3.5.3 Proposition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.

Beweis: Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < 1$ für $n, m \geq N$. Das geht gemäß Definition 3.5.1, genauer (3.9), also $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$, weil das eine Cauchy-Folge ausmacht. In dem Fall wählen wir $\epsilon = 1$. Setzt man

$$C := 1 + \max\{d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\},$$

so gilt $d(x_n, x_N) \leq C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weil C mindestens 1 groß ist, deckt die Definition von C den Fall, dass $n \geq N$ ist ab. Dafür sorgt die obere Wahl von N, sodass $n, N \geq N$. Wenn allerdings $n < N$, so wird das Maximum von endlich vielen ($N-1$ vielen) Abständen zwischen x_n und x_N zu 1 dazuaddiert. Daher ist in jedem Fall $C \geq d(x_n, x_N)$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$, wie oben gewählt. $\square$