3.2.13 Proposition. In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt.

Beweis. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < 1$ für alle $n \geq N$. Das geht, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und $\epsilon \in \mathbb{R}$, also $\epsilon = 1$. Setzt man

$$C := 1 + \max\{d(x_1, x), \ldots, d(x_{N-1}, x)\},$$

so erhält man $d(x_n, x) \leq C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, für dieses beliebige $n \in \mathbb{N} : n < N$, so folgt trivialerweise $d(x_n, x) \leq \max\{d(x_1, x), \ldots, d(x_{N-1}, x)\}$ und insbesondere $d(x_n, x) \leq C$. Wenn aber für jenes $n \in \mathbb{N} : n \geq N$, so ist ja $d(x_n, x) < 1$, also insbesondere $d(x_n, x) \leq C$. Dieses C hat einen konkreten Wert, den $d(x_n, x)$ nicht überschreitet und im Vergleich zu Definition 3.2.11 sieht man, dass $x_0 := x$, $y := x_n$ (, wobei hier die Symetrie (M2) eingesehen werden muss) und $y \in Y := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Funktionswerten x_n ist. $\square$