Satz 3.6.4 Es seien $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ Basen von V bzw. W. Dann wird durch

$$f \mapsto \langle C^*, f(B) \rangle \tag{3.13}$$

eine lineare Bijektion des Vektorraumes $L(V, W)$ auf den Vektorraum $K^{m \times n}$ erklärt. Es gilt

$$\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W. \tag{3.14}$$

Beweis. Nach 3.4.6 liegt mit (3.13) eine Bijektion von $L(V, W)$ auf $K^{m \times n}$ vor.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "B^*"] & W \arrow[d, "C^*"] \\ K^{n \times 1} \arrow[r, "C^* \circ f \circ (B^*)^{-1}"] & K^{m \times 1} \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $C^* \circ f \circ (B^*)^{-1}$ wird nur durch die Matrix $((C^* \circ f \circ (B^*)^{-1}(e_1), \dots, (C^* \circ f \circ (B^*)^{-1}(e_n)) = \langle C^*, f(B) \rangle$ beschrieben. Die Abbidung $C^* \circ f \circ (B^*)^{-1} : K^{n \times 1} \to K^{m \times 1} : \langle B^*, x \rangle \mapsto \langle C^*, f(x) \rangle$ koordinatisiert f.

Sind $f_1, f_2 \in L(V, W)$ und $c \in K$ beliebig gegeben, so folgt

$$(f_1 + cf_2)(b_j) = f_1(b_j) + c f_2(b_j) \text{ für alle } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

... laut Definition der Addition / Multiplikation von Funktionen.
Das spiegelt sich in den Spalten der betreffenden Matrix wider, also

$$\langle C^*, (f_1 + cf_2)(B) \rangle = \langle C^*, f_1(B) \rangle + c \langle C^*, f_2(B) \rangle.$$

Sei $\varphi : f \mapsto \langle C^*, f(B) \rangle$, dann weisen wir nach, dass

$\varphi(f_1 + c f_2) = \langle C^*, (f_1 + c f_2)(B)\rangle = \langle C^*, f_1(B) + c f_2(B)\rangle$
$= \langle C^*, f_1(B)\rangle + c\langle C^*, f_2(B)\rangle = \varphi(f_1) + c\varphi(f_2)$.

Gemäß Satz 3.2.2 ist die Abbildung (3.13) daher linear. ...
Aus $\dim V \cdot \dim W = mn = \dim K^{m\times n}$ ergibt sich schließlich (3.14). $\langle C^*, f(B)\rangle \in K^{m\times n}$, also gilt, weil $L(V,W)$ und $K^{m\times n}$ wegen oben linear isomorph sind, laut Satz 3.4.5, dass $\dim K^{m\times n} = \dim L(V,W)$. $\square$