# 4.9.3(c)

Wir betrachten die Abbildung $\psi : L(V,W) \to L(W^*,V^*)$, die durch $\psi(f) = f^T$ definiert ist. Der Fall $V = \{o\}$ ist leicht ($L(W^*,V^*) =?$), also betrachaten wir gleich den Fall $\dim(W) < \infty$. Ist $\psi$ dann surjektiv?

- Sei $\dim(W) < \infty$. Zu zeigen ist, dass $\psi$ surjektiv ist.
- Zunächst geben wir den Objekten, die wir schon haben, Namen:
  Sei $n := \dim(W)$, und sei $(w_1,\dots,w_n)$ Basis von $w$, und sei $(w_1^*,\dots,w_n^*)$ die zugehörige duale Basis. Sei weiters $B = (b_i : i \in I)$ eine Basis für $V$.
- Sei nun $\ell : W^* \to V^*$ eine beliebige lineare Abbildung von $W^*$ nach $V^*$. Gesucht ist $f \in L(V,W)$ mit $f^T = \ell$.
- Um die Abbildung $\ell$ zu verstehen, müssen wir die Werte $\ell(w_k^*)$ verstehen; diese Werte sind selbst Linearformen auf $V$, also daduch festgelegt, wohin sie die Basisvektoren $b_i$ abbilden. Dies legt es nahe, diese Familie $(y_{k,i})_{1\le k\le n,\ i\in I}$ von Skalaren zu definieren:
  $$\forall k \in \{1,\dots,n\}\ \forall i \in I : y_{k,i} := \langle \ell(w_k^*), b_i\rangle.$$
- Es genügt, eine lineare Abbildung $f$ zu finden, die $\forall k \in \{1,\dots,n\} : f^T(w_k^*) = \ell(w_k^*)$ erfüllt. (Warum?) (Andererseits ist es nicht nur hinreichend sondern auch notwendig.)
- Mit anderen Worten: (warum ist das äquivalent?)
  Es genügt, eine Abbildung $f \in L(V,W)$ zu finden, die die Aussage
  $$\forall v \in V\ \forall k \in \{1,\dots,n\} : \langle f^T(w_k^*), v\rangle = \langle \ell(w_k^*), v\rangle$$
  erfüllt, oder äquivalent
  $$\forall v \in V\ \forall k \in \{1,\dots,n\} : \langle w_k^*, f(v)\rangle = \langle \ell(w_k^*), v\rangle.$$
- Statt „für alle $v \in V$“ genügt es, die obige Aussage für alle $v \in B$ zu verlangen.
- Wir suchen also eine lineare Abbildung $f : V \to W$, die
  $$(*) \qquad \forall k \le n\ \forall i \in I : \langle w_k^*, f(b_i)\rangle = y_{k,i}$$
- Bis jetzt haben wir nur eine notwendige und hinreichende Bedingung umgeformt. Die letztgenannte Formulierung legt nun nahe, für jedes $i$ den Vektor $c_i := \sum_{j=1}^{n} y_{j,i} w_j \in W$ zu betrachten.
- Es gibt nun (genau) eine Abbildung $f \in L(V,W)$, die
  $$\forall i \in I : f(b_i) = c_i$$
  erfüllt … (Warum?)
- … und diese Abbildung erfüllt $(*)$. (Warum? Nachrechnen.)