Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 7

Übungstermin: 13.5.2020 6. Mai 2020

Aufgabe 31:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' &= u + v \\ \epsilon v' &= 2u - v \end{aligned} \tag{1}$$

mit Anfangswerten $(u(0), v(0)) = (1, 4)$ mithilfe des Radau-IIA Verfahrens, eines Gauß-Verfahrens und des RK4-Verfahrens numerisch für unterschiedliche $\epsilon > 0$. Verwenden Sie dabei Verfahren, die vergleichbare Konvergenzordnungen besitzen. Untersuchen Sie die Abhängikeit des komponentenweisen Fehlers an der Stelle $t = 0.1$ vom Parameter ϵ.

Aufgabe 32:
Wir verwenden die implizite Trapezregel aus Exa. 3.6.
a) Zeigen Sie, dass sie die gleiche Stabilitätsfunktion wie die implizite Mittelpunktsregel aus Exa. 3.5 besitzt.
b) Zeigen Sie, dass die implizite Trapezregel A stabil ist.
c) Zeigen Sie, dass die implizite Trapezregel nicht B stabil ist.

Hinweis zu c: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion

$$f(y) := \begin{cases} -y^3, & y \leq 0 \\ -y^2, & y > 0 \end{cases} \tag{2}$$

dissipativ ist. Wenden Sie dann die implizite Trapezregel auf ein Anfangswertproblem mit dieser rechten Seite und den Anfangswerten $y_0 = 0$ bzw. $\tilde{y}_0$ an. Verwenden Sie z.B. die Schrittweite $h = 1$ und finden Sie dann ein $\tilde{y}_0 < 0$, sodass $\tilde{y}_1 > -\tilde{y}_0$.

Aufgabe 33:
Zeigen Sie mithilfe des Anfangswertproblems

$$y' = f_\epsilon(y), \qquad y(0) = 1 \tag{3}$$

mit der glatten, nicht steigenden Funktion

$$f_\epsilon(y) = \begin{cases} -1, & |y-1| \leq \epsilon \\ -y, & |y-1| \geq 2\epsilon \end{cases}, \tag{4}$$

dass die linear-impliziten Runge-Kutta Verfahren aus Aufgabe 20 nicht B-stabil sein können. Beachten Sie die aktualisierte Angabe zu Aufgabe 20 im TUWEL.

Aufgabe 34:

Betrachten Sie ein m-stufiges RK-Verfahren mit Butcher Tableau $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^\top \end{array}$ und ein Anfangswertproblem der Dimension $n = 1$. Anstatt die (implizite) Gleichung für den Vektor $k \in \mathbb{R}^m$ der Stufen exakt zu lösen, können auch m Schritte der Banach Fixpunktiteration angewendet werden, um Näherungen der Stufen zu erhalten. Mit $k^{(0)} := f(t_\ell, y_\ell)(1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ definiere $k^{(s)}$ für $s = 0, \ldots, m$ als Ergebnis der s-ten Fixpunktiteration und setze $\widetilde{k} := k^{(m)}$. Dies definiert ein Einschrittverfahren:

$$y_{\ell+1} = y_\ell + h \sum_{j=1}^{m} b_j \widetilde{k}_j. \tag{5}$$

Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion dieses Verfahrens. Ist dieses Verfahren A-stabil?

Aufgabe 35:

Betrachten Sie ein m-stufiges Kollokationsverfahren mit Kollokationspunkten $c_1, \ldots, c_m$. Wir definieren das Polynom

$$M(x) := \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{m} (x - c_i). \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass sich für dieses Verfahren die Stabilitätsfunktion $R(z)$ mit $z = \lambda h$ schreiben lässt als das rationale Polynom $R(z) = P(z)/Q(z)$, wobei $P, Q \in \mathbb{P}_m$ gegeben sind durch

$$P(z) = M^{(m)}(1) + M^{(m-1)}(1)z + \ldots + M(1)z^m, \tag{7}$$

$$Q(z) = M^{(m)}(0) + M^{(m-1)}(0)z + \ldots + M(0)z^m. \tag{8}$$

b) Verwenden Sie diese explizite Darstellung von $R(z)$ um zu zeigen, dass Gauß-Verfahren nicht L-stabil sind.

Hinweis zu a: Um die Darstellung von $R(z)$ zu erhalten, betrachten Sie das übliche Modellproblem mit $h = 1$ (dies impliziert $z = \lambda$). Aus der Definition der Kollokationspolynome $q \in \mathbb{P}_m$ schließen Sie nun, dass

$$q'(x) - zq(x) = KM(x) \tag{9}$$

für eine Konstante $K \neq 0$. Leiten Sie Gleichung (9) $s = 0, \ldots, m$ mal ab, um einen Ausdruck für $q(x)$ zu erhalten. Schließlich gilt $R(z) = q(1)/q(0)$ (begründen Sie das).