1. Zeige, dass folgende Aussagen allgemeingültig sind:

- $A \Rightarrow A \vee B$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beweis:

A	$\Rightarrow$	A	$\vee$	B
W	W		W	W
W	W		W	F
F	W		W	W
F	W		F	F

□

Beweis:

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	$A)$
W	W	W	W	F		W	F	
W	F	F	W	W		F	F	
F	W	W	W	F		W	W	
F	W	F	W	W		W	W	

□

Beweis:

$((A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\wedge$	$(B$	$\Rightarrow$	$C))$	$\Rightarrow$	$(A$	$\Rightarrow$	$C)$
W	W	W	W		W	W	W		W	
W	W	W	F		F	F	W		F	
W	F	F	F		W	W	W		W	
W	F	F	F		W	F	W		F	
F	W	W	W		W	W	W		W	
F	W	W	F		F	F	W		F	
F	W	F	W		W	W	W		W	
F	W	F	W		W	F	W		W	

□

2. Beantworte für die folgenden Aussageformen die beiden Fragen: Ist die Aussageform allgemeingültig? Gibt es Aussagen A und B für die die Aussageform wahr ist?

- $(\neg(A \wedge B) \wedge B) \Rightarrow A$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $(\neg A) \wedge A$

Zum 1. Punkt: Bei, A = falsch und B = wahr, ist die Aussageform falsch. Die restlichen 3 Möglichkeiten ergeben wahr.

Beweis:

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\wedge$	$B)$	$\Rightarrow$	A
F	W	W	W	F		W	
F	W	F	F	F		W	
W	F	F	W	W		F	
W	F	F	F	F		W	

$\square$

Zum 2. Punkt: Die Aussageform ist eine Tautologie.

Beweis:

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$B)$
W	W	W	W	W		F		
W	F	F	W	F		W		
F	W	W	W	W		F		
F	W	F	W	W		F		

Zum 3. Punkt: Die Aussageform ist ein Widerspruch.

Beweis:

$(\neg$	$A)$	$\wedge$	A
F	W	F	
W	F	F	

$\square$

3. Seien M, N Mengen. Zeige, dass

$$\underbrace{M \subseteq N}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{M \cap N = M}_{(2)} \Leftrightarrow \underbrace{M \cup N = N}_{(3)}$$

(1) $\forall x: x \in M \Rightarrow x \in N$

(2) $\forall x: x \in M \wedge x \in N \Leftrightarrow x \in M$

(3) $\forall x: x \in M \vee x \in N \Leftrightarrow x \in N$

Beweis: Die Äquivalenz von (1), (2), und (3) wird in folgenden Schritten gezeigt:

- (1) $\Rightarrow$ (2): Die Äquivalenz in (2) wird in folgenden zwei Schritten gezeigt (, weil $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$):
  - $x \in M \wedge x \in N \Rightarrow x \in M$: Dies ist aufgrund der Konjunktionsbeseitigung wahr.
  - $x \in M \wedge x \in N \Leftarrow x \in M$: Die Implikation kann nur falsch sein, wenn $x \in M$ wahr und $x \in M \wedge x \in N$ falsch ist. Dazu müsste, weil $x \in M$ wahr ist, $x \in N$ falsch sein. Das ist jedoch aufgrund (1) unmöglich.

- (2) $\Rightarrow$ (3): Die Äquivalenz in (3) wird in folgenden zwei Schritten gezeigt:
  - $x \in M \vee x \in N \Rightarrow x \in N$: Die Implikation kann nur falsch sein, wenn $x \in M \vee x \in N$ wahr und $x \in N$ falsch ist. Dazu müsste, weil $x \in N$ falsch ist, $x \in M$ wahr sein. Das ist jedoch aufgrund (2) unmöglich.
  - $x \in M \vee x \in N \Leftarrow x \in N$: Dies ist aufgrund der Disjunktionseinführung wahr.

- $(3) \Rightarrow (1)$: Die Implikation in (1) kann nur falsch sein, wenn $x \in N$ falsch und $x \in M$ wahr ist. Das ist jedoch aufgrund (3) unmöglich.

Die restlichen Implikationen können nun wie folgt hergeleitet werden:

- $[(3) \Rightarrow (2)] \Leftrightarrow [(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)]$
- $[(2) \Rightarrow (1)] \Leftrightarrow [(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)]$ $\square$

4. Auf welchen allgemeingültigen Aussageformen beruht die Gleichheit $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$?

$$\{x : x \in M_1 \wedge (x \in M_2 \vee x \in M_3)\}$$
$$= \{x : (x \in M_1 \wedge x \in M_2) \vee (x \in M_1 \wedge x \in M_3)\}$$

Die Äquivalenz beider Aussagen beruht auf den Distributivsätzen.

5. Sei X eine Menge, und $M, N \subseteq X$.

- Zeige, dass $(X\setminus M) \cap (M \cup N) \subseteq N$. Welche Tautologie(n) haben Sie im Beweis benützen.

- Welche Mengenbezeichnung erhält man, wenn man die Tautologie $\neg(A \wedge B) \wedge \Rightarrow \neg A$ benützt?

Beweis: $\{x : [(x\in X \wedge \neg(x\in M)) \wedge (x\in M \vee x\in N) \Rightarrow x\in N]\}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} [((x\in X \wedge \neg(x\in M)) \wedge x\in M) \vee ((x\in X \wedge \neg(x\in M)) \wedge x\in N) \Rightarrow x\in N] \overset{(2)}{\Leftrightarrow} [(x\in X \wedge \neg(x\in M) \wedge x\in M) \vee (x\in X \wedge \neg(x\in M) \wedge x\in N) \Rightarrow x\in N] \xLeftrightarrow{(3)\wedge(4)} [x\in N \Rightarrow x\in N]$$

□

Distributivsätze	(1)
Assoziativsätze	(2)
Satz vom Widerspruch	(3)
Konjunktionsbeseitigung	(4)

Alternativer Beweis: Wir wollen die Conclusio wie folgt filetieren:

$$\{x : \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x\in X \wedge x\notin M)}_{(iii)} \wedge \underbrace{(x\in M \vee x\in N)}_{(iv)}}_{(ii)} \Rightarrow \underbrace{x\in N}_{(v)}}_{(i)}\}$$

Damit (i) falsch ist, muss (v) falsch und (ii) wahr sein.
Damit (ii) wahr ist, müssten (iii) und (iv) wahr sein.
Damit (iii) wahr ist, müssten $x\in X$ und $x\notin M$ wahr sein.
Damit (iv) wahr ist, müsste, weil $x\in N$ als falsch betrachtet wird, $x\in M$ wahr sein. Das ist jedoch aufgrund $x\notin M$, und (3), unmöglich.

□

Die Mengenbezeichnung für die Tautologie $\neg(A \wedge B) \wedge B \Rightarrow \neg A$ erlangt man folgendermaßen:

$$\neg(x \in M \wedge x \in N) \wedge x \in N \Rightarrow \neg(x \in M)$$
$$\Rightarrow (x \notin M \vee x \notin N) \wedge x \in N \Rightarrow x \notin M$$
$$\Rightarrow (x \notin M \wedge x \in N) \vee (x \notin N \wedge x \in N) \Rightarrow x \notin M$$
$$\Rightarrow \quad x \notin M \wedge x \in N \Rightarrow x \notin M$$
$$\Rightarrow \quad x \in N \setminus M \notin M$$

Die Tautologie ist bei $\notin$ unmittelbar klar.

6. Betrachte die Aussage

A: "Sei $\sim$ eine Relation auf einer nichtleeren Menge X. Ist $\sim$ symmetrisch und transitiv, so ist $\sim$ auch reflexiv."

(i) Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort "wahr" lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort "falsch", finde ein Gegenbeispiel.

(ii) Ist der folgende Beweis der Aussage wahr oder falsch?

Wir müssen zeigen, dass stets $x \sim x$ gilt. Sei $x \sim y$, dann ist wegen der Transitivität daher auch $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv.

(iii) Falls Ihre Antwort in (ii) "falsch" lautet, finde den Fehler im Beweis.

(iv) Muss man den in (ii) genannten Beweis lesen, um zu entscheiden ob er wahr oder falsch ist.

Die Antwort zu (i) lautet "falsch". Es folgen 2 Gegenbeispiele:

Gegenbeispiel 1: $\sim = \emptyset$

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $\neg(\sim$ ist transitiv $\wedge \sim$ ist symmetrisch $\Rightarrow \sim$ ist reflexiv$)$ unter der Voraussetzung $\sim = \emptyset$.

- $\sim$ ist nicht reflexiv:
  $\neg[\forall x \in X : (x,x) \in \sim]$
  Dies ist wahr, da $\sim$ kein Element (x,x) besitzt.

- $\sim$ ist symmetrisch:
  $[\forall x, y \in X : (x,y) \in \sim \Rightarrow (y,x) \in \sim]$
  Die Prämisse ist falsch, da $\sim$ kein Element (x,y) besitzt, also ist die Implikation richtig.

- $\sim$ ist transitiv:
  $[\forall x, y, z \in X : ((x,y) \in \sim \wedge (y,z) \in \sim) \Rightarrow (x,z) \in \sim]$
  Die Prämisse ist falsch, da $\sim$ keine Elemente $(x,y), (y,z)$ besitzt, also ist die Implikation richtig. $\square$

Gegenbeispiel 2: Sei $X = \{a, b, c\}$, und $\sim = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a)\}$

Beweis: —"—.

- $\sim$ ist nicht injektiv:
  $\neg[\forall x \in X : (x,x) \in \sim]$
  Diese Aussage ist aufgrund des Verneinungssatzes äquivalent zu $[\exists x : (x,x) \notin \sim]$. Dies trifft für $x = c$ zu.

- $\sim$ ist symmetrisch und transitiv: trivial $\square$

Abgesehen davon, dass im Beweis in (ii) nicht von der Symmetrie Gebrauch gemacht wird, ist er nicht korrekt.
Das folgt daraus, dass die Prämisse, also die Angabe / Aussage $A \wedge$ Satz 2 des Beweises in (ii), wahr, aber die Conclusio falsch, siehe Gegenbeispiele 1 und 2, ist. Also ist der Beweis nicht allgemein gültig.
Der Fehler liegt darin, dass, wie gesagt, die Conclusio falsch sein kann, also muss man den Beweis nicht lesen.

7. Eine, möglicherweise unendlich große, Gruppe von Mathematikern spielt mit einem Physiker ein Spiel. Die Spielregeln sind wie folgt: Zu Spielbeginn setzt der Physiker jedem Mathematiker einen Hut auf der rot oder grün sein kann. Jeder der Mathematiker sieht wohl die Farbe der Hüte der anderen, nicht jedoch die Farbe seines eigenen Hutes. In geheimer Abstimmung schreibt dann jeder der Mathematiker auf den Zettel welche Farbe er glaubt dass sein Hut hat. Die Mathematiker gewinnen, wenn sich nur endlich viele von ihnen irren. Dabei dürfen sich die Mathematiker vor Spielbeginn auf eine Strategie einigen, während des Spiels ist jedoch jegliche Kommunikation verboten.

Gibt es eine Strategie, sodass die Mathematiker sicher gewinnen? Falls ja, finde eine.

Hinweis. Nachdem wir Mathematiker sind und nicht Physiker liegt die Vermutung nahe, dass die Antwort auf die Frage "ja" lautet. Eine mögliche Strategie benützt eine geeignete Äquivalenzrelation und das Auswahlaxiom.

Eine mögliche Strategie: Wenn es endlich viele Mathematiker gibt, haben diese bereits gewonnen. Die Strategie muss also nur für unendlich viele gelten.
Dazu wird jedem Mathematiker genau eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zugeordnet. Die Farbe ihrer Hüte wird durch die Funktion $f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{\text{rot}, \text{grün}\}$ beschrieben.
Definiere eine Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, wobei M die Menge aller möglicher f ist, sodass zwei f äquivalent sind, wenn alle

$f(K)$, wobei $K \geq m$, und $m \in \mathbb{N}$ beliebig ist, unterschiedlicher f jeweils gleich sind.

$$R := \{(f_1, f_2) \in M \times M : \exists m \; \forall \tilde{K} : m \leq \tilde{K} \wedge f_1(\tilde{K}) = f_2(\tilde{K})\}$$

Dem Auswahlaxiom zufolge gilt

$$\exists N : \forall [f]_R \in M/R : \exists! f_1 : f_1 \in [f]_R \wedge f_1 \in N$$

Die Mathematiker merken sich also alle $f_1 \in N$ und gleichen diese mit der eigentlichen Hutfarbenvergabe des Physikers f_1 ab. Jene $\tilde{f}_1 \, R \, f_2$ wird befolgt, sprich jeder Mathematiker K schreibt den Funktionswert $\tilde{f}_1(K)$ auf seinen Zettel.

Nachdem alle Funktionswerte, nach Definition von R, der beiden Funktionen $\tilde{f}_1$ und f_2, für gleiche $\tilde{K}$, jeweils gleich sind, liegen alle (unendlich viele) Mathematiker $\tilde{K}$ mit ihrer "Schätzung" richtig. Die Menge $\{\bar{K} \in \mathbb{N} : \bar{K} \neq \tilde{K}\}$ enthält also endlich viele Elemente.

8. Seien M, N Mengen, $f: M \to N$ eine Funktion. Wir definieren eine Relation $\operatorname{Ker} f$ auf M als

$$\operatorname{Ker} f := \{(x,y) \in M \times M : f(x) = f(y)\}. \tag{1}$$

Zeige, dass $\operatorname{Ker} f$ eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis: $\operatorname{Ker} f$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch, und transitiv ist.

- $\operatorname{Ker} f$ ist reflexiv:
  $\forall x \in M : (x,x) \in \operatorname{Ker} f$
  Sei $x \in M$ beliebig, aber fest.
  Da f eine Funktion ist, gilt $f(x) = f(x) \overset{(1)}{\Rightarrow} (x,x) \in \operatorname{Ker} f$.

- $\operatorname{Ker} f$ ist symmetrisch:
  $\forall x,y \in M : (x,y) \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow (y,x) \in \operatorname{Ker} f$
  Seien $x,y \in M$ beliebig, aber fest.
  Sei $(x,y) \in \operatorname{Ker} f$, dann folgt nach (1), dass $f(x) = f(y)$.
  Nachdem $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$, gilt also, nach (1), $(y,x) \in \operatorname{Ker} f$.

- $\operatorname{Ker} f$ ist transitiv:
  $\forall x,y,z \in M : (x,y) \in \operatorname{Ker} f \wedge (y,z) \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow (x,z) \in \operatorname{Ker} f$
  Seien $x,y,z \in M$ beliebig, aber fest.
  Seien $(x,y), (y,z) \in \operatorname{Ker} f$, dann folgt nach (1), dass $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)$.
  Daher ist $f(x) = f(z)$ und es gilt, nach (1), $(x,z) \in \operatorname{Ker} f$.

$\square$

9. Seien M, N Mengen, $f: M \to N$ eine Funktion, und $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M. Bezeichne M/R die Faktormenge, das ist die Menge aller Äquivalenzklassen

$$M/R = \{[x]_R : x \in M\}$$

Weiters bezeichne $\pi: M \to M/R$ die kanonische Projektion, das ist die Funktion definiert als $\pi(x) = [x]_R$.

Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen (A) und (B) äquivalent sind:

(A) $R \subseteq \ker f$

(B) Es existiert eine Funktion $F: M/R \to N$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/R \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Kommutiert, d.h. sodass $f = F \circ \pi$ gilt.

Zeige weiters, dass, falls (A) und (B) erfüllt sind, die Funktion F mit der genannten Eigenschaft eindeutig bestimmt ist.

(A) $\Leftrightarrow$ (B)

Beweis: Dazu muss folgendes gezeigt werden:

- (A) $\Rightarrow$ (B): Es sei vorausgesetzt, dass
$\left[\forall x_1, x_2 \in M : (x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in M \times M : f(x_1) = f(x_2)\}\right]$

Wir zeigen, dass

- $\exists F: \{[x]_R : x \in M\} \to N$: Dazu muss folgendes gelten:
  - $\forall [x]_R \in M\backslash R \; \exists y \in N: ([x]_R, y) \in F$:

    Sei $x \in M$ bzw. $[x]_R \in M\backslash R$ beliebig, aber fest.

    Jedem x kann eine Äquivalenzklasse und ein $y \in N$ zugewiesen werden.

    Es kann also jeder Äquivalenzklasse jener Funktionswert zugewiesen werden, den deren Elemente, wegen (A), teilen. Dies würde nur für $\emptyset$ nicht gelten, aber $\emptyset \notin M\backslash R$.
  - $\forall [x]_R \in M\backslash R \; \forall y_1, y_2 \in N: (([x]_R, y_1) \in F \land ([x]_R, y_2) \in F)$
    $\Rightarrow y_1 = y_2$

    Sei —"—

    Nachdem alle Elemente einer Äquivalenzklasse den selben Funktionswert, wegen (A), teilen und jeder Äquivalenzklasse der Funktionswert ihrer Elemente zugewiesen werden kann, ist die Implikation wahr.
- $\forall x \in M: f(x) = (F \circ \pi)(x)$, also $F \circ \pi = f$: Dazu müssen:
  - die Wertemengen und Definitionsmengen passen:

    $f: M \to N \land (\pi: M \to M/R \land F: M/R \to N)$

    $\Rightarrow f: M \to N \land F \circ \pi: M \to N$
  - und die Zuordnungen: Sei $y \in N$ beliebig

    $f: x \mapsto y' \land (\pi: x \mapsto [x]_R \land F: [x]_R \mapsto y)$

    $\Rightarrow f: x \mapsto y \land F \circ \pi: x \mapsto y$

- $(B) \Rightarrow (A)$: Sei vorausgesetzt, dass $\exists F : M/R \to N$ $\wedge\ F \circ \pi = f$, dann gilt $\forall x_1, x_2 \in M : (x_1, x_2) \in R$ $\Rightarrow (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in M \times M : f(x_1) = f(x_2)\}$, weil:

  Seien $x_1, x_2 \in M$ beliebig, aber fest.

  $(x_1, x_2) \in R \Rightarrow [x_1]_R = [x_2]_R \Rightarrow F([x_1]_R) = F([x_2]_R)$
  $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ $\square$

Wir zeigen nun, dass F eindeutig bestimmt ist (laut Skript Seite 37).

Beweis: Dazu muss folgendes stimmen:

- π ist surjektiv d.h. $\forall [x]_R \in M/R\ \exists x \in M : [x]_R = \pi(x)$:
  Dies folgt aus der Definition von π.

- $\forall x_1, x_2 \in M : \pi(x_1) = \pi(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$:
  Seien $x_1, x_2 \in M$ beliebig, aber fest.

  $\pi(x_1) = \pi(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} [x_1]_R = [x_2]_R \overset{(2)}{\Rightarrow} (x_1, x_2) \in R$
  $\overset{(3)}{\Rightarrow} (x_1, x_2) \in \ker f \overset{(4)}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2)$

  (1) folgt, abermals, aus der Definition von π.
  (2) folgt aus der Definition von Äquivalenzklassen.
  (3) $\Leftrightarrow$ (A)
  (4) folgt aus der Definition von $\ker f$. $\square$

10. Seien M, N Mengen, und $f: M \to N$ eine Funktion. Bezeichne mit ι die mengentheoretische Inklusionsabbildung $\iota: f(M) \to N$, das ist die Funktion, die definiert ist als $\iota(x) := x$ für $x \in f(M)$.

- Zeige, dass durch die folgende Vorschrift eine Abbildung $F: M/\mathrm{Ker}\, f \to f(M)$ wohldefiniert ist.

  Sei $a \in M/\mathrm{Ker} f$ gegeben. Wähle $x \in M$ mit $a = [x]_{\mathrm{Ker} f}$ und setze $F(a) := f(x)$.

- Zeige, dass F bijektiv ist.

- Zeige, dass das folgende Diagramm von Abbildung kommutiert, das heißt, dass $f = \iota \circ F \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\mathrm{Ker} f \arrow[r, "F"] & f(M) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

$F: M/\mathrm{Ker} f \to f(M)$ ist wohldefiniert.

Beweis: Wir zeigen, dass für F folgendes gilt:
$\forall [x]_{\mathrm{Ker} f} \in M/\mathrm{Ker} f\ \exists! y \in f(M): ([x]_{\mathrm{Ker} f}, y) \in F$. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- $\forall [x]_{\mathrm{Ker} f} \in M/\mathrm{Ker} f\ \exists y \in f(M): ([x]_{\mathrm{Ker} f}, y) \in F$

  Sei $x \in M$ bzw. $[x]_{\mathrm{Ker} f} \in M/\mathrm{Ker} f$ beliebig, aber fest.
  Nachdem π surjektiv ist, hat jede Äquivalenzklasse mindestens ein Element mit zugeordnetem Funktionswert.

Nach $f(x) = F([x]_{kerf})$ und $f: x \mapsto f(x)$ folgt $F: [x]_{kerf} \mapsto f(x)$. Wenn weiters $f(x) = y$, dann ist $([x]_{kerf}, y) \in F$.

- $\forall [x]_{kerf} \in M/\mathrm{Kerf}\ \forall y_1, y_2 \in f(M): (([x]_{kerf}, y_1) \in F \wedge ([x]_{kerf}, y_2) \in F) \Rightarrow y_1 = y_2$:

  Sei $x \in M$ bzw. $[x]_{kerf} \in M/\mathrm{Kerf}$ beliebig, aber fest.
  Nachdem alle Elemente von $[x]_{kerf}$ in Relation stehen, und nach der Definition von Kerf die Funktionswerte dieser Elemente gleich sind, und y_1, y_2 diese Funktionswerte sind, und nach $f(x) = F([x]_{kerf})$ die Funktionswerte von f und F jeweils gleich sind, folgt $y_1 = y_2$. $\square$

F ist bijektiv.

Beweis: Wir zeigen, dass F injektiv und surjektiv ist.

- $\forall [x]_{kerf}, [y]_{kerf} \in M/\mathrm{kerf}: F([x]_{kerf}) = F([y]_{kerf}) \Rightarrow [x]_{kerf} = [y]_{kerf}$:

  Seien $[x]_{kerf}, [y]_{kerf}$ beliebig, aber fest.
  Wenn $F([x]_{kerf}) = F([y]_{kerf})$, sind, nach $F([x]_{kerf}) = f(x)$, $f(x) = f(y)$. Also gilt nach der Definition von Kerf, dass $(x, y) \in \mathrm{Kerf}$. Dann zeigt die Symmetrie, dass $(y, x) \in \mathrm{kerf}$, und die Definition einer Äquivalenzklasse, dass $[x]_{kerf} = [y]_{kerf}$.

- $\forall f(x) \in f(M)\ \exists [x]_{kerf}: f(x) = F([x]_{kerf})$:

  Die Voraussetzung $f(x) = F([x]_{kerf})$ steht praktisch in der Angabe.

$f = \iota \circ F \circ \pi$

Beweis: $\pi : M \to M/\mathrm{Ker} f \wedge F : M/\mathrm{Ker} f \to f(M) \wedge$
$\iota : f(M) \to N$

Die Definitionsmengen und Wertemengen passen.

$\pi : x \mapsto [x]_{\mathrm{Ker} f} \wedge F : [x]_{\mathrm{Ker} f} \mapsto f(x) \wedge \iota : f(x) \mapsto y$

Weil $y \in N$, passen auch die Zuordnungen. $\square$