

Prüfung aus

Diskrete und geometrische Algorithmen (Hetzl)

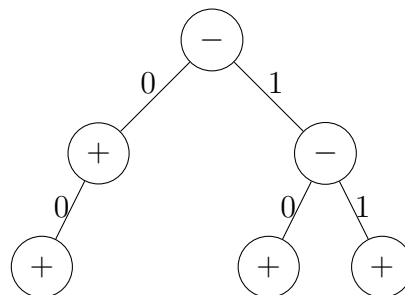
TU Wien, Zoom, 28.4.2021

Arbeitszeit: 100 Minuten

1) (5 P.) Lösen Sie die Rekursionsgleichung $a_n = 3a_{n-1} - \frac{5}{4}a_{n-2}$ (für $n \geq 2$) mit den Anfangswerten $a_0 = 0$ und $a_1 = 2$.

2) (7 P.) Ein Datenfeld A der Länge $n \geq 2$ wird als *verschoben sortiert* bezeichnet falls es ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt so dass $A[k+1] \leq \dots \leq A[n] \leq A[1] \leq \dots \leq A[k]$. Geben Sie einen Algorithmus an der ein verschoben sortiertes Datenfeld der Länge $n \geq 2$ erhält und in Zeit $O(\log n)$ dessen maximales Element zurückliefert. Neben Sie dabei zur Vereinfachung an dass A kein Element zwei Mal enthält.

3) (7 P.) Ein Präfixbaum ist ein Binärbaum der eine Menge $S \subseteq \{0,1\}^*$ von binären Zeichenketten repräsentiert. Jeder Knoten in einem Präfixbaum hat einen Status der entweder $+$ oder $-$ ist. Dabei ist $w \in S$ genau dann wenn der durch w im Baum beschriebene Pfad zu einem Knoten mit Status $+$ führt. Dabei steht 0 für “links” und 1 für “rechts”. Zum Beispiel wird die Menge $\{0, 00, 10, 11\}$ durch den Präfixbaum



repräsentiert. Geben Sie Algorithmen für die folgenden Operationen an

- a) $Enthält(v, s)$ gibt **wahr** zurück wenn die Zeichenkette s im Baum mit Wurzel v enthalten ist und **falsch** sonst.
- b) $Hinzufügen(v, s)$ fügt die Zeichenkette s zum Baum mit Wurzel v hinzu.
- c) $Entfernen(v, s)$ löscht die Zeichenkette s aus dem Baum mit Wurzel v .

Dabei steht jeweils Zeit $O(h)$ zur Verfügung wobei h die Höhe des Präfixbaums ist.

4) (5 P.) Aus der linearen Algebra ist die Leibniz-Formel

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

für die Determinante einer Matrix $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ bekannt. Die Determinante eines endlichen gerichteten Graphen sei die Determinante “seiner” Adjazenzmatrix.

a) Zeigen Sie dass dieser Begriff wohldefiniert ist.

Ein gerichteter Graph heißt azyklisch falls er keinen gerichteten Zyklus enthält.

b) Zeigen Sie: Falls ein endlicher gerichteter Graph G azyklisch ist, dann ist $\det G = 0$.

c) Gilt auch die Umkehrung? D.h. sind alle endlichen gerichteten Graphen G mit $\det G = 0$ azyklisch?