ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020
BLATT 3 (15. 10. 2020)

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Zeigen Sie:

(i) Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sodass

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) f_i(x).$$

(ii) Gilt $xT = 0$ für eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, so ist $T = c\delta$ für eine Konstante c.

(iii) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u' = 0$ impliziert $u = \text{const}$.

(iv) Für jedes $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ existieren Konstanten c_0, c_1 sodass

$$f\delta' = c_0\delta + c_1\delta'.$$

2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} \sin \lambda x$,

(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sin \lambda x}{x}$,

und zeigen Sie, dass

(iii) $\lim_{a\to 0+} \frac{a}{x^2+a^2} = \pi\delta$.

3. (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine reguläre Distribution definiert, die punktweise Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ \text{undefiniert} & x = 0 \end{cases}$$

jedoch nicht.

(ii) Es bezeichne $\mathrm{pv}(\frac{1}{x})$ die Distribution

$$\langle \mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \mathrm{pv}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(iii) Überprüfen Sie, dass $(\ln|x|)' = \mathrm{pv}(\frac{1}{x})$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt.

4. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = \mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi i \delta.$$

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

5. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt von *endlicher Ordnung* wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt sodass man für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ eine Konstante $C > 0$ finden kann, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ gilt:

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{C^m(K)}.$$

In diesem Fall heißt m die Ordnung von u. Gibt es kein solches m, sagt man, dass u unendliche Ordnung hat.

Bestimmen Sie die Ordnung folgender Distributionen ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen):

(i) $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,
(ii) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,
(iii) $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $x_0 \in \Omega$,
(iv) $\varphi \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \partial^{\alpha_j} \varphi(x_j)$ für eine Folge $(x_j)_j$ in Ω ohne Häufungspunkt und $\alpha_j \in \mathbb{N}_0^n$.

6. Eine Distribution heißt *positiv* wenn $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \geq 0$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass jede positive Distribution Ordnung 0 hat.
(ii) Zeigen Sie, dass folgende Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nicht positiv ist:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{|x|} \,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{|x|} \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} \,\mathrm{d}x.$$

7. Der *Träger* eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist das Komplement der größten offenen Menge, auf der T verschwindet:

$$\operatorname{supp} T = \Omega \setminus \bigcup \{U \subseteq \Omega \text{ offen} \mid T \text{ verschwindet auf } U\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Für $f \in C(\Omega)$ ist der distributionelle Träger gleich dem üblichen Träger der Funktion f.
(ii) Ist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution von endlicher Ordnung m und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion deren Ableitungen $\partial^\alpha \psi$ für $|\alpha| \leq m$ verschwinden, dann ist $\langle T, \psi \rangle = 0$.
(iii) Gilt $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = 0$, dann folgt $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
(iv) Gilt $fT = 0$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$, dann folgt $\operatorname{supp} T \subseteq \{x \colon f(x) = 0\}$.

8. Zeigen Sie, dass die Faltung

$$(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y) \,\mathrm{d}y$$

für $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist, wenn $\operatorname{supp} f$ und $\operatorname{supp} g$ beide nach unten (oder beide nach oben) beschränkt sind. Berechnen Sie dann $f * f * \ldots * f$ ($n \in \mathbb{N}$ Faktoren) für $f(t) = H(t)$.