2. Übungstest Analysis 2

7. 5. 2010

1 (5P): Es sei ℓ_∞ der Banachraum aller beschränkten reellen Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit der Norm $\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$.

Für $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ sei T die Abbildung $\ell_\infty \to \ell_\infty, \quad (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (a_i x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Zeigen Sie, dass für die Abbildungsnorm $\|\cdot\|$ gilt:

$$\|T\| = \|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

Lösung: Es gilt für die Abbildungsnorm:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Tx\|_\infty,$$

also

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1} \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i x_i| \le \sup_{\|x\|_\infty=1} \sup_{i\in\mathbb{N}} \|(a_i)_{i\in\mathbf{N}}\|_\infty |x_i| \\ &= \|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty \sup_{\|x\|_\infty=1} \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = \|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty,\end{aligned}$$

und somit

$$\|T\| \le \|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty. \tag{1}$$

Für $\mathbf{1} := (1,1,1,\ldots) \in \ell_\infty$ gilt: $T\mathbf{1} = (a_i \cdot 1)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wegen $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ und $\|T\mathbf{1}\|_\infty = \|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty$ folgt aus der Definition der Abbildungsnorm: $\|T\| \ge \|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty$.

Mit (1) folgt $\|T\| = \|a\|_\infty$.

2 (5P). Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = \operatorname{sgn}(\frac{\pi}{2} - |x|)$ auf $[-\pi,\pi]$ und untersuchen Sie diese Reihe auf punktweise Konvergenz gegen f.

Lösung: Mit $|x|$ ist auch $f(x)$ eine gerade Funktion, woraus folgt $b_n = 0$ und $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx\,dx\right) = \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - (\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

also $a_n = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$ und die Fourierreihe von f ist

$$\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + - + \ldots).$$

Die 2π-periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ von f (es gilt $f(-\pi) = f(\pi)!$) ist stückweise stetig (stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$) und die rechtsseitig stetige Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ ist überall rechtsseitig differenzierbar (rechtsseitige Ableitung immer 0). Desgleichen ist die linksseitig stetige Fortsetzung überall linksseitig differenzierbar. Mit Satz 9.5.4 folgt, dass die Fourierreihe überall gegen den Mittelwert aus links und rechtsseitigem Grenzwert konvergiert. Dieser ist für $\tilde{f}$ aber überall (auch an den Unstetigkeitsstellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) gleich dem Funktionswert, wonach die Fourierreihe überall gegen $\tilde{f}$ konvergiert, insbes. konvergiert sie auf $[-\pi, \pi]$ gegen f,

---

Lsg: 1:

2: