Satz 2.3.9 Sei $(m_i)_{i \in I}$ eine Familie in V. Dann ist die Hülle $[(m_i)_{i \in I}]$ gleich dem Durchschnitt jener Unterräume von V, welche die Menge $\{m_i : i \in I\}$ enthalten.

Beweis. (a) Sei $S \subset Sub(V)$ die Menge jener Unterräume von V, welche $\{m_i : i \in I\}$ enthalten. $Sub(V)$ ist die Menge aller Unterräume von V. $Sub(V) \subseteq \mathcal{P}(V)$. Wegen $V \in S$ gilt $S \neq \emptyset$. Einer der trivialen Unterräume. Nach Satz 2.3.8 ist $X := \bigcap_{U \in S} U$ ein Unterraum; „Der Durchschnitt ... von Unterräumen ... ist ... ein Unterraum..." er hat die Eigenschaft

$$\underbrace{\{m_i \mid i \in I\}}_{A} \subset \underbrace{X}_{B} \subset \underbrace{U}_{C} \text{ für alle } U \in S. \qquad (2.11)$$

Alle Elemente aus A sind in allen Mengen C, also auch im Durchschnitt alles C's; B. Letztere Inklusion ist sogar noch klarer.

(b) Der Unterraum $[(m_i)_{i \in I}]$ gehört zu S, da sich für alle $i \in I$ der Vektor m_i als Linearkombination $m_i = 1 m_i \in [(m_i)_{i \in I}]$ schreiben lässt. Die Hülle ist, laut Satz 2.3.6, ein UR. Ersteres folgt dann aus $\{m_i \mid i \in I\} \subseteq [(m_i)_{i \in I}]$. Somit gilt $X \subset [(m_i)_{i \in I}]$ nach (2.11). Das war „$\subseteq$".

(c) Sämtliche Vektoren der Familie $(m_i)_{i \in I}$ liegen gemäß (2.11) in X. Das wird „$\supseteq$". Da eben nur als Menge, aber egal. Da X ein Unterraum ist, enthält X auch alle Linearkombinationen von $(m_i)_{i\in I}$. Dazu muss natürlich die vorherige Bedingung erfüllt sein. Man kann zweiteres auch durch iteratives anwenden des UR-Kriteriums, Eigenschaft 2, also $\forall a, b \in U$ $\forall x \in K: a + bx \in U$, erklären. Das heißt $[(m_i)_{i\in I}] \subset X$. ... $\square$