

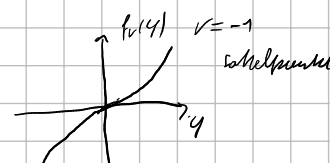
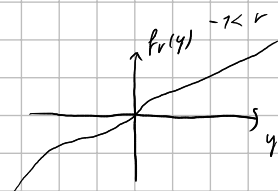
10.1. Betrachten Sie für $r \in \mathbb{R}$ die autonome ODE

$$y' = y + \tanh(r y).$$

Wieviele Ruhelagen hat die Gleichung abhängig von r ? Um welchen Typ von Bifurkation handelt es sich beim Bifurkationspunkt $r = -1$?

$$f_r(y) = y + \tanh(r y) \quad ; \quad \tanh: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[: y \mapsto \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} \quad \text{bijektiv} \quad (\text{vgl. Kastenbach S. 211})$$

$$\tanh' = \sinh' \cosh^{-1} - \sinh \cosh^{-2} \cosh' = 1 - \tanh^2$$



•) „Ruhelagen“: Da $\tanh(0) = 0$ gilt $\forall r \in \mathbb{R}: f_r(0) = 0$

$$f_r'(y) = 1 + r(1 - (\tanh(r y))^2)$$

$$\text{Fall 1: } -1 \leq r \quad f_r'(y) \geq 1 - (1 - (\tanh(r y))^2) \geq 1 - 1 = 0$$

$$\text{wobei } f_r'(y) = 0 \Leftrightarrow r = -1 \wedge y = 0$$

Die Funktion f_r ist also in dem Fall str. mon. wachsend kann also nur die eine Nullstelle $y^* = 0$ haben

$$\text{Fall 2: } r < -1 \quad f_r'(0) = 1 + r < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f_r(y) = \infty$$

Nach dem ZWS dürfen wir $z := \min \{y \in \mathbb{R}^+ \mid f_r(y) = 0\}$ betrachten

$$f_r(-y) = -y + \tanh(-r y) = -y - \tanh(r y) = -f_r(y) \quad \text{also reicht es die Nullstellen auf } \mathbb{R}^+ \text{ zu finden}$$

$$\text{Sei } y > z, \text{ dann gilt } f_r(y) = y + \tanh(r y) > z + \tanh(r y) = \tanh(r y) - \tanh(r z) =$$

$$= f_r'(\xi) r (y - z) \quad \text{nach dem MWS für } \xi \in (r y, r z) \quad y > z \Leftrightarrow r y < r z$$

$$f_r'(\xi) = 1 + r(1 - (\tanh(r \xi))^2) > 1 + r(1 - (\tanh(r z))^2) = 1 + r(1 - z^2) < 0, \text{ weil}$$

$$f_r(z) = 0 \Leftrightarrow z + \tanh(r z) = 0 \Leftrightarrow z \in]0, 1[, \text{ weil } \tanh(r z) \in]-1, 0[$$

$$\text{Also } f_r(y) > \underbrace{f_r'(\xi)}_{< 0} \underbrace{r(y-z)}_{< 0} > 0$$

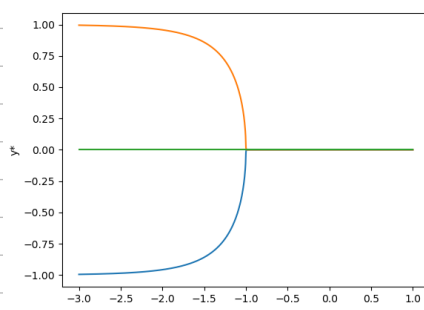
z ist also die einzige Nullstelle von f_r in \mathbb{R}^+ und entsprechend $-z$ die einzige in \mathbb{R}^-

•) „Stabilität“ $f_r'(0) = 1 + r$ also ist die Ruhelage $y^* = 0$ für $r > -1$ instabil und

für $r < -1$ asymptotisch stabil

$$f_r'(z) = 1 + r(1 - (\tanh(r z))^2) = (1 + r(1 - z^2)) < 0 \quad (\text{vorher argumentiert}) \text{ also asymptotisch stabil}$$

•) Wir können also sagen es handelt sich um eine „supercritical pitchfork bifurcation“



10.2. a) Betrachten Sie das RWP (auf $(0, 1)$)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hat das RWP eine Lösung?

R_0

R_1

ℓ

b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit des RWP (auf $(0, \pi)$)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} y, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

R_0

R_π

ℓ

a) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Fundamentalmatrix $V(t) = \exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Da die ODE homogen ist gilt $y_p = 0$; $B := R_0 V(0) + R_1 V(1)$

Nach Satz 6.3 ist das RWP lösbar $\Leftrightarrow \text{Rang}(B) = \text{Rang}(B, \ell - R_1 y_p(1))$

in unserem Fall ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell - R_1 y_p(1) = \ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Rang}(B) = 1 < 2 = \text{Rang}(B, \ell)$ also ist das RWP nicht lösbar

b) Fall 1: " $\alpha = 0$ "

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = R_0 V_0(0) + R_\pi V(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wie in (a) ist $y_p = 0$ und wegen $\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ klarerweise $\text{Rg}(B) = \text{Rg}(B, \ell - R_\pi y_p(\pi))$

Nach Satz 6.3 ist das RWP in dem Fall lösbar mit $y(x) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$ als Lösung

Fall 2: " $\alpha \neq 0$ "

Das charakteristische Polynom zu A_α ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2$ mit $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\alpha$

$$\begin{pmatrix} -i\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & -i\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & i\alpha \\ -\alpha^2 & -i\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & i\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ also Lösungsraum } \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -i\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & -i\alpha \end{pmatrix} \text{ Lösungsraum } \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha \end{pmatrix} \right); \text{ also } V := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\alpha & -i\alpha \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-i\alpha}{-i\alpha} & \frac{-1}{-i\alpha} \\ \frac{-i\alpha}{-i\alpha} & \frac{-1}{-i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix}; \quad V D V^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\alpha & -i\alpha \\ -\alpha^2 & -\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = A_\alpha$$

$$V(x) = V e^{x A_\alpha} V^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\alpha & \frac{\alpha}{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha x} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha x} & e^{-i\alpha x} \\ i\alpha e^{i\alpha x} & \frac{\alpha}{i} e^{-i\alpha x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i\alpha} \\ 1 & \frac{i}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha x) & \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \\ -\alpha \sin(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{pmatrix}$$

$$B_\alpha = R_0 V_\alpha(0) + R_\pi V_\alpha(\pi) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(\alpha\pi) & -\alpha^{-1} \sin(\alpha\pi) \\ \alpha \sin(\alpha\pi) & 1 - \cos(\alpha\pi) \end{pmatrix}$$

Nach Satz 6.3 (ii) ist die Dimension des Lösungsraumes $\dim \ker B$, wobei $y=0$ eine Lösung ist, also die Existenz in jedem Fall gegeben ist

Fall 2.1: „ $\alpha \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ “ $\cos(2\mathbb{Z} \setminus \{0\}\pi) = \{1\}$, $\sin(2\mathbb{Z} \setminus \{0\}\pi) = 0 \Rightarrow B_\alpha = 0$

Also löst $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $y(x) := Y(x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ das RWP

Fall 2.2: „ $\alpha \notin 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ “

$$\det(B_\alpha) = (1 - \cos(\alpha\pi))^2 + \sin(\alpha\pi)^2 = 1 - 2\cos(\alpha\pi) + \cos(\alpha\pi)^2 + \sin(\alpha\pi)^2 = 2(1 - \cos(\alpha\pi)) > 0$$

also $\ker(B_\alpha) = \{0\}$, es gibt daher nur die triviale 0-Lösung

10.3. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme, falls diese existieren:

a) $(yy')' = 1 - 3t$ mit $y(0) = y(1) = 0$,

b) $y'' + 4y = 0$ sowie $y'' + 4y = 4t$ mit $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(\pi) = y'(-\pi)$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$ mit $y(0) = 2$, $y(\pi/4) = 1$

a) Ang. es gibt eine Lösung y , sei dann $x := yy'$

x erfüllt dann $x' = 1 - 3t$ und $x(0) = x(1) = 0$

x hat die Form $x(t) = t - \frac{3}{2}t^2 + C$; $x(0) = C = 0 \Rightarrow C = 0$

$x(t) = t - \frac{3}{2}t^2$ und $x(1) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$ \nexists

b) $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$, $y(x) = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix}$

$y(\pi) = c_1 e^{2\pi i} + c_2 e^{-2\pi i} = c_1 + c_2 = c_1 e^{-2\pi i} + c_2 e^{2\pi i} = y(-\pi)$

$y'(x) = c_1 2i e^{2ix} - c_2 2i e^{-2ix}$

$y'(\pi) = 2i(c_1 - c_2) = y'(-\pi)$

also ist $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $y(x) = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix}$ Lsg. des RWP

c) $y_p(x) = x$ ist offensichtlich partikulärlösung

$y(x) = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix} + x$

$y(-\pi) = c_1 + c_2 - \pi \stackrel{!}{=} c_1 + c_2 + \pi = y(\pi) \Rightarrow -\pi = \pi$ \nexists , es gibt daher keine Lsg.

c) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm \frac{i4}{2} = -1 \pm 2i$

$y(x) = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x}$

$y(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 2$ und $y(\frac{\pi}{4}) = c_1 e^{-1} e^{i\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-1} e^{-i\frac{\pi}{2}} = c_1 e^{-1} i - i c_2 e^{-1} \stackrel{!}{=} 1$

also $i(c_1 - c_2) = e$ und $c_1 = 2 - c_2$

$i(2 - c_2 - c_2) = e \Rightarrow 2 - 2c_2 = -ie \Leftrightarrow 2 + ie = 2c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1 + \frac{i}{2}e$

und $c_1 = 1 - \frac{i}{2}e$

also löst $y(x) = (1 - \frac{i}{2}e) e^{(-1+2i)x} + (1 + \frac{i}{2}e) e^{(-1-2i)x}$ das RWP

10.4. Betrachten Sie das RWP

$$Ly := -(py')' + qy = f \quad \text{auf } (a, b), \quad R_1 y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = \rho_1, \quad R_2 y := \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = \rho_2,$$

wobei p, q hinreichend glatt sind, $p > 0$ auf $[a, b]$. Sei $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ und $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$. Nehmen Sie an, daß das RWP für $f = 0, \rho_1 = \rho_2 = 0$ nur trivial lösbar sei. Seien weiters y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen von $Ly = 0$ mit $R_1 y_1 = 0$ und $R_2 y_2 = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \kappa(x) &:= p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') = \text{const} \neq 0 \\ G(x, t) &= \frac{1}{\kappa} \begin{cases} y_1(t) y_2(x) & a \leq t \leq x \leq b \\ y_1(x) y_2(t) & a \leq x \leq t \leq b \end{cases} \end{aligned}$$