Satz 1.9.9 (Untergruppenkriterium) Eine Teilmenge U einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, falls U die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

1. $U \neq \emptyset$.

2. $xy^{-1} \in U$ für alle $x, y \in U$.

Beweis: (a) Sei U eine Untergruppe. Das ist jetzt also „$\Rightarrow$". Da U ein neutrales Element besitzt, folgt $U \neq \emptyset$. ... Für alle $x, y \in U$ ergibt sich $y^{-1} \in U$ nach Satz 1.9.8 und dann $xy^{-1} \in U$ aus der Abgeschlossenheit von U gegenüber der Multiplikation. ... eigentlich reicht das Argument, dass U eine „vollwertige" Gruppe ist. Somit gelten die Eigenschaften 1. und 2. ... unter der Voraussetzung, dass U eine Gruppe ist.

(b) Es seien die beiden Eigenschaften erfüllt. „$\Leftarrow$". Gemäß Eigenschaft 1. können wir ein $u \in U$ auswählen. U ist ja nicht leer. Dann betrachten wir Eigenschaft 2 im Sonderfall $x := u$, $y := u$. x, y müssen ja nicht verschieden sein. Das zeigt $uu^{-1} = e \in U$, womit e ein links-neutrales Element von U ist. Axiom 2 ist also erfüllt. Ersetzen wir hingegen x durch e in Eigenschaft 2, so erkennen wir, dass mit jedem $y \in U$ auch $ey^{-1} \overset{(1)}{=} y^{-1} \in U$ liegt. (1) $\Leftrightarrow$ Axiom 2 (siehe vorher). Damit besitzt jedes $y \in U$ mindestens ein links-inverses Element in U. Axiom 3 ist also auch erfüllt. Nun folgt leicht, dass U gegenüber der Multiplikation abgeschlossen ist: Für alle $x, y \in U$ gilt ja

$y^{-1} \in U$ und daher $xy = x(y^{-1})^{-1} \in U$ nach Eigenschaft 2. $y = (y^{-1})^{-1}$ wird auf Seite 27 angedeutet:

(i) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \Leftrightarrow (xy)^{-1}(xy) = (y^{-1}x^{-1})(xy) \Leftrightarrow$
$e = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}ey = y^{-1}y = e$

(ii) $yy^{-1} = e \Rightarrow (yy^{-1})^{-1} = e^{-1} = e \Rightarrow (y^{-1})^{-1}y^{-1} = e \Rightarrow$
$(y^{-1})^{-1}(y^{-1}y) = ey \Rightarrow (y^{-1})^{-1} = y.$

Das Assoziativgesetz gilt klarerweise auch in U. ... weil $U \subseteq G$ und es in G gilt, gilt es auch in U. $\square$