Übungen zu Analysis 1, 6. Übung 27. 11. 2018

61. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{n+1}{n^2+2}$$
konvergent, absolut konvergent, divergent? Für welche $x > 0$ ist die Reihe bestimmt divergent?

62. Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n+2}}$$
auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

63. Untersuchen Sie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+1} - n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)^2$$
auf Konvergenz.

64. Untersuchen Sie auf Konvergenz:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)k \frac{k+1}{2^k},$$
Zeigen Sie dann für die 2. Reihe mit vollst. Induktion:
$$S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right)$$
und berechnen Sie damit diese Reihe.

65. Untersuchen Sie auf Konvergenz
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

66. Zeigen Sie folgende Version des Quotientenkriteriums: Gilt $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

67. Für $z \in \mathbb{C},\ |z| = 1$ untersuche man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

auf Konvergenz.

68. Untersuchen Sie mit (wenn möglich) und ohne dem Quotientenkriterium für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n}(n^2 + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

konvergent bzw. divergent ist.

69. Für $s \in \mathbb{R}$ ist $\binom{s}{n}$ induktiv durch $\binom{s}{0} = 1$ und $\binom{s}{n+1} = \binom{s}{n}\frac{s-n}{n+1}$ definiert. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k}$$

für $s > 0$ auf Konvergenz.

70. Zeigen Sie: Ist (a_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

Beweisen Sie damit die Divergenz der harmonischen Reihe und die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für $\alpha > 1$.