1. Zeigen Sie, dass

$$u(x,y) = \ln\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in H^1(B_{1/2}(0)) .$$

$\partial_x u(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}$ ← klassisch abgeleitet

$$\left(\left(\ln\left(\tfrac{1}{r}\right)\right)^{-1}\right)' = \left(\ln\left(\tfrac{1}{r}\right)\right)^{-2} r \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r\left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\lambda^2 = \int_\Omega \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2\left(\ln\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^2} d\lambda^2(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r\left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2} dr\,d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r\left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2} dr = 2\pi\left(\frac{1}{\ln(2)} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) = \frac{2\pi}{\ln(2)} < \infty$$

Stimmt die klassische mit der distributionellen Ableitung überein ?

$$\partial_x u(r,\varphi) = -\frac{r\cos(\varphi)}{r^2\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = -\frac{\cos(\varphi)}{r\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$\lim_{r\to 0} r\ln\left(\tfrac{1}{r}\right) = \lim_{r\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0}\frac{r\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r^2}} = \lim_{r\to 0} r = 0$$

$$\int_\Omega \partial_x u(x,y)\,\phi(x,y)\,d\lambda^2(x,y) = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\varphi)}{r\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\phi(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,r\,dr\,d\varphi = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\left(\left[\sin(\varphi)\,\phi(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\right]_{\varphi=0}^{2\pi} - \int_0^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left(\ln\left(\ln\left(\tfrac{1}{r}\right)\right)\right)' = -\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\frac{1}{r^2}r = \frac{1}{r\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Zeigen Sie:

(a) Sind $u \in H^k(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N})$ und $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so folgt $uv \in H^k(\Omega)$.

(b) Sind $u \in H^1(\Omega)$ und $v \in C_0^\infty(\Omega)$, so folgt $uv \in H_0^1(\Omega)$.

a) Induktion nach k

·) $\int_\Omega (uv)^2 \, d\lambda^n \leq \sup\{(v(x))^2 \mid x \in \overline{\Omega}\} \int_\Omega u^2 d\lambda^n < \infty$

·) $k \rightsquigarrow k+1$: also ang. $\forall \tilde{u} \in H^k(\Omega) \forall \tilde{v} \in C^\infty(\overline{\Omega}): \tilde{u}\tilde{v} \in H^k(\Omega)$ d.h. für alle $\tilde{u}, \tilde{v}$ und Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ gilt $D^\alpha(\tilde{u}\tilde{v}) \in H^k(\Omega)$

$$\int_\Omega uv D^i \phi \, d\lambda^n = \int_\Omega u D^i(v\phi) \, d\lambda^n - \int_\Omega u (D^i v) \phi \, d\lambda^n = -\int_\Omega D^i u \, v \, \phi \, d\lambda^n - \int_\Omega u (D^i v) \phi \, d\lambda^n =$$

$$= -\int_\Omega (D^i u \, v + u D^i v) D^\beta \phi \, d\lambda^n$$

also $D^i(uv) = D^i u \, v + u D^i v$; $|\alpha| = k+1$

$$\int_\Omega (D^\alpha(uv))^2 \, d\lambda^n = \int_\Omega (D^\beta D^i(uv))^2 \, d\lambda^n = \int_\Omega \underbrace{\Big(D^\beta(\underbrace{D^i u}_{\in H^{k-1}(\Omega)} v) + D^\beta(\underbrace{u D^i v}_{H^{k-1}(\Omega)})\Big)}_{\substack{\in L^2(\Omega) \text{ nach Induktionsvoraussetzung} \\ \text{weil } |\beta| \leq (k+1)-1 = k}}^2 d\lambda^n$$

b) $u_n \in C^\infty(\Omega)$ und $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_\Omega (D^\alpha u_n)^2 \, d\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$

wegen $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist für alle n auch $u_n v \in C_0^\infty(\Omega)$

und $\|u_n v - uv\|^2_{H^1(\Omega)} = \|(u_n - u)v\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega ((u_n-u)v)^2 d\lambda^n + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (D^i((u_n-u)v))^2 d\lambda^n \overset{\text{siehe (a)}}{\leq}$

$$\leq \|v\|_\infty^2 \|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (D^i(u_n-u) v + (u_n-u) D^i v)^2 d\lambda^n \leq$$

$$\leq \|v\|_\infty^2 \|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\|v\|_\infty^2 \|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\int_\Omega v D^i v \, D^i(u_n-u)(u_n-u) d\lambda^n + \|D^i v\|_\infty^2 \|u_n-u\|^2_{H^1(\Omega)}\right) \leq$$

$$\leq \|v\|_\infty^2 \|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_n-u\|^2_{H^1(\Omega)} (\|v\|_\infty^2 + \|D^i v\|_\infty^2) + 2\|v D^i v\|_\infty \int_\Omega (u_n-u) D^i(u_n-u) d\lambda^n \leq$$

$$\leq \|v\|_\infty^2 \|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_n-u\|^2_{H^1(\Omega)} (\|v\|_\infty^2 + \|D^i v\|_\infty^2) + 2\|v D^i v\|_\infty \underbrace{\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|u_n-u\|_{H^1(\Omega)}} \underbrace{\|D^i(u_n-u)\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|u_n-u\|_{H^1(\Omega)}} \to 0$$

$$\|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|D^i(u_n-u)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} - \sum_{i=1}^n \|D^i(u_n-u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n-u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

3. Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ x^{1/5} < y < 1\}$.

(a) Finden Sie eine Funktion $u \in H^2(\Omega)$, so dass $u \notin C^0(\overline{\Omega})$. *Hinweis:* $u(x,y) = y^\alpha$.

(b) Ist dies nicht ein Widerspruch zur stetigen Einbettung von $H^2(\Omega)$ in $C^0(\overline{\Omega})$ in zweidimensionalen Gebieten?