2.8.3 Satz. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein archimedisch angeordneter Körper. Sind $x, y \in K$, $x < y$, dann existiert ein $p \in \mathbb{Q}$ mit $x < p < y$.

Beweis. Seien zunächst $x, y \in K$ mit $0 \leq x < y$ gegeben. Hier wird eine Fallunterscheidung für $x \geq 0$ und $x \leq 0$ angefangen. Dann ist $y - x > 0$ und damit auch $\frac{1}{y-x} > 0$. Die Definition von $x < y$ verlangt nach $y - x \in P$, wobei alle Elemente von P positiv sind. Außerdem gilt $\forall k \in K:$ $k > 0 \Rightarrow k k^{-1} k^{-1} > 0 k^{-1} k^{-1} \Rightarrow k^{-1} > 0$. Da K archimedisch angeordnet ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{y-x}$ und daher $n(y-x) > 1$. „Dann heißt K archimedisch angeordnet, wenn $\mathbb{N}$ als Teilmenge von K nicht nach oben beschränkt ist."

Nach Satz 2.3.12 hat $\{k \in \mathbb{N} : k > nx\}$ ein Minimum, und somit gibt es eine kleinste natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, sodass $m > nx$. „Ist $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{N}$, so hat T ein Minimum." $T = \{k \in \mathbb{N} : k > nx\}$ geht, weil $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist, also $\emptyset \neq T$. Ist $m > 1$, so folgt aus der Wahl von m, dass $m - 1 \leq nx$. Wenn m um 1 kleiner wird, aber auch $m = \min T$, so gilt $m - 1 \not> nx$ $\Leftrightarrow$ $m - 1 \leq nx$. Ist $m = 1$, so folgt gemäß unserer Voraussetzung $m - 1 = 0 \leq nx$. Das ist unnötig!? Also gilt immer $m - 1 \leq nx < m$. Es ist vorausgesetzt, dass $m > nx$ und $m - 1 \leq nx$, und die Relationen $\leq$ und $<$ sind transitiv.

Kombiniert man diese Ungleichung mit $n(y-x) > 1$, so folgt

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

und damit $x < \frac{m}{n} < y$. $m - 1 \leq nx \Rightarrow m \leq nx + 1$,

$n(y-x) = ny - nx > 1 \Rightarrow ny > 1 + nx$, und $nx < m$ steht ja schon da. $nx < m < ny \Rightarrow x < \frac{m}{n} < y$, weil $n \in \mathbb{N}$, also $n \geq 0$.

Ist schließlich $x < 0$, so können wir ein $k \in \mathbb{N}$ wählen mit $k \geq |x|$, da $\mathbb{N}$ ja nicht nach oben beschränkt ist. Das ist jetzt Teil 2 der Fallunterscheidung. Es gilt aber noch immer $x < y$. Es folgt $0 \leq x + k < y + k$, und nach dem eben Bewiesenen $x + k < \frac{m}{n} < y + k$. $x < y \Rightarrow x + k < y + k$, wobei durch $k \geq |x|$, das x über/auf 0 geschoben wird. Der obere Beweisteil wird abermals durchgespielt mit $x + k$ statt x und $y + k$ statt y; Sonst ist die Prämisse gleich. Nun ist $\frac{m}{n} - k$ eine rationale Zahl mit $x < \frac{m}{n} - k < y$.

$m, n, k \in \mathbb{N}$ und $x + k < \frac{m}{n} < y + k \Rightarrow x < \frac{m}{n} - k < y$. $\square$