23 / 1: Sei S der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$.

(a) Zeige, dass

$$\sigma_p(S^*) = \sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$
$$\sigma_c(S^*) = \sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$
$$\sigma_r(S^*) = \sigma_p(S) = \emptyset.$$

(b) Bestimme $\sigma_{app}(S)$ und finde zu jedem Punkt $\lambda \in \sigma_{app}(S)$ eine Folge wie in der Definition des approximativen Punktspektrums verlangt.

(c) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \neq 1$ bestimme $\dim\left(\ell^2(\mathbb{N})/\operatorname{ran}(S-\lambda)\right)$.

a) Aus 19/1 wissen wir bereits, dass S isometrisch ist und nach Lemma 6.4.10 mit $\mathbb{E} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{E}}$

Außerdem: $S^* : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$

•) $S^*(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow (x_{n+1} - \lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: x_{n+1} = \lambda x_n$

induktiv: $x_n = \lambda^{n-1} x_1$

$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{n-1}|^2 |x_1|^2 = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \Rightarrow |\lambda| < 1$ (falls $x_1 \neq 0$)

falls $x_1 = 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} =$

Also: $\sigma_p(S^*) = \mathbb{E}$

•) Sei $\lambda \in \sigma_p(S^*) = \mathbb{E}$, also $\ker(S^* - \lambda I) = \operatorname{ran}((S^* - \lambda I)^*)^\perp \neq \{0\}$ (Prop. 6.6.7)

also $\operatorname{ran}(S - \bar\lambda I)^\perp = \ker(S^* - \lambda I)$ und da $\operatorname{ran}(S - \bar\lambda I)$ Unterraum von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist gilt nach Korollar 3.2.4: $\overline{\operatorname{ran}(S - \bar\lambda I)} = \operatorname{ran}(S - \bar\lambda I)^{\perp\perp} = \ker(S^* - \lambda I)^\perp \subsetneq \{0\}^\perp = \ell^2(\mathbb{N})$

Wir schließen $\bar\lambda \in \sigma_r(S)$ und wegen $\overline{\mathbb{E}} = \mathbb{E}$ also $\mathbb{E} = \sigma_p(S^*) \subseteq \sigma_r(S) \subseteq \mathbb{E}$

•) Für $\lambda \in \partial\mathbb{E}$ ist $\ker(S^* - \lambda I) = \{0\}$, wie im vorigen Punkt schließen wir

$\overline{\operatorname{ran}(S - \bar\lambda I)} = \ker(S^* - \lambda I)^\perp = \{0\}^\perp = \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \partial\mathbb{E} \cap \sigma_r(S) = \emptyset \Rightarrow \sigma_r(S) = \mathbb{E} = \sigma_p(S^*)$

•) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ $S(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, \dots) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda x_1 = 0$

Fall 1: „$\lambda = 0$" $\Rightarrow x_n - \lambda x_{n+1} = x_n = 0 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

Fall 2: „$\lambda \neq 0$" $\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_1 - \lambda x_2 = -\lambda x_2 = 0$ u.s.w. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

Also $\sigma_p(S) = \emptyset$

•) Nach Lemma 6.4.10 ist $\sigma(S)$ kompakt also abg. und wegen

$\mathbb{E} \subseteq \sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{E}}$ muss schon $\sigma(S) = \overline{\mathbb{E}}$ gelten und da

$\overline{\mathbb{E}} = \sigma(S) = \sigma_p(S) \dot\cup \sigma_c(S) \dot\cup \sigma_r(S) = \emptyset \dot\cup \sigma_c(S) \dot\cup \mathbb{E} \Rightarrow \sigma_c(S) = \partial\mathbb{E}$

•) Ang. $\exists \lambda \in \sigma_r(S^*) \Rightarrow \overline{\operatorname{ran}(S^* - \lambda I)} \neq X \Rightarrow \operatorname{ran}(S^* - \lambda I)^{\perp\perp} \neq \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \ker(S - \bar\lambda I)^{\perp} \neq \{0\}$

$\Rightarrow \bar\lambda \in \sigma_p(S) \neq \emptyset$ ↯ $\Rightarrow \sigma_r(S^*) = \sigma_p(S) = \emptyset$

•) $\|S^*\| = 1$ (überlegt man leicht) $\Rightarrow \sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{E}}$ es bleibt also $\sigma_c(S^*) = \partial\mathbb{E}$, weil $\sigma(S^*)$ kompakt

b) $\sigma_{app}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists$ Folge $((x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : \forall n \in \mathbb{N}.\ \|(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2 = 1,\ \|(S-\lambda I)(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$

Nach einem Korollar aus Teil 3 von Lecture 21 gilt $\partial\mathbb{E} = \sigma_p(S) \dot\cup \sigma_c(S) \subseteq \sigma_{app}(S) \subseteq \sigma(S)$

Sei also $\lambda \in \sigma_{app}(S)$

$\|S(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} - \lambda(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2 = |-\lambda x_{n_1}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - \lambda x_{n_{k+1}}|^2$

fehlt!

c) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$

Fall 1: „$\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{E}$" $= \lambda \in \rho(S) \Rightarrow \operatorname{ran}(S-\lambda) = \ell^2(\mathbb{N})$

$\Rightarrow \dim\left(\ell^2(\mathbb{N}) / \operatorname{ran}(S-\lambda)\right) = 0$

Fall 2: „$\lambda \in \mathbb{E}$" $\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(S^*)$, für $(x)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(S^*-\lambda)$ suche $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} x_1 \overline{y_n} = 0 \Leftrightarrow x_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \overline{y_n} = 0$

Fall 2.1: „$\lambda = 0$" fehlt!

Fall 2.2.: „$\lambda \neq 0$" fehlt!

24 / 1:* Sei S der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$, und sei $M \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ der Operator definiert als $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\frac{1}{n}\cdot\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Betrachte $T := MS$.

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ bestimme $\|T^k\|$ und berechne $\lim_{n\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$.

(b) Zeige dass T kompakt ist.

(c) Zeige dass $\sigma_p(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = \{0\}$.

Sei X eine Menge und ν ein Maß auf X. Hat man eine Funktion $k : X \times X \to \mathbb{C}$, so kann man die Abbildung K betrachten, die definiert ist als

$$(Kf)(x) := \int_X k(x,y) f(y)\, d\nu(y).$$

Man bezeichnet K als den *Integraloperator mit Kern k und Maß ν*.

IO / 1: Sei X eine Menge, μ ein σ-endliches Maß auf X, sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$, und betrachte den Integraloperator K mit Kern k und Maß μ.

Zeige, dass $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit $\|K\| \le \|k\|_{L^2(\mu\times\mu)}$. Zeige, dass seine Hilbertraumadjungierte $K^* \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ der Integraloperator mit Kern $k^*(x,y) := \overline{k(y,x)}$ ist.

•) $\|Kf\|^2_{L^2(\mu)} = \int_X \left| \int_X k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \le \int_X \left(\int_X |k(x,y)|\, |f(y)|\, d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) \le$

$\overset{\text{Hölder}}{\le} \int_X \int_X |k(x,y)|^2 d\mu(y) \int_X |f(y)|^2 d\mu(y)\, d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \|f\|^2_{L^2(\mu)} \int_{X\times X} |k(x,y)|^2 d\mu\times\mu(x,y) = \|f\|^2_{L^2(\mu)} \|k\|^2_{L^2(\mu\times\mu)}$

•) $(Kf, g) = \int_X \int_X k(x,y) f(y)\, d\mu(y)\, \overline{g(x)}\, d\mu(x) = \int_X \int_X k(x,y) f(y) \overline{g(x)}\, d\mu(y)\, d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=}$

$= \int_X f(y) \int_X k(x,y) \overline{g(x)}\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int_X f(x) \overline{\int_X \overline{k(y,x)}\, g(y)\, d\mu(y)}\, d\mu(x) =$

$= \int_X f(x) \overline{\int_X k^*(x,y)\, g(y)\, d\mu(y)}\, d\mu(x) = (f, K^* g)$

•) Die Beschränktheit von K^* folgt bereits aus Prop. 66.2 (i) mit $\|K^*\| = \|K\|$

IO / 2: Sei X eine Menge und μ ein σ-endliches Maß auf X. Zeige:

(a) Seien $a_i, b_i \in L^2(\mu)$, $i = 1, \ldots, n$. Setze $k(s,t) := \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)$ und betrachte den Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k. Dann ist $\dim \operatorname{ran} K \leq n$.

(b) Sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Dann ist der Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k und Maß μ kompakt.

a) Ang. $\exists\, g \in \operatorname{ran} K$ mit $Kf = g$, also

$$g(s) = Kf(s) = \int_X k(s,t) f(t)\, d\mu(t) = \int_X \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) f(t)\, d\mu(t) = \sum_{i=1}^n \int_X b_i(t) f(t)\, d\mu(t)\, a_i(s)$$

also $g \in \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow \dim \operatorname{ran} K \leq n$

b) $K_n f(s) = \int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)\right) f(t)\, d\mu(t)$ ist nach Prop. 6.5.4 (i) kompakt, da $\dim \operatorname{ran} K_n \leq n < \infty$

$$\|(K-K_n)f\|_2^2 = \int_X \left| \int_X k(s,t) f(t)\, d\mu(t) - \int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)\right) f(t)\, d\mu(t)\right|^2 d\mu(s) \leq$$

$$\leq \int_X \left(\int_X \left| k(s,t) - \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)\right| |f(t)|\, d\mu(t)\right)^2 d\mu(s) \leq$$

$$\leq \int_X \int_X \left| k(s,t) - \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)\right|^2 d\mu(t) \int_X |f(t)|^2 d\mu(t)\, d\mu(s) =$$

$$= \|f\|_2^2 \int_{X \times X} \left| k(s,t) - \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)\right|^2 d\mu\times\mu(s,t)$$

Nach Kusolitsch Lemma 13.37 gibt es Treppenfunktionen $t_n(s,t) = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{C_{ni}}(s,t)$ mit $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|t_n\|_{L_2(\mu\times\mu)} \leq \|k\|_{L_2(\mu\times\mu)}$ und $\lim_{n\to\infty} \|k - t_n\|_{L^2(\mu\times\mu)} = 0$

wobei $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{1, \ldots, m_n\}$: $C_{ni} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$

Falls wir zeigen könnten, dass auch Funktionen $t_n(s,t) = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{ni} \mathbb{1}_{A_{ni}}(s) \mathbb{1}_{B_{ni}}(t)$ für diese Approximation reichen wären wir fertig $A_{ni}, B_{ni} \in \mathfrak{S}$

IO / 3: Der *Volterra-Operator* ist der Integraloperator $(Vf)(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Zeige, dass $V \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ mit $\|V\| = \frac{2}{\pi}$, dass V kompakt ist, und dass

$$(V^* f)(x) = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

Zeige, dass $\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$.

•) $\|V \sin \circ \frac{\pi}{2} \mathrm{id}\|_2^2 = \int_0^1 \left| \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2} t)\, dt \right|^2 dx = \int_0^1 \left| \frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2} x) \right|^2 dx = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 |\cos(\frac{\pi}{2} x)|^2 dx = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 |\sin(\frac{\pi}{2} x)|^2 dx =$

$= \frac{4}{\pi^2} \|\sin \circ \frac{\pi}{2} \mathrm{id}\|_2^2 \Rightarrow \|V\| \geq \frac{2}{\pi}$

„$\leq$" fehlt!

•) Der Integraloperator hat den Kern $\mathbb{1}_{(0,x)}(t)$ und da es sich um eine positive Funktion handelt gilt mit Fubini
$\int_{(0,1)\times(0,1)} |\mathbb{1}_{(0,x)}(t)|^2 d\lambda^2(t,x) = \int_0^1 \int_0^x dt\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$, also $\mathbb{1}_{(0,x)}(t) \in L^2(\lambda^2, (0,1))$

Auch die anderen Voraussetzungen von IO/2 (b) sind erfüllt, also ist V kompakt.

•) Aus IO/1 wissen wir bereits K^* hat den Kern $\mathbb{1}_{(0,t)}(x) = \mathbb{1}_{(x,1)}(t)$

•) $Vf(x) - \mu f(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt - \mu f(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \mu f(x)$

Fall 1: „$\mu = 0$" $\Rightarrow f = 0$

Fall 2: „$\mu \neq 0$" Nach dem Hauptsatz für Lebesgue Integrale (Kusolitsch Satz 12.30) ist Vf absolut stetig, mit Kusolitsch Lemma 12.10 also insbesondere stetig, wegen $f = \frac{1}{\mu} Vf$ ist auch f stetig

Sei nun $g(t, y(t)) := \frac{f(t)}{\mu}$

Wir suchen also eine stetige Funktion f mit $\forall x \in (0,1)$: $f(x) = \int_0^x g(t, y(t))\,dt$

Nach Melenk Lemma 2.7. ist das äquivalent dazu ein stetig differenzierbares f zu finden mit $f' = g(t,f)$ und $f(0) = 0$

Aus ODE wissen wir bereits, dass dieses AWP eindeutig lösbar ist

$f' = \frac{f}{\mu}$ mit Ansatz $\chi(\beta) = \beta - \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{\mu}$ also ist für bel. $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = c e^{\frac{1}{\mu}x}$ eine Lösung mit $f(0) = 0$ folgt $c = 0$ also $f = 0$

Nun wissen wir also $\sigma_p(V) = \emptyset$

•) Mit Satz 6.5.12 (ii) gilt $\sigma(V) \setminus \{0\} = \sigma_p(V) \setminus \{0\} = \emptyset$ und da nach Satz 6.4.14 gilt, dass $\sigma(V) \neq \emptyset$ ist $0 \in \sigma(V)$, aber $0 \notin \sigma_p(V)$ also $0 \in \sigma_r(V) \vee 0 \in \sigma_c(V)$

•) Wie schon in Aufgabe 15/3 verwenden wir auch hier, dass die C_c^∞ Funktionen dicht in $L^2(0,1)$ liegen. Sei also $f:(0,1)\to\mathbb{C}$ aus C_c^∞. Wegen der Stetigkeit von f' ist $f'\in L^2(0,1)$ und es gilt $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt = Vf'(x)$, also $Vf'=f$ und damit ist $f\in \operatorname{ran}(V)$, also $C_c^\infty \subseteq \operatorname{ran}(V) \Rightarrow \overline{C_c^\infty} \subseteq \overline{\operatorname{ran}(V)} \Leftrightarrow L^2(0,1)\subseteq \overline{\operatorname{ran}(V)}$, also liegt $\operatorname{ran}(V)$ dicht in $L^2(0,1)$ und daher ist $0\in\sigma_c(V)$

IO / 4: Sei $k \in C([0,1]^2)$, und betrachte den Integraloperator $(Kf)(x) := \int_0^1 k(x,t)f(t)\,dt$. Zeige, dass $K \in \mathcal{B}(C([0,1]))$ mit

$$\|K\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le \|k\|_{C([0,1]^2)}.$$

Zeige, dass K kompakt ist.

•) $\|Kf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt\right| \le \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,|f(t)|\,dt \le \sup_{x\in[0,1]} \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le$

$\le \|f\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le \|f\|_\infty \|k\|_{C([0,1]^2)}$

•) $\forall x \in [0,1]: f_x(t) = \overline{k(x,t)} \left(\int_0^1 |k(x,s)|\,ds\right)^{-\frac{1}{2}}$ (o.B.d.A. $k(x,\cdot) \neq 0$)

$|Kf_x(x)| = \left|\int_0^1 k(x,t)\, f_x(t)\,dt\right| = \left(\int_0^1 |k(x,s)|\,ds\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 |k(x,t)|^2\,dt \ge \int_0^1 \sqrt{k(x,t)}\,|dt$

$\Rightarrow$ fehlt!

•) Sei $x \in [0,1]$ bel. und $f \in C[0,1]$ mit $\|f\|_\infty \le 1$

$|Kf(x)| = \left|\int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt\right| \le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \le \int_0^1 |k(x,t)|\,dt$

also $K(L) \subseteq C([0,1])$ punktweise beschränkt, wobei $L := \{f \in C[0,1] \mid \|f\|_\infty \le 1\}$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$|Kf(x) - Kf(y)| = \left|\int_0^1 (k(x,t) - k(y,t))\, f(t)\,dt\right| \le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t) - k(y,t)|\,dt$

Da alle Normen auf $[0,1]^2$ äquivalent sind erhält man mit der Stetigkeit von k bzgl. der Maximumsnorm

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+: \forall y \in [0,1]: |x-y| < \delta \Rightarrow |k(x,t) - k(y,t)| < \varepsilon$

also gilt für $|x-y| < \delta$

$|Kf(x) - Kf(y)| \le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t) - k(y,t)|\,dt < \varepsilon$

Damit ist $K(L)$ nun auch gleichgradig stetig

Nach dem Satz von Ascoli (Kaltenbäck Satz 12.13.10) ist $K(L)$ damit total beschränkt, Nach Blümlinger Satz 1.4.9 ist auch $\overline{K(L)}$ totalbeschränkt und da $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banachraum ist gilt nach Blümlinger Satz 1.4.10, dass $\overline{K(L)}$ kompakt ist.

IO / 5: Gibt es eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die der Gleichung

$$f(x) + \int_0^x e^{x\cos t} f(t)\, dt = x^2 + 1,\ x \in [0,1],$$

genügt? Falls ja, ist f eindeutig?

Hinweis. Ist der Punkt -1 im Spektrum des Operators ?

•) $T \in \mathcal{B}(C[0,1])$ mit $Tf(x) = \int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\,dt$; für $f \in C[0,1]$ bel. gilt

$K \in B(C[0,1])$: $Kf(x) = \int_0^1 e^{x\cos(t)} f(t)\,dt$ ist ein Operator der Form von IO/4

$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x e^{x\cos(t)} f(t)\,dt \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |e^{x\cos(t)} f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |e^{x\cos(t)}|\,dt = \|f\|_\infty \int_0^1 e^{\cos(t)}\,dt$

für $\|f\|_\infty \leq 1$ gilt

Kaltenbäck Bsp. 10.1.22

$\|Tf\|_\infty \leq$

$$f'(x) + e^{x\cos(x)} f(x) + \int_0^x \cos(t)\, e^{x\cos(t)} f(t)\,dt = 2x$$

$x\cos(t) = u \qquad \frac{du}{dx} = -\sin(t) \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin(t)}$