Kapitel 13

Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $m < n$, $T\Sigma$ ihr Tangentialbündel, und $f : \Sigma \to T\Sigma$ ein tangentiales lokal Lipschitz Vektorfeld, also $f(p) \in T_p\Sigma$ für alle $p \in \Sigma$. In diesem Abschnitt betrachten wir das Problem

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \Sigma. \tag{13.1}$$

Diese Situation tritt häufig auf. So definiert jedes erste Integral eine intrinsische invariante Mannigfaltigkeit einer Differentialgleichung, und auch die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten in Sattelpunkten sind invariant. Weitere Quellen für Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten sind Zwangsbedingungen, die in natürlicher Weise in der Physik auftreten, oder aus Problemen mit stark unterschiedlichen Zeitskalen herrühren.

13.1 Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$

1. Wir betrachten eine *m-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit* Σ im $\mathbb{R}^n$, also eine m-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$. Damit meinen wir eine abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt $p \in \Sigma$ eine Kugel $B_r(p) \subset \mathbb{R}^n$, und eine injektive C^1-Abbildung $\phi : B_r(p) \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $\phi(p) = 0$, $\det \phi'(p) \neq 0$, und $\phi(\Sigma \cap B_r(p)) = \phi(B_r(p)) \cap \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Durch evtl. Verkleinerung von r kann man $\det \phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in B_r(p)$ annehmen, d.h. $\phi : B_r(p) \to \phi(B_r(p))$ ist ein Diffeomorphismus. Genauer sollte man sagen, dass Σ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Kann man die Abbildungen $\phi \in C^r$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, wählen, so heißt Σ *m-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit* im $\mathbb{R}^n$.

Schränkt man ein solches ϕ auf $U_\varphi := B_r(p) \cap \Sigma \subset \Sigma$ ein, so ist $\varphi := \phi_{|U_\phi} : U_\varphi \to V_\varphi := \phi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^m$ eine *Karte* für Σ in $p \in \Sigma$, U_φ heißt zugehöriges

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*,
Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_13, © Springer Basel AG 2010

Kartengebiet. Dabei haben wir $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ mit $\mathbb{R}^m$ identifiziert. O.B.d.A. kann man nun $\varphi(p) = 0$ annehmen. Die Inverse $\varphi^{-1} : V_\varphi \to \mathbb{R}^n$ vermittelt dann eine bijektive C^r-Abbildung von V_φ auf U_φ, die die Bedingung $\mathrm{Rang}[\varphi^{-1}]'(y) = m$ für alle $y \in V_\varphi$ erfüllt. Eine solche Abbildung heißt *C^r-Parametrisierung* von Σ in $p \in \Sigma$.

Ist $\psi : B_s(0) \to \Sigma$ eine weitere Parametrisierung mit $U_\varphi \cap \psi(B_s(0)) \neq \emptyset$, so heißt $\kappa := \varphi \circ \psi$ Kartenwechselfunktion. Dies ist ein Homeomorphismus einer offenen Teilmenge $V \subset B_s(0) \subset \mathbb{R}^m$ auf eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^m$, κ und κ^{-1} sind stetig differenzierbar und $\kappa' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ist ein Isomorphismus. Es ist nun $\psi = \varphi^{-1} \circ \kappa$ also $\psi' = [\phi^{-1}]' \circ \kappa\kappa'$. Diese Identität zeigt insbesondere

$$R(\psi'(y)) = [\phi^{-1}]'(\kappa(y))\mathbb{R}^m = R([\varphi^{-1}]'(\kappa(y)). \tag{13.2}$$

2. Ist ψ eine Parametrisierung, so definiert sie im Punkt p die *Tangentialvektoren*

$$\tau_i = \tau_i(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}\psi(0) = \partial_i\psi(0), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{13.3}$$

Diese Vektoren τ_i bilden eine Basis des *Tangentialraums* $T_p\Sigma$ von Σ in p. Der Tangentialraum $T_p\Sigma$ ist also durch $T_p\Sigma = R(\psi'(0)) \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, und ist daher unabhängig von der gewählten Parametrisierung, wie (13.2) zeigt.

Im Folgenden verwenden wir die *Einsteinsche Summenkonvention*, die besagt, dass über gleiche obere und untere Indizes zu summieren ist; δ^i_j bezeichnen die Einträge der Einheitsmatrix I. Ein Vektor $a \in T_p\Sigma$ kann als Linearkombination der Basisvektoren τ_j dargestellt werden, also als $a = a^i\tau_i$. Die Koeffizienten a^i heißen *kontravariante Komponenten* von a. Andererseits ist der Vektor a auch durch seine *kovarianten Komponenten* a_i, definiert durch $a_i = (a|\tau_i)$, eindeutig bestimmt; dies bedeutet, dass die kovarianten Komponenten von a die Koeffizienten von a in der *dualen Basis* $\{\tau^i\}$ zur Basis $\{\tau_j\}$ sind, die durch die Relationen $(\tau^i|\tau_j) = \delta^i_j$ definiert ist.

Die Abbildung $\psi'(y) : \mathbb{R}^m \to T_p\Sigma$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^m$ auf den Tangentialraum von Σ in $\psi(y)$. Um ihre Inverse zu bestimmen, multipliziert man die Gleichung $v = \psi'(y)w$ mit $\psi'(y)^\mathsf{T}$. Da $\psi'(y)^\mathsf{T}\psi'(y)$ invertierbar ist, erhält man damit

$$w = [\psi'(y)^\mathsf{T}\psi'(y)]^{-1}\psi'(y)^\mathsf{T}v.$$

In Koordinaten geschrieben bedeutet dies $w^i = g^{ij}v_j = v^i$, d.h. die Komponenten von w sind die kontravarianten Komponenten des dazugehörigen Tangentenvektors $v = v^i\tau_i$.

3. Die 1. *Fundamentalmatrix* $G = [g_{ij}]$ in $p \in \Sigma$ ist definiert durch

$$g_{ij} = g_{ij}(p) = (\tau_i|\tau_j) = [\psi'(0)^\mathsf{T}\psi'(0)]_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{13.4}$$

Diese Matrix ist symmetrisch und positiv definit, also invertierbar, denn es gilt

$$(G\xi|\xi) = g_{ij}\xi^i\xi^j = (\xi^i\tau_i|\xi^j\tau_j) = |\xi^i\tau_i|^2 > 0, \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^m,\ \xi \neq 0.$$

Wir setzen $G^{-1} = [g^{ij}]$, also gilt $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ und $g^{il}g_{lj} = \delta_j^i$. Die Determinante $g := \det G$ is positiv.

Sei a ein Tangentenvektor; dann impliziert $a = a^i\tau_i$

$$a_k = (a|\tau_k) = a^i(\tau_i|\tau_k) = a^i g_{ik}, \text{ und } \quad a^i = g^{ik}a_k.$$

Also erlaubt die 1. Fundamentalmatrix G den Übergang von kontra- zu kovarianten Komponenten eines Tangentenvektors, und umgekehrt. Sind a, b zwei Tangentenvektoren, dann induziert

$$(a|b) = a^i b^j(\tau_i|\tau_j) = g_{ij}a^i b^j = a_j b^j = a^i b_i = g^{ij}a_i b_j =: (a|b)_\Sigma$$

in kanonischer Weise ein Innenprodukt auf $T_p\Sigma$, die natürliche *Riemann-Metrik*. Mittels der Identität

$$(g^{ik}\tau_k|\tau_j) = g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$$

ergibt sich die duale Basis als $\tau^i = g^{ik}\tau_k$. Wir setzen $\mathcal{G} = g^{ij}\tau_i \otimes \tau_j$ und erhalten damit

$$\mathcal{G} = g^{ij}\tau_i \otimes \tau_j = g_{ij}\tau^i \otimes \tau^j = \tau_i \otimes \tau^i = \tau^j \otimes \tau_j.$$

Sei schließlich $u = u^k\tau_k + z$, $(\tau_j|z) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, ein beliebiger Vektor in $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\mathcal{G}u = g^{ij}\tau_i(\tau_j|u) = g^{ij}\tau_i u^k g_{jk} = u^k\tau_k,$$

d.h. $\mathcal{G}$ ist die orthogonale Projektion P_Σ im $\mathbb{R}^n$ auf den Tangentialraum $T_p\Sigma$ in $p \in \Sigma$. Dies zeigt insbesondere, dass der Tensor $\mathcal{G}$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist.

Diese drei Eigenschaften erklären die Bedeutung der 1. Fundamentalmatrix g_{ij}.

4. Häufig werden Mannigfaltigkeiten mittels einer Gleichung der Form $g(x) = 0$, also $\Sigma = g^{-1}(0)$, definiert, wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ aus C^1 ist, und nicht ausgeartet, d.h. $g'(x)$ hat Rang $n - m$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g(x) = 0$. Dann erhält man eine Parametrisierung in x_0 mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen. Dazu wählt man eine Basis $\tau_1, \ldots, \tau_m$ von $N(g'(x_0))$, und ergänzt diese z.B. mittels der Spalten $\nu_1, \ldots, \nu_{n-m}$ von $g'(x_0)^\mathsf{T}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$. Beachte, dass $g'(x_0)g'(x_0)^\mathsf{T}$ invertierbar ist. Dann definiert man eine Funktion $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ mittels $h(y, z) = g(x_0 + y^i\tau_i + z^j\nu_j)$. Diese Funktion h ist aus C^1, es ist $h(0, 0) = g(x_0) = 0$ und

$$\partial_z h(0, 0) = g'(x_0)[\nu_1, \ldots, \nu_{n-m}] = g'(x_0)g'(x_0)^\mathsf{T}$$

ist invertierbar. Daher gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Kugel $B_r(0)$ und eine C^1-Funktion $\varphi : B_r(0) \to \mathbb{R}^{n-m}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $h(y, \varphi(y)) = 0$, also $g(x_0 + y^i\tau_i + \varphi^j(y)\nu_j) = 0$. Die gesuchte Parametrisierung von Σ ist dann durch die Funktion $\phi(y) = x_0 + y^i\tau_i + \varphi^j(y)\nu_j$ gegeben, und es ist klar, dass $\phi'(y)$ Rang m hat. Insbesondere ist $T_{x_0}\Sigma = N(g'(x_0))$, und die Spalten $\nu_1, \ldots, \nu_{n-m}$ von $g'(x_0)^\mathsf{T}$ bilden ein Normalensystem für $T_{x_0}\Sigma$, sind also linear unabhängig und orthogonal zu $T_{x_0}\Sigma$.

Sei nun umgekehrt eine Parametrisierung ϕ für Σ gegeben. Wir wollen Σ lokal um $x_0 = \phi(0)$ als Nullstellenmenge $g(x) = 0$ darstellen. Dazu seien $\tau_1, \ldots, \tau_m$ die von ϕ in $y = 0$ erzeugten Tangentenvektoren. Wir ergänzen diese durch orthonormale Vektoren $\nu_1, \ldots, \nu_{n-m}$ mit $(\tau_i|\nu_j) = 0$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$, und definieren die Funktion $F : B_r(0) \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ durch $F(y, z) = \phi(y) - x_0 + z^j \nu_j$. Dann ist F aus C^1, $F(0, 0) = 0$, und

$$F'(0, 0) = [\phi'(0), \nu_1, \ldots, \nu_{n-m}] = [\tau_1, \ldots, \tau_m, \nu_1, \ldots, \nu_{n-m}]$$

ist invertierbar, nach Konstruktion. Nach dem Satz von der inversen Abbildung gibt es daher eine Kugel $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $G = (g_1, g_2) : B_\rho(0) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ aus C^1 mit $G(0) = 0$ und $G \circ F(y, z) = (y, z)$, $F \circ G(x) = x$. Es folgt $y = g_1(F(y, 0)) = g_1(\phi(y) - x_0)$ und $0 = g_2(F(y, 0)) = g_2(\phi(y) - x_0)$ für alle $|y| < \delta$. Daher ist die Funktion $g(x) = g_2(x - x_0)$ die gesuchte.

5. Eine Funktion $\rho : \Sigma \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in $x \in \Sigma$ wenn die zusammengesetzte Funktion $\rho \circ \phi$ für eine Parametrisierung ϕ mit $\phi(0) = x$ – und damit für alle Parametrisierungen um x – differenzierbar ist. Der **Flächengradient** von ρ in x wird dann definiert durch

$$\nabla_\Sigma \rho(x) = \partial_i(\rho \circ \phi)(0)\tau^i(0) = g^{ij}\partial_i(\rho \circ \phi)(0)\tau_j(0).$$

Man beachte, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ϕ ist.

Ebenso definiert man für ein Vektorfeld $f : \Sigma \to \mathbb{R}^n$

$$\nabla_\Sigma f(x) = \tau^i(0) \otimes \partial_i(f \circ \phi)(0) = g^{ij}(0)\tau_j(0) \otimes \partial_i(f \circ \phi)(0),$$

und

$$f'(x) = [\nabla_\Sigma f(x)]^{\mathsf{T}} = \partial_i(f \circ \phi)(0) \otimes \tau^i(0) = g^{ij}(0)\partial_i(f \circ \phi)(0) \otimes \tau_j(0).$$

Auch diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ϕ. Ist nun $f = f^k \tau_k$ ein Tangentenvektorfeld und Σ in C^2, so ist

$$\partial_i f = \partial_i f^k \tau_k + f^k \partial_i \tau_k,$$

also insbesondere $\partial_i f = (\partial_i f^k)\tau_k$ wenn $f(x) = 0$ gilt; dann ist $f'(x) : T_x\Sigma \to T_x\Sigma$.

Die **Flächendivergenz** eines Vektorfeldes $f : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ wird durch $\mathrm{div}_\Sigma f(x) := \mathrm{sp}\nabla_\Sigma f(x)$ definiert, also durch

$$\mathrm{div}_\Sigma f(x) := (\mathrm{sp}\nabla_\Sigma f)(x) = (\tau^i(0)|(\partial_i f \circ \phi)(0)) = g^{ij}(\tau_j(0)|(\partial_i f \circ \phi)(0)).$$

Der Divergenzsatz gilt auch auf C^1-Mannigfaltigkeiten, allerdings nur für tangentiale Vektorfelder.

Bemerkung. In der Differentialgeometrie wird die Flächendivergenz für *tangentiale* Vektorfelder in lokalen Koordinaten wie folgt definiert:

$$\mathrm{div}_\Sigma f = \sqrt{g}^{-1}\partial_i(\sqrt{g} f^i) = \sqrt{g}^{-1}\partial_i(g^{ij}\sqrt{g} f_j),$$

wobei wie zuvor $g = \det g_{ij}$ bedeutet. Diese Darstellung ergibt sofort den Divergenzsatz auf Mannigfaltigkeiten, ist aber eben nur für tangentiale Vektorfelder anwendbar. Eine kleine Rechnung zeigt, dass diese Definition mit der oben angegebenen für tangentiale Vektorfelder übereinstimmt.

Der Vorteil unserer Definition ist der, dass sie für beliebige Vektorfelder angewandt werden kann. So ist z.B. für eine Hyperfläche $-\mathrm{div}_\Sigma \nu_\Sigma/(n-1)$ die mittlere Krümmung von Σ. Allerdings beruht unsere Definition darauf, dass Σ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

13.2 Wohlgestelltheit

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem (13.1), wobei Σ eine C^1 Mannigfaltigkeit und $f : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz ist und $f(p) \in T_p\Sigma$ für jedes $p \in \Sigma$ erfüllt, d.h. f ist ein Tangentenvektorfeld für Σ. Wir zeigen, dass sowohl f als auch $-f$ der Subtangentialbedingung **(S)** genügen. Dazu sei $x \in \Sigma$ fixiert und $z \in T_x\Sigma$ sei ein Tangentenvektor. Definiere mittels einer Parametrisierung ϕ mit $\phi(0) = x$

$$p(t) = \phi(t[\phi'(0)^\mathsf{T}\phi'(0)]^{-1}\phi'(0)^\mathsf{T} z), \quad t \in [-t_0, t_0].$$

Dann ist

$$p'(0) = \phi'(0)[\phi'(0)^\mathsf{T}\phi'(0)]^{-1}\phi'(0)^\mathsf{T} z = z,$$

da $z \in T_x\Sigma$ gilt, folglich

$$\mathrm{dist}(x + tz, \Sigma) \le |x + tz - p(t)|_2 = |x + tz - (x + tz + o(|t|))|_2 \le o(|t|),$$

also ist **(S)** für f und $-f$ erfüllt.

Damit ist Satz 7.1.4 bzw. die daran anschließende Bemerkung 7.1.5 anwendbar, und wir erhalten Lösungen in Σ, die eindeutig sind und auf einem maximalen Intervall existieren. Wir formulieren dieses Resultat als

Satz 13.2.1. *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $m < n$, und sei $f : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz mit $f(p) \in T_p\Sigma$, für alle $p \in \Sigma$.*
Dann besitzt das Anfangswertproblem (13.1) *genau eine Lösung $x(t)$ in Σ. Die Lösung existiert auf einem maximalen Existenzintervall $0 \in (t_-(x_0), t_+(x_0))$, und es gilt $\lim_{t\to t_+} |x(t)| = \infty$, falls $t_+ = t_+(x_0) < \infty$ ist; analoges gilt für $t_-(x_0)$. Insbesondere existieren die Lösungen global wenn Σ kompakt ist. Daher erzeugt* (13.1) *einen lokalen Fluss auf Σ, und sogar einen globalen Fluss wenn Σ kompakt ist.*

Es ist aufschlussreich, das Problem in lokalen Koordinaten zu schreiben. Dazu wählen wir eine Parametrisierung ϕ mit $\phi(y_0) = x_0$, und setzen $y(t) = \phi^{-1}(x(t))$, $t \in (a, b) \ni 0$, wobei das Intervall (a, b) so klein gewählt wird, dass die Lösung für $t \in (a, b)$ in U_ϕ bleibt. Dann ist $x(t) = \phi(y(t))$, also gilt

$$\phi'(y(t))\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(\phi(y(t)), \quad t \in (a, b), \quad y(0) = y_0 := \phi^{-1}(x_0).$$

Multipliziert man die Gleichung mit $\phi'(y(t))^\mathsf{T}$ und invertiert $\phi'(y(t))^\mathsf{T}\phi'(y(t))$, so erhält man die explizite Darstellung

$$\dot{y}(t) = [\phi'(y(t))^\mathsf{T}\phi'(y(t))]^{-1}\phi'(y(t))^\mathsf{T} f(\phi(y(t)), \quad t \in (a,b), \quad y(0) = y_0. \qquad (13.5)$$

Man beachte hier, dass die rechte Seite von (13.5) nur noch stetig ist, da die Mannigfaltigkeit Σ nach Voraussetzung lediglich in der Klasse C^1 liegt. Damit ist (13.5) mit dem Satz von Peano zwar immer noch lösbar, aber die Eindeutigkeit der Lösungen ist nicht mehr offensichtlich. Unsere Methode, die Subtangentialbedingung zu verwenden, vermeidet dieses Problem.

Eine weitere Darstellung von (13.1) in lokalen Koordinaten folgt mit $f(x) = f^r(x)\tau_r(x)$. Es ist nach Abschnitt 13.1

$$[\phi'(y(t))^\mathsf{T}\phi'(y(t))]^{-1}_{ij} = g^{ij}(y(t)) \quad \text{und} \quad [\phi'(y(t))^\mathsf{T}\tau_i]_l = g_{li}(y(t)),$$

folglich

$$[[\phi'(y(t))^\mathsf{T}\phi'(y(t))]^{-1}\phi'(y(t))^\mathsf{T} f(\phi(y(t))]^i = g^{il}g_{lr}f^r = f^i(\phi(y(t)),$$

woraus man das Problem in kontravarianten Komponenten als

$$\dot{y}^i(t) = f^i \circ \phi(y(t)), \quad i = 1, \ldots, k, \; t \in (a,b), \quad y^i(0) = y^i_0, \qquad (13.6)$$

erhält. Der Vorteil der Darstellung in lokalen Koordinaten ist natürlich die kleinere Dimension k für (13.5) gegenüber n für (13.1), allerdings hat man dann gelegentlich die Parametrisierung zu wechseln.

Ljapunov-Funktionen für Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten werden ebenso definiert wie auf offenen Mengen: Eine Funktion $V \in C(\Sigma, \mathbb{R})$ heißt *Ljapunov-Funktion* für (13.1), wenn V fallend längs der Lösungen von (13.1) ist; sie heißt *strikt* wenn sie längs nichtkonstanten Lösungen streng fällt. Ist V aus C^1 so ist V genau dann eine Ljapunov-Funktion für (13.1), wenn

$$(\nabla_\Sigma V(x)|f(x)) \leq 0, \quad \text{für alle } x \in \Sigma,$$

gilt. Damit gelten das Invarianzprinzip von La Salle und der Konvergenzsatz für gradientenartige Systeme auch auf Mannigfaltigkeiten.

13.3 Linearisierung

Besonders nützlich sind lokale Darstellungen von (13.1) wie (13.6) zur Stabilitätsanalysis von Equilibria. Dazu sei x_* ein Equilibrium von (13.1), gelte also $f(x_*) = 0$ und sei $f \in C^1$ und $\Sigma \in C^2$. Wähle eine Parametrisierung ϕ mit $\phi(0) = x_*$. In einer Umgebung von x_* ist (13.1) äquivalent zum m-dimensionalen System $\dot{y}^i = f^i \circ \phi(y)$, das Equilibrium x_* entspricht $y_* = 0$. Daher ist das zugehörige linearisierte System durch

$$\dot{z} = Bz, \quad \text{mit } b^i_j = \partial_j(f^i \circ \phi)(0),$$

gegeben. Das Prinzip der linearisierten Stabilität Satz 5.4.1 lässt sich nun auf dieses m-dimensionale System anwenden: Haben alle Eigenwerte von B negative Realteile, so ist $y_* = 0$ asymptotisch stabil für (13.6), und hat mindestens ein Eigenwert von B positiven Realteil, so ist $y_* = 0$ instabil für (13.6). Mittels der Transformation $x(t) = \phi(y(t))$ übertragen sich diese Resultate auf (13.1). Wir formulieren dieses Ergebnis als

Satz 13.3.1. *Sei Σ aus C^2, $f : \Sigma \to T\Sigma$ aus C^1, und sei $f(x_*) = 0$. Setze $A := f'(x_*) \in \mathcal{B}(T_{x_*}\Sigma)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Gilt* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ *für alle Eigenwerte von A in $T_{x_*}\Sigma$, so ist x_* asymptotisch stabil für* (13.1) *in Σ.*
2. *Gilt* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ *für einen Eigenwert von A in $T_{x_*}\Sigma$, so ist x_* instabil für* (13.1) *in Σ.*

Auf diese Art und Weise lassen sich auch die Sätze über die Sattelpunkteigenschaft, das verallgemeinerte Prinzip der linearisierten Stabilität, und die Resultate über die Sattel-Knoten Verzweigung, die Pitchfork- und die Hopf-Verzweigung auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir überlassen die Formulierung der entsprechenden Sätze dem Leser.

Beispiel. *Mathematische Genetik.* Wir betrachten nochmals das Fisher-Wright-Haldane Modell aus Kapitel 8.

$$(FWH) \qquad \dot{p} = PMp - W(p)p =: f(p),$$

mit $W(p) = (p|Mp)$, wobei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist. Die biologisch relevante Mannigfaltigkeit ist die Hyperebene $\Sigma = \{p \in \mathbb{R}^n : (p|\mathsf{e}) = 1\}$, sie ist invariant für dieses System. Sei $p_* \in \Sigma$ ein Equilibrium, es gelte also $f(p_*) = 0$, und es sei $p_*^i > 0$ für alle i, ein sogenannter *Polymorphismus.* Dann ist $m_{ik}p_*^k = m_{kl}p_*^k p_*^l$ für alle i. Für die Ableitung $A := f'(p_*)$ erhält man

$$\begin{aligned} a_{ij} = \partial_j f_i(p_*) &= \delta_{ij}[m_{ik}p_*^k - (Mp_*|p_*)] + p_*^i[m_{ij} - 2m_{jk}p_*^k] \\ &= p_*^i[m_{ij} - 2m_{jk}p_*^k] = p_*^i[m_{ij} - 2W(p_*)]. \end{aligned}$$

Nun ist $a_{ij}p_*^j = -W(p_*)p_*^i$, also ist p_* stets ein Eigenvektor zum Eigenwert $-W(p_*)$, ein dualer Eigenvektor ist e. $W(p)$ kann jedes Vorzeichen haben. Es ist aber $(p_*|\mathsf{e}) = 1$, also $p_* \notin T_{p_*}\Sigma$. Die relevanten Eigenwerte λ sind hier nur die mit Eigenvektoren v, die $(v|\mathsf{e}) = \mathsf{0}$ erfüllen. Daher folgt aus Satz 13.3.1, dass p_* asymptotisch stabil für (FWH) in Σ ist, falls alle Eigenwerte von A mit Eigenvektor senkrecht zu e negative Realteile haben, und instabil falls es einen Eigenvektor senkrecht auf e zu einem Eigenwert mit positivem Realteil gibt.

Als generelle Regel sind Resultate über Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$, die lokaler Natur sind, also an Equilibria, auch auf Mannigfaltigkeiten gültig. Andererseits sind globale Resultate nicht ohne weiteres übertragbar. Satz 7.3.5 über

Existenz periodischer Lösungen bzw. von Equilibria ist auf allgemeinen kompakten Mannigfaltigkeiten falsch, wie auch der Satz von Poincaré-Bendixson für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten nicht gilt. Der irrationale Fluss auf dem Torus (9.3) aus Abschnitt 9.2 belegt dies. Für globale Resultate spielt die Topologie der Mannigfaltigkeit eine wichtige Rolle.

13.4 Zwangsbedingungen

1. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig gegeben, und die Mannigfaltigkeit $\Sigma = g^{-1}(0)$ wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ aus C^1 sei, derart dass der Rang von $g'(x)$ gleich $n-m$ für jedes $x \in \Sigma$ ist. Die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ wird dann Σ in der Regel nicht invariant lassen, die Bedingung $g(x) = 0$ ist eine **Zwangsbedingung**. Wie muss das Vektorfeld f modifiziert werden, sodass die Zwangsbedingung erfüllt ist? Offenbar muss das Vektorfeld $f(x)$ in $x \in \Sigma$ auf $T_x\Sigma$ projiziert werden. Die einfachste und natürlichste Art ist die othogonale Projektion des Vektorfelds auf das Tangentialbündel von Σ. Diese lässt sich mittels g' leicht bestimmen. Dazu sei $x \in \Sigma$ fixiert, und $a \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir suchen dann ein $v \in \mathbb{R}^{n-m}$, sodass der Vektor $a - [g'(x)]^\mathsf{T} v \in T_x\Sigma = N(g'(x))$ ist. Wendet man $g'(x)$ auf diese Gleichung an, so erhält man

$$0 = g'(x)(a - [g'(x)]^\mathsf{T} v) = g'(x)a - [g'(x)g'(x)]^\mathsf{T} v.$$

Da $g'(x)$ Rang $n-m$ hat, ist $[g'(x)g'(x)^\mathsf{T}] : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ invertierbar, also

$$v = (g'(x)[g'(x)]^\mathsf{T})^{-1} g'(x)a,$$

und damit die orthogonale Projektion $P_\Sigma(x)$ auf $T_x\Sigma$ durch

$$P_\Sigma(x) = I - [g'(x)]^\mathsf{T}(g'(x)[g'(x)]^\mathsf{T})^{-1} g'(x), \quad x \in \Sigma, \tag{13.7}$$

gegeben. Das modifizierte Vektorfeld $\tilde{f}(x) = P_\Sigma(x)f(x)$ hat nun die Eigenschaft, ein Tangentenvektorfeld an Σ zu sein.

Die zweite Möglichkeit der Darstellung von $\tilde{f}(x)$ verwendet den Tensor $\mathcal{G} = g^{ij}\tau_i \otimes \tau_j$, der unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist. Damit erhält man

$$\tilde{f}(x) = P_\Sigma(x)f(x) = g^{ij}\tau_i(f(x)|\tau_j) = g^{ij}\tau_i f_j(x) = f^i(x)\tau_i, \quad x \in \Sigma.$$

Diese Darstellung ergibt auf sehr einfache Weise die lokalen Gleichungen $\dot{x}^i = f^i(x)$, verbirgt aber die Projektion auf Σ, und verwendet lokale Koordinaten.

Beispiel 1. (i) Sei $\Sigma = \mathbb{S}^{n-1}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$, also $g(x) = (|x|_2^2 - 1)/2$, und $k = n-1$. Hier haben wir $g'(x) = x^\mathsf{T}$, also $P_\Sigma(x) = I - x \otimes x$. Die zugehörige Differentialgleichung lautet dann

$$\dot{x} = f(x) - (f(x)|x)x,$$

die offenbar die Menge $|x|_2^2 = 1$ invariant lässt.

(ii) *Polardarstellung.* Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz. Setze $r = |x|_2$ und $z = x/r$, also $|z|_2 = 1$. Die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ kann als Gleichung auf der Mannigfaltigkeit $\Sigma = (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ aufgefasst werden. Es ist nämlich mit $g(r, z) = f(rz)/r$,

$$\dot{r} = \frac{(\dot{x}|x)}{r} = (f(x)|z) = (f(rz)|z) = r(g(r,z)|z),$$

und

$$\dot{z} = \frac{\dot{x}}{r} - \frac{x}{r}\frac{\dot{r}}{r} = \frac{f(x)}{r} - z(g(r,z)|z) = g(r,z) - z(g(r,z)|z).$$

Damit ist $\dot{x} = f(x)$ äquivalent zu

$$\dot{r} = r(g(r,z)|z), \quad \dot{z} = g(r,z) - z(g(r,z)|z)$$

auf Σ. Ist nun g unabhängig von r, so entkoppelt die Gleichung für z von der für r, und r kann nach Kenntnis von z durch Integration bestimmt werden. Dies ist der Fall wenn f positiv homogen ist (vgl. Abschnitt 7.4). Der zweite Extremfall ist $g(r, z) = \phi(r)z$; dann ist $\dot{z} \equiv 0$ und wir haben das eindimensionale Problem $\dot{r} = r\phi(r)$ für r.

2. Als nächstes betrachten wir ein System 2. Ordnung mit Zwangsbedingungen, also

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1, \tag{13.8}$$

$$g(x) = 0, \tag{13.9}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ aus C^2 sind, und $g'(x)$ habe Rang $n - m$ für alle $x \in g^{-1}(0)$. Hier gehen wir folgendermaßen vor. Das Vektorfeld f wird modifiziert zu $\tilde{f} = f - [g']^{\mathsf{T}}a$, wobei $a \in \mathbb{R}^{n-m}$ so zu bestimmen ist, dass die Zwangsbedingung erfüllt ist. Dazu sei $x(t)$ eine Lösung des Problems mit $\tilde{f}$, die $g(x(t)) = 0$ für alle t erfüllt. Zweimalige Differentiation dieser Gleichung ergibt

$$g'(x(t))\dot{x}(t) = 0, \quad g''(x(t))\dot{x}(t)\dot{x}(t) + g'(x(t))\ddot{x}(t) = 0,$$

also

$$-g''(x(t))\dot{x}(t)\dot{x}(t) = g'(x(t))\ddot{x}(t) = g'\tilde{f} = g'(x(t))(f(x(t), \dot{x}(t)) - [g'(x(t))]^{\mathsf{T}}a),$$

folglich

$$a = (g'(x(t))[g'(x(t))]^{\mathsf{T}})^{-1}(g'(x(t))f(x(t), \dot{x}(t)) + g''(x(t))\dot{x}(t)\dot{x}(t)).$$

Damit erhalten wir für das modifizierte Vektorfeld

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - [g'(x)]^{\mathsf{T}}(g'(x)[g'(x)]^{\mathsf{T}})^{-1}[g'(x)f(x, y) + g''(x)yy].$$

Beispiel 2. *Das dreidimensionale Pendel.* Wir betrachten nochmals das Pendel der Länge l mit Aufhängung in 0. Die Schwerkraft wirke in negativer x_3-Richtung mit Konstante γ, die Pendelmasse sei $m = 1$. Es sei $x(t)$ die Position des Pendels, $y(t) = \dot{x}(t)$ dessen Geschwindigkeit. Dies ergibt die Zwangsbedingung $g(x) = (|x|_2^2 - l^2)/2 = 0$, und das Vektorfeld f ist $f(x) = -\gamma e_3$.

Es ist $g'(x) = x^{\mathsf{T}}$, also $g'(x)[g'(x)]^{\mathsf{T}} = |x|_2^2 = l^2$, sowie $g''(x) = I$. Dies führt zur folgenden Gleichung für das dreidimensionale Pendel auf Σ:

$$\ddot{x} = -\gamma e_3 - x(|\dot{x}|_2^2 - \gamma x_3)/l^2, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1. \tag{13.10}$$

Man sieht sofort, dass wie zu erwarten die Energie $E = \frac{1}{2}|\dot{x}|_2^2 + \gamma x_3$ eine Erhaltungsgröße ist, da $(\dot{x}|x) = 0$ gilt, und dass für einen Vektor $v \neq 0$ mit $(x_0|v) = (x_1|v) = (e_3|v) = 0$ auch $(x(t)|v) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, d.h. die Schwingung bleibt eben wenn sie eben beginnt. Der zweite Term auf der rechten Seite von (13.10), also die Zwangskraft heißt *Zentrifugalkraft*.

3. Eine weitere Quelle für Zwangsbedingungen liefern singuläre Grenzwerte von Differentialgleichungen. Um dies zu erläutern, betrachten wir eine Anwendung aus der chemischen Reaktionstechnik, die an Abschnitt 8.7 anknüpft. Dazu sei ein chemisches Reaktionssystem in einem Rührkessel gegeben, in dem sowohl Konvektion und langsame Reaktionen stattfinden, aber auch sehr schnelle Gleichgewichtsreaktionen wie z.B. ionische Reaktionen ablaufen. Ein Modell dafür ist das System

$$\dot{x} = f(x) + kNr(x), \tag{13.11}$$

wobei $x \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$ den Vektor der Konzentrationen bedeutet. Die Konvektionsterme und die langsamen Reaktionen seien im Vektor $f(x)$ zusammengefasst und $Nr(x)$ bedeutet die m schnellen Reaktionen, die wir in der in Abschnitt 8.7 angegebenen Form annehmen, und k ist ein Maß für deren Geschwindigkeit. Daher würde man gern zum Grenzfall $k \to \infty$ übergehen. Dann würden die schnellen Reaktionen instantan, also wäre deren Gleichgewicht stets eingestellt, d.h. die Gleichung $Nr(x) = 0$ tritt hier natürlicherweise als Zwangsbedingung auf. Der Einfachheit halber nehmen wir nun an, dass die schnellen Reaktionen linear unabhängig sind, d.h. N ist injektiv. Dann vereinfacht sich die Zwangsbedingung zu $r(x) = 0$.

Wie sehen hier die natürlichen Gleichungen auf der Mannigfaltigkeit $\Sigma = r^{-1}(0)$ aus? Wir suchen dazu wie zuvor ein möglichst einfaches Vektorfeld $\tilde{f}$ das tangential zu Σ ist, allerdings ist die orthogonale Projektion hier nicht geeignet. Da die schnellen Reaktionen nur im Bild von N aktiv sind, ist der Ansatz $\tilde{f} = f - Na$ natürlich. Ist nun x eine Lösung von $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, die in Σ liegt, so erhalten wir wie in 1.

$$0 = \frac{d}{dt}r(x) = r'(x)\dot{x} = r'(x)\tilde{f}(x) = r'(x)f(x) - r'(x)Na,$$

also $a = (r'(x)N)^{-1}r'(x)f(x)$, woraus sich das modifizierte Vektorfeld

$$\tilde{f} = f - N(r'(x)N)^{-1}r'(x)f(x) =: P(x)f(x)$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass $r'(x)N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tatsächlich für alle $x \in \Sigma \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ invertierbar ist. Um dies zu sehen, erinnern wir an die Form von $r(x)$; dabei seien $\kappa_j = k_j^+/k$ konstant. Es gilt für $x \in \Sigma$

$$r_j(x) = \kappa_j(-x^{\nu_j^+} + K_j x^{\nu_j^-}),$$

also

$$\partial_i r_j(x) = -\frac{\nu_{ij}^+}{x_i}\kappa_j x^{\nu_j^+} + \frac{\nu_{ij}^-}{x_i}\kappa_j K_j x^{\nu_j^-} = -\frac{\nu_{ij}}{x_i}\kappa_j x^{\nu_j^+}.$$

Setzt man nun $X = \operatorname{diag}\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $D = \operatorname{diag}\{\kappa_1 x^{\nu_1^+}, \ldots, \kappa_m x^{\nu_m^+}\}$, so folgt

$$r'(x) = -DN^{\mathsf{T}}X^{-1}, \quad r'(x)N = -DN^{\mathsf{T}}X^{-1}N.$$

Damit ist aufgrund der Injektivität von N klar, dass $r'(x)N$ invertierbar ist, und für die Projektion $P(x)$ erhalten wir die alternative Darstellung

$$P(x) = I - N(N^{\mathsf{T}}X^{-1}N)^{-1}N^{\mathsf{T}}X^{-1}.$$

Man kann unter realistischen Annahmen über f zeigen, dass $\tilde{f}$ tatsächlich das Vektorfeld ist, das beim Grenzübergang $k \to \infty$ aus (13.11) entsteht.

13.5 Geodätische

1. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende m-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit. Von besonderem Interesse sind die in Σ zwei Punkte $a, b \in \Sigma$ verbindenden Kurven minimaler Länge, die *Geodätischen*. In diesem Abschnitt leiten wir die Differentialgleichung für die Geodätischen her, und untersuchen ihre Eigenschaften. Da jedes Teilstück einer Geodätischen ebenfalls eine Geodätische ist, nehmen wir zunächst an, dass die Geodätische in einer Karte U_ϕ liegt, die zur Parametrisierung ϕ von Σ gehört. Es seien also $a = \phi(\alpha)$ und $b = \phi(\beta)$, und $x(t) = \phi(y(t))$ eine C^1-Kurve $\gamma(x)$ in U_ϕ, die a und b verbindet. Ihre Länge ist

$$l(\gamma(x)) = \int_0^T |\dot{x}(t)|_2 dt = \int_0^T |\dot{y}^k(t)\tau_k(t)|_2 dt = \int_0^T \sqrt{g_{kl}(y(t))\dot{y}^k(t)\dot{y}^l(t)}dt.$$

Sei $x(t) = \phi(y(t))$ die Parametrisierung einer Geodätischen der Klasse C^2 von a nach b. O.B.d.A. kann man annehmen, dass t die Bogenlänge ist, also dass $|\dot{x}(t)|_2 = 1$ für alle $t \in [0,T]$ ist. Variiert man nun $x(t)$ gemäß $u(t;s) := \phi(y(t)+sz(t))$, so hat die Funktion $s \mapsto l(\gamma(u(\cdot;s)))$ für jedes $z \in C^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ mit $z(0) = z(T) = 0$ in $s = 0$ ein Minimum, daher gilt $dl(\gamma(u(\cdot;0)))/ds = 0$. Differentiation des Integranden $|\dot{u}(t;s)|_2$ nach s ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|\dot{u}(t;s)|_2 &= (2|\dot{u}(t;s)|_2)^{-1}\frac{d}{ds}[g_{kl}(y+sz)(\dot{y}^k + s\dot{z}^k)(\dot{y}^l + s\dot{z}^l)]\\ &= (2|\dot{u}(t;s)|_2)^{-1}[\partial_j g_{kl} z^j(\dot{y}^k + s\dot{z}^k)(\dot{y}^l + s\dot{z}^l) + 2g_{kl}\dot{y}^k\dot{z}^l + 2sg_{kl}\dot{z}^k\dot{z}^l],\end{aligned}$$

also für $s = 0$,

$$\frac{d}{ds}|\dot{u}(t;0)|_2 = \frac{1}{2}\partial_j g_{kl} z^j \dot{y}^k \dot{y}^l + g_{kl}\dot{y}^k \dot{z}^l,$$

da $|\dot{x}(t)|_2 = 1$ ist. Dies ergibt die Beziehung

$$0 = \frac{d}{ds} l(\gamma(u(\cdot;0))) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}\partial_j g_{kl}(y(t)) z^j(t)\dot{y}^k(t)\dot{y}^l(t) + g_{kl}(y(t))\dot{y}^k(t)\dot{z}^l(t)\right) dt,$$

also nach partieller Integration des zweiten Summanden mit $z(0) = z(T) = 0$,

$$0 = \int_0^T z^j(t)[\frac{1}{2}\partial_j g_{kl}(y(t))\dot{y}^k(t)\dot{y}^l(t) - \partial_l g_{kj}(y(t))\dot{y}^k(t)\dot{y}^l(t) - g_{kj}(y(t))\ddot{y}^k]dt.$$

Setzt man nun

$$\Lambda_{kl|j} = \frac{1}{2}[\partial_k g_{jl} + \partial_l g_{jk} - \partial_j g_{kl}], \quad \Lambda^r_{kl} = g^{rj}\Lambda_{kl|j},$$

so folgt mit einer Umbenennung in der Summation,

$$\partial_l g_{kj}\xi^k\xi^l = \partial_k g_{lj}\xi^k\xi^j,$$

die Relation

$$0 = \int_0^T z^j(t)[\Lambda_{kl|j}(y(t))\dot{y}^k(t)\dot{y}^l(t) + g_{kj}(y(t))\ddot{y}^k]dt.$$

Da die Testfunktionen in $L_2(0,T)$ dicht liegen, und die z^j beliebig aus C^1 mit Randwerten 0 gewählt werden können, folgt

$$\Lambda_{kl|j}(y(t))\dot{y}^k(t)\dot{y}^l(t) + g_{kj}(y(t))\ddot{y}^k = 0 \quad \text{für alle } t \in [0,T],\ j = 1,\dots,m,$$

oder nach Multiplikation mit g^{jr} und Summation über j

$$\ddot{y}^r + \Lambda^r_{kl}(y)\dot{y}^k\dot{y}^l = 0, \quad t \in [0,T],\ r = 1,\dots,m. \tag{13.12}$$

2. Dies sind die Differentialgleichungen der Geodätischen bzgl. ihrer Bogenlänge in lokalen Koordinaten. Die Koeffizienten Λ^r_{kl} heißen *Christoffel-Symbole* und spielen in der Differentialgeometrie eine wichtige Rolle. Eine andere Darstellung der Christoffel-Symbole erhält man so: Setze $\tau_{kj} := \partial_k\tau_j = \partial_k\partial_j\phi = \tau_{jk}$; dann folgt

$$\begin{aligned}
2\Lambda_{kl|j} &= \partial_k g_{jl} + \partial_l g_{jk} - \partial_j g_{kl}\\
&= \partial_k(\tau_j|\tau_l) + \partial_l(\tau_j|\tau_k) - \partial_j(\tau_k|\tau_l)\\
&= (\tau_{jk}|\tau_l) + (\tau_j|\tau_{kl}) + (\tau_{jl}|\tau_k) + (\tau_j|\tau_{kl}) - (\tau_{kj}|\tau_l) - (\tau_k|\tau_{lj})\\
&= 2(\tau_{kl}|\tau_j),
\end{aligned}$$

also gelten die Beziehungen

$$\Lambda_{kl|j} = (\tau_{kl}|\tau_j), \quad \Lambda^r_{kl} = g^{rj}\Lambda_{kl|j}.$$

Diese bedeuten, dass die Christoffel-Symbole Λ^r_{kl} die kontravarianten Komponenten der Projektion der Vektoren τ_{kl} auf den Tangentialraum von Σ sind und entsprechend $\Lambda_{kl|j}$ die kovarianten.

Ist $x(t)$ eine C^2-Kurve auf Σ, parametrisiert über die Bogenlänge, so ist $|\ddot{x}(t)|_2$ ihre Krümmung. Mit $x(t) = \phi(y(t))$ folgt

$$\dot{x} = \tau_k \dot{y}^k, \quad \ddot{x} = \tau_k \ddot{y}^k + \tau_{kl}\dot{y}^k\dot{y}^l.$$

Die Projektion von $\ddot{x}$ auf den Tangentialraum ist damit

$$P_\Sigma \ddot{x} = \tau_r \ddot{y}^r + P_\Sigma \tau_{kl}\dot{y}^k\dot{y}^l = \tau_r(\ddot{y}^r + \Lambda^r_{kl}\dot{y}^k\dot{y}^l),$$

$|P_\Sigma \ddot{x}(t)|_2$ wird *geodätische Krümmung* genannt. Diese ist somit für eine Geodätische gleich Null, die Geodätischen sind die Kurven auf Σ verschwindender geodätischer Krümmung.

Um zu einer koordinatenfreien Form der Gleichung für die Geodätischen zu kommen, beachte man die Relationen

$$\tau_r \Lambda^r_{kl}\dot{y}^k\dot{y}^l = P_\Sigma \tau_{kl}(\tau^k|\dot{x})(\tau^l|\dot{x}),$$

somit erhalten wir

$$\ddot{x} = (I - P_\Sigma)\tau_{kl}(\tau^k|\dot{x})(\tau^l|\dot{x}).$$

Als nächstes gilt

$$\nabla_\Sigma P_\Sigma = \nabla_\Sigma \tau_l \otimes \tau^l = \tau^k \otimes \partial_k(\tau_l \otimes \tau^l) = \tau^k \otimes [\tau_{kl} \otimes \tau^l + \tau_i \otimes \partial_k \tau^i],$$

sowie

$$0 = \partial_k(\tau_l|\tau^i) = (\tau_{kl}|\tau^i) + (\tau_l|\partial_k\tau^i),$$

also

$$P_\Sigma \partial_k \tau^i = (\partial_k \tau^i|\tau_l)\tau^l = -(\tau_{kl}|\tau^i)\tau^l,$$

was auf

$$\nabla_\Sigma P_\Sigma = \tau^k \otimes (\tau_{kl} - P_\Sigma \tau_{kl}) \otimes \tau^l$$

führt. Die invariante Darstellung der Gleichung für die Geodätischen in Bogenlänge lautet damit

$$\ddot{x} = (\dot{x}|[\nabla_\Sigma P_\Sigma(x)]\dot{x}). \tag{13.13}$$

Man beachte, dass $\ddot{x}(t)$ senkrecht auf $T_{x(t)}\Sigma$ steht, also gilt $(\ddot{x}(t)|\dot{x}(t)) = 0$. Folglich ist $|\dot{x}|_2 \equiv 1$ für $|\dot{x}(0)|_2 = 1$, daher beschreibt (13.13) Geodätische in Bogenlänge. Dass (13.13) tatsächlich Lösungen $x(t)$ hat, die in Σ bleiben, wenn die Anfangswerte $x(0) = x_0 \in \Sigma$ und $\dot{x}(0) = x_1 \in T_{x_0}\Sigma$ sind, sieht man folgendermaßen.

$$\frac{d}{dt}[P_\Sigma(x)\dot{x} - \dot{x}] = (\dot{x}|\nabla_\Sigma P_\Sigma(x)\dot{x}) + P_\Sigma(x)\ddot{x} - \ddot{x} = P_\Sigma(x)\ddot{x} = 0.$$

Schreibt man (13.13) als System

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = (v|[\nabla_\Sigma P_\Sigma(x)]v), \tag{13.14}$$

so wird deutlich, dass mit $|v|_2 \equiv 1$ auch Beschränktheit von $x(t)$ auf endlichen Zeitintervallen folgt, d.h. die Lösungen existieren global. Man beachte auch die Invarianz der Gleichung unter Zeitumkehr, daher genügt es sie für positive t zu betrachten. Ist die Mannigfaltigkeit aus C^2, dann ist $\nabla_\Sigma P_\Sigma(x)$ lediglich stetig, daher ist zwar globale Existenz für das Anfangswertproblem mit dem Satz von Peano gesichert, aber Eindeutigkeit der Lösungen bleibt unklar. Aber natürlich sind die Lösungen eindeutig, wenn Σ zur Klasse C^3 gehört, was in der Differentialgeometrie ohnehin meist gefordert wird. In diesem Fall erzeugt (13.13) also einen globalen Fluss auf Σ, den wir den *geodätischen Fluss* nennen. Wir fassen zusammen

Satz 13.5.1. *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende m-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^3. Dann besitzt* (13.13) *zu jedem Anfangswert $x_0 \in \Sigma$, $x_1 \in T_{x_0}\Sigma$, $|x_1|_2 = 1$ genau eine globale Lösung in Σ. Daher erzeugt* (13.13) *einen globalen Fluss auf Σ, den* geodätischen Fluss. *Ferner gilt $|\dot{x}|_2 \equiv 1$, d.h. x ist die Parameterdarstellung der Geodätischen $\gamma(x)$ in der Bogenlänge.*

Betrachten wir ein einfaches

Beispiel. *Der geodätische Fluss auf der Sphäre.* Sei $\Sigma = \mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $(P_\Sigma u|v) = (u|v) - (x|u)(v|x)$, also $\nabla_x(P_\Sigma u|v) = -u(v|x) - (u|x)v$, $\nu(x) = x$, somit $(\nu|(\nabla_x P_\Sigma u|v)) = -2(x|u)(x|v)$, und schließlich

$$\nabla_\Sigma(P_\Sigma u|v) = -(v|x)u - (u|x)v + 2x(u|x)(v|x).$$

Dies ergibt mit $u = \dot{x}$ und $(x|\dot{x}) = 0$

$$(\dot{x}|\nabla_\Sigma(P_\Sigma \dot{x}|v)) = -(v|x)|\dot{x}|_2^2 = -(v|x),$$

folglich ist

$$\ddot{x} = -x$$

die Gleichung der Geodätischen auf der Sphäre.

3. Sei Σ als Nullstellenmenge $\Sigma = g^{-1}(0)$ gegeben, wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ aus der Klasse C^2 sei, und $g'(x)$ habe vollen Rang für jedes $x \in \Sigma$. Dann gilt in einem Punkt $x \in \Sigma$

$$g'(x)\tau_k = 0, \quad g''(x)\tau_k\tau_l + g'(x)\tau_{kl} = 0, \quad k, l = 1, \ldots, m.$$

Da in diesem Fall $P_\Sigma = I - [g']^\mathsf{T}(g'[g']^\mathsf{T})^{-1}g'$ ist, folgt

$$\tau_{kl} - P_\Sigma\tau_{kl} = -[g']^\mathsf{T}(g'[g']^\mathsf{T})^{-1}g''\tau_k\tau_l.$$

Daher bekommt (13.13) in diesem Fall die folgende Form

$$\ddot{x} = -[g'(x)]^\mathsf{T}(g'(x)[g'(x)]^\mathsf{T}(g''(x)\dot{x}\dot{x}).$$

Dies ist genau die Gleichung für ein Problem 2. Ordnung mit der Zwangsbedingung $g(x) = 0$, wenn das Vektorfeld $f(x, \dot{x}) = 0$ ist; vgl. Abschnitt 12.4.2. Daher kann man eine Geodätische als Bahn eines Teilchens mit Geschwindigkeit Eins auf Σ in Abwesenheit von Kräften interpretieren.

Nochmals bezugnehmend auf Abschnitt 12.4.2 ist somit

$$\tilde{f}(x, y) = P_\Sigma f(x, y) + (y|\nabla_\Sigma P_\Sigma y).$$

Also wird die durch Σ vorgegebene Zwangsbewegung eines Teilchens im Kraftfeld f durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = P_\Sigma(x) f(x, \dot{x}) + (\dot{x}|\nabla_\Sigma P_\Sigma(x)\dot{x}) \tag{13.15}$$

beschrieben. Das effektive Kraftfeld ist die Summe aus dem auf $T\Sigma$ projizierten Kraftfeld f und der Zwangskraft aus der Gleichung für die Geodätischen. Ist $f(x, \dot{x}) = -\nabla\psi(x)$, so folgt auch hier Energieerhaltung

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|_2^2 + \psi(x(t))] = 0,$$

da $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}\Sigma$ ist und der geodätische Term auf $T_{x(t)}\Sigma$ senkrecht steht. Die Zwangsbedingung verbraucht also keine Energie, sofern sie nicht Reibung erzeugt.

Ist allgemeiner $f(x, \dot{x}) = -\nabla\psi(x) - g(\dot{x})$, so erhält man entsprechend

$$\dot{E}(t) := \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|_2^2 + \psi(x(t))] = -(g(\dot{x})|\dot{x}),$$

also ist die Energie auch hier eine Ljapunov-Funktion wenn $(g(u)|u) \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ gilt, und eine strikte, falls $(g(u)|u) > 0$ für alle $u \neq 0$ gilt. Daher lassen sich die Resultate für $\ddot{x} + g(\dot{x}) + \nabla\psi(x) = 0$ im $\mathbb{R}^n$ auf das entsprechende Problem (13.15) mit Zwangsbedingungen übertragen.

13.6 Das Zweikörperproblem

Zum Abschluss dieses Buchs kehren wir an den Ausgangspunkt, nämlich zu Newton zurück. In diesem Abschnitt kommt es nicht so sehr auf Theorie an, sondern auf eine geschickte Parametrisierung, die die Erhaltungssätze, also die invarianten Mannigfaltigkeiten des Problems ausnutzt. Wir denken, dass die Analysis des Zweikörperproblems zur Allgemeinbildung jedes Mathematikers gehört.

Es sei x_j die Position des Körpers K_j, dessen Masse sei m_j, $j = 1, 2$. Newtons Ansatz beruht auf der Annahme, dass die Körper sich anziehen, die wirkende Kraft ist proportional zum inversen Quadrat ihres Abstands. Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= \phi'(|x_1 - x_2|_2)\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|_2}, \qquad && x_1(0) = x_{10},\ \dot{x}_1(0) = x_{11}, \\ m_2\ddot{x}_2 &= -\phi'(|x_1 - x_2|_2)\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|_2}, \qquad && x_2(0) = x_{20},\ \dot{x}_2(0) = x_{21}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ aus C^2, im Newtonschen Fall $\phi(r) = \gamma m_1 m_2/r$, wobei $\gamma > 0$ die *Gravitationskonstante* bezeichnet.

1. *Reduktion auf ein Zentralfeldproblem.* Die Hauptvariable in diesem System ist $x = x_1 - x_2$. Nur diese tritt in den Kräften auf, daher ist es naheliegend, eine Gleichung für x herzuleiten. Dazu beachte man, dass $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$ ist, also ist die Bewegung des *Schwerpunktes* x_S definiert durch

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

linear. Genauer gilt

$$x_S(t) = x_{S0} + x_{S1}t, \quad x_{S0} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2},\ x_{S1} = \frac{m_1 x_{11} + m_2 x_{21}}{m_1 + m_2};$$

physikalisch ist dies die Erhaltung des Gesamtimpulses. Nun ist

$$x_1 = x + x_2 = x + \frac{m_1 + m_2}{m_2}\frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2} = x + \frac{m_1 + m_2}{m_2}x_S - \frac{m_1}{m_2}x_1,$$

folglich

$$x_1 = x_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2}x;$$

ebenso erhält man

$$x_2 = x_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2}x.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass es genügt, die Variable x zu betrachten. Wegen $\ddot{x}_S = 0$ folgt aus diesen Identitäten

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} = m_1\ddot{x}_1 = \phi'(|x|_2)\frac{x}{|x|_2},$$

also ist das Problem auf das *Zentralfeldproblem*

$$m\ddot{x} = \phi'(|x|_2)\frac{x}{|x|_2}, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1, \tag{13.16}$$

reduziert, wobei $m := m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ die sog. *reduzierte Masse* bezeichnet.

2. Das Problem (13.16) besitzt zwei Erhaltungssätze, nämlich Energie und Drehimpuls. Diese erhält man wie folgt. Multipliziere (13.16) skalar mit $\dot{x}$; dies ergibt

$$\frac{d}{dt}[\frac{m}{2}|\dot{x}|_2^2 - \phi(|x|_2)] = (m\ddot{x} - \phi'(|x|_2)\frac{x}{|x|_2}|\dot{x}) = 0,$$

also ist die Energie E konstant:

$$\frac{m}{2}|\dot{x}|_2^2 - \phi(|x|_2) \equiv E.$$

Als nächstes bildet man das Kreuzprodukt von (13.16) mit x; das führt auf

$$0 = \phi'(|x|_2)\frac{x \times x}{|x|_2} = m\ddot{x} \times x = m\frac{d}{dt}(\dot{x} \times x),$$

also ist $\dot{x} \times x \equiv a$ konstant. Dies bedeutet, dass sowohl x als auch $\dot{x}$ für alle Zeiten orthogonal zu a sind. Ist $a = 0$, dann sind x und $\dot{x}$ sogar linear abhängig, also ebenfalls orthogonal zu einem Vektor $a \neq 0$. Daher läuft die Bewegung in der Ebene $(x|a) = 0$ ab.

3. Aus diesem Grund ist es naheliegend, das Koordinatensystem für die Parametrisierung so zu wählen, dass $a = e_3$ ist; man erhält dann $x_3 \equiv 0$. In der (x_1, x_2)-Ebene führt man zweckmäßigerweise Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ ein. Dann folgt

$$\dot{x}_1 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{x}_2 = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

also insbesondere

$$|\dot{x}|_2^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \quad E = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - \phi(r).$$

Weiter gilt

$$\dot{r} = \dot{x}_1\cos\theta + \dot{x}_2\sin\theta, \quad r\dot{\theta} = -\dot{x}_1\sin\theta + \dot{x}_2\cos\theta,$$

folglich

$$\ddot{r} = \ddot{x}_1\cos\theta + \ddot{x}_2\sin\theta + (-\dot{x}_1\sin\theta + \dot{x}_2\cos\theta)\dot{\theta} = \phi'(r)/m + r\dot{\theta}^2,$$

und

$$r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} = -\ddot{x}_1\sin\theta + \ddot{x}_2\cos\theta - (\dot{x}_1\cos\theta + \dot{x}_2\sin\theta)\dot{\theta} = -\dot{r}\dot{\theta},$$

also

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Die letzte Gleichung ergibt nach Multiplikation mit r

$$\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} = 0, \qquad \text{also} \qquad r^2\dot{\theta} \equiv h, \tag{13.17}$$

das *2. Keplersche Gesetz*, welches physikalisch die Erhaltung des Drehimpulses beschreibt. Setzt man diese Gleichung in die Gleichung für r ein, so erhält man die von θ entkoppelte Gleichung für r:

$$\ddot{r} = \frac{1}{m}\phi'(r) + \frac{h^2}{r^3}. \tag{13.18}$$

(13.17) eingesetzt in die Energie führt schließlich auf

$$\frac{m}{2}[\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}] - \phi(r) = E. \tag{13.19}$$

4. Auf diese Weise konnte das ursprünglich 12-dimensionale System unter Ausnutzung der vorhandenen Symmetrien und invarianten Mannigfaltigkeiten, sowie durch geschickte Parametrisierung auf eine einzige Differentialgleichung 1. Ordnung, nämlich auf die für r zurückgeführt werden. Hat man r bestimmt, so folgt θ durch Integration der Gleichung $\dot{\theta} = h/r^2$. Das Potential $\phi(r)$ tritt nur noch in der Gleichung für r auf. Um die Bahnkurven zu bestimmen, beachte man, dass im generischen Fall $h > 0$ die Funktion $\theta(t)$ strikt monoton, also invertierbar ist. Daher suchen wir r als Funktion von θ anstelle als Funktion von t. Nun gilt mit $u = h/r$ und der Kettenregel

$$\dot{r} = r'\dot{\theta} = r'\frac{h}{r^2} = -u',$$

also ergibt (13.19)

$$u'^2 + u^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2\phi(h/u)}{m}.$$

Verwendet man nun das Newtonsche Gesetz $\phi(r) = \gamma m_1 m_2/r$ so erhält man

$$u'^2 + u^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2M\gamma u}{h},$$

mit $M := m_1 + m_2$ oder nach Differentiation

$$u'' + u = \gamma M/h.$$

Die Lösung dieses Problems ist durch $u(\theta) = \gamma M/h + a\cos(\theta+\theta_0)$ mit einem $a \geq 0$ und $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ gegeben, also

$$r = r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

wobei wir o.B.d.A. $\theta_0 = 0$ angenommen haben. Dabei sind $p = h^2/(\gamma M) > 0$ und $\varepsilon = ah/(\gamma M) > 0$ gesetzt. Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts um den Brennpunkt $(0,0)$ in Polarkoordinaten: Für $\varepsilon = 0$ ist es ein Kreis, für $\varepsilon \in (0,1)$ eine Ellipse, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel, und für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel. Daraus folgt das *1. Keplersche Gesetz*. Der Zusammenhang zwischen der Energie E und dem Exzentrizitätsparameter ε ergibt sich aus der Beziehung

$$\frac{2E}{m} + \frac{\gamma^2 M^2}{h^2} = u'^2 + (u - \gamma M/h)^2 = a^2,$$

also

$$\varepsilon = ah/(\gamma M) = \sqrt{1 + 2Eh^2/(\gamma^2 M^2 m)}.$$

Die möglichen Energieniveaus sind durch die *minimale Energie* $E_0 = -\gamma^2 M^2 m/(2h^2)$ nach unten beschränkt. In diesem Fall wird eine Kreisbahn realisiert, mit Radius $h^2/(\gamma M) = -\gamma M m/(2E_0)$.

5. *Der dreidimensionale harmonische Oszillator.* Hier ist $\phi(r) = \frac{c}{2}r^2$. Dies führt auf die Gleichung

$$u'^2 + u^2 = \frac{2E}{m} + \frac{ch^2}{mu^2},$$

die mit der Substitution $v = u^2$ die Beziehung

$$v'^2 + 4v^2 = \frac{8E}{m}v + \frac{4ch^2}{m} \tag{13.20}$$

ergibt, also nach Differentiation

$$v'' + 4v = \frac{4E}{m}.$$

Die Lösung dieses Problems ist mit einem $\kappa \geq 0$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$

$$v(\theta) = \frac{E}{m}(1 + \kappa \cos(2(\theta + \theta_0))),$$

also

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{mh^2}{E}} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa \cos(2\theta)}},$$

wobei wir wie zuvor o.B.d.A. $\theta_0 = 0$ angenommen haben. Hier sind die Bahnkurven Kreise für $\kappa = 0$, Ellipsen für $0 < \kappa < 1$, Parabeln im Fall $\kappa = 1$, und Hyperbeln für $\kappa > 1$, der Mittelpunkt ist jeweils $(0, 0)$. Dabei ist κ wegen (13.20) durch

$$\kappa = \sqrt{1 + \frac{cmh^2}{E^2}}$$

gegeben. Folglich sind die Bahnkurven im Fall $c = 0$ Parabeln, für $c > 0$ Hyperbeln, und für $c < 0$ Ellipsen, d.h. alle Lösungen sind periodisch falls $c < 0$, und unbeschränkt für $c \geq 0$. Für $c \geq 0$ sind alle Energieniveaus möglich, andernfalls jedoch ist die minimale Energie $E_0 = \sqrt{-mch^2}$ $(c < 0)$, und diese realisiert eine Kreisbahn mit Radius $r_0 = \sqrt[4]{-mh^2/c}$.

6. *Stabilität von Kreisbahnen.* Sei zur Abkürzung $g(u) = u + \phi'(h/u)h/(mu^2)$ gesetzt. Equilibria der Gleichung $u'' + g(u) = 0$ entsprechen dann Kreisbahnen, die mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\theta} = h/r_*^2 = u_*^2/h$ durchlaufen werden. Wie steht es mit ihrer Stabilität? Schreibt man diese Gleichung als System

$$u' = v, \quad v' = -g(u),$$

so besitzt dieses die Ljapunov-Funktion $V_0(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(u)$, wobei $G(u)$ eine Stammfunktion zu $g(u)$ ist. Equilibria des Systems sind genau die Punkte $(u_*, 0)$ mit $g(u_*) = 0$, und dies sind genau die kritischen Punkte von V_0. Die zweite Ableitung von V_0 in $(u_*, 0)$ ist genau dann positiv definit, wenn $g'(u_*) > 0$ gilt. In diesem Fall ist $(u_*, 0)$ ein isoliertes Equilibrium und ein striktes Minimum für V_0. Daher ist Satz 5.5.4 anwendbar, der zeigt dass $(u_*, 0)$ stabil ist.

Ist andererseits $g'(u_*) < 0$, so hat die Linearisierung des Systems die zwei reellen Eigenwerte $\pm\sqrt{-g'(u_*)}$. Daher ist $(u_*, 0)$ nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität instabil.

Um die Bedeutung der Bedingungen $g(u_*) = 0$, $g'(u_*) > 0$ zu klären, berechnet man

$$g'(u_*) = 1 - 2\frac{h}{mu_*^3}\phi'(h/u_*) - \frac{h^2}{mu_*^4}\phi''(h/u_*) = 3 - \frac{h^2}{mu_*^4}\phi''(h/u_*).$$

Also ist $g'(u_*) > 0$ genau dann, wenn

$$\phi''(h/u_*) < \frac{3mu_*^4}{h^2} = -\frac{3u_*}{h}\phi'(h/u_*)$$

gilt bzw. mit $r_* = h/u_*$, wenn

$$\phi''(r_*) < -\frac{3}{r_*}\phi'(r_*)$$

ist. Für $\phi(r) = ar^\mu$, $r > 0$, ergibt dies die Bedingung $a\mu(\mu+2) < 0$, die im Fall des Newton Potentials $\phi(r) = \gamma m_1 m_2/r$ für $\gamma > 0$ erfüllt ist. Für den harmonischen Oszillator $\phi(r) = cr^2/2$ gilt sie im Falle $c < 0$; man beachte dass hier nur für $c < 0$ Kreisbahnen existieren.

Übungen

1. Sei $\Sigma = \mathbb{T}$ der Torus im $\mathbb{R}^3$, definiert durch

$$g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = [(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2 - 1]/2 = 0.$$

Berechnen Sie die Projektion P_Σ und zeigen Sie, dass projizierte Vektorfeld $\tilde{f} = P_\Sigma f$ für $f = [-x_2, x_1, \alpha/(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)]^\mathsf{T}$ die Gleichungen (9.3) in Abschnitt 9.2 ergibt.

2. Zeigen Sie, dass sich der irrationale Fluss auf dem Torus (9.3) in den kanonischen Toruskoordinaten (ϕ, θ) als das triviale System

$$\dot{\phi} = 1, \quad \dot{\theta} = \alpha$$

schreiben lässt.

3. *Das überdämpfte Pendel.* Betrachte die Gleichung $\dot{\theta} = \mu - \sin(\theta)$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^1$ im $\mathbb{R}^2$, wobei $\mu > 0$ ist. Zeigen Sie, dass für $\mu = 1$ eine Sattel-Knoten Verzweigung auftritt.

4. Parametrisieren Sie die Gleichung für das dreidimensionale Pendel mittels Polarkoordinaten. Interpretieren Sie das dabei auftretende Problem.

5. Leiten Sie die invariante Form der Gleichung für die Geodätischen auf dem Torus im $\mathbb{R}^3$ her.