Übungen zu Analysis 3, 6. Übung 18. 11. 2019

46. Zeigen Sie
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$
indem Sie $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$ nach λ differenzieren mit genauer Begrünung aller nichttrivialeer Rechenschritte und Erklärung in welchem Sinn auftretende Integrale existieren.

47. Zeigen Sie
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$
mit $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ und berechnen Sie damit
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

48. Zeigen Sie: Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ ungerade, so existiert $\int_0^t \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi$ für $t > 0$ und es gilt
$$\forall t > 0: \quad \left|\int_0^t \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi\right| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} C\|f\|_1, \quad C = \sup\left\{\left|\int_0^t \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi\right| : \, t > 0\right\} < \infty.$$
Zeigen Sie damit, dass die Fouriertransformaton nicht surjektiv von $L^1(\mathbb{R})$ nach $C_0(\mathbb{R})$ abbildet.

Hinw.: Zeigen Sie, dass g nicht auf $\mathbb{R}_+$ integrierbar ist für $g(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $x > 2$.

49. Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume und $f: M_1 \to M_2$ eine Hölder-stetige Abbildung, d.h. es gibt C, γ mit $d_2(f(x), f(y)) \le C d_1(x,y)^\gamma \; \forall x, y \in M_1$. Zeigen Sie, dass die Hausdorffdimension von M_2 durch $\frac{1}{\gamma}$ mal der Hausdorffdimension von M_1 beschränkt ist.

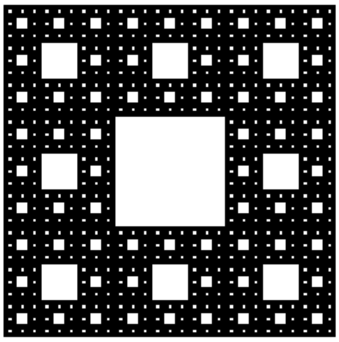
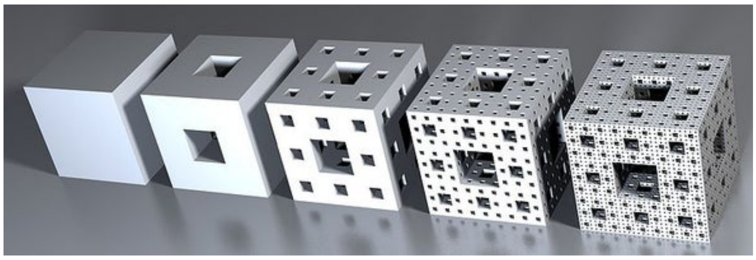
50. Sei μ ein Maß auf dem metrischen Raum M mit $\mu(M) > 0$. Zeigen Sie dass
$$\frac{2^s}{\omega_s} H^s_\delta(M) \ge \mu(M)^2 \left(\int\int_{\{(x,y):\, d(x,y)<\delta\}} d(x,y)^{-s}\,d\mu(x)d\mu(y)\right)^{-1}$$
gilt.

Hinw.: Für eine δ-Überdeckung (C_i) gilt $\{(x,y) : d(x,y) < \delta\} \supseteq \cup C_i$. Betr. sie eine paaarweise disjunkte Überdeckung und verwenden Sie Cauchy-Schwarz.

51. Zeigen Sie dass das Bild einer kompakten Menge K in einem metr. Raum (M_1, d_1) unter einer injektiven stetigen Abbildung f in einen metr. Raum (M_2, d_2) nicht notwendigerweise die gleiche Hausdorffdimension hat.

    Hinw.: Betrachten sie $[0,1$ mit $d_1(x,y) = |x-y|$ und $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$.

52. Den Sierpinskiteppich T erhält man indem man das abg. Einheitsquadrat in 9 gleichgroße abg. Teilquadrate der Kantenlänge $1/3$ zerlegt und das Innere des mittleren entfernt. Im nächsten Schritt zerlegt man die verbleibenden 8 Teilquadrate in 9 gleichgroße abgeschlossene Teilquadrate der Kantenlänge $1/9$ und entfernt das Innere des mittleren. Mit den verbliebenen 8^2 fährt man so fort. Geben Sie eine Abbildung A des Einheitsquadrates W auf sich mit $T = AT = \lim_{n\to\infty} AW$.

    Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Hausdorffdimension des Sierpinskiteppichs.

    Definieren Sie den Menger-Würfel (Bild 2) und berechnen Sie für ihn eine möglichst gute obere Schranke.

53. Definieren Sie auf einem metrischen Raum (X,d) Mengenfunktionen $\mathcal{B}^s_\delta$ analog zum Hausdorffmaß aber mit der zusätzlichen Forderung dass die Mengen der Überdeckung Kugeln $B(x_i, r_i)$ um Punkte $x_i \in X$ und $2r_i \leq \delta$ sind. Zeigen Sie, dass diese Mengenfunktionen $\mathcal{B}^s_\delta$ äußere Maße sind, dass der Grenzwert $\mathcal{B}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{B}^s_\delta(A)$ für jede Teilmenge A von X existiert und $\mathcal{B}$ ein Borelmaß ist.

    Geben sie pos. Schranken a, b für die $a\mathcal{B}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(A) \leq b\mathcal{B}^s(A)$ gilt.

54. Zeigen Sie den folgenden Überdeckungssatz: Sei K ein kompakter metrischer Raum und $\cup_{i\in I}(B(x_i, r_i)) = K$ eine Überdeckung. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit $\cup_{j\in I_0} B(x_j, 3r_j) = K$ und die Kugeln $\{B(x_i, r_i) : i \in I_0\}$ sind paarweise disjunkt.