Maß 1, Übung 2

March 2, 2020

1 Aufgabe 1

Lemma 1. *Für ein durchschnittstabiles Mengensystem* $\mathfrak{C}$ *gilt* $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$.

Beweis. Da $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ ein Dynkin-System ist gilt klarerweise $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$.

Für die andere Teilmengeninklusion wählen wir zuerst ein beliebiges $A \in \mathfrak{C}$ und definieren die Menge $M_A := \{C \subset \Omega \mid C \cap A \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})\}$. Nun gilt $\Omega \in M_A$, weil $\Omega \cap A = A \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$. Für $B, C \in M_A$ mit $B \subset C$ gilt $B \cap A, C \cap A \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ und $B \cap A \subset C \cap A$ und damit $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \ni (C \cap A) \cap (B \cap A)^C = C \cap A \cap (B^C \cup A^C) = (C \cap A \cap B^C) \cup (C \cap A \cap A^C) = (C \cap B^C) \cap A$, also $C \setminus B \in M_A$. Außerdem gilt für eine disjunkte Mengenfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_A$, dass $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \cap A \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ und damit auch $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \ni \sum_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap A$, also $\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \in M_A$. Insgesamt ergibt sich nun, dass M_A ein Dynkin-System ist und wegen der Durchschnittstabilität von $\mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{C} \subset M_A$ leicht erkennbar, also muss auch $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \subset M_A$ gelten.

Nun wollen wir $B \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ beliebig setzen und $M_B := \{C \subset \Omega \mid C \cap B \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})\}$. Aus dem eben gezeigten folgt nun $B \in M_A$ und damit auch $A \in M_B$. Da $A \in \mathfrak{C}$ beliebig war gilt also $\mathfrak{C} \subset M_B$. Genau wie oben kann man nun zeigen, dass M_B ein Dynkin-System ist und erhält damit $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \subset M_B$. Das bedeutet für ein beliebgiges $C \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$, dass $C \in M_B$ also $C \cap B \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$. Da $B, C \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ beliebig waren ist also $\mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ durchschnittstabil und damit nach [**?**, Satz 2.75] bereits eine Sigmaalgebra. Damit gilt auch $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \supset \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$. □

2 Aufgabe 2

Lemma 2. *Jeder endliche Ring* $\mathfrak{R}$ *wird von einem System von endlich vielen disjunkten Mengen erzeugt.*

Beweis. Zuerst wählen wir $x, y \in \mathfrak{R}$ beliebig und definieren

$$A_x := \bigcap_{A \in \mathfrak{R}: x \in A} A$$

und $\mathfrak{C} := \{A_x \mid x \in \Omega\}$. Es gilt $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{R}$, weil $\mathfrak{R}$ ein endlicher Ring ist und daher beliebige Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{R}$ endlich sind, also nach [**?**, Satz 2.1] auch die Durchschnitte wieder in $\mathfrak{R}$ liegen. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Der erste Fall ist $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Im zweiten Fall ist $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, das bedeutet $\exists z \in A_x \cap A_y$. Betrachtet man ein beliebiges $u \in A_x$, und nimmt an, u wäre nicht in A_z, so $\exists B \in \mathfrak{R} : z \in B \wedge u \notin B$. Es muss allerdings auch $x \in B$ gelten, weil sonst $z \notin A_x$ gelten würde. Also haben wir mit B eine Menge konstruiert, welche x enthält, aber u nicht, woraus wir den Widerspruch $u \notin A_x$ erhalten. Wir haben also $u \in A_x \Rightarrow u \in A_z$ bewiesen. Nun wollen wir noch die Rückrichtung beweisen und wählen dafür ein beliebiges $v \in A_z$. Unter der Annahme, v wäre nicht in A_x gäbe es also eine Menge $C \in \mathfrak{R}$ mit $x \in C \wedge v \notin C$. Wegen $z \in A_x$ gilt allerdings auch $z \in C$, womit wir auf den Widerspruch $v \notin A_z$ schließen können. Insgesamt haben wir also $u \in A_x \Leftrightarrow u \in A_z$ oder äquivalent dazu

$A_x = A_z$ gezeigt. Da y schließlich auch nur ein beliebiges Element aus Ω ist gilt auch $A_y = A_z$ und damit $A_x = A_y$.

Nun wissen wir also, dass alle Mengen aus $\mathfrak{C}$ disjunkt. Jetzt wollen wir noch $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{R}$ beweisen.

Offensichtlich gilt $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{R}$ und da $\mathfrak{R}$ ein Ring ist natürlich auch $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{R}$.

Wählen wir nun ein beliebiges $A \in \mathfrak{R}$, so lässt sich A darstellen als

$$\bigcup_{x \in A} A_x,$$

weil für $x \in A : A_x \subset A$. Es handelt sich nur um endliche Vereinigungen, da $\mathfrak{C}$ schließlich nur ein endliches Mengensystem ist. Da endliche Vereinigungen von Mengen eines Ringes wieder im Ring liegen, muss $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ und damit $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \supset \mathfrak{R}$.

□