
Statistik

Michael Messer · Gaby Schneider

Statistik

Theorie und Praxis im Dialog

Michael Messer
Institut für Stochastik und
Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Wien
Wien, Österreich

Gaby Schneider
Institut für Mathematik
Goethe-Universität Frankfurt
Frankfurt, Deutschland

ISBN 978-3-662-59338-7 ISBN 978-3-662-59339-4 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-59339-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Die Vermittlung statistischer Ideen kann auf vielfältige Weise geschehen. Auf der einen Seite bieten eine formale Notation und stringente Beweise der mathematischen Statistik ein solides mathematisches Handwerkszeug, das aber zum Teil in Anwendungsfragen vernachlässigt werden kann. Auf der anderen Seite beinhaltet eine anwendungsorientierte Herangehensweise den Vorteil, einen unmittelbaren Bezug zur Praxis herzustellen, kommt aber gleichwohl nicht ohne mathematische Grundlage aus. Statistik zu vermitteln bedeutet daher immer auch, eine Abwägung zu treffen zwischen theoretischen und anwendungsorientierten Ansätzen.

Dieses Lehrbuch richtet sich in erster Linie an Studierende der Mathematik oder Statistik im Bachelorstudiengang mit Vorkenntnissen in Stochastik etwa im Umfang einer Einführungsveranstaltung. Für diese Zielgruppe sind sowohl eine klare Formulierung theoretischer statistischer Aussagen als auch die Diskussion der praktischen Anwendbarkeit und Interpretation der erlernten Methodologie von zentraler Bedeutung. Ziel dieses Buches ist es daher, beide Welten in konsequenter und zugänglicher Form miteinander zu verknüpfen. Dies geschieht im Kontext der klassischen frequentistischen Statistik. Da das Hauptaugenmerk zudem auf dem Erlernen statistischer Methodologie liegt, wurde auf die maßtheoretischen Aspekte verzichtet.

Der Brückenschlag zwischen Theorie und Praxis erfolgt in einem Dreischritt: statistische Methodologie wird zunächst durch eine konkrete Fragestellung aus der Anwendung motiviert, dann im Rahmen der mathematischen Statistik analysiert und schließlich wieder im Kontext der Anwendung interpretiert. Erfahrungsgemäß stellt beim Erlernen der statistischen Denkweise gerade der letzte Schritt, nämlich die Interpretation statistischer Ergebnisse, eine besondere Herausforderung dar. Um diesen zu erleichtern, bietet eine Reihe von Dialogen zwischen Statistikern und Anwendern die Möglichkeit, den Transfer des Erlernen zwischen Theorie und Anwendung einzuüben.

Das Buch ist in drei Abschnitte gegliedert. Im ersten Teil (Kap. 1–4) wird eine Reihe von Grundlagen der Stochastik und deskriptiven Statistik diskutiert und in die Grundideen der Statistik eingeführt. Kap. 1 stellt anhand eines einführenden Beispiels die Idee der statistischen Denkweise dar. Dieses Beispiel wird in späteren Kapiteln insbesondere zum Testen statistischer Hypothesen immer wieder aufgegriffen. In Kap. 2 werden die

wichtigsten für die Statistik benötigten Grundbegriffe aus der Stochastik wiederholt und Notationen eingeführt. Dieses Kapitel kann bei entsprechenden stochastischen Vorkenntnissen selektiv studiert werden. Kap. 3 widmet sich prominenten Größen der deskriptiven Statistik sowie elementaren grafischen Darstellungsformen. In Kap. 4 wird der zentrale Begriff des statistischen Modells eingeführt, und damit eine Brücke geschlagen zwischen der Welt der theoretischen Statistik und der praktischen Datenanalyse.

Im zweiten Teil (Kap. 5–7) werden Begriffe und Ideen des statistischen Schätzens behandelt. Kap. 5 diskutiert Gütekriterien und Eigenschaften gegebener Schätzer, wie etwa Erwartungstreue, Konsistenz und den mittleren quadratischen Fehler, sowie den Begriff der Suffizienz. Kap. 6 widmet sich Konfidenzintervallen. Zudem wird im Kontext der Verteilungsfunktionen ein Konfidenzband angegeben, und es werden Monte Carlo Simulationen besprochen. In Kap. 7 wird schließlich mit dem Maximum-Likelihood-Ansatz eine prominente Methode zur Gewinnung von Schätzern vorgestellt. Neben Beispielen und elementaren Eigenschaften wie der Invarianz unter Umparametrisierung werden Heuristiken bezüglich Konsistenz und asymptotischer Normalität diskutiert.

Im dritten Teil (Kap. 8–12) werden Grundideen und Beispiele statistischer Hypothesentests behandelt. Dazu wird in Kap. 8 der Hypothesentest formal eingeführt und anhand von Beispielen erläutert. Die Kap. 9–11 umfassen Ansätze des statistischen Testens im Rahmen des normalen linearen Modells, d. h. unter Normalverteilungsannahmen. Hierbei werden geometrische Überlegungen zur Konstruktion der Tests genutzt. Kap. 9 beginnt mit Student's Ein- und Zweistichproben- t -Test. In den Kap. 10 und 11 wird dieser Ansatz auf die einfaktorielle Varianzanalyse bzw. den allgemeinen Rahmen zum Testen linearer Hypothesen im normalen linearen Modell verallgemeinert. Als Spezialfall wird zudem die univariate lineare Regression behandelt. Kap. 12 stellt wichtige rangbasierte Verfahren wie Wilcoxon's Rangsummentest vor, die ohne Normalverteilungsannahmen auskommen. Der Übergang von den Rohdaten zu Ordnungsstatistiken erlaubt dabei die Konstruktion parameterfreier statistischer Verfahren.

Zur Entstehung des Buches: Dieses Buch basiert auf einem Skriptum zu einer einführenden Vorlesung in die Statistik für Mathematiker. Das Skriptum wurde in den Jahren 2015–2017 von einem der Autoren (M.M.) als Begleitmaterial zu in dieser Zeit von ihm gehaltenen Vorlesungen erstellt, in thematischer Anlehnung an Aufzeichnungen der anderen Autorin (G.S.). Aus Diskussionen mit Studierenden entstand während dieser Veranstaltungen die Idee, die erlernte Methodologie in prägnante Dialoge zwischen Praktikern und Theoretikern umzusetzen. In den Jahren 2017–2018 arbeiteten die Autoren das Skriptum für die Publikation aus.

Viele Anwendungsbeispiele wie auch die Grundideen der eingebundenen Dialoge sind zum Teil praktischen Fallbeispielen aus der statistischen Beratung angelehnt, alle Daten sind jedoch simuliert. Alle Abbildungen wurden mit dem statistischen Programmpaket R erstellt. *In diesem Buch werden geschlechtsneutrale Formen verwendet, soweit sich diese nicht negativ auf Lesbarkeit oder Verständnis auswirken. In Einzelfällen wird daher dennoch auf das generische Maskulinum zurückgegriffen, welches die weibliche*

Form mit einschließt, oder es wird (besonders in den Dialogen) exemplarisch die weibliche oder männliche Form genutzt.

Die Autoren danken Matthias Gärtner, Solveig Plomer und Judith Czepek für wertvolle Kommentare zum Vorlesungsskriptum. Herzlicher Dank gilt Götz Kersting für die Durchsicht des Manuskripts und wertvolle inhaltliche Hinweise, sowie Anton Wakolbinger und Brooks Ferebee für hilfreiche Kritik. Weiterer Dank geht an Anja Nowak und Eva Dippmann für ihre Unterstützung bei der Gestaltung der Dialoge, an Ralph Neininger für persönliche und fachliche Ratschläge, und an Iris Ruhmann und Anja Groth von Springer Spektrum für eine konstant gute Zusammenarbeit.

Mai 2019

Michael Messer
Gaby Schneider

Inhaltsverzeichnis

1	Planung einer Fachschaftsfeier – ein Einführungsbeispiel	1
2	Erinnerung an Grundbegriffe aus der Stochastik	5
2.1	Elementare Begriffe aus der Stochastik	5
2.1.1	Verteilungen und Quantile	5
2.1.2	Erwartungswert und Varianz	10
2.2	Konvergenz von Zufallsvariablen	15
3	Exkurs in die deskriptive Statistik	21
4	Grundbegriffe der statistischen Modellierung	29
4.1	Statistisches Modell	30
4.2	Statistik und Schätzer	33
4.3	Folgen von Modellen und Statistiken	35
4.4	Dialog: Statistische Modelle	36
5	Gütekriterien für Schätzer	39
5.1	Gütekriterien für Schätzer	39
5.2	Der mittlere quadratische Fehler	41
5.3	Suffizienz und Verkleinerung des MSE	46
5.3.1	Suffizienz	46
5.3.2	Der bedingte Erwartungswert und der Satz von Rao-Blackwell	49
6	Intervallschätzer und Konfidenzbänder	53
6.1	Definition und einfache Eigenschaften	53
6.2	Interpretation und Formulierung	55
6.3	Ein asymptotisches Konfidenzintervall für den Erwartungswert	57
6.4	Dialog: Das Konfidenzintervall	61
6.5	Ein Konfidenzintervall für den Median	64
6.6	Ein Konfidenzband für die Verteilungsfunktion	69
6.7	Der Satz von Glivenko und Cantelli	71

7	Die Maximum-Likelihood-Methode	77
7.1	Definition, Beispiele und Eigenschaften	77
7.2	Konsistenz und asymptotische Normalität	84
7.2.1	Die Fisher-Information	84
7.2.2	Konsistenz und asymptotische Normalität	89
7.3	Dialog: Schätzmethoden	93
8	Grundidee und Beispiele statistischer Tests	97
8.1	Idee des statistischen Hypothesentests am Einführungsbeispiel	97
8.2	Einstichproben-test eines behaupteten Erwartungswerts	103
8.3	Dialog: Interpretation von Testergebnissen	107
9	Der t-Test	111
9.1	Die t -Verteilung	112
9.2	Geometrie des Datenvektors	115
9.2.1	Geometrie von Mittelwert und Standardabweichung	115
9.2.2	Geometrie der mehrdimensionalen Standardnormalverteilung	117
9.3	Der Einstichproben- t -Test	120
9.3.1	Gepaarter Zweistichproben- t -Test	122
9.4	Der Zweistichproben- t -Test	123
9.5	Dialog: Gepaarte und ungepaarte Tests	127
10	Vergleich von $k \geq 2$ Stichproben: Varianzanalyse und multiples Testen	131
10.1	Einfaktorielle Varianzanalyse	131
10.2	Der Zweistichproben- t -Test als Spezialfall der ANOVA	136
10.3	Exkurs: Multiples Testen	138
10.4	Dialog: Multiples Testen	140
11	Das normale lineare Modell	143
11.1	Das normale lineare Modell	143
11.2	Einfache lineare Regression	145
12	Rangbasierte Verfahren	155
12.1	Der Wilcoxon-Rangsummentest	155
12.2	Der Kruskal-Wallis-Test	162
12.3	Der Wilcoxon-Vorzeichenrangtest	164
	Literatur	171
	Stichwortverzeichnis	173