Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Numerische Mathematik - Kreuzlübung 4

Übungstermin: 29.10.2019 | 23. Oktober 2019

Aufgabe 19:
Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und $p \in \Pi_2$ das interpolierende Polynom mit

$$p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p(2) = f(2).$$

a) Berechnen Sie $p'(0)$.
b) Zeigen Sie folgende Fehlerabschätzung:

$$|p'(0) - f'(0)| \leq \frac{1}{3}\|f^{(3)}\|_\infty.$$

Aufgabe 20:
a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $p \in \Pi_{n-1}$ existiert, so dass gilt

$$\max_{x\in[-1,1]} |x^n - p(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Mit anderen Worten für großes n wird $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ auf dem Intervall $[-1,1]$ fast linear abhängig.
b) Seien $x_0, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Stützstellen aus dem Intervall $[a,b]$, $f \in C^{2m+2}([a,b])$ und $p \in \Pi_{2m+1}$ das Hermite-Interpolationspolynom zu der Funktion f mit

$$p(x_j) = f(x_j), \qquad p'(x_j) = f'(x_j), \qquad j = 0, \ldots, m.$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in [a,b]$ existiert ein $\xi \in [a,b]$ sodass

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\prod_{j=0}^{m}(x - x_j)^2.$$

Aufgabe 21:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Stützstellen aus dem

Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass für die interpolierenden Polynome $p_n \in \Pi_n$ der Funktionen

$$f_\lambda(x) := \lambda^x, \quad \lambda > 1,$$

mit $p_n(x_j) = f_\lambda(x_j)$ für $j = 0, \ldots, n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f_\lambda(x)| = 0.$$

Aufgabe 22:
Wir betrachten in diesem Beispiel die Lagrange-Polynominterpolation auf dem Dreick $T \in \mathbb{R}^2$, welches durch die Eckpunte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ gegeben ist. Sei dazu Π_n der Raum aller Linearkombinationen von Polynomen der Form

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^k y^j \in \mathbb{R}, \qquad j, k = 0, \ldots, n, \quad j + k \leq n.$$

Beweisen Sie, dass die Lagrange-Polynominterpolationsaufgabe eindeutig lösbar ist, wenn
a) ein Polynom aus Π_1 gesucht und die Stützwerte an den Eckpunkten des Dreiecks gegeben sind,
b) ein Polynom aus Π_2 gesucht und die Stützwerte an den Eckpunkten sowie den Mittelpunkten der Dreieckskanten gegeben sind.

Geben Sie für beide Aufgaben die zugehörige Lagrange-Basis an, d.h. die Basisfunktionen, die an jeweils einem Stützpunkt 1 und an allen anderen 0 sind.

Aufgabe 23:
Sei $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Schreiben Sie ein Programm welches f mit äquidistanten und Chebyshev Knoten für beliebige Ordnung n interpoliert und plotten Sie die interpolierenden Polynome. Was stellen Sie für große n fest?

Aufgabe 24:
Sei

$$R(l, m) := \{x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}\ ,\ p \in \Pi_l,\ q \in \Pi_m \setminus \{0\}\}$$

die Menge aller rationalen Funktionen mit maximalem Zählergrad l und Nennergrad m. Weiter seien $x_0, ..., x_n$ mit $n := l + m$ paarweise Verschiedene Stützstellen und $f_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n$ vorgegebene Daten. Gesucht ist für gegebene l, m eine rationale Funktion $r^{(l,m)} \in R(l,m)$, sodass die Interpolationsbedingungen

$$r^{(l,m)}(x_i) = f_i, \qquad i = 0, ..., n, \tag{1}$$

erfüllt sind.

a) Zeigen Sie, dass eine notwendige Bedingung an das Zählerpolynom p und Nennerpolynom q von $r^{(l,m)}$ gegeben ist durch

$$p(x_i) - f_i q(x_i) = 0, \qquad i = 0, ..., n. \tag{2}$$

Ist (2) lösbar?

b) Zeigen Sie: Sei $(p,q) \in (\Pi_l \times \Pi_m) \setminus \{0\}$ Lösung von (2). Dann ist $\frac{p}{q} \in R(l,m)$, aber $\frac{p}{q}$ löst nicht notwendig (1).

c) Zeigen Sie: Seien (p_1, q_1) und (p_2, q_2) aus $(\Pi_l \times \Pi_m) \setminus \{0\}$ Lösungen von (2). Dann gilt $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$.