

Analysis 3 - Übung

11. UE am 13.01.2020

Richard Weiss

Florian Schager
Paul Winkler

Christian Sallinger
Christian Göth

Fabian Zehetgruber

Aufgabe 89. Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & 0 < x < 1, \\ ax - 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwachen Ableitungen.

Zeigen Sie: Für $u(\mathbf{x}) = \log |\mathbf{x}|$ und $\nu_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^2}$ ist ν_i die schwache Ableitung $D^i u$ in \mathbb{R}^n .

Lösung. Trivial!

Aufgabe 90. Sind $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, so ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $D_i(uv) = D_i u v + u D_i v$

Lösung. Durch die Hölder-Ungleichung und $u, v \in L^2(\Omega)$, erhält man unmittelbar, dass $\|uv\|_1 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2 < \infty$, also $uv \in L^1(\Omega)$.

Laut Meyers, Serrin, liegt der Unterraum $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, für $1 \leq p < \infty$ und Ω offen in \mathbb{R}^n , dicht in $W^{m,p}(\Omega)$. u, v lassen sich also durch glatte Funktionen, in der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{m,p}$, approximieren.

$$\|f\|_{m,p,\Omega} = \|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

$$\exists (u_k), (v_k) \in C^\infty(\Omega) : \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$$

Die oberen Limiten rutschen aber ins Integral rein, weil aufgrund der Hölder-Ungleichung und $q := \frac{p}{1-p}$ gilt $\forall \phi \in C^\infty(\Omega) : \forall (f_k) \in C^\infty(\Omega), \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f :$

$$\left| \int f \phi d\lambda^n - \int f_k \phi d\lambda^n \right| \leq \|(f - f_k)\phi\|_1 \leq \|f - f_k\|_p \|\phi\|_q \leq \|f - f_k\|_{m,p} \|\phi\|_q \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Hat f eine schwache Ableitung Df , so können wir damit, und partieller Integration, weil $\text{supp } \phi$ beschränkt ist, weiter schließen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int D_i f_k \phi d\lambda^n = \lim_{k \rightarrow \infty} - \int f_k D_i \phi d\lambda^n = - \int f D_i \phi d\lambda^n = \int D_i f \phi d\lambda^n.$$

Nachdem, wegen der Produktregel, $D_i(u_k v_k) = D_i u_k v_k + u_k D_i v_k$ durchaus gilt, erhält man, nochmal mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
 - \int uv D_i \phi d\lambda^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} - \int u_k v_k D_i \phi d\lambda^n \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int D_i(u_k v_k) d\lambda^n \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int D_i u_k v_k \phi d\lambda^n + \int u_k D_i v_k \phi d\lambda^n \right) \\
 &= \int D_i uv \phi d\lambda^n + \int u D_i v \phi d\lambda^n \\
 &= \int (D_i uv + u D_i v) \phi d\lambda^n.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 91. Verschwindet für eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die schwache Ableitung der Ordnung n , so ist f ein Polynom der Ordnung $n - 1$ fast überall.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Testfunktion als Summe der n -ten Ableitung einer Testfunktion und einer Linearkombination der Funktionen $\Psi_0^{(l)}, l < n, \Psi_0$ wie im Beweis von 6.1.4. dargestellt werden kann und berechnen Sie $\int x^k \xi^{(l)}(x) dx$ für Testfunktionen ξ und $k \leq l$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 92. Zeigen Sie, dass aus der Existenz der schwachen Ableitung der Ordnung 2 im Allgemeinen für $n \geq 2$ nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1 folgt.

Hinweis: Betrachten Sie eine Funktion $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Zeigen Sie, dass für $n = 1$ aus der Existenz einer schwachen k -ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen l -ter Ordnung für $l < k$ folgt.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 93. Zeigen Sie, dass $f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ genau dann in $W^{m,p}(\Omega)$ liegt, wenn die Abbildungen $\varphi \mapsto \int_{\Omega} f D^{\alpha} \varphi d\lambda^n$ für $|\alpha| \leq m$ stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der L^q -Norm nach \mathbb{R} ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Dualraum von L^p der L^q ist, das heißt jede beschränkte lineare Abbildung von einem dichten Teilraum des L^p nach \mathbb{C} ist von der Form $\varphi \mapsto \int \varphi g$ mit $g \in L^q$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 94. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge E von \mathbb{R}^n , wenn x Lebesguepunkt der Funktion $\mathbb{1}_{E \cup \{x\}}$ ist.

Zeigen Sie: Ist jeder Punkt $x \in [0, 1]^n$ ein Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge E von \mathbb{R}^n , so gilt $\lambda^n(E) \geq 1$.

Gibt es eine messbare Teilmenge E von \mathbb{R} , für die $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge der Dichtepunkte von E ist?

Lösung. Trivial!

Aufgabe 95. Ist X ein Fixpunktraum und Y ein Retrakt von X , so ist Y ein Fixpunktraum.

Lösung. Dass X **Fixpunktraum** ist heißt, X ist ein topologischer Raum, auf dem jede stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt.

$$X \text{ topologischer Raum} : \forall T_X \in C(X, X) : \exists x \in X : T_X(x) = x$$

Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X heißt **Retrakt**, wenn es eine stetige Abbildung (**Retraktion**) R von X auf Y mit $R|_Y = \text{id}_Y$ gibt.

$$Y \subseteq X, \exists R \in C(X, Y) : R|_Y = \text{id}_Y$$

Sei R die besagte Retraktion und $T_Y \in C(Y, Y)$ beliebig. Die wohldefinierte Komposition dieser stetigen Funktionen, ist stetig.

$$T_X := T_Y \circ R \in C(X, Y) \subseteq C(X, X).$$

Nun besitzt T_X also laut Voraussetzung einen Fixpunkt, also $\exists x \in X$:

$$T_Y(R(x)) = T_X(x) = x.$$

Weil $T_X(Y) \subseteq Y$, muss $x \in Y$. Wegen $R|_Y = \text{id}_Y$, gilt $x = R|_Y(x) = R(x) =: y$. Zuletzt, erhält man $T_Y(y) = y$, also einen Fixpunkt y von T_Y .

Aufgabe 96. Zeigen Sie (Satz von Perron-Frobenius): Jede $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} \geq 0$ für $1 \leq i, j \leq n$ hat einen Eigenwert $\lambda \geq 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$.

Hinw.: Betrachten Sie die Abbildung $\zeta : x \rightarrow \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax$ auf dem Simplex $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

Lösung. ζ ist tatsächlich eine Selbstabbildung in $(\Delta, \|\cdot\|_1)$, weil $\forall x \in \Delta$:

$$\begin{aligned} A, x \geq 0 &\Rightarrow Ax \geq 0 \Rightarrow \zeta(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^n \langle e_i, \zeta(x) \rangle &= \|\zeta(x)\|_1 = \left\| \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \right\|_1 = 1. \end{aligned}$$

Nachdem $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\|\cdot\|_1 \in C(\mathbb{R}^n)$, muss $\zeta \in C(\Delta, \Delta)$ ebenfalls stetig sein. Laut dem Fixpunktsatz von Brouwer, ist unsere (offensichtlich) kompakt und konvexe Menge $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Fixpunktraum, und ζ besitzt einen Fixpunkt $\exists x \in \Delta$:

$$x = \zeta(x) = \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax \Leftrightarrow \lambda x = Ax,$$

wobei $\lambda := \|Ax\|_1 \geq 0$ und $x \geq 0$.

Aufgabe 97. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 &= x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2x_2^4 + \frac{1}{4} &= x_2 \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt.

Lösung. $[-1, 1]^2 \in \mathbb{R}^2$!!! Es ist kompakt, es ist konvex, es ist ein ... (laut Brouwer) ... ein Fixpunktraum! T besitzt darin einen Fixpunkt.

$$T : \begin{cases} [-1, 1]^2 & \rightarrow [-1, 1]^2 \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2x_2^4 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Liebblingsfrage: "Wieso existiert das T ?"

Antwort: Dreiecksungleichung, d.h. $\forall x \in [-1, 1]^2$:

$$\begin{aligned} |\langle e_1, T(x) \rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \leq 1, \\ |\langle e_2, T(x) \rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 98. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung u der Gleichung

$$u(x) = x + \frac{1}{2} \sin(u(x) + x)$$

in $C[-1, 1]$ gibt.

Lösung. Betrachte die, auf dem vollständigen metrischen Raum $(C[-1, 1], d_\infty)$ lebende, Selbstabbildung

$$T : u \mapsto \left(x \mapsto x + \frac{1}{2} \sin(u(x) + x) \right).$$

Da $\sin' = \cos$, erhalten wir aus dem MWS der Differentialrechnung, dass $\forall a, b \in \mathbb{R} : \exists \xi \in [-1, 1] :$

$$\left| \frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b} \right| = |\cos(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

Damit gilt $\forall u, v \in C[-1, 1] :$

$$\begin{aligned} d_\infty(T(u), T(v)) &= \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \left(x + \frac{1}{2} \sin(u(x) + x) \right) - \left(x + \frac{1}{2} \sin(v(x) + x) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1, 1]} |\sin(u(x) + x) - \sin(v(x) + x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1, 1]} |u(x) + x - (v(x) + x)| \\ &= \frac{1}{2} d_\infty(u, v). \end{aligned}$$

Somit ist die Selbstabbildung T eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raumes $(C[-1, 1], d_\infty)$ mit Kontraktionsfaktor $\kappa := \frac{1}{2} < 1$. Es existiert also, laut dem Banach'schen Fixpunktsatz, eine eindeutige Lösung.