Numerische Mathematik - Projektteil 2

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Random code snippet, damit alle checken, wie man code displayt:

```
print("Hello World!")
```

1 Titel

2 Eigenschwingungen

2.1 Aufgabestellung

Das Projekt beschäftigt sich mit den Eigenschwingeungen einer fest eingespannten Saite. Sei dazu $u(t,x)$ die vertikale Auslenkung der Saite an der Position $x \in [0,1]$ zur Zeit t. u wird näherungsweise durch die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) \tag{1}$$

für alle $x \in (0,1)$ und $t \in \mathbb{R}$ beschrieben, wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Wenn die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, so gelten die Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,1) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zur Berechnung der Eigenschwingungen suchen wir nach Lösungen u, die in der Zeit harmonisch schwingen. Solche erfüllen folgenden Ansatz

$$u(x,t) = \Re(v(x)e^{-i\omega t})$$

mit einer festen, aber unbekannten Kreisfrequenz $\omega > 0$ und einer Funktion v, welche nur noch vom Ort x abhängt. Durch Einsetzen erhalten wir für v die sogenannte Helmholz-Gleichung

$$-v''(x) = \kappa^2 v(x), \qquad x \in (0,1), \tag{2}$$

mit der unbekannten Wellenzahl $\kappa := \frac{\omega}{c}$ und den Randbedingungen

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{3}$$

2.2 Analytische Lösung

$$v_\kappa(x) = C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x), \qquad x \in [0,1], \tag{4}$$

mit beliebigen Konstanten C_1, C_2 löst die Helmholz-Gleichung (8). Das erkennt man durch stumpfes Einsetzen.

$$\begin{aligned} -v_\kappa''(x) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)) = -\frac{\partial}{\partial x}(-C_1 \kappa \sin(\kappa x) + C_2 \kappa \cos(\kappa x)) \\ &= -(-C_1 \kappa^2 \cos(\kappa x) - C_2 \kappa^2 \sin(\kappa x)) = \kappa(C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)) = \kappa^2 v_\kappa(x) \end{aligned}$$

Wir fragen uns, für welche $\kappa > 0$, Konstanten C_1 und C_2 existieren, sodass v_κ auch die Randbedingungen (3) erfüllt.

$$0 \overset{!}{=} \begin{cases} v_\kappa(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 \\ v_\kappa(1) = C_1 \cos \kappa + C_2 \sin \kappa = C_2 \sin \kappa \end{cases}$$

Nachdem $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$, erhält man, aus der oberen Gleichung, $C_1 = 0$. Mit der unteren Gleichung folgt aber auch $C_2 \sin \kappa = 0$. Wenn nun auch $C_2 = 0$, dann erhielte man die triviale Lösung $v_\kappa = 0$. Für eine realistischere Modellierung, d.h. $v_\kappa \neq 0$, müsste $\sin \kappa = 0$, also $\kappa \in \pi\mathbb{Z}$.

Das sind die gesuchten $\kappa > 0$. Sei nun eines dieser κ fest. Offensichtlich ist $C_1 = 0$ eindeutig, $C_2 \in \mathbb{R}$ jedoch beliebig.

2.3 Numerische Approximation

Häufig lassen sich solche Probleme nicht analytisch lösen, sodass auf numerische Verfahren zur+ckgegriffen wird, welche möglichst gute Näherungen an die exakten Lösungen berechnen sollen. Als einfachstes Mittel dienen sogenannte Differenzenverfahren. Sei dazu $x_j := jh$, $j = 0, \dots, n$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ mit äquidistanter Schrittweite $h = 1/n$. Die zweite Ableitung in (8) wird approximiert durch den Differenzenquotienten

$$v''(x_j) \approx D_h v(x_j) := \frac{1}{h^2}(v(x_{j-1}) - 2v(x_j) + v(x_{j+1})), \qquad j = 1, \dots, n-1. \tag{5}$$

Für hinreichend glatte Funktionen v mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ wird der Approximationsfehler quadratisch in h klein, d.h. dass

$$|v''(x_j) - D_h v(x_j)| \leq Ch^2. \tag{6}$$

Es sei zunächst bemerkt, dass (**??**) tatsächlich einen Differenzenquotienten beschreibt. Um das einzusehen, verwenden wir den links- und rechts-seitigen Differenzenquotient erster Ordnung, sowie $x_{j-1} = x_j - h$, $x_{j+1} = x_j + h$. Wir erhalten $\forall\, j = 1, \dots, n-1:$

$$\begin{aligned} v''(x_j) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(v'(x_j + h) - v'(x_j)) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}(v(x_j + h) - v(x_j)) - \frac{1}{h}(v(x_j) - v(x_j - h))\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2}(v(x_j + h) - 2v(x_j) + v(x_j - h)) \\ &= \lim_{h \to 0} D_h v(x_j) \end{aligned}$$

Nachdem v hinreichend glatt ist, gilt nach dem Satz von Taylor, dass $\forall\, j = 1, \dots, n-1$:

$$v(x_j + h) = \sum_{\ell=0}^{n+2} \frac{h^\ell}{\ell!} v^{(\ell)}(x_j) + \mathcal{O}\big(h^{n+3}\big),$$
$$v(x_j - h) = \sum_{\ell=0}^{n+2} \frac{(-h)^\ell}{\ell!} v^{(\ell)}(x_j) + \mathcal{O}\big(h^{n+3}\big).$$

Man beachte, dass sich die ungeraden Summanden, der oberen Taylor-Polynome, sich gegenseitig aufheben. Damit erhalten wir für den Differenzenquotient $D_h v(x_j)$, $j = 1, \dots, n-1$ eine asymptotische Entwicklung.

$$\begin{aligned}
D_h v(x_j) &= \frac{1}{h^2}(v(x_j - h) + v(x_j + h) - 2v(x_j)) \\
&= \frac{1}{h^2}\left(2v(x_j) + h^2 v''(x_j) + \sum_{\substack{\ell=4 \\ \ell \in 2\mathbb{N}}}^{n+2} \frac{h^\ell}{\ell!} v^{(\ell)}(x_j)(1 + (-1)^\ell) - 2v(x_j)\right) + \mathcal{O}\big(h^{n+3}\big) \\
&= v''(x_j) + 2 \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{h^{2\ell}}{(2\ell+2)!} v^{(2\ell)}(x_j) + \mathcal{O}\big(h^{n+1}\big)
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die quadratische Konvergenz (6), $\forall\, j = 1, \dots, n-1$:

$$D_h v(x_j) - v''(x_j) = \mathcal{O}\big(h^2\big), \qquad h \to 0.$$

Wir wollen nun den Differenzenquotienten $D_h v(x_j)$ verwenden, um ein Eigenwertproblem der Form $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ zu dem Eigenvektor $\vec{v} := (v(x_1, \dots, v(x_{n-1}))^T)$ und dem Eigenwert $\lambda := -\kappa^2$ herzuleiten.

Es wird eine Matrix A_n gesucht, die den Differenzenquotienten $D_h v(x_j)$ auf den Vektor $\vec{v}$ komponentenweise anwendet. Wir rufen in Erinnerung, dass $h = 1/n$ und definieren die naheliegende Matrix

$$A_n := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Weil nun die Randbedingungen (3) gelten, d.h. $v(x_0), v(x_n) = 0$, leistet diese Matrix A_n tatsächlich das Gewünschte.

$$A_n\vec{v} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} v(x_0) - 2v(x_1) + v(x_2) \\ v(x_1) - 2v(x_2) + v(x_3) \\ \vdots \\ v(x_{n-3}) - 2v(x_{n-2}) + v(x_{n-1}) \\ v(x_{n-2}) - 2v(x_{n-1}) + v(x_{n-0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_h v(x_1) \\ \vdots \\ D_h v(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Das Eigenwertproblem wurde mit `np.linalg.eig`, für beliebige $n \geq 2$, gelöst. Wir vergleichen die Eigenwerte und Eigenvektoren mit den analytischen Ergebnissen.

Betrachtet man die, unten aufgelisteten, Eigenwerte, der ersten paar Matrizen $A_2, \dots, A_{10}$, so legen diese ein gewisses (quadratisches) Konvergenzverhalten nahe. Die Matrix A_n besitzt also scheinbar $n-1$ paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_{1,n} > \cdots > \lambda_{n-1,n}$, welche jeweils gegen $\lambda_j := -(\pi j)^2$, $j \in \mathbb{N}$ konvergieren.

$$\lambda_{j,n} \xrightarrow{n \to \infty} \lambda_j$$

```
n = 2
-----
-8.0

n = 3
-----
-9.0
-27.0

n = 4
-----
-9.372583002030478
-31.999999999999996
-54.62741699796946

n = 5
-----
-9.549150281252611
-34.54915028125264
-65.45084971874735
-90.45084971874735

n = 6
-----
-9.646170927520402
-35.99999999999999
-71.99999999999997
-108.00000000000001
-134.35382907247953

n = 7
-----
-9.705050945562961
-36.89799941784412
-76.19294847228122
-119.80705152771888
-159.10200058215582
-186.29494905443664

n = 8
-----
-9.743419838555344
-37.49033200812192
-79.01652065726852
-127.9999999999999
-176.98347934273144
-218.50966799187793
-246.25658016144442

n = 9
-----
-9.769795432682793
-37.90080021472559
-80.99999999999997
-133.8689952179573
-190.13100478204277
-243.00000000000014
-286.09919978527444
-314.2302045673173

n = 10
-----
-9.788696740969272
-38.19660112501045
-82.44294954150533
-138.1966011250105
-200.00000000000006
-261.80339887498934
-317.5570504584944
-361.8033988749895
-390.2113032590302

.
.
.

n -> inf
--------
-(1 * pi)^2 = -9.869604401089358
-(2 * pi)^2 = -39.47841760435743
-(3 * pi)^2 = -88.82643960980423
-(4 * pi)^2 = -157.91367041742973
-(5 * pi)^2 = -246.74011002723395
-(6 * pi)^2 = -355.3057584392169
-(7 * pi)^2 = -483.61061565337855
-(8 * pi)^2 = -631.6546816697189
-(9 * pi)^2 = -799.437956488238

...
```

Wir bezeichnen mit $\epsilon_j(n) := |\lambda_j - \lambda_{j,n}|$, $j = 1, \dots, n-1$ den absoluten Konvergenz-Fehler des j-ten Eigenwertes. In der folgenden Abbildung wurde dieser für $j = 1, 2, 3$ gegen id^2, doppelt logarithmisch, geplottet. Allem Anschein nach, verschwindet ϵ_j quadratisch. Das korreliert mit dem Ergebnis (6). Man beachte, dass der j-te Eigenwert erst ab einer Matrix A_n, $n > j$ existiert. Daher fangen die plots von ϵ_j desto später an, je größer j ist.

Wenn wir mit dem plot von den Eigenvektoren fertig sind, dann kommt der auch noch hier her!

2.4 verallgemeinerte Eigenschwingungen

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c in (1) hängt vom Material der Saite ab. Bisher haben wir sie als konstant angenommen, d.h. die Saite bestand aus einem Material. Sei nun für $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$

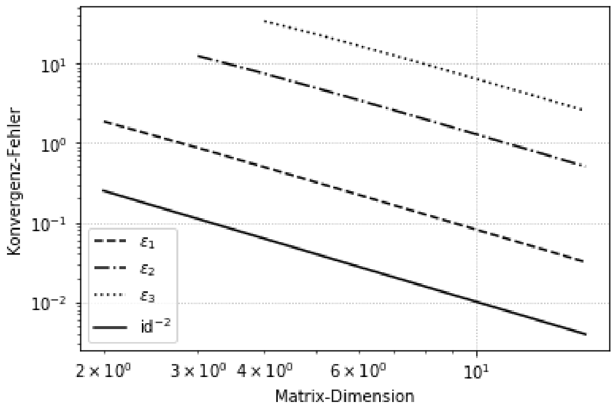


Abbildung 1: Konvergenz-Fehler der Eigenwerte von A_n

$$c(x) := \begin{cases} c_0, x \in (0, 1/2) \\ c_1, x \in (1/2, 1) \end{cases} \quad . \tag{7}$$

Zuerst leiten wir eine zur Helmholz-Gleichung (8) ähnliche Gleichung her und geben einen (4) entsprechenden Lösungsansatz an, wenn die Lösung v auf $(0, 1)$ stetig differenzierbar sein soll. Dabei betrachten wir eine angepasste Version der Wellengleichung (1).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x), \qquad x \in (0, 1), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Wir verwenden jedoch den selben Ansatz, wie Vorher. Das war $u(x, t) = \Re(v(x)e^{-i\omega t})$, mit einer festen, aber unbekannten Kreisfrequenz $\omega > 0$ und einer Funktion v, welche nur noch vom Ort x abhängt.

Einsetzen und analoges Nachrechnen, gibt mit der unbekannten Wellenzahl $\kappa(x) := \frac{\omega}{c(x)}$, die Randbedingungen (3) und

$$-v''(x) = \kappa^2(x)v(x), \qquad x \in (0, 1). \tag{8}$$

Um Probleme mit der Differenzierbarkeit von κ zu vermeiden, führen wir die Abkürzungen $\kappa_0 := \frac{\omega}{c_0}$, $\kappa_1 := \frac{\omega}{c_1}$ ein. Wir definieren den Lösungsansatz durch Fallunterscheidung und mit (vorerst) beliebigen Konstanten $C_{01}, C_{02}, C_{11}, C_{12}$.

$$v(x) := \begin{cases} C_{01} \cos(\kappa_0 x) + C_{(02)} \sin(\kappa_0 x), & x \in (0, 1/2) \\ C_{11} \cos(\kappa_1 x) + C_{(12)} \sin(\kappa_1 x), & x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

Durch Berücksichtigung der Randbedingungen (3), erhält man (fast analog zu Vorher)

$$C_{01} = 0, \qquad C_{11} \cos \kappa_1 + C_{12} \sin kappa_1 = 0.$$

Soll v auf $1/2$ stetig fortgesetzt werden, so müssen dessen links- und rechts-seitiger Grenzwert übereinstimmen.

$$C_{02}\sin(\kappa_0/2) = \lim_{x\to 1/2-} v(x) = \lim_{x\to 1/2+} v(x) = C_{11}\cos(\kappa_1/2) + C_{12}\sin(\kappa_1/2)$$

Um stetige Differenzierbarkeit zu erhalten, muss auch die Ableitung

$$v'(x) = \begin{cases} C_{02}\kappa_0\cos(\kappa_0 x), & x\in(0,1/2) \\ -C_{11}\kappa_1\sin(\kappa_1 x) + C_{12}\kappa_1\cos(\kappa_1 x), & x\in(1/2,1) \end{cases}$$

auf 1/2 stetig fortgesetzt werden.

$$\kappa_0 C_{02}\cos(\kappa_0/2) = \lim_{x\to 1/2-} v'(x) = \lim_{x\to 1/2+} v'(x) = -C_{11}\kappa_1\sin(\kappa_1/2) + C_{12}\kappa_1\cos(\kappa_1/2)$$

Aus den Randbedingungen und stetigen Fortsetzungen, ergibt sich also das homogene lineare Gleichungssystem $R\vec{C} = 0$, mit

$$R := \begin{pmatrix} \sin(\kappa_0/2) & -\cos(\kappa_1/2) & -\sin(\kappa_1/2) \\ \kappa_0\cos(\kappa_0/2) & \kappa_1\sin(\kappa_1/2) & -\kappa_1\cos(\kappa_1/2) \\ 0 & \cos\kappa_1 & \sin\kappa_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \vec{C} := \begin{pmatrix} C_{02} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Sei $R \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ regulär, so ist deren Kern trivial, d.h. $\ker R = \{0\}$, und somit auch die Lösung $\vec{C} = 0$. Andernfalls, gilt genau dann $\det R = 0$. Mit SymPy berechnet man

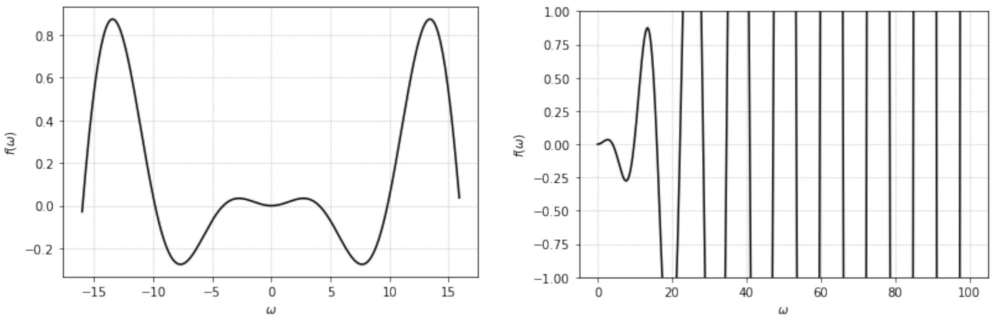
$$\det R = \sin\left(\frac{\kappa_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\kappa_1}{2}\right)\kappa_1 + \sin\left(\frac{\kappa_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\kappa_0}{2}\right)\kappa_0.$$

Über $\kappa_0 = \frac{\omega}{c_0}$, $\kappa_1 = \frac{\omega}{c_1}$ lässt sich ω, für gegebene c_0, c_1 als (nicht eindeutige) Nullstelle einer Funktion f charakterisieren. Diese Überlegung, wird, in Form von folgender Funktion, implementiert.

```python
# c ... pair of propagation speeds

def get_zero_function(c):

    # allocate some sympy symbols:
    omega = sp.Symbol('\omega')
    kappa = sp.IndexedBase('\kappa')

    # implement the matrix R (properly):
    R = sp.Matrix([[ sp.sin(kappa[0]/2),  kappa[0]*sp.cos(kappa[0]/2), 0],
                   [-sp.cos(kappa[1]/2),  kappa[1]*sp.sin(kappa[1]/2), sp.cos(kappa[1])],
                   [-sp.sin(kappa[1]/2), -kappa[1]*sp.cos(kappa[1]/2), sp.sin(kappa[1])]])
    R = R.T

    # calculate R's determinant (properly):
    det = sp.det(R)
    det = sp.simplify(det)

    # substitute for kappa_0 and kappa_1:
    kappa_0 = omega/c[0]
    kappa_1 = omega/c[1]
    det = det.subs({kappa[0]: kappa_0, kappa[1]: kappa_1})

    # transform expression det into proper numpy function:
    zero_function = sp.lambdify(omega, det, 'numpy')

    return zero_function
```

Nun können wir f für fixe c_0, c_1 plotten lassen. Dann bekommen wir ein besseres Verständnis dafür, welchen Startwert wir wählen sollen, um die Gleichung $f(\omega) = 0$, mit `fsolve` aus `scipy.optimize`, lösen zu lassen.

Für die folgenden Plots in Abbildung 2, wurden die arbiträren Werte $c_0 = 100$, $c_1 = 1$ gewählt. Die Funktion f ist scheinbar gerade, d.h. symmetrisch bzgl. der y-Achse.



(a) auf dem Intervall $(-16, 16)$ (b) auf dem Intervall $(0, 100)$ und gezoomt

Abbildung 2: Plots von f für $c_0 = 100$, $c_1 = 1$

Dementsprechend, können passende Startwerte für iterative Verfahren gewählt werden. Die Ergebnisse vom, bereits erwähnten, `fsolve` folgen. Warum die Quadrate dieser Ergebnisse eine Rolle spielen, wird später noch erwähnt.

```
solutions when guessing \omega = 0:
[0.]
squared:
[0.]

solutions when guessing \omega = 5:
[4.05742465]
squared:
[16.46269482]

solutions when guessing \omega = 10:
[9.82605835]
squared:
[96.55142264]

solutions when guessing \omega = 15:
[15.9568155]
squared:
[254.61996082]
```

Wir wollen nun den Differenzenquotienten $D_h v(x_j)$, um ein verallgemeintertes Eigenwertproblem der Form $A\vec{v} = \lambda B\vec{v}$ mit Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ herzuleiten.

Sei abermals $x_j := jh,\ j = 0, \ldots, n$ unsere Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ mit äquidistanter Schrittweite $h = 1/n$. Die Matrix A_n, für den Differenzenquotienten $D_h v(x_j)$, bleibt ebenfalls nach wie vor so, wie sie ist.

$B_n\lambda$ soll nun, analog zu Vorher, $-\kappa^2$ repräsentieren. Diesmal jedoch, ist κ als Funktion zu verstehen. Also wird die Matrix B_n deren Fallunterscheidungen übernehmen und λ bleibt konstant.

$$B_n := \operatorname{diag}^{-1}(\underbrace{c_0, \ldots, c_0}_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\text{-mal}}, \underbrace{c_1, \ldots, c_1}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil\text{-mal}}), \qquad \lambda := -\omega^2.$$

Wenn wir davon ausgehen, dass $c_0, c_1 \neq 0$, so ist B_n wohldefiniert als Diagonalmatrix deren Reziproke. Damit lässt sich dieses verallgemeinerte Eigenwertproblem $A_n\vec{v} = \lambda B_n\vec{v}$, mit nahezu keinem Aufwand, in ein konkretes $B_n^{-1} A_n \vec{v} = \lambda \vec{v}$ umformulieren.

Dieses Eigenwertproblem wurde ebenfalls mit `np.linalg.eig`, für beliebige $n \geq 2$, gelöst. Wir vergleichen die Eigenwerte und Eigenvektoren mit den oberen "analytischen" Ergebnissen mit $c_0 = 100$, $c_1 = 1$. Dass die Eigenwerte gegen $-\omega^2$ konvergieren, überrascht wenig.

```
n = 1000
-----
Eigenvalues:
-16.36765487049704
-95.77791479172302
-252.4289978568357
```

3 Titel