Satz 2.6.7 In einem Vektorraum V gilt für alle endlichdimensionalen Unterräume U_1, U_2 mit $U_1 \subset U_2$ die Ungleichung $\dim U_1 \leq \dim U_2$. Ferner ist U_1 echte Teilmenge von U_2 genau für $\dim U_1 < \dim U_2$.

Beweis. Wir wenden Satz 2.6.6 an. ... Jede Basis von U_1 ist eine l.u. Teilmenge von U_2, daher gilt $\dim U_1 \leq \dim U_2$. Sei B eine Basis von U_1, dann ist insbes. $B \subset U_1 \subset U_2$ l.u. Laut Satz 2.6.6, hat jede l.u. Familie / Menge in einem endlichdimensionalen Vektorraum (hier U_2) höchstens n Elemente (hier $n := \dim U_2$). Das gilt auch für B mit $\dim U_1$ Elementen. Es ist $U_1 \subsetneq U_2$ genau dann, falls mindestens eine Basis von U_1 kein Erzeugendensystem von U_2 ist, was zu $\dim U_1 < \dim U_2$ äquivalent ist. „$\Rightarrow$": Wenn $U_1 \subsetneq U_2$, dann hat U_1, laut Satz 2.5.6, mindestens eine Basis B mit $[B] = U_1 \Rightarrow [B] \subsetneq U_2 \Rightarrow [B] \neq U_2$, also ist B kein ES von U_2. ⌟ „$\Leftarrow$": Wenn es eine Basis B gibt, sodass $U_1 = [B] \neq U_2$, also B kein ES von U_2 ist, so folgt, gemeinsam mit $U_1 \subset U_2$, dass $U_1 \subsetneq U_2$. ⌟ Laut Satz 2.6.6, hat B nicht $n := \dim U_2$ Elemente, weil B l.u. in U_2, aber kein ES (also keine Basis) ist. ⌟ Gemeinsam mit oberem $\dim U_1 \leq \dim U_2 \wedge \dim U_1 \neq \dim U_2$ $\Rightarrow \dim U_1 < \dim U_2$. □