ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020 BLATT 9 (26. 11. 2020), SKRIPTUM BIS ABSCHNITT 6.3

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Set $u(x,t)$ eine beschränkte Lösung des Cauchyproblems für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

wobei $a > 0$ ist und $\varphi \in C(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = b, \qquad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = c$$

erfüllt. Berechnen Sie den Grenzwert von $u(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}$) für $t \to \infty$.

2. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\Delta^2 u + u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

mit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

(i) Bestimmen Sie formal für eine Lösung u eine Darstellung der Fourier-Transformierten $\hat{u}$ in Abhängigkeit von $\hat{f}$.

(ii) Zeigen Sie $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ für $n \leq 7$. *Hinweis:* Sie können verwenden, dass $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

3. Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die *freie Schrödingergleichung*

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u & \text{in } \Omega = \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wobei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und i die imaginäre Einheit ist.

(i) Bestimmen Sie für eine Lösung u des AWP mit $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \geq 0$ eine Darstellung mittels Fourier-Transformation.

(ii) Zeigen Sie, dass $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}$ für $t > 0$.

4. Betrachten Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{für } x \in (0,\pi)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = 0 & \text{für } t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) = 0 & \text{für } t > 0\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,\pi)\,, \end{cases}$$

wobei $u_0 \in L^2(0,\pi)$.

(i) Bestimmen Sie ein vollständiges Orthonormalsystem $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,\pi)$ mit $\phi_n'' = \lambda_n \phi_n$ in $(0,\pi)$ mit Randbedingungen $\phi_n(0) = \phi_n'(\pi) = 0$.

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

(ii) Konstruieren Sie aus $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lösungsformel für das obige parabolische Problem.
(iii) Welche Abklingrate (für $t \to \infty$) hat die Wärmeenergie $E(t) := \int_0^\pi u(x,t)dx$ für eine Lösung u?

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und u eine klassische Lösung des parabolischen Problems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \gamma u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u = u_0 & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei $u_0 \in C_0(\Omega)$ und $\gamma > 0$. Zeigen Sie, dass
(i) $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq C_2 e^{-(\lambda_1+\gamma)t}$ für $t > 0$,
(ii) $|u(x,t)| \leq C_\infty e^{-\gamma t}$ für $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$,
wobei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert des *Laplace*-Operators $-\Delta$ und C_2, C_∞ positive Konstanten sind.