3.4.4 Definition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$. Das heißt, $\exists C \in \mathbb{R}, C \geq 0 : |x_n| \leq C$ bzw. $-C \leq x_n \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Man kann die Folge also „in eine Box stopfen". Dann heißt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{N\to\infty} \inf\{x_n : n \geq N\}$$

Limes Inferior und

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{N\to\infty} \sup\{x_n : n \geq N\}$$

Limes Superior der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es ist verständlicher, wenn man vorher die Folge $(y_N)_{N\in\mathbb{N}} := (\inf\{x_n : n \geq N\})_{N\in\mathbb{N}}$ definiert und dann $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} y_N$ (bzw. $(z)_{N\in\mathbb{N}} := (\sup\{x_n : n \geq N\})_{N\in\mathbb{N}}$).

Nach Satz 3.4.2 haben wir auch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq N} x_n \quad \text{sowie} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq N} x_n .$$

Laut Satz 3.4.2, konvergiert die beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Weil bei uns $-C \leq x_n \leq C$ gilt, folgt $-C \leq y_N \leq z_N \leq C$, weil ja dann $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ und $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nur aus Werten aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehen (laut Definition) und daher (auf dieselbe Box) beschränkt sind. Jetzt setzt man y_N und z_N (und N) in Satz 3.4.2 ein und bekommt $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \inf\{x_n : n \geq N\} = \lim_{N\to\infty} y_N = \sup\{y_N : N \in \mathbb{N}\} = \sup\{\inf\{x_n : n \geq N\} : N \in \mathbb{N}\}$, was anders geschrieben gleich $\sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq N} x_n$ ist.

Die Folgen $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ und $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sind aus folgendem (no pun intended) Grund monoton wachsend bzw. fallend:

$y_N := \inf\{x_n : n \geq N\}$ und $z_N := \inf\{x_n : n \geq N\}$

laut Buch Seite 86. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Menge ihrer Folgen-Werte $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sind beschränkt, also auch $\{x_n : n \geq N\}$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Deshalb macht y_N und z_N Sinn (# wohldefiniert).

Was hier eigentlich passiert, ist, dass alle $x_n \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sortiert werden. Beispielsweise so:

$\leq$ | x_1 x_6 x_5 $x_{\infty-1}$ x_{21} x_∞ x_3 x_4 x_7 | $\leq$

Die Abbildung ist aber bullshit, weil es unendlich viele x_n gibt. Daher benützt man inf statt min bzw. sup statt max; Warum? Viel Spaß dabei, ein x_{min} zu nehmen, wenn man nicht einmal weiß, was es sein soll. x_{inf} geht schon. Ein klassisches Beispiel: $(0,1] = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Du kannst $n = 1$ setzen und hast das Maximum $= 1/1 = 1$. $n = \infty$ bzw. $1/n = 0$ $\Leftrightarrow 1 = 0$ ist ~~noch mehr~~ Bullshit mit „c". Hier war $x_n = \frac{1}{n}$.

Zurück zur Abbildung: Die Anordnung ist mehr oder weniger willkürlich (so, dass halt die Erklärung gut funktioniert). Wenn $N = 1$, dann ist $x_{inf} = x_1$; $N = 4$ und somit $1 \notin \{n \geq N\}$ und deshalb wird $x_{inf} = x_6$ aus der Menge $\{x_n : n \geq 1\}$ wird aber auch x_3 entfernt und somit $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq \{x_n : n \geq 4\}$. Je größer N wird, desto mehr x_n fallen weg. Das gilt auch für's Supremum. Man würde jetzt vermuten, dass für $N = \infty$, $\inf\{x_n : n \geq N\} = \sup\{x_n : n \geq N\}$, weil dann ja

$\{x_n : n \geq \infty\}$ nur ein Element enthält. Das ist aber nochmal Bullshit, weil $\infty + 1 \geq \infty$ und $\infty \geq \infty$ und $\infty + 1 \neq \infty$, also $|\{x_n : n \geq \infty\}| > 1$! Ganz zu schweigen davon, dass x_∞ überhaupt existiert. Wenn aber $x_\infty := x := \lim_{n \to \infty} x_n$, dann ist das etwas Anderes. Dann hat das ∞ beim x_∞ nicht wirklich eine Bedeutung und kann weggelassen werden.

Es gilt aber auf jeden Fall $y_N \leq z_N$. Man kann aber weiters sagen, dass „je spährlicher eine Teilmenge $\{x_n : n \geq N\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $N \in \mathbb{N}$, desto größer wird deren inf bzw. kleiner deren sup." $\{x_n : n \geq N+1\} \subseteq \{x_n : n \geq N\}$ laut Buch, wobei die Teilmengen von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit wachsendem N immer „spährlicher" werden. Deshalb $y_N \leq y_{N+1} \leq \cdots \leq z_{N+1} \leq z_N \Leftrightarrow \inf\{x_n : n \geq N\} \leq \inf\{x_n : n \geq N+1\}$ usw.

Es ist „$\leq$" statt „$<$", weil durch Entfernen von x_n's nicht immer das inf bzw sup verändert werden muss. Dazu kann man wieder die obere Abbildung betrachten mit $y_5 = y_6$.

Deshalb monoton wachsend bzw. fallen.

Und deshalb kann man auch Satz 3.4.2 auf unsere $(y_N)_{N \in \mathbb{N}}$ bzw. $(z_N)_{N \in \mathbb{N}}$ anwenden.