3.3.1 Lemma. Für zwei konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit den Grenzwerten x bzw. y gilt:

(i) Ist $c \in \mathbb{R}$ mit $x < c$ ($c < x$), so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n < c$ ($c < x_n$) für alle $n \geq N$.

(ii) Ist $x < y$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n < y_n$ für alle $n \geq N$.

(iii) Gilt ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \leq y_n$, so folgt $x \leq y$.

Beweis.

(ii) Setzt man $\epsilon = \frac{y-x}{2}$, so folgt aus der Konvergenz die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$ und $|y_n - y| < \frac{y-x}{2}$ für $n \geq N$. $\epsilon = \frac{y-x}{2}$ funktioniert, weil $\frac{y-x}{2}$ jeder beliebige positive reelle Zahl sein kann. Man erinnere sich dazu an (3.3) mit $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \cdots$. Scheinbar gilt $d(x_n, x) := |x_n - x|$ und $d(y_n, y) := |y_n - y|$. Der Rest folgt tatsächlich aus (3.3), also $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Somit gilt

$$(y - x) + x_n - y_n = -(y_n - y) - (x - x_n) \leq |y_n - y| + |x - x_n| < (y - x),$$

woraus $x_n < y_n$ für $n \geq N$ folgt. $-(y_n - y) - (x - x_n) = -y_n + y - x + x_n = (y - x) + x_n - y_n$ begründet die Gleichheit. Die erste Ungleichheit folgt aus $-(y_n - y) \leq |y_n - y|$, $-(x - x_n) \leq |x - x_n|$ und Lemma 2.2.3(v), also $(x \leq y \wedge a \leq b) \Rightarrow$

$x + a \leq y + b$. Die Ungleichheit folgt wegen $|y_n - y| + |x + x_n| = |y_n - y| + |(-1)\cdot(x - x_n)| = |y_n - y| + |-1| \cdot |x - x_n| < \frac{y-x}{2} + 1 \cdot \frac{y-x}{2} = y - x$ und nochmals Lemma 2.2.3 (v). Zuletzt bleibt übrig $(y-x) + x_n - y_n < y - x \Leftrightarrow x_n - y_n < 0 \Leftrightarrow x_n < y_n$.

(i) folgt aus (ii), wenn für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) die identische Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen. ... ähm, „wenn WIR ... wählen"? Ok. $(c)_{n\in\mathbb{N}} = \{c\}$, also eine Konstante Folge (also trivialerweise konvergent) mit Grenzwert c. $\forall n \in \mathbb{N}: c_n = c$.

(iii) Wäre $x > y$, so würde aus (ii) folgen, dass $x_n > y_n$ für alle $n \geq k$ mit einem hinreichend großem $k \in \mathbb{N}$. Ok. Einfach einsetzen und nicht denken. Das widerspricht der Annahme. $x_n > y_n \Leftrightarrow \neg(x_n \leq y_n)$, easy. $\square$