Satz 3.3.4 Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ eine Matrix. Dann ist durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

eine Abbildung $f_A \in L(K^{n\times 1}, K^{m\times 1})$ erklärt. Umgekehrt lässt sich jedes $f \in L(K^{n\times 1}, K^{m\times 1})$ in dieser Weise durch genau eine Matrix beschreiben.

Beweis: (a) Wir zerlegen die gegebene Matrix A in Spalten $a_1, a_2, \dots, a_n \in K^{m\times 1}$ und betrachten die kanonische Basis $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ von $K^{n\times 1}$. Die n Spalten der Matrix A sind Vektoren der Länge m. Der kanonische Basis-Vektor e_i besitzt an der $i$ten Komponente eine 1 und an allen anderen Komponenten eine 0. Dann existiert nach dem Fortsetzungssatz 3.3.3 genau eine lineare Abbildung

$K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ mit der Eigenschaft $e_j \mapsto a_j$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. (3.6)

vgl. „$f: V \to W$ mit der Eigenschaft $f(b_j) = d_j$ für alle $j \in I$."

Diese lineare Abbildung stimmt mit der in (3.5) beschribenen Abbildung f_A überein.

vgl. „$f: V \to W: x = \sum_{j\in I} x_j b_j \mapsto \sum_{j\in I} x_j d_j$." und Anhang.

(b) Ist umgekehrt $f \in L(K^{n\times 1}, K^{m\times 1})$, so gehen wir von

Vektoren der kanonischen Basis von $K^{n\times 1}$ aus und schreiben deren Bilder unter f der Reihe nach in die Spalten einer Matrix $A \in K^{m\times n}$. Weil der kanonische Basis-Vektor e_i nur an der iten Stelle 1 und nicht 0 ist, wird das Bild nur aus dem Vektor $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^T$ bestehen. Weil es n verschiedene Basis-Vektoren gibt, wird die gesammte Matrix A ausgefüllt. ~~Dann gilt $f = f_A$ nach Satz 3.3.2, und nach (a) ist A die einzige Lösung.~~ Weil $f(e_i) = f_A(e_i)$, $\forall i : 1 \leq i \leq n$, folgt nach 3.3.2 $f = f_A$. Weil f_A laut (a) eindeutig ist, ist die aneinander-Reihung der Bilder $f(e_i)$ bzw. Spalten als Matrix A eindeutig. $\square$

(3.5) mit der kanonischen Basis:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \cdots$$