4. Übung zur Komplexen Analysis

1. Gegeben Sei die Funktion $\Delta(w,z) := \frac{|z-w|}{|\overline{w}z-1|}$, $w, z \in \mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass für jedes $w \in \mathbb{E}$ die Abbildung $g_w(z) := \frac{z-w}{\overline{w}z-1}$, $z \in \mathbb{E}$, eine Involution ist, d.h. $g_w \circ g_w = \mathrm{id}$.

   (b) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $\Delta(f(w), f(z)) \leq \Delta(w, z)$ für alle $w, z \in \mathbb{E}$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h_w := g_{f(w)} \circ f \circ g_w$.

2. Entwickeln Sie $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ in Laurentreihen auf $\{|z| < 1\}$ und $\{|z| > 1\}$, jeweils um $z_0 = 0$, und auf $\{|z - i| > 2\}$ um $z_0 = i$.

3. Sei G ein Gebiet und f holomorph auf $G \backslash \{a\}$. Zeigen Sie, dass eine nicht hebbare isolierte Singularität a von f stets eine wesentliche Singularität von $e^{f(z)}$ ist.

   Hinweis: Betrachten Sie für $g(z) = e^{f(z)}$ die sogenannte logarithmische Ableitung $g'(z)/g(z)$. Zeigen Sie, dass wenn g eine Polstelle hat, dann hat die logarithmische Ableitungen einen Pol erster Ordnung. Daher führt die Beantwortung der Frage, ob eine Ableitung einen Pol erster Ordnung haben kann, zur Lösung.

4. Es sei f holomorph für $0 < |z| < r_0$. Für $0 < r < r_0$ setzen wir $M_r(f) := \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Man beweise:

   (a) In 0 liegt genau dann eine hebbare Singularität von f, wenn $M_r(f)$ beschränkt bleibt bei $r \to 0$. In diesem Fall ist $M_r(f)$ eine streng monoton wachsende Funktion von r, sofern f nicht konstant ist; es gilt $\lim\limits_{r\to 0} M_r(f) = |f(0)|$.

   (b) In 0 liegt genau dann ein Pol von f, wenn $M_r(f) \to \infty$ bei $r \to 0$ und es ein $\ell \in \mathbb{N}$ gibt, für das $r^\ell M_r(f)$ beschränkt bleibt. Die Polordnung ist dann das minimale ℓ mit dieser Eigenschaft.

   (c) In 0 liegt genau dann eine wesentliche Singularität von f, wenn $r^\ell M_r(f) \to \infty$ für alle $\ell \geq 0$ bei $r \to 0$.

5. Sei f holomorph auf $\{z : |z| > R\}$. Man sagt, dass $f(z)$ bei ∞ eine hebbare Singularität, einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität hat, wenn $f(\frac{1}{z})$ bei $z = 0$ eine solche Singularität hat. Zeigen Sie:

   (i) Hat eine ganze Funktion bei ∞ eine hebbare Singularität, dann ist sie konstant.

   (ii) Eine ganze Funktion hat bei ∞ einen Pol der Ordnung m genau dann, wenn sie ein Polynom m-ten Grades ist.

6. Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen, welche injektiv sind.

7. Für *geschlossene* Wege $\gamma, \eta : [0,1] \to \mathbb{C}$ gibt es neben dem Homotopiebegriff, bei welchem stets die Endpunkte festgehalten werden (FEP-Homotopie, siehe VO), noch den Begriff der *freien* Homotopie: γ, η heißen frei homotop, wenn es eine stetige Abbildung $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ gibt, welche $h(0,\tau) = h(1,\tau)$ für alle $\tau \in [0,1]$ und $h(\cdot,0) = \gamma, h(\cdot,1) = \eta$ erfüllt.

   (a) Geben Sie ein Beispiel einer freien Homotopie, welche keine FEP-Homotopie ist.

   (b) Zeigen Sie: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma : [0,1] \to G$ ein geschlossener Weg, dann ist γ genau dann FEP-nullhomotop, wenn γ frei-nullhomotop ist.

8. Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Man zeige, dass es eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in G$ gibt und dass dann $\{f + i\,2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller holomorphen Funktionen auf G mit dieser Eigenschaft ist ("Zweige des Logarithmus" auf G).