10.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2019

1. $f : [a, b] \to$
   $mathbbR$ sei eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass
   $$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$
   Es stimmen also in diesem Fall Lebesgue- und Riemann-Integral überein (approximieren Sie f durch geeignete Treppenfunktionen).
2. Die Verteilungsfunktion F sei stetig differenzierbar und f stetig. Dann gilt
   $$\int_{]a,b]} f d\mu_F = \int_a^b f(x)F'(x)dx.$$
3. Im Maßsraum $(\Omega, 2^\Omega, \zeta)$ mit $\zeta(A) = |A|$ gilt
   $$\int f d\zeta = \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega).$$
4. Gegeben ist die Verteilungsfunktion
   $$F(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{wenn } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Bestimmen Sie $\int x d\mu_F(x)$.
5. Zeigen Sie: die Folge
   $$f_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \le \omega \le \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   konvergiert in $([0, 1], \mathfrak{B}, \lambda)$ im Maß, aber nicht fast überall.
6. $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A_n \in \mathfrak{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
   (a) Die Folge $A_n()$ konvergiert genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen 0, wenn $\lim \mathbb{P}(A_n) = 0$.
   (b) Wenn $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, dann konvergiert die Folge $A_n()$ fast sicher gegen 0.
   (c) Wenn die Ereignisse A_n unabhängig sind, dann ist die hinreichende Bedingung aus Punkt b) auch notwendig.
7. Der Satz von Lusin: f sei eine Borel- (oder Lebesgue-) messbare Funktion auf $[a, b]$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{B}$ mit $\lambda(A) < \epsilon$, sodass die Einschränkung von f auf A stetig ist (in der Vorlesung wurde gezeigt, dass es eine Folge von stetigen Funktionen gibt, die fast überall gegen f konvergiert).