8.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $\omega > s(A) := \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $M \geq 1$, so daß

$$|e^{tA}| \leq M e^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

Warum gilt diese Aussage nicht, wenn lediglich $\omega \geq s(A)$ gefordert wird?

Sei $A = VJV^{-1}$ mit V regulär und J Jordansche Normalform

mit $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \dots, J_n)$ und J_i die Jordan-Kästchen zu den zugehörigen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Wir denken an die Zeilensummennorm:

$$\|e^{tA}\| = \|Ve^{tJ}V^{-1}\| \leq \|V\|\|V^{-1}\| \|e^{tJ}\| = \|V\|\|V^{-1}\| \|\operatorname{diag}(e^{tJ_1}, \dots e^{tJ_n})\| =$$

$$= \|V\|\|V^{-1}\| \max\{\|e^{tJ_1}\|, \dots, \|e^{tJ_n}\|\} =: X$$

Nach Lemma 3.16 ist

$$\|e^{tJ_k}\| = |e^{\lambda_k t}| \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\|}_{z_k(t) :=}, \text{ also}$$

also $\|e^{tJ_k}\| = |e^{\lambda_k t}| z_k(t) = |e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}| \underbrace{|e^{i\operatorname{Im}(\lambda_k)t}|}_{=1} z_k(t) = |e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}| z_k(t) \leq e^{\omega t} z_k(t)$

und wir erhalten

$X \leq \|V\|\|V^{-1}\| \max\{z_k(t) \mid k \in \{1, \dots, n\}\} e^{\omega t}$

Es ist $1 = \|\operatorname{id}\| = \|VV^{-1}\| \leq \|V\|\|V^{-1}\|$ und für $t \geq 0$ $z_k(t) \geq 1$

also $M := \|V\|\|V^{-1}\| \max\{z_k(t) \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \geq 1$ und

$\forall t \geq 0: \|e^{tA}\| \leq M e^{\omega t}$

Gegenbsp.:

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, EW: 1, $\omega = 1$ $\qquad e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\forall M \in [1, \infty[: \exists t \in [0, \infty[: \|e^{tA}\| = |1+t| e^t > M e^t$

8.2. Betrachten Sie eine skalare ODE $y' = f(t, y)$ mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz im 2. Argument. Sei $t \mapsto y(t)$, $t \geq t_0$ die Lösung des AWP $y(t_0) = y_0$. Es seien $t \mapsto y_1(t)$ und $t \mapsto y_2(t)$ zwei differenzierbare Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$y_1(t_0) \leq y_0, \quad y_1' \leq f(t, y_1),\ t \geq t_0$$

und

$$y_2(t_0) \geq y_0, \quad y_2' \geq f(t, y_2),\ t \geq t_0.$$

a) Zeigen Sie, dass für $t \geq t_0$ gilt

$$y_1(t) \leq y(t) \leq y_2(t).$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.3 und die stetige Abhängigkeit von AWPs von der rechten Seite f.

b) Zeigen Sie damit, dass für die Lösung des AWP

$$y' = -y^3 + \sin t, \quad y(0) = y_0, \quad -2 \leq y_0 \leq 2$$

gilt $-2 \leq y(t) \leq 2$ für $t \geq 0$.

c) Zeigen Sie, dass diese ODE eine 2π periodische Lösung hat. *Hinweis:* Brouwerscher Fixpunktsatz

a) $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. $\quad |f(t, y_2) - f(t, z_2)| \leq L\,|y_2 - z_2| < \varepsilon \Leftarrow |y_2 - z_2| < \frac{\varepsilon}{L}$

$0 < \delta := \frac{\varepsilon}{2L} < \frac{\varepsilon}{L}$ und $z_2 := y_2 + \delta$, damit ist $z_2(t_0) = y_2(t_0) + \delta > y_0$

$z_2' = y_2' \geq f(t, y_2) > f(t, y_2 + \delta) - \varepsilon = f(t, z_2) - \varepsilon$

Sei nun z Lsg. von $z' = f(t, z) - \varepsilon$

Nach Aufgabe 3.3 gilt $y_1 - \frac{\varepsilon}{2L} = z_1 < z < z_2 \leq y_2 + \frac{\varepsilon}{2L}$

Mit Satz 4.1:

$y' = f(t, y)$ und $|z' - f(t, z)| = |f(t, z) - \varepsilon - f(t, z)| \leq \varepsilon$

also $|y(t) - z(t)| \leq \underbrace{|y(t_0) - z(t_0)|}_{= \delta = \frac{\varepsilon}{2L}} e^{L|t - t_0|} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L|t - t_0|} - 1\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

wir erhalten $\lim_{\varepsilon \to 0} z = y$

insgesamt $y_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} y_1 - \frac{\varepsilon}{2L} \leq \overbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} z}^{= y} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} y_2 + \frac{\varepsilon}{2L} = y_2$

also $\quad y_1 \leq y \leq y_2$

b) $y' = -y^3 + \sin(t)$, $y(0) = 0$ mit $-2 \leq y_0 \leq 2$

$y_1 := -2$ und $\forall t \in \mathbb{R}: y_1'(t) = 0 \leq 8 + \sin(t) = -(-2)^3 + \sin(t) = -y_1^3 + \sin(t)$

$y_2 := 2$ und $\forall t \in \mathbb{R}: y_2'(t) = 0 \geq -8 + \sin(t) = -2^3 + \sin(t) = \cancel{-}\,y_2^3 + \sin(t)$

nach (a) gilt $\forall t \geq 0: \quad -2 = y_1 \leq y \leq y_2 = 2$

c) $\varphi: \begin{cases} [-2, 2] \to [-2, 2] \\ y_0 \mapsto y_{0, y_0}(2\pi) \end{cases}$ stetig nach Satz 4.6

Mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz gilt:

$\exists y_1 \in [-2, 2]: \ y_{0, y_1}(0) = y_1 = y_{0, y_1}(2\pi)$

$\tilde{y}(t) := y_{0, y_1}(2\pi + t)$ mit $\tilde{y}'(t) = y_{0, y_1}'(t + 2\pi) = -\left(y_{0, y_1}(t + 2\pi)\right)^3 + \sin(t) = -(\tilde{y}(t))^3 + \sin(t)$

und $\tilde{y}(0) = y_{0, y_1}(2\pi) = y_1$ und da Lsg. des AWP eindeutig sind gilt $\forall t: y_{0, y_1}(t + 2\pi) = \tilde{y}(t) = y_{0, y_1}(t)$

8.3. Eine skalare ODE der Form

$$y' = g(t)y + h(t)y^2 + k(t)$$

heißt Riccatigleichung[1]. Sei y_1 eine Lösung dieser Gleichung.

a) Überprüfen Sie, daß jede Lösung x der Bernoullischen ODE

$$x' = (g(t) + 2y_1(t)h(t))x + h(t)x^2$$

eine Lösung $y = y_1 + x$ der Riccatischen Gleichung erzeugt.

b) Geben Sie die allg. Lösung der ODE

$$y' = 3\left(2(t+1)^2 - \frac{1}{t+1}\right)y - 3(t+1)y^2 - 3(t+1)^3 + 4$$

an. *Hinweis:* versuchen Sie ein lineares Polynom als spezielle Lösung.

a)

$$y' = y_1' + x' = gy_1 + hy_1^2 + k + gx + 2y_1hx + hx^2 = g(y_1+x) + h(y_1+x)^2 + k = gy + hy^2 + k$$

b) „spezielle Lsg.:" $y_1(t) = at+b$, man sieht $y_1(t) = t+1$ ist Lsg.:

$$y_1'(t) = 1 = 6(t+1)^3 - 3 - 3(t+1)^3 - 3(t+1)^3 + 4 =$$

$$= 3\left(2(t+1)^2 - \frac{1}{t+1}\right)(t+1) - 3(t+1)(t+1)^2 - 3(t+1)^3 + 4 = f(t, y_1)$$

Betrachte Bernoullische ODE

$$x' = \left(3\left(2(t+1)^2 - \frac{1}{t+1}\right) - 6(t+1)(t+1)\right)x - 3(t+1)x^2 = -\frac{3}{t+1}x - 3(t+1)x^2$$

Von Aufgabe 6.7. wissen wir schon die Substitution $z = x^{-1}$

$$z' = -x^{-2}x' = -x^{-2}\left(-\frac{3}{t+1}x - 3(t+1)x^2\right) = \frac{3}{t+1}x^{-1} + 3(t+1) = \frac{3}{t+1}z + 3(t+1)$$

homogene Lsg.: $\frac{z_h'}{z_h} = \frac{3}{t+1} \rightsquigarrow \ln(z_h) = 3\ln(t+1) \rightsquigarrow z_h(t) = C(t+1)^3$

part. Lsg. $z_p(t) = (t+1)^3 \int_0^t (s+1)^{-3} 3(s+1)\,ds = 3(t+1)^3 \int_0^t (s+1)^{-2}\,ds = 3(t+1)^3(1-(t+1)^{-1}) = 3(t+1)^3 - 3(t+1)^2$

Also: $z(t) = z_h(t) + z_p(t) = C(t+1)^3 + 3((t+1)^3 - (t+1)^2)$

$$\Rightarrow x(t) = (z(t))^{-1} = \frac{1}{(C+3)(t+1)^3 - (t+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + x(t) = t+1 + \frac{1}{(C+3)(t+1)^3 - (t+1)^2}$$

8.4. (Gradientensysteme)

a) Sei $d = 1$ und $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Zeigen Sie: die autonome ODE $y' = f(y)$ hat eine Ljapunovfunktion. Ist die von Ihnen angegebene Funktion eine strikte Ljapunovfunktion?

b) Sei $d > 1$ und $f \in C(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Die ODE $y' = f(y)$ heißt heißt Gradientensystem, falls es $F \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ gibt mit $\nabla F = f$. Zeigen Sie: Die ODE hat eine strikte Ljapunovfunktion.

a) ges.: $V \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $V' f \leq 0$

$V(y) := -\int_0^y f(x)\,dx \Rightarrow V'(y) = -f(y)$ nach dem Hauptsatz d. Integralrechnung (vgl. Kaltenbäck Satz 8.4.5)

$\forall y \in \mathbb{R} \setminus f^{-1}(0): V'(y) f(y) = -(f(y))^2 < 0$, nach Satz 5.13 ist also V eine strikte Ljapunovfunktion

b) $V \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$: $V := -F \Rightarrow \nabla V = -\nabla F = -f$

$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^d \setminus f^{-1}(0): \nabla V(y) \cdot f(y) = -(f(y) \cdot f(y)) = -\|f(y)\|_2^2 < 0$

Also ist V strikte Ljapunovfunktion.

8.5. Sei $H : C^2(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{R})$. Das zu H gehörende Hamiltonsche System ist gegeben durch

$$\begin{aligned} q' &= \partial_p H(q,p) \\ p' &= -\partial_q H(q,p) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß H eine Ljapunovfunktion für das System ist. Geben Sie an, welche Ruhelagen des Systems stabil und welche asymptotisch stabil sind.

Geben Sie die stabilen und asymptotisch stabilen Ruhelagen für die konkrete Funktion

$$H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + (1-\cos q)$$

an.

$$f : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d} : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial_p H\binom{q}{p} \\ -\partial_q H\binom{q}{p} \end{pmatrix}$$

1) „Ljapunovfunktion":

$\binom{q}{p} \in \mathbb{R}^{2d}$: $\quad \nabla H\binom{q}{p} \cdot f\binom{q}{p} = \begin{pmatrix} \partial_q H\binom{q}{p} \\ \partial_p H\binom{q}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_p H\binom{q}{p} \\ -\partial_q H\binom{q}{p} \end{pmatrix} = \partial_q H\binom{q}{p} \cdot \partial_p H\binom{q}{p} - \partial_p H\binom{q}{p} \cdot \partial_q H\binom{q}{p} = 0 \leq 0$

Mit Satz 5.13 ist H also Ljapunovfunktion

2) $\binom{a}{b}$ Ruhelage $\Leftrightarrow f\binom{a}{b} = 0 \Leftrightarrow \partial_p H\binom{a}{b} = 0 \wedge \partial_q H\binom{a}{b} = 0 \Leftrightarrow \nabla H\binom{a}{b} = \binom{0}{0}$

$D^2 H = \begin{pmatrix} \partial_q^2 H & \partial_q \partial_p H \\ \partial_p \partial_q H & \partial_p^2 H \end{pmatrix}$; $D^2 H\binom{a}{b}$ pos. def. $\Leftrightarrow$

$\forall \binom{q}{p} \in \mathbb{R}^{2d} : (q,p) \begin{pmatrix} \partial_q^2 H\binom{a}{b} & \partial_q \partial_p H\binom{a}{b} \\ \partial_q \partial_p H\binom{a}{b} & \partial_p^2 H\binom{a}{b} \end{pmatrix} \binom{q}{p} > 0 \Leftrightarrow (q,p) \begin{pmatrix} \partial_q^2 H\binom{a}{b} q + \partial_q \partial_p H\binom{a}{b} p \\ \partial_q \partial_p H\binom{a}{b} q + \partial_p^2 H\binom{a}{b} p \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q \cdot \partial_q^2 H\binom{a}{b} q + q \cdot \partial_q \partial_p H\binom{a}{b} p + p \cdot \partial_q \partial_p H\binom{a}{b} q + p \cdot \partial_p^2 H\binom{a}{b} p > 0$

3) $H(q,p) = \frac{1}{2} q^2 + (1 - \cos(p))$

$$f\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_p H(q,p) \\ -\partial_q H(q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(p) \\ -q \end{pmatrix}$$

Ruhelagen: $f\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(p) = 0 \wedge -q = 0 \Leftrightarrow p \in \pi \mathbb{Z} \wedge q = 0$

$Df\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(p) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Fall 1: $p \in 2\pi\mathbb{Z} \wedge q = 0$: $Df\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 \rightsquigarrow \chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

keine Aussage, betrachte stattdessen

$D^2 H\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist pos. def. also $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ striktes Minimum von H, nach Satz 5.19 sind also die Ruhelagen $\begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ stabil.

Fall 2: $p \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \wedge q = 0$: $Df\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi(\lambda) = \lambda^2 - 1 \longrightarrow \chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

Nach Satz 5.8 sind die Ruhelagen also instabil.

8.6. Das folgende Beispiel zeigt, daß man im Fall nichtautonomer linearer ODEs

$$y' = A(t)y$$

von den Eigenwerten der Matrix $A(t)$ **nicht** auf die Stabilität der Ruhelage $y = 0$ schließen kann. Es sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1+\frac{3}{2}\cos^2 t & 1-\frac{3}{2}\sin t\cos t \\ -1-\frac{3}{2}\sin t\cos t & -1+\frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) die Eigenwerte $\lambda_{1,2}(t)$ von $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ haben negativen Realteil.

b)

$$y(t) = e^{t/2}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

ist eine Lösung der ODE.

c) Die Lösung $y = 0$ ist instabil.

a) $\chi(\lambda) = (-1+\frac{3}{2}\cos^2-\lambda)(-1+\frac{3}{2}\sin^2-\lambda) - (1-\frac{3}{2}\sin\cos)(-1-\frac{3}{2}\sin\cos) =$

$= 1 - \frac{3}{2}\sin^2 + \lambda - \frac{3}{2}\cos^2 + \frac{9}{4}\cos^2\sin^2 - \lambda\frac{3}{2}\cos^2 + \lambda - \lambda\frac{3}{2}\sin^2 + \lambda^2 - (-1 \cancel{- \frac{3}{2}\sin\cos} \cancel{+ \frac{3}{2}\sin\cos} \cancel{+ \frac{9}{4}\sin^2\cos^2}) =$

$= 2 - \frac{3}{2} + 2\lambda - \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$

also: $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{8}{4}}}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda = -\frac{1}{4} < 0$

b)

$$y'(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}\sin(t) - \frac{1}{2}e^{t/2}\cos(t) \\ e^{\frac{t}{2}}\cos(t) + \frac{1}{2}e^{t/2}\sin(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t) \\ \cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) - \frac{3}{2}\cos(t)(\sin^2(t)+\cos^2(t)) \\ \cos(t) - \sin(t) + \frac{3}{2}\sin(t)(\sin^2(t)+\cos^2(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin(t) - \frac{3}{2}\sin^2(t)\cos(t) + \cos(t) - \frac{3}{2}\cos^3(t) \\ \cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)\cos^2(t) - \sin(t) + \frac{3}{2}\sin^3(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} -(-1+\frac{3}{2}\cos^2(t))\cos(t) + (1-\frac{3}{2}\sin(t)\cos(t))\sin(t) \\ -(-1-\frac{3}{2}\sin(t)\cos(t))\cos(t) + (-1+\frac{3}{2}\sin^2(t))\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+\frac{3}{2}\cos^2(t) & 1-\frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) \\ -1-\frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) & -1+\frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = A(t)y(t)$$

c) Wir fassen $y = 0$ als Lsg. des AWP: $y' = A(t)y \wedge y(0) = 0 =: y_0$ auf

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. (Existenz eines reicht) und $\delta \in \mathbb{R}^+$ bel.

$z(t) = \frac{\delta}{2}e^{\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ löst das AWP $z' = A(t)z \wedge z(0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} =: z_0$

mit $\|z_0 - y_0\|_2 = \|z_0\|_2 = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow z_0 \in B_\delta(y_0)$

$\|z(t) - y(t)\|_2^2 = \|z(t)\|_2^2 = \frac{\delta^2}{4}e^t(\cos^2(t)+\sin^2(t)) = \frac{\delta^2}{4}e^t$

$\Rightarrow \|z(t)-y(t)\|_2 = \frac{\delta}{2}e^{\frac{t}{2}} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

also $\exists s \in [0,\infty[: \|z(s)-y(s)\| \geq \varepsilon$

Damit ist $y = 0$ instabil.