

ÜBUNGEN ZU “PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN” WS 2020
BLATT 3 (15. 10. 2020), SKRIPTUM BIS ABSCHNITT 3.2

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Zeigen Sie:

(i) Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sodass

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) f_i(x).$$

(ii) Gilt $xT = 0$ für eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, so ist $T = c\delta$ für eine Konstante c
(Hinweis: verwenden Sie (i) und $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \chi\varphi \rangle$ mit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi = 1$ auf $\text{supp } \varphi$).

(iii) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u' = 0$ impliziert $u = \text{const.}$

(iv) Für jedes $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ existieren Konstanten c_0, c_1 sodass

$$f\delta' = c_0\delta + c_1\delta'.$$

2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

(i) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sin \lambda x$,

(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin \lambda x}{x}$,

und zeigen Sie, dass

(iii) $\lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a}{x^2 + a^2} = \pi\delta$.

3. (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \ln |x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine reguläre Distribution definiert, die punktweise Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ \text{undefiniert} & x = 0 \end{cases}$$

jedoch nicht.

(ii) Es bezeichne $\text{pv}(\frac{1}{x})$ die Distribution

$$\langle \text{pv} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \text{pv}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$.

(iii) Überprüfen Sie, dass $(\ln|x|)' = \text{pv}(\frac{1}{x})$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt.

4. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = \text{pv} \left(\frac{1}{x} \right) + \pi i \delta.$$

5. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt von *endlicher Ordnung* wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt sodass man für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ eine Konstante $C > 0$ finden kann, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ gilt:

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{C^m(K)}.$$

In diesem Fall heißt m die Ordnung von u . Gibt es kein solches m , sagt man, dass u unendliche Ordnung hat.

Bestimmen Sie die Ordnung folgender Distributionen ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen):

- (i) $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,
 - (ii) $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,
 - (iii) $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $x_0 \in \Omega$,
 - (iv) $\varphi \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \partial^{\alpha_j} \varphi(x_j)$ für eine Folge $(x_j)_j$ in Ω ohne Häufungspunkt und $\alpha_j \in \mathbb{N}_0^n$.
6. Eine Distribution heißt *positiv* wenn $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \geq 0$ gilt.
- (i) Zeigen Sie, dass jede positive Distribution Ordnung 0 hat.
 - (ii) Zeigen Sie, dass folgende Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nicht positiv ist:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx.$$

7. Der *Träger* einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist das Komplement der größten offenen Menge, auf der T verschwindet:

$$\text{supp } T = \Omega \setminus \bigcup \{U \subseteq \Omega \text{ offen} \mid T \text{ verschwindet auf } U\}.$$

Zeigen Sie:

- (i) Für $f \in C(\Omega)$ ist der distributionelle Träger gleich dem üblichen Träger der Funktion f .
 - (ii) Ist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution von endlicher Ordnung m und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion deren Ableitungen $\partial^\alpha \psi$ für $|\alpha| \leq m$ verschwinden, dann ist $\langle T, \psi \rangle = 0$.
 - (iii) Gilt $\text{supp } T \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$, dann folgt $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
 - (iv) Gilt $fT = 0$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$, dann folgt $\text{supp } T \subseteq \{x : f(x) = 0\}$.
8. Zeigen Sie, dass die Faltung

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) dy$$

für $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist, wenn $\text{supp } f$ und $\text{supp } g$ beide nach unten (oder beide nach oben) beschränkt sind. Berechnen Sie dann $f * f * \dots * f$ ($n \in \mathbb{N}$ Faktoren) für $f(t) = H(t)$.