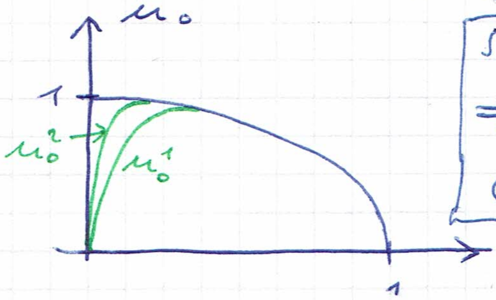
Bsp 2 a:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \text{ auf } (0,1)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) := 1-x^2 > 0 \text{ auf } (0,1) \end{cases} \Big\} \text{ inkompatibel an } (0,0)\,!$$

z.z.: (a) $u(x,t) > 0 \quad \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$

Bew: $u \notin C(\bar{G})$! Unser Max-Prinzip geht nicht.



Sei $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\bar{G})$, $u_t + Lu \le 0$
$\Rightarrow \sup_G u(x,t) = \sup_\Gamma u(x,t)$; $L := -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$
$G := \Omega \times (0,T)$, $\Gamma := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T))$

Betrachte Approx. Folge $u_0^n \in C^2[0,1]$, $u_0^n(0) = u_0^n(1) = 0$
$u_0^n(x) \nearrow_{\text{pkt. weise}}$, $u_0^n \longrightarrow u_0$ in $L^2(0,1)$

- Wie in Bsp 2: $0 < u^n(x,t) < 1 \quad \forall t > 0,\ 0 < x < 1$
- Beh: $u^{n+1}(x,t) > u^n(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$v := u^{n+1} - u^n$ erfüllt: $\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = u_0^{n+1}(x) - u_0^n(x) \ge 0 \end{cases}$ $\not\equiv 0$ ($\leftarrow$ AN)

$\Rightarrow v(x,t) > 0$ in $(0,1)\times(0,\infty)$ [wie zuvor]

- Beh: $\|u(t) - u^n(t)\|_{L^2} \le e^{-\lambda_1 t} \|u_0 - u_0^n\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall t \ge 0$ fest, $\lambda_1 = \pi^2$

(Satz 6.13)

$\Rightarrow u(x,t) > u^n(x,t) > 0 \ \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}$