

9.1. Ziel dieser Aufgabe ist eine Beziehung zwischen der linearisierten Stabilität und dem Konzept der Ljapunovfunktion. Genauer: wir zeigen die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$:

1. Die Ruhelage $y^* = 0$ der ODE $y' = Ay$ ist asymptotisch stabil.
2. Es gibt eine symmetrisch positiv definite Lösung der Matrixgleichung ("Ljapunovgleichung")

$$A^T Q + Q A = -I. \quad (1)$$

a) Sei die Ruhelage $y^* = 0$ asymptotisch stabil. Definieren Sie die Matrix

$$Q := \int_{t=0}^{\infty} e^{tA^T} e^{tA} dt$$

Zeigen Sie: Q ist symmetrisch positiv definit (insbesondere also $(Qx, x)_2 > 0$ für $x \neq 0$) und erfüllt (1). Wie Teilaufgabe b) zeigen wird, ist die Funktion $V(x) := (Qx, x)_2$ eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE.

b) Sei Q eine symmetrisch positiv definite Lösung von (1). Zeigen Sie: $V(x) := (Qx, x)_2$ ist eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE. Zeigen Sie: die Ruhelage $y^* = 0$ ist asymptotisch stabil.

a) "(1) \Rightarrow (2)" Sei die Ruhelage $y^* = 0$ der ODE $y' = Ay$ asymptotisch stabil

$$Q := \int_0^{\infty} e^{tA^T} e^{tA} dt$$

Wegen der Stetigkeit der Transponation ist $e^{tA^T} = (e^{tA})^T$ und daher $(e^{tA^T} e^{tA})^T = ((e^{tA})^T e^{tA})^T = (e^{tA})^T ((e^{tA})^T)^T = (e^{tA})^T e^{tA}$ also ist Q symmetrisch.

$$x^T Q x = x^T \int_0^{\infty} e^{tA^T} e^{tA} dt x = \int_0^{\infty} x^T (e^{tA})^T e^{tA} x dt = \int_0^{\infty} (e^{tA} x)^T e^{tA} x dt > 0 \text{ für } x \neq 0, \text{ weil } e^{tA} \text{ invertierbar ist}$$

$$A^T Q + Q A = \int_0^{\infty} (A^T e^{tA^T} e^{tA} + e^{tA^T} e^{tA} A) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{tA^T} e^{tA}) dt = \lim_{s \rightarrow \infty} e^{sA^T} e^{sA} - I$$

Jetzt können wir verwenden, dass $y^* = 0$ eine asymptotisch stabile Ruhelage ist.

Aus Satz 3.15 wissen wir, dass e^{tA} ein Fundamentalsystem der ODE ist und von Satz

5.6 (ii) wissen wir $\lim_{s \rightarrow \infty} \|e^{sA}\| = 0$ und daher auch $\lim_{s \rightarrow \infty} \|e^{sA^T}\| = 0$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{sA^T} e^{sA} = 0$

b) "(2) \Rightarrow (1)": Seien Q eine pos. def. und symmetrische Matrix mit $A^T Q + Q A = -I$

$$V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^T Q x$$

Sei $x \in \mathbb{R}^d$ mit $Ax \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x^T Q x) = e_i^T Q x + x^T Q e_i = 2 x^T Q e_i \Rightarrow \nabla V(x) = 2 Q x$$

$$\begin{aligned} \nabla V(x) \cdot Ax &= 2 x^T Q A x = x^T Q^T A x + x^T Q A x = x^T (A^T Q + Q A) x = \\ &= -x^T I x = -\|x\|_2^2 < 0, \text{ weil } Ax \neq 0 \text{ also } x \neq 0 \end{aligned}$$

Also ist V strikte Ljapunovfunktion

und $x \neq 0, Ax = 0 \Rightarrow 0 = 2 x^T Q A x = -\|x\|_2^2 < 0$ $\nRightarrow A$ regulär

$y^* = 0$ ist striktes Minimum von V , denn $V(y^*) = 0$ und da Q pos. def. ist gilt

$$\forall x \neq 0: x^T Q x > 0$$

Da A regulär ist erhalten wir, dass $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und mit Satz 5.14 ist $y^* = 0$ asymptotisch stabil.

9.2. Betrachten Sie die ODE

$$x' = -x - 2y + x^2 y^2$$

$$y' = x - \frac{1}{2}y - x^3 y$$

Konstruieren Sie eine Ljapunovfunktion V von der Form $V(x, y) = ax^2 + by^2$ mit geeigneten a, b . Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ aussagen?

$$\nabla V(x, y) \cdot f(x, y) = 2ax(-x - 2y + x^2 y^2) + 2by(x - \frac{1}{2}y - x^3 y) \stackrel{!}{\leq} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2ax^2 - 4axy + 2ax^3 y^2 + 2byx - by^2 - 2bx^3 y^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2ax^2 + (2b - 4a)xy - by^2 + 2ax^3 y^2 - 2bx^3 y^2 \leq 0$$

$$\text{Sei jedenfalls } 0 < a = b, \text{ dann ist } \Leftrightarrow -2ax^2 - 2axy - ay^2 \leq 0 \Leftrightarrow -a(x^2 + (x^2 + 2ax + y^2)) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a(x^2 + (x+y)^2) \leq 0$$

Wähle also $a = b = 1$, dann ist

$$\begin{aligned} \nabla V(x, y) \cdot f(x, y) &= 2x(-x - 2y + x^2 y^2) + 2y(x - \frac{1}{2}y - x^3 y) = -2x^2 - 4xy + 2x^3 y^2 + 2xy - y^2 - 2x^3 y^2 = \\ &= -x^2 - x^2 - 2xy - y^2 = -x^2 - (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0 \end{aligned}$$

und es ist $f(0, 0) = 0$ also ist V sogar strikte Ljapunovfunktion

$$\text{Weiter ist } f(x, y) = 0 \Leftrightarrow -x - 2y + x^2 y^2 = 0 \wedge x - \frac{1}{2}y - x^3 y = 0$$

$$\text{für } |x| < 2^{-\frac{1}{3}} \text{ ist das nur der Fall für } y^2 x^2 - x - 2y = 0 \wedge y = \frac{x}{\frac{1}{2} + x^3} = \frac{2x}{1 + 2x^3}$$

$$\text{also } \frac{4x^4}{(1+2x^3)^2} - x - \frac{4x}{1+2x^3} = 0 \text{ und diese Gleichung hat als Polynom eine aus isolierten Punkten}$$

bestehende Lösungsmenge, also ist $(x, y) = (0, 0)$ ein isolierter Punkt von $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$

Der Punkt $(0, 0)$ ist striktes Minimum von V (das sieht man)

nach Satz 5.19 (ii) ist daher die Ruhelage $(0, 0)$ asymptotisch stabil.

9.3. Betrachten Sie für $\lambda, \mu, \gamma, a > 0$ das System

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda xy - \mu x + \mu a \\ y' &= \lambda xy - \mu y + \gamma y \\ z' &= \gamma y - \mu z \end{aligned}.$$

Zeigen Sie, daß das System im Fall $a\lambda > \mu - \gamma > 0$ genau eine nichttriviale Ruhelage $(x^*, y^*, z^*) \in (0, \infty)^3$ hat. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$V(x, y, z) = x - x^* \ln x + y - y^* \ln y$$

eine Ljapunovfunktion ist. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage (x^*, y^*, z^*) sagen?

Sei also $a\lambda > \mu - \gamma > 0$ und $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$; $\lambda, \mu, \gamma, a > 0$

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow -\lambda xy - \mu x + \mu a = 0 \wedge \lambda xy - \mu y + \gamma y = 0 \wedge \gamma y - \mu z = 0 \Leftrightarrow$$

$$1. \text{ in 2. einsetzen liefert } \mu(a - x - y + z) = 0$$

$$\rightarrow a - x - y + z = 0 \Leftrightarrow a + z = x + y$$

$$\text{die 2. Glg.: } y(\lambda x - \mu + \gamma) = 0$$

$$\text{Fall 1: } y = 0 \quad \text{die 1. Glg.: } \mu(a - x) = 0 \Leftrightarrow a = x$$

$$\text{also } \lambda a + \gamma - \mu = 0 \text{ bzw. } \lambda a > \mu - \gamma$$

$$\text{Fall 2: } \lambda x - \mu + \gamma = 0 \rightarrow \lambda x = \mu - \gamma \rightarrow x = \frac{\mu - \gamma}{\lambda} > 0 \quad \boxed{x > 0}$$

$$\rightarrow -\lambda \frac{\mu - \gamma}{\lambda} y - \mu \frac{\mu - \gamma}{\lambda} + \mu a = 0 \Leftrightarrow y = \mu \left(-\frac{\mu - \gamma}{\lambda} + a \right) (\mu - \gamma)^{-1} > 0$$

$$\text{und } -\frac{\mu - \gamma}{\lambda} + a > 0 \Leftrightarrow \mu - \gamma < \lambda a \rightarrow \boxed{y > 0}$$

$$\rightarrow z = \frac{\gamma y}{\mu} \rightarrow \boxed{z > 0}$$

$$\gamma V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto x - x^* \ln(x) + y - y^* \ln(y)$$

$$\nabla V(x, y, z) \cdot f(x, y, z) = \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) (-\lambda xy - \mu x + \mu a) + \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) (\lambda xy - \mu y + \gamma y) =$$

$$= -\lambda xy - \mu x + \mu a + x^* \lambda y + x^* \mu - \frac{x^* \mu a}{x} + \lambda xy - \mu y + \gamma y - y^* \lambda x + y^* \mu - y^* \gamma =$$

$$= x(-\mu - y^* \lambda) + y(x^* \lambda - \mu + \gamma) - \frac{x^* \mu a}{x} + \mu a + x^* \mu + y^* \mu - y^* \gamma \stackrel{!}{\leq} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(-\mu - y^* \lambda) + y(x^* \lambda - \mu + \gamma) + \mu a + x^* \mu + y^* \mu - y^* \gamma \leq \frac{x^* \mu a}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(-\mu - y^* \lambda) + x(y(x^* \lambda - \mu + \gamma) + \mu a + x^* \mu + y^* \mu - y^* \gamma) \leq x^* \mu a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(-\mu - y^* \lambda) + x(y(x^* \lambda - \mu + \gamma) + \underbrace{\mu a + x^* \mu + y^* \mu - y^* \gamma}_{=\mu a}) \leq x^* \mu a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \underbrace{(-\mu - y^* \lambda)}_{=-\frac{\mu a}{x^*}} + x \underbrace{(y(x^* \lambda - \mu + \gamma))}_{=0} + 2x\mu a \leq x^* \mu a \Leftrightarrow -x^2 \frac{\mu a}{x^*} + 2x\mu a - x^* \mu a \leq 0$$

$$\text{und } -x^2 \frac{\mu a}{x^*} + 2x\mu a - x^* \mu a = 0 \Leftrightarrow x = -x^* \frac{-2\mu a \pm \sqrt{4\mu^2 a^2 - 4\mu^2 a^2}}{2\mu a} = x^*$$



Also handelt es sich sogar um eine stabile Lyapunovfunktion!

$$\nabla V(x, y, z) = \left(1 - \frac{x^*}{x}, 1 - \frac{y^*}{y}, 0 \right)^T \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = x^* \wedge y = y^*$$

$$D^2 V(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^* x^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & y^* y^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } D^2 V(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} x^{*-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{*-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\lambda y - \mu & -\lambda x & 0 \\ \lambda y & \lambda x - \mu + r & 0 \\ 0 & y & -\mu \end{pmatrix}; \quad x^* = \frac{\mu - r}{\lambda}$$

$$y^* = \mu \left(-\frac{\mu - r}{\lambda} + a \right) (\mu - r)^{-1} = -\frac{\mu}{\lambda} + \frac{a\mu}{\mu - r} = \frac{\mu(\lambda a - (\mu - r))}{(\mu - r)\lambda}$$

$$z^* = \frac{r(\lambda a - (\mu - r))}{\lambda(\mu - r)}$$

$$Df(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu(\lambda a - (\mu - r))}{\mu - r} - \mu & r - \mu & 0 \\ \frac{\mu(\lambda a - (\mu - r))}{\mu - r} & \mu - r - \mu + r & 0 \\ 0 & y^* & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{char. poly: } \chi(\delta) = \left(-\frac{\mu(\lambda a - (\mu - r))}{\mu - r} - \mu - \delta \right) (-\delta) (-\mu - \delta) + (\mu + \delta)(r - \mu) \frac{\mu(\lambda a - (\mu - r))}{\mu - r}$$

$$\chi(\delta) = 0 \Leftrightarrow (\mu + \delta) \left(\delta \left(-\frac{\mu \lambda a}{\mu - r} - \delta \right) - \mu(\lambda a - (\mu - r)) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta = -\mu \vee \delta^2 + \frac{\mu \lambda a}{\mu - r} \delta + \mu(\lambda a - (\mu - r)) = 0$$

$$\text{und } \delta^2 + \frac{\mu \lambda a}{\mu - r} \delta + \mu \lambda a - \mu(\mu - r) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu \lambda a}{\mu - r} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 \lambda^2 a^2}{(\mu - r)^2} - 4\mu \lambda a + 4\mu(\mu - r)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu \lambda a}{\mu - r} \pm \sqrt{\mu^2 \left(\frac{\lambda a}{\mu - r} \right)^2 + 4\mu((\mu - r) - \lambda a)} \right)$$

$$\text{und } \sqrt{\mu^2 \left(\frac{\lambda a}{\mu - r} \right)^2 + 4\mu((\mu - r) - \lambda a)} \leq \frac{\mu \lambda a}{\mu - r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^2 \lambda^2 a^2}{(\mu - r)^2} - 4\mu(\lambda a - (\mu - r)) \leq \frac{\mu^2 \lambda^2 a^2}{(\mu - r)^2} \Leftrightarrow -4\mu(\lambda a - (\mu - r)) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda a \geq \mu - r \text{ nach Voraus.}$$

$$\text{Also EW: } \delta_1 = -\mu < 0 \quad \delta_{2,3} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu \lambda a}{\mu - r} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu \lambda a}{\mu - r} \right)^2 - 4\mu(\lambda a - (\mu - r))} \right)$$

$$\text{mit } \operatorname{Re}(\delta_{2,3}) < 0$$

\rightarrow nach Satz 5.8 ist (x^*, y^*, z^*) asymptotisch stabile Ruhelage

9.4. Die Existenz einer (strikten) Ljapunovfunktion erlaubt es, die Konvergenz einer Lösung gegen die asymptotisch stabile Ruhelage zu quantifizieren. Seien hierzu $V \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $y^* = 0$ eine Ruhelage für $y' = f(y)$ und ein striktes Minimum von V . Nehmen Sie an, daß für das Spektrum der Matrix

$$B := (\nabla f(0))^{\top} \nabla^2 V(0) + \nabla^2 V(0) \nabla f(0)$$

gilt: $\max\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(B)\} =: \alpha < 0$. Zeigen Sie: Es existieren $\beta, C > 0$, so daß für alle y_0 hinreichend nahe bei $y^* = 0$ gilt:

$$\|y_{0,y_0}(t)\| \leq C e^{-\beta t}.$$

Wovon hängt β ab?

- 9.5. a) Sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunovfunktion für $y' = f(y)$. Nehmen Sie an, daß für jedes $y_0 \in G$ die Lösung y_{0,y_0} auf $(0, \infty)$ existiert. Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Menge $V^{-1}((-\infty, \alpha])$ eine invariante Menge für die ODE $y' = f(y)$.
- b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ mit $f_i(y) \leq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ und ein $i \in \{1, \dots, d\}$. Geben Sie eine Ljapunovfunktion für die ODE $y' = f(y)$ an.

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ bel. und $y_0 \in V^{-1}((-\infty, \alpha]) \subseteq G$ sowie $z \in \gamma^+(y_0) := \{y_{0,y_0}(t) \mid t \geq 0\}$
 z.z.: $z \in V^{-1}((-\infty, \alpha])$

Es ist also $V(y_0) \leq \alpha$. Als Ljapunovfunktion ist V monoton fallend entlang von Lösungen, deshalb ist $V(z) \leq V(y_0) \leq \alpha$ und damit $z \in V^{-1}((-\infty, \alpha])$

b) $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto y_i$

$\nabla V(y) \cdot f(y) = f_i(y) \leq 0$, nach Satz 5.13 ist V Ljapunovfunktion

9.6. Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung eines mathematischen Pendels (ohne Reibung):

$$y'' + g(y) = 0,$$

wobei die Funktion g auf $(-a, a)$ definiert ist und $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ für $x > 0$ und $g(x) < 0$ für $x < 0$ erfüllt (d.h., $xg(x) > 0$ für $x \neq 0$). Überführen Sie diese ODE 2. Ordnung in ein System erster Ordnung. Geben Sie eine Ljapunovfunktion an. Zeigen Sie, daß $(y, y') = (0, 0)$ eine stabile Ruhelage ist.

$$f:]-a, a[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: (y_1, y_2)^T \mapsto (y_2, -g(y_1))^T$$

Annahme: g Lipschitz-stetig

Die neue ODE ist $y' = f(y)$

$$V:]-a, a[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (y_1, y_2) \mapsto \frac{1}{2} y_2^2 + \int_0^{y_1} g(x) dx \quad (\text{Orientierung an der Energie, vgl. S.62})$$

$$\text{dann ist } \nabla V(y) \cdot f(y) = y_2 g(y_1) - y_2 g(y_1) = 0$$

V ist also Ljapunovfunktion

$$\nabla V(y) = (g(y_1), y_2)^T$$

$f(0,0) = 0$, also ist $(0,0)$ Ruhelage

$$\nabla V(0,0) = 0; \text{ Nun ist } \forall y_1 \in]-a, a[\setminus \{0\}: \int_0^{y_1} g(x) dx > 0$$

also $V(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ und sonst $V(y) > 0$

Im Punkt $(0,0)$ hat V also ein striktes Minimum, nach Satz 5.19 ist daher $(0,0)$ stabil

9.7. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Mengen $M_1 = \{(0,0)\}$, $M_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $M_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ sind invariante Mengen.

„ M_1 “ $f(0,0) = 0$ also ist $(0,0)$ Ruhelage und daher M_1 invariant.

„ M_2 “ Sei $(a,b) \in M_2$ bel. und γ Lsg. des ODE mit $\gamma(0) = (a,b)$ und $s \geq 0$ bel.

z.z.: $\gamma(s) \in M_2$

Wir schreiben (a,b) in Polarkoordinaten $(1,\varphi)$ mit $\cos(\varphi) = a$ und $\sin(\varphi) = b$

Die Funktion $z(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+t) \\ \sin(\varphi+t) \end{pmatrix}$ ist dann Lsg. des AWP und damit M_2 invariant

„ M_3 “ Da die Funktion z aus „ M_2 “ eine Lösung ist, die den Einheitskreis umläuft,

sich Lösungen nicht schneiden und für $y_0 \in M_3$ die Funktion

$\varphi: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : t \mapsto \|y_0, y_0(t)\|_2$ stetig ist, können wir mit dem ZWS

schließen, dass M_3 invariant ist

9.8. Betrachten Sie für $d = 1$ das System $y' = f(y)$, wobei $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f(y) > 0$ für $y \in (0, 1)$. Geben Sie $\omega_+(y_0)$ für $y_0 \in [0, 1]$ an. Betrachten Sie für $r \in \mathbb{R}$ die ODE

Aus Aufgabe 8.4(a) von letzter Übung wissen wir bereits, dass $y' = f(y)$ eine strikte Lyapunovfunktion hat. Nach Korollar 5.25 ist daher $\omega_+(y_0) \subseteq \mathcal{E} = \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) = 0\}$

Da $\forall y \in [0, 1]: (f(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \{0, 1\})$ und sich Lsg. nicht schneiden ist $\omega_+(y_0) \subseteq \{0, 1\}$

Fall 1: „ $y_0 = 0$ “ Dann ist $\omega_+(y_0) = \{0\}$

Fall 2: „ $y_0 = 1$ “ Dann ist $\omega_+(y_0) = \{1\}$

Fall 3: „ $y_0 \in]0, 1[$ “

Da sich Lsg. nicht schneiden ist $0 < y_{t_0, y_0} < 1$ und wegen $\forall y \in]0, 1[: y' = f(y) > 0$ ist

y_{t_0, y_0} streng monoton wachsend, der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{t_0, y_0}(t) \in]y_0, 1]$ existiert also

Deshalb ist $|\omega_+(y_0)| = 1$, es kann nur $\omega_+(y_0) = \{1\}$ sein