

Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

“Lecture 11 – Der Satz von Banach-Alaoglu”

11 / 1: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Finde einen kompakten Hausdorffraum K , sodass $(X, \|\cdot\|)$ isometrisch isomorph zu $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

Hinweis. Betrachte $\iota : X \rightarrow X''$.

11 / 2:* [Dieses Beispiel benötigt Lecture 10]

Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:

- (i) X ist reflexiv.
- (ii) X' ist reflexiv.
- (iii) Die abgeschlossene Einheitskugel B_X von X ist w -kompakt, d.h. kompakt bezüglich $\sigma(X, X')$.

Hinweis. Zeige mit Hilfe des Satzes von Banach-Alaoglu und der Aufgabe 06/2, dass “ X reflexiv $\Rightarrow B_X, B_{X'}$ w -kompakt”. Mit dem Satz von Goldstine zeige, dass “ B_X w -kompakt $\Rightarrow \iota(B_X) = B_{X''}$ ”. Für “(ii) \Rightarrow (i)” erinnere man sich zusätzlich daran dass der schwache Abschluss bei konvexen Mengen gleich dem Norm-Abschluss ist.
