Serie 6

"Besprechung": Donnerstag, 30.4

6.1. Gegeben sei die skalare ODE

$$x'' + q(t)x = 0$$

mit einer stetigen Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Es seien $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$ zwei Lösungen der ODE. Ihre Wronskideterminante ist durch

$$W(t) := x(t)y'(t) - x'(t)y(t)$$

definiert. Die Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ sind l.u. wenn $W(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $W(t)$ konstant ist.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass für l.u. Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ gilt:

(i) Aus $x(t_1) = 0$ folgt $x'(t_1) \neq 0$ und $y(t_1) \neq 0$.

(ii) Falls $x(t_1) = x(t_2) = 0$ gilt und $x(t) \neq 0$ für $t \in (t_1, t_2)$ dann hat $y(t)$ in (t_1, t_2) genau eine Nullstelle.

Bemerkung: Die Eigenschaft (ii) ist die sogenannte *Trennungseigenschaft* für die Nullstellen der Lösungen solcher ODEs. Daraus folgt z.B, dass, wenn eine Lösung oszilliert, alle anderen Lösungen ebenfalls oszillieren. Ein einfaches Beispiel dafür sind im Fall $q(t) = 1$ die Funktionen $\cos t$ und $\sin t$.

6.2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden ODEs mit der Ansatzmethode:

a) $y'' + y = \sin t + \sin 3t$

b) $y'' + y = te^{-2t} \cos t$,

c) $y'' - y = te^{-t}$.

Untersuchen Sie, ob die Lösungen dieser ODEs stabil bzw. asymptotisch stabil sind.

6.3. In Aufg. 5.1 haben wir homogene (skalare) ODEs kennengelernt und durch Substitution auf eine separierte ODE zurückgeführt. Ein allgemeinerer Typ ist von der Form

$$y' = f\left(\frac{ay + bt + c}{\alpha y + \beta t + \gamma}\right) \tag{1}$$

für Konstanten a, b, c, α, β, γ. Ziel ist es, durch Variablensubstitution eine separierbare ODE zu erhalten. Definieren Sie hierzu die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

a) Betrachten Sie den Fall $\det A = 0$. *Hinweis:* Bemerken Sie, daß $ay + bt = \lambda(\alpha y + \beta t)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie sich, daß Sie durch Substitution sogar die Form

$$\widetilde{y}' = \widetilde{f}(\widetilde{y})$$

erhalten können.

b) Geben Sie für den Fall $\det A \neq 0$ eine Funktion $\widetilde{f}$ an, die das Gewünschte leistet. *Hinweis:* betrachten Sie die Lösung (t_0, y_0) von

$$A \begin{pmatrix} y_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß dann die Funktion $\widetilde{y}(t) := y(t + t_0) - y_0$ eine ODE der Form (1) mit $c = \gamma = 0$ erfüllt. Überlegen Sie sich, daß letztere Form einfach auf die Form einer homogenen ODE gebracht werden kann.

6.4. Lösen Sie die ODE

$$y' = -\frac{3y + 4t - 1}{4y + 3t + 1}$$

6.5. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die ODE

$$y^{(3)} - 3y' + 2y = 0$$

und suchen Sie eine spezielle Lösung der ODE

$$y^{(3)} - 3y' + 2y = 9e^t$$

auf 2 Arten: 1) mittels Variation der Konstanten und 2) mittels der Ansatzmethode

6.6. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die ODE vom *Eulerschen Typ:*

$$2t^3 y^{(3)} + 10t^2 y^{(2)} - 4ty' - 20y = 0$$

Hinweis: Substituieren Sie $t = e^\tau$.

6.7. Lösen Sie die ODE vom *Bernoullischen Typ:*

$$y' = f(t)y + g(t)y^n, \qquad n \neq 0, 1$$

mittels der Transformation $\widetilde{y} = y^{1-n}$.

Übungsblätter zum downloaden: `http://www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/ode_SS16`