Berechenbare Funktionen und (semi-)entscheidbare Mengen

Die Menge der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Menge von (möglicherweise partiellen) Funktionen, die alle primitiv rekursiven Funktionen enthält, unter Komposition und primitiver Rekursion abgeschlossen ist, und außerdem Folgendes erfüllt:

> Wenn $f : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$ total und μ-rekursiv ist,
> dann ist die partielle Funktion $\vec{x} \mapsto \min\{y : f(\vec{x}, y) = 0\}$ auch μ-rekursiv.

212. Es gibt eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, die zwar semi-entscheidbar ist, aber nicht entscheidbar.

213. Es gibt eine berechenbare partielle[1] Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass die partielle Funktion $g(x) := \min\{y : f(x, y) = 0\}$ nicht berechenbar ist.
Hinweis: Verwenden Sie die vorige Aufgabe. Man kann eine Funktion f mit $f(x, 1) = 0$ für alle x finden.

214. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine berechenbare streng monotone totale Funktion. ($x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.) Dann ist die Wertemenge von f entscheidbar.

215. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine berechenbare schwach monotone totale Funktion. ($x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.) Dann ist die Wertemenge von f entscheidbar.

216. Für alle $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ definieren wir $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle := p_1^{n_1+1} \cdots \cdot p_k^{n_k+1}$, wobei $(p_1, p_2, p_3, \ldots) = (2, 3, 5, 7, \ldots)$ die Folge der Primzahlen ist. (Runde Klammern für Folgen, spitze Klammern für einzelne Zahlen, die Folgen codieren.)

    Für jede Funktion $f : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir $\hat{f} : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so:

    $$\hat{f}(\vec{x}, y) = \langle f(\vec{x}, 0), \ldots, f(\vec{x}, y-1) \rangle,$$

    also inbesondere $f(\vec{x}, 0) = \langle\rangle = 1$, und $f(\vec{x}, 1) = \langle f(\vec{x}, 0) \rangle = 2^{f(\vec{x},0)+1}$.

    Zeigen Sie:

    (a) f is primitiv rekursiv genau dann, wenn $\hat{f}$ primitiv rekursiv ist.

    (b) Wenn f total ist, dann ist f genau dann berechenbar, wenn $\hat{f}$ berechenbar ist.

217. Sei $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Fibonacci-Folge: $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ für alle $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass F primitiv rekursiv ist, indem Sie zunächst eine primitive Rekursion für $\hat{F}$ angeben.

218. Zeigen Sie (mit Induktion nach Aufbau der Formeln), dass jedes Σ_0-Menge entscheidbar ist.

219. Zeigen Sie, dass jede Σ_1-Menge semientscheidbar ist.

220. Wenn $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion ist, die (als Relation) eine Σ_1-Menge ist, dann ist f auch Δ_1 (d.h., die Menge $(\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}) \setminus f$ ist auch Σ_1).

221. Es gibt eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die zwar Σ_1 aber nicht Δ_1 ist. (Für ein k; für beliebige $k \geq 1$.) Hinweis: Verwenden Sie den noch unbewiesenen Satz aus der Vorlesung, dass es Σ_1-Mengen gibt, deren Komplement nicht Σ_1 ist.

222. Geben Sie ein primitiv rekursive Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ an, sodass f eine Bijektion ist, und g surjektiv ist und jede Menge $g^{-1}(\{(n, m)\})$ unendlich groß ist.
Verallgemeinern Sie dies zu $f_k, g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$.

[1] „Es gibt eine partielle Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ldots$“ heißt: „Es gibt eine Menge $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ (also mit Definitionsbereich A) ...“ So eine Funktion darf also durchaus auch auf ganz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert sein.

223. Seien $A \subseteq \mathbb{N}^k$ und $B \subseteq \mathbb{N}$, und sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine (totale oder partielle) Funktion, deren Graph eine Σ_1-Menge ist. Zeigen Sie (am besten durch Angabe von expliziten Σ_1-Formeln):
    (a) Wenn A und B jeweils Σ_1-Mengen sind, dann auch $f[A] := \{f(\vec{x}) : \vec{x} \in A\}$ und $f^{-1}[B] := \{\vec{x} : f(\vec{x}) \in B\}$.
    (b) Wenn B eine Δ_1-Menge ist, dann auch $f^{-1}[B]$.
    (c) Es gibt eine Σ_1-Funktion f und eine Δ_1-Menge A, sodass $f[A]$ keine Δ_1-Menge ist (äquivalent: nicht entscheidbar ist). (Hinweis: Verwenden Sie den (noch unbewiesenen) Satz aus der VO, dass es Σ_1-Mengen gibt, deren Komplement nicht Σ_1 ist. .)

224. Für $i = 0, 1$ sei P_i die Menge aller Programme p, die bei Eingabe p halten und i ausgeben. Es gilt offenbar $P_0 \cap P_1 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Mengen P_0 und P_1 semi-entscheidbar sind (indem Sie Programme skizzieren, die die jeweiligen partiellen charakteristischen Funktionen $\tilde{\chi}_{P_i}$ berechnen), es aber keine entscheidbare Menge E mit $P_0 \subseteq E$, $P_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus E$ gibt.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt Π_1-Menge, wenn $\mathbb{N} \setminus A$ eine Σ_1-Menge ist. Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ heißt Δ_1-Menge, wenn B sowohl Σ_1- als auch Π_1-Menge ist.

225. a. Seien $S_0, S_1 \subseteq \mathbb{N}$ Σ_1-Mengen mit $S_0 \cup S_1 = \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Δ_1-Menge E, sodass $S_0 \setminus S_1 \subseteq E \subseteq S_0$ gilt. (Hinweis: für $n \in S_0 \cap S_1$ vergleiche die jeweils kleinsten Zeugen für $n \in S_0$ und $n \in S_1$.)
    b. Seien $Q_0, Q_1 \subseteq \mathbb{N}$ Π_1-Mengen mit $Q_0 \cap Q_1 = \emptyset$. Dann gibt es eine Δ_1-Menge E, die Q_0 und Q_1 trennt. (D.h., $Q_0 \subseteq E$, $Q_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus E$.) (Hinweis: (a))

Berechenbare Funktionen auf Strings

Im Folgenden sei S die Menge aller Strings über einem festen endlichen Alphabet A. Für $x \in S$ sei $|x|$ die Länge von x.
Um zu zeigen, dass eine Menge A von Strings entscheidbat oder semi-entscheidbar ist, geben Sie (informell) eine Algorithmus an, der χ_A bzw. $\tilde{\chi}_A$ berechnet.

226. Seien $f : S \times S \to S$ und $g : S \to S$ berechenbare Funktionen; für $B \subseteq S$ definieren wir $\bar{B}$ als die kleinste Menge, die B enthält und unter f und g abgeschlossen ist. Zeigen Sie: Wenn B semi-entscheidbar ist, dann auch $\bar{B}$.

227. Seien f und g wie in der vorigen Aufgabe, mit der zusätzlichen Eigenschaft, $|f(x, y)| > \max(|x|, |y|)$ und $|g(x)| > |x|$ für alle x, y. Wenn B entscheidbar ist, dann auch $\bar{B}$.

228. Schließen Sie aus einer geeigneten Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe, dass die Menge aller Formeln entscheidbar ist.

Für jede Menge Σ von geschlossenen Formeln sei $cl(\Sigma)$ die Menge aller aus Σ ableitbaren geschlossenen Formeln.

229. Die Menge aller logischen Axiome ist entscheidbar.

230. Wenn Σ semi-entscheidbar ist, dann auch $cl(\Sigma)$.

231. Sei Σ semi-entscheidbar. Dann gibt es eine *entscheidbare* Menge Σ' mit $cl(\Sigma') = cl(\Sigma)$. Hinweis: $\varphi \wedge \varphi$.

232. Sei Σ eine vollständige semi-entscheidbare Theorie. Dann ist $cl(\Sigma)$ entscheidbar.

233. Gegeben sei eine beliebige semi-entscheidbare aber nicht entscheidbare Menge A. Geben Sie eine vollständige semi-entscheidbare Theorie Σ_A (in einer geeigneten Sprache an, die nicht entscheidbar ist. (Hinweis: $\top^1 := \top$, $\top^{n+1} := (\top^n) \wedge \top$.)

Unentscheidbare Mengen; universelle Mengen

234. Geben Sie für $k = 2, 3, \ldots$ eine Bijektion $p_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft an: Für alle $A \subseteq \mathbb{N}^k$ gilt: A ist Σ_1-Menge genau dann, wenn $p_k[A]$ eine Σ_1-Menge ist.

235. Es gibt eine Σ_1-Menge $U_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Σ_1-Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $B = \{y \in \mathbb{N} : (k, y) \in A\}$. (Eine Menge mit dieser Eigenschaft heißt „universelle Σ_1-Menge“.)

236. (a) Sei $A \subseteq \mathbb{N}^2$ eine Σ_1-Menge. Dann sind die Mengen $\{y \in \mathbb{N} : (5, y) \in A\}$ und $\{x \in \mathbb{N} : (x, x) \in A\}$ auch Σ_1-Mengen.
   (b) Es gibt eine Σ_1-Menge $U \subseteq \mathbb{N}$, die keine Π_1-Menge ist. (Das heißt: $\mathbb{N} \setminus U$ ist keine Σ_1-Menge.) Hinweis: Verwenden Sie (a) sowie die beiden vorigen Aufgaben.

Wohlordnungen

Eine strikte lineare Ordnung $(A, <)$ (mit der zugehörigen reflexiven Ordnung $\leq$) heißt Wohlordnung, wenn jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element hat:
$\forall B \subseteq A : (B \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in B\ \forall x \in B : b \leq x)$.

237. Wenn $(A, <)$ eine Wohlordnung ist, in der jede nichtleere Teilmenge ein größtes Element hat, dann ist A endlich.

238. Seien $(A, <)$ und $(B, <)$ Wohlordnungen, $A \cap B = \emptyset$. Finden Sie eine Wohlordnung auf $A \cup B$.

239. Seien $(A, <)$ und $(B, <)$ Wohlordnungen. Finden Sie eine Wohlordnung auf $A \times B$. (Hinweis: lexikographische Ordnung: $(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow (x < x' \ \vee\ (x = x' \wedge y < y'))$.)

240. Definieren Sie die lexikographische Ordnung auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Gibt es ein kleinstes Element? Zeigen Sie, dass diese Ordnung eine lineare Ordnung aber keine Wohlordnung ist.

241. Geben Sie eine Menge $A \neq \emptyset$ und eine Funktion $g : A \to A$ an, sodass es keine Funktion $f : \mathbb{Z} \to A$ gibt, die $\forall x \in \mathbb{Z} :\ f(x + 1) = g(f(x))$ erfüllt.

242. Wie in der vorigen Aufgabe, aber diesmal soll es *genau zwei verschiedene* Funktionen f geben, die die obige Bedingung erfüllen.

Bijektionen

Beachten Sie, dass wir $f(x)$ für den Funktionswert von f an der Stelle x schreiben. Für $U \subseteq \mathrm{dom}(f)$ nennen wir die Menge $\{f(u) : i \in U\}$ nicht $f(U)$ sondern $f[U]$.

243. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv. Der Einfachkeit halber seinen A und B disjunkt. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $h : A \to B$ gibt, indem Sie den folgenden Beweis vervollständigen: Wir definieren $A_0 := A$, $B_0 := B$, $A_{n+1} := g[B_n]$, $B_{n+1} := f[A_n]$.

   Sei $X_1 :=: \bigcup_k A_{2k} \setminus A_{2k+1}$, $X_2 := \bigcup_k A_{2k+1} \setminus A_{2k+2}$, $X_3 := \bigcap_k A_k$, und definieren Sie $Y_1, Y_2, Y_3 \subseteq B$ analog.

   a. Zeigen Sie, dass $\{X_1, X_2, X_3\}$ eine Partition von A ist.
   b. Definieren Sie $h : A \to B$ mit eine Fallunterscheidung: Für $x \in X_1$ verwenden Sie f, um $h(x)$ zu definieren, für $x \in X_2$ hingegen g. Und für $x \in X_3$?
   c. Zeigen Sie, dass die so definierte Funktion wohldefiniert ist, und überdies eine Bijektion.

Wir arbeiten in ZF (ohne AC). Wir schreiben ${}^{A}B$ für die Menge aller Funktionen von A nach B. Wenn Sie in den folgenden Aufgaben explizite Bijektionen $f : P \to Q$ und $g : Q \to R$ gefunden haben, gilt $g \circ f : P \to R$ natürlich auch als explizite Bijektion. $\mathbb{N}$ ist das gleiche wie ω.

244. Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen ${}^{\omega}\mathbb{N}$ und $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ an. (Hinweis: z.B. Kettenbrüche.)

245. Sei $A := \{e^{i\pi q} \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

     Geben Sie explizite Bijektionen zwischen den folgenden Mengen an:
     $[0,1)$, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $S^1 \setminus A$.

     Hinweis: Sei θ irrational. Betrachten Sie die Abbildung, die jedem Element $z \in S^1$ der Form $e^{i\pi(q+n\theta)}$ (mit $q \in \mathbb{Q}, n \in \omega$) das Element $z \cdot e^{i\pi\theta}$ zuordnet, und sonst die Identität ist.

246. Geben Sie explizite Bijektionen zwischen den folgenden Mengen an:
     $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \times [0,1)$, $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1) \times [0,1)$, $(\mathbb{Z} \times [0,1))^2$, $\mathbb{R}^2$, S^1, $S^1 \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
     (Die Menge A ist die Menge aus der vorigen Aufgabe.)
     Hinweis: vorige Aufgabe.

247. Geben Sie explizite Bijektionen zwischen den folgenden Mengen an:
     $\mathbb{R}$, ${}^{\omega}2$ (Menge aller 01-Folgen), $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (Potenzmenge von $\mathbb{N}$), ${}^{\omega\times\omega}2$.

248. Geben Sie explizite Bijektionen zwischen den folgenden Mengen an:

$$ {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R},\ {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R},\ {}^{\mathbb{N}}({}^{\mathbb{N}}2),\ {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}2,\ {}^{\mathbb{N}}2 $$

Ein *vollständiger Verband* ist eine partielle Ordung $(P, \leq)$, in der jede Menge ein Supremum und ein Infimum hat. (Insbesondere gibt es $0_P := \inf P$.)
Eine Funktion $F : (P, \leq) \to (Q, \leq)$ heißt monoton, wenn $\forall x, x' \in P(x \leq x' \to F(x) \leq F(x'))$ gilt.
Eine Funktion $F : (P, \leq) \to (Q, \leq)$ zwischen zwei vollständigen Verbänden heißt *stetig* (genauer: ω-stetig), wenn für alle Folgen $(a_n : n \in \omega) \in P^\omega$, die $a_0 \leq a_1 \leq \cdots$ erfüllen, die Gleichung $F(\sup\{a_n \mid n \in \omega\}) = \sup\{F(a_n) \mid n \in \omega\}$ gilt.

249. Geben Sie einen vollständigen Verband P an, sowie eine monotone unstetige Funktion $F : P \to P$.

250. Sei $F : (P, \leq) \to (P, \leq)$ eine monotone stetige Funktion, $(P, \leq)$ ein vollständiger Verband. Zeigen Sie, dass F einen Fixpunkt hat.

251. Sei $F : (P, \leq) \to (P, \leq)$ eine monotone Funktion, $(P, \leq)$ ein vollständiger Verband. Zeigen Sie, dass F einen Fixpunkt hat.

252. Seien $g : A \to B$ und $h : B \to A$ injektive Funktionen. Verwenden sie eine der beiden vorigen Aufgaben, um zu zeigen, dass es eine Menge $X \subseteq A$ gibt mit $h[B \setminus g[X]] = A \setminus X$. Schließen Sie, dass dann $g\restriction X \cup h^{-1}\restriction(A \setminus X)$ eine Bijektion von A nach B ist.
     Hinweis: Sei $F : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ durch $F(X) := A \setminus h[B \setminus g[X]]$ definiert...

ZFC-Axiome

Paarmengenaxiom: $\forall x\ \forall y\ \exists P\ \forall z(z \in P \leftrightarrow z = x \vee z = y)$.
Schwaches Paarmengenaxiom: $\forall x\ \forall y\ \exists P\ (x \in P\ \wedge y \in P)$.
Singletonaxiom: $\forall x\ \exists P\ \forall z(z \epsilon P \leftrightarrow z = x)$.
Mit „halbwegs formalen Beweisen“ ist gemeint, dass Sie einen Beweis so angeben, dass klar ist, wie man daraus einen (halb)formalen Beweis machen kann:

- Geben Sie Behauptungen oder Zwischenresultate an. (Etwa „Zuerst beweisen wir $A(x) \vdash B$, daher $\vdash A(x) \to B$, also $\vdash (\exists x\, A(x)) \to B$, und schließlich $ZFC \vdash \exists x\, A(x)$, also $ZFC \vdash B$.“ Machen Sie klar, was die wesentlichen Schritte im Ihrem Beweis sind, und zu welchen Schritten diese in einem formalen Beweis entsprechen — meistens geht es hier um Substitutionsaxiome, wo man einen geeigneten Term einsetzen muss, sowie um Einführung von Quantoren. Geben Sie auch an, wo und wie Sie die folgenden Axiome verwenden: Paarmengenaxiom, Aussonderungsaxiom, Vereinigungsmengenaxiom, Potenzmengenaxiom.

- Schreiben Sie Behauptungen oder Zwischenresultate so an, dass klar ist, wie man sie in die offizielle Sprache der Mengenlehre übersetzen kann.
  Achten Sie insbesondere auf Formulierungen wie „...“: Wenn n eine Zahl ist, dann ist klar, was mit $x = 0 \vee \cdots \vee x = n$ gemeint ist; wenn aber n eine Variable in Ihrer Sprache ist, dann ist $x = 0 \vee \cdots \vee x = n$ keine Formel. (Außer wenn Sie damit $x \in \omega \ \wedge \ x \leq n$ meinen.)

253. Zeigen Sie halbwegs formal, dass das schwache Singletonaxiom $\forall x \ \exists S(x \in S)$ zur Formel $\forall x \ \exists S \ \forall z(z = x \to z \in S)$ äquivalent ist.

254. Zeigen Sie (mit einem halbwegs formalen Beweis), dass das Singletonaxiom aus dem Paarmengenaxiom folgt.

255. Zeigen Sie, dass es (bis auf Isomorphie) genau eine endliche Struktur gibt, in dem das Paarmengenaxiom gilt. (Hinweis: Singleton.)

256. Geben Sie zwei (oder lieber 256) nichtisomorphe endliche Strukturen an, in denen das Singletonaxiom gilt, nach Möglichkeit auch noch Nullmengenaxiom und Extensionalitätsaxiom.

257. Geben Sie zwei (oder lieber 257) nichtisomorphe endliche Strukturen an, in denen das schwache Paarmengenaxiom $\forall x \, \forall y \, \exists P(x \in P \wedge y \in P)$ und das Extensionalitätsaxiom gilt, nach Möglichkeit auch noch das Nullmengenaxiom.

258. Zeigen Sie (halbwegs formal), dass aus dem Vereinigungsmengenaxiom und dem Paarmengenaxiom das kleine Vereinigungsmengenaxiom folgt. Geben Sie eine Struktur an, in der das Vereinigungsmengenaxiom gilt, aber das kleine Vereinigungsmengenaxiom verletzt ist.

259. Zeigen Sie (halbwegs formal), dass aus dem schwachen Paarmengenaxiom zusammen mit einer geeigneten Instanz des Aussonderungsaxioms das Paarmengenaxiom folgt.

260. Geben Sie einen (halbwegs formalen) Beweis von $\vdash \neg\exists R \, \forall w \, (w \epsilon R \leftrightarrow \neg(w \epsilon w))$

261. Erklären Sie für alle Formeln in mindestens 4 der folgenden Formellisten (also z.B. für alle Formeln in (a), (b), (c), (d)), wie man diese Formeln in die Sprache der Mengenlehre übersetzen kann: (Keine Funktions-/Konstantensymbole, Relationsymbole nur ϵ und $=$.) (Hinweis: Z.B. $\exists N[(\forall x : x \not\epsilon N) \wedge N \epsilon A]$ statt $\emptyset \epsilon A$)
    (a) $A = \emptyset$ (oder $A = \{\}$); $A \in \emptyset$; $\emptyset \in A$.
    (b) $A = \{y\}$; $x \in \{y\}$; $\{y\} \in Z$.
    (c) $P = (x, y)$ (d.h., $P = \{\{x\}, \{x, y\}\}$); $(x, y) \in A$.
    (d) $A = B \cup C$; $a \in B \cup C$; $B \cup C \in \mathscr{D}$.
    (e) $A = \bigcup_{B \in \mathscr{C}} B$ (oder $A = \bigcup \mathscr{C}$).
    (f) $A = y \cup \{y\}$; $x \in y \cup \{y\}$; $y \cup \{y\} \in W$
    (g) $\exists \mathscr{P} \, \forall A \, (A \in \mathscr{P} \leftrightarrow A \subseteq B)$.

262. Detto für die restlichen 3 Formellisten.

263. (M, E) erfüllt das Extensionalitätsaxiom genau dann, wenn die Abbildung $x \mapsto Ext(x)$ (von M nach $\mathscr{P}(M)$) injektiv ist.

264. (M, E) erfüllt das kleine Vereinigungsmengenaxiom genau dann, wenn die Vereinigung von zwei Extensionen selbst wieder eine Extension ist.

265. Zeigen Sie (nicht formal) $A \cup B \subseteq \bigcup\bigcup(A \times B)$. (Achtung, das ist im Allgemeinen falsch. Fügen Sie zuerst eine sinnvolle Annahme über A und B hinzu, damit der Satz auch stimmt.)

266. Sei $\varphi(x)$ eine Formel.
    Finden Sie eine Formel $\psi(x, y)$, sodass aus (Nullmengenaxiom $\wedge$ Ersetzungsaxiom$_\psi$) das Aussonderungsaxiom$_\varphi$ folgt. (Hinweis: Wenn die Existenz von $\{x \in A : \varphi(x)\}$ zu beweisen ist, verwenden Sie eine Fallunterscheidung.)

Auswahlaxiom, Endlichkeit

In diesem Abschnitt arbeiten wir mit der Theorie ZF (ohne AC). Die Existenz von Auswahlfunktionen oder Wohlordnungen dürfen Sie also nur dann verwenden, wenn sie explizit in der Angabe garantiert wird.

267. Zeigen Sie halbwegs formal: Wenn A und B nichtleere disjunkte Mengen sind, dann gibt es eine Menge Z, die mit A und mit B jeweils einelementigen Schnitt hat. (Der Beweis muss nicht formal sein, Sie sollten aber skizzieren können, wie man daraus einen formalen Beweis macht.)
Hinweis: Einführung des Existenzquantors, Paarmengenaxiom.

268. Zeigen Sie halbwegs formal, dass es in jeder endlichen[2] nichtleeren partiellen Ordnung ein maximales Element gibt.
Hinweis: definieren Sie eine geeignete Menge $M \subseteq \omega$, von der Sie dann zeigen, dass sie induktiv ist.

269. Sei $f : \mathbb{N} \to M$ injektiv. Geben Sie (in Abhängigkeit von f) explizit eine injektive aber nicht surjektive Funktion $g : M \to M$ an. (Welche Instanz(en) des Aussonderungsaxioms oder Ersetzungsaxioms verwenden Sie in einem formalen Beweis dieser Aussage?)

270. Sei $g : M \to M$ injektiv aber nicht surjektiv. Geben Sie (in Abhängigkeit von g) explizit eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ an. (Genauer: Geben Sie eine explizite Familie $(f_a : a \in I)$ von solchen Abbildungen an, mit $I \neq \emptyset$.)

271. Sei $g : M \to M$ eine injektive nicht surjektive Abbildung. Kann man (in Abhängigkeit von g) explizit eine surjektive aber nicht injektive Abbildung $h : M \to M$ angeben? (Oder eine nichtleere Familie solcher Abbildungen?)
Wenn umgekehrt $h : M \to M$ eine surjektive aber nicht injektive Abbildung ist, kann man daraus eine injektive aber nicht surjektive Abbildung erhalten?

272. Betrachten Sie die folgenden Eigenschaften, die eine Menge A haben kann:

    a. Es gibt eine injektive Abbildung von ω nach A. („$\omega \leq A$“)
    b. Es gibt eine fast injektive Abbildung von ω nach A. („fast injektiv“ bedeutet, dass das Urbild jedes Bildpunktes endlich ist)
    c. Es gibt eine injektive aber nicht surjektive Abbildung von A nach A
    d. Es gibt eine fast injektive aber nicht surjektive Abbildung von A nach A
    e. Für ein (alle) $x \notin A$ gibt es eine Bijektion von A nach $A \cup \{x\}$. („$A = A + 1$“)
    f. Es gibt eine surjektive aber nicht injektive Abbildung von A nach A
    g. Es gibt eine surjektive Abbildung von A auf ω. („$\omega \leq^* A$“)
    h. Es gibt eine surjektive fast injektive Abbildung von A auf ω.
    i. Es gibt eine injektive Abbildung von ω nach $P(A)$ („$\omega \leq P(A)$“)
    j. Es gibt eine injektive Abbildung von ω in die endlichen Teilmengen von A. („$\omega \leq P_{\text{fin}}(A)$“)
    k. Es gibt eine surjektive Abbildung von den endlichen Teilmengen von A auf ω
    l. A ist unendlich: „$|A| = \infty$“
    m. Es gibt eine nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{P}(A)$ ohne (bez $\subseteq$) maximales Element

    Geben Sie möglichst viele nichttriviale Implikationen zwischen diesen Aussagen an, die sich in ZF (also ohne Auswahlaxiom) beweisen lassen.

[2]Eine Menge M heißt endlich, wenn es eine Bijektion zwischen M und einer natürlichen Zahl $n \in \omega$ gibt.

273. Zeigen Sie, dass aus der „Produkt“-Variante des Auswahlaxioms (für jede Familie $(A_i : i \in)$ nichtleerer Mengen ist $\prod_i A_i \neq \emptyset$) die „Potenzmengen“-Variante (für jede nichtleere Menge X gibt es eine „Auswahlfunktion“ $h : P(X) \to X$, die $h(A) \in A$ für alle nichtleeren $A \subseteq X$ erfüllt).

Zorn, Hausdorff, etc

Auch hier arbeiten wir in ZF (ohne AC).

274. Sei A eine Menge und $r : \mathfrak{P}(A) \setminus \{A\} \to A$ eine „Rauswahlfunktion“ (also $r(B) \in A \setminus B$ für alle $B \subsetneq A$). Verwenden Sie den Satz über transfinite Rekursion (und den Satz von Hartogs), um Folgendes zu beweisen:
    - Es gibt eine (in Abhängigkeit von r) explizit definierte Wohlordnung W und eine explizit definierte *surjektive* Funktion $f : W \to A$.
    - Es gibt eine (in Abhängigkeit von r) explizit definierte Wohlordung auf A.

275. Sei A eine unendliche Menge, W eine Wohlordnung die nicht nach A injektiv eingebettet werden kann, und $h : (A \cup W) \times (A \cup W) \to A \cup W$ bijektiv. (Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir oBdA an $A \cap W = \emptyset$.)
    Dann gibt es eine Funktion $f : A \to W$ mit: $\forall a \in A\ \exists w \in W : h(a, w) = f(a)$

276. Zeigen Sie, dass die Funktion f aus der vorigen Aufgabe injektiv sein muss. Schließen Sie: Wenn es für alle unendlichen Mengen B eine Bijektion zwischen $B \times B$ und B gibt, dann lässt sich jede unendliche Menge A wohlordnen. (Hinweis: Hartogs.)

277. Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Familie mit endlichem Charakter, $K \subseteq \mathcal{F}$ eine durch $\subseteq$ linear geordnete Menge. Zeigen Sie, dass $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} B$ in $\mathcal{F}$ liegt.
    (Anmerkung: Sie dürfen nicht annehmen, dass K die Form $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ hat.)

278. Mit „abzählbar“ meinen wir in dieser Aufgabe „höchstens abzählbar“. Definieren Sie den Begriff „Familie von abzählbarem Charakter“ und geben Sie eine Familie an, die zwar abzählbaren Charakter hat, nicht aber endlichen Charakter.

279. Geben Sie ein Beispiel einer nichtleeren Familie von abzählbarem Charakter an, die kein maximales Element hat.

280. Seien A und B Mengen, eventuell mit einer zusätzlichen Struktur (Vektorraum bzw partielle Ordnung). Welche der folgenden Familien haben endlichen Charakter? (Achtung: Bei manchen der folgenden Punkte hängt die Antwort davon ab, ob A und/oder B endlich oder gar leer sind.)
    - Alle Teilmengen von A.
    - Alle unendlichen Teilmengen von A.
    - Alle endlichen Teilmengen von A.
    - Alle partiellen Funktionen von A nach B.
    - Alle partiellen injektiven Funktionen von A nach B.
    - Alle partiellen surjektiven Funktionen von A nach B.
    - Alle partiellen nichtsurjektiven Funktionen von A nach B.
    - Die linear unabhängigen Teilmengen von A.
    - Die linear abhängigen Teilmengen von A.
    - Alle partiellen ordnungserhaltenden Abbildungen von A nach B. (D.h. wenn $f(a)$, $f(a')$ definiert sind, und $a \leq a'$ gilt, dann auch $f(a) \leq f(a')$.)

281. Sei A eine endliche Menge mit n Elementen. Sei $W(A)$ die Menge aller (X, R), sodass $X \subseteq A$ ist und $R \subseteq X \times X$ eine lineare Ordnung von X ist. Sei $\simeq$ die Isomorphierelation auf $W(A)$ und $H(A)$ die Menge alle Äquivalenzklassen.

    a. Für $A = \{1, 2, 3\}$: Wie viele Elemente hat $W(A)$? Geben Sie alle an. Wie viele Elemente hat $H(A)$? Geben Sie alle an.

    b. Für beliebiges n: Wie viele Elemente hat $H(A)$?

Wohlordnungen (2)

In diesem Abschnitt arbeiten wir mit der Theorie ZF. Die Existenz von Auswahlfunktionen oder Wohlordnungen dürfen Sie also nur dann verwenden, wenn sie explizit in der Angabe garantiert wird.
Für jede lineare Ordnung $(L, <)$ und $x \in L$ sei $L_x := \{y \in L : y <_L x\}$. Wir schreiben $A^{<L}$ für die Menge aller Funktionen, deren Definitionsbereich eine Menge der Form L_x ist, und deren Wertemenge Teilmenge von A ist.
Für Wohlordnungen $(X, <)$ und $(Y, <)$ schreiben wir $(X, <) \sqsubset (Y, <)$ („X ist kürzer als Y“), wenn es ein $y_0 \in Y$ gibt mit $(X, <) \simeq (Y_{<y_0}, <)$. Wir schreiben $(X, <) \sqsubseteq (Y, <)$ für „$(X, <) \sqsubset (Y, <)$ oder $(X, <) \simeq (Y, <)$“.

282. Der Satz „Wenn $(A, <)$ eine Wohlordnung ist, dann gibt es auf $\mathfrak{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ eine Auswahlfunktion“ ist in ZF (ohne AC) beweisbar. Skizzieren Sie diesen Beweis, und geben Sie insbesondere an, an welcher Stelle das Aussonderungsaxiom verwendet wird (und wie die verwendete Instanz des Aussonderungsaxioms aussieht).

283. Sei M eine nichtleere Menge von Wohlordnungen. Dann gibt es eine Wohlordnung (Z, T), sodass für alle $(Y, S) \in M$ gilt: $(Y, S) \sqsubset (Z, T)$.

284. Sei M eine nichtleere Menge von Wohlordnungen. Dann gibt es eine Wohlordnung $(X, R) \in M$, sodass für alle $(Y, S) \in M$ gilt: $(X, R) \sqsubseteq (Y, S)$.

285. Sei $\varphi(X, R)$ eine Formel mit den freien Variablen X und R. Beweisen Sie (informell) den Satz „(a)$\wedge$(b) $\rightarrow$ (c)“.

    (a) $\forall X\ \forall R : \varphi(X, R)\ \rightarrow\ (X, R)$ ist Wohlordnung.

    (b) $\exists X\ \exists R : \varphi(X, R)$.

    (c) $\exists X\ \exists R : \varphi(X, R)\ \wedge\ \forall Y\ \forall S : \Big(\varphi(Y, S) \rightarrow (X, R) \sqsubseteq (Y, S)\Big)$.

286. Beweisen Sie (in ZFC, informell): Eine lineare Ordnung $(L, <)$ ist genau dann KEINE Wohlordnung, wenn es eine Funktion $f : \omega \rightarrow L$ gibt mit $\forall n \in \omega :\ f(n + 1) < f(n)$. An welchen Stellen Ihres Beweises (wenn überhaupt) verwenden Sie das Auswahlaxiom?

287. Zeigen Sie (in ZF, ohne AC): Wenn $(A, <)$ eine Wohlordnung ist, dann gibt es eine lineare Ordnung auf der Potenzmenge von A.

288. Geben Sie eine explizite Wohlordnung von V_ω an. Hinweis: geben Sie eine explizite WO von $V_{n+1} \setminus V_n$ an.

289. Mit PWW bezeichnen wir den Satz „Für jede wohlgeordnete Menge A gilt, dass es auf $\mathfrak{P}(A)$ eine Wohlordnung gibt.“ Schließen Sie aus ZF+PWW dass es auf $V_{\omega+\omega}$ eine Wohlordnung gibt.
ACHTUNG: Das ist eine schwierige Aufgabe. Bitte kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie nicht versehentlich das Auswahlaxiom verwendet haben. Wenn Sie einen einfachen Beweis gefunden haben, dann ist er ziemlich sicher falsch, weil er nämlich in versteckter Weise das Auswahlaxiom verwendet.