# Übungen zu Analysis 3,  3. Übung 28. 10. 2019

19. In einem unendlichdimensionalen Hilbertraum ist die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt.

    Hinw.: Betrachten Sie Überdeckungen mit $\rho$-Kugeln und $e_i \in B(\rho, x_i)$ für geeignetes $\rho$.

20. Seien $y_j \neq 0,\ 1 \leq j \leq n$ Elemente eines Hilbertraumes, dann gilt die folgende Verallgemeinerung der Bessel'schen Ungleichung:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{|(x, y_i)|^2}{\sum_{j=1}^{n} |(y_i, y_j)|}.$$

   Hinw.: Zeigen Sie:

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=n}^{n} \alpha_i y_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_i \alpha_i (y_i, x) - \sum_i \bar{\alpha}_i (x, y_i) + \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j (y_i, y_j).$$

   $2|\alpha_i \bar{\alpha}_j| \leq |\alpha_i|^2 + |\alpha_j|^2$ und setzen Sie

$$\alpha_j = \frac{(x, y_j)}{\sum_{j=1}^{n} |(y_i, y_j)|}.$$

21. Sei $H$ Hilbertraum und $M$ ein abgeschlossener Unterraum. Für $x \in H$ gibt es ein eindeutiges $m \in M$ das minimalen Abstand zu $x$ hat.

    Hinw.: Betrachten Sie eine ON-Basis für $M$ und ergänzen Sie diese zu einer ON-Basis von $H$.

22. Zeigen Sie: Die Einheitskugel in einem Hilbertraum $H$ ist strikt konvex, d.h. für $x \neq y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$ gilt für $\lambda \in (0, 1)$: $\|\lambda x + (1 - \lambda) y\| < 1$.

    Sind die Räume $\ell^1(\mathbb{N})$ respektive $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ebenfalls strikt konvex?

23. Sei $(p_l)_{l \in I}$ eine Folge orthonormaler Polynome, $p_l$ Polynom vom Grad $l$ bezüglich des Skalarproduktes $(f, h) = \int_{-a}^{a} g(x) \overline{h}(x) \rho(x)\, dx$ für eine positive gerade stetige Gewichtsfunktion $\rho$ auf $[-a, a]$.

    Zeigen Sie, dass die Polynome $p_l$ Rekursionen $p_{l+1} = a_l x p_l + b_l p_{l-1},\ a_l, b_l \in \mathbb{R}$ erfüllen.

    Berechnen Sie $p_0, \ldots, p_4$ für die Gewichtsfunktion $\rho(x) = 1$ auf $[-1, 1]$.

24. Bestimmen Sie jenes Polynom 3. Grades das bezüglich des Skalarproduktes des vorherigen Beispiels minimalen mittleren quadratischen Abstand zu $f(x) = e^x$ hat, d.h. jenes Polynom $p$ für das $\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \, dx$ minimal ist.

25. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Reihendarstellung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \frac{\pi}{T} x), \quad x \in [-T, T]$$

für die Funktion $f: \ [-T, T] \to \mathbb{R}, \ f(x) = x$ und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

26. Entwickeln Sie die Funktion $f: \ [-\pi, \pi], \ x \mapsto |x|$ in eine Cosinusreihe und berechnen Sie damit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

27. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |x| \leq d \\ 0 & d \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

und berechnen Sie damit und Bsp. 25

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nd)}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nd)}{n^2}.$$