A 6.7.1 Geg.: $E = (e_0, e_1, e_2)$ Kanonische Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$,

Kanonisches 4-Eck:

$Q_0 = \mathbb{R}e_0$, $Q_1 = \mathbb{R}e_1$, $Q_2 = \mathbb{R}e_2$, $Q = \mathbb{R}(e_0 + e_1 + e_2)$

der proj. Ebene $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3\times 1})$.

Ges.: $f \in GL(\mathbb{R}^{3\times 1})$ durch $\langle E^*, f(E)\rangle$, sodass

$$(Q_0, Q_1, Q_2, Q) \overset{\mathcal{P}(f)}{\mapsto} (Q_1, Q_0, Q, Q_2).$$

Wir untersuchen, wohin die Repräsentanten e_0, e_1, e_2 geschickt werden:

$\exists\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$e_0 \mapsto c_1 \cdot e_1$, $e_1 \mapsto c_2 \cdot e_0$,

$e_2 \mapsto c_3 \cdot e_2$, und wähle $(e_0 + e_1 + e_2) \mapsto e_2$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle E^*, f(E)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ges.: Diagonalpunkte A, B, C.

$$Q_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right],\ Q_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right],\ Q_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right],\ Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

$$Q_0 Q_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right],$$

$$Q_2 Q = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \quad A = Q_0 Q_1 \cap Q_2 Q = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right].$$

Analog: $B = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right]$, $C = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right]$.

Zz: $P(f)$ ist Projektivspiegelung

d.h. $P(f)$ hat die Form: $x \mapsto x + (c-1)\dfrac{\langle a^*, x\rangle}{\langle a^*, z\rangle} \cdot z$,

wobei $c = -1$.

mit A als Zentrum und $B \vee C$ als Achse.

$$B \vee C = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right].$$

a^* muss so sein, dass alle $x \in B \vee C$ fest bleiben

dh. $\langle a^*, x\rangle = 0$:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \mid 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Sei } a_3 = 1, \text{ dann } a_1, a_2 = -1.$$

$$x \mapsto x + \cancel{(-2)} \frac{\langle a^*, x\rangle}{\cancel{\left\langle a^*, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

leistet das Gewünschte (auch $A \mapsto A$).

A 6.7.3 Geg.: In $\mathbb{R}^{2\times 1}$ seien 4-Ecke

$(p_0, \dots, p_3), (p_0', \dots, p_3')$:

$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$

$p_0' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, p_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, p_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, p_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(a) Bette in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3\times 1})$ ein und bestimme $\kappa \in PGL(\mathbb{R}^{3\times 1})$, sodass:

$\forall i = 0, \dots, 3: \varepsilon(p_i) \overset{\kappa}{\mapsto} \varepsilon(p_i').$

$$\underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{wähle } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} & E_3 & \\ \hline 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \Big\} \langle E^*, f(E) \rangle$$

(b) Ges.: Bild und Urbild von κ.

$$\langle E^*, f(E) \rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2/4 \\ (x_1+x_2)/2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & E_2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$(-4, 0, 1)$ σ $\Rightarrow$ Gleichung: $-4x_0 + x_2 = 0.$

A 5.2.4 : $f^{-1}(\ker c^*) = \ker(f^T(c^*)) = \ker(c^* \circ f)$.

$\Rightarrow \underbrace{(1, 0, 0)}_{=: c^* \text{ beschreibt Ferngerade}} \cdot \langle E^*, f(E) \rangle = (1/2, 0, 1/4)$

$\Rightarrow 1/2\, x_0 + 1/4\, x_2 = 0 \Rightarrow 2x_0 + x_2 = 0$.

Ges.: Affiner Ausschnitt

$\mathbb{P}(K \times H) \setminus \mathbb{P}(0 \times H)$

$\Rightarrow$ Beschrieben durch $x_0 \neq 0$.

A 6.7.11 Geg.: $\mathbb{R}^{2\times 1}$ affine Ebene,

$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Punkte,

$\varepsilon : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3\times 1})$ Einbettung in proj. Ebene.

(a) Ges.: $f \in GL(\mathbb{R}^{3\times 1})$, sodass

$$(\varepsilon(a), \varepsilon(b), \varepsilon(c), \varepsilon(d)) \overset{\mathcal{P}(f)}{\longmapsto} (\varepsilon(a), \varepsilon(b), \varepsilon(d), \varepsilon(c)).$$

$$\underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & - & 1 & + & 1 \\ 1 & & 0 & & 0 \\ 1 & & 1 & & 0 \\ \hline 1 & - & 1 & + & 1 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ 1 & & 1 & & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \downarrow f \\ \\ \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} E_3 \\ \hline \begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \end{array} \Bigg] \langle E^*, f(E) \rangle.$$

(b) Zz: f ist involutorisch ✓

A 6.8.2 Gg: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3\times 1})$ proj. Ebene,

$$B = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad C = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad D = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Zz: B, C, D kolinear.

$$B \vee C = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0 \quad 1\\ E_2\end{bmatrix}$$

$$(1, 0, -1) \quad \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad B \vee C : x_0 - x_2 = 0$$

Alle Elemente von D erfüllen jene Gleichung.

$\Rightarrow$ D liegt auf der Verbindungsgeraden.

(b) Ges.: A: Schnittpunkt von $B \vee C$ mit $4x_0 - x_1 = 0$.

$$A: \left.\begin{aligned} x_0 - x_2 &= 0\\ 4x_0 - x_1 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-4 & \\ -1 & E_2\end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \mathcal{O}.$$

$$\Rightarrow A = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}.$$

(c) Ges.: $DV(A, B, C, D) =$

$$DV\Big(A, \underbrace{\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{B}, \underbrace{\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{C}, \underbrace{\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{D}\Big) = \frac{x_1}{x_0} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\overset{(6.18)}{\Longleftrightarrow} \quad A = \mathbb{R}\left(x_0 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

A 6.8.3 Gg: X, P, P_0, P_1 paarweise verschiedene Punkte auf proj. Gerade

(a) Zz: $DV(X, P_0, P, P_1) = 1 - DV(X, P, P_0, P_1)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{DV(\underbrace{X}_{[x]}, \underbrace{P}_{[p]}, \underbrace{P_0}_{[p_0]}, \underbrace{P_1}_{[p_1]})}_{:= \frac{x_1}{x_0}} = \frac{x_0}{x_0} - DV(X, P_0, P, P_1)$$

Wähle $p := p_0 + p_1$ und $x := x_0 p_0 + x_1 p_1$.

$$Zz_1: DV(\underbrace{X}_{[x]}, \underbrace{P_0}_{[p_0]}, \underbrace{P}_{[p]}, \underbrace{P_1}_{[-p_1]}) = \frac{x_0 - x_1}{x_0}.$$

Wir weisen nach:

- $p_0 = p + (-p_1) = p_0 + p_1 - p_1$.
- $x = x_0 (p_0 + p_1) + (x_0 + x_1)(-p_1) = x_0 p_0 + \cancel{x_0 p_1} - \cancel{x_0 p_1} + x_1 p_1$.

(b) Zz: $$\underbrace{\underbrace{DV(X, P, P_0, P_1)}_{\text{wie oben}}{}^{-1}}_{:= \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{-1} = \frac{x_0}{x_1}} = DV(X, P, P_1, P_0)$$

Zz_1: $DV(X, P, P_1, P_0) = \frac{x_0}{x_1}$ ✓

Zz: $$\underbrace{\underbrace{DV(X, P, P_1, P_0)}_{\text{wie oben}}}_{:= \frac{x_0}{x_1}} = DV(P, X, P_0, P_1).$$

$$Zz_1: DV(\underbrace{P}_{[p]}, \underbrace{X}_{[x]}, \underbrace{P_0}_{[x_0 p_0]}, \underbrace{P_1}_{[x_1 p_1]}) = \frac{x_0}{x_1} = \frac{1/x_1}{1/x_0}.$$

Wir weisen nach:

- $x = x_0 p_0 + x_1 p_1$.

- $p = \frac{1}{x_0} \cdot x_0 p_0 + \frac{1}{x_1} \cdot x_1 p_1 = p_0 + p_1$.

(c) Z_2: $\underbrace{\underbrace{DV(X, P, P_0, P_1)}_{\text{siehe unten}}}_{:= \frac{x_1}{x_0}} = DV(P_1, P_0, P, X)$.

Wähle $P_0 = [-\frac{p_0}{x_1}]$ und $P_1 = [-\frac{p_1}{x_1}]$.

$\Rightarrow P = [\underbrace{(-\frac{p_0}{x_1}) + (-\frac{p_1}{x_1})}_{-1/x_1 (p_0 + p_1) =: p}]$, $X = [\underbrace{x_0 (-\frac{p_0}{x_1}) + x_1 (-\frac{p_1}{x_1})}_{-x_0/x_1 \cdot p_0 - p_1 =: x}]$.

Z_{2_1}: $DV(P_1, P_0, \underbrace{P}_{[-x_1 p]}, \underbrace{X}_{[x]}) = \frac{x_1}{x_0}$.

Wähle $P_0 = [(1 - \frac{x_0}{x_1}) p_0]$ und $P_1 = [(x_0 - x_1) p_1]$.

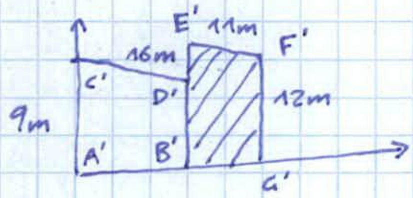
Wir weisen nach:

- $(1 - \frac{x_0}{x_1}) p_0 = (-x_1 p) + (-\frac{x_0}{x_1} \cdot p_0 - p_1)$
  $= p_0 + \cancel{p_1} - \frac{x_0}{x_1} \cdot p_0 - \cancel{p_1}$.

- $(x_0 - x_1) p_1 = x_0 (-x_1 p) + x_1 (-\frac{x_0}{x_1} \cdot p_0 - p_1)$
  $= \cancel{x_0 p_0} + x_0 p_1 - \cancel{x_0 p_0} - x_1 p_1$.

A 6.8.4 Gg.: Hausfassade mit Fassadenecken durch affine Koordinaten gegeben:

$A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;



Ges.: Affine Koordinaten d. Bilder d. Eckpunkte E, F, G d. neuen (markierten) Hausfassade

- Wie sehen die gewünschten Punkte aus?

$E = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 27 \\ 12 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left(B = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$;

- Wie übersetze ich sie in die affine Ebene, sodass sie mit den Punkten $A', \dots, D'$ koherieren?

Einbetten, Übersetzungs-Matrix aufstellen:

$$\underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} - c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 0 & 16 \\ 0 & 9 & 9 \\ \hline 5/4 & 1 & 5/4 \\ 15/4 & 0 & 15/4 \\ 0 & 2.5 & 10/4 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} & E_3 & \\ \hline 1 & 1/64 & 0 \\ 0 & 15/64 & 0 \\ 0 & 0 & 5/18 \end{array} \Bigg\} \langle E^*, f(E) \rangle$$

Nachdem ich die Geraden im proj. R. gebildet habe, wo treffen sie auf meine Ebene?

$$\langle E^*, f(E)\rangle \cdot \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 15/4 \\ 10/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8/3 \end{pmatrix}. \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 \\ 27 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91/64 \\ 405/64 \\ 10/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 405/91 \\ 640/273 \end{pmatrix}. \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91/64 \\ 405/64 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 405/91 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

A 6.8.5 Gg: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{4\times 1})$ proj. Raum,

$P_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $P_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $P_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$,

$P_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $P = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $X = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$, Punkte.

(a) Zz: (P_0, P_1, P_2, P_3, P) proj. Koordinatensystem.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&3\\0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{c|c} & 2\\ E_4 & 1\\ & -1\\ & 1\end{array}\right]$$

$\Rightarrow 2P_0 + 1P_1 - 1P_2 + 1P_3 = P$

Die Repräsentanten von $P_0, \dots, P_3$ bilden eine LK von der, von P.

(b) Ges.: Koordinatendarstellung von X bzgl. oberem System.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc}2&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{array}\right.}\underbrace{\left.\begin{array}{|c}2\\-1\\2\\0\end{array}\right]}_{X} \mapsto \left[\begin{array}{c|c} & 1\\ E_4 & -1\\ & -3\\ & 0\end{array}\right]$$

Faktoren (Koordinaten) geben an, wieviel $P_0, \dots, P_3$ dann X ergeben,

Vielfache von $P_0, \dots, P_3$ - Repräsentanten,

Faktoren durch P festgelegt,