Satz 3.3.11 Es seien lineare Abbildungen f_A und f_B durch $A \in K^{m \times n}$ bzw. $B \in K^{l \times m}$ festgelegt. Dann beschreibt die Produktmatrix BA die zusammengesetzte Abbildung $f_B \circ f_A$.

Beweis: Für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ steht nach (3.6) in der k-ten Spalte der Matrix A das Bild von e_k unter f_A und, gemäß der Definition des Matrizenprodukts, daher in der k-ten Spalte der Matrix BA das Bild von $f_A(e_k)$ unter f_B, also $(f_B \circ f_A)(e_k)$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

$K^{n \times 1} \to K^{m \times 1}$ mit der Eigenschaft $e_j \mapsto a_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (3.6)

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk} \text{ für alle } i \in \{1, 2, \ldots, l\},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \qquad (3.8)$$

Betrachte die k-te Spalte der Matrix A. Diese wird, laut (3.5) und (3.6), durch $f_A(e_k)$ beschrieben, weil e_k nur an der Stelle k, $x_k = 1$ hat und sonst $x_{k'} = 0$ mit $k' \neq k$. Setzt man in f_A ein, also (3.5), so bleibt übrig:

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = f_A(e_k).$$

Laut (3.8), wird die k-te Spalte der Matrix $C = B \cdot A$ wie folgt beschrieben:

$$\begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{lk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} b_{1j} a_{jk} \\ \sum_{j=1}^{m} b_{2j} a_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} b_{lj} a_{jk} \end{bmatrix} = a_{1k} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{l1} \end{bmatrix} + \dots + a_{mk} \cdot \begin{bmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ \vdots \\ b_{lm} \end{bmatrix},$$

was aber wiederum gleich $f_B(f_A(e_k)) = (f_B \circ f_A)(e_k)$ ist (vgl. (3.5)). $\square$