Kapitel 2

Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten im Folgenden das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dabei seien $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. In diesem Kapitel werden die grundlegenden Resultate über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems (2.1) bewiesen. Dabei spielt die Lipschitz-Eigenschaft der rechten Seite f eine zentrale Rolle. Zur Untersuchung globaler Existenz sind Differential- und Integralungleichungen ein wichtiges Hilfsmittel, daher werden auch einige elementare Ergebnisse aus diesem Bereich diskutiert und angewandt.

2.1 Lipschitz-Eigenschaft und Eindeutigkeit

Definition 2.1.1.

1. *Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}^n$ heißt* **lokal Lipschitz** *bzgl. x, falls zu jedem Punkt $(t_1, x_1) \in G$ eine Kugel $\bar{B}_r(x_1)$ und ein $\alpha > 0$ mit $[t_1 - \alpha, t_1 + \alpha] \times \bar{B}_r(x_1) \subset G$, sowie eine Konstante $L = L(t_1, x_1) > 0$ existieren, sodass gilt:*

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \le L(t_1, x_1)|x - \bar{x}|, \quad \textit{falls } |t - t_1| \le \alpha,\ x, \bar{x} \in \bar{B}_r(x_1).$$

2. *f heißt* **global Lipschitz** *bzgl. x, falls die Konstante $L > 0$ unabhängig von $(t_1, x_1) \in G$ ist, also:*

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \le L|x - \bar{x}|, \quad \textit{falls } (t,x),\ (t,\bar{x}) \in G.$$

Wir werden später zeigen, dass (2.1) mit einer lokal Lipschitz Funktion f eine eindeutig bestimmte lokale Lösung besitzt. Zunächst beweisen wir aber die

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme,*
Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_2, © Springer Basel AG 2010

Proposition 2.1.2. *Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in x, und es sei $K \subset G$ kompakt. Dann ist die Einschränkung $f|_K$ von f auf K global Lipschitz in x.*

Beweis. Angenommen $f|_K$ ist nicht global Lipschitz, das heißt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists (t_n, x_n), (t_n, \bar{x}_n) \in K : |f(t_n, x_n) - f(t_n, \bar{x}_n)| > n|x_n - \bar{x}_n|. \tag{2.2}$$

Nach Voraussetzung ist K kompakt, also existieren zwei konvergente Teilfolgen

$$(t_{n_k}, x_{n_k}) \to (t_*, x_*) \in K,\ (t_{n_k}, \bar{x}_{n_k}) \to (t_*, \bar{x}_*) \in K,\ k \to \infty.$$

Da f stetig ist, gilt $M := \max_{(t,x)\in K} |f(t,x)| < \infty$. Aus (2.2) folgt somit

$$|x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}| < \frac{1}{n_k}|f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k})| \le \frac{1}{n_k} 2M,$$

und daher gilt $x_* = \bar{x}_*$. Nach Voraussetzung existieren für $(t^*, x^*) \in K$ Konstanten $\alpha^* > 0$, $r^* > 0$ und $L(t^*, x^*) > 0$, sodass

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \le L(t^*, x^*)|x - \bar{x}|, \quad \text{falls } |t - t^*| \le \alpha^*,\ x, \bar{x} \in \bar{B}_{r^*}(x^*).$$

Wegen der Konvergenz der Teilfolgen existiert somit ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|t_{n_k} - t^*| \le \alpha^*/2$ und $|x_{n_k} - x^*| + |\bar{x}_{n_k} - x^*| \le r^*/2$ für alle $k \ge k_0$ gilt. Zusammen mit (2.2) erhalten wir so die Abschätzung

$$n_k|x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}| < |f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, \bar{x}_{n_k})| \le L(t^*, x^*)|x_{n_k} - \bar{x}_{n_k}|,$$

für alle $k \ge k_0$, also $n_k < L(t^*, x^*) < \infty$, ein Widerspruch zu $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$. □

Der folgende Satz zeigt, dass die lokale Lipschitz-Eigenschaft von f die Eindeutigkeit von Lösungen von (2.1) impliziert.

Satz 2.1.3 (Eindeutigkeitssatz). *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz in x. Dann existiert höchstens eine Lösung von (2.1).*

Beweis. Seien $x, \bar{x} \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ Lösungen von (2.1) mit $(t, x(t)), (t, \bar{x}(t)) \in G$ für alle $t \in [t_0, t_1]$. Die Menge $K := \{(t, x(t)), (t, \bar{x}(t)) \in G : t \in [t_0, t_1]\} \subset G$ ist kompakt. Nach Proposition 2.1.2 ist $f|_K$ global Lipschitz mit einer Konstanten $L > 0$, also

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \le L|x - \bar{x}|, \quad \text{falls } (t,x),\ (t,\bar{x}) \in K. \tag{2.3}$$

Integriert man (2.1) bezüglich t, so erhält man die Integralgleichungen

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds, \quad \bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2.4}$$

Setze $\rho(t) := |x(t) - \bar{x}(t)|$. Dann folgt aus (2.4)

$$\rho(t) = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \bar{x}(s))\, ds \Big| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))|\, ds$$

und (2.3) ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho(t) &\le L \int_{t_0}^{t} |x(s) - \bar{x}(s)|\, ds = L \int_{t_0}^{t} \rho(s)\, ds = L \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha s} \rho(s) e^{\alpha s}\, ds \\ &\le L \sup_{s \in [t_0, t_1]} (e^{-\alpha s} \rho(s)) \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}\, ds \le \frac{L}{\alpha} e^{\alpha t} \sup_{s \in [t_0, t_1]} (e^{-\alpha s} \rho(s)), \end{aligned}$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$. Wähle $\alpha = 2L$ und multiplizieren die obige Ungleichung mit $e^{-\alpha t}$. Weil nun die rechte Seite der Ungleichung von t unabhängig ist, kann man auf der linken Seite zum Supremum übergehen und erhält so

$$0 \le \sup_{t \in [t_0, t_1]} (e^{-\alpha t} \rho(t)) \le \frac{1}{2} \sup_{s \in [t_0, t_1]} (e^{-\alpha s} \rho(s)).$$

Also ist $\rho(t) \equiv 0$ und damit $x(t) = \bar{x}(t)$, für alle $t \in [t_0, t_1]$. □

Bemerkungen 2.1.4.

1. Für stetiges f ist die Integralgleichung (2.4) sogar äquivalent zu (2.1). Um dies zu sehen, sei $x \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ mit $(t, x(t)) \in G$ für $t \in [t_0, t_1]$ eine Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

   Da $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig ist und $(t_0, x_0) \in G$ gilt, ist die Abbildung

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

   stetig differenzierbar für alle $t \in (t_0, t_1)$ und es gilt $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$. Also ist $x = x(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1).

2. Eindeutigkeit nach links erhält man mittels *Zeitumkehr*: Ist nämlich $x(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(t, x)$ im Intervall $[t_1, t_0]$, so ist $y(t) = x(-t)$ mit $g(t, z) = -f(-t, z)$, eine Lösung von $\dot{y} = g(t, y)$ in $[-t_0, -t_1]$. Da mit f auch g stetig und lokal Lipschitz in x ist, ergibt der Eindeutigkeitssatz durch diese Transformation auch Eindeutigkeit nach links.

Wir haben bereits in Kapitel 1 gesehen, dass das Anfangswertproblem $\dot{x} = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$ keine eindeutige Lösung besitzt. Nach Satz 2.1.3 kann die Funktion $f(x) = x^{2/3}$ daher in keiner Umgebung von $x = 0$ lokal Lipschitz sein. Dies kann man auch folgendermaßen einsehen: nach dem Mittelwertsatz der Differential- und Integralrechnung existiert für alle $0 < x < \bar{x}$ ein $\xi \in (x, \bar{x})$, sodass

$$|f(x) - f(\bar{x})| = 2\xi^{-1/3}|x - \bar{x}|, \quad \xi \in (x, \bar{x}).$$

Aufgrund von $\xi^{-1/3} \to +\infty$ für $\xi \to 0_+$ kann f in $x = 0$ daher nicht Lipschitz sein.

Die folgende Proposition liefert ein hinreichendes Kriterium für die lokale Lipschitz-Eigenschaft, das in den meisten Anwendungen verfügbar ist.

Proposition 2.1.5. *Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich x stetig differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz in x.*

Beweis. Sei $(t_1, x_1) \in G$. Da $G \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, existieren Konstanten $\alpha > 0$ und $r > 0$, sodass die kompakte Menge $K := [t_1 - \alpha, t_1 + \alpha] \times \bar{B}_r(x_1) \subset G$ erfüllt. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,\bar{x})| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f(t, \tau x + (1-\tau)\bar{x}) \, d\tau \right| \\ &\leq \int_0^1 |(x - \bar{x})^{\mathsf{T}} \nabla_x f(t, \tau x + (1-\tau)\bar{x})| \, d\tau \end{aligned}$$

für alle $(t, x), (t, \bar{x}) \in K$. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert daher

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,\bar{x})| &\leq |x - \bar{x}| \int_0^1 |\nabla_x f(t, \tau x + (1-\tau)\bar{x})| \, d\tau \\ &\leq |x - \bar{x}| \max_{(t,x) \in K} |\nabla_x f(t,x)| = L|x - \bar{x}|, \end{aligned}$$

mit $L := \max_{(t,x)\in K} |\nabla_x f(t,x)| < \infty$. Die Existenz des Maximums beruht auf der Tatsache, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen. $\square$

2.2 Existenz von Lösungen

Für den Beweis des Hauptsatzes dieses Abschnitts verwenden wir den in der Analysis bekannten

Satz 2.2.1 (Fixpunktsatz von Banach). *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine* **Kontraktion***, das heißt, es existiert eine Konstante $q \in (0, 1)$, sodass*

$$d(Tx, Ty) \leq q \, d(x, y), \quad \textit{für alle } x, y \in M$$

gilt. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt $x_* \in M$, also $Tx_* = x_*$.

Bezüglich der lokalen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems (2.1) können wir nun das folgende Resultat zeigen.

Satz 2.2.2 (Existenzsatz von Picard–Lindelöf). *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $x \in C^1(J_\delta, \mathbb{R}^n)$ mit $J_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, sodass $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in J_\delta$ gilt, und $x = x(t)$ löst (2.1) im Intervall J_δ.*

Beweis. Zunächst zeigen wir Existenz in $[t_0, t_0 + \delta]$, also Existenz nach rechts. Um Satz 2.2.1 anzuwenden, konstruieren wir einen metrischen Raum (M, d) und eine Abbildung $T : M \to M$. Nach Bemerkung 2.1.4 ist das Anfangswertproblem (2.1) äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

daher betrachten wir diese. Seien $\delta_0 > 0$ und $r > 0$ so fixiert, dass $J_{\delta_0} \times \bar{B}_r(x_0) \subset G$ gilt, und definiere eine Menge M und eine Abbildung T mittels

$$M := \{x \in C(J_\delta; \mathbb{R}^n) : x(t) \in \bar{B}_r(x_0),\ x(t_0) = x_0,\ t \in J_\delta\}, \quad \delta \leq \delta_0$$

und für $x \in M$

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{2.5}$$

wobei $\delta > 0$ im Weiteren festgelegt wird. Zunächst beweisen wir die Eigenschaft $T : M \to M$. Für $x \in M$ folgt aus der Stetigkeit von f, dass auch die Funktion Tx stetig ist, und (2.5) ergibt die Abschätzung

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\, ds \leq m\delta,$$

mit $m := \max\{|f(t,x)| : t \in J_{\delta_0},\ x \in \bar{B}_r(x_0)\} < \infty$. Für $\delta \leq \delta_1 := \min\{\delta_0, r/m\}$ folgt $Tx(t) \in \bar{B}_r(x_0)$, für alle $t \in J_\delta$, also $TM \subset M$. Es bleibt noch die Kontraktionseigenschaft von T nachzuweisen. Dazu definieren wir eine Metrik d auf M mittels

$$d(x, \bar{x}) := \max_{t \in J_\delta} e^{-\alpha t} |x(t) - \bar{x}(t)|,$$

wobei $\alpha > 0$ später festgelegt wird. Seien $t \in J_\delta$ und $x, \bar{x} \in M$. Aus (2.5) folgt

$$|Tx(t) - T\bar{x}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))|\, ds.$$

Nach Proposition 2.1.2 ist f auf $J_{\delta_0} \times \bar{B}_r(x_0)$ global Lipschitz stetig, mit einer Konstanten L. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |Tx(t) - T\bar{x}(t)| &\leq L \int_{t_0}^{t} |x(s) - \bar{x}(s)|\, ds = L \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha s} |x(s) - \bar{x}(s)| e^{\alpha s}\, ds \\ &\leq L d(x, \bar{x}) \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}\, ds \leq \frac{L}{\alpha} d(x, \bar{x}) e^{\alpha t},\ t \in J_\delta. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$ und Übergang zum Maximum ergibt dies

$$d(Tx, T\bar{x}) \leq \frac{L}{\alpha} d(x, \bar{x}).$$

Wählt man z.B. $\alpha = 2L > 0$, so folgt $d(Tx, T\bar{x}) \leq \frac{1}{2}\, d(x, \bar{x})$, also ist T eine strikte Kontraktion. Somit liefert Satz 2.2.1 genau einen Fixpunkt $x_* \in M$ von T, d.h.

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_*(s))\, ds, \quad t \in J_\delta.$$

Nach Bemerkung 2.1.4 ist $x_* = x_*(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (2.1). Existenz nach links erhält man mittels Zeitumkehr, mit einem ggf. kleinerem $\delta > 0$. Die resultierende Lösung ist stetig differenzierbar auch in t_0, da $\dot{x}(t)$ aufgrund der Differentialgleichung auch in $t = t_0$ stetig ist. □

Bemerkungen 2.2.3.

1. Man beachte, dass $\delta > 0$ im Beweis zu Satz 2.2.2 nur von δ_0, r und m abhängt, nicht aber von der Konstanten $L > 0$. Diese Tatsache kann man verwenden, um lokale Existenz für rechte Seiten f zu erhalten, die stetig aber nicht notwendig lokal Lipschitz in x sind (Existenzsatz von Peano, vgl. Kapitel 6).
2. Ist $(t_k, x_k) \to (t_0, x_0) \in G$ eine Folge in G, dann existiert ein gleichmäßiges $\delta > 0$, sodass die Anfangswertprobleme $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_k) = x_k$ für hinreichend große k genau eine Lösung $x_k(t)$ auf $[t_k, t_k + \delta]$ besitzen. Dies folgt wie im Beweis des Existenzsatzes, indem man (t_0, x_0) durch (t_k, x_k) ersetzt.

Beispiele. (a) *Skaliertes Volterra–Lotka-Modell*

$$(SVL) \begin{cases} \dot{u} = u(1 - v), \\ \dot{v} = v(u - \varepsilon), \end{cases} \qquad \varepsilon > 0.$$

Es ist $f(u, v) = [u(1 - v), v(u - \varepsilon)]^\mathsf{T} = [f_1(u, v), f_2(u, v)]^\mathsf{T}$ und die Komponenten von $f(u, v)$ sind Polynome in 2 Variablen, also gilt sogar $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Nach Proposition 2.1.5 ist f lokal Lipschitz und der Satz von Picard–Lindelöf liefert zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine lokale Lösung von (SVL).

(b) *Das mathematische Pendel*

$$(P) \begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin u. \end{cases}$$

Hier ist $f(u, v) = [v, -\omega^2 \sin u]^\mathsf{T}$ und wie in Beispiel (a) gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Unter Verwendung von Proposition 2.1.5 liefert der Satz von Picard und Lindelöf die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung von (P), zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

Ein wichtiger Spezialfall von Satz 2.2.2 betrifft lineare Systeme.

Korollar 2.2.4. *Sei $J = [a,b]$, $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und es seien die Funktionen $b \in C(J,\mathbb{R}^n)$, $A \in C(J,\mathbb{R}^{n\times n})$ gegeben. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

genau eine lokale Lösung.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 2.2.2 mit $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $f(t,x) := A(t)x + b(t)$. Denn offensichtlich ist f stetig, und es gilt

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |A(t)(x-y)| \le |A(t)||x-y| \le L|x-y|,$$

für alle $(t,x), (t,y) \in J \times \mathbb{R}^n$, wobei $L := \max_{t\in J} |A(t)| < \infty$ aufgrund der Kompaktheit von J und der Stetigkeit von $|A(\cdot)|$ gilt, also ist f sogar global Lipschitz in x. □

2.3 Fortsetzbarkeit und maximales Existenzintervall

Wir betrachten wieder das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen ist, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x. Dann existiert nach Satz 2.2.2 ein $\delta_0 > 0$ und genau eine Funktion $x \in C^1([t_0-\delta, t_0+\delta_0], \mathbb{R}^n)$, als lokale Lösung von (2.7). In Kapitel 1 hatten wir die Frage aufgeworfen, ob die Lösung für alle Zeiten $t \ge t_0$ existiert oder nicht. Wir wollen diese Problematik jetzt im Detail diskutieren. Zunächst beachte man, dass sich Lösungen zusammensetzen lassen. Um dies zu sehen, seien x_1 Lösung im Intervall $[t_0, t_1]$ und x_2 Lösung in $[t_1, t_2]$ mit $x_1(t_1) = x_2(t_1)$; dann gilt aufgrund der Differentialgleichung auch $\dot{x}_1(t_1) = f(t_1, x_1(t_1)) = f(t_1, x_2(t_1)) = \dot{x}_2(t_1)$, folglich ist die zusammengesetzte Funktion $x(t)$ definiert durch $x(t) = x_1(t)$ für $t \in [t_0, t_1]$ und $x(t) = x_2(t)$ für $t \in [t_1, t_2]$ stetig differenzierbar in $[t_0, t_2]$. Diese Eigenschaft und die Eindeutigkeit der Lösungen zeigen, dass die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 2.3.1. *Es seien $t_\pm(t_0,x_0) \in \mathbb{R}$ durch*

$$t_+ := t_+(t_0,x_0) := \sup\{t_1 \ge t_0 \colon \textit{es ex. eine Lösung } x_1 \textit{ von } (2.7) \textit{ auf } [t_0,t_1]\},$$

$$t_- := t_-(t_0,x_0) := \inf\{t_2 \le t_0 \colon \textit{es ex. eine Lösung } x_2 \textit{ von } (2.7) \textit{ auf } [t_2,t_0]\}$$

definiert. Die Intervalle $[t_0, t_+)$, bzw. $(t_-, t_0]$, bzw. (t_-, t_+) heißen maximales Existenzintervall der Lösung nach rechts, bzw. nach links, bzw. schlechthin. Die **maximale Lösung** *von (2.7) wird definiert durch $x(t) = x_1(t)$, für alle $t \in [t_0, t_1]$, bzw. $x(t) = x_2(t)$ auf $[t_2, t_0]$, also gilt $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n)$.*

Der Existenzsatz stellt $t_+(t_0, x_0) > t_0$ und $t_-(t_0, x_0) < t_0$ sicher, und gilt $t_+ = \infty$ bzw. $t_- = -\infty$, so haben wir globale Existenz nach rechts bzw. nach links. Wie lässt sich nun die Endzeit $t_+ = t_+(t_0, x_0)$ charakterisieren? Dazu nehmen wir $t_+ < \infty$ an. Die erste Möglichkeit ist nun die, dass die Lösung dem Rand ∂G zu nahe kommt, genauer

$$\liminf_{t \to t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) = 0.$$

Eine zweite Möglichkeit ist ein *blow up*, also

$$\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty.$$

Sei beides nicht der Fall. Dann gibt es eine Konstante $M > 0$ und eine Folge $t_n \nearrow t_+$, sodass

$$|x(t_n)| \leq M \quad \text{ und } \quad \operatorname{dist}((t_n, x(t_n)), \partial G) \geq 1/M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Folge $(x(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist also beschränkt, daher existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge $x(t_{n_k}) \to x_*$ für $k \to \infty$, also $(t_{n_k}, x(t_{n_k})) \to (t_*, x_*) \in G$ für $k \to \infty$. Daher finden wir nach Bemerkung 2.2.3 für hinreichend großes $k_0 \in \mathbb{N}$ ein gleichmäßiges $\delta_* > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $x_k = x_k(t)$ auf $[t_{n_k}, t_{n_k} + \delta_*]$ mit $x_k(t_{n_k}) = x(t_{n_k})$ für $k \geq k_0$. Nun gilt aber $t_{n_k} + \delta_* > t_*$ für große $k \in \mathbb{N}$. Daher kann die Lösung $x = x(t)$ nicht in einem Punkt $(t_*, x_*) \in G$ stecken bleiben. Entsprechendes gilt mittels Zeitumkehr für t_-.

Aus diesen Überlegungen und mit Definition 2.3.1 erhalten wir unmittelbar das folgende Resultat.

Satz 2.3.2 (Fortsetzungssatz). *Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in x. Dann existiert die Lösung zum Anfangswertproblem* (2.1) *auf dem maximalen Intervall (t_-, t_+), mit $t_-(t_0, x_0) =: t_- < t_0 < t_+ := t_+(t_0, x_0)$. Der rechte Endpunkt t_+ ist charakterisiert durch die folgenden Alternativen.*

1. *$t_+ = \infty$: $x(t)$ ist eine globale Lösung nach rechts.*
2. *$t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \to t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) = 0$, das heißt, die Lösung $x(t)$ kommt dem Rand von G beliebig nahe.*
3. *$t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \to t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) > 0$, $\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty$.*

Entsprechendes gilt für den linken Endpunkt t_-.

Bemerkungen 2.3.3.

1. Das maximale Existenzintervall ist stets offen, da man sonst die Lösung an der Stelle $t = t_+$ bzw. $t = t_-$ mit Satz 2.2.2 fortsetzen könnte.
2. Die Aussage von Satz 2.3.2 wird in der Literatur häufig kurz formuliert als: *Die Lösungen existieren bis zum Rand von G.*

2.4 Differential- und Integralungleichungen

Schon im Beweis von Satz 2.1.3 haben wir eine Integralungleichung der Form $0 \leq \varphi(t) \leq C \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds$ für stetiges φ kennengelernt, und gezeigt, dass dies $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ impliziert. Ein grundlegendes Hilfsmittel für unser weiteres Vorgehen ist das

Lemma 2.4.1 (von Gronwall). *Seien die Funktionen $\alpha, \beta, \varphi \in C[a, b]$ mit $\beta(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gegeben und es sei*

$$0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Dann gilt

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \left[\beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \alpha(s)\right] ds, \ t \in [a, b].$$

Speziell gilt für $\alpha(t) \equiv M$

$$\varphi(t) \leq M e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau}, \ t \in [a, b].$$

Beweis. Wir setzen $\psi(t) = \int_a^t \beta(\tau)\varphi(\tau) \ d\tau, \ t \in [a, b]$. Da β und φ nach Voraussetzung stetig sind, ist ψ stetig differenzierbar auf $[a, b]$, mit $\dot{\psi}(t) = \beta(t)\varphi(t)$. Aus $\varphi(t) \leq \alpha(t) + \psi(t)$ erhalten wir wegen $\beta(t) \geq 0$ die Differentialungleichung

$$\dot{\psi}(t) \leq \beta(t)(\alpha(t) + \psi(t)), \ t \in [a, b]. \tag{2.8}$$

Wir multiplizieren $\psi(t)$ mit $e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau}$ und erhalten mit (2.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \psi(t)\right] &= e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \dot{\psi}(t) - \beta(t) e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \psi(t) \\ &= e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \left[\dot{\psi}(t) - \beta(t)\psi(t)\right] \\ &\leq \beta(t) e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \alpha(t). \end{aligned}$$

Integration dieser Ungleichung von a bis t ergibt

$$e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau \psi(t)} \leq \int_a^t \left[\beta(s) e^{-\int_a^s \beta(\tau) d\tau} \alpha(s)\right] ds.$$

Daraus folgt

$$\psi(t) \leq \int_a^t \left[\beta(s) e^{\left(\int_a^t \beta(\tau) d\tau - \int_a^s \beta(\tau) d\tau\right)} \alpha(s)\right] \ ds = \int_a^t \left[\beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \alpha(s)\right] ds,$$

und die Behauptung ist eine unmittelbare Konsequenz der Ungleichung $\varphi(t) \leq \alpha(t) + \psi(t)$.

Sei nun $\alpha(t) \equiv M$. Dann gilt mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq M\Big(1 + \int_a^t \Big[\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\Big]ds\Big)\\ &= M\Big(1 - \Big[e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\Big]_a^t\Big)\end{aligned}$$

aufgrund von $\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} = -\frac{d}{ds}e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}$, und die Auswertung an den Grenzen ergibt

$$\varphi(t) \leq M\Big(1 - 1 + e^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau}\Big) = Me^{\int_a^t \beta(\tau)\ d\tau}.$$ □

Differentialungleichungen wie (2.8) treten in vielen Bereichen der Analysis auf. Wir beweisen hier daher ein elementares, aber wichtiges Resultat über solche Ungleichungen.

Lemma 2.4.2. *Sei $J = [t_0, t_1]$, $u : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und $\rho \in C^1(J, \mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung $\dot\rho(t) < u(t, \rho(t))$ für alle $t \in (t_0, t_1]$ mit $\rho(t_0) < \varphi_0$. Weiter sei $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$* eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases}\dot\varphi = u(t, \varphi),\\ \varphi(t_0) = \varphi_0.\end{cases} \tag{2.9}$$

Dann gilt $\rho(t) < \varphi(t)$ für alle $t \in J$.

Beweis. Angenommen es existiert ein $t_* \in (t_0, t_1]$ mit $\rho(t) < \varphi(t)$ für alle $t \in [t_0, t_*)$ und $\rho(t_*) = \varphi(t_*)$. Dann gilt für hinreichend kleine $h > 0$

$$\frac{\rho(t_*) - \rho(t_* - h)}{h} > \frac{\varphi(t_*) - \varphi(t_* - h)}{h}.$$

Aus der Differenzierbarkeit von ρ und φ folgt für $h \to 0_+$

$$\dot\rho(t_*) \geq \dot\varphi(t_*) = u(t_*, \varphi(t_*)) = u(t_*, \rho(t_*)).$$

Das ist ein Widerspruch, da nach Annahme $\dot\rho(t_*) < u(t_*, \rho(t_*))$ gilt. □

Bemerkungen 2.4.3.

1. Der Beweis von Lemma 2.4.2 für den Fall “>” verläuft analog. Die Funktion ρ bezeichnen wir je nach Situation als *Ober- bzw. Unterlösung* zur Differentialgleichung (2.9).

2. Durch Zeitumkehr erhält man entsprechende Ungleichungen nach links. Man beachte, dass sich dabei die Relationszeichen in der Differentialgleichung umdrehen!

Beispiel. Betrachten wir ein AWP, dessen Lösung sich nicht analytisch elementar angeben lässt:

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 + x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Sei zunächst $t < 1$. Dann gilt $t^2 + x^2 < 1 + x^2$ und wir betrachten das Vergleichsproblem

$$\begin{cases} \dot{y} = 1 + y^2, \\ y(0) = \tan(\varepsilon), \end{cases}$$

mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Aus Lemma 2.4.2 folgt $x(t) < y(t) = \tan(t + \varepsilon)$ für alle $0 \leq t < 1$. Ferner ist $\dot{x}(t) > t^2$, also $x(t) > \frac{1}{3}t^3$ für alle $t \in (0, 1]$. Insbesondere gilt also $x(1) > 1/3$. Für $t \geq 1$ betrachten wir nun das Vergleichsproblem

$$\begin{cases} \dot{y} = 1 + y^2, \\ y(1) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Aus Lemma 2.4.2 folgt dann $x(t) > y(t) = \tan(t + \arctan(\frac{1}{3}) - 1)$ für $1 \leq t < \frac{\pi}{2} + 1 - \arctan(\frac{1}{3})$. Insgesamt erhalten wir so die Abschätzung

$$1 < t_+ < 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

für die Länge des maximalen Existenzintervalls $[0, t_+)$. Ober- und Unterlösungen eignen sich also unter anderem dazu, das maximale Existenzintervall einzugrenzen; vgl. Abb. 2.1.

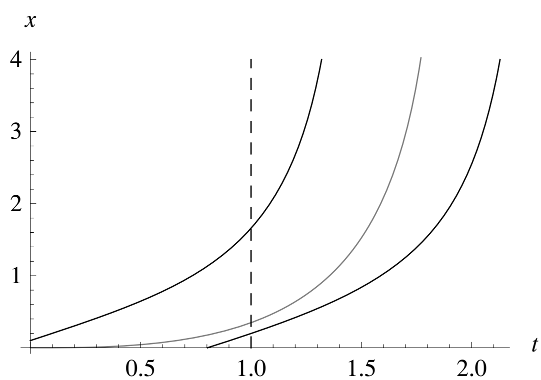

Abbildung 2.1: Lösung und Vergleichsfunktionen

2.5 Globale Existenz

Gegeben sei das Anfangswertproblem (2.1) und f sei stetig und lokal Lipschitz in x. Der Satz von Picard–Lindelöf impliziert, dass eine lokale eindeutig bestimmte Lösung von (2.1) existiert und Fortsetzungssatz 2.3.2 liefert uns hierzu ein maximales Existenzintervall. Unser Anliegen in diesem Abschnitt ist es, Kriterien anzugeben, unter denen die Lösung von (2.1) global existiert.

Korollar 2.5.1. *Sei $G = J \times \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(t_0, x_0) \in G$, und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in x. Seien ferner $a, b \in C(J; \mathbb{R}_+)$ gegeben, sodass*

$$|f(t,x)| \le a(t) + b(t)|x|, \tag{2.10}$$

für alle $t \in J$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt; man sagt f sei bzgl. x linear beschränkt. *Dann existiert die Lösung von* (2.1) *global.*

Beweis. Sei $x(t)$ die Lösung von (2.1). Angenommen $t_+ \in J$, mit $\lim_{t \to t_+} |x(t)| = \infty$. Wir schreiben (2.1) als äquivalente Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \;\; t \in [t_0, t_+).$$

Wegen (2.10) und mit der Dreiecksungleichung gilt

$$|x(t)| \le |x_0| + \int_{t_0}^t (a(s) + b(s)|x(s)|)ds = \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)|x(s)|ds, \;\; t \in [t_0, t_+),$$

wobei $\alpha(t) := |x_0| + \int_{t_0}^t a(s)ds$ und $\beta(t) := b(t)$. Das Lemma von Gronwall 2.4.1 mit $\varphi(t) := |x(t)|$ liefert

$$|x(t)| \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} \alpha(s)ds, \;\; t \in [t_0, t_+).$$

Aus dieser Abschätzung ergibt sich für $t \nearrow t_+$ und endliches t_+ ein Widerspruch zur Annahme, denn nach Voraussetzung sind die Funktionen α und β stetig in t, also bleibt $x(t)$ beschränkt. Nach Satz 2.3.2 existiert die Lösung $x = x(t)$ für alle $t \in J$, $t \ge t_0$. Der Beweis für den Fall $t \le t_0$ verläuft analog mittels Zeitumkehr. □

Für lineare Gleichungen ergibt dieses Korollar das

Korollar 2.5.2. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(J, \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in J$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (2.6) *genau eine globale Lösung.*

Beweis. Es gilt die Abschätzung

$$|f(t,x)| = |A(t)x + b(t)| \le |A(t)x| + |b(t)| \le |A(t)||x| + |b(t)|,$$

für alle $t \in J$. Nun folgt die Behauptung aus Korollar 2.5.1. □

Beispiele. (a) *Das gedämpfte Pendel.* Betrachte die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 \sin x = b(t), \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

wobei $\alpha \geq 0$ und $b \in C(\mathbb{R})$ gegeben sind. Dabei bewirkt der Term $\alpha\dot{x}$ eine Dämpfung der Schwingung z.B. durch Luftwiderstand, und $b = b(t)$ stellt eine äußere Kraft dar, die am Pendel angreift. Wir transformieren (2.11) in das System erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t). \end{cases}$$

Die rechte Seite

$$f(t,u,v) = \begin{bmatrix} v \\ -\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t) \end{bmatrix}$$

des Systems ist stetig in t und stetig differenzierbar in u, v, das heißt nach Proposition 2.1.5 und Satz 2.2.2 existiert zu jedem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine lokale Lösung. Ferner gilt die Abschätzung

$$|f(t,z)|^2 = v^2 + (-\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t))^2 \leq v^2 + 3(\alpha^2 v^2 + \omega^4 u^2 + b(t)^2),$$

denn es gilt $|\sin x| \leq |x|, \; x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$|f(t,z)|^2 \leq C(b(t)^2 + |z|^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $z = [u, v]^{\mathsf{T}}$ und einer Konstanten $C = C(\alpha, \omega) > 0$. Wegen $(x+y)^{1/2} \leq x^{1/2} + y^{1/2}$ für alle $x, y \geq 0$ gilt

$$|f(t,z)| \leq C(|b(t)| + |z|), \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{R}^2.$$

Nach Korollar 2.5.1 existiert die Lösung $[u(t), v(t)]^{\mathsf{T}}$ also global.

(b) *Ein nichtlinearer Schwinger.* Die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = b(t)$$

beschreibt ein weiteres nichtlineares Schwingungssystem. Dabei sei $b \in C(\mathbb{R})$ eine gegebene Funktion, die eine äußere Kraft bedeutet. Wir formulieren diese Gleichung wie zuvor als System

$$(NLS) \begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = b(t) - u + \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass auch dieses System lokal Lipschitz ist und lineares Wachstum hat, also existieren die Lösungen global.

Korollar 2.5.1 versagt, wenn f polynomiale Terme mit Ordnung $l \geq 2$ enthält, wie z.B. in den Modellen von Volterra–Lotka und Kermack–McKendrick. Hier sind es andere Struktureigenschaften, die globale Existenz nach rechts ergeben. Dabei sind häufig Differentialungleichungen von Nutzen, wie das nächste Korollar zeigt.

Korollar 2.5.3. *Sei $G = J \times \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz in x, und es existiere eine Konstante $\omega \geq 0$, sodass*

$$(f(t,x)|x) \leq \omega |x|_2^2 \tag{2.12}$$

für alle $(t,x) \in G$ gilt. Dann existieren alle Lösungen des AWPs (2.1) *global nach rechts.*

Beweis. Sei $x = x(t)$ eine Lösung von (2.1). Man setze $\varphi(t) = |x(t)|_2^2$. Unter Verwendung von (2.12) gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n x_i(t)^2 = \sum_{i=1}^n 2x_i(t)\dot{x}_i(t) = 2\sum_{i=1}^n x_i(t) f_i(t,x(t))\\ = 2(f(t,x(t))|x(t)) \leq 2\omega|x(t)|_2^2 = 2\omega\varphi(t).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Sei nun $\varphi(t_0) =: \varphi_0,\ t_0 \in J$. Die Differentialungleichung (2.13) liefert uns die Abschätzung

$$\frac{d}{dt}\Big(\varphi(t)e^{-2\omega(t-t_0)}\Big) = \Big(\dot{\varphi}(t) - 2\omega\varphi(t)\Big)e^{-2\omega(t-t_0)} \leq 0,$$

woraus nach Integration $\varphi(t) \leq \varphi_0 e^{2\omega(t-t_0)}$ bzw. $|x(t)| \leq |x_0|e^{\omega(t-t_0)}$ folgt. Die Lösung $x = x(t)$ von (2.1) ist damit auf jedem kompakten Intervall $[t_0, t_1] \subset J$ beschränkt, und globale Existenz nach rechts folgt aus Satz 2.3.2. □

Die folgenden Beispiele greifen die Systeme aus Abschnitt 1.7 auf.

Beispiele. (a) *Das Kermack–McKendrick-Modell.* Das Kermack–McKendrick-Modell ist durch

$$(SKK)\begin{cases}\dot{u} = -uv,\\ \dot{v} = uv - v,\end{cases}$$

in skalierter Form gegeben. Sind $u_0, v_0 > 0$, so erfüllt die Lösung $u(t), v(t) > 0$ auf ihrem maximalen Existenzintervall $[0, t_+)$, denn es gilt in diesem Intervall

$$u(t) = u_0 e^{-\int_0^t v(s)ds}, \quad v(t) = v_0 e^{\int_0^t (u(s)-1)ds}, \quad t \in [0, t_+).$$

Es folgt

$$\dot{u} + \dot{v} = -v \leq 0, \quad t \in [0, t_+),$$

also $u(t) + v(t) \leq u_0 + v_0$ und somit Beschränktheit der Lösung, also $t_+ = \infty$ nach dem Fortsetzungssatz. Sind die Anfangswerte allerdings nicht positiv, so kann es blow up geben. Da aber u und v in diesem Modell Populationsgrößen darstellen, ist die Annahme positiver Anfangswerte natürlich, negative u_0, v_0 sind biologisch nicht relevant.

(b) *Volterra–Lotka-Systeme mit Sättigung.* Das skalierte Volterra–Lotka-System mit Sättigung lautet

$$(SVLS)\begin{cases}\dot{u} = u - \kappa u^2 - uv,\\ \dot{v} = -\varepsilon v + uv.\end{cases}$$

Dabei sind $\varepsilon > 0$ und $\kappa \geq 0$ Konstanten. Der Term κu^2 beschreibt eine Selbstlimitierung der Beute durch Beschränkung ihrer Nahrung. Seien die Anfangswerte u_0, v_0 positiv und sei $(u(t), v(t))$ die Lösung von (SVLS) auf ihrem maximalen Existenzintervall $[0, t_+)$. Wie in (a) haben wir

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t (1-\kappa u(s)-v(s))ds}, \quad v(t) = v_0 e^{\int_0^t (u(s)-\varepsilon)ds}, \quad t \in [0, t_+),$$

also sind beide Funktionen auf $[0, t_+)$ positiv. Angenommen, es sei $t_+ < \infty$. Aus der Gleichung für u folgt dann $\dot{u} \leq u$, also nach Integration $u(t) \leq e^t u_0 \leq e^{t_+} u_0 =: c < \infty$. Die Gleichung für v ergibt $\dot{v} \leq cv$, folglich $v(t) \leq e^{ct} v_0$, also ist auch $v(t)$ auf $[0, t_+)$ beschränkt, ein Widerspruch zum Fortsetzungssatz. Daher existieren alle Lösungen mit positiven Anfangswerten global nach rechts.

Übungen

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und gelte

$$f(t,x) < 0 \text{ für } tx > 0, \quad f(t,x) > 0 \text{ für } tx < 0.$$

Zeigen Sie, dass $x(t) \equiv 0$ die einzige Lösung der Gleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit Anfangswert $x(0) = 0$ ist.

2. Beweisen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und dem Fortsetzungsprinzip, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (t^2 - x^2)^{3/2}, \quad x(0) = 0,$$

genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

3. Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $u(t)$, indem Sie eine Differentialgleichung für $u(t)$ aufstellen, und das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

lösen.

4. Das folgende Differentialgleichungssystem wurde vom Nobelpreisträger I. Prigogine erfunden, um seine Theorien über Morphogenese zu untermauern. Das System wird heute **Brusselator** genannt.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= a - bu + u^2 v - u,\\ \dot{v} &= bu - u^2 v.\end{aligned}$$

Dabei sind a, b positive Konstanten. Zeigen Sie, dass dieses System für Anfangswerte $u(0) = u_0 > 0$, $v(0) = v_0 > 0$ eindeutig bestimmte Lösungen besitzt, die für $t \geq 0$ positiv bleiben und dort global existieren.

5. Gegeben sei das SIRS-Epidemiemodell

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\lambda uv + \gamma w,\\ \dot{v} &= \lambda uv - (\mu + \nu)v,\\ \dot{w} &= \nu v - \gamma w,\end{aligned}$$

wobei $\lambda, \gamma, \mu, \nu$ positive Konstanten bedeuten. Zeigen Sie, dass das AWP $u(0) = u_0 > 0$, $v(0) = v_0 > 0$, $w(0) = w_0 > 0$ für dieses System eindeutig lösbar ist, und dass die Lösungen für alle $t \geq 0$ existieren.

6. Ein Hund in einem Fluss schwimmt mit konstanter (Relativ)-Geschwindigkeit v_h auf seinen am Ufer stehenden Herrn zu, wird aber zugleich von der Strömung des Flusses (Geschwindigkeit v_f) abgetrieben.
(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Kurve auf, längs der sich der Hund fortbewegt.
(b) Berechnen Sie die Kurve, auf der sich der Hund bewegt, wenn er im Punkt (x_0, y_0) startet. Erreicht er seinen Herrn?

7. Das folgende Modell wurde zur Beschreibung des *Stickstoff-Kreislaufs in der Antarktis* vorgeschlagen:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= av + bw - cuv,\\ \dot{v} &= cuv - dvw - av,\\ \dot{w} &= dvw - bw.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dabei bedeuten u den frei verfügbaren Stickstoff, v das Phytoplankton, w das Zooplankton, und $a, b, c, d > 0$ sind Konstanten. Zeigen Sie, dass dieses Modell zu einem Volterra–Lotka-Modell äquivalent ist. Unter welchen Bedingungen sind v und w koexistent? Wie wirkt sich ein höherer Gesamtgehalt an Stickstoff auf das Koexistenz-Equilibrium aus, und wie wirkt Befischung des Zooplanktons z.B. durch Wale?