Betrachte $\begin{cases} -u'' = f \in L^2 \text{ auf } (0,\pi) \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$ (1)

- schwache Formulierung auf $\tilde{H}_0^1 := \{u \in H^1(0,\pi) \mid u(0) = 0\}$:

$\forall v \in \tilde{H}_0^1$: $$-\int_0^\pi u'' v\,dx = \underbrace{\int_0^\pi u'v'\,dx}_{=:a(u,v)} \underbrace{- u'v\Big|_0^\pi}_{=0,\text{ da } v(0)=u'(\pi)=0} = \underbrace{\int_0^\pi f v\,dx}_{=:F(v)}$$

Finde $u \in \tilde{H}_0^1$: $a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in \tilde{H}_0^1$ (2)

- BLF a ist stetig ✓; koerziv, mit Poincaré Ungl:

$$\|v\|_{L^2(0,\pi)} \le 2\pi \|v'\|_{L^2(0,\pi)} \quad \forall v \in \tilde{H}_0^1$$

Bew: $$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^\pi ([x-\pi]v^2)'\,dx - 2\int_0^\pi (x-\pi) v v'\,dx =$$
$$= \underbrace{(x-\pi)v^2\Big|_0^\pi}_{=0} - 2\int_0^\pi (x-\pi) v v'\,dx \le 2\pi \|v\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \quad ✓$$

- mit Lax-Milgram: (2) hat eind. Lösung $u \in \tilde{H}_0^1$, $\|u\|_{H^1} \le \frac{1}{\varkappa}\|f\|_{L^2}$
- Def $K: L^2(0,\pi) \to \tilde{H}_0^1(0,\pi)$, $f \mapsto u =: Kf$; $L := K^{-1}$

K ist injektiv (aus (2) ✓); kompakt ✓; symm, da L symm:

$D(L) := K(L^2(0,\pi)) = \{u \in H^2(0,\pi) \mid u(0)=0,\ u'(\pi)=0\}$.

$\forall u,v \in D(L)$:
$$(Lu,v)_{L^2} = -\int_0^\pi u''v\,dx = \int_0^\pi u'v'\,dx \underbrace{- u'v\Big|_0^\pi}_{=0} = -\int_0^\pi u v''\,dx + \underbrace{uv'\Big|_0^\pi}_{=0} =$$
$$= (u, Lv)_{L^2} \quad ✓$$

$\Rightarrow$ Entwicklungssatz kann auf K angewendet werden.