Übungstest Analysis 1

18. 12. 2009

1 (5P): Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n - 2^n}$$

auf Konvergenz.

2 (5P): Bestimmen Sei die Häufungspunkte der Folge

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} + i((-1)^n + 1)$$

in $\mathbb{C}$. (Begründung!)

Lsg: 1: Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{3^n-2^n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{3^n - 2^n}{3^{n+1} - 2^{n+1}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Wegen $\frac{2}{3} < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (Bsp. 3.2.10 ii)) und wegen 3.3.4 vii) gilt $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$, also $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} < 1$. Nach dem Quotientenkriterium 3.8.2 konvergiert also die Reihe absolut und ist damit konvergent.

2: Ähnlich zu 2b.