Übungen zu Analysis 2, 10. Übung 28. 5. 2019

91. Für jede Pseudometrik d auf einer Menge X sind die Mengen $U_r(x) := \{y \in X: \ d(x,y) < r\}$, $r > 0$, $x \in X$, Basis einer Topologie.

    Eine Abbildung $d: \ X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Pseudometrik, wenn $d(x,x) = 0$, $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ gilt. Eine Pseudometrik ist also eine Metrik wenn zusätzlich $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ gilt.

92. $\bar{E} = ((E^{\complement})^{\circ})^{\complement}$ und $\partial E = (E^{\circ} \cup (E^{\complement})^{\circ})^{\complement}$.

93. Für Teilmengen $A \subseteq B$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ gilt $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ und $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Für Teilmengen A_i von X gilt $\cap_{i=1}^n A_i^{\circ} = (\cap_{i=1}^n A_i)^{\circ}$ und $\cup_{i=1}^n \bar{A}_i = \overline{(\cup_{i=1}^n A_i)}$. Gelten diese Aussagen auch für unendl. Vereinigungen resp. Durchschnitte?

94. Sei X eine Menge und sei eine Abbildung $A \mapsto \bar{A}$ auf $\mathcal{P}(X)$ in sich definiert (genannt Abschlussoperator), die

    $$\begin{aligned} &\emptyset = \bar{\emptyset} \\ &\bar{\bar{A}} = \bar{A} \quad \forall A \subseteq X \\ &\bar{A} \supseteq A \quad \forall A \subseteq X \\ &\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B} \quad \forall A, B \subseteq X \end{aligned}$$

    erfüllt. Dann ist die Menge $\{A^{\complement}: \ \bar{A} = A \subseteq X\}$ eine Topologie auf X in der genau die Mengen A mit $A = \bar{A}$ abgeschlossen sind.

95. Ein topologischer Raum ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn die Diagonale $D := \{(x,x): \ x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ (versehen mit der Produkttopologie) ist.

    Die Produkttopologie auf $X \times Y$ für topologische Räume $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ ist die von der Basis $B_i \times C_j \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ erzeugte Topologie.

96. Ein topologischer Raum ist genau dann Hausdorff, wenn $\{x\}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von x ist.

97. Finden Sie einen topologischen Raum in dem alle einelementigen Mengen $\{x\}$ abgeschlossen sind, der aber kein Hausdorffraum ist.

98. Sei f eine Abbildung von $(X, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{T}')$.

    a) Sei $f(X) \subseteq Z \subseteq Y$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig als Abbildung von $(X, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{T}')$ ist, wenn f stetig als Abbildung von

$(X, \mathcal{T})$ nach Z ist, wobei Z mit der Relativtopologie als Teilmenge von $(Y, \mathcal{T}')$ versehen ist.

b) Ist f stetig, so ist für $Z \subseteq X$ die Einschränkung $f|_Z$ von f auf Z stetig als Abbildung von Z mit der Relativtopologie nach $(Y, \mathcal{T}')$.

99. Zeigen Sie, dass für einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $X \neq \emptyset$ und $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{U}$ oder $A^{\complement} \in \mathcal{U}$ gilt.

100. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt frei, wenn $\cap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ gilt. Auf einer unendlichen Menge X ist der "kofinite Filter" $\mathcal{K}$ die Menge aller Teilmengen mit endlichem Komplement. Zeigen Sie, dass der kofinite Filter tatsächlich ein Filter ist und ein Filter auf einer unendlichen Menge genau dann frei ist, wenn er feiner als der kofinite Filter ist.