6.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. Zeigen Sie: $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. Auf $\mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion
$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{wenn } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
gegeben. Bestimmen Sie
$$\mu_F \times \mu_F(\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq 1\}).$$

3. Auf $([0,1] \times [0,1], \mathfrak{B}([0,1]) \times \mathfrak{B}([0,1]))$ können wir die drei Maße
$$\nu_1 = (\lambda \times \zeta)^*$$
(also das von dem Maß $\lambda \times \zeta(A_1 \times A_2) = \lambda(A_1) \times \zeta(A_2)$ auf dem Semiring $\mathfrak{B}([0,1]) \otimes \mathfrak{B}([0,1])$ erzeugte äußere Maß; dabei ist ζ das Zählmaß: $\zeta(A) = |A|$),
$$\nu_2(A) = \int \lambda(A(., \omega_2)) d\zeta(\omega_2)$$
und
$$\nu_3(A) = \int \zeta(A(\omega_1, .)) d\lambda(\omega_1)$$
(wobei ν_3 ein wenig an Verrenkungen braucht, um zu funktionieren). Bestimmen sie $\nu_1(D)$, $\nu_2(D)$ und $\nu_3(D)$ für die Diagonale $D = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$.

4. Im ersten Teil der Vorlesung wurde gezeigt, dass jedes translationsinvariante Lebesgue-Stieltjes Maß ein Vielfaches des Lebesguemaßes ist. Diese Aussage gilt auch für sigmaendliche Maße. Zeigen Sie als ersten Schritt dazu, dass jedes translationsinvariante Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ absolutstetig bezüglich λ ist. Bestimmen Sie dazu auf zwei Arten das Maß
$$\lambda \times \mu(\{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_1 + \omega_2 \in N\},$$
wobei N eine Lebesgue-Nullmenge ist.

5. In der Vorlesung wird gezeigt, dass für eine Menge $A \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ alle Schnitte $A(\omega_1, .)$ und $A(., \omega_2)$ $\mathfrak{S}_2$- bzw. $\mathfrak{S}_1$-messbar sind. Die Umkehrung gilt nicht: geben Sie eine Menge $A \in \mathbb{R}^2$ an, die keine zweidimensionale Borelmenge ist, aber für die alle Schnitte Borelmengen sind (hier kann Übung 9 aus dem vorigen Semester hilfreich sein).

6. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ habe die Eigenschaft, dass alle Schnitte $A(\omega_1, .)$ höchstens abzählbar sind. Zeigen Sie
$$A \in 2^{\mathbb{R}} \times 2^{\mathbb{R}}$$
(also dass A bezüglich der Produktsigmaalgebra messbar ist). Zeigen Sie zuerst, dass das gilt, wenn $|A(\omega_1, .)| \in \{0, 1\}$ (vgl. Problem 1, Übung 9 aus dem vorigen Semester).

7. μ sei ein stetiges endliches Maß auf $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$. Zeigen Sie, dass die Menge A aus dem vorigen Beispiel

$$\mu \times \mu(A) = 0$$

erfüllt (Daraus kann man den Satz von Ulam ableiten: wenn die Kontinuumshypothese gilt, dann ist $\mu = 0$ das einzige stetige endliche Maß auf $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$, insbesondere kann das Lebesguemaß nicht zu einem Maß auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Wenn die Kontinuumshypothese gilt, gibt es eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}$ und der ersten überabzählbaren Ordinalzahl. Deswegen gibt es auf $\mathbb{R}$ eine Wohlordnung $<$, für die alle Anfangsstücke $\{x \in \mathbb{R} : x < y\}$ abzählbar sind. Dann bilden $A = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 < \omega_2\}$ und $B = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \geq \omega_2\}$ eine Zerlegung von $\mathbb{R}^2$ mit $A(\omega, .)$ und $B(., \omega)$ höchstens abzählbar für alle $\omega \in \mathbb{R}$ — eine solche Zerlegung heißt Sierpinski-Zerlegung, und Sierpinski hat gezeigt, dass ihre Existenz nicht nur aus der Kontinuumshypothese folgt, sondern sogar zu ihr äquivalent ist. Wir können folgern, dass $\mu \times \mu(A) = \mu \times \mu(B) = 0$ und daher auch $\mu \times \mu(\mathbb{R}^2) = \mu(\mathbb{R})^2 = 0$).