Diskrete und Geometrische Algorithmen

2. Übung am 19.10.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 7. Zum asymptotischen Vergleich von Folgen:

(a) Vergleichen Sie das asymptotische Verhalten von $f(n) = n!$ und $g(n) = (n+2)!$, also überlegen Sie sich ob eine (welche) der Funktionen ein $o, \mathcal{O}, \omega, \Omega, \Theta$ der anderen Funktion ist.

(b) Vergleichen Sie das asymptotische Verhalten von $f(n) = n^{\log_2(4)}$ und $g(n) = 3^{\log_2(n)}$, also überlegen Sie sich ob eine (welche) der Funktionen ein $o, \mathcal{O}, \omega, \Omega, \Theta$ der anderen Funktion ist.

(c) Zeigen Sie an Hand der Defintion, dass für positive Funktionen f und g die Beziehung

$$\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$$

gilt.

(d) Gilt selbige Beziehung ebenfalls für $\min\{f(n), g(n)\}$?

(e) Folgt aus $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dass $2^{f(n)} = \mathcal{O}(2^{g(n)})$?

(f) Gilt für alle positiven Funktionen f die Beziehung $f(n) = \mathcal{O}(f(n)^2)$?

(g) Finden Sie eine Funktion f, sodass weder $f(n) = \mathcal{O}(n)$ noch $f(n) = \Omega(n)$ gilt.

Lösung.

(a)

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\overset{1.3.7}{\Longleftrightarrow} f \in o(g) \overset{1.3.1}{\subseteq} \mathcal{O}(g)$$
$$\overset{1.3.5}{\Longleftrightarrow} g \in \omega(f) \overset{1.3.1}{\subseteq} \Omega(f)$$

$$\Longrightarrow \frac{g(n)}{f(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{1.2.3}{\iff} g \notin \mathcal{O}(f) \overset{1.3.2}{\supseteq} o(f)\\
&\overset{1.2.2}{\iff} f \notin \Omega(g) \overset{1.3.2}{\supseteq} \omega(g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\implies g \notin \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f) \overset{2.1.1}{=} \Theta(f)\\
&\implies f \notin \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g) \overset{2.1.1}{=} \Theta(g)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\log_2 4 &= \log_2 2^2 = 2\\
\log_2 n &= \frac{\log_3 n}{\log_3 2}\\
2 - \frac{1}{\log_3 2} > 0 &\iff 2 > \frac{1}{\log_3 2} \iff \log_3 4 = \log_3 2^2 = 2\log_3 2 > 1 = \log_3 3^1
\end{aligned}
$$

$$
\implies \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n^{\log_2 4}}{3^{\log_2 n}} = n^2 / \left(3^{\log_3 n}\right)^{1/\log_3 2} = n^{2 - \frac{1}{\log_3 2}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \implies \frac{g(n)}{f(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0
$$

(b) ist also (a), verkehrt rum.

(c) Seien $c := 1/2$ und $d := 1$, dann gilt $\forall^\infty\, n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
c(f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} = &\frac{f(n) + g(n) + |f(n) - g(n)|}{2}\\
&\leq \frac{f(n) + g(n)}{2} + \frac{f(n) + g(n)}{2} = d(f(n) + g(n)).
\end{aligned}
$$

(d) Gegenbeispiel: Seien $f \equiv 0$ und $g \equiv 1$, dann gilt $\forall\, c, d > 0$:

$$
c\,\underbrace{(f(n) + g(n))}_{1} \not\leq \underbrace{\min\{f(n), g(n)\}}_{0} < d\,\underbrace{(f(n) + b(n))}_{1}.
$$

$$
\implies \min\{f, g\} \notin \Theta(f + g)
$$

(e) Gegenbeispiel: Seien $f(n) = n$ und $g(n) = -n$, für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen $|f| = |g|$ zwar $f \in \mathcal{O}(g)$, aber

$$
\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{2^{f(n)}}{2^{g(n)}}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{2^n}{2^{-n}}\right| = \limsup_{n\to\infty} 2^{2n} = \infty \iff f \notin \mathcal{O}(g).
$$

Gegenbeispiel: Seien $f = \log_2$ und $g = \log_4$, für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen $|f| = \log_2 4|g|$ zwar $f \in \mathcal{O}(g)$, aber

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{2^{f(n)}}{2^{g(n)}}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{2^{\log_2(n)}}{2^{\log_4(n)}}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2^{\frac{\log_2(n)}{\log_2(4)}}}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(2^{\log_2(n)})^{1/2}}\right|$$
$$= \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{n}{\sqrt{n}}\right| = \limsup_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$$

(f) Gegenbeispiel: Sei $f(n) = 1/n$.

$$\implies \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{f(n)^2}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/n^2}\right| = \limsup_{n\to\infty}|n| = \infty \iff f \notin \mathcal{O}(f^2)$$

(g) Beispiel:

$$f(n) := \begin{cases} 0, & n \in 2\mathbb{N}, \\ n^2, & n \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}$$

$$\implies \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{n}\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geq n}\left|\frac{f(k)}{k}\right| = 0 \iff f(n) \neq \Omega(n),$$
$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{n}\right| = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}\left|\frac{f(k)}{k}\right| = \infty \iff f(n) \neq \mathcal{O}(n)$$

Aufgabe 8. Zeigen Sie:

$$f(n) := 2^{2^{\lfloor \log_2(\log_2 n)\rfloor}} = \mathcal{O}(n)$$

und bestimmen Sie die größte Zahl $c > 0$, sodass

$$2^{2^{\lfloor \log_2(\log_2 n)\rfloor}} = \Omega(n^c)$$

Lösung.

1.

$$\implies \forall\, n \in \mathbb{N} : 2^{2^{\lfloor \log_2(\log_2 n)\rfloor}} \leq 2^{2^{\log_2(\log_2 n)}} = 2^{(\log_2 n)} = n = \mathcal{O}(n)$$

2. Wir behaupten, dass

$$1/2 = c := \sup C, \quad C := \left\{d > 0 : 2^{2^{\lfloor \log_2(\log_2 n)\rfloor}} = \Omega(n^d)\right\}.$$

„$\leq$“:

$$\implies \forall\, n \in \mathbb{N} : 2^{2^{\lfloor \log_2(\log_2 n)\rfloor}} \geq 2^{2^{\log_2(\log_2 n)-1}} = 2^{2^{\log_2(\log_2(n))}/2} = (2^{\log_2 n})^{1/2} = \sqrt{n} = \Omega(n^{1/2})$$
$$\implies 1/2 \in C$$

„≥“: Sei $d > 1/2$, dann ist $1/2 - d < 0$. Betrachte die Folge $a_n := 2^{2^n} - 1$.

$$
\begin{aligned}
&\implies f(a_n) = 2^{2^{\lfloor \log_2 (\log_2 (a_n))\rfloor}} = \underbrace{2^{2^{\left\lfloor \log_2 \left(\log_2 \left(2^{2^n}-1\right)\right)\right\rfloor}}}_{\overset{\text{scharf}}{<} 2^{2^{\lfloor \log_2 \log_2 2^{2^n}\rfloor}} = 2^{2^n}} = 2^{2^{n-1}} \\
&\implies \frac{f(a_n)}{a_n^d} = \frac{2^{2^{n-1}}}{(2^{2^n}-1)^d} = \frac{(2^{2^n})^{1/2}}{(2^{2^n}-1)^d} \le \frac{(2^{2^n})^{1/2}}{(2^{2^n}/2)^d} \le 2^d \frac{(2^{2^n})^{1/2}}{(2^{2^n})^d} = 2^d (2^{2^n})^{1/2-d} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
&\implies \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^d} = 0 \iff f(n) \neq \Omega(n^d) \\
&\implies d \notin C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9. In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Russisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Russisch, 4 Englisch und Russisch, 3 alle drei Sprachen. Wie groß ist n? (Hinweis: Prinzip von Inklusion und Exklusion.)

Lösung.

Satz 2.1 (Prinzip von Inklusion und Exklusion)**.** *Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen, dann ist*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i\in I} A_i|$$

Satz 2.17: Additionstheorem

$A_1, \dots, A_n$ seien Mengen aus einem Ring mit einem Inhalt μ, und $\mu(A_i)$ sei endlich für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_n) = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} \mu(\bigcap_{i \in I} A_i) =$$

$$\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) - \mu(A_1 \cap A_2) - \ldots \mu(A_{n-1} \cap A_n) + \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + + - - \ldots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$$

Abbildung 1: Grill - Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Wir definieren die Mengen D, E, R jeweils als die Menge aller Deutsch-, Englisch-, Russisch-Sprachler. Sei Ω die Menge aller Personen.

$$
\begin{aligned}
\implies |\Omega| &= \underbrace{|(D \cup E \cup R)^C|}_{0} + |D \cup E \cup R| \\
&= |D| + |E| + |R| - |D \cap E| - |E \cap R| - |R \cap D| + |D \cap E \cap R| = 10 + 9 + 9 - 5 - 7 - 4 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10. Gegeben sei die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphens $G = (V, E)$, welcher keine Schlingen (also Kanten $(v, v), v \in V$) und keine Mehrfachkanten enthält. Eine universelle Senke in solch einem gerichteten Graphen G ist ein Knoten s mit Hingrad $d^-(s) = |V| - 1$ und Weggrad $d^+(s) = 0$. Man zeige, dass es möglich ist, durch Untersuchen der Adjazenzmatrix A in Laufzeit $O(|V|)$ festzustellen, ob G solch eine universelle Senke enthält oder nicht.

Definition 2.1. Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ wobei V eine beliebige Menge ist und $E \subseteq V \times V$.

Definition 2.3. Die *Adjazenzmatrix* eines gerichteten Graphen $G = (\{1, \dots, n\}, E)$ ist die Matrix $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ wobei

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Lösung.
Offensichtlich sind universelle Senken (u.S.) eindeutig. Wir führen weiters folgende Übersetzungen durch:

- keine Schlingen:
  d.h. alle Diagonaleinträge sin 0
  d.h. $\forall\, i = 1, \dots, |V| : A_{ii} = 0$
- keine Mehrfachkanten:
  d.h. gespiegelte 1-Einträge sind 0-Einträge
  d.h. $\forall\, i, j = 1, \dots, |V| : A_{ij} = 1 \implies A_{j,i} = 0$
- s u.S.
  d.h. s-te Zeile hat nur 0er & s-te Spalte hat genau einen 0er
  d.h. $A_s^T = 0 \wedge A_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{(s-1)\text{-mal}}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{|V|\text{-mal}})^T$

	1	2	3	$\cdots$	$s-1$	s	$s+1$	$\cdots$	$\lvert V\rvert-2$	$\lvert V\rvert-1$	$\lvert V\rvert$
1	0					1					
2		0				1					
3			0			1					
$\vdots$				$\ddots$		$\vdots$					
$s-1$					0	1					
s	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	0	0
$s+1$						1	0				
$\vdots$						$\vdots$		$\ddots$			
$\lvert V\rvert-2$						1			0		
$\lvert V\rvert-1$						1				0	
$\lvert V\rvert$						1					0

Prozedur Universelle Senke(G)
$(V, E) := G$
$A :=$ Adjazenzmatrix(G)
$i := 1$
$j := 2$
Solange $\max\{i, j\} \leq |V|$
Wenn $A_{ij} = 0$
$\Longrightarrow$ j-te Spalte hat mehr als (nicht genau) einen 0er!
$\Longrightarrow$ j keine u.S.
$s := i$
$j := \max\{i, j\} + 1$
Sonst
$\Longrightarrow$ $A_{ij} = 1$
$\Longrightarrow$ i-te Zeile hat nicht nur 0er!
$\Longrightarrow$ i keine u.S.
$s := j$
$i := \max\{i, j\} + 1$
Ende Wenn
Ende Solange
Für $r := 1, \ldots, |V|$
Wenn $r \neq s$
$\Longrightarrow$ (r, s) kein Diagonaleintrag
Wenn $A_{rs} = 0$
$\Longrightarrow$ s-te Spalte hat mehr als (nicht genau) einen 0er!
$\Longrightarrow$ s keine u.S.
$s :=$ NIL
Ende Prozedur
Sonst
$\Longrightarrow$ $A_{rs} = 1$
$\Longrightarrow$ $A_{sr} = 0$
Ende Wenn
Sonst
$\Longrightarrow$ $r = s =: t$
$\Longrightarrow$ (t, t) Diagonaleintrag
$\Longrightarrow$ $A_{tt} = 0$
Ende Wenn
Ende Für
$\Longrightarrow \forall\, r = 1, \ldots, |V| : (A_{sr} = 0) \wedge (s \neq r \implies A_{rs} = 1)$
$\Longrightarrow$ s-te Zeile hat nur 0er & s-te Spalte hat genau einen 0er
$\Longrightarrow$ s u.S.
Ende Prozedur

Lösung. Wir bemerken, dass wir das Problem eine universelle Senke zu finden, reformulieren können zu: Finde Index i, sodass die i-te Zeilensumme von A gleich 0 und die i-te Spaltensumme gleich $|V|-1$ ist.
Anschaulich gesprochen, wird bei jedem Matrixeintrag außerhalb der Diagonale den wir überprüfen ein Senkenkandidat ausgeschlossen. Das liegt daran, dass für $A[i,j]=1$ für i die Bedingung, dass die Zeilensumme 0 sein muss verletzt wird, und für $A[i,j]=0$ für j die Bedingung, dass die Spaltensumme gleich $|V|-1$ sein muss verletzt wird. Damit bleibt uns nach $n-1$ Überprüfungen nur noch 1 möglicher Senkenkandidat übrig. Von diesem müssen wir noch überprüfen, ob er tatsächlich die Senkenbedingung erfüllt, was in maximal $2n$ Überprüfungen gelingt.
Weiter unten ist ein Algorithmus ausgeführt, der diese eben beschriebenen Schritte präzisiert.

```
Prozedur Finde universelle Senke(A)
  n := A.Zeilenanzahl
  Senke := NIL
  i := 1
  j := 2
  s := 1
  Solange max{i, j} ≤ n :
    Wenn A[i, j] = 0 :
      j := max{i, j} + 1
      s := i
    Ende Wenn
    Wenn A[i, j] = 1 :
      i := max{i, j} + 1
      s := j
    Ende Wenn
  Ende Solange
  Für k = 1, ..., n :
    Wenn k ≠ s :
      Wenn A[k, j] = 0 :
        s := NIL
      Ende Wenn
    Ende Wenn
  Ende Für
Ende Prozedur
```

Der Solange-Block wird maximal $|V|$-Mal ausgeführt, ebenso die Für-Schleife weiter unten, insgesamt entscheidet der Algorithmus also in $\mathcal{O}|V|$ Schritten, ob es eine universelle Senke gibt.

Lösung. Alternativer Code:

```
Prozedur UNIVERSELLE SENKE(G)
  (V, E) := G
  A := ADJAZENZMATRIX(G)
  i := 1
  j := 2
  s := 1
  Solange j ≤ |V|
    Wenn A_ij = 0
      j := j + 1
    Sonst
      s := j
      i, j := j, j + 1
    Ende Wenn
  Ende Solange
  Für r := 1, ..., |V| und r ≠ s
    Wenn A_rs = 0
      s := NIL
      Ende Prozedur
    Ende Wenn
  Ende Für
Ende Prozedur
```

Aufgabe 11. Sei G der vollständige Graph auf 6 Knoten (also eine Kante zwischen je 2 von ihnen). Jede Kante ist rot oder blau gefärbt. Zeigen Sie: Es existiert in dem Graphen ein Dreieck (induzierter Teilgraph mit 3 Knoten) mit nur roten Kanten oder ein Dreieck mit nur blauen Kanten.
(Hinweis: Schubfachprinzip)

> Das *Schubfachprinzip* (engl. *pigeonhole principle*) besagt Folgendes: Seien A und B endliche Mengen mit $|A| > |B|$, dann existiert keine injektive Funktion $f : A \to B$. Es kann mit einem einfachen Induktionsargument bewiesen werden. Ein Beispiel für seine Anwendung liefert der folgende Satz.

Abbildung 2: Schubfachprinzip

Lösung. Bezeichne die Knoten von G mit A, B, C, D, E, F.
Vom Knoten A gehen insgesamt 5 Kanten aus, also gibt es mindestens 3 Kanten, die die gleiche Farbe haben.
O.b.d.A. seien die Kanten $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ allesamt rot.
Nun betrachte die Kanten $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{BD}$.
Fall 1: Alle diese Kanten sind blau. Dann besteht das Dreieck $\overline{BCD}$ nur aus blauen Kanten.
Fall 2: Es existiert eine rote Kante unter den dreien: Dann besteht eines der Dreiecke $\overline{ABC}, \overline{ABD}, \overline{ACD}$ nur aus roten Kanten.

Aufgabe 12. Beweisen Sie, dass es unter je neun Punkten in einem Würfel der Kantenlänge 2 stets zwei Punkte gibt, deren Abstand höchstens $\sqrt{3}$ ist.
(Hinweis: Schubfachprinzip)

Lösung. Man partitioniere den Würfel W in 8 Teilwürfel aus $\mathcal{W} := \{W_{abc} : a, b, c = 1, 2\}$ der Kantenlänge 1.

$$\implies W = \sum_{a,b,c=1}^{2} W_{abc}$$

Sei $P := \{p_1, \dots, p_9\} \subseteq W$ die Menge der 9 Punkte. Nun ist aber $|P| = 9 > 8 = |\mathcal{W}|$. Laut dem Schubfachprinzip existiert daher keine injektive Funktion $P \to \mathcal{W}$. Das bedeutet, es gibt einen Teilwürfel $\widetilde{W} \in \mathcal{W}$, in welchem mindestens zwei verschiedene Punkte $\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2} \in P \cap \widetilde{W}$ zu finden sind. Der maximale Abstand zweier Punkte im Einheitswürfel (also auch in $\widetilde{W} \subseteq \mathbb{R}^3$) ist $\operatorname{diam}_2 \widetilde{W} = \sqrt{3}$. Insbesondere, ist daher auch $d_2(\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}) \leq \sqrt{3}$.