ; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R}: |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow y \in M$

•) sei umgekehrt $y \in M$ bel. und $k \in \mathbb{N}$ bel.

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R}; |t-y| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon_k}{2}$

wähle $z \in W := \{x \in \mathbb{R} : |x-y| < \frac{\delta}{2}\}$ bel.

$\forall t \in \{x \in \mathbb{R} : |x-z| < \frac{\delta}{2}\}$ gilt wegen $|t-y| \leq |t-z| + |z-y| < \delta$ und $|y-z| < \frac{\delta}{2} < \delta$

$|f(t) - f(z)| \leq |f(t) - f(y)| + |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon_k}{2} + \frac{\varepsilon_k}{2} = \varepsilon_k \Rightarrow z \in U_k$

und da $z \in W$ bel. war gilt $W \in U_k$ und W ist offen mit $y \in W$ also $y \in U_k^\circ$

und weil $k \in \mathbb{N}$ bel. war gilt $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ$ und damit $M \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ$

Insgesamt: $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^\circ$ und daher ist M eine G_δ Menge.

03 / 5:*Zeige, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt die an allen rationalen Punkten stetig aber an allen irrationalen Punkten unstetig ist. Finde eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die an allen irrationalen Punkten stetig aber an allen rationalen Punkten unstetig ist.

Hinweis. Ist die Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ (welche ja dicht liegt) eine G_δ-Menge?

Ang. $\mathbb{Q}$ ist G_δ-Menge

$\mathbb{Q}$ ist dicht, $\quad \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R}\setminus\{q\}$ ist G_δ-Menge und dicht

nach Aufgabe 3/3 ist $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ dichte G_δ-Menge, aber $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$ ↯

Also ist $\mathbb{Q}$ keine G_δ-Menge

Ang. $\exists f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$: f ist stetig auf $\mathbb{Q}$ und unstetig auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

nach Aufgabe 3/4 ist $\mathbb{Q}$ G_δ-Menge ↯

Also gibt es so ein f nicht

vollständig gekürzt

$$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}: \begin{cases} \frac{p}{q} \mapsto \frac{1}{q}, & \text{falls } \frac{p}{q}\in\mathbb{Q} \\ x \mapsto 0, & \text{falls } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

•) $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ bel.

$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+ : \left|\left\{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q} : \frac{p}{q}\in U_\varepsilon(x)\right\}\right| < \infty$, wegen $\left|\frac{p}{q} - \frac{p+1}{q}\right| = \frac{1}{q}$

$\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ bel. wähle δ so klein, dass $\forall q\in\mathbb{Q} : \frac{1}{q}\geq\varepsilon \Rightarrow \forall p\in\mathbb{Z}: \frac{p}{q}\notin U_\delta(x)$

endlich viele

Also gilt dann $\forall y\in U_\delta(x)\ \ |f(y)-f(x)| = |f(y)| < \varepsilon$

•) $x\in\mathbb{Q}$:

$x = \frac{p}{q} \qquad \varepsilon := \frac{1}{2q} \qquad \forall\delta\in\mathbb{R}^+ : \exists y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cap U_\delta(x)$ und $|f(x)-f(y)| = |f(x)| = \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2q} = \varepsilon$

04 / 1: Sei X ein Banachraum, und seien M, N zwei abgeschlossene lineare Teilräume von X mit

$$M + N = X,\ M \cap N = \{0\}.$$

Es sind M und N mit der von X vererbten Norm selbst normierte Räume, also können wir den Produktraum $M \times N$ mit der Summennorm betrachten. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} M \times N & \to & X \\ (m, n) & \mapsto & m + n \end{cases}$$

ein linearer Homöomorphismus ist.

1) „Injektivität": $\varphi(m,n) = \varphi(p,q) \Rightarrow m+n = p+q \Rightarrow m-p = q-n$, wobei $m-p \in M$ und $q-n \in N$, weil M, N lineare Teilräume sind. Also gilt $m-p = q-n \in N \Rightarrow m-p \in N \cap M \Rightarrow m-p = 0 \Rightarrow m = p$

$q-n = m-p \in M \Rightarrow q-n \in M \cap N \Rightarrow q-n = 0 \Rightarrow q = n$

2) „Surjektivität": $x \in X$ bel. wegen $M+N = X \Rightarrow \exists\, m \in M, n \in N: m+n = x \Rightarrow \varphi(m,n) = x$

3) „Linearität" $\varphi((m,n) + \alpha(p,q)) = \varphi(m+\alpha p, n+\alpha q) = m+\alpha p + n + \alpha q = (m+n) + \alpha(p+q) = \varphi(m,n) + \alpha\, \varphi(p,q)$

4) „Stetigkeit": Nach Proposition 2.4.5 (i) ist die von der Summennorm erzeugte Topologie gleich der Produkttopologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_M} \times \mathcal{T}_{\|\cdot\|_N}$

$$\begin{tikzcd}
(M \times N, \mathcal{T}_{\|\cdot\|_M} \times \mathcal{T}_{\|\cdot\|_N}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_1|_M"'] \arrow[dr, "\pi_2|_N"] & (X \times X, \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \times \mathcal{T}_{\|\cdot\|}) \arrow[dd, shift right, "\pi_1"'] \arrow[dd, shift left, "\pi_2"] \\
(M, \|\cdot\|_M) \arrow[dr, "\iota_1"'] & (N, \|\cdot\|_N) \arrow[d, "\iota_2"] \\
 & (X, \|\cdot\|)
\end{tikzcd}$$

Nach Satz 1.2.1:

ι stetig $\Leftrightarrow \pi_1 \circ \iota$ stetig $\wedge\ \pi_2 \circ \iota$ stetig

und $\pi_1 \circ \iota = \iota_1 \circ \pi_1|_M$ stetig

$\pi_2 \circ \iota = \iota_2 \circ \pi_2|_N$ stetig also ist ι stetig und da X als Banachraum insbes. TVR ist, wissen wir

$\Psi: X \times X \to X: (x,y) \mapsto x+y$ stetig also auch $\Psi \circ \iota$ und es ist $\varphi = \Psi \circ \iota$ also ist auch φ stetig

Da M, N abg. lineare TR von X sind und X Banachraum, sind auch $(M, \|\cdot\|_M)$ und $(N, \|\cdot\|_N)$ nach Prop. 2.4.4. (ii) Banachräume und nach Prop. 2.4.5 also auch $M \times N$.

Zusammenfassend sind also $M \times N$ und X Banachräume sowie $\varphi: M \times N \to X$ linear, bijektiv und stetig, nach Korollar 4.3.4. ist auch φ^{-1} stetig also φ ein linearer Homöomorphismus.

04 / 2: Sei Ω eine Menge, und X ein linearer Raum dessen Elemente Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$ sind und dessen lineare Operationen durch punktweise Addition und skalare Multiplikation gegeben sind. Für $w \in \Omega$ bezeichne mit $\chi_w : X \to \mathbb{C}$ das Punktauswertungsfunktional

$$\chi_w(f) := f(w), \quad f \in X.$$

Dann ist χ_w linear. Zeige, dass es (bis auf Äquivalenz der Normen) höchstens eine Norm $\|.\|$ auf X geben kann, sodass $(X, \|.\|)$ ein Banachraum ist und alle Punktauswertungsfunktionale bzgl. $\|.\|$ stetig sind.

Hinweis. Wende den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die identische Abbildung an.

$X = \{f : \Omega \to \mathbb{C}\}$

Ang. es gibt zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ so, dass $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind und alle Punktauswertungsfunktionale χ_w bzgl. $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_2$ stetig sind.

Betrachte den Graphen von $id : X \to X$, $id = \{(f,f) \in X \times X\}$, wobei wir $X \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \times \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ versehen, wobei es nach Prop. 2.4.5 eine Norm $\|\cdot\|_p$ gibt mit $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_p} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \times \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ und $(X \times X, \|\cdot\|_p)$ Banachraum. Sei nun $(f,f) \in \overline{id}^{\|\cdot\|_p}$ bel.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}, |\cdot|) & & & (X, \|\cdot\|_1) \arrow[lll, bend right, "\chi_w"'] \arrow[d, "id"] \\
 & (\mathbb{C}\times\mathbb{C}, \mathcal{T}_{|\cdot|}\times\mathcal{T}_{|\cdot|}) \arrow[ul, "\pi_1'"'] \arrow[dl, "\pi_2'"] & (X\times X, \|\cdot\|_p) \arrow[l, "\Psi_w"'] \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & (X, \|\cdot\|_2) \\
(\mathbb{C}, |\cdot|) & & &
\end{tikzcd}$$

$\Psi_w : X \times X \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} : (f,g) \mapsto (\chi_w(f), \chi_w(g))$

$$\Psi_w^{-1}(\{(z,z) \mid z \in \mathbb{C}\}) = \{(f,g) \in X \times X \mid \exists z \in \mathbb{C} : \Psi_w(f,g) = (\chi_w(f), \chi_w(g)) = (f(w), g(w)) = (z,z)\} =$$
$$= \{(f,g) \in X \times X \mid \exists z \in \mathbb{C}.\ f(w) = g(w) = z\} = \{(f,g) \in X \times X \mid f(w) = g(w)\}$$

$\chi_w \circ \pi_1$ und $\chi_w \circ \pi_2$ sind nach Voraussetzung stetig also auch $\pi_1' \circ \Psi_w = \chi_w \circ \pi_1$ und $\pi_2' \circ \Psi_w = \chi_w \circ \pi_2$ und nach Satz 1.2.1. (N_3) auch Ψ_w. Die Diagonale $D := \{(z,z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ ist in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ abgeschlossen und als Urbild einer stetigen Abbildung nach Kaltenbäck Satz 12.3.6 (iii) auch $\Psi_w^{-1}(D)$. Nach Kaltenbäck Lemma 12.2.2 (A3) ist auch $\bigcap_{w \in \Omega} \Psi_w^{-1}(D) =$

$= \{(f,g) \in X \times X \mid \forall w \in \Omega : f(w) = g(w)\} = \{(f,f) \in X \times X\} = id$ abgeschlossen. Da id auch linear ist können wir den Satz vom abg. Graphen anwenden und erhalten, dass id stetig ist.

Da keine der Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ausgezeichnet ist, ist auch id^{-1} stetig, also ist id ein Homöomorphismus

$\Rightarrow \|x\|_2 = \|id\, x\|_2 \leq \|id\| \, \|x\|_1$ und $\|x\|_1 = \|id^{-1} x\|_1 \leq \|id^{-1}\| \, \|x\|_2 \Rightarrow \|id^{-1}\|^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2$

$\Rightarrow \|id^{-1}\|^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|id\| \, \|x\|_1$ (vgl. Kaltenbäck Bem. 9.2.5

$\Rightarrow \|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent

04 / 3: Analysiere den Beweis des Satzes über die offene Abbildung und zeige folgende allgemeinere Variante: Sei X Banachraum, Y normierter Raum und sei $A : X \to Y$ stetig und linear und $A(X)$ sei von 2.Kategorie (für die Terminologie siehe Bemerkung 4.1.4 im Skriptum) in Y. Dann folgt:

(i) A ist offen.

(ii) $A(X) = Y$.

(iii) Y ist Banachraum.

(i) $A(X)$ von 2. Kategorie $\Leftrightarrow \forall (M_n)_{n\in\mathbb{N}}: \forall n\in\mathbb{N}: (\overline{M_n})^\circ = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \neq A(X)$

$\Leftrightarrow \forall (M_n)_{n\in\mathbb{N}}: \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k = A(X) \Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}: (\overline{M_k})^\circ \neq \emptyset$

$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k^X(0) \Rightarrow A(X) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A(U_k^X(0)) \Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}: \left(\overline{A(U_k^X(0))}\right)^\circ \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists W \subseteq U: W$ offen und $W \subseteq \overline{A(U_k^X(0))} \Rightarrow W \cap \overline{A(U_k^X(0))}^c = \emptyset$

Ab hier kann man den Beweis von Satz 4.3.1. abschreiben

also $W-W$ offene Nullumgebung $\Rightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}^+: U_\eta^Y(0) \subseteq W-W \subseteq \overline{A(U_{2k}^X(0))}$

Anwenden von Lemma 4.3.3. mit $T = \frac{2k}{\eta} A$ und erhalten $U^Y_{\frac{\eta}{2k}}(0) \subseteq A(U_1^X(0))$

Nach Lemma 4.3.2. ist A offen

(ii) $y \in Y$ bel., aus (i) wissen wir bereits, dass A offen ist also auch $A(X) \subseteq Y$ offen und weil A linear ist $A(0_X) = 0_Y \in A(X)$. Wir schließen also, dass $A(X)$ eine Nullumgebung in Y ist. Als solche ist sie nach Lemma 2.1.8 (i) absorbierend, es gibt also $t \in \mathbb{R}^+$: $ty \in A(X)$, also gibt es $x \in X$ mit $A(x) = ty$. Mit der Linearität von A gilt schließlich $A(\frac{1}{t}x) = \frac{1}{t}A(x) = \frac{1}{t}ty = y$ also $y \in A(X)$.

(iii) Da A stetig und linear ist erhalten wir mit $N := \ker A$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $(X, \|\cdot\|_X)$ (vgl. Prop. 2.1.14). Mit der Norm $\|\cdot\|_{X/N}$ von Prop. 2.4.9 ist dann $(X/N, \|\cdot\|_{X,N})$ ebenfalls ein Banachraum

$\tilde{A}: X/N \to Y: x + N \mapsto A(x)$ ist wohldefiniertes, lineares, stetiges Funktional (stimmt das?)

mit $\tilde{A}(X\setminus N) = Y$, also surjektiv und auch injektiv also bijektiv (stimmt das?)

Da A offen ist, ist auch $\tilde{A}$ offen also $\tilde{A}^{-1}$ stetig (stimmt das?)

Mit Bem. 4.3.5 und Lemma 4.3.6 ist dann $\tilde{A}(X\setminus N) = Y$ ein Banachraum.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/N \arrow[ur, "\tilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

04 / 4:*Betrachte $L^2(0,1)$ als Teilmenge von $L^1(0,1)$ und zeige auf drei verschiedene Arten, dass $L^2(0,1)$ von 1.Kategorie (für die Terminologie siehe Bemerkung 4.1.4 im Skriptum) in $L^1(0,1)$ ist:

(*i*) Zeige $\{f \in L^2 : \int_0^1 |f(t)|^2 dt \le n\}$ ist abgeschlossen (in L^1) und hat leeres Inneres.

(*ii*) Setze

$$g_n(t) := \begin{cases} n & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{n^3} \\ 0 & , \quad \frac{1}{n^3} < t \le 1 \end{cases}$$

und zeige, dass

$$\int_0^1 f(t) g_n(t) \to 0$$

für jedes $f \in L^2$, aber nicht für jedes $f \in L^1$.

(*iii*) Bemerke, dass die identische Abbildung

$$\iota : \begin{cases} L^2 & \to & L^1 \\ f & \mapsto & f \end{cases}$$

stetig, aber nicht surjektiv ist.

Und argumentiere warum jede dieser Aussagen (*i*), (*ii*), (*iii*), tatsächlich die gewünschte Aussage impliziert !

i) $M_n := \{f \in L^2 : \int_0^1 |f(t)|^2 dt \le n\} = \{f \in L^2 : \|f\|_2 \le \sqrt{n}\}$

•) $f \in \overline{M_n}$ bel., dann gibt es ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ aus M_n mit $f_i \xrightarrow{L^1} f$

Nach Kusolitsch Satz 13.15 gilt dann $f_i \to f$ im Maß

Mit Kusolitsch Satz 7.88 erhalten wir ein Teilnetz $(f_{i_j})_{j \in J}$ mit $f_{i_j} \to f$ λ-f.ü.

also auch $f_{i_j}^2 \to f^2$ λ-f.ü. und damit auch $|f_{i_j}|^2 \to |f|^2$ λ-f.ü.

$\forall j \in J: |f_{i_j}|^2 \ge 0$ λ-f.ü. $\wedge$ $\int_{[0,1]} 0^- \, d\lambda = 0 < \infty$ Nach dem Lemma von Fatou

(Kusolitsch Folgerung 9.32) gilt also

$$\int_{[0,1]} |f|^2 d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{j \in J} |f_{i_j}|^2 d\lambda = \int_{[0,1]} \liminf_{j \in J} |f_{i_j}|^2 d\lambda \le \liminf_{j \in J} \int_{[0,1]} |f_{i_j}|^2 d\lambda \le n$$

also $f \in M_n$ und damit $M_n = \overline{M_n}$ also abgeschlossen

•) Sei $g \in L^1 \setminus L^2$ und $f \in M_n$ sowie $\forall k \in \mathbb{N}$ $h_k := f + \frac{1}{k} g$

$\forall k \in \mathbb{N}: h_k \in L^1 \wedge h_k \notin L^2$

außerdem gilt $\lim_{k \to \infty} \|h_k - f\|_1 = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \underbrace{\|g\|_1}_{< \infty} = 0$, also $h_k \xrightarrow{L^1} f$

also ist $M_n^\circ = \overline{M_n}^\circ = \emptyset$

Und $L^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ also L^2 von 1. Kategorie

ii) $g_n(t) := \begin{cases} n, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n^3} \\ 0, & \frac{1}{n^3} < t \leq 1 \end{cases}$

•) $f \in L^2$ bel. Mit der Ungleichung von Hölder (vgl. Kusolitsch Satz 13.4) gilt

$$\left| \int_{[0,1]} f g_n \, d\lambda \right| \leq \| f g_n \|_1 \leq \|f\|_2 \, \|g_n\|_2 = \|f\|_2 \int_0^{1/n^3} n^2 \, dt = \underbrace{\|f\|_2}_{<\infty} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(t) g_n(t) \, dt = 0$

•) $f(t) := t^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \int_0^1 t^{-1/2} dt = 2 t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2 \Rightarrow f \in L^1$

$$\int_0^1 f(t) g_n(t) \, dt = \int_0^{\frac{1}{n^3}} t^{-\frac{1}{2}} n \, dt = n \; 2 t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{n^{-3}} = n 2 \; n^{-\frac{3}{2}} = 2 \; n^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

(iii) $\iota : L^2 \to L^1 : f \mapsto f$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. $f \in L^2$ bel. $\delta := \varepsilon$ und $g \in L_2$ mit $\|f-g\|_2 < \delta$ dann ist

$$\|f-g\|_1 = \|(f-g) \, 1\|_1 \leq \|f-g\|_2 \, \|1\|_2 = \|f-g\|_2 < \delta = \varepsilon$$

also ist ι stetig, außerdem linear, L^1 ist normierter Raum und L^2 Banachraum

ι ist nicht surjektiv, denn $f(t) = t^{-\frac{1}{2}} \in L^1 \wedge \notin L^2$ rechnet man nach:

$$\int_0^1 t^{-1/2} dt = 2 t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2 \Rightarrow f \in L^1$$

$$\int_0^1 (t^{-\frac{1}{2}})^2 \, dt = \int_0^1 t^{-1} dt = \ln(t) \Big|_0^1 = \ln(1) - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \ln(\varepsilon) = \infty \Rightarrow f \notin L^2$$

Nach Aufgabe 4/3 ist also $\iota(L^2)$ von 1. Kategorie (denn wäre es von 2. Kategorie so wäre $f(L^2) = L^1$ ↯)