Serie 5

"Besprechung": Donnerstag, 23.4

Die Übungen finden nach Ostern "klassisch" statt, d.h. Sie laden Ihre Lösung hoch. In der Zoom-Übung sollten Ihre Lösung erklären können.

5.1. *Homogene ODEs* der Form $y' = f(y/t)$ können mit der Substition $y/t = x$ vereinfacht werden. Geben Sie die allgemeine Lösung an für:

a) $y' = (y/t)^2 + 2y/t$

b) $y' = y/t - \tan y/t$

Bemerkung: auf der Vorlesungshomepage gibt es ein Extrablatt zum Üben (freiwillig!) mit einer Liste von homogenen ODEs (samt Lösungen).

5.2. Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

a) Zeigen Sie: Ist $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}$ ein Eigenpaar von A, so sind die Funktionen $y(t) = e^{\lambda t} v$ und $e^{\overline{\lambda} t}\overline{v}$ Lösungen der ODE $y' = Ay$.

b) Nehmen Sie an, daß $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (komplex) diagonalisierbar ist. Geben Sie ein *reelles* Fundamentalsystem der ODE $y' = Ay$ an.

5.3. Welche der folgenden Funktionen kann eine Lösung einer ODE $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sein?

$$\begin{aligned} y(t) &= (3e^t + e^{-t}, e^{2t})^\top \\ y(t) &= (3e^t + e^{-t}, e^{t})^\top \\ y(t) &= (3e^t + e^{-t}, te^{t})^\top \\ y(t) &= (3e^t, t^2 e^{t})^\top \\ y(t) &= (e^t + 2e^{-t}, e^t + 2e^{-t})^\top \end{aligned}$$

5.4. Lösen Sie das AWP

$$y' = \begin{pmatrix} 1/t & -1/t^2 \\ 2 & -1/t \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.5. Geben Sie für die matrixwertige Funktion A aus Aufg. 4.5 alle Lösungen des folgenden Systems an:

$$y' = A(t)y + \begin{pmatrix} te^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix}$$

5.6. Geben Sie reelle Fundamentalsysteme für die Systeme $y' = A_i y$ an, wobei

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 6 & -17 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.7. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für die ODE $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$