3.9.8 Lemma. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) Die Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen beschränkt ist. In diesem Fall gilt $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andernfalls ist sie bestimmt gegen $+\infty$ divergent.

(ii) Minorantenkriterium: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

(iii) Majorantenkriterium: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, wobei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis. Wegen der Voraussetzung $a_k \geq 0$ ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Klar, immer wenn n um 1 erhöht wird, wird ein Wert $a_{n+1} \geq 0$ dazuaddiert. Somit folgt (i) aus Satz 3.7.3, (vi). „... Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist diese Folge konvergent gegen eine reelle Zahl. Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so konvergiert sie gegen $+\infty$ $(-\infty)$." Die behauptete Ungleichung gilt, da im Falle der Konvergenz der monoton wachsenden Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Grenzwert gemäß Satz 3.4.2 nichts anderes als $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist. ... und $\forall n \in \mathbb{N}: \; s_n \leq \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Bezeichnet $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, wobei $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch diese monoton wachsend. Selbe Argumentation, wie vorher.

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, so folgt aus $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sicherlich $S_n \geq T_n$. Lemma 2.2.3 (v), also $(x \leq y \wedge a \leq b) \Rightarrow x + a \leq y + b$, mehrmals angewendet. Also kann die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht beschränkt und infolge auch nicht konvergent sein. ... wie man oben sehen konnte.

Ist dagegen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so folgt aus $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $S_n \leq T_n$. Same deal, wie oben. Mit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist daher auch die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und wegen (i) auch konvergent. $\lim_{n \to \infty} T_n$ ist ja eine obere Schranke von $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$. Die behauptete Ungleichung folgt wegen $S_n \leq T_n$ aus Lemma 3.3.1; vgl. auch Fakta 3.9.4, 3. Lemma 3.3.1 (iii) besagt, dass „Gilt ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \leq y_n$, so folgt $x \leq y$." Dasselbe steht in Fakta 3.9.4, 3. $\square$