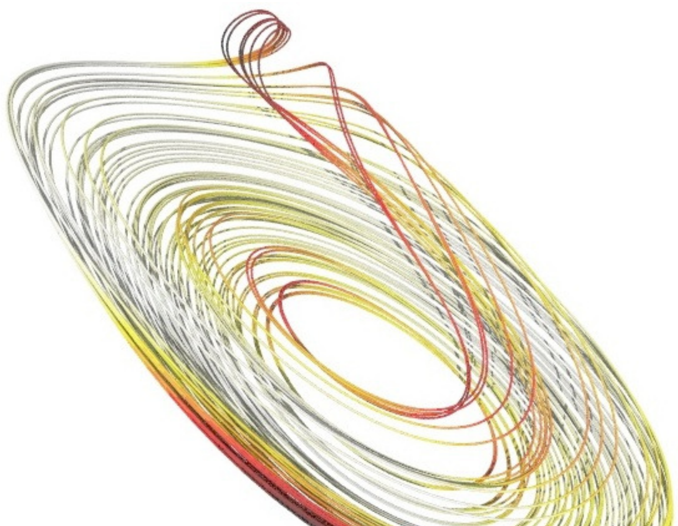
Technische Universität Wien

Institut für Analysis und Scientific Computing

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Mitschrift der Vorlesung, Sommersemester 2012
überarbeitet Sommersemester 2016



Vortragender: Univ.Prof. Jens Markus Melenk, PhD.

Eine Mitschrift von: Christian Aumayr, Lukas Beisteiner, Jürgen Gschwindl, Oliver Leodolter, Richard Rentrop, Markus Schöbinger

Das Titelbild zeigt Orbits der Rabinovich-Fabrikant Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
x' &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x \\
y' &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y \\
z' &= -2z(\alpha + xy)
\end{aligned}
$$

mit $\gamma = 0,87$ und $\alpha = 1,1$.

Wir danken Florian Brucker für die Grafik. Mehr davon gibt es unter:
http://www.florianbrucker.de/

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL

EINS

Einführung

Abkürzung: **ODE**— ordinary differential equation
Eine Differentialgleichung stellt eine Beziehung her zwischen einer Funktion und einigen ihrer Ableitungen.

Beispiel:

(i) $y'(t) + y(t) = 0 \quad \forall t \in (0,1)$ $[\![y'(t) = \frac{d}{dt} y(t)]\!]$

(ii) $y''(t) + y(t)y'(t) = 1 \quad \forall t \in (1,2)$

(iii) $\frac{\partial}{\partial t} y(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t,x) = 0 \quad \forall t \in (0,1),\ x \in (3,4)$

(iv) $(y'(t))^2 + y^2(t) = 1 \quad \forall t \in (0,1)$

■

Falls alle Ableitungen nach derselben Variablen genommen werden, spricht man von einer **ODE**, falls nach verschiedenen Variablen abgeleitet wird, von einer **partiellen Differentialgleichung** (**PDE** - partial differential equation).

(i),(ii),(iv) - ODE
(iii) - PDE

1.1 Einige Beispiele

Beispiel 1.1. (Wachstum einer Population)
Sei $y(t)$ = Größe einer Population zum Zeitpunkt t (z.B. Anzahl Bakterien, Kaninchen,...).
Man beobachtet: für kleine Zeitinkremente Δt gilt:

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx \alpha \Delta t y(t), \quad \alpha > 0$$

Für kleine Δt ergibt sich als Modell:

$$y'(t) = \alpha y(t) \tag{1.1}$$

Falls $y(t_0) = y_0$ bekannt ist, dann ist die Lösung von (1.1) gegeben durch $y(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)}$. ■

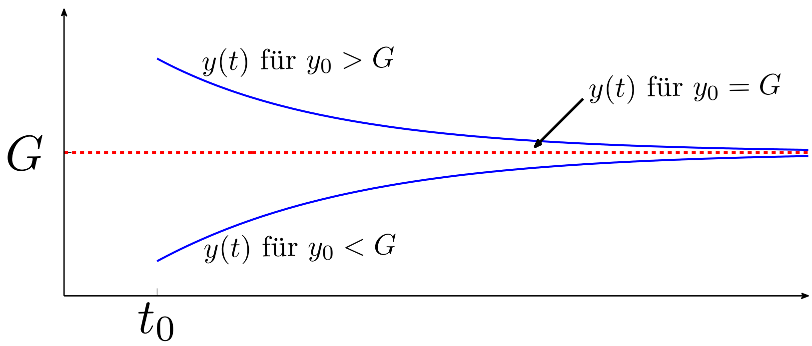
Beispiel 1.2. („logistische Differentialgleichung“)
Beobachtung: exponentielles Wachstum wie in Beispiel 1.1 ist oft unrealistisch, weil z.B. Resourcen begrenzt sind.

Man kann z.B. (1.1) durch die ODE

$$y'(t) = \alpha y(t)(G - y(t)) \tag{1.2}$$

mit Parametern $\alpha, G \in \mathbb{R}$ ersetzen.
Lösung von (1.2) mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ ist

$$y(t) = G \frac{1}{1 + \left(\frac{G}{y_0} - 1\right) e^{-\alpha G(t-t_0)}}$$



Beobachtung:

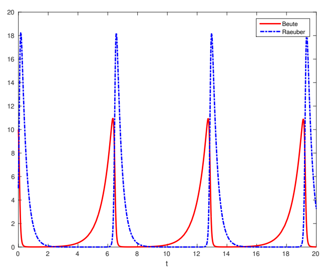
- Das Langzeitverhalten (für $t \to +\infty$) ist immer $\lim_{t\to\infty} y(t) = G$.
- Lösung $y(t) \equiv G$ heißt **Gleichgewichtslösung**.

■

Beispiel 1.3. („Lotka-Volterra / Räuber-Beute-Modell“)
2 Spezies: $x(t)$ = Anzahl Beutetier
$y(t)$ = Anzahl Räuber

$$x'(t) = \alpha x(t) - \beta y(t)x(t)$$
$$y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)$$

Beobachtung: Es gibt stabile, **periodische** Lösungen.



Bemerkung: Es handelt sich um ein System von gekoppelten ODEs. ■

Beispiel 1.4. („Gleichgewichtsreaktion“)
$A + B \rightleftharpoons P \quad [\![H^+ + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+$ oder $2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-]\!]$
$c_A, c_B, c_P =$ Konzentration der Stoffe A, B, P.

$$\begin{aligned}
c_A' &= -k^+ c_A c_B + k^- c_P \\
c_B' &= -k^+ c_A c_B + k^- c_P \\
c_P' &= +k^+ c_A c_B - k^- c_P
\end{aligned}$$

Erhaltungsgrößen: $(c_A + c_P)' = 0 = (c_B + c_P)'$, damit sind $c_A + c_P$ und $c_B + c_P$ Erhaltungsgrößen. ■

1.2 Fragestellungen bei ODEs

(1) Existenz und Eindeutigkeit?

(2) Existenzbereich der Lösung: existiert eine Lösung für alle $t > t_0$?
$[\![$z.B. $y'(t) = (y(t))^2$ mit $y(0) = 1$ hat die Lösung $y(t) = \frac{1}{1-t}]\!]$

(3) (stetige) Abhängigkeit der Lösung von Parametern, Anfangsbedingung, etc. („Sensitivität“)

(4) gibt es Erhaltungsgrößen?

(5) Langzeitverhalten?

(6) periodische Lösungen?

(7) Stabilität des Langzeitverhaltens?

(8) sind Lösungen positiv?

(9) numerische Behandlung?

KAPITEL

ZWEI

Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen

2.1 Begriffe

Die allgemeine Form eines Systems von ODEs ist

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m)}(t)) = 0 \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

für eine gegebene Funktion F und m, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Die höchste auftretende Ableitungsordnung m ist die **Ordnung** der ODE,

(ii) falls $y : I \to \mathbb{R}$, dann heißt die ODE **skalar**,

(iii) falls $y : I \to \mathbb{R}^d$ mit $d > 1$, dann heißt die ODE **vektorwertig**,

(iv) falls $n > 1$, dann liegt ein **System** von ODEs vor,

(v) falls (2.1) die Form $\tilde{F}(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) - y^{(m)}(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$ hat, dann heißt (2.1) **explizit**, andernfalls **implizit**.

(vi) **Lineare Systeme** haben die Form

$$y_1^{(m)}(t) = g_1(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{1,j,k}(t) y_k^{(j)}(t)$$

$$\vdots$$

$$y_d^{(m)}(t) = g_d(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{d,j,k}(t) y_k^{(j)}(t)$$

für gegebene Funktionen g_i, $\alpha_{i,j,k}$.
Das lineare System heißt **homogen**, falls $g_1 \equiv g_2 \equiv \dots \equiv g_d \equiv 0$, andernfalls **inhomogen**.

(vii) Lineare Systeme 1. Ordnung haben die Form $(n = d)$

$$y_i'(t) = g_i(t) + \sum_{k=1}^{d} a_{kj}(t) y_j(t), \qquad i = 1, \dots, d$$

kompakter formuliert

$$\underline{y}'(t) = \underline{g}(t) + \underline{\underline{A}}(t)\underline{y}(t) \quad \text{mit } \underline{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_d(t))^T, \ \underline{\underline{A}}(t) \text{ ist eine Matrix.}$$

Beispiel 2.1.

(i) $y''' - 5ty' + 7y = 0$ Ordnung 3, skalar, linear, homogen, explizit

(ii) $t^2y''' - 5ty' + 7y = 0$ Ordnung 3, implizit

(iii) $y_1' = f_1(t, y_1, y_2)$ System, Ordnung 1, explizit
$y_2' = f_2(t, y_1, y_2)$

■

Von zentraler Bedeutung für die Theorie von ODEs sind explizite Systeme 1. Ordnung, denn

1. Implizite ODEs 1. Ordnung können oft (zumindest theoretisch) in explizite umgewandelt werden.

   - **Beispiel:** $(y + t)y' - ty = 0$ ist implizit, aber die explizite Form ist $y' = \frac{ty}{y+t}$.

   - Für allgemeine implizite ODEs der Form $F(t, y, y') = 0$ liefert der Satz über implizite Funktionen ⟦ENGL 6.68.⟧ unter geeigneten Voraussetzungen eine Darstellung der Form $y' = f(t, y)$.

2. Die explizite skalare ODE $y^{(m)} = F(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ lässt sich äquivalent als System 1. Ordnung schreiben durch Einführen der folgenden Variablen $y_1, y_2, \dots, y_m$:

$$\begin{aligned} y_1 &:= y \\ y_2 &:= y' = y_1' \\ y_3 &:= y'' = y_2' \\ &\vdots \\ y_m &:= y^{(m-1)} = y_{m-1}' \end{aligned}$$

   Damit ist die ODE $y^{(m)} = F(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{m-1}' &= y_m \\ y_m' &= F(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

Definition 2.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G; \mathbb{R}^d)$
Eine auf dem (offenen) Intervall $J \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion y heißt eine Lösung von $y' = f(t, y)$, falls

(i) $y \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$

(ii) $\operatorname{graph} y := \{(t, y(t)) \mid t \in J\} \subset G$

(iii) $y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall\, t \in J$

Definition 2.3. Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G;\mathbb{R}^d)$, $(t_0, y_0) \in G$.
Eine auf einem offenen Intervall J definierte Funktion y heißt Lösung des AWP

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

falls

(i) $t_0 \in J$

(ii) $y \in C^1(J;\mathbb{R}^d)$ löst $y' = f(t,y)$ im Sinne von Definition 2.2.

(iii) $y(t_0) = y_0$

2.2 Existenz und Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen

Wir betrachten

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2.2}$$

und stellen folgende Fragen:

(i) Existenz?

(ii) Eindeutigkeit?

(iii) Wie groß ist das maximale Existenzintervall?

(iv) Wie hängt die Lösung von den Anfangsbedingungen ab?

Beispiel 2.4. (*Verlust der Eindeutigkeit*)
Betrachte das AWP

$$y' = f(t,y), \qquad f(t,y) = \sqrt{|y|}, \quad t_0 = 0,\ y_0 = 0 \tag{2.3}$$

Dann gilt:

$$y_1(t) = 0, \qquad y_2(t) := \begin{cases} 0 & ,t \leq 0 \\ \frac{1}{4}t^2 & ,t > 0 \end{cases}$$

sind Lösungen von (2.3). Tatsächlich ist jede Funktion der Form

$$y(t) := \begin{cases} 0 & ,t \leq c \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & ,t > c \end{cases}$$

mit $c \geq 0$ eine Lösungen des AWP (2.3). ∎

Bemerkung: Der Verlust der Eindeutigkeit der Lösungen des AWP (2.3) ist der Tatsache geschuldet, dass f *nur* stetig ist und nicht stetig differenzierbar. Der folgende Satz von Picard-Lindelöf gibt Existenz und Eindeutigkeit, falls f *ein bisschen mehr* Glattheit hat. ∎

2.2.1 Picard-Lindelöf

Satz 2.5. (*Picard-Lindelöf*):

Vor.: Seien $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Sei $\mathfrak{R} := \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, ||x - y_0||_{\mathbb{R}^d} \leq b\}$, $f \in C(\mathfrak{R}; \mathbb{R}^d)$. Sei f lipschitzstetig im 2. Argument d.h. $\|f(t,x) - f(t,z)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L\,\|x - z\|_{\mathbb{R}^d}\ \forall (t,x),(t,z) \in \mathfrak{R}$.
Definiere: $M := \|f\|_{C(\mathfrak{R},\mathbb{R}^d)}$, $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Beh.: Dann gilt:

(i) für $J := (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ existiert eine Lösung $y \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ des AWP

(2.4) $$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

(ii) Die Lösung ist eindeutig im folgenden Sinne: jede weitere Lösung $\tilde{y} \in C^1(\tilde{J}, \mathbb{R}^d)$ des AWP erfüllt $y(t) = \tilde{y}(t) \quad \forall t \in J \cap \tilde{J}$

Der Beweis beruht auf

(a) Umformulieren des AWP (2.4) in eine Integralgleichung in Fixpunktform

(b) Banachscher Fixpunktsatz

Lemma 2.6. (*Banachscher Fixpunktsatz*):

Vor.: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Es gelte

(a) $\emptyset \neq A \subset X$ abgeschlossene Teilmenge

(b) $T : A \to A$ $[\![T$ ist Selbstabbildung$]\!]$

(c) T ist Kontraktion, das heißt $\exists\, q \in (0,1)$, so dass

$$\|T(x) - T(y)\|_X \leq q\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in A$$

Beh.: Dann gilt

(i) $\exists!\ \bar{x} \in A$ mit $\bar{x} = T(\bar{x})$

(ii) $\forall x_0 \in A$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ gegeben durch $x_{n+1} = T(x_n)$ gegen $\bar{x}$.

Beweis: Siehe ENGL 6.68. und BLÜMLINGER 7.1.1 ■

Lemma 2.7.
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G; \mathbb{R}^d), (t_0, y_0) \in G$, $J \subset \mathbb{R}$ Intervall mit $t_0 \in J$.
Beh.: Dann sind die Aussagen (i) & (ii) äquivalent:

(i) $y \in C^1(J; \mathbb{R}^d)$ löst das AWP $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$

(ii) $y \in C(J; \mathbb{R}^d)$ löst die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \quad \forall t \in J \tag{2.5}$$

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii) : für alle $t \in J$ ist

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds \underset{\substack{\text{y löst} \\ \text{das AWP}}}{=} y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

(ii)$\Rightarrow$(i):

- (2.5) impliziert, dass $\{(t, y(t)) | t \in J\} \subset G$
  ⟦sonst ist die rechte Seite in (2.5) nicht definiert⟧
- $f \in C(G; \mathbb{R}^d)$ impliziert, dass $t \mapsto f(t, y(t))$ stetig auf J ist
- (2.5) impliziert damit $y \in C^1(J; \mathbb{R}^d)$
- (2.5) impliziert damit $y'(t) = f(t, y(t))\ \forall t \in J$ und $y(t_0) = y_0$ ∎

Beweis (*von Satz 2.5.*):

- Betrachte $\overline{J} := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ und den Banachraum $X := C(\overline{J}; \mathbb{R}^d)$ versehen mit der Norm $\|z\|_X := \max_{t \in \overline{J}} \left(\|z(t)\|_{\mathbb{R}^d}\, e^{-2L|t-t_0|} \right)$
- Definiere $A \subseteq X$ durch $A := \left\{ z \in C(\bar{J}; \mathbb{R}^d) \ : \ \|z(t) - y_0\|_{\mathbb{R}^d} \le b \quad \forall t \in \bar{J} \right\}$.
- A ist abgeschlossen (bezüglich $\|\cdot\|_X$): Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset A$ und $z_n \to z \in X$.
  Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \max_{t\in\bar{J}} \|z_n(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^d}\ e^{-2L|t-t_0|} = 0 \\ \Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \max_{t\in\bar{J}} \|z_n(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 0 \\ \Rightarrow &\|z(t) - y_0\|_{\mathbb{R}^d} \le \underbrace{\|z(t) - z_n(t)\|_{\mathbb{R}^d}}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty} + \underbrace{\|z_n(t) - y_0\|_{\mathbb{R}^d}}_{\le b, \text{ weil } z_n \in A} \\ \Rightarrow &z \in A \end{aligned}$$

- Definiere die Abbildung $T : A \to X$ durch

$$(Tx)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\ .$$

- T ist wohldefiniert: $x \in A$ impliziert für $t \in \bar{J} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, dass $\|x(t) - y_0\|_{\mathbb{R}^d} \leq b$. Das heißt:

$$\forall t \in \bar{J} \ (t, x(t)) \in \mathfrak{R} = \{(s, z) \ : \ |s - t_0| \leq a, \ \|z - y_0\|_{\mathbb{R}^d} \leq b\}$$

- Die Abbildung T bildet nach A ab: Sei $x \in A$, $t \in \bar{J}$. Dann gilt:

$$\|(Tx)(t) - y_0\|_{\mathbb{R}^d} = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \ ds \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\underbrace{s, x(s)}_{\in \mathfrak{R}})\|_{\mathbb{R}^d} \ ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M \ ds \right| \leq \alpha \cdot M \leq b$$

damit ist $Tx \in A$.

- Die Abbildung $T : A \to A$ ist eine Kontraktion: Seien $x, z \in A$

$$(Tz)(t) - (Tx)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s)) \ ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \ ds = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s)) - f(s, x(s)) \ ds$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \|(Tz)(t) - (Tx)(t)\|_{\mathbb{R}^d} &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, (z(s)) - f(s, x(s)) \ ds \right\|_{\mathbb{R}^d} \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, z(s)) - f(s, x(s))\|_{\mathbb{R}^d} \ ds \right| \quad [\![\text{Betrag, weil } t < t_0 \text{ möglich}]\!] \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \, \|z(s) - x(s)\|_{\mathbb{R}^d} \ ds \right| \\
&= \left| L \int_{t_0}^{t} \|z(s) - x(s)\|_{\mathbb{R}^d} \, e^{-2L|s-t_0|} e^{2L|s-t_0|} \ ds \right| \\
&\leq L \left(\max_{s \in \bar{J}} e^{-2L|s-t_0|} \, \|z(s) - x(s)\|_{\mathbb{R}^d} \right) \left| \int_{t_0}^{t} e^{2L|s-t_0|} \ ds \right| \\
&\leq L \|z - x\|_X \frac{1}{2L} e^{2L|t-t_0|}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Tx - Tz\|_X \leq \frac{1}{2} \|x - z\|_X \quad \text{Das heißt } T \text{ ist Kontraktion.}$$

- Der Banachsche Fixpunktsatz liefert damit eine Lösung $y \in A$ mit $y = Ty$.
- Nach Lemma 2.7 ist y damit Lösung des AWP.
- Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes (Übung). *Hinweis:* zeigen Sie für beliebiges, abgeschlossenes $J' = \overline{J'}$ mit $J' \subset J \cap \tilde{J}$ mittels Banachschem Fixpunktsatz angewandt auf T auf der Menge der Menge $\widetilde{A} := \{z \in C(J'; \mathbb{R}) \colon \|z(t) - y_0\|_{\mathbb{R}^d} \leq b \quad \forall t \in \overline{J'}\}$, daß $y|_{J'} = \tilde{y}|_{J'}$. (Übung).

■

Übung: $(X, \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum (Übungsbeispiel 2.6.) ▪

2.2.2 globale Eindeutigkeit

Der Satz von Picard-Lindelöf liefert lokale Existenz und Eindeutigkeit. Wesentlich ist dabei die Lipschitzstetigkeit im 2. Argument. Wir definieren deshalb

Definition 2.8. Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $f \in C(G;\mathbb{R}^d)$.
f heißt lokal lipschitzstetig im 2. Argument, falls es für jedes $(t,y) \in G$ eine Umgebung U von (t,y) gibt und ein $L_U > 0$ gibt, so dass

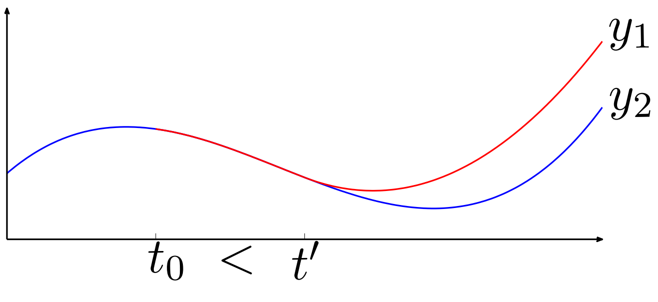
$$\left\|f(\widetilde{t},x) - f(\widetilde{t},z)\right\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_U \left\|x-z\right\|_{\mathbb{R}^d} \qquad \forall (\widetilde{t},x),\ (\widetilde{t},z) \in U$$

Übung: $f \in C^1(G;\mathbb{R}^d) \Rightarrow f$ lokal lipschitzstetig im 2. Argument (Übungsbeispiel 2.1.) ▪
Übung: Zeigen Sie: f ist lokal lipschitzstetig im 2. Argument $\iff$ für jedes kompakte $K \subset G$ existiert ein $L_K > 0$, so daß

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_K \|x-y\|_{\mathbb{R}^d} \qquad \forall (t,x),(t,y) \in K.$$

▪

Lemma 2.9. (*lokale Eindeutigkeit impliziert globale Eindeutigkeit*):
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, f lokal lipschitzstetig im 2. Argument, $(t_0,y_0) \in G$. Seien J_1, J_2 offene Intervalle mit $t_0 \in J_1 \cap J_2$. Seien $y_1 \in C^1(J_1;\mathbb{R}^d)$, $y_2 \in C^1(J_2;\mathbb{R}^d)$ zwei Lösungen des AWP $y' = f(t,y(t)),\ y(t_0) = y_0$.
Beh.: Dann gilt: $y_1 = y_2$ auf $J_1 \cap J_2$.



$y' = f(t,y)$

$y(t') = y_1(t') = y_2(t')$

$\Rightarrow$ So ein t' kann es nach Picard-Lindelöf nicht geben.

Beweis: $J_1 \cap J_2 =: (t^-,t^+)$ ist offenes Intervall mit $t_0 \in (t^-,t^+)$
Behauptung: $y_1 = y_2$ auf (t^-,t^+)
1.Schritt: Nach Picard-Lindelöf existiert ein $\alpha > 0$, so dass $y_1 = y_2$ auf $(t_0-\alpha, t_0+\alpha)$
2.Schritt: Sei $t' \in (t_0,t^+)$ mit $y_1 = y_2$ auf (t_0,t'). Weil y_1, y_2 stetig bei t' sind, gilt $y_1(t') = y_2(t')$.
Nach Picard-Lindelöf existiert ein $\alpha' > 0$, so das $y_1 = y_2$ auf $(t'-\alpha', t'+\alpha')$.
3.Schritt: Der 2.Schritt impliziert $\sup\{t' : y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in (t_0,t')\} = t^+$.
4.Schritt: Analog gilt $\inf\{t' : y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in (t',t_0)\} = t^-$.
Daraus ergibt sich sofort die Behauptung. ■

Korollar 2.10.
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, f lokal lipschitzstetig im 2. Argument.
Beh.: Dann gilt: Für jedes $(t_0, y_0) \in G$ existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0$$

Insbesondere können sich Lösungen der ODE $y' = f(t, y(t))$ nicht schneiden.
Anschaulich: Die Graphen von 2 Lösungen sind disjunkt oder deckungsgleich.

Beweis: Klar. ■
Wegen der Eindeutigkeitsaussage kann von **der** Lösung des AWP
$y' = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0$ gesprochen werden. Wir bezeichnen sie mit $t \mapsto y_{t_0,y_0}(t)$. Implizit ist gemeint, dass $y_{t_0,y_0}(t)$ auf dem maximal möglichen Definitionsbereich erklärt ist. (siehe Satz 2.13.)

2.2.3 Maximale Existenzintervalle

Lemma 2.11. (*"Klebelemma"*):
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G; \mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2.Argument.
Sei $y \in C^1((a, b); \mathbb{R}^d)$ Lösung von $y' = f(t, y(t))$.
(2.7) Es gelte: $\lim_{t \to b^-} (t, y(t)) \in G$.
Beh.: Dann ist y über den Punkt $t = b$ hinaus (als Lösung der ODE) fortsetzbar,
d.h. $\exists b' > b$ und $\tilde{y} \in C^1((a, b'); \mathbb{R}^d)$ mit

- $y'(t) = f(t, \tilde{y}(t))\ \forall t \in (a, b')$
- $\tilde{y} = y$ auf (a, b)

Beweis: Nach (2.7) ist $(b, y_b) := \lim_{t \to b^-} (t, y(t)) \in G$. Nach Picard-Lindelöf $\exists \alpha > 0$ und ein $\hat{y} \in C^1((b - \alpha, b + \alpha); \mathbb{R}^d)$ mit $\hat{y}' = f(t, \tilde{y}(t))\ \forall t \in (b - \alpha, b + \alpha)$ und $\hat{y}(b) = y_b$

Definiere $\tilde{y}(t) := \begin{cases} y(t), & t \in (a, b) \\ \hat{y}(t), & t \in [b, b + \alpha) \end{cases}$

Dann gilt:

- $\tilde{y} \in C^1$ auf (a, b) und auf $(b, b + \alpha)$
- $\tilde{y} \in C((a, b + \alpha); \mathbb{R}^d)$, denn $\lim_{t \to b^+} \tilde{y}(t) = \hat{y}(b) = y_b = \lim_{t \to b^-} y(t)$
- Wegen der Stetigkeit von f gilt: $\tilde{y}$ ist C^1 bei $t = b$, denn $\lim_{t \to b^+} \tilde{y}'(t) = \lim_{t \to b^+} f(t, \hat{y}(t))$ $= f(b, y_b) = \lim_{t \to b^-} f(t, y(t))$ ■

Übung 2.12. (cf. Übungsbeispiel 2.7.) Zeigen Sie, dass die Bedingung (2.7) folgendermaßen abgeschwächt werden kann: Es existiert eine Folge $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $t_n \to b^-$ so dass
(2.8) $\lim_{n \to \infty} (t_n, y(t_n)) \in G$. ■
Bemerkung: Lemma 2.11. suggeriert, dass man Lösungen von ODEs so lange fortsetzen kann, bis man „an den Rand des Definitionsbereiches G anstößt“. ■

Satz 2.13.
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G;\mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2. Argument
Beh.: Dann gilt: Für jedes $(t_0, y_0) \in G$ existieren T^-, T^+ ($T^- = -\infty$, $T^+ = \infty$ zugelassen) mit folgenden Eigenschaften:

(i) es existiert eine eindeutige Lösung $y_{t_0,y_0} \in C^1((T^-, T^+);\mathbb{R}^d)$ des AWP $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$

(ii) Das Existenzintervall (T^-, T^+) ist maximal: Es gibt kein Intervall J mit $(T^-, T^+) \subsetneq J$, so dass (2.9) eine Lösung $y \in C^1(J;\mathbb{R}^d)$ hat.

(iii) Bei T^+ (analog bei T^-) können nur die folgenden drei Fälle auftreten:

(a) $T^+ = \infty$ [[die Lösung existiert für alle Zeiten $t > t_0$]]

(b) $T^+ < \infty$ und $\limsup\limits_{t\to T^+} \|y_{t_0,y_0}\|_{\mathbb{R}^d} = \infty$ [[blow-up]]

(c) $T^+ < \infty$ und $\liminf\limits_{t\to T^+} \operatorname{dist}((t, y_{t_0,y_0}(t)), \partial G) = 0$ [[Kollaps der Lösung]]

Beispiel:

1. $G = \mathbb{R}^2,\ y' = \alpha y,\ (t_0, y_0) = (0, y_0)$ hat die Lösung $y_{t_0,y_0}(t) = y_0 e^{\alpha t}$ und $(T^-, T^+) = (-\infty, \infty)$
2. $y' = y^2,\ (t_0, y_0) = (0, 1),\ G = \mathbb{R}^2$. Die Lösung ist $y_{t_0,y_0}(t) = \frac{1}{1-t}$. Hier ist $(T^-, T^+) = (-\infty, 1)$ (blow up)
3. $y' = -2 + \sin\frac{1}{y},\ (t_0, y_0) = (0, 1),\ G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (Kollaps) [[siehe Übungsbeispiel 3.5.]]

■

Beweis (*von Satz 2.13.*):
Nach Picard-Lindelöf existiert eine Lösung in der Nähe $t = t_0$. Nach Übung 2.12. können wir uns die Lösung y auf ein Intervall (T^-, T^+) fortgesetzt denken, so dass bei T^+ (analog bei T^-) folgende Bedingung erfüllt ist: für jede Folge $(t_n)_{n=0}^\infty$ mit $t_n \to T^+$ (2.10)
ist (2.8) nicht erfüllt, das heißt $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n, y(t_n))$ existiert nicht, oder $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n, y(t_n)) \notin G$. Wir zeigen nun, dass dann einer der 3 Fälle (a)-(c) aus Satz 2.13. erfüllt ist. Insbesondere zeigt dies, dass die Lösung nicht über T^+ hinweg fortsetzbar ist.
Wir nehmen an, dass weder (a) noch (b) erfüllt sind und müssen zeigen, dass (c) gilt:
Sei also

- $T^+ < \infty$
- $\limsup\limits_{t\nearrow T^+} \|y_{t_0,y_0}(t)\|_{\mathbb{R}^d} < \infty$

Sei $(t_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = T^+$. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(t_{n'})_{n'}$ und ein $y_b \in \mathbb{R}^d$, so dass

$$\lim_{n'\to\infty} (t_{n'}, y_{t_0,y_0}(t_{n'})) = (T^+, y_b)$$

Nach (2.10) ist $(T^+, y_b) \notin G$. Weil $(t_{n'}, y_{t_0,y_0}(t_{n'})) \in G\ \forall n'$ folgt $(T^+, y_b) \in \partial G$ ■

2.3 Grönwall-Lemma und seine Anwendung

Ein zentrales Werkzeug bei der Analyse von ODEs ist das Grönwall-Lemma.

Lemma 2.14. (*Grönwall*):

Vor.: Sei $\alpha, \beta, v \in C([t_0, T]; \mathbb{R})$ mit $\beta \geq 0$ und

(2.11) $$0 \leq v(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)v(s)ds \quad \forall t \in [t_0, T].$$

(2.12) Beh.: $$v(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Speziell für $\alpha \equiv M \in \mathbb{R}$ gilt:

(2.13) $$v(t) \leq M e^{\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau}$$

Beweis: Definiere $V(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(s)v(s)ds$. Dann ist $V \in C^1$ und

$$V'(t) = \beta(t)v(t) \overset{(2.11)}{\leq} \beta(t)\left(\alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)v(s)ds\right) \leq \beta(t)\left(\alpha(t) + V(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} V(t)\right) = -\beta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} V(t) + e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} V'(t) \\
&\leq -\beta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} V(t) + \alpha(t)\beta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} + \beta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} V(t) \\
&= \alpha(t)\beta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} \\
&\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-\int_{t_0}^s \beta(\tau)d\tau} V(s)\right) ds \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_{t_0}^s \beta(\tau)d\tau} ds \\
\Longleftrightarrow\ & e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau)d\tau} V(t) - \underbrace{V(t_0)}_{=0} \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_{t_0}^s \beta(\tau)d\tau} ds \\
&\Rightarrow V(t) \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds \\
&\overset{(2.11)}{\Rightarrow} v(t) \leq \alpha(t) + V(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds
\end{aligned}$$

Für (2.13) folgt wegen $\beta \geq 0$

$$v(t) \leq M + M \int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{\beta(s) e^{\int\limits_s^t \beta(\tau) d\tau}}_{= -\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{\int\limits_s^t \beta(\tau) d\tau}\right)} ds = M \left(1 - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{\int\limits_s^t \beta(\tau) d\tau}\right) ds\right)$$

$$= M \left(1 - \left[1 - e^{\int\limits_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau}\right]\right) = M e^{\int\limits_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \qquad \blacksquare$$

Das Grönwall-Lemma ermöglicht es manchmal, explizit das maximale Existenzintervall für ein AWP anzugeben. Ein solches Beispiel sind ODEs mit „linear beschränkten rechten Seiten“ f:

Satz 2.15. (*maximale Existenz für linear beschränkte rechte Seiten*):

Vor.: Sei $J \subset \mathbb{R}$ Intervall ($J = (-\infty, a), J = (a, \infty), J = \mathbb{R}$ zugelassen) $f \in C(J \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2. Argument. Es gebe $A, B \in C(J; \mathbb{R})$ mit$A$, $B \geq 0$ auf J und $\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^d} \leq A(t) + B(t) \|x\|_{\mathbb{R}^d} \, \forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}^d$

Beh.: $\forall (t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^d$ hat das AWP $y' = f(t,y), \; y(t_0) = y_0$ eine (eindeutige) Lösung $y \in C^1(J; \mathbb{R}^d)$

Beweis: Sei $(T^-, T^+) \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in (T^-, T^+)$ das maximale Existenzintervall der Lösung y_{t_0,y_0} des AWP (vgl. Satz 2.13).
Wir zeigen, dass T^+ mit der rechten Intervallgrenze von J zusammenfällt (analog T^- = linke Intervallgrenze von J).

Beweisidee: Falls $T^+ <$ rechte Intervallgrenze von J, dann kann keiner der Fälle (iii), (a)–(c) aus Satz 2.13 auftreten. Das steht im Widerspruch zur Annahme, daß T^+ der Endpunkt des maximalen Existenzintervalls von y_{t_0,y_0} ist.

Wir nehmen an, daß $T^+ <$ rechte Intervallgrenze von J. Dann $\exists b > T^+$ mit $[t_0, T^+] \subset [t_0, b) \subset J$.

1. Fall: Weil $T^+ < b < \infty$, kann Fall (iii), (a) von Satz 2.13 nicht auftreten.

2. Fall: Es gilt für die Lösung $y(t) = y_{t_0,y_0}(t)$

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, \mathrm{d}s$$

und damit für $t \in [t_0, T^+)$

$$\begin{aligned} v(t) := \|y(t)\|_{\mathbb{R}^d} &\leq \|y_0\|_{\mathbb{R}^d} + \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\|_{\mathbb{R}^d} \,\mathrm{d}s \\ &\leq \|y_0\|_{\mathbb{R}^d} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s) + B(s) \cdot \|y(s)\|_{\mathbb{R}^d} \,\mathrm{d}s \\ &\leq \underbrace{\|y_0\|_{\mathbb{R}^d} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s) \;\mathrm{d}s}_{:=\alpha(s)} + \int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{B(s)}_{:=\beta(s)} v(s) \;\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Grönwall Lemma}}{\Rightarrow} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^d} = v(t) \leq \alpha(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \cdot e^{\int\limits_s^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s.$$

Weil α, β stetig auf J und $[t_0, T^+] \subset J$ kompakt ist, folgt, dass $\sup\limits_{t \in [t_0, T^+)} v(t) =: \eta < \infty$. Definiere

$$K := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x\|_{\mathbb{R}^d} \leq \eta\}.$$

Dann gilt für den Graphen von y:

$$\{(t, y(t)) \colon t \in [t_0, T^+)\} \subset [t_0, T^+) \times K \subset [t_0, T^+] \times K,$$

welches eine kompakte Teilmenge des Definitionsbereichs $J \times \mathbb{R}^d$ von f ist. Damit sind die Fälle (iii), (b) und (iii), (c) von Satz 2.13 nicht möglich.

Unsere Annahme, daß T^+ <rechte Intervallgrenze von J führt also auf einen Widerspruch zu

■

2.4 Existenzsatz von Peano

Die lokale Lipschitzstetigkeit von f liefert Existenz und Eindeutigkeit des AWP (Picard-Lindelöf). Der Satz von Peano liefert Existenz für stetige f (nota: Eindeutigkeit nicht unbedingt garantiert, vergleiche Bsp. 2.4.)

Zur Motivation des Beweises des Satzes von Peano betrachten wir:

Beispiel 2.17. (*Eulersches Polygonzugverfahren / explizites Eulerverfahren*):
Betrachte das AWP $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$. Sei $h > 0$.
$t_1 := t_0 + h,\ t_2 := t_0 + 2h, \ldots,\ t_i := t_0 + ih \quad i = 0, 1, \ldots$
Idee: Approximiere $y(t_1)$ durch Taylor-Approximation bei t_0:

$$y(t_1) \approx y(t_0) + (t_1 - t_0)y'(t_0) = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

$\Rightarrow$ verwende $y_1 := y_0 + hf(t_0, y_0)$ als Approximation von $y(t_1)$.
Analog erhält man $y(t_2) \approx y(t_1) + hf(t_1, y(t_1))$.
Dies motiviert, die Rekursion

$$y_{i+1} := y_i + hf(t_i, y_i) \quad i = 0, 1, \ldots$$

zu betrachten und die Werte y_i als Approximationen der Funktionswerte $y(t_i)$ zu sehen. Eine Funktion y_h ergibt sich durch lineare Interpolation der Werte y_i.
Für Zeiten $t_i := t_0 + ih,\ i = -1, -2, \ldots$ erhalten wir analog Approximationen nach der Rekursion

$$y_{i-1} := y_i - hf(t_i, y_i) \quad i = 0,\ -1,\ -2, \ldots$$

Hoffnung: $y_h \to y_{t_0,y_0}$ für $h \to 0$

Fakten:

- falls f lokal lipschitzstetig im 2. Argument ist, dann gilt tatsächlich $y_h \to y_{t_0,y_0}(t_n)$
  (siehe VO Numerik von Differentialgleichungen)
- falls f stetig ist, dann hat die Folge $(y_n)_n$ eine Teilfolge, die gegen eine Lösung des AWP $y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0$ konvergiert (siehe Satz von Peano - 2.18.)

■

Beispiel: $y' = y, \quad y(0) = 1$ Rekursion:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = y_i + hy_i = (1+h)y_i \quad \Rightarrow \quad y_i = (1+h)^i y_0$$

mit $t_i = ih$ ergibt sich $y_i = (1+h)^i y_0 = y_0(1+h)^{\frac{t_i}{h}}$. Weil $\lim_{h\to 0^+}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$, schließen wir, dass für festes t_i gilt:

$$\lim_{h\to 0} y_i = \lim_{h \to 0} y_0(1+h)^{\frac{t_i}{h}} = y_0 e^{t_i}$$

■

Lemma 2.16. (*Arzelà-Ascoli*):
Vor.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompakt. $(x_n)_{n=0}^\infty \subset C(I;\mathbb{R}^d)$ eine Folge mit

1. $(x_n)_{n=0}^\infty$ beschränkt, d.h. $\exists M > 0$, so dass $\|x_n\|_{C(I;\mathbb{R}^d)} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $(x_n)_{n=0}^\infty$ ist gleichgradig stetig, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \quad \forall s,t \in I : \quad |s-t| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|x_n(t) - x_n(s)\|_{\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$$

Beh.: Dann gilt: $\exists$ Teilfolge $(x_{n'})_{n'}$ und ein $x \in C(I;\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{n'\to\infty} \|x - x_{n'}\|_{C(I;\mathbb{R}^d)} = 0$$

Beweis: Siehe BLÜMLINGER 1.5.1 ■

Satz 2.18. (*Peano*):
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G;\mathbb{R}^d)$
Beh.: Dann gilt: Für jedes $(t_0, y_0) \subset G$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung
$y \in C^1\left((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon);\mathbb{R}^d\right)$ von $y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$

Beweis: Beweisidee: Zeige, dass die Funktionen y_h, die in Beispiel 2.17. konstruiert werden, gleichgradig stetig sind, wähle konvergente Teilfolge aus mit Grenzfunktion y; rechne nach, dass die Integralgleichung $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s,y(s))ds$ gilt.
Seien $a, b > 0$ mit $\mathfrak{R} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - y_0\|_{\mathbb{R}^d} \leq b\} \subset G$.
Sei $M := \|f\|_{C(\mathfrak{R};\mathbb{R}^d)}$

1. Schritt: Wähle $\varepsilon \in (0, a]$, so dass $\varepsilon M \leq b$.
   Dann gilt für $N \in \mathbb{N}$ und $h_N := \frac{\varepsilon}{N}$, dass die Rekursion
   $$y_{i+1} := y_i + h_N \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, ..., N$$
   wohldefiniert ist, d.h. $(t_i, y_i) \in \mathfrak{R} \subset G$ für $i = 0, ..., N$.
   Hier ist $t_i = t_0 + ih_N$. Analog ist die Rekursion $y_{i-1} := y_i - h_N f(t_i, y_i)$ mit $i = 0, -1, ..., -(N-1)$ wohldefiniert. $y_{h_N} \in C\left([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon];\mathbb{R}^d\right)$ ist definiert als der stückweise lineare Interpolant.

2. Schritt: Die Folge $(y_{h_N})_{N=1}^\infty$ ist gleichgradig stetig. In der Tat gilt
   $$\|y_{h_N}(t) - y_{h_N}(s)\|_{\mathbb{R}^d} \leq |s-t|\, M$$

3. Schritt: Arzelà-Ascoli liefert Teilfolge $(y_{h_{N'}})_{N'}$ und $y \in C\left([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon];\mathbb{R}^d\right)$ mit $\lim\limits_{N'\to\infty} \max\limits_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \left\|y(t) - y_{h_{N'}}(t)\right\|_{\mathbb{R}^d} = 0$

4. Schritt: Wir behaupten:
   $$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$$
   Betrachte nur den Fall $t > t_0$.
   Sei $g : s \mapsto (s, y(s))$ Betrachte die stückweise konstante Funktion $g_{N'}$ gegeben durch die Bedingung
   $$g_{N'}(s) = (t_i, y_{h_{N'}}(t_i)) \quad \text{für} \quad s \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, ..., N'-1$$
   Dann gilt:
   - $g_{N'} \to g$ punktweise auf $[t_0, t_0+\varepsilon]$
   - $y_{h_{N'}}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(g_{N'}(s))\, ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$
   - $\|f(g(s))\|_{\mathbb{R}^d} \leq M \quad \forall s \in [t_0, t_0+\varepsilon]$

   $\overset{Lebesgue}{\Longrightarrow} \lim\limits_{N'\to\infty} y_0 + \int_{t_0}^t f(g_{N'}(s))\, ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(g(s))\, ds$
   also folgt aus $y_{h_{N'}}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(g_{N'}(s))\, ds$, dass:

$$y(t) = \lim_{N'\to\infty} y_{h_{N'}}(t) = \lim_{N'\to\infty} y_0 + \int_{t_0}^t f(g_{N'}(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(g(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$$

■

Bemerkung: Der Beweis folgt einem typischen Muster für Existenzbeweise in der Analysis:

1. Konstruiere Folge von Approximationen
2. Verwende Kompaktheit, um konvergente Teilfolge auszuwählen
3. Nachrechnen, dass der Limes eine Lösung ist

■

2.5 2 Beispiele für die Bestimmung des maximalen Existenzintervalls

wesentliche Hilfsmittel:

- Eindeutigkeitsaussage für AWPs
- Grönwall-Lemma

Beispiel 2.19. betrachte

$$x' = x - \alpha x^2, \qquad x(0) = x_0 \geq 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Beh.: die Lösung existiert auf $[0, \infty)$ und $x \geq 0$ auf $\mathbb{R}$.
Bew.: Sei (T^-, T^+) das maximale Existenzintervall der Lösung.
1. Schritt: Beh.: $x(t) \geq 0$ für alle $t \in (T^-, T^+)$.
Wir zeigen folgende, stärkere Aussage: Falls $x(t^*) = 0$ für ein $t^* \in (T^-, T^+)$, dann ist $x \equiv 0$. Dies folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen von AWPs und der Tatsache, daß $\widetilde{x} \equiv 0$ das AWP $\widetilde{x}' = \widetilde{x} - \alpha\widetilde{x}^2$, $\widetilde{x}(t^*) = 0$ löst.
2. Schritt: Auf $(0, T^+)$ gilt $x(t) = x(t) - \alpha|x(t)|^2 \leq x(t)$. Damit

$$0 \overset{\text{1. Schritt}}{\leq} x(t) \leq x(0) + \int_0^t x(s)\,ds \overset{\text{Grönwall}}{\Longrightarrow} 0 \leq x(t) \leq x(0)e^t \quad \forall t \in (0, T^+).$$

Falls $T^+ < \infty$ wäre, dann kann also kein blow-up bei T^+ passieren, was der Maximalität des Existenzintervalls widerspricht. ■

Beispiel 2.20. Betrachte folgende Modifikation von Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} x' &= x - \alpha x^2 - xy, \qquad \alpha \geq 0, \\ y' &= -\beta y + xy, \qquad \beta \geq 0, \end{aligned}$$
$$x(0) \geq 0, \quad y(0) \geq 0.$$

Sei (T^-, T^+) das maximale Existenzintervall.
1. Schritt: Beh.: x, $y \geq 0$ auf $(0, T^+)$.
Wir zeigen: Falls die Lösung einen Punkt auf der positiven x-Achse oder der positiven y-Achse hat, dann liegt sie bereits vollständig auf der x-Achse bzw. y-Achse.

1. Falls $x(t^*) = 0$ für ein t^* gilt, dann ist wegen Eindeutigkeit von AWPs

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t^*)e^{-\beta(t-t^*)} \end{pmatrix} \qquad \forall t$$

   die Lösung.

2. Falls $y(t^*) = 0$ für ein t^* gilt, dann ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall t$$

   die Lösung, wobei $\widetilde{x}$ die Lösung von

$$\widetilde{x}' = \widetilde{x} - \alpha\widetilde{x}^2, \quad \widetilde{x}(t^*) = x(t^*)$$

   ist. Nach dem vorangegangenen Beispiel ist $\widetilde{x} \geq 0$ auf $[0, \infty)$ sobald es ≥ 0 in einem Punkt ist.

2. Schritt: auf $(0, T^+)$ ist wegen x, $y \geq 0$

$$x' = x - \alpha x^2 - xy \leq x \quad \overset{\text{Grönwall}}{\Longrightarrow} 0 \leq x(t) \leq x(0)e^t,$$
$$y' = -\beta y + xy \leq xy \leq x(0)e^t y \quad \overset{\text{Grönwall}}{\Longrightarrow} 0 \leq y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t x(0)e^s\, ds}$$

Das zeigt, daß für $T^+ < \infty$ kein blow-up möglich ist. Also ist $T^+ < \infty$ nicht möglich. ∎

KAPITEL

DREI

Lineare Systeme

Wir betrachten Systeme der Form

$$\underline{y'} = \underline{\underline{A}}(t)\underline{y} + \underline{b}(t) \tag{3.1}$$

für ein $A \in C(J; \mathbb{R}^{d\times d})$ und ein $b \in C(J; \mathbb{R}^d)$.

Bemerkung: Nach Satz 2.15 existieren die Lösungen auf ganz J. Zudem haben wir Eindeutigkeit von AWPs. ▪

3.1 Homogene Systeme

Bei homogenen Systemen ist $b \equiv 0$, das heißt wir betrachten

$$\underline{y'} = \underline{\underline{A}}(t)\underline{y}. \tag{3.2}$$

Lemma 3.1. (*Superpositionsprinzip*):
Vor.: Betrachte die Menge aller $C^1(J; \mathbb{R}^d)$-Funktionen, die (3.2) lösen.
Beh.: Diese Menge bildet einen Vektorraum.

Beweis: Übung (Übungsbeispiel 1.4.) ■

Satz 3.2.
Vor.: Sei $\mathfrak{L}$ der Vektorraum der Lösungen von (3.2).
Beh.: Für (beliebiges, festes) $t_0 \in J$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^d &\to \mathfrak{L} \\ y_0 &\mapsto y_{t_0,y_0}(\cdot) \end{aligned}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus. Insbesondere ist die Dimension von $\mathfrak{L}$ gerade d.

Beweis: Wir nutzen die Eindeutigkeitsaussage für AWPs. Zu zeigen:

(i) φ linear

(ii) φ injektiv

(iii) φ surjektiv

Beweis zu:

(i) Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Die Funktionen } z_1 &:= \varphi(y_1 + \lambda y_2) = y_{t_0, y_1 + \lambda y_2} \\ \text{und } z_2 &:= y_{t_0, y_1} + \lambda y_{t_0, y_2} = \varphi(y_1) + \lambda \varphi(y_2) \end{aligned}$$

lösen beide (3.2) und dieselbe Anfangsbedingung bei $t = t_0$, nämlich $y_1 + \lambda y_2$. Damit muss $z_1 = z_2$ auf J gelten.
Das heißt: $\varphi(y_1 + \lambda y_2) = \varphi(y_1) + \lambda \varphi(y_2)$

(ii) Sei $0 = \varphi(y_0)$. Also ist $0 \equiv y_{t_0, y_0} = \varphi(y_0)$. Damit $0 = y_{t_0, y_0}(t_0) = y_0$. Also ist φ injektiv.

(iii) Sei $z \in \mathfrak{L}$ eine Lösung von (3.2). Sei $y_0 := z(t_0) \in \mathbb{R}^d$.

Dann gilt: z und $\tilde{z} := \varphi(y_0)$ lösen dasselbe AWP,
das heißt: $z = \tilde{z}$. Also ist φ surjektiv. ■

d Funktionen $y^1, \ldots, y^d \in \mathfrak{L}$ bilden eine Basis von $\mathfrak{L}$, wenn sie linear unabhängig sind, das heißt falls gilt

$$a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{i=1}^{d} a_i y^i \equiv 0 \qquad \text{impliziert} \qquad a_1 = \cdots = a_d = 0.$$

Lemma 3.3.
Vor.: Sei $y^1, \ldots, y^d \in \mathfrak{L}$ eine Basis von $\mathfrak{L}$.
Beh.: Dann gilt: für jedes $t \in J$ sind die Vektoren $\{y^1(t), \ldots, y^d(t)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^d$.

Beweis: Sei $\bar{t} \in J$ und $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{d} a_i y^i(\bar{t}) = 0$
Dann lösen die Funktionen $y \equiv 0$ und $y = \sum_{i=1}^{d} a_i y^i$ dasselbe AWP $y' = A(t)y, \ y(\bar{t}) = 0$.
Aus der Eindeutigkeit von AWPs folgt $\sum_{i=1}^{d} a_i y^i \equiv 0$. Weil $\{y^1, \ldots, y^d\}$ eine Basis von $\mathfrak{L}$ ist, ist $a_1 = \cdots = a_d = 0$. ■

Definition 3.4. Seien $y^1, \ldots, y^d \in \mathfrak{L}$ Lösungen von (3.2). Wir fassen diese Funktionen in der Lösungsmatrix $Y(t) := (y^1(t), \ldots, y^d(t))$ zusammen. Falls $y^1, \ldots, y^d$ eine Basis bilden, dann heißt Y eine *Fundamentalmatrix*. Falls eine Fundamentalmatrix Y die Bedingung $Y(\bar{t}) = I \in \mathbb{R}^{d \times d}$ für ein $\bar{t} \in J$ erfüllt, dann heißt Y eine *Hauptfundamentalmatrix* bezüglich $\bar{t}$. Entsprechend heißen die Funktionen $\{y^1, \ldots, y^d\}$ Fundamentalsystem bzw. Hauptfundamentalsystem (bezüglich $\bar{t}$).

Bemerkung 3.5. Sei $Y \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$ eine Fundamentalmatrix. Dann gilt:

(i) Nach Lemma 3.3. ist $Y(t)$ für jedes $t \in J$ invertierbar.

(ii) Für jedes $c \in \mathbb{R}^d$ ist $Y(t)\cdot c$ eine Lösung von (3.2).

(iii) Jede Lösung $y \in (J;\mathbb{R}^d)$ von (3.2) hat die Form $y(t) = Y(t)\cdot c$ für ein $c \in \mathbb{R}^d$. Insbesondere ist die Lösung des AWP $y' = A(t)y,\ y(t_0) = y_0$ gegeben durch $y_{t_0,y_0}(t) = Y(t)(Y(t_0))^{-1}y_0$.

■

3.1.1 Wronskideterminante

Definition 3.6. Sei $Y \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$ eine Lösungsmatrix.
Dann heißt die Funktion $W \in C^1(J;\mathbb{R})$ gegeben durch

$W(t) := \det(Y(t))$ die *Wronskideterminante* von Y.

Satz 3.7. (*Liouville*):
Vor.: keine
Beh.: Die Wronskideterminante erfüllt die ODE

$$W'(t) = \operatorname{tr} A(t)\cdot W(t) \qquad \forall t \in J,$$

wobei die Spur einer Matrix definiert ist als $\operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^{d} A_{ii}(t)$. Insbesondere ist damit für jedes feste $t_0 \in J$:

$$W(t) = W(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\mathrm{d}s}$$

Für den Beweis von Satz 3.7 benötigen wir:

Lemma 3.8.
Vor.: Seien $B, C \in \mathbb{R}^{d\times d}$
Beh.: Dann gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}[\det(B+\varepsilon\cdot CB) - \det B] = \operatorname{tr} C \cdot \det B$

Beweis: Wir schreiben:

$$\det(B+\varepsilon\cdot CB) - \det B =$$
$$\det((I+\varepsilon\cdot C)B) - \det B = [\det(I+\varepsilon\cdot C) - 1]\det B$$

Wir behaupten nun:

$$\det(I+\varepsilon\cdot C) = 1 + \varepsilon\cdot\operatorname{tr} C + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon\to 0 \tag{$*$}$$

Das folgt aus Entwicklung nach der 1. Spalte und Induktion nach der Dimension d. Sei:

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ \dots \ c_{1d} \\ c_{21} & \\ \vdots & C' \\ c_{d1} & \end{pmatrix}, \qquad \text{d.h. } C' = C(2:d, 2:d) \quad [\![\text{Matlab-Schreibweise}]\!]$$

$$\det(I + \varepsilon \cdot C) = \det \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \cdot c_{11} & \varepsilon \cdot c_{12} \ \dots \ \varepsilon \cdot c_{1d} \\ \varepsilon \cdot c_{21} & \\ \vdots & I + \varepsilon \cdot C' \\ \varepsilon \cdot c_{d1} & \end{pmatrix}$$

Da in der 1. Zeile der Matrix in allen Termen ein Faktor ε vorkommt, folgt:

$$= (1 + \varepsilon \cdot c_{11}) \det(I + \varepsilon \cdot C') - \varepsilon \cdot c_{21} \cdot \mathcal{O}(\varepsilon) + \varepsilon \cdot c_{31} \cdot \mathcal{O}(\varepsilon) - \dots$$

Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefert weiters:

$$\begin{aligned} &= (1 + \varepsilon \cdot c_{11})(1 + \varepsilon \cdot \operatorname{tr} C' + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \varepsilon \cdot \operatorname{tr} C + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Damit folgt aus $(*)$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(\det(I + \varepsilon \cdot C) - 1) = \operatorname{tr} C$. ■

Beweis (*von Satz 3.7.*):

1. Fall: Sei $W(\bar{t}) = 0$ für ein $\bar{t} \in J$. Dann gilt:
   $\det Y(\bar{t}) = W(\bar{t}) = 0$, das heißt die Spalten von $Y(\bar{t})$ sind l.a., also $\exists a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $Y(\bar{t}) \cdot a = 0$. Damit folgt aus der Eindeutigkeit von AWPs, dass $Y(t) \cdot a = 0 \quad \forall t \in J$. Das heißt die Spalten von $Y(t)$ sind l.a. $\forall t \in J$ und $W(t) = \det Y(t) = 0 \quad \forall t \in J$. Also ist $W \equiv 0$ und löst damit $W' = \text{tr } A(t) \cdot W$.

2. Fall: $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$. Das heißt $Y(t)$ ist invertierbar für jedes $t \in J$. Wir berechnen $W'(t)$: Sei $t \in J$ fest, h hinreichend klein. Dann gilt:

$$\begin{aligned} W(t+h) - W(t) &= \det(Y(t+h)) - \det Y(t) \\ &= \det(Y(t) + h \cdot Y'(t) + o(h)) - \det Y(t) \\ &= \det(Y(t) + h \cdot Y'(t)) + o(h) - \det Y(t) \qquad [\![\text{Stetigkeit von det}]\!] \\ &= \det(\underbrace{Y(t)}_{=:B} + h \cdot \underbrace{Y'(t)(Y(t))^{-1}}_{=:C} \underbrace{Y(t)}_{=:B}) + o(h) - \det Y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Lemma 3.8.}}{\Longrightarrow} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(W(t+h) - W(t)) = \text{tr } (Y'(t)(Y(t))^{-1}) \cdot \det Y(t) \\ &\Longrightarrow \quad W'(t) = \text{tr } [Y'(t)(Y(t))^{-1}] \cdot W(t) \end{aligned}$$

Weil $Y'(t) = A(t)Y(t)$, folgt $W'(t) = \text{tr } [A(t)Y(t)(Y(t))^{-1}] \cdot W(t) = \text{tr } A(t) \cdot W(t)$ ■

Korollar 3.9.
Vor.: Sei $Y \in C^1(J; \mathbb{R}^{d \times d})$ Lösungsmatrix für $y' = A(t) \cdot y$
Beh.: Dann gilt: Y ist Fundamentalmatrix $\Leftrightarrow \exists\, \bar{t} \in J$ mit $W(\bar{t}) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t \in J \quad W(t) \neq 0$

Beweis: Übung. ■

Bemerkung 3.10. Für jedes $t \in J$ ist $W(t) = \det Y(t)$ das Volumen des Parallelepipeds, das von den Spalten von $Y(t)$ aufgespannt wird. Für eine Fundamentalmatrix ist dieses Volumen immer $\neq 0$. Insbesondere bleibt das Volumen erhalten, wenn tr $A(t) \equiv 0$. ▪

3.1.2 Bestimmung von Fundamentalsystemen

1. Möglichkeit: Durch Lösen von AWPs:
Sei $\{e_1, \dots, e_d\} \subset \mathbb{R}^d$ eine Basis von $\mathbb{R}^d$ und $t_0 \in J$. Dann gilt:

$y_{t_0,e_1}(\cdot), \dots, y_{t_0,e_d}(\cdot)$ bilden ein Fundamentalsystem

2. Möglichkeit: Falls eine nichttriviale Lösung von (3.2) bekannt ist, dann kann die Bestimmung des Fundamentalsystems auf die Bestimmung eines $(d-1) \times (d-1)$ Systems zurückgeführt werden (d'Alembertsches Reduktionsprinzip). Dieser Ansatz ist besonders geeignet für den Fall $d = 2$.
Beispiel 3.11. Betrachte

$$y' = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} y, \quad J = (0, \infty)$$

Eine Lösung ist $u = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine 2. Lösung, die linear unabhängig ist. Wir machen den Ansatz

$$y = \Phi(t)u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \text{ wobei } \Phi, z_2 \in C^1(J;\mathbb{R}).$$

Einsetzen liefert:

$$\Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2'(t) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \left[\Phi(t)u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix} \right]$$

Das heißt:

$$\Phi'(t)u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2'(t) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

also: $\begin{array}{lll} \Phi'(t) \cdot t^2 & +0 & \overset{!}{=} -z_2(t) \\ \Phi'(t) \cdot (-t) & +z_2'(t) & \overset{!}{=} \frac{2}{t} z_2(t) \end{array} \qquad \Rightarrow \Phi'(t) = -\frac{z_2(t)}{t^2}$

$$\Rightarrow \frac{z_2(t)}{t^2} \cdot t + z_2'(t) \overset{!}{=} \frac{2}{t} z_2(t) \Rightarrow z_2'(t) = \frac{1}{t} z_2(t)$$

Eine Lösung ist $z_2(t) = t$, damit ist $\Phi'(t) = -\frac{1}{t}$, das heißt $\Phi(t) = -\ln(t)$.
Damit ist die 2. Lösung des Systems:

$$\Phi(t)u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln(t) \\ t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln(t) \\ -t & t(1 + \ln(t)) \end{pmatrix}$$
$$W(t) = t^3 \ln(t) + t^3 - t^3 \ln(t) = t^3 \neq 0 \text{ auf } J$$

■

Allgemeines Vorgehen beim d'Alembertschen Reduktionsprinzip ist wie folgt:
Wir betrachten $y' = A(t)y, \ A \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$
Sei $u \in C^1(J;\mathbb{R}^d)$ eine Lösung. Wir nehmen an:
$u_1(t) \neq 0 \ \forall t \in J$. Für weitere Lösungen machen wir den Ansatz

$$y = \Phi(t)u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_d(t) \end{pmatrix}, \text{ wobei } \Phi \in C^1(J;\mathbb{R})$$

Als Bedingungsgleichung ergibt sich

$$
\begin{aligned}
y' = A(t)y \Leftrightarrow \Phi' u + \Phi u' + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2' \\ \vdots \\ z_d' \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} A(t) \left[\Phi u + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} \right] \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}' &= A(t) \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} - \Phi' \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Betrachten der 1. Komponente liefert:

$$
0 = \sum_{j=2}^{d} A_{1j}(t) z_j(t) - \Phi'(t) u_1(t) \tag{3.3a}
$$

$$
\Rightarrow \quad \Phi'(t) = \sum_{j=2}^{d} \frac{A_{1j}(t) z_j(t)}{u_1(t)} = \frac{1}{u_1(t)} \begin{pmatrix} A_{12}(t) & \cdots & A_{1d}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}
$$

Einsetzen in die weiteren Gleichungen liefert

$$
\begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \Phi'(t) =: B(t) \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} \tag{3.3}
$$

mit der $(d-1) \times (d-1)$-Matrix

$$
B(t) = \begin{pmatrix} A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{pmatrix} - \frac{1}{u_1(t)} \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} (A_{12}(t) \cdots A_{1d}(t))
$$

Wir haben also erhalten: Wenn $\tilde{z}$ die Gleichung (3.3) löst und Φ die Beziehung (3.3a) erfüllt mit $\tilde{z} = (z_2 \cdots z_d)^\top$, dann ist

$$
y = \Phi u + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \tag{3.3b}
$$

eine Lösung von $y' = A(t)y$.

Wir bestimmen nun $(d-1)$ l.u. Lösungen von $y' = Ay$ von der Bauart (3.3b). Sei $\left[\tilde{z}^2, \ldots, \tilde{z}^d\right]$ ein Fundamentalsystem für (3.3). Definiere $z^2, \ldots, z^d \in C^1(J; \mathbb{R}^d)$ durch

$$
z^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{z}^2(t) \end{pmatrix}, \; z^3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{z}^3(t) \end{pmatrix}, \; \ldots, z^d(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{z}^d(t) \end{pmatrix}
$$

Für $i = 2, \ \ldots, d$, definiere Φ_i durch die Bedingung (3.3a), d.h.

$$
\Phi_i'(t) = \begin{pmatrix} A_{12}(t) & \cdots & A_{1d}(t) \end{pmatrix} \tilde{z}^i = \sum_{j=2}^{d} \frac{A_{1j}(t) z_j^i(t)}{u_1(t)} \qquad \text{also} \qquad \Phi_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j=2}^{d} \frac{A_{1j}(s) z_j^i(s)}{u_1(s)} \, ds
$$

und setze:

$$\begin{aligned} y^i &:= \Phi_i \cdot u + z^i, \quad i = 2, \ldots, d, \\ y^1 &:= u. \end{aligned}$$

Behauptung: Die Funktionen $y^1 := u,\ y^i = \Phi_i u + z^i$, $i = 2, \ldots, d$, bilden ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.
Beweis:

(i) Die Funktionen $y^i,\ i = 1, \ldots, d$ sind Lösungen von $y' = Ay$ nach Konstruktion (vgl. (3.3b)).

(ii) Die Funktionen $y^i,\ i = 1, \ldots, d$ sind linear unabhängig:

Seien $a_i, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{d} a_i y^i \equiv 0.$$

Zu zeigen: $a_1 = \ldots = a_d = 0$

(3.5)
$$0 \equiv \sum_{i=1}^{d} a_i y^i = a_1 u + \sum_{i=2}^{d} a_i \Phi_i u + \sum_{i=2}^{d} a_i z^i = a_1 u + \sum_{i=2}^{d} a_i \Phi_i u + \sum_{i=2}^{d} a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{z}^i \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente dieser Vektorgleichung liefert

$$u_1(t) \left(a_1 + \sum_{i=2}^{d} a_i \Phi_i(t) \right) \equiv 0 \ ,$$

das heißt

(3.6)
$$a_1 + \sum_{i=2}^{d} a_i \Phi_i \equiv 0 \ .$$

Einsetzen von (3.6) in (3.5) liefert

(3.6a)
$$0 \equiv \sum_{i=2}^{d} a_i z^i = \sum_{i=2}^{d} a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{z}^i \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=2}^{d} a_i \tilde{z}^i \right) \ .$$

Weil die Funktionen $\tilde{z}^i,\ i = 2, \ldots, d$ ein Fundamentalsystem für eine lineare ODE sind (genauer: für (3.3)), sind sie linear unabhängig, das heißt (3.6a) liefert $a_2 = \cdots = a_d = 0$. (3.6) liefert dann $a_1 = 0$. ■

3.2 Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Betrachte

$$y' = Ay \tag{3.7}$$

Zur Motivation der Bestimmung der Fundamentalmatrix betrachten wir die Picard-Lindelöf-Iteration für (3.7) mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$

$$\begin{aligned}
y^0 &= y_0 \\
y^1 &= y_0 + \int_0^t f(s, y^0(s))ds = y_0 + tAy_0 = (I + tA)y_0 \\
y^2 &= y_0 + \int_0^t f(s, y^1(s))ds = y_0 + \int_0^t A(I + sA)y_0 ds = (I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2)y_0 \\
&\vdots \\
y^n &= \left[I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n\right] y_0
\end{aligned}$$

Das motiviert:

Definition 3.12. Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (oder $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$). Die matrixwertige Funktion

$$t \mapsto e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \text{ heißt Matrixexponentialfunktion}$$

Übung: Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ absolut. Sie konvergiert gleichmäßig in $t \in [-r, r]$ für jedes feste $r > 0$.
Hinweis: $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!}(tA)^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \|A\|^n \leq e^{t\|A\|}$, $t \in [-r, r]$ für festes $r > 0$.
Damit

Lemma 3.13.
Vor.: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (oder $\mathbb{C}^{d\times d}$) mit $AB = BA$.
Beh.: Dann gilt: $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

Beweis: Übung (Übungsbeispiel 4.6.) ■

Satz 3.14.
Vor.: Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (oder $\mathbb{C}^{d\times d}$)
Beh.: Dann gilt:

(i) $t \mapsto e^{tA}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

(ii) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA},\ t, s \in \mathbb{R}$

(iii) e^{tA} ist invertierbar für $t \in \mathbb{R}$ mit $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$

(iv) $t \mapsto e^{tA}$ ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}$$

Beweis: (i) folgt direkt aus der absoluten Konvergenz.
(iii) folgt aus (ii).
(ii): siehe Übungsbeispiel 4.6.
(iv): Wir verwenden (ii): Seien $t,\ h \in \mathbb{R}$

$$e^{(t+h)A} - e^{tA} \overset{\text{(ii)}}{=} e^{hA}e^{tA} - e^{tA} = (e^{hA} - I)e^{tA}$$

$$\begin{aligned} e^{hA} - I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(hA)^n - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(hA)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(hA)^{n+1} = hA\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(hA)^n \end{aligned}$$

$$\text{Damit: } \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) = \lim_{h\to 0} A\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(hA)^n}_{\to I \text{ für } h\to 0}\right)e^{tA} = Ae^{tA}$$

■

Satz 3.15.
Vor.: Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$
Beh.: Dann gilt:

(i) $Y(t) = e^{tA}$ ist eine Fundamentalmatrix für $y' = Ay$

(ii) Das AWP $y' = Ay,\ y(0) = y_0$ wird gelöst von $y(t) = e^{tA}y_0$

(iii) e^{tA} ist Hauptfundamentalmatrix bezüglich $t_0 = 0$

(iv) $e^{(t-t_0)A}$ ist Hauptfundamentalmatrix bezüglich t_0

Beweis:

(ii) folgt aus $Y' = AY$ und $e^{0A} = I$

(i) folgt aus (ii). ⟦Spalten von Y sind die l.u. Lösungen der AWPs $y' = Ay$, $y(0) = e^i =$ i-ter Einheitsvektor⟧

(iii) folgt aus (i) und $e^{0A} = I$

(iv) $e^{(t-t_0)A} = e^{tA}e^{-t_0A}$ ist offensichtlich Fundamentalmatrix und $e^{(t_0-t)A}|_{t=t_0} = e^{0A} = I$ ■

3.2.1 Bemerkungen zur Berechnung von e^{tA}

Praktisch berechnet man e^{tA} durch Transformation in eine geeignete Basis. Der relevante Fall ist, dass A diagonalisierbar ist, d.h. $\exists V, D$ mit V regulär und D Diagonalmatrix, sodass $A = VDV^{-1}$. Dann gilt:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (VDV^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} VD^nV^{-1} = V(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n)V^{-1} = Ve^{tD}V^{-1}$$

Bis jetzt wurde nicht ausgenutzt, dass D diagonal ist. Für $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_d)$ zeigt eine einfache Rechnung:

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{td_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{td_d} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(e^{td_1}, \dots, e^{td_d}) , \quad \text{also: } e^{tA} = V \begin{pmatrix} e^{td_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{td_d} \end{pmatrix} V^{-1}$$

Bemerkung: Dies ist konsistent mit der folgenden Beobachtung:
Die Lösung des AWP $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ ist $y = e^{tA}y_0$. Ein Basiswechsel in $\mathbb{R}^d$ gegeben durch $y = V\tilde{y}$ liefert folgendes äquivalentes AWP für $\tilde{y}$:

$$\begin{aligned}
& y' = Ay, \qquad y(0) = y_0 \\
\Leftrightarrow\, & y' = VD\underbrace{V^{-1}y}_{=\tilde{y}}, \qquad y(0) = y_0 \\
\Leftrightarrow\, & (V^{-1}y)' = V^{-1}VD\tilde{y} \;, \qquad \underbrace{V^{-1}y(0)}_{=\tilde{y}(0)} = V^{-1}y_0 =: \tilde{y}_0, \\
\Leftrightarrow\, & \tilde{y}' = D\tilde{y}, \qquad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \\
\Leftrightarrow\, & \begin{pmatrix} \tilde{y}_1' \\ \vdots \\ \tilde{y}_d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_d \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\, & \tilde{y}_i(t) = e^{d_it} \cdot (\tilde{y}_0)_i \;, \qquad i = 1, \dots, d \\
\Leftrightarrow\, & \tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{d_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_dt} \end{pmatrix} \tilde{y}_0 \\
\Leftrightarrow\, & \underbrace{V\tilde{y}}_{=y} = Ve^{tD}V^{-1}y_0
\end{aligned}$$

■

Übung: Sei B blockdiagonal, d.h.:

$B := \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{pmatrix}$, wobei $B_1, \dots, B_n$ quadratische Matrizen sind. Dann gilt:

$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tB_n} \end{pmatrix}$ ist wieder Blockdiagonalmatrix. ∎

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar, aber jedes A hat eine Jordanform:

$A = VJV^{-1}$, wobei J blockdiagonal mit ⟦Vgl. HAVLICEK 8.7.10 und 8.9.7⟧

$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$ und jeder Jordanblock J_i hat die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \sigma(A)\ .$$

Nach Obigem ist

$$e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1} = V \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_n} \end{pmatrix} V^{-1}\ ,$$

also müssen wir nur noch e^{tJ_i} berechnen.

Lemma 3.16.

Vor.: Sei $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{r\times r}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

Beh.: Dann gilt:

$$e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tJ)^n = e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tN)^n = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Beweis: Schreibe $J = \lambda I + N$, $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{r\times r}$

Beobachtung: $\forall k \geq r$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, N^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^k = 0$$

also

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t\lambda I + tN} = e^{t\lambda I} \cdot e^{tN} = e^{t\lambda} \cdot e^{tN} \qquad [\![I,\ N \text{ kommutieren} \Rightarrow e^{I+N} = e^I e^N]\!] \\ &= e^{t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} N^n = e^{t\lambda} \sum_{n=0}^{r-1} \frac{t^n}{n!} N^n = \text{angegebene Form} \end{aligned}$$

■

3.3 Inhomogene Systeme

Wir betrachten Gleichung (3.1)

$y' = A(t)y + b(t)$

<u>Beobachtung</u>: Der Lösungsraum von (3.1) ist affin: Falls $y_p \in C^1(J; \mathbb{R}^d)$ eine Partikulärlösung von (3.1) ist (d.h. $y_p' = Ay_p + b$), dann hat jede Lösung von (3.1) die Form $y = y_p + \tilde{y}$, wobei $\tilde{y} \in \mathfrak{L}$ eine Lösung des homogenen Systems ist, d.h. $\tilde{y}' = A(t)\tilde{y}$.

<u>Ziel</u>: Bestimme eine Partikulärlösung von (3.1). Das geschieht mit einer Methode, die *Variation der Konstanten/Variation der Parameter* genannt wird.

Sei $Y \in C(J; \mathbb{R}^{d\times d})$ eine Fundamentalmatrix für das homogene System $y' = A(t)y$.
Ansatz für die Partikulärlösung:

$y_p(t) = Y(t) \cdot c(t), \quad$ wobei $c \in C(J; \mathbb{R}^d)$

Einsetzen in (3.1) liefert

$$y_p' \overset{!}{=} Ay_p + b \Leftrightarrow \underbrace{Y'(t)}_{A(t)Y(t)}\ c(t) + Y(t)c'(t) \overset{!}{=} A(t)Y(t)c(t) + b(t) \Leftrightarrow Y(t)c'(t) \overset{!}{=} b(t)\ .$$

Weil $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix ist, ist $\det Y(t) = W(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$.
D.h. $(Y(t))^{-1}$ existiert $\forall t \in J$ wodurch wir nach $c'(t)$ auflösen können. Konkret heißt das $c'(t) = (Y(t))^{-1}b(t)$

Betrachtet man für beliebige $t_0 \in J$ die Funktion $c(t) := \int_{t_0}^t (Y(s))^{-1}b(s)\ \mathrm{d}s$, so ergibt die obige Betrachtung, dass $y_p(t) := Y(t)c(t) = Y(t) \int_{t_0}^t (Y(s))^{-1}b(s)\ \mathrm{d}s$ (3.1) für $y(t_0) = 0$ löst.

Damit ergibt sich:

Satz 3.17.
Vor.: Keine
Beh.: (i) Für jedes $t_0 \in J$ ist $y_p(t) := Y(t) \int_{t_0}^{t} (Y(s))^{-1} b(s)\, ds$ eine Partikulärlösung von $y' = A(t)y + b(t)$.

(ii) $y(t) = Y(t)(Y(t_0))^{-1} y_0 + Y(t) \int_{t_0}^{t} (Y(s))^{-1} b(s)\, ds$ ist die Lösung des AWP $y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0$.

Beweis: Ohne Beweis. ■
Relevanter Spezialfall:

$$A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \qquad Y(t) = e^{tA}$$

$$y(t) = e^{tA} e^{-t_0 A} y_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\; ds$$

(∗) $$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\; ds$$

Übung: Rechnen Sie (∗) für den Fall $d = 1$ nach. ■

3.4 Lineare, skalare ODEs der Ordnung n

Wir betrachten die homogene ODE n-ter Ordnung

(3.8) $$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}(t) = 0, \quad t \in J$$

oder allgemeiner, die inhomogene ODE n-ter Ordnung

(3.9) $$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}(t) = b(t), \quad t \in J$$

Wir suchen $y \in C^n(J;\mathbb{R})$. Mittels der Substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

geht (3.9) über in

(3.10) $$y' = A(t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Damit transformieren sich die Aussagen über Systeme 1. Ordnung auf (3.8), (3.9). Es gilt

(i) Superpositionsprinzip: Die Lösungen von (3.8) bilden einen Vektorraum mit Dimension n. Die Lösungen von (3.9) bilden einen affinen Raum. Durch Vorgabe der Werte $y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$ ist die Lösung von (3.9) eindeutig festgelegt.

(ii) Jede Lösung von (3.9) hat die Form $y = y_p + \tilde{y}$, wobei y_p Partikulärlösung heißt und $\tilde{y}$ Lösung von (3.8) ist.

(iii) Die Wronskideterminante von n Lösungen $y^1, \ldots, y^n \in C^n(J;\mathbb{R})$ von (3.8) ist definiert als

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y^1 & y^2 & \cdots & y^n \\ (y^1)' & (y^2)' & \cdots & (y^n)' \\ (y^1)'' & (y^2)'' & \cdots & (y^n)'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y^1)^{(n-1)} & (y^2)^{(n-1)} & \cdots & (y^n)^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

- Satz von Liouville: $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} -a_{n-1}(s)ds}$
- Für n Lösungen $y^1, \ldots, y^n$ von (3.8) gilt:

$$\begin{aligned} &\{y^1, \ldots, y^n\} \text{ sind linear unabhängig auf } J \Leftrightarrow \exists \bar{t} \in J : W(\bar{t}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in J : W(t) \neq 0 \end{aligned}$$

(iv) n Lösungen $y^1, \ldots y^n$ von (3.8) heißen ein Fundamentalsystem.

(v) d'Alembertsches Reduktionsprinzip: Falls $y \in C^n(J;\mathbb{R})$ eine Lösung von (3.8) ist, dann liefert der Ansatz $\tilde{y} = \varphi y$ eine ODE der Ordnung $n-1$ für die Funktion φ', um eine weitere Lösung $\tilde{y}$ von (3.8) zu erhalten.

(vi) Variation der Konstanten zur Bestimmung von Partikulärlösungen. Wir illustrieren das Vorgehen für $n = 2$: Seien $y^1, y^2 \in C^2(J;\mathbb{R})$ ein Fundamentalsystem für (3.8).
Ansatz für die Partikulärlösung:

$$y_p(t) = y^1(t)c_1(t) + y^2(t)c_2(t)$$

Notationell etwas geschickter: Betrachte den Ansatz

$$Y(t) \cdot c(t) \text{ in (3.10) mit } Y(t) = \begin{pmatrix} y^1 & y^2 \\ (y^1)' & (y^2)' \end{pmatrix}$$

Dies liefert

$$Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) \stackrel{!}{=} A(t)Y(t)c(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

das heißt

(3.12) $$Y(t)c'(t) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

weil y^1, y^2 ein Fundamentalsystem sind, ist $W(t) = \det Y(t) \neq 0$, dh. $c(t) = (Y(t))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Wähle $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ als Stammfunktion $\begin{pmatrix} y^1 & y^2 \\ (y^1)' & (y^2)' \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$

Beispiel: $y'' + \frac{y'}{1+t} = 1$, gesucht: Partikulärlösung

(i) Finde 2 linear unabhängige Lösungen der homogenen ODE

$$y'' + \frac{y'}{1+t} = 0$$

1. Lösung: $y^1 \equiv 1$
2. Lösung: Setze $z = (y^2)'$. Dann erfüllt z die Gleichung

$$z' + \frac{z}{1+t} = 0 \quad \Rightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{1}{1+t}$$
$$\Rightarrow \ln z = -\ln(1+t) + c \quad \Rightarrow z = \frac{c'}{1+t}$$

Damit ist eine 2. Lösung: $y^2(t) = \ln(1+t)$
Behauptung: y^1, y^2 sind linear unabhängig

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y^1 & y^2 \\ (y^1)' & (y^2)' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \ln(1+t) \\ 0 & \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t} \neq 0$$

(ii) Partikulärlösung: Ansatz

$y(t) = Y(t)c(t)$ in (3.10) liefert mit (3.12)

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln(1+t) \\ 0 & \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}' \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1' + c_2' \ln(1+t) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow c_1' = -(1+t)\ln(1+t)$$
$$c_2' \frac{1}{1+t} \stackrel{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow c_2' = 1+t$$

also spezielle Lösung $c_2(t) = t + \frac{t^2}{2}$, $c_1(t) = -\frac{1}{2}(1+t)^2(\frac{1}{2} - \ln(1+t))$

$$\text{also } y_p(t) = c_1(t) + \ln(1+t)c_2(t) =$$
$$= -\frac{1}{2}(1+t)^2(\frac{1}{2} - \ln(1+t)) + t(1+\frac{1}{2}t)\ln(1+t)$$

eine Partikulärlösung.
Die allgemeine Lösung ist

$$y(t) = y_p(t) + d_1 + d_2 \ln(1+t) \text{ für } d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

■ **Bemerkung:** Für beliebige Funktionen $y^1, \dots, y^n \in C^n(J;\mathbb{R})$ kann aus dem Verschwinden der Wronskischen **NICHT** geschlossen werden, dass sie linear abhängig sind.
Beispiel: Betrachte $y^1(t) = t^2,\ y^2(t) = |t|\, t$ auf $J = \mathbb{R}$.
Dann gilt:

- y^1, y^2 sind linear unabhängig auf J
- Weiters gilt:

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} y^1 & y^2 \\ (y^1)' & (y^2)' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t^2 & |t|\, t \\ 2t & 2t\ \mathrm{sgn}(t) \end{pmatrix} \\ &= 2t^3\ \mathrm{sgn} t - 2t^2\, |t| \\ &= 2t^2(t\ \mathrm{sgn} t - |t|) = 2t^2(|t| - |t|) = 0 \end{aligned}$$

■

3.5 Gleichungen der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)} = 0, \quad t \in J \tag{3.13}$$

oder allgemeiner

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)} = b(t), \quad t \in J \tag{3.14}$$

wobei $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Im Prinzip sind die Ergebnisse aus Abschnitt 3.4 anwendbar. Die Lösungen sind aber oft mit speziellen Ansätzen einfacher konstruierbar.

Beobachtung: Macht man für (3.13) den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$, so ergibt sich

$$\lambda^n e^{\lambda t} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j e^{\lambda t} \stackrel{!}{=} 0,$$

das heißt $y(t) = e^{\lambda t}$ ist eine Lösung von (3.13), falls λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi : \lambda \mapsto \lambda^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j$ ist.

Beispiel: $y'' - 4y = 0$ hat die beiden l.u. Lösungen $y^1(t) = e^{2t},\ y^2(t) = e^{-2t}$. ■
Beispiel: $y'' + 4y = 0$. Charakteristisches Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4$ mit Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Die beiden (komplexen) l.u. Lösungen sind $y^1(t) = e^{2it},\ y^2(t) = e^{-2it}$. Reelle Lösungen ergeben sich durch die Wahl Re $y^1(t)$, Im $y^1(t)$, das heißt $\tilde{y}^1(t) = \cos 2t,\ \tilde{y}^2(t) = \sin 2t$. ■
Beispiel: $y'' = 0$. Charakteristisches Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

1. Lösung: $y^1(t) = e^{\lambda_i t} = 1$

2. Lösung: $y^2(t) = t = t \cdot 1 = t \cdot e^{\lambda_i t}$

■

Satz 3.18.

Vor.: Sei $\chi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j$ das charakteristische Polynom für (3.13). Es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Seien weiters $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Nullstellen von χ mit Vielfachheiten $k_1, \dots, k_m$.

Beh.: Dann gilt: Die Funktionen

$$y^{i,j}(t) = t^j e^{\lambda_i t}, \quad 0 \le j \le k_i - 1, \ 1 \le i \le m$$

sind n l.u. Lösungen von (3.13):

Beweis:

- Die Funktionen sind l.u. ⟦Übung⟧
- Die Funktionen $y^{i,j}$ sind Lösungen von (3.13).
  Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{y}_l : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (t, \lambda) &\mapsto t^l e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\partial_t^j \left(t^l e^{\lambda t} \right) = \partial_t^j \left(\partial_\lambda^l e^{\lambda t} \right) = \partial_\lambda^l \left(\partial_t^j e^{\lambda t} \right).$$

Mit $a_n = 1$ folgt

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \partial_t^j \left(t^l e^{\lambda t} \right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \partial_\lambda^l \partial_t^j e^{\lambda t} = \partial_\lambda^l \sum_{j=0}^{n} a_j \partial_t^j e^{\lambda t} = \partial_\lambda^l \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j e^{\lambda t} \right) = \partial_\lambda^l \left(e^{\lambda t} \chi(\lambda) \right).$$

Bei $\lambda = \lambda_i$ hat χ eine k_i-fache Nullstelle und $\tilde{y}_l(t, \lambda_i) = y^{i,l}$ für $0 \le l \le k_i - 1$ und damit $\sum_{j=0}^{n} a_j \partial_t^j \left(t^l e^{\lambda t} \right) \Big|_{\lambda = \lambda_i} = 0$ für $l = 0, \dots, k_i - 1$, das heißt $y^{i,j}$ ist Lösung von (3.13).

■

Korollar 3.19.
Vor.: Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{m'}$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von χ und $\lambda_{m'+1}, \overline{\lambda_{m'+1}}, \dots, \lambda_{m'+m}, \overline{\lambda_{m'+m}}$ die echt komplexen Nullstellen von χ. Seien $k_1, \dots, k_{m'}, k_{m'+1}, \dots, k_{m'+m}$ die Vielfachheiten der Nullstellen.
Beh.: Dann gilt: Die Funktionen

$$y^{i,j}(t) := t^j e^{\lambda_i t}, \quad 0 \le j \le k_i - 1, \quad 1 \le i \le m'$$

und

$$t^j \text{ Re } e^{\lambda_i t}, \quad 0 \le j \le k_i - 1, \quad m' + 1 \le i \le m' + m,$$
$$t^j \text{ Im } e^{\lambda_i t}, \quad 0 \le j \le k_i - 1, \quad m' + 1 \le i \le m' + m$$

bilden ein (reelles) Fundamentalsystem von (3.13).

Beweis: Klar. ■

Beispiel: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Charakteristisches Polynom: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$
$\Rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$ sind doppelte Nullstellen.
Komplexes Fundamentalsystem: e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}
Reelles Fundamentalsystem: $\cos t$, $\sin t$, $t \cos t$, $t \sin t$ ■

Wir betrachten die inhomogene Gleichung (3.14). Eine Partikulärlösung kann mittels Variation der Konstanten bestimmt werden. Im Fall, dass $b(t) = p(t)e^{\beta t}$ für ein Polynom p und $\beta \in \mathbb{C}$, ist es oft einfacher, einen Ansatz für eine Partikulärlösung zu machen.

Satz 3.20. (*Ansatzmethode*):
Vor.: Sei q ein Polynom vom Grad l und $\beta \in \mathbb{C}$.
Beh.: Dann hat die ODE (3.14) mit $b(t) = q(t)e^{\beta t}$ eine Partikulärlösung der folgenden Form:

1. Fall: $\chi(\beta) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = p(t)e^{\beta t}$.

2. Fall: β ist eine k-fache Nullstelle von $\chi \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = t^k p(t) e^{\beta t}$.

Dabei ist p jeweils ein Polynom vom Grad l.

Beweis: Ohne Beweis. ■
Wir betrachten nur einige ausgewählte Spezialfälle:
Sei $l = 0$, das heißt $q \equiv$ konst.

1. Fall: $\chi(\beta) \neq 0$. Ansatz $y_p(t) = ce^{\beta t}$ für eine Konstante c bringt

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y_p^{(j)}(t) = c \sum_{j=0}^{n} a_j \beta^j e^{\beta t} = ce^{\beta t} \chi(\beta) \ .$$

Das heißt $c = \frac{q}{\chi(\beta)}$ liefert tatsächlich eine Partikulärlösung von (3.14) mit $b(t) = qe^{\beta t}$.

2. Fall: $\chi(\beta) = 0$, $\chi'(\beta) \neq 0$. Der Ansatz $y_p(t) = tce^{\beta t}$ für eine Konstante c bringt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} a_j y_p^{(j)}(t) &= c\left[a_0 te^{\beta t} + \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{\nu=0}^{\min(j,1)} \binom{j}{\nu} t^{1-\nu}\beta^{j-\nu}e^{\beta t}\right] \\
&= c\left[a_0 te^{\beta t} + \sum_{j=1}^{n} a_j \left(t\beta^j e^{\beta t} + j\beta^{j-1}e^{\beta t}\right)\right] \\
&= ce^{\beta t}\left(t\underbrace{\chi(\beta)}_{=0} + \chi'(\beta)\right) = ce^{\beta t}\underbrace{\chi'(\beta)}_{\neq 0} \\
&\overset{!}{=} qe^{\beta t}
\end{aligned}$$

Das heißt $c = \frac{q}{\chi'(\beta)}$ liefert eine Partikulärlösung.
Der Fall $\chi(\beta) = 0$ in Satz 3.20. heißt Resonanzfall. Die Namensgebung ist motiviert aus Anwendungen wie z.B. der Pendelgleichung.

Beispiel: Betrachte

$$(*) \qquad \varphi'' + \omega_0^2\varphi = \cos\omega t, \quad \omega, \omega_0 > 0$$

- Komplexes Fundamentalsystem für die homogene Gleichung ist $e^{\pm i\omega_0 t}$
- Reelles Fundamentalsystem: $\Re e^{+i\omega_0 t} = \cos(w_0 t)$, $\Im e^{+i\omega_0 t} = \sin(\omega_0 t)$

Partikulärlösung für $(*)$: Schreibe $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$. Damit müssen wir Partikulärlösungen für $b(t) = \frac{1}{2}e^{\pm i\omega t}$ suchen. Aus Satz 3.20. ergibt sich für $\omega_0 \neq \omega$, dass man den Ansatz

$$\varphi_p(t) = ce^{i\omega t} \text{ (bzw. } ce^{-i\omega t}\text{)}$$

machen sollte. Das liefert für c:

$$c\left((i\omega)^2 + \omega_0^2\right)e^{i\omega t} \overset{!}{=} \frac{1}{2}e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

Analog ist die Partikulärlösung $\frac{1}{2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}e^{-i\omega t}$ für $b(t) = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$.
Damit Partikulärlösung

$$\varphi_p(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \frac{\cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ für } (*).$$

⟦Man hätte dies auch erhalten können mit dem Ansatz $\varphi_p(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$.⟧

Im Resonanzfall ist $\omega = \omega_0$. Satz 3.20. suggeriert dann, dass man die Partikulärlösung der Form

$$\varphi_p(t) = c_1 te^{i\omega t} + c_2 te^{-i\omega t}$$

suchen soll.
Äquivalent macht man den Ansatz

$$\varphi_p(t) = c_1 t\cos(\omega t) + c_2 t\sin(\omega t).$$

Einsetzen in $(*)$ mit $\omega_0 = \omega$ liefert

$$\begin{aligned}
&c_1\left(-2\omega\sin(\omega t) - \omega^2 t\cos(\omega t)\right) + c_2\left(2\omega\cos(\omega t) - \omega^2 t\sin(\omega t)\right) + \omega^2 c_1 t\cos(\omega t) + \omega^2 c_2 t\sin(\omega t) \overset{!}{=} \cos(\omega t)\\
\Leftrightarrow &-2\omega c_1\sin(\omega t) + 2\omega c_2\cos(\omega t) \overset{!}{=} \cos(\omega t)\\
\Rightarrow &c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2\omega}
\end{aligned}$$

und damit ist $\varphi_p(t) = \frac{1}{2\omega} t\sin(\omega t)$ Partikulärlösung von $(*)$. ∎

Beobachtung:

- nicht Resonanzfall: Lösungen bleiben beschränkt für $t \to \infty$.
- Resonanzfall: Lösungen bleiben nicht beschränkt für $t \to \infty$.

KAPITEL

VIER

Stetige Abhängigkeit von den Daten

Wir betrachten

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad t \mapsto y_{t_0,y_0}(t) \tag{4.1}$$

Beobachtung: Die Lösungsformeln aus Kapitel 3 zeigen, dass die Lösung von (4.1) stetig (oder sogar stetig differenzierbar) von y_0 abhängt. Es gilt wegen des Grönwall-Lemmas:

Satz 4.1.
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G; \mathbb{R}^d)$ und lipschitzstetig im 2. Argument, d.h.

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L \|y - z\| \quad \forall (t, y), (t, z) \in G$$

Seien $y, z \in C^1(J; \mathbb{R}^d)$ mit

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \forall t \in J \\ \|z'(t) - f(t, z(t))\| &\leq \delta \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

Beh.: Dann gilt für alle $t \in J$:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \, e^{L|t-t_0|} + \tfrac{\delta}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$$

Beweis:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} y'(s) - z'(s) ds \right\| \leq$$

$$\|y(t_0) - z(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s)) ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} z'(s) - f(s, z(s)) ds \right\| \leq$$

$$\|y(t_0) - z(t_0)\| + \left| \int_{t_0}^{t} L \|y(s) - z(s)\| \, ds \right| + \delta \, |t - t_0|$$

Die Aussage des Satzes folgt nun (für $t > t_0$) aus dem Grönwall-Lemma 2.14
mit $v(t) = \|y(t) - z(t)\|$, $\alpha = \|y(t_0) - z(t_0)\| + \delta$, $\beta = L$ ■

Korollar 4.2.
Vor.: Sei $f \in C(J \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ lipschitzstetig im 2. Argument:

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \le L\,\|y-z\| \qquad \forall (t,y),\ (t,z) \in J \times \mathbb{R}^d.$$

Sei $t_0 \in J$, y^1, y^2 zwei Lösungen von $y' = f(t,y)$.
Beh.: Dann gilt

$$\left\|y^1(t) - y^2(t)\right\| \le \left\|y^1(t_0) - y^2(t_0)\right\| e^{L|t-t_0|} \qquad \forall t \in J,$$

das heißt, die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

hängt lipschitzstetig vom Startwert y_0 ab.

Beweis:

- Satz 2.15 zeigt, dass $y^1,\ y^2 \in C^1(J;\mathbb{R}^d)$
- Die Abschätzung folgt aus Satz 4.1. ■

Beispiel: 4.4

$$y' = 10\left(y - \frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,, \qquad y(0) = y_0$$

hat Lösung

$$y_{0,y_0}(t) = y_0 e^{10t} + \frac{t^2}{1+t^2}$$

■

Beobachtung:

- $y_0 \mapsto y_{0,y_0}(t)$ ist lipschitzstetig für jedes feste t
- die Abhängigkeit von der Lipschitzstetigkeit in Korollar 4.2. ist scharf! (hier $L = 10$)
- für $t \to \infty$ entfernen sich zwei Lösungen voneinander, auch wenn sie für $t = 0$ sehr nahe beieinander sind.

■ **Übung 4.5.** Verwenden Sie Satz 4.1, um die stetige Abhängigkeit von Parametern zu zeigen: Für $f \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ mit $\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})} < \infty$ für $|\alpha| = 1$ hängt die Lösung y von $y' = f(t,y,\mu)$, $y(t_0) = y_0$ stetig von $\mu \in \mathbb{R}$ ab. ■

Korollar 4.2. drückt aus, dass die Lösung eines AWP lipschitzstetig von den Anfangswerten abhängt. In Korollar 4.2 ist f „global" definiert und lipschitzstetig (im 2. Argument). Tatsächlich reicht lokale Lipschitzstetigkeit im 2. Argument.

Korollar 4.3.
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C(G;\mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2. Argument.
Beh.: Dann hängt die Lösung des AWP (2.2) $y' = f(t,y),\; y(t_0) = y_0$ lokal lipschitzstetig von y_0 ab. Genauer: Zu $(t_0,y_0) \in G$ und $t^\star \in J_{t_0,y_0}$ (= Maximales Existenzintervall für (2.2)) existieren ε, $L > 0$, so dass für jedes $\tilde{y}_0$ mit $\|y_0 - \tilde{y}_0\| < \varepsilon$ die Lösung $y_{t_0,\tilde{y}_0}$ des AWP $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = \tilde{y}_0$ auf $[t_0,t^\star]$ existiert und die Abschätzung

$$\|y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\| \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\|\, e^{L|t-t_0|} \qquad \forall t \in [t_0,t^\star]$$

gilt.

Beweis: Es gibt viele Beweistechniken. Wir skizzieren eine „Lokalisierungstechnik“, die Korollar 4.2 verwendet.
Sei $t^\star \in J_{t_0,y_0}$. Sei o.B.d.A. $t^\star > t_0$.
Dann ist

$$g := \{(t, y_{t_0,y_0}(t)) : t \in [t_0,t^\star]\} \subset G$$

kompakt. Also $\exists \delta > 0$, so dass der „Schlauch“ $S_\delta := \bigcup\limits_{t \in [t_0-\delta, t^\star+\delta]} \{t\} \times B_\delta(y_{t_0,y_0}(t))$ die Bedingung $\bar{S}_\delta \subset G$ erfüllt. Sei $\chi \in C^1(\mathbb{R}^{d+1};\mathbb{R})$ mit

- supp $\chi \subset S_\delta$
- $\chi \equiv 1$ auf $S_{\delta/2}$

Definiere die Funktion $f^\star \in C(\mathbb{R}^{d+1};\mathbb{R}^d)$ durch $f^\star := f \cdot \chi$, genauer

$$f^\star(t,y) := \begin{cases} \chi(t,y) f(t,y) & (t,y) \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt: $f^\star$ ist lipschitzstetig im 2. Argument, d.h. es existiert ein $L > 0$, so dass

$$\|f^\star(t,y) - f^\star(t,z)\| \leq L\,\|y - z\| \qquad \forall (t,y),\; (t,z) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

$[\![f$ lokal lipschitzstetig, $\chi \in C^1(\mathbb{R}^{d+1};\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\chi \subset\subset G$ kompakt. Details: Übung!$]\!]$

Seien $y^\star_{t_0,y_0}$ und $y^\star_{t_0,\tilde{y}_0}$ die Lösungen der AWPs

$$y' = f^\star(t,y), \quad y(t_0) = y_0,$$
$$y' = f^\star(t,y), \quad y(t_0) = \tilde{y}_0.$$

Nach Korollar 4.2. gilt

$$\left\|y^\star_{t_0,y_0}(t) - y^\star_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\right\| \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\|\, e^{L|t-t_0|}. \tag{4.2}$$

Weil $f = f^\star$ auf $S_{\delta/2}$, muss gelten $[\![$Eindeutigkeit von AWPs: y_{t_0,y_0} und $y^\star_{t_0,y_0}$ lösen beide $y' = f^\star(t,y)]\!]$

$$y^\star_{t_0,y_0}(t) = y_{t_0,y_0}(t) \qquad \forall t \in [t_0,t^\star]$$

und, falls $\|\tilde{y}_0 - y_0\|$hinreichend klein ist, dann muss auch [1]

$$y^\star_{t_0,\tilde{y}_0(t)} = y_{t_0,\tilde{y}_0}(t) \qquad \forall t \in [t_0,t^\star]$$

[1] $[\![$Kor. 4.2 $\Longrightarrow (t, y^\star_{t_0,\tilde{y}_0}(t)) \in S_{\delta/2}$ für $t \in [t_0,t^\star]$ falls $\|y_0 - \tilde{y}_0\|$ hinreichend klein. Dann, wieder wg. Eindeutigkeit von AWPs, $y_{t_0,\tilde{y}_0} = y^\star_{t_0,\tilde{y}_0}$ auf $[t_0,t^\star]]\!]$

gelten. Damit folgt aus (4.2)

$$\|y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\| \le \|y_0 - \tilde{y}_0\| \, e^{L|t-t_0|}. \qquad \blacksquare$$

Korollar 4.3 zeigt, dass die Lösung eines AWP lipschitzstetig von y_0 abhängt. Das suggeriert, dass $y_0 \mapsto y_{t_0,y_0}(t)$ stetig differenzierbar ist. Tatsächlich gilt:

Satz 4.6.
Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ Gebiet, $f \in C^1(G;\mathbb{R}^d)$, $(t_0, y_0) \in G$ und $y_{t_0,y_0} \in C^1((a,b);\mathbb{R}^d)$ Lösung von $y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0$. Sei $t^\star \in (t_0, b)$.
Beh.: Dann gilt

(i) $\exists \varepsilon > 0$, so dass die Funktion $(t, y_0) \mapsto y_{t_0,y_0}(t)$ auf $(t_0, t^\star) \times B_\varepsilon(y_0)$ stetig differenzierbar ist.

(ii) Die Ableitung nach y_0, d.h. $v(t) := \partial_{y_0} y_{t_0,y_0}(t)$ erfüllt das AWP

(4.3)
$$\begin{aligned} v'(t) &= \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t)) v(t) \\ v(t_0) &= I \in \mathbb{R}^{d\times d} \end{aligned}$$

Beispiel 4.4. $y' = 10(y - \frac{t^2}{1+t^2}) + \frac{2t}{(1+t^2)^2} = f(t,y)$ mit Lösung $y_{0,y_0}(t) = y_0 e^{10t} + \frac{t^2}{1+t^2}$, $\partial_y f(t,y) = 10$ und $\partial_{y_0} y_{0,y_0}(t) = e^{10t} =: v(t)$

Beobachtung: $v'(t) = (e^{10t})' = 10v(t) = \partial_y f(t, y_{0,y_0}(t))v(t)$ und $v(0) = 1$.

Beweis (*von Satz 4.6.*): Wir zeigen nur (ii). Um die Struktur des AWP (4.3) zu motivieren, gehen wir formal vor und nehmen an, dass $d = 1$ und $f \in C^2(G;\mathbb{R})$ ⟦Übung: modifizieren Sie den Beweis, so daß $f \in C^1(G;\mathbb{R})$ reicht⟧. Dann gilt:

1. $\partial_{y_0}(\partial_t y_{t_0,y_0}(t)) = \partial_{y_0}(f(t, y_{t_0,y_0}(t)))$
2. $\partial_{y_0}(y_{t_0,y_0}(t_0)) = \partial_{y_0}(y_0)$

aus 2. folgt $v(t_0) = 1$. Gleichung 1. impliziert (falls der Satz von Schwarz anwendbar ist):

$$\partial_t \partial_{y_0} y_{t_0,y_0}(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\ \partial_{y_0} y_{t_0,y_0}(t) \quad \Longrightarrow \quad v'(t) = \partial_t v(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))v(t)$$

Wir hoffen also, dass die Lösung des AWP (4.3) tatsächlich $\partial_{y_0} y_{t_0,y_0}(t)$ liefert. Um das zu bestätigen, betrachten wir auf $(t_0, t^\star)$ die Funktion

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h}(y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t)) - v(t)\ .$$

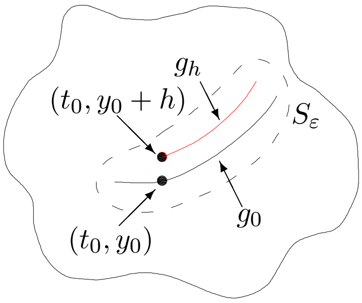
Zu zeigen: $\lim_{h\to 0} \delta_h(t) = 0$ ⟦für hinreichend kleine h ist δ_h tatsächlich nach Korollar 4.3 wohldefiniert d.h. $\delta_h \in C^1((t_0, t^\star);\mathbb{R}^d)$⟧. Im weiteren Vorgehen wollen wir Satz 4.1. anwenden. Hierzu identifizieren wir eine ODE, die von δ_h erfüllt wird. δ_h erfüllt folgendes AWP:

- $\delta_h(t_0) = \frac{1}{h}(y_0 + h - y_0) - v(t_0) = 1 - 1 = 0$
- $\delta_h'(t) = \frac{1}{h}[f(t, y_{t_0,y_0+h}(t)) - f(t, y_{t_0,y_0}(t))] - v'(t) =$
$\frac{1}{h}[f(t, y_{t_0,y_0+h}(t)) - f(t, y_{t_0,y_0}(t))] - \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))v(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\delta_h(t) + \lambda_h(t)$ mit

$$\begin{aligned} \lambda_h(t) &= \frac{1}{h}[f(t, y_{t_0,y_0+h}(t)) - f(t, y_{t_0,y_0}(t))] - \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))(\delta_h(t) + v(t)) \\ &= \frac{1}{h}[f(t, y_{t_0,y_0+h}(t)) - f(t, y_{t_0,y_0}(t)) - \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))(y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t))] \end{aligned}$$

Nach Korollar 4.3 ist

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[t_0,t^*]} |y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t)| = 0$$



Damit ist für h hinreichend klein der Graph $g_h := \{(t, y_{t_0,y_0+h}(t)) : t \in [t_0, t^*]\}$ in dem Schlauch $\overline{S_\varepsilon} \subset G$, wobei $S_\varepsilon := \bigcup_{t\in[t_0-\varepsilon,t^\star+\varepsilon]} \{t\} \times B_\varepsilon(y_{t_0,y_0}(t))$

Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit von f im 2. Argument (und weil $\overline{S_\varepsilon} \subset G$ kompakt) und wegen $f \in C^2(\overline{S_\varepsilon})$ folgt wegen Taylor:

$$f(t, y_{t_0,y_0+h}(t)) - f(t, y_{t_0,y_0}(t)) = \underbrace{\partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))(y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t))}_{\text{1.Taylor Glied}} + \underbrace{\tilde{\lambda}_h(t)}_{\text{Rest}} \tag{4.4}$$

mit $\left|\tilde{\lambda}_h(t)\right| \leq C\,|y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t)|^2$ für ein $C > 0$, welches nicht von h und $t \in [t_0, t^*]$ abhängt. Damit gilt:

$$|\lambda_h(t)| = \left|\frac{1}{h}\tilde{\lambda}_h(t)\right| \leq \frac{C}{h}\,|y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t)|^2 \overset{\text{Kor. 4.3}}{\leq} \frac{C}{h}\left(he^{L|t-t_0|}\right)^2 \leq C'h$$

für ein $C' > 0$, welches nicht von h, t abhängt. Damit wissen wir für δ_h:

- $\delta_h(t_0) = 0$
- $\delta_h'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\delta_h(t) + \lambda_h(t), \quad |\lambda_h(t)| \leq C'h$

Anwenden von Satz 4.1. mit $y \equiv 0$ und $z(t) = \delta_h(t)$ liefert mit $L := \sup_{t\in[t_0,t^*]} \|\partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\|$

$$|0 - \delta_h(t)| \leq |0 - \delta_h(t_0)|\,e^{L|t-t_0|} + \max_{s\in[t_0,t^*]} \frac{|\lambda_h(s)|}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) \leq C''h$$

mit C'' unabhängig von t und h. Damit gilt nun $\lim_{h\to 0} |\delta_h(t)| = 0$. ■

Als einfache Anwendung der Prinzipien, auf denen Satz 4.6 basiert, gilt, dass die Lösung von parameterabhängigen ODEs stetig differenzierbar von den Parametern abhängt.

Übung 4.7. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(G; \mathbb{R})$. Sei $y_{t_0,y_0,\mu} \in C^1$ die Lösung von

$$y' = f(t, y, \mu), \quad y(t_0) = y_0.$$

Dann gilt: die Funktion

$$t \longmapsto v(t) := \partial_\mu y_{t_0,y_0,\mu}(t) \quad \text{löst}$$

$$v' = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0,\mu}(t))v(t) + \partial_\mu f(t, y_{t_0,y_0,\mu}(t)), \quad v(t_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\partial_\mu \partial_t y_{t_0,y_0,\mu}(t)} \quad &= \quad \underbrace{\partial_\mu f(t, y_{t_0,y_0,\mu}(t), \mu)} \\
= \partial_t \partial_\mu y_{t_0,y_0,\mu}(t) \quad &\quad = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0,\mu}(t), \mu) \cdot \partial_\mu y_{t_0,y_0,\mu}(t) + \partial_\mu f(t, y_{t_0,y_0,\mu}(t), \mu) \\
= \partial_t v(t) \quad &\quad = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0,\mu}(t), \mu)v(t) + \partial_\mu f(t, y_{t_0,y_0,\mu}(t), \mu)
\end{aligned}$$

Anfangswert: $\underbrace{\partial_\mu y_{t_0,y_0,\mu}(t_0)}_{=v(t_0)} = \underbrace{\partial_\mu y_0}_{=0}$ ∎

Beispiel 4.8. Freier Fall mit wenig Reibung. Die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t erfüllt das AWP:

$$y'(t) = -g - \varepsilon y(t), \quad y(0) = 0 \qquad \text{mit } \varepsilon > 0$$

Die exakte Lösung ist: $y(t,\varepsilon) = g\frac{e^{-\varepsilon t}-1}{\varepsilon}$.
Wir versuchen nun, $y(t,\varepsilon)$ mittels „Störungstheorie“ für kleine ε zu approximieren

$$y(t,\varepsilon) = y(t,0) + \partial_\varepsilon y(t,0) \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

- Berechne $v_0(t) = y(t,0)$
  v_0 löst $v_0' = -g, \quad v_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0(t) = -gt$
- Berechne $v_1(t) = \partial_\varepsilon y(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$
  Die ODE, die v_1 erfüllt, ergibt sich aus Übung 4.7 oder direkt:

$$\partial_t y(t,\varepsilon) = -g - \varepsilon y(t,\varepsilon)\ , \quad y(0,\varepsilon) = 0$$

$$\partial_t \partial_\varepsilon y(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = -y(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} - \varepsilon \cdot \partial_\varepsilon y(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$$

$v_1'(t) = -(t,0) - 0 = -v_0(t)$
$v_1' = -v_0(t) = gt\ , \qquad v_1(0) = 0$
$\Rightarrow v_1(t) = \frac{1}{2}gt^2$
und damit

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) &= y(t,0) + \varepsilon\ \partial_\varepsilon y(t,0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= -gt + \frac{1}{2}gt^2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

„Probe“ durch Taylorentwicklung der Lösungsformel

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) &= g\frac{e^{-\varepsilon t}-1}{\varepsilon} = \frac{g}{\varepsilon}(1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}(\varepsilon t)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) - 1) \\ &= -gt + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 g + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Bemerkung: Approximation OK für *festes* t und kleine ε. Nicht OK für große t. ∎

KAPITEL
FÜNF

Stabilität und Langzeitverhalten

Erinnerung: stetige Abhängigkeit von Anfangswerten heißt:

$$\|y_0 - \tilde{y}_0\| \text{ klein } \Rightarrow \|y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\| \text{ klein für } \textit{festes } t$$

Fragen:

1. Bleibt für alle $t > t_0$ die Differenz

$$\|y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\| \text{ klein, falls } \|y_0 - \tilde{y}_0\| \text{ klein ist?}$$

2. Gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \|y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\| = 0$, falls nur $\|y_0 - \tilde{y}_0\|$ hinreichend klein ist?

Definition 5.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet, $f \in C(\mathbb{R} \times G; \mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig im 2. Argument. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Eine Lösung y_{t_0,y_0} heißt (Ljapunov) *stabil*, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, s.d. $\forall \tilde{y}_0 \in B_\delta(y_0)$ gilt: $J_{t_0,\tilde{y}_0} \supset [t_0, \infty)$ ⟦d.h. die Lösung existiert für alle Zeiten⟧ und $\|y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

(ii) y_{t_0,y_0} heißt *instabil*, falls es nicht stabil ist.

(iii) y_{t_0,y_0} heißt *attraktiv* (anziehend), falls $\exists \delta > 0$, so dass

$$\forall \tilde{y}_0 \in B_\delta(y_0) \text{ gilt: } J_{t_0,\tilde{y}_0} \supset [t_0, \infty) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \|y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,\tilde{y}_0}(t)\| = 0$$

(iv) y_{t_0,y_0} heißt *asymptotisch stabil*, falls sie stabil und attraktiv ist.

Besonders wichtig ist der Fall autonomer Systeme (d.h. $y' = f(y)$).

Definition 5.2. Ein Wert $y_0 \in \mathbb{R}^d$ heißt Ruhelage der autonomen ODE $y' = f(y)$, falls

$$f(y_0) = 0 \quad [\![\text{offensichtlich ist dann } y_{t_0,y_0}(t) = y_0]\!] \tag{5.1}$$

Eine typische Frage bei autonomen ODEs ist dann, ob die Ruhelagen stabil/attraktiv sind.

Beispiel 5.3. (mathematisches Pendel)

$$y'' + \omega^2 \sin y = 0$$

als autonomes System geschrieben:

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 \sin y \end{pmatrix}$$

mit Ruhelagen $\begin{matrix} (v,y) = (0,0) \\ (v,y) = (0,\pi) \end{matrix}$

Physikalisch ist klar, dass

(i) $(v_0, y_0) = (0,0)$ ist stabil

(ii) $(v_0, y_0) = (0,0)$ ist nicht attraktiv ⟦da keine Reibung⟧

(iii) $(v_0, y_0) = (0,\pi)$ ist instabil ⟦bei kleiner Auslenkung/Änderung kippt das Pendel⟧ ■

Beispiel 5.4.

$$y' = \alpha y, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Ruhelage $y^* = 0$, allgemeine Lösung $y_{t_0,y_0}(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)}$

(i) für $\alpha \le 0$ ist $y^* = 0$ stabil, denn

$$|y_{t_0,y_0}(t) - y^*| \le |y_0 - y^*| \quad \forall t \ge t_0$$

(ii) für $\alpha < 0$ ist $y^* = 0$ asymptotisch stabil, denn

$$|y_{t_0,y_0}(t) - y^*| \le \underbrace{e^{\alpha(t-t_0)}}_{\to 0 \text{ für } t \to \infty, \text{ d.h. attraktiv}} |y_0 - y^*|$$

(iii) für $\alpha > 0$ ist y^* instabil:

$$|y_{t_0,y_0}(t) - y^*| = e^{\alpha(t-t_0)} |y_0| \to \infty, \qquad \text{für } t \to \infty \text{ und } y_0 \ne 0.$$ ■

5.1 Ebene autonome Systeme

Wir betrachten für $d = 2$ die ODE

(5.2) $$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit der Ruhelage $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ziel: Klassifikation der Stabilitätseigenschaften der Ruhelage y^* in Abhängigkeit von A.

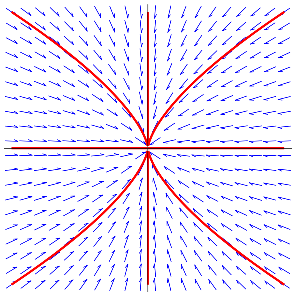
Aus Kapitel 3 wissen wir, dass die allgemeine Lösung des AWP $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ ⟦wir setzen $t_0 = 0$⟧ durch die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren/Hauptvektoren von A beschrieben werden.
Seien im Folgenden λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A.

1. Fall: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Seien $(\lambda_1, v^1), (\lambda_2, v^2)$ die Eigenpaare von A.
Die allgemeine Lösung von (5.2) hat die Form

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

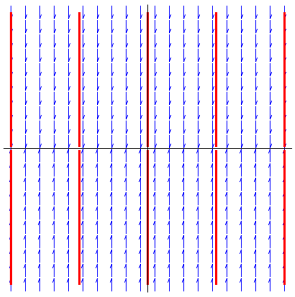
(i) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

y^* ist eine asymptotisch stabile Ruhelage
y^* heißt *stabiler Knoten.*



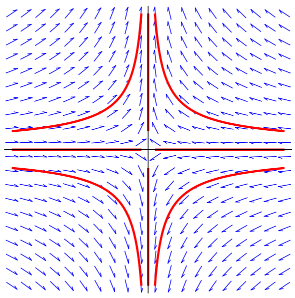
(ii) $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$

y^* ist stabile Ruhelage
Es gibt eine Linie von Ruhelagen:
Die Punktmenge $\{sv^2 : s \in \mathbb{R}\}$



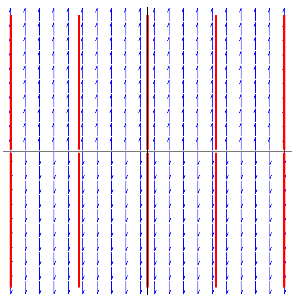
(iii) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

y^* ist instabil
y^* heißt *Sattelpunkt*



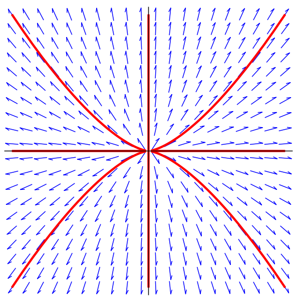
(iv) $0 = \lambda_1 < \lambda_2$

y^* ist instabile Ruhelage
Es gibt eine Linie von Ruhelagen:
Die Punktmenge $\{sv^2 : s \in \mathbb{R}\}$



(v) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

y^* ist instabil
y^* heißt *instabiler Knoten*



2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

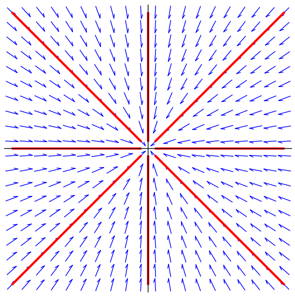
(i) A hat zwei l.u. Eigenvektoren zum Eigenwert λ

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung ist $y(t) = e^{\lambda t}(c_1 v^1 + c_2 v^2)$

(a) $$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

y^* ist asymptotisch stabile Ruhelage

y^* heißt *stabiler Stern*



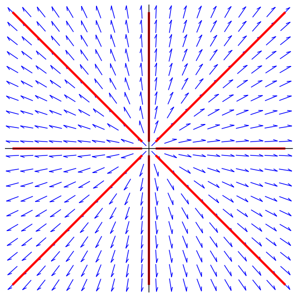
(b) $$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

y^* ist stabil, degenerierter Fall, denn $A = 0$.

(c) $$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

y^* ist instabile Ruhelage

y^* heißt *instabiler Stern*

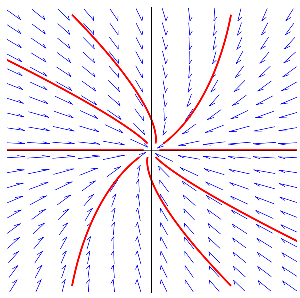


(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$ A hat EV v^1 und Hauptvektor v^2 $\llbracket$ d.h. $A = T\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{pmatrix}T^{-1}$; $Av^1 = \lambda v^1$; $Av^2 = \lambda v^2 + v^1$ $\rrbracket$ $\Rightarrow$ allgemeine Lösung $y(t) = e^{\lambda t}(c_1 v^1 + c_2(v^2 + t v^1))$

(a) $$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

y^* ist stabile Ruhelage

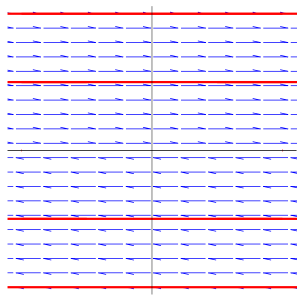
y^* heißt *stabiler uneigentlicher Knoten*



(b) $$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

y^* ist instabil

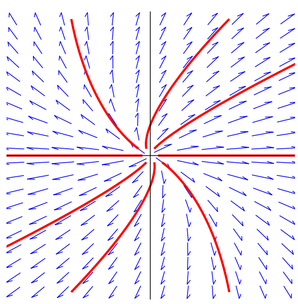
y^* ist Linie von Ruhelagen



(c) $$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

y^* ist instabil

y^* heißt *instabiler uneigentlicher Knoten*

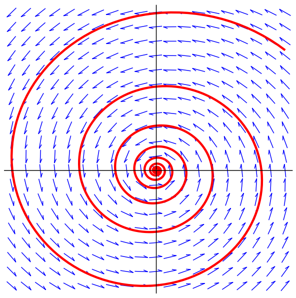


3. Fall: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2, \; \Im\lambda_1 \neq 0$
v^1, v^2 sind komplexe Eigenvektoren von A
$\Rightarrow$ allgemeine Lösung $y(t) = \Re(c_1 v^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v^2 e^{\lambda_2 t}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

(i)

$$\Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 < 0$$

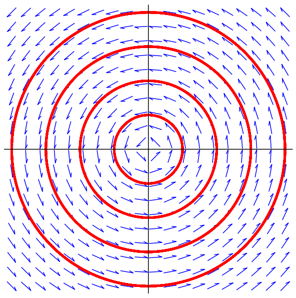
y^* ist stabil
y^* heißt *stabiler Spiralpunkt*



(ii)

$$\Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 = 0$$

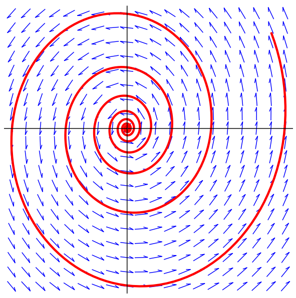
y^* ist stabil
y^* heißt *Zentrumspunkt*



(iii)

$$\Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 > 0$$

y^* ist instabil
y^* heißt *instabiler Spiralpunkt*



Zusammenfassung: Ruhelage $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist

(i) asymptotisch stabil, falls $\Re\lambda_1, \Re\lambda_2 < 0$.

(ii) stabil, falls $\Re\lambda_1 < 0, \Re\lambda_2 \leq 0$, oder $\Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 = 0$ und die Matrix A zwei Eigenvektoren hat.

(iii) instabil sonst.

Bemerkung: die wichtigsten Fälle sind

(i) (echte) Knoten

(ii) Sattelpunkte

(iii) Spiralpunkte

weil sie *strukturell stabil* sind, d.h. unter kleinen Störungen der Matrix erhalten bleiben. ⟦VZ-Eigenschaften der EW einer Matrix sind robust gegen (kleine) Störungen⟧ ∎

Bemerkung: im Allgemeinen (d.h. für nichtlineare ODEs) gilt:

<table>
<tr><th>stabil $\not\Rightarrow$ attraktiv</th><th>attraktiv $\not\Rightarrow$ stabil</th></tr>
<tr><td>Betrachte $y' = 0$</td><td>Betrachte das System

$$\begin{aligned} x' &= x + xy - (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \\ y' &= y - x^2 + (x-y)\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} r' &= r(1-r) \\ \varphi' &= (1-\cos\varphi)r \end{aligned}$$

Es gilt:

- (1,0) ist Ruhelage
- (1,0) ist attraktiv
- (1,0) ist nicht stabil

⟦Startwerte $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ mit $\varphi_0 > 0$ liefern Orbits, die im Uhrzeigersinn um den Ursprung laufen, bevor sie (für $t \to \infty$) gegen $(1,0)$ konvergieren. Übung: Lösen Sie $r' = r(1-r)$, $\varphi' = (1-\cos\varphi)r$ explizit⟧</td></tr>
</table>

■

5.2 Stabilität linearer Systeme

Betrachte:

(5.3)
$$y' = A(t)y + b(t) \qquad y(t_0) = y_0$$

(5.4) mit $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{d\times d})$, $b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{d\times d})$ und die homogene Variante

$$y' = A(t)y \qquad y(t_0) = y_0$$

Übung 5.5. Eine Lösung y_{t_0,y_0} von (5.3) ist stabil/attraktiv genau dann wenn $y^* \equiv 0$ stabile/attraktive Lösung von (5.4) ist. ■

Es reicht also Stabilität/Attraktivität von (5.4) zu untersuchen.

Satz 5.6.
Vor.: Sei Y Fundamentalmatrix von (5.4).
Beh.: Dann gilt

(i) $y^* \equiv 0$ ist stabil für (5.4) $\Leftrightarrow \sup\limits_{t \geq t_0} \|Y(t)\| < \infty$

(ii) $y^* \equiv 0$ ist attraktiv für (5.4) $\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \|Y(t)\| = 0$

Insbesondere fallen für lineare Systeme (5.3)/(5.4) die Begriffe attraktiv und asymptotisch stabil zusammen.

Beweis: Die Lösung des AWP (5.4) ist

$$y_{t_0,y_0}(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0$$

ad (i): "$\Leftarrow$"

$$\sup_{t \geq t_0} \|y_{t_0,y_0}(t)\| \leq \underbrace{\sup_{t \geq t_0} \|Y(t)\|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|Y(t_0)^{-1}y_0\|}_{\leq \|Y(t_0)^{-1}\| \cdot \|y_0\|}$$

"$\Rightarrow$"

- Sei e_i der i-te Einheitsvektor.
- Weil (5.4) stabil, existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\sup_{t \geq t_0} \|y_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon = 1 \quad \forall y_0 \text{ mit } \|y_0\| < \delta$$

- Sei $y_0 := \delta' Y(t_0) e_i$, $\delta' = \frac{\delta}{\|Y(t_0)\| \|e_i\|}$
  Dann gilt:
  - $\|y_0\| \leq \delta$
  - $y_{t_0,y_0}(t) = Y(t)e_i\delta' = \delta' \cdot i$-te Spalte von Y
  - $\|i$-te Spalte von $Y\| \leq \varepsilon = 1 \quad \forall t \geq t_0$

$\Rightarrow \sup_{t \geq t_0} \|Y(t)\| < \infty$

ad (ii): Übung ∎

Korollar 5.7.
Vor.: Sei $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{d \times d}$.
Beh.: Dann gilt:

(i) $y^* = 0$ ist stabile Ruhelage von (5.4) $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte λ_i von A erfüllen $\Re\lambda_i \leq 0$ und Eigenwerte λ_i mit $\Re\lambda_i = 0$ sind halbeinfach, das heißt ihre algebraische Vielfachheit stimmt mit der geometrischen Vielfachheit überein.

(ii) y^* ist asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte λ_i von A erfüllen $\Re\lambda_i < 0$.

Beweis: Übung $[\![Y(t) = e^{tA}]\!]$ ■

Korollar 5.7 motiviert, den Begriff der *Spektralschranke* $S(A) := \max\{\Re\lambda_i \,|\, \lambda_i \in \sigma(A)\}$. Es gilt:

$S(A) < 0 \Longrightarrow$ (5.4) ist asymptotisch stabil
$S(A) > 0 \Longrightarrow$ (5.4) ist instabil
$S(A) = 0$: Information ist unzureichend, um zwischen stabil und instabil zu entscheiden

5.3 Das Prinzip der linearisierten Stabilität (Satz von Hartman-Grobman)

Wir betrachten das autonome System

(5.5) $$y' = f(y)$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ und Ruhelage y^*.
Frage: Ist y^* stabil, asymptotisch stabil oder instabil?
Also: Vergleiche die Lösungen

- $y \equiv y^*$
- y_{t_0,y_0} mit y_0 nahe bei y^*

Idee: Untersuche die Funktion $z(t) = y_{t_0,y_0}(t) - y^*$ durch *Linearisieren* von f bei y^*.

$$\begin{aligned} z'(t) =& y'_{t_0,y_0}(t) - \underbrace{(y^*)'}_{=0} = f(y_{t_0,y_0}(t)) - \underbrace{f(y^*)}_{=0} = \\ =& f(y^* + z(t)) - f(y^*) = Df(y^*)z(t) + r(z(t)) \end{aligned}$$

mit $r(x) = f(y^* + x) - f(y^*) - Df(y^*)x$.
Beobachtung:

- $r(x) = o(x)$ für $x \to 0$ $[\![$das heißt $\lim_{x\to 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = 0]\!]$
- Die Frage nach Stabilität von y^* ist äquivalent zur Frage nach Stabilität der Ruhelage $z^* = 0$ von

(5.6) $$z' = Az + r(z), \quad A = Df(y^*).$$

Zur Vereinfachung von (5.6) betrachtet man das lineare System

(5.7) $$z' = Az.$$

Die Stabilität von (5.7) liefert tatsächlich Information über die Stabilität von (5.6).

Satz 5.8.
Vor.: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, y^* Ruhelage von f, $A := Df(y^*) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ das Spektrum von A.
Beh.: (i) Falls $\Re\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$, so ist y^* eine asymptotisch stabile Ruhelage.

(ii) Falls es ein $\lambda \in \sigma(A)$ gibt mit $\Re\lambda > 0$, so ist die Ruhelage y^* instabil.

Beweis: Wir beweisen nur (i) und verweisen für (ii) auf die Literatur. ⟦z.B. das Buch von Prüss & Wilke⟧.
ad (i): Wir betrachten (5.6) und zeigen

a) $\exists \delta > 0$, so dass $\forall z_0 \in B_\delta(0)$ die Lösung z_{t_0,z_0} von

$$z' = Az + r(z), \quad z(t_0) = z_0 \tag{5.8}$$

für alle $t > t_0$ existiert, und es existiert $\eta > 0$ (hinreichend klein) mit $\|z(t)\| \leq \eta \quad \forall t \geq t_0$.

b) $\lim_{t\to\infty} \|z(t)\| = 0$

1. Schritt: Sei $\omega > 0$ mit $\Re\lambda < -\omega < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$. Dann gilt: $\exists M \geq 1$, so dass $\left\|e^{tA}\right\| \leq Me^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0$. ⟦Übung; $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$ und für jeden Jordanblock J_i ist $e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t}Z(t)$, wobei die Einträge von $Z(t)$ *algebraisch* in t wachsen; vgl. Lemma 3.16⟧

2. Schritt: Es gilt

$$\forall \rho > 0 \; \exists \eta > 0 : \|r(x)\| \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in \bar{B}_\eta(0) \tag{5.9}$$

3. Schritt: Wir verwenden die Formel der "Variation der Konstanten" für das AWP (5.8), d.h.

$$z(t) = e^{(t-t_0)A}z_0 + e^{(t-t_0)A}\int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)A}\; r(z(s))\; ds \quad \forall t \in (t_0, T^+) \tag{5.10}$$

wobei $T^+ > t_0$ der rechte Rand des Existenzintervalls der Lösung z des AWP (5.8) ist. Wir zeigen nun $T^+ = \infty$, falls $\|z_0\|$ hinreichend klein ist. Aus (5.10) folgt

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq \left\|e^{(t-t_0)A}\right\| \|z_0\| + \int_{t_0}^{t} \left\|e^{(t-s)A}\right\| \|r(z(s))\|\, ds \\
&\overset{\text{1. Schritt}}{\leq} Me^{-\omega(t-t_0)}\|z_0\| + M\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)}\|r(z(s))\|\, ds
\end{aligned}$$

Seien ρ, $\delta > 0$, so dass

- $M\rho - \omega < 0$
- η gegeben durch (5.9) für dieses ρ
- $0 < \delta < \eta/2$ und $M\delta < \eta/2$

Sei $\|z(t_0)\| < \delta$. Sei $t^+ > t_0$, so dass $\|z(s)\| < \eta \quad \forall s \in [t_0, t^+)$.
Auf $[t_0, t^+)$ folgt

$$\|z(t)\| \leq Me^{-(t-t_0)\omega}\|z_0\| + M\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)}\rho\|z(s)\|\, ds$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{\omega(t-t_0)}\|z(t)\|}_{v(t)} \leq \underbrace{M\|z_0\|}_{\alpha(t)} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{M\rho}_{\beta(t)}\underbrace{e^{\omega(s-t_0)}\|z(s)\|}_{v(s)}\, ds$$

Somit folgt mit dem Grönwall Lemma 2.14.

$$
\begin{aligned}
& e^{\omega\ (t-t_0)} \|z(t)\| \leq M \|z_0\| e^{M\rho\cdot(t-t_0)} \\
\Leftrightarrow & \|z(t)\| \leq \underbrace{M \|z_0\|}_{M\delta<\eta/2} e^{\overbrace{(M\rho-\omega)}^{<0}\overbrace{(t-t_0)}^{\geq 0}} \qquad \forall t \in [t_0, t^+) \\
\Rightarrow & \|z(t)\| \leq \eta/2 \quad \forall t \in [t_0, t^+)
\end{aligned}
$$

Das zeigt insbesondere, dass es kein $t^+ > t_0$ geben kann mit $\|z(t)\| < \eta$ auf $[t_0, t^+)$ und $\|z(t^+)\| = \eta$. Daraus kann man schließen, dass $T^+ = \infty$ und $\|z(t)\| < \eta \quad \forall t \geq t_0$.

4. Schritt: Aus dem 3. Schritt folgt

$$\|z(t)\| \leq M \|z_0\| e^{(M\rho-\omega)(t-t_0)} \longrightarrow 0 \text{ für } t \to +\infty, \text{weil } M\rho - \omega < 0$$

Damit ist die Ruhelage $z^* = 0$ asymptotisch stabil. ■

Beispiel 5.9. (*mathematisches Pendel*):

$$
\begin{aligned}
y' &= v \\
v' &= -\omega^2 \sin y
\end{aligned}
$$

Ruhelagen: $\begin{cases} R_0 = (0,0) \\ R_n = (n\cdot\pi, 0), \ \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Mit $f\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 \sin y \end{pmatrix}$, $Df\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos y & 0 \end{pmatrix}$ folgt:

Bei R_1 : $Df(R_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, mit den Eigenwerten: $\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega$.
Damit gilt $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, also ist R_1 ein instabiler Sattelpunkt.

Bei R_0 : $Df(R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$
Eigenwerte: $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega \cdot i$
Leider liefert der Satz in diesem Fall keine Aussage. ■

Beispiel 5.10. (*Lotka-Volterra mit Sättigung*):

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2 \\
y' &= -\gamma y + \delta xy
\end{aligned}
\qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0
$$

Ruhelagen: $\begin{cases} R_1 = (0,0) \\ R_2 = (\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0) \\ R_3 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha - \varepsilon\gamma/\delta}{\beta}\right) \end{cases}$ [[„Koexistenzruhelage “]]

Mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2 \\ -\gamma y + \delta xy \end{pmatrix}$, $Df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y - 2\varepsilon x & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}$

Bei R_1: $Df(R_1) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow$ instabiler Sattelpunkt

Bei R_2: $Df(R_2) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\alpha\beta}{\varepsilon} \\ 0 & -\gamma + \frac{\delta\alpha}{\varepsilon} \end{pmatrix}$

- stabiler Knoten, falls $-\gamma\varepsilon + \alpha\delta < 0$
- instabiler Sattelpunkt, falls $-\gamma\varepsilon + \alpha\delta > 0$
- keine Aussage mittels Satz 5.8, falls $-\gamma\varepsilon + \alpha\delta = 0$

Bei R_3: $Df(R_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon\gamma}{\delta} & -\frac{\gamma\beta}{\varepsilon} \\ \frac{\alpha\delta-\varepsilon\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$
R_3 ist asymptotisch stabil, falls $\Re\lambda_1 < 0 \ \wedge \Re\lambda_2 < 0$. Das ist nur möglich, falls

$$\operatorname{tr} Df(R_3) < 0 \ \wedge \ \det Df(R_3) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon\gamma}{\delta} < 0 \ \wedge \ \frac{\gamma\beta}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha\delta - \varepsilon\gamma}{\beta}\right) > 0 \Leftrightarrow \alpha\delta - \varepsilon\gamma > 0.$$

Falls also z.B. $\alpha = \beta = \delta = 2 \ \wedge \ \varepsilon = \gamma = 1$, ist R_3 ein asymptotisch stabiler Koexistenzfall. ■

Bemerkung: Für allgemeine Matrizen $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gibt es Kriterien, die garantieren, dass $\Re\lambda < 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$, z.B. das Routh-Hurwitz-Kriterium. ■

5.4 Ljapunovfunktionen

Ljapunovfunktionen sind ein wichtiges Werkzeug, um globale Existenz von Lösungen nachzuweisen und Stabilität von Ruhelagen zu untersuchen. Wir betrachten hier *autonome* Systeme

$$y' = f(y), \quad f \in C(G;\mathbb{R}^d), \text{ lipschitzstetig} \tag{5.12}$$

Definition 5.11. Eine Funktion $V \in C(G;\mathbb{R})$ heißt *Ljapunovfunktion* für (5.12), falls sie entlang von Lösungen von (5.12) monoton fallend ist. V heißt eine *strikte Ljapunovfunktion*, falls sie streng monoton fallend entlang von nichtkonstanten Lösungen von (5.12) ist.

Definition 5.12. $\mathcal{E} := \{y \in G : f(y) = 0\}$ = Menge der Ruhelagen.

Satz 5.13.
Vor.: Sei $V \in C^1(G;\mathbb{R})$
Beh.:
- V ist Ljapunovfunktion $\Leftrightarrow \nabla V(y)\cdot f(y) \le 0 \quad \forall y \in G$
- hinreichendes Kriterium dafür, daß V ist strikte Ljapunovfunktion ist: $\nabla V(y)\cdot f(y) < 0 \quad \forall y \in G\setminus\mathcal{E}$

Beweis: Sei $y_0 \in G$. Die Funktion $\varphi(t) := V\left(y_{t_0,y_0}(t)\right)$ erfüllt $\varphi'(t) \le 0$

$$\Leftrightarrow \nabla V\left(y_{t_0,y_0}(t)\right)\cdot y'_{t_0,y_0}(t) \le 0$$
$$\Leftrightarrow \nabla V\left(y_{t_0,y_0}(t)\right)\cdot f(y_{t_0,y_0}(t)) \le 0$$
$$\stackrel{t=t_0}{\Rightarrow} \nabla V(y_0)\cdot f(y_0) \le 0.$$

Analog schließt man, dass V strikte Ljapunovfunktion ist, falls $\nabla V(y)\cdot f(y) < 0 \ \forall y \in G\setminus\mathcal{E}$. ■

Beispiel 5.14. (*gedämpftes Pendel*):

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= -\alpha v - \omega^2 \sin y \end{aligned} \qquad \alpha \ge 0, \omega > 0 \tag{5.13}$$

$$V\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right) := \frac{v^2}{2} + \omega^2 (1 - \cos y) \quad [\![= \text{“Energie” des Pendels}]\!]$$
$$\nabla V\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot f\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \omega^2 \sin y \end{pmatrix} = -\alpha v^2 \leq 0 \tag{5.14}$$

Also ist V eine Ljapunovfunktion. Für $\alpha > 0$ ist es eine strikte Ljapunovfunktion, denn: Sei $t \mapsto (y(t), v(t))$ eine Lösung von (5.13) und $\varphi(t) := V(y(t), v(t))$. Dann gilt: $\varphi' \leq 0$
Annahme: φ ist nicht streng monoton fallend $\Rightarrow$ $\exists (a,b)$ mit $\varphi(t) = c \in \mathbb{R}\ \forall t \in (a,b)$, also $\varphi' = 0$ auf (a,b). Nach (5.14) ist dann $v(t) = 0\ \forall t \in (a,b)$. Aus (5.13) folgt $y = const$ auf (a,b). Das heißt aber, dass die Lösung $(y(t), v(t))$ auf (a,b) konstant ist. ■

Beispiel 5.15. (*Lotka Volterra mit Sättigung*):

(5.15)
$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2 \\ y' &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned}$$

(5.16) Koexistenzruhelage: $\begin{pmatrix} x^* = \frac{\gamma}{\delta} \\ y^* = \frac{\alpha - \varepsilon\gamma/\delta}{\beta} \end{pmatrix}$

Mit $a, b \in \mathbb{R}$ mache Ansatz $V(x,y) := a\left(x - x^* \ln \frac{x}{x^*}\right) + b\left(y - y^* \ln \frac{y}{y^*}\right)$. Dann gilt

$$\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) \overset{(5.15),(5.16)}{=} -a\varepsilon (x - x^*)^2 - (x - x^*)(y - y^*)(-a\beta + b\delta)$$

Wähle $a = \delta$, $b = \beta$. Dann gilt $\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) \leq 0$ auf $G = (0,\infty)^2$, d.h. V ist eine Ljapunovfunktion für (5.15). V ist sogar strikte Ljapunovfunktion, denn

- $\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) < 0$ für $x \neq x^*$
- für t mit $x(t) = x^*$ ist $x'(t) = \alpha x^* - \beta x^* y(t) - \varepsilon (x^*)^2 = x^*(\alpha - \beta y(t) - \varepsilon x^*) \neq 0$ für $y(t) \neq y^*$. Das heißt, eine nichtkonstante Lösung verlässt „sofort“ die Menge $\{x = x^*\}$

■

Existenz von Ljapunovfunktionen liefert globale Existenz von Lösungen:

Satz 5.16.
Vor.: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ Gebiet, $f \in C(G; \mathbb{R}^d)$ lokal lipschitzstetig. Sei V Ljapunovfunktion für (5.12). Sei V zudem **koerziv** , d.h. für jede Folge $(y_n)_{n=0}^\infty \subset G$ mit $\|y_n\| \to \infty$ oder $\operatorname{dist}(y_n, \partial G) \to 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} V(y_n) = +\infty$.
Beh.: Dann gilt:

1. für jedes $y_0 \in G$ existiert die Lösung y_{t_0,y_0} global, d.h. für alle $t \geq t_0$.
2. $\sup\limits_{t \geq t_0} \|y_{t_0,y_0}(t)\| < \infty \quad \wedge \quad \inf\limits_{t \geq t_0} \operatorname{dist}(y_{t_0,y_0}(t), \partial G) > 0$

Beweis: Sei T^+ der rechter Rand des maximalen Existenzintervalls von y_{t_0,y_0}. Wir schließen die Fälle „blow-up“ und „Kollaps“ von Satz 2.13. aus:
Falls $T^+ < \infty$, dann existiert $(t_n)_{n=0}^\infty$ mit $t_n \to T^+$ und $\|y_{t_0,y_0}(t_n)\| \to \infty$ („blow-up“) oder $\operatorname{dist}(y_{t_0,y_0}(t_n), \partial G) \to 0$. Weil V koerziv ist, folgt $V(y_{t_0,y_0}(t_n)) \to +\infty$, im Widerspruch zum monotonen Fallen von $t \longmapsto V(y_{t_0,y_0}(t))$. ■

Beispiel 5.17. Für $G = (0,\infty)^2$ und die Lotka-Volterra-Gleichung mit Sättigung folgt also aus der Existenz einer Ljapunovfunktion und ihrer Koerzivität (vgl. Bsp. 5.15), dass die Lösungen global existieren und für Startwerte $(x_0, y_0) \in G$ von den Achsen $x = 0$ und $y = 0$ fernbleiben. ▪

Lemma 5.18.
Vor.: Sei $V \in C(G;\mathbb{R})$ strikte Ljapunovfunktion. Sei $y \in C^1((t_0,\infty);\mathbb{R})$ Lösung von (5.12).
Sei $y_\infty \in G$ und $(t_n)_{n=0}^\infty$ mit $t_n \to \infty$ und $y(t_n) \to y_\infty$.
Beh.: Dann gilt: y_∞ ist Ruhelage.

Beweis: Wegen der Stetigkeit von V ist $\lim_{n\to\infty} V(y(t_n)) = V(y_\infty)$. Weil $t \longmapsto V(y(t))$ monoton fallend ist und $t_n \to \infty$, muß sogar

$$\lim_{t\to\infty} V(y(t)) = \lim_{n\to\infty} V(y(t_n)) = V(y_\infty). \tag{5.17}$$

Sei J_∞ das maximales Existenzintervall der Funktion y_{t_0,y_∞}. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösungen des AWP von den Startwerten gilt für jedes $t \in J_\infty$

$$y(t+t_n) \overset{\text{Eindeutigkeit von AWP}}{=} y_{0,y(t_n)}(t) \overset{\text{stetige Abhängig. von Daten}, n\to\infty}{\to} y_{0,y_\infty}(t). \tag{5.18}$$

Weil V stetig ist, liefert dies

$$V(y_\infty) \overset{n\to\infty,(5.17)}{\leftarrow} V(y(t+t_n)) = V\left(y_{0,y(t_n)}(t)\right) \overset{n\to\infty,(5.18)}{\to} V(y_{0,y_\infty}(t)).$$

Also gilt für alle $t \in J_\infty$, dass

$$V(y_{0,y_\infty}(t)) = V(y_\infty).$$

Weil V eine strikte Ljapunovfunktion ist, muss also $t \mapsto y_{0,y_\infty}(t)$ konstant sein. Es gilt also $0 = y'_{0,y_\infty}(0) = f(y_{0,y_\infty}(0)) = f(y_\infty)$. ■

Satz 5.19. (*„direkte Methode von Ljapunov“*):
Vor.: Sei $V \in C(G;\mathbb{R})$ Ljapunovfunktion für (5.12), y^* eine Ruhelage
Beh.: Dann gilt:

(i) y^* ist striktes Minimum von $V \Rightarrow y^*$ ist stabil

(ii) y^* ist striktes Minimum von V, V eine strikte Ljapunovfunktion und y^* isoliert in $\mathcal{E} = \{y \in G : f(y) = 0\} \Rightarrow y^*$ ist asymptotisch stabil

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei o.B.d.A. ε so klein, dass $V(y) > V(y^*)\ \forall y \in \bar{B}_\varepsilon(y^*) \setminus \{y^*\}$
Setze $\eta := \min_{y \in \partial \bar{B}_\varepsilon(y^*)} V(y) > V(y^*)$. Sei $\delta \in (0,\varepsilon)$, so dass $V(y) < \eta \quad \forall y \in B_\delta(y^*)$.
Sei $y_0 \in B_\delta(y^*)$ und betrachte y_{t_0,y_0} mit maximalen Existenzintervall (T^-, T^+). Dann gilt:

$$t \longmapsto V(y_{t_0,y_0}(t)) \text{ ist monoton fallend} \quad \wedge \quad V(y_{t_0,y_0}(t_0)) = V(y_0) < \eta$$

1. Schritt: Behauptung: $y_{t_0,y_0}(t) \in B_\varepsilon(y^*) \quad \forall t \in [t_0, T^+)$
   Beweis: Annahme: Die Behauptung gilt nicht. Sei $t^+ \in (t_0, T^+)$ mit

- $y_{t_0,y_0}(t) \in B_\varepsilon(y^*) \quad \forall t \in (t_0, t^+)$
- $y_{t_0,y_0}(t^+) \in \partial B_\varepsilon(y^*)$

Dann gilt: $V\big(\underbrace{y_{t_0,y_0}(t^+)}_{\in \partial B_\varepsilon(y^*)}\big) \geq \min\limits_{y\in\partial B_\varepsilon(y^*)} V(y) = \eta$

Widerspruch dazu, dass $V(y_{t_0,y_0}(t_0)) < \eta$ und $t \mapsto V(y_{t_0,y_0}(t))$ monoton fallend ist!

2. Schritt: Behauptung: $T^+ = \infty$
   Beweis: Der 1.Schritt zeigt, dass weder blow-up, noch Kollaps möglich sind.

3. Schritt: Aus den Schritten 1. und 2. folgt, dass $\forall t \geq t_0$ gilt $y_{t_0,y_0}(t) \in B_\varepsilon(y^*) \subset \bar{B}_\varepsilon(y^*) \Rightarrow$ Stabilität. Damit haben wir (i) gezeigt.
   Für (ii) sei $\varepsilon > 0$ wie oben gewählt und zusätzlich so, dass $\mathcal{E} \cap \bar{B}_\varepsilon(y^*) = \{y^*\}$. So ein $\varepsilon > 0$ existiert, da y^* laut Voraussetzung isoliert in $\mathcal{E}$ ist. Sei $y_0 \in B_\delta(y^*)$. Dann gilt: $y_{t_0,y_0}(t) \in B_\varepsilon(y^*) \subset \bar{B}_\varepsilon(y^*) \subset G \ \forall t \geq t_0$. Sei $(t_n)_n$ eine Folge mit $t_n \to \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_{t_0,y_0}(t_n) = \tilde{y}^* \in \bar{B}_\varepsilon(y^*)$. Nach Lemma 5.18 ist $\tilde{y}^* \in \mathcal{E}$. Wegen $\mathcal{E} \cap \bar{B}_\varepsilon(y^*) = \{y^*\}$, folgt $\tilde{y}^* = y^*$. Wir schließen $\lim_{t\to\infty} y_{t_0,y_0}(t) = y^*$, d.h. asymptotische Stabilität von y^*. ■

Beispiel: (*mathematisches Pendel*):

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 \sin(y) \end{pmatrix}, \qquad \omega > 0$$

hat die Ljapunovfunktion

$$V\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos(y)) \qquad [\![=\text{„Energie“}]\!]$$

Bei der Ruhelage $R_1 = (y^\star, v^\star) = (0,0)$ ist

$$\nabla V(R_1) = \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y \\ v \end{pmatrix}\Bigg|_{(y,v)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 V(R_1) = \begin{pmatrix} \omega^2 \cos y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(y,v)=(0,0)} = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, das heißt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist striktes Minimum von V. Nach Satz 5.19 ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist stabile Ruhelage. Diese Ruhelage ist nicht asymptotisch stabil wegen der Energieerhaltung. ■

Beispiel 5.20. Überlegen Sie sich, dass die strikte Ljapunovfunktion aus Beispiel 5.15. für die Lotka–Volterragleichung ein Minimum am Koexistenzäquilibrium hat. Schließen Sie auf die asymptotische Stabilität dieser Ruhelage. ■

Satz 5.21.
Vor.: Sei V eine strikte Ljapunovfunktion für (5.12). Sei $K \subset G$ kompakt.
Sei $y \in C^1((t_0,\infty),\mathbb{R}^d)$ Lösung von (5.12) mit $y(t) \in K \ \ \forall t \geq t_0$.
Beh.: Dann gilt

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{dist}(y(t), \mathcal{E}) = 0$

(ii) Ist überdies $\mathcal{E} \cap V^{-1}(\{\alpha\})$ diskret für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) =: y^\star \in \mathcal{E}$.

Beweis: (i) folgt direkt aus Lemma 5.18.
ad (ii): Annahme: $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existiert nicht. Dann existieren zwei Folgen $(t_n)_{n=0}^{\infty}$, $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$ und

$$y(t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y^\star \neq x^\star \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} y(s_n)$$

Zudem können wir annehmen:

$$t_n \leq s_n \leq t_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Monotonie von V impliziert

$$\begin{aligned} &V(y(t_{n+1})) \leq V(y(s_n)) \leq V(y(t_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\overset{V\,\underline{stetig}}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} V(y^\star) \leq V(x^\star) \leq V(y^\star) \end{aligned} \tag{5.16}$$

d.h. $\alpha := V(y^\star) = V(x^\star)$.
Aus Lemma 5.18. folgt, dass $y^\star,\ x^\star \in \mathcal{E}$. Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\mathcal{E} \cap \bar{B}_\varepsilon(y^\star) \cap V^{-1}(\{\alpha\}) = \{y^\star\}$ Insbesondere ist $x^\star \notin \bar{B}_\varepsilon(y^\star)$. Für hinreichend große n gibt es deshalb r_n mit $t_n \leq r_n \leq s_n$, so dass $|y(r_n) - y^\star| = \varepsilon$. Nach Wahl einer Teilfolge $(r_{n_k})_k$ von $(r_n)_n$ schließen wir

- $\lim_{k\to\infty} y(r_{n_k}) =: z^\star \in \partial B_\varepsilon(y^\star)$ $[\![y(r_{n_k}) \in \partial B_\varepsilon(y^\star),\ \partial B_\varepsilon(y^\star)$ kompakt$]\!]$
- $z^\star \in \mathcal{E}$ $[\![$Lemma 5.18$]\!]$
- $V(z^\star) = \alpha = V(y^\star) = V(x^\star)$ $[\![V$ stetig, (5.16), Monotonie von Ljapunovfunktion$]\!]$

$$\Rightarrow z^\star \in \mathcal{E} \cap V^{-1}(\{\alpha\}) \cap \bar{B}_\varepsilon(y^\star) = \{y^*\} \text{ im Widerspruch zu } z^\star \neq y^\star$$

Also existiert $\lim_{t\to\infty} y(t) =: y^\star$. Nach Lemma 5.18 ist $y^\star \in \mathcal{E}$. ■

Beispiel: (*Lotka-Volterra-Gleichung mit Sättigung*)

- $G = (0, \infty)^2$
- $\mathcal{E} \cap G$ ist diskret, da ein-elementig
- Aus Satz 5.16. folgt, dass für jedes $(x_0, y_0) \in G$ die Lösung global nach rechts existiert und in einer kompakten Menge bleibt.
- Satz 5.21. liefert, dass alle Lösungen mit Startwerten $(x_0, y_0) \in G$ gegen das Koexistenzäquilibrium (x^*, y^*) konvergieren.

■

Beispiel: (*Pendel mit Reibung*) Betrachte

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \omega^2 \sin y \end{pmatrix} \qquad \text{für } \alpha, \omega > 0. \tag{5.17}$$

mit Ruhelagen

$$\mathcal{E} = \left\{ (y, v) : f\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \{(m\pi, 0) : m \in \mathbb{Z}\}$$

Behauptung: Jede Lösung ist global (in der Zeit) existent und konvergiert gegen eine Ruhelage für $t \to \infty$. Um dies mittels Satz 5.21 zu zeigen, müssen wir die folgenden Voraussetzungen prüfen:

(i) $\mathcal{E}$ ist diskret.

(ii) $V(y,v) := \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1-\cos(y))$ ist strikte Ljapunovfunktion.

(iii) Jede Lösung von (5.17) existiert global (nach rechts).

(iv) Jede Lösung von (5.17) bleibt in einer kompakten Menge.

Beweis von:

(i) offensichtlich

(ii) siehe Beispiel 5.14.

(iii) Sei $G := \mathbb{R}^2$. Dann ist f linear beschränkt auf G, d.h. $\left\|f((y,v)^T)\right\| \leq C\left\|(y,v)^T\right\| \; \forall (y,v)^T \in G$ für ein $C>0$, welches nur von $\alpha, \omega, \|\cdot\|$ abhängt. Konkret:

$$\begin{aligned}
\left\|f((y,v)^T)\right\|_2^2 &= |v|^2 + \left|\alpha v + \omega^2 \sin y\right|^2 && [\![(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)]\!] \\
&\leq |v|^2 + 2\left(\alpha^2 v^2 + \omega^4 \sin^2 y\right) && [\![\sin^2 y \leq y^2]\!] \\
&\leq |v|^2\left(1+2\alpha^2\right) + \omega^4 y^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Mit Satz 2.15. ist für jedes $(y_0, v_0) \in G$ die Lösung von (5.17) mit $y(0) = y_0,\;\; v(0) = v_0$ auf $\mathbb{R}$ definiert.

(iv) Da die Ljapunovfunktion V nicht koerziv ist, können wir Satz 5.16. nicht anwenden. Also muss die Beschränktheit der Lösungen direkt gezeigt werden.
1. Schritt:
Sei $t \to (y(t), v(t))$ Lösung von (5.17). Nach (iii) ist diese Lösung für alle Zeiten definiert. Weil V eine Ljapunovfunktion ist, ist $t \mapsto V(y(t), v(t))$ monoton fallend. Daraus folgt

$$\sup_{t\geq 0} |v(t)| =: M < \infty.$$

Aus $y' = v$, sowie (5.17) geschrieben als Gleichung zweiter Ordnung, also $y'' + \alpha y' + \omega^2 \sin y = 0$, folgt

$$\sup_{t\geq 0}\left|y''(t)\right| \leq \alpha M + \omega^2 \cdot 1 =: M'$$

2. Schritt:
Behauptung: $\int_0^\infty v^2(t)\; dt < \infty$
Beweis:

$$\begin{aligned}
& y'' + \alpha y' + \omega^2 \sin y = 0 \\
& y''y' + \alpha y'y' + (\omega^2 \sin y)y' = 0 \\
& \tfrac{1}{2}(y'^2)' + \alpha y'^2 - \omega^2(\cos y)' = 0 \\
& \tfrac{1}{2}\int_0^t (y'^2)'ds + \alpha\int_0^t y'^2 ds - \omega^2 \int_0^t (\cos y)'ds = 0 \\
& \tfrac{1}{2}y'^2\Big|_0^t + \alpha\int_0^t y'^2 ds - \omega^2 \cos y\Big|_0^t = 0 \qquad \forall t \geq 0 \\
\overset{1.\ \text{Schritt}}{\Longrightarrow}\quad & \alpha\int_0^t y'^2 ds \leq 2\omega^2 + M^2 \qquad \forall t \geq 0 \\
\Longrightarrow\quad & \int_0^\infty y'^2 ds \leq \tfrac{2\omega^2 + M^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

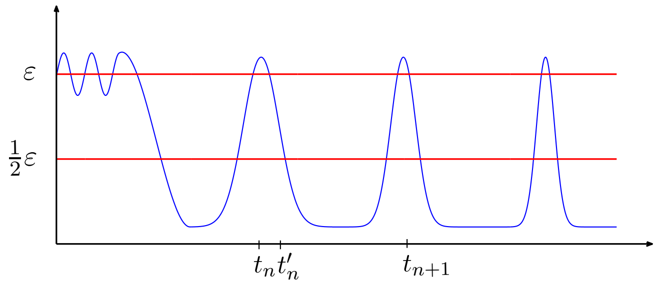
<u>3. Schritt</u>
Behauptung: $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$
Beweis: Annahme: $\exists \varepsilon > 0$ und $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ mit

$$t_n \to \infty \text{ und } v^2(t_n) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O.B.d.A. ist $t_{n+1} - t_n \geq 1$ für alle n. Weil $\int\limits_0^\infty v^2(t)dt < \infty$, muss es für jedes (hinreichend große) n ein $t_n' \in (t_n, t_{n+1})$ geben, mit

$$v^2(t) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [t_n, t_n']$$

$$\text{und} \quad v^2(t_n') = \frac{\varepsilon}{2}$$



Aus dem Mittelwertsatz folgt $\exists \tau_n \in (t_n, t_n')$:

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \underbrace{v^2(t_n)}_{\geq \varepsilon} - \underbrace{v^2(t_n')}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} = \left|(t_n - t_n') \cdot 2v(\tau_n)v'(\tau_n)\right| \leq (t_n' - t_n) \cdot 2MM'$$

$$\Rightarrow t_n' - t_n \geq \frac{\varepsilon}{4MM'}$$

$$\Rightarrow \infty > \int\limits_0^\infty v^2(t)dt \geq \underbrace{\int\limits_{t_n}^\infty v^2(t)dt}_{\overset{n\to\infty}{\to} 0} \geq \int\limits_{t_n}^{t_n'} v^2(t)dt$$

$$\geq \int\limits_{t_n}^{t_n'} \frac{\varepsilon}{2}dt = \frac{\varepsilon}{2}(t_n' - t_n) \geq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\frac{\varepsilon}{4MM'}}_{\text{unabhängig von } n} > 0 \qquad \text{Widerspruch!}$$

<u>4. Schritt:</u>
Weil $t \mapsto V(y(t), v(t))$ monoton fallend ist und $\forall t: \;\; 0 \leq V(y(t), v(t))$ gilt, folgt, dass $\lim_{t\to\infty} V(y(t), v(t)) =: V_\infty$ existiert. Weil $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$, muss $\lim_{t\to\infty} \omega^2(1 - \cos y(t))$ existieren. Äquivalent dazu existiert $\lim_{t\to\infty} \cos y(t)$. Also ist die Funktion $t \mapsto |y(t)|$ beschränkt.

■

5.5 Orbits und Limesmengen

Erinnerung: Ziel des Abschnittes ist es, das Langzeitverhalten von Lösungen zu verstehen.
Idee: Versuche, die Menge der Häufungspunkte der Bahn einer Lösung zu beschreiben.

Wir betrachten

(5.12) $$y' = f(y), \quad f \text{ lokal lipschitzstetig}$$

Weiters nehmen wir an:

- $t_0 := 0$
- Wir betrachten nur Startwerte $y_0 \in G$, so dass $y_{0,y_0} \in C^1((0,\infty);\mathbb{R}^d)$, das heißt global nach rechts existierende Lösungen

Definition 5.22.

- $\gamma_+(y_0) := \{y_{0,y_0}(t) : t \geq 0\}$ heißt Orbit (Bahn) von y_0 ⟦analog: $\gamma_-(y_0)$⟧.
- $\omega_+(y_0) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^d : \exists$ Folge $(t_n)_{n=0}^\infty$, $t_n \to \infty$ mit $y_{0,y_0}(t_n) \to \bar{y}\}$ heißt (positive) Limesmenge von y_0.
- Eine Menge $M \subset G$ heißt positiv invariant, falls $\forall y_0 \in M: \ \gamma_+(y_0) \subset M$.

⟦Zur Bezeichnung: analog ist $\omega_-(y_0)$ über Folgen $(t_n)_n$ mit $t_n \to -\infty$ definiert. Manchmal wird $\omega_+(y_0)$ auch nur mit $\omega(y_0)$ bezeichnet; sinnigerweise heißt dann $\omega_-(y_0) = \alpha(y_0)$⟧

Lemma 5.23.
Vor.: Keine
Beh.: (i) $\overline{\gamma_+(y_0)} = \gamma_+(y_0) \cup \omega_+(y_0)$

(ii) $\omega_+(y_0)$ ist abgeschlossen

(iii) Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt. Dann ist $\emptyset \neq \omega_+(y_0)$ zusammenhängend.

Beweis: ad (ii): Sei $(x_n)_n \subseteq \omega_+(y_0)$ mit $x_n \to x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |x - x_n| < \varepsilon$. Für jedes solches n sei $t_n > \frac{1}{\varepsilon}$ mit $|y_{0,y_0}(t_n) - x_n| < \varepsilon$. Dann gilt $|x - y_{0,y_0}(t_n)| < 2\varepsilon$. Damit kann eine Folge $(t_n)_n$ konstruiert werden mit $t_n \to \infty$ und $y_{0,y_0}(t_n) \to x$.
ad (iii): Übung. ⟦Widerspruchsbeweis zur Annahme: $\omega_+(y_0) = \omega_1 \cup \omega_2$ mit ω_1, $\omega_2$kompakt und $\operatorname{dist}(\omega_1, \omega_2) > 0$⟧ ■

Beispiel:

- Sei $y_0 \in \mathcal{E}$: Dann ist $\gamma_+(y_0) = \{y_0\} = \omega_+(y_0)$.
- Sei y_0 so, dass $\|y_{0,y_0}(t)\| \to \infty$ für $t \to \infty$. Damit gilt $\omega_+(y_0) = \emptyset$.
- Sei y_{0,y_0} eine periodische Funktion. Dann ist $\gamma_+(y_0)$ eine geschlossene Kurve und $\gamma_+(y_0) = \omega_+(y_0)$.

∎

Beispiel: Betrachte

$$x' = y - (x^2 + y^2 - 1)x$$
$$y' = -x - (x^2 + y^2 - 1)y,$$

oder, in Polarkoordinaten

$$r' = -r(r^2 - 1), \qquad \phi' = -1.$$

D.g.:

- $(0,0)$ ist instabile Ruhelage
- für jedes $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ ist $\omega_+(x_0, y_0) = \partial B_1(0)$ $[\![r' > 0$ für $r < 1$ und $r' < 1$ für $r > 1]\!]$

∎

Satz 5.24.
Vor.: Sei $y_{0,y_0} \in C^1\left((0,\infty);\mathbb{R}^d\right)$ eine beschränkte Lösung von (5.12) mit $\overline{\gamma_+(y_0)} \subset G$.
Beh.: $\omega_+(y_0)$ besteht aus globalen Lösungen, das heißt $\forall \bar{y} \in \omega_+(y_0)$ ist $y_{0,\bar{y}} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ und $y_{0,\bar{y}}(t) \in \omega_+(y_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\omega_+(y_0)$ positiv und negativ invariant.

Beweis: (Nur skizziert)

- Sei $\bar{y} \in \omega_+(y_0)$ und $(t_n)_n$ mit $t_n \to \infty$ und $y_{0,y_0}(t_n) \to \bar{y}$
- Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ beliebig
- Sei n_0 so groß, dass $t_n + a \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$
- Die Funktion $y_n(t) := y_{0,y_0}(t + t_n)$ ist definiert auf $[a,\infty)$, weil $y_{0,y_0} \in C^1\left((0,\infty);\mathbb{R}^d\right)$
- $y_n' = f(y_n)$
- Weil $\overline{\gamma_+(y_0)} = \underbrace{\gamma_+(y_0)}_{\subseteq G} \cup \underbrace{\omega_+(y_0)}_{\subseteq G} \subseteq G$ und $\overline{\gamma_+(y_0)}$ kompakt $\left(\overline{\gamma_+(y_0)}\right.$ ist abgeschlossen und beschränkt$\left.\right)$ und f stetig auf G ist, folgt, dass die Folge $(y_n)_n$ gleichgradig stetig auf $[a,b]$ ist $\left(\|y_n'\|_{C([a,b])} = \max_{t\in[a,b]} \|f(y_n(t))\|\right)$
- Arzelà-Ascoli liefert eine konvergente Teilfolge y_{n_m}, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $z \in C([a,b];\mathbb{R}^d)$ konvergiert.
- Wie im Beweis vom Satz von Peano zeigt man, dass z eine Lösung der ODE ist und folgende Bedingungen erfüllt:
  (a) $z' = f(z), \quad t \in [a,b]$
  (b) $z(0) = \lim_{m\to\infty} y_{n_m}(0) = \lim_{m\to\infty} y_{0,y_0}(0 + t_{n_m}) \overset{Vor.}{=} \bar{y}$

(c) für $t \in [a,b]$ ist $z(t) = \lim_{m\to\infty} y_{n_m}(t) = \lim_{m\to\infty} y_{0,y_0}(t+t_{n_m}) \in \omega_+(y_0)$
$[\![z(t) = \lim_{m\to\infty} y_{0,y_0}(t+t_{n_m})$ impliziert, dass der Limes existiert, und $\omega_+(y_0)$ ist die Menge solcher Limiten$]\!]$

- Damit ist $y_{0,\bar{y}} = z \in C^1([a,b];\mathbb{R}^d)$ und bleibt in $\omega_+(y_0)$. Weil $[a,b]$ beliebig gewählt war, ist also $y_{0,\bar{y}} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$. ■

Korollar 5.25.
Vor.: Habe (5.12) eine strikte Ljapunovfunktion
Beh.: Dann gilt: $\omega_+(y_0) \subset \mathcal{E}$

Beweis: folgt aus Lemma 5.18. ■

5.5.1 Einfache Anwendung von Limesmengen

Erinnerung: Satz 5.19. besagt: Sei y^* Ruhelage und y^* striktes Minimum einer Ljapunovfunktion $V \Rightarrow y^*$ ist stabil.
Ziel: Falls Ruhelage y^* kein Minimum von V ist, dann ist es instabil.

Satz 5.26.
Vor.: Sei $V \subset C(G;\mathbb{R})$, y^* isolierte Ruhelage und $V(y^*) = 0$. $[\![$Ü: d. ist keine Einschränkung!$]\!]$
Sei $v_0 > 0$ so dass $V^{-1}\left((-\infty,0)\right) \cap B_v(y^*) \neq \emptyset \quad \forall v \in (0,v_0)$.
Sei V strikte Ljapunovfunktion auf $V^{-1}((-\infty,0)) \cap B_{v_0}(y^*)$.
Beh.: Dann gilt: y^* ist instabil.
Genauer: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists y_0 \in B_\delta(y^*) \setminus \{y^*\}\ \exists t^* > 0$: $y_{0,y_0}(t^*) \notin B_\varepsilon(y^*)$

Beweis: *Notation:* $G_0 := V^{-1}\left((-\infty,0)\right)$, $\quad G_\varepsilon := G_0 \cap \overline{B_\varepsilon(y^*)}$
Annahme: y^* ist stabil. Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(y^*)} \cap \mathcal{E} = \{y^*\}$. $[\![$Möglich da y^* isolierte Ruhelage$]\!]$
Wegen der Stabilität $\exists \delta > 0$ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so dass $\forall y_0 \in \overline{B_\delta}(y^*)$ gilt:

- $y_{0,y_0} \in C^1\left((0,\infty);\mathbb{R}^d\right)$
- $y_{0,y_0}(t) \in B_\varepsilon(y^*) \quad \forall t \geq 0$

Nach Voraussetzung ist $G_\varepsilon \neq \emptyset$. Wähle $y_0 \in G_\delta$. Dann gilt:

- $y_{0,y_0}(t) \in B_\varepsilon(y^*) \quad \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_+(y_0) \neq \emptyset$
- $y_{0,y_0}(t) \in B_\varepsilon(y^*) \quad \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_+(y_0) \subset \overline{B_\varepsilon}(y^*)$
- $\omega_+(y_0) \subset \mathcal{E}$ $[\![$Kor. 5.25$]\!]$. $\qquad$ Damit: $\emptyset \neq \omega_+(y_0) \cap \overline{B_\varepsilon(y^*)} \subset \mathcal{E} \cap \overline{B_\varepsilon(y^*)} = \{y^*\}$
- Sei $(t_n)_n$ mit $t_n \to \infty$ und $y_{0,y_0}(t_n) \to y^* \in \omega_+(y_0)$. Weil V Ljapunovfunktion ist (und stetig ist), ist $V(y^*) = 0 > V(y_0) \geq \limsup_{n\to\infty} V(y_{0,y_0}(t_n)) = \lim_{n\to\infty} V(y_{0,y_0}(t_n)) = V(y^*)$, ein Widerspruch.

■

5.6 Satz von Poincaré-Bendixson

- Wir betrachten den Fall $\mathbf{d} = \mathbf{2}$.
- $d = 2$ deckt z.B. den Fall von skalaren ODEs 2. Ordnung ab.
- **Warnung**: Der Fall $d = 2$ ist ein Sonderfall, weil der Jordansche Kurvensatz gilt.

Lemma 5.27. (*Jordanscher Kurvensatz*):
Vor.: Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ eine Jordankurve, das heißt $\mathcal{C} = \{\varphi(t) : t \in [0, 1)\}$ wobei

- $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ ist stetig
- $\varphi(0) = \varphi(1)$
- $\varphi|_{[0,1)}$ ist injektiv

Beh.: Dann gilt: $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$ besteht aus genau zwei zusammenhängenden Komponenten $\operatorname{int} \mathcal{C}$ und $\operatorname{ext} \mathcal{C}$.

Beweis: Ohne Beweis ■

Ziel ist der Satz von Poincaré-Bendixson, der ein gutes Verständnis von $\omega_+(y_0)$ liefert. Eine vereinfachte Fassung ist:

Satz 5.28.
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt, $\overline{\gamma_+(y_0)} \cap \mathcal{E} = \emptyset$.
Beh.: Dann ist $\omega_+(y_0)$ ein periodischer Orbit, das heißt für jedes $\bar{y} \in \omega_+(y_0)$ ist $\gamma_+(\bar{y}) = \omega_+(y_0)$.

Beweis: Der Beweis wird als Beweis von Satz 5.37. nachgeliefert. ■

Definition 5.29.

- Eine Funktion $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ heißt periodisch, falls es ein $T > 0$ gibt mit $y(t + T) = y(t) \quad \forall t > 0$.
- Der Orbit $\gamma_+(y_0)$ heißt periodisch, falls y_{0,y_0} periodisch ist.

Zentraler Begriff der Theorie von Poincaré-Bendixson ist der Begriff der Transversalen.

Definition 5.30. Ein Segment $L = \{\tau x_0 + (1 - \tau)x_1 : \tau \in [0, 1]\}$ mit $x_0 \neq x_1$ heißt Transversale (für f), falls $f(y) \neq \lambda(x_1 - x_0) \quad \forall y \in L \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$, das heißt $f(y)$ und $x_1 - x_0$ sind l.u. $\forall y \in L$.

Bemerkung: *(Geometrische Interpretation)*: L ist Transversale, falls

- $L \cap \mathcal{E} = \emptyset$
- Die Vektoren $f(y)$ und $x_1 - x_0$ zeigen in verschiedene Richtungen $\forall y \in L$.

■

Lemma 5.31.
Vor.: Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$.
Beh.: (i) Sei $y \in G \backslash \mathcal{E}$. Dann existiert eine Transversale durch y. Sie kann sogar jede beliebige Richtung mit Ausnahme von $\pm f(y)$ haben.
⟦Man darf x_0, x_1 beliebig nah an y wählen und f ist stetig!⟧

(ii) Sei $L = \{\tau x_0 + (1-\tau)x_1 : \tau \in [0,1]\}$. Sei $z \neq 0$ mit $z \cdot (x_1 - x_0) = 0$. Dann ist L Transversale $\Leftrightarrow f(y) \cdot z \neq 0 \ \forall y \in L$.

(iii) Sei L Transversale, $y_0 \in L$. Dann gilt $y_{0,y_0}(t) \notin L$ für alle $|t| \neq 0$ hinreichend klein. Das heißt Orbits kreuzen Transversalen.

(iv) Alle Orbits, die eine Transversale kreuzen, überqueren sie in der gleichen Richtung, das heißt für ein festes z mit $(x_1 - x_0) \cdot z = 0$ gilt:
$y_0 \mapsto y'_{0,y_0}(0) \cdot z = f(y_0) \cdot z$ hat konstantes Vorzeichen auf L.

Beweis: (i) und (ii) sind klar.

ad (iii) *Annahme:* $\exists (t_n)_n$ mit $t_n \to 0$ mit $y_{0,y_0}(t_n) \in L \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $f(y_0) \cdot z \neq 0$ nach Punkt (ii).
- $z \cdot f(y_0) = z \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{y_{0,y_0}(t_n) - y_{0,y_0}(0)}{t_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{z \cdot \frac{y_{0,y_0}(t_n) - y_{0,y_0}(0)}{t_n - 0}}_{=0 \ \forall n \in \mathbb{N}} = 0$. Widerspruch!

Die Kurve $t \mapsto y_{0,y_0}(t)$ kreuzt L bei $t = 0$, denn aus $f(y_0) \cdot z \neq 0$ folgt, dass die Funktion

$$t \mapsto \frac{y_{0,y_0}(t) - y_{0,y_0}(0)}{t - 0} \cdot z$$

für kleine t ihr Vorzeichen nicht wechselt. Also wechselt $t \mapsto (y_{0,y_0}(t) - y_0) \cdot z$ sein Vorzeichen bei $t = 0$, das heißt die Kurve kreuzt L.

ad (iv) Sei $z \neq 0$ mit $(x_1 - x_0) \cdot z = 0$. Betrachte die Funktion $\varphi : \tau \mapsto f(\tau x_0 + (1-\tau)x_1) \cdot z$. Dann gilt: φ ist stetig auf $[0,1]$ und $\varphi \neq 0$ auf $[0,1]$ ⟦vergleiche (ii)⟧. Also kreuzen alle Orbits die L kreuzen, L in der gleichen Richtung. ■

Lemma 5.32.
Vor.: Sei $L = \{\tau x_0 + (1-\tau)x_1 : \tau \in [0,1]\}$ Transversale. Sei $y_1 \in L \backslash \{x_0, x_1\}$.
Beh.: Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y_0 \in \overline{B_\delta}(y_1) \ \exists t \in [-\varepsilon, \varepsilon] : y_{0,y_0}(t) \in L$.

Beweis: *Annahme:* $\exists \varepsilon_0 > 0$ und Folge $(\tilde{y}_k)_{k=0}^\infty$ mit $\tilde{y}_k \to y_1$, so dass $y_{0,\tilde{y}_k}(t) \notin L \ \forall t \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Sei $z \neq 0$ mit $(x_1 - x_0) \cdot z = 0$. Definiere für jedes k die Funktion

$$\varphi_k(t) := (y_{0,\tilde{y}_k}(t) - y_1) \cdot z.$$

Sei $\varphi_\infty(t) = (y_{0,y_1}(t) - y_1) \cdot z$. Dann gilt:

- $\varphi_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_\infty$ gleichmäßig auf $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.
  [[vergleiche Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten]]

- φ_∞ hat Vorzeichenwechsel bei $t = 0$. $[\![\varphi_\infty(0) = 0, \varphi_\infty'(0) = f(y_1) \cdot z \neq 0]\!]$

- Also hat φ_k einen Vorzeichenwechsel auf $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ für k hinreichend groß.

- φ_k hat aber keinen Vorzeichenwechsel auf $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, denn $\varphi_k(t') = 0 \Leftrightarrow (y_{0,\tilde{y}_k}(t') - y_1) \perp z$, das heißt $y_{0,\tilde{y}_k}(t') \in L$. Das ist ein Widerspruch! ■

Lemma 5.33.
Vor.: Sei $L = \{x_0\tau + (1-\tau)x_1 : \tau \in [0,1]\}$ Transversale. Sei $\gamma := \{y_{0,y_0}(t) : t \in [a,b]\}$ ein "Teilorbit"
Beh.: Dann gilt:

(i) $L \cap \gamma$ ist endlich, d.h. $L \cap \gamma = \{y_1, \ldots, y_m\}$

(ii) Die Schnittpunkte von γ mit L sind angeordnet: Falls y_{0,y_0} nicht periodisch, dann gilt für die Punkte $y_i = \tau_i x_0 + (1-\tau_i)x_1 = y_{0,y_0}(t_i), \quad i = 1, \ldots, m$ mit Durchstoßzeiten t_i das Folgende:

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_m \Rightarrow \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_m \text{ oder } \tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_m$$

(iii) Falls y_{0,y_0} periodisch, dann ist $L \cap \gamma$ höchstens einelementig.

Beweis:
ad(i): Annahme: $\exists (t_n)_n \subsetneq [a,b]$ mit $y_{0,y_0}(t_n) \in L \cap \gamma \ \forall n \in \mathbb{N}$. Wähle Teilfolge (wieder $(t_n)_n$ genannt) mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n =: t_\infty \in [a,b]$. Sei $y_\infty := y_{0,y_0}(t_\infty) \in L \cap \gamma$. Dann gilt:

$$\frac{y_{0,y_0}(t_n) - y_\infty}{t_n - t_\infty} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_{0,y_0}'(t_\infty) = f(y_\infty).$$

Sei $z \neq 0$ mit $z \cdot (x_1 - x_0) = 0$ Dann gilt:

$$\underbrace{\frac{y_{0,y_0}(t_n) - y_\infty}{t_n - t_\infty} \cdot z}_{=0 \quad \forall n \in \mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{f(y_\infty) \cdot z}_{\neq 0, \text{ weil } L \text{ Transversale}} \quad \text{, Widerspruch!}$$

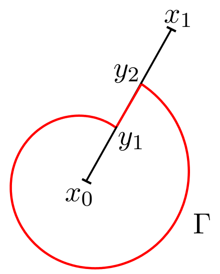
ad(ii): Seien $t_1 < t_2 < t_3$ drei aufeinanderfolgende Durchstoßzeiten und
$y_i = y_{0,y_0}(t_i) = \tau_i x_0 + (1-\tau_i)x_1, \quad i \in \{1,2,3\}$.
O.B.d.A. Sei $\tau_1 < \tau_2$ [[sonst vertausche x_0 und x_1]]. Dann gilt:

Die Kurve Γ, die als Vereinigung von Γ_1 und Γ_2 gegeben ist, mit

$$\Gamma_1 := \{y_{0,y_0}(t) : t_1 \leq t \leq t_2\} \text{ und}$$

$$\Gamma_2 := \{\tau x_0 + (1-\tau)x_1 : \tau_1 < \tau < \tau_2\},$$

ist eine Jordankurve.



⟦Γ ist doppelpunktfrei, weil Orbits sich nicht schneiden können⟧ Nach dem Jordanschen Kurvensatz 5.27. zerlegt Γ den $\mathbb{R}^2$ in zwei Teile G_i und G_a. Sei G_a der Teil, in den das Richtungsfeld auf Γ_2 hineinzeigt. Man kann sich überlegen, daß dann das Segment $\langle x_0, y_1\rangle$ in G_i liegen muß. Betrachte nun die Kurve $\{y_{0,y_0}(t) : t \geq t_2\}$. Dann gilt:

1. $\{y_{0,y_0}(t) : t > t_2\}$ kann Γ_1 nicht schneiden, weil Orbits sich nicht schneiden ⟦Eindeutigkeit von AWP⟧.

2. $\{y_{0,y_0}(t) : t > t_2\}$ kann $\bar{\Gamma}_2$ auch nicht kreuzen, denn das Richtungsfeld f zeigt auf $\bar{\Gamma}_2$ nach G_a ⟦vgl. Lemma 5.31 (iv)⟧. Damit muss $\{y_{0,y_0}(t) : t > t_2\} \subsetneq G_a$ gelten, d.h. $y_{0,y_0}(t_3) \in G_a$, d.h. $\tau_3 > \tau_2$.

ad(iii): folgt mit analogen Argumenten wie (ii). ■

Lemma 5.34.
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt, L Transversale, $\bar{y} \in L \cap \omega_+(y_0)$.
Beh.: Dann existiert eine Folge $(t_n)_n$ mit $t_n \nearrow \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_{0,y_0}(t_n) = \bar{y}$, $y_{0,y_0}(t_n) \in L \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis:
1. Schritt: Wir können annehmen, daß $\bar{y}$ kein Endpunkt von L ist, denn anderfalls "verlängern" wir L: nach Lemma 5.31, (ii) ist $f(y) \cdot z \neq 0 \quad \forall y \in L$. Wegen Stetigkeit von f ist damit auch $f(y) \cdot z \neq 0$ für alle y in einer Umgebung von L.
2. Schritt: Sei $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Nach Lemma 5.32. $\exists \delta_n > 0$ so dass $\forall y_1 \in B_{\delta_n}(\bar{y})$ gilt: $\exists t_n'' \in [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ so dass $y_{0,y_0}(t_n'') \in L$
3. Schritt: Weil $\bar{y} \in \omega_+(y_0)$ gibt es eine Folge $(\tilde{t}_n)_n$ mit $\tilde{t}_n \nearrow \infty$ und $y_{0,y_0}(\tilde{t}_n) \in B_{\delta_n}(\bar{y})\ \forall n \in \mathbb{N}$. Setze $t_n := \tilde{t}_n + t_n''$. Dann gilt: $y_{0,y_0}(t_n) \in L \cap B_{\delta_n + \|f\|_\infty \varepsilon_n}(\bar{y})$. Weiters kann man annehmen:

- $\delta_n \to 0$
- $\tilde{t}_n \to \infty$

damit $t_n \to \infty$ und $y_{0,y_0}(t_n) \to \bar{y}$ ■

Korollar 5.35.
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt, L Transversale.
Beh.: Dann gilt: $L \cap \omega_+(y_0)$ ist höchstens einelementig.

Beweis: Seien $\bar{y}$, $\bar{z} \in L \cap \omega_+(y_0)$. Dann gilt mit Lemma 5.34.:
$\exists (t_n)_{n=0}^{\infty}$, $(t'_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $t_n \nearrow \infty$, $t'_n \nearrow \infty$ und $y_{0,y_0}(t_n) \in L \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $y_{0,y_0}(t'_n) \in L \ \forall n$ und $\lim_{n\to\infty} y_{0,y_0}(t_n) = \bar{y}$ und $\lim_{n\to\infty} y_{0,y_0}(t'_n) = \bar{z}$. Sei:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{0,y_0}(t_n) = \tau_n x_0 + (1-\tau_n)x_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ z_n &= y_{0,y_0}(t'_n) = \sigma_n x_0 + (1-\sigma_n)x_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

o.B.d.A. sei $t_n \leq t'_n \leq t_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Nach Lemma 5.33 überträgt sich die Anordnung der Schnittzeitpunkte auf die Parametrisierung der Schnittpunke mit L, d.h.

$$\tau_n \leq \sigma_n \leq \tau_{n+1} \quad \forall n.$$

Und damit $\bar{y} = \bar{z}$. ■

Lemma 5.36.
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt.
Beh.: Dann ist $\gamma_+(y_0)$ periodisch genau dann, wenn $\gamma_+(y_0) \cap \omega_+(y_0) \neq \emptyset$.
Insbesondere ist dann $\gamma_+(y_0) = \omega_+(y_0)$

Beweis:
$\Rightarrow$ trivial.
$\Leftarrow$ Sei $\bar{y} \in \gamma_+(y_0) \cap \omega_+(y_0) \neq \emptyset$.

1. Fall: $\bar{y} \in \mathcal{E}$. Dann gilt: $y_{0,y_0} \equiv \bar{y}$, d.h. $y_0 \in \mathcal{E}$, also $\gamma_+(y_0) = \{y_0\}$. Insbesondere ist $\gamma_+(y_0)$ trivial periodisch.

2. Fall: $\bar{y} \notin \mathcal{E}$. Sei L Transversale durch $\bar{y}$ [[vgl. Lemma 5.31]]. Es gilt:

   - $\bar{y} \in \gamma_+(y_0) \Longrightarrow \gamma_+(\bar{y}) \subseteq \gamma_+(y_0)$
   - $\bar{y} \in \gamma_+(y_0) \Longrightarrow \omega_+(\bar{y}) = \omega_+(y_0)$
   - $\bar{y} \in \omega_+(y_0) \Longrightarrow \gamma_+(\bar{y}) \overset{\text{Satz 5.24}}{\subseteq} \omega_+(y_0) = \omega_+(\bar{y})$
   - nach Lemma 5.34 $\exists (t_n)_n$, $t_n \nearrow \infty$ mit $y_{0,\bar{y}}(t_n) \in L$, $\forall n$ und $y_{0,\bar{y}}(t_n) \to \bar{y} \in \omega_+(\bar{y})$
   - $y_{0,\bar{y}}(t_n) \in \gamma_+(\bar{y}) \subset \omega_+(\bar{y}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   - nach Korollar 5.35 ist $\omega_+(\bar{y}) \cap L$ höchstens einelementig. Damit $y_{0,\bar{y}}(t_n) = \bar{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Damit muss $\gamma_+(\bar{y})$ periodisch sein. Also ist $\gamma_+(\bar{y}) = \omega_+(\bar{y}) = \omega_+(y_0)$. Zudem gilt $\gamma_+(y_0) = \gamma_+(\bar{y})$. ■

Satz 5.37. (*Poincaré-Bendixson*):
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt und $\omega_+(y_0) \cap \mathcal{E} = \emptyset$.
Beh.: Dann ist entweder $\omega_+(y_0) = \gamma_+(y_0)$ (d.h. ein periodischer Orbit) oder $\omega_+(y_0)$ ist ein periodischer Orbit, ein sogenannter Grenzzyklus.

Definition 5.38. Ein periodischer Orbit γ heißt Grenzzyklus ⟦limit cycle⟧ falls er mindestens einen Orbit anzieht, d.h. $\exists \bar{y} \notin \gamma$ mit $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(y_{0,\bar{y}}(t), \gamma) = 0$

Beweis: Sei $\gamma_+(y_0)$ nicht periodisch. Sei $\bar{y} \in \omega_+(y_0)$ ⟦$\omega_+(y_0) \neq \emptyset$, weil $\gamma_+(y_0)$ beschränkt ist⟧
Dann ist $y_{0,\bar{y}} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. ⟦Satz 5.24.⟧
Behauptung: $y_{0,\bar{y}}$ ist periodisch.
Sei $\tilde{y} \in \omega_+(\bar{y}) \subset \omega_+(y_0)$ ⟦nota: $\bar{y} \in \omega_+(y_0)$; Satz 5.24.⟧, L eine Transversale durch $\tilde{y}$. Nach Lemma 5.34. existiert eine Folge $(t_n)_n$, $t_n \nearrow \infty$ mit $y_{0,\bar{y}}(t_n) \in L$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_{0,\bar{y}}(t_n) = \tilde{y}$. Weiters ist $\forall n \in \mathbb{N}$: $y_{0,\bar{y}}(t_n) \in \gamma_+(\bar{y}) \subset \omega_+(y_0)$. Nach Korollar 5.35. müssen die Punkte $y_{0,\bar{y}}(t_n)$, $n \in \mathbb{N}$ übereinstimmen. Deshalb ist $\gamma_+(\bar{y})$ periodisch. D.h. $\omega_+(\bar{y})$ ist periodisch. Weil $\omega_+(y_0)$ zusammenhängend ist ⟦vgl. Lemma 5.23, (iii)⟧ folgt $\omega_+(\bar{y}) = \omega_+(y_0)$. ■

Korollar 5.39.
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt und $\overline{\gamma_+(y_0)} \cap \mathcal{E} = \emptyset$
Beh.: Dann gilt: Die ODE $y' = f(y)$ hat eine periodische Lösung.

Beweis: Nach Satz 5.37 ist $\omega_+(y_0)$ der Orbit einer periodischen Lösung. ■

Satz 5.40.
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ beschränkt. Sei $\omega_+(y_0) \cap \mathcal{E}$ endlich.
Beh.: Dann kann nur einer der folgenden drei Fälle eintreten:

(i) $\omega_+(y_0) = \{y^\infty\}$ für ein $y^\infty \in \mathcal{E}$

(ii) $\omega_+(y_0)$ ist periodischer Orbit

(iii) $\omega_+(y_0)$ besteht aus endlich vielen Ruhelagen und außerdem aus (möglicherweise unendlich vielen) vollständigen Orbits, die für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$ gegen eine Ruhelage konvergieren.

Definition 5.41. Ein Orbit heißt vollständig, falls er von einer Lösung $y_{0,\bar{y}} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ erzeugt wird. Falls die Limiten

$$\lim_{t\to+\infty} y_{0,\bar{y}}(t) =: y_\infty^+ \text{ und } \lim_{t\to-\infty} y_{0,\bar{y}}(t) =: y_\infty^- \text{ existieren,}$$

so nennt man den Orbit

- heteroklin , falls $y_\infty^+ \neq y_\infty^-$
- homoklin , falls $y_\infty^+ = y_\infty^-$

Beispiel: (*Für Satz 5.40, (iii)*)
Betrachte

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + x^2 - \alpha x(y - 1 - 2x^2) \\ -2x(1+y) \end{pmatrix}$$

- Ruhelagen $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1/(2\alpha),-1)$
- die Kurven $y=-1$ und $y=1-x^2$ sind invariant
- tatsächlich: $\{(x,-1)\colon -1<x<1\}$ und $\{(x,1-2x^2)\colon -1<x<1\}$ heterokline Orbits

■

Beispiel: (*homokliner Orbit*)

$$
\begin{aligned}
x' &= x + xy - (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \\
y' &= y - x^2 + (x-y)\sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

In Polarkoordinaten hat dieses System die Form

$$
\begin{aligned}
r' &= r(1-r) \\
\phi' &= (1-\cos\phi)r \qquad > 0
\end{aligned}
$$

Ruhelagen:

- $(0,0)$ (instabil)
- $(1,0)$ (Linearisierung liefert Eigenwerte -1 und 0)

Invariante Kurven: $\partial B_1(0)$ ist invariant.
Homokliner Orbit: $\partial B_1(0)\backslash\{(1,0)\}$
$\partial B_1(0) = \omega_+(y_0)$ für jedes $y_0 \notin \{(0,0),(1,0)\}$ ■

Beweis von Satz 5.40.:

1. Fall: $\omega_+(y_0) \subseteq \mathcal{E}$. Weil $\omega_+(y_0)\cap\mathcal{E}$ endlich und $\omega_+(y_0)$ zusammenhängend ist, ist $\omega_+(y_0)$ einelementig. Dies ist Fall (i).

2. Fall: Sei $\bar{y} \in \omega_+(y_0)\backslash\mathcal{E}$. Nach Satz 5.24 ist $y_{0,\bar{y}} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ und $\gamma_+(\bar{y}) \subseteq \omega_+(y_0)$. Damit auch $\omega_+(\bar{y}) \subset \omega_+(y_0)$.

   2a: Sei $\tilde{y} \in \omega_+(\bar{y})\backslash\mathcal{E} \subset \omega_+(y_0)\backslash\mathcal{E}$, L Transversale durch $\tilde{y}$. Es gilt:
   - $L \cap \omega_+(y_0) = \{\tilde{y}\}$ ⟦Korollar 5.35.⟧
   - $\exists$ Folge $(t_n)_n$ mit $t_n \nearrow \infty$ und $y_n := y_{0,\bar{y}}(t_n)$ erfüllt $y_n \in L \cap \gamma_+(\bar{y})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $y_n \to \tilde{y}$ ⟦Lemma 5.34⟧
   - $\tilde{y} \in \omega_+(\bar{y})$

   $\overset{\text{Kor. 5.35}}{\Longrightarrow}$ $y_n = \tilde{y}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Also ist $y_{0,\bar{y}}$ periodisch. Weil $\omega_+(\bar{y})$ zusammenhängend ist, ist $\gamma_+(\bar{y}) = \omega_+(\bar{y})$. Weil $\omega_+(\bar{y}) \subseteq \omega_+(y_0)$ und $\omega_+(y_0)$ zusammenhängend, folgt $\gamma_+(\bar{y}) = \omega_+(\bar{y}) = \omega_+(y_0)$. Das heißt (ii) ist erfüllt.

   2b: Sei $\omega_+(\bar{y})\backslash\mathcal{E} = \emptyset$, das heißt $\omega_+(\bar{y}) \subseteq \mathcal{E}$. Wie im Fall 1 schließen wir, dass $\omega_+(\bar{y})$ einelementig ist ⟦$\omega_+(\bar{y}) \subseteq \omega_+(y_0)$, das heißt $\omega_+(\bar{y})\cap\mathcal{E}$ endlich⟧. Damit

   $$\lim_{t\to+\infty} y_{0,\bar{y}}(t) = y_\infty^+ \text{ für ein } y_\infty^+ \in \mathcal{E}.$$

   Analog existiert $\lim_{t\to-\infty} y_{0,\bar{y}}(t) = y_\infty^-$ für ein $y_\infty^- \in \mathcal{E}$. Das ist Fall (iii). ■

5.7 Bemerkungen zu periodischen Orbits

Beobachtung: Für viele technische Anwendungen ist es wichtig zu wissen, ob für $t \to \infty$ die Lösung gegen eine Ruhelage konvergiert oder ob ein periodischer Orbit angenommen wird. Für die Existenz periodischer Orbits hat Korollar 5.40 bereits eine Aussage (unter gewissen Bedingungen) gemacht. ▪

Bemerkung: Ein einfaches Beispiel periodischer Orbits sind die (geschlossenen) Höhenlinien von (echten) Ljapunovfunktion, falls sie keine Ruhelage enthalten. ⟦Übung: warum?⟧ ▪

Lemma 5.42.
Vor.: keine
Beh.: Das Innere (vgl. Jordanscher Kurvensatz) eines (echten) periodischen Orbits enthält (mindestens) eine Ruhelage.

Beweis: siehe Lemma 7.17 des Buches von Teschl. ■

Ein Negativresultat ist

Lemma 5.43.
Vor.: Sei G einfach zusammenhängend, $\rho \in C^1(G;\mathbb{R})$, $f \in C^1(G;\mathbb{R}^2)$. Es gelte: Zu jedem offenen $\emptyset \neq U \subseteq G$ existiere ein offenes $\emptyset \neq V \subseteq U$ mit

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho f_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho f_2) = \operatorname{div}(\rho f) > 0$$

auf V.
Beh.: Dann gilt: Die ODE $y' = f(y)$ hat keine periodische Lösung.

Beweis: Aus den Voraussetzung folgt, dass $\operatorname{div}(\rho f) \geq 0$ auf ganz G:
Sei $x \in U$ ein Punkt, sodass $\operatorname{div}(\rho f)(x) < 0$. Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{div}(\rho f)$ gibt es damit eine offene Umgebung B von x, in der $\operatorname{div}(\rho f) < 0$ ist. Da die Voraussetzung für jedes offene $U \subseteq G$ gilt, ist das ein Widerspruch.
Sei $\gamma_+(y_0)$ eine (echte) periodische Lösung. Der Jordansche Kurvensatz impliziert, dass das Innere von $\gamma_+(y_0)$ ganz in G ist (G ist zusammenhängend). Nach dem Gaußschen Integralsatz ⟦Vgl. BLÜMLINGER Satz 5.3.5. und ENGL 8.58.⟧ gilt:

$$0 < \int_{\operatorname{int}(\gamma_+(y_0))} \operatorname{div}(\rho f)\ dxdy = \int_{\gamma_+(y_0)} \rho \ \cdot \langle f, n\rangle\ ds = 0$$

Das ist ein Widerspruch, da $\langle f, n\rangle = 0$, weil $\gamma_+(y_0)$ ein Orbit ist, das heißt das Richtungsfeld ist parallel zur Tangente. ■

Beispiel 5.44. Betrachte

$$\begin{aligned} x' &= y - (x^2 + y^2 - 1)x \\ y' &= -x - (x^2 + y^2 - 1)y \end{aligned}$$

Behauptung: Es gibt keine (echten) periodischen Orbits in der (offenen) Menge $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$.
Sei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y - (x^2 + y^2 - 1)x \\ -x - (x^2 + y^2 - 1)y \end{pmatrix},\ \rho \equiv 1,\ G = B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0).$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho f) =& \frac{\partial}{\partial x}(y - x(x^2 + y^2 - 1)) + \frac{\partial}{\partial y}(-x - y(x^2 + y^2 - 1)) = \\ =& -(x^2 + y^2 - 1) - 2x^2 - (x^2 + y^2 - 1) - 2y^2 = \\ =& 2 + (x^2 + y^2)(-1 - 1 - 2) = 2 - 4(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Dann gilt: $\operatorname{div}(\rho f) > 0$ auf $G = B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$. Aus Lemma 5.44 folgt dann die Behauptung. ∎

Das nächste Resultat zeigt, dass periodische Lösungen typischerweise auf jeder „Seite" anziehen oder abstoßen.

Satz 5.44.
Vor.: Sei $\gamma_+(y_0)$ ein (echter) periodischer Orbit, der isoliert ist, das heißt in einer Umgebung von $\gamma_+(y_0)$ gibt es keinen weiteren periodischen Orbit.
Beh.: Dann gilt: Für jedes y_1 hinreichend nahe bei $\gamma_+(y_0)$ ist entweder $\omega_+(y_1) = \gamma_+(y_0)$ oder $\omega_-(y_1) = \gamma_-(y_0)$.

Beweis: Sei $\tilde{y} \in \gamma_+(y_0)$ beliebig und L eine Transversale durch $\tilde{y}$.

1. Schritt: Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten können wir annehmen, dass, falls T eine hinreichend kleine Umgebung von $\gamma_+(y_0)$ ist, gilt: Für jedes $y_1 \in T$ schneidet der Orbit $\gamma_\pm(y_1)$ die Transversale L. Weil $f \neq 0$ auf $\gamma_+(y_0)$, können wir annehmen, dass $f \neq 0$ auf einer weiteren hinreichend kleinen Umgebung T'.

2. Schritt: Sei $y_1 \in L \cap T \cap T'$. Sei y_2 der erste Schnittpunkt von $\gamma_+(y_1)$ mit L, wobei $y_1 \neq y_2$. Wir nehmen an, dass y_2 „zwischen" $\tilde{y}$ und y_1 liegt $[\![$sonst betrachten wir $\gamma_-(y_1)$ und schlussendlich $\omega_-(y_1))]\!]$. Die Menge D, die von dem Teilorbit von $\gamma_+(y_1)$, der zwischen y_1 und y_2 liegt, der Transversalen L und $\gamma_+(y_0)$ berandet wird, ist eine invariante Menge. Also ist $\gamma_+(y_1)$ beschränkt. Weil $\omega_+(y_1) \subseteq T'$ ist $\omega_+(y_1) \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Nach Poincaré-Bendixson ist $\omega_+(y_1)$ periodisch. Weil $\gamma_+(y_0)$ ein isolierter, periodischer Orbit ist, muss gelten $\gamma_+(y_0) = \omega_+(y_1)$. ∎

KAPITEL

SECHS

Randwertprobleme

- Bei AWPs wird eine ODE inklusive Anfangsbedingung gestellt, das heißt die Bedingungen werden in *einem* (Zeit-)Punkt gestellt. Bei Randwertproblemen (RWP) werden Bedingungen in mehreren Punkten gestellt.
- In der Literatur ist es üblich, die unabhängige Variable mit „x“ statt mit „t“ zu bezeichnen.
- Im Unterschied zu AWP ist Existenz und Eindeutigkeit bei RWP nicht automatisch gegeben.

Beispiel 6.1.

1. $y'' + y = 0$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$
   $y(0) = 0$
   $y(\frac{\pi}{2}) = 1$
   hat eine eindeutige Lösung $y(x) = \sin(x)$

2. $y'' + y = 0$ auf $(0, \pi)$
   $y(0) = 0$
   $y(\pi) = 0$
   hat die Lösungsschar $y(x) = c \cdot \sin(x) \quad c \in \mathbb{R}$

3. $y'' + y = 0$ auf $(0, \pi)$
   $y(0) = 0$
   $y(\pi) = 1$
   hat keine Lösung

■

6.1 Lineare Systeme 1.Ordnung

Definition 6.2. Sei $I = (a,b)$, $A \in C\left(\bar{I};\mathbb{R}^{d\times d}\right)$, $b \in C\left(\bar{I};\mathbb{R}^{d}\right), R_a, R_b \in \mathbb{R}^{d\times d}, \ell \in \mathbb{R}^d$. Das lineare RWP lautet: Finde $y \in C^1\left(I;\mathbb{R}^d\right) \cap C\left(\bar{I},\mathbb{R}^d\right)$, so dass:

(6.1)
$$\begin{aligned} &y' = A(x)y + b(x), \quad x \in I \\ &R_a y(a) + R_b y(b) = \ell \end{aligned}$$

Das System heißt:

- homogen, falls $\ell = 0$ und $b \equiv 0$
- inhomogen, falls $\ell \neq 0 \wedge b \neq 0$
- halbhomogen, falls $\ell = 0$ oder $b \equiv 0$

Bei linearen RWP lässt sich die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit auf eine Rangbestimmung reduzieren.

Satz 6.3.
Vor.: Sei Y eine Fundamentalmatrix für $y'(x) = A(x)y(x)$. Definiere die Partikulärlösung $y_p(x) = Y(x)\int\limits_a^x Y^{-1}(s)\cdot b(s)\,ds$ und die Matrix $B := R_aY(a) + R_bY(b)$.
Beh.: Dann gilt:

(i) (6.1) ist lösbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rang} B = \operatorname{Rang}(B, \ell - R_b y_p(b))$

(ii) Falls (6.1) lösbar ist, dann ist der Lösungsraum ein affiner Raum der Dimension $\dim\ker B$.

Beweis: y_p erfüllt:
$y_p' = A(x)y_p + b, \quad y_p(a) = 0$
Damit ist y eine Lösung von (6.1) $\Leftrightarrow$ die Funktion $\tilde{y} = y - y_p$ löst:

$$\tilde{y}' = A(x)\tilde{y}$$

$$R_a\tilde{y}(a) + R_b\tilde{y}(b) = R_a(y(a) - \overbrace{y_p(a)}^{=0}) + R_b(y(b) - y_p(b)) = \ell - R_b y_p(b) =: \tilde{\ell}$$

$\tilde{y}$ muss die Form $\tilde{y}(x) = Y(x)\cdot c$ für ein $c \in \mathbb{R}^d$ haben. Das heißt c muss $(R_aY(a) + R_bY(b))\cdot c = \tilde{d}$ lösen. Damit folgt die Behauptung aus der linearen Algebra. ■

Übung: Geben Sie die Matrizen R_a, R_b für die Randwertprobleme aus Beispiel 6.1. an. ▪

Satz 6.3 liefert eine konkrete Lösungstechnik für (6.1). Eine weitere oft verwendete Technik basiert auf der „Greenschen Matrix“, welche eine explizite Lösungsformel darstellt. Wir betrachten das halbhomogene System

(6.3)
$$\begin{aligned} &y' = A(x)y + f(x) \\ &R_a y(a) + R_b y(b) = 0 \end{aligned}$$

Bemerkung 6.4. Der Fall $\ell \neq 0$ in (6.1) lässt sich typischerweise einfach in die Form (6.3) bringen. Sei $\tilde{y}_p$ eine Funktion mit $R_a\tilde{y}_p(a) + R_b\tilde{y}_p(b) = \ell$. Dann löst y das RWP (6.1) genau dann, wenn $\tilde{y} := y - \tilde{y}_p$ das System

$$\begin{aligned}&R_a\tilde{y}(a) + R_b\tilde{y}(b) = 0\\&\tilde{y}' = A\tilde{y} + b + (A\tilde{y}_p - \tilde{y}_p')\end{aligned}$$

löst. In der Praxis kann man $\tilde{y}_p = const$ oder linear wählen. ∎

Wir betrachten nur den Fall, dass (6.3) für jedes $b \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^d)$ *eindeutig* lösbar ist. Nach Satz 6.3. (ii) heißt dies, dass die dort eingeführte Matrix B regulär sein muss.

Satz 6.5.

Vor.: Sei die Matrix B aus Satz 6.3 regulär.

Beh.: Dann gilt: Es gibt eine Funktion $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}^{d\times d}$, so dass für jedes $f \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^d)$ die Funktion

$$x \mapsto y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt$$

die Lösung von (6.3) ist. Es gilt für jedes feste $t \in (a,b)$ für die Funktion $x \mapsto G(x,t)$

(i) $x \mapsto G(x,t)$ erfüllt die homogene Gleichung $y' = Ay$ auf $(a,t) \cup (t,b)$, dass heißt $\partial_x G(x,t) = A(x)G(x,t)$ für $x \in (a,t) \cup (t,b)$

(ii) G erfüllt die Sprungbedingung $G(t^+,t) - G(t^-,t) = +I \in \mathbb{R}^{d\times d}$

(iii) $R_aG(a,t) + R_bG(b,t) = 0$

Die Funktion $(x,t) \mapsto G(x,t)$ heißt *Greensche Funktion* oder auch *Greensche Matrix*.

Beweis: Sei Y Fundamentalsystem. Definiere

$$G(x,t) = \begin{cases} Y(x)B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(t), & a \le t \le x \le b \\ -Y(x)B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(t), & a \le x < t \le b \end{cases}$$

ad (ii): Die Sprungbedingung $G(t+,t) - G(t-,t) = I$ folgt durch Einsetzen.
ad (iii): $x \mapsto y(x)$ erfüllt auch die Randbedingung: Für $t \in (a,b)$ rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}R_aG(a,t) + R_bG(b,t) &= -R_a \cdot Y(a)B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(t) + R_b \cdot Y(b)B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(t)\\&= -(B - R_bY(b))B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(t) + R_bY(b)B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(t)\\&= -(I - R_bY(b)B^{-1})R_bY(b)Y^{-1}(t) + R_bY(b)B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(t)\\&= -R_bY(b)Y^{-1}(t) + R_bY(b)B^{-1}(R_bY(b) + R_aY(a))Y^{-1}(t) = 0\end{aligned}$$

damit folgt aus $y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt$, dass $R_ay(a) + R_by(b) = 0$.

ad(i):

Setze $y(x) = \int\limits_a^b G(x,t)f(t)dt = \int\limits_a^x Y(x)B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(t)f(t)dt - \int\limits_x^b Y(x)B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(t)f(t)dt.$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y'(x) =& Y'(x)\int_a^x B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(t)f(t)dt + Y(x)\cdot B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(x)f(x)\\
&-Y'(x)\int_x^b B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(t)f(t)dt + Y(x)\cdot B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(x)f(x)\\
\overset{Y'=AY}{=}& A(x)Y(x)\int_a^x B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(t)f(t)dt + Y(x)B^{-1}R_aY(a)Y^{-1}(x)f(x)\\
&-A(x)Y(x)\int_x^b B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(t)f(t)dt + Y(x)B^{-1}R_bY(b)Y^{-1}(x)f(x)\\
=& A(x)y(x) + Y(x)B^{-1}\underbrace{(R_aY(a)+R_bY(b))}_{=B}Y^{-1}(x)f(x)\\
=& A(x)y(x) + f(x)
\end{aligned}$$

■

6.2 Skalare Gleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten

(6.4)
$$\begin{aligned}
&A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f, \text{ auf } (a,b)\\
&R_a\begin{pmatrix} y(a)\\ y'(a)\end{pmatrix} + R_b\begin{pmatrix} y(b)\\ y'(b)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

mit A, B, C hinreichend glatt und $A > 0$ auf $[a, b]$.

Beispiel 6.(*separierte Randbedingung*). Für $R_a = \begin{pmatrix} r_{11}^a & r_{12}^a\\ 0 & 0\end{pmatrix}, R_b = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ r_{21}^b & r_{22}^b\end{pmatrix}$ haben die Randbedingungen in (6.4) die Form

$$\begin{aligned}
r_{11}^a y(a) + r_{12}^a y'(a) &= \rho_1\\
r_{21}^b y(b) + r_{22}^b y'(b) &= \rho_2
\end{aligned}$$

Sie sind separiert. Für $r_{12}^a = r_{22}^b = 0$ (und $r_{11}^a = r_{21}^b = 1$) spricht man von Dirichlet - Randbedingungen. Falls $r_{11}^a = r_{21}^b = 0$ (und $r_{22}^b = r_{21}^a = 1$) spricht man von Neumann-Randbedingungen. Der allgemeine Fall heißt Robin-Randbedingungen („gemischte Randbedingungen").
Ein Beispiel für nicht separierte Randbedingungen sind periodische Randbedingungen

$$\begin{aligned}
y(a) - y(b) &= 0\\
y'(a) - y'(b) &= 0,
\end{aligned}$$

welche sich als $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(a)\\ y'(a)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(b)\\ y'(b)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$ schreiben lässt. ■

Im Folgenden betrachten wir separierte Randbedingungen und die ODE in "selbstadjungierter" Form ⟦warum: später⟧:

$$
\begin{aligned}
Ly &:= (-p(x)y')' + q(x)y = f(x) \text{ auf } (a,b) \\
R_1 y &:= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = \rho_1 \in \mathbb{R} \\
R_2 y &:= \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = \rho_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

wobei $p, q \in C^1([a,b];\mathbb{R}), p > 0$ auf $[a,b], \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. ⟦Notation: A abgeschlossen, $u \in C^1(A;\mathbb{R})$ bedeutet: $\exists$ offene Umgebung $\tilde{A}$ von A und $U \in C^1(\tilde{A};\mathbb{R})$ mit $U|_A = y$.⟧

Übung: Die ODE (6.4) kann auf die Form (6.5) gebracht werden, indem $p(x) := e^{\int_a^x \frac{B(t)}{A(t)} dt}$, $q(x) = -p(x)\frac{C(x)}{A(x)}$ gesetzt wird und (6.4) mit $-\frac{p(x)}{A(x)}$ multipliziert wird. ▪

Satz 6.6.
Vor.: Sei $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem für $Ly = 0$.
Beh.: Dann ist (6.5) genau dann für alle $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ und $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ lösbar, wenn

$$\det \begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Insbesondere ist dies genau dann der Fall, wenn (6.5) im homogenen Fall, (d.h. $f \equiv 0, \rho_1 = \rho_2 = 0$) nur trivial lösbar ist.

Beweis: Übung. ■

Die Greensche Funktion liefert eine Lösungsformel für das halbhomogene System (6.5) mit $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Man kann die Greensche Funktion durch Umschreiben von (6.5) auf ein System 1. Ordnung bringen. Typischerweise „konstruiert" man sie aber „direkt".

Satz 6.7.
Vor.: Habe (6.5) für $f \equiv 0$ und $\rho_1 = \rho_2 = 0$ nur die triviale Lösung.
Beh.: Dann existiert $G \in C([a,b]^2;\mathbb{R})$, so dass $x \mapsto y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t) dt$ die Lösung von (6.5) mit $\rho_1 = \rho_2 = 0$ ist. G erfüllt für jedes feste $t \in (a,b)$:

(i) $LG(\cdot, t) = 0$ auf $(a,t) \cup (t,b)$

(ii) $G(\cdot, t)$ ist stetig bei $x = t$
$\partial_x G(t^+, t) - \partial_x G(t^-, t) = -\frac{1}{p(t)}$

(iii) $R_1 G(\cdot, t) = 0$
$R_2 G(\cdot, t) = 0$

Anstelle eines Beweises konstruieren wir G für ein Beispiel.
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&-u'' + u = f \text{ auf } (0,1) \\
&u(0) = 0 \\
&u(1) = 0
\end{aligned} \tag{$*$}
$$

Um die Greensche Funktion zu konstruieren gehen wir so vor:

- Fundamentallösungen $e^{\pm x}$. Bequemer: $\sinh x, \cosh x$. Noch Bequemer: $\sinh(x), \sinh(x-1)$.
- Ansatz für G:
$$G(x,t) = \begin{cases} a_1(t)\sinh x + a_2(t)\sinh(x-1), & x \leq t \\ b_1(t)\sinh x + b_2(t)\sinh(x-1), & x > t \end{cases}$$
- Die Bedingung (iii) liefert $a_2(t) = 0, b_1(t) = 0$.
- Die Bedingung (ii) liefert $\begin{aligned} G(t+,t) = b_2(t)\sinh(t-1) &\overset{!}{=} G(t-,t) = a_1(t)\sinh t \\ \partial_x G(t+,t) - \partial_x G(t-,t) &\overset{!}{=} -1 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & a_1(t)\sinh t - b_2(t)\sinh(t-1) \overset{!}{=} 0 \\ & -a_1(t)\cosh t + b_2(t)\cosh(t-1) \overset{!}{=} -1 \\ \Rightarrow\ & b_2(t) = -\frac{\sinh t}{\sinh 1},\ a_1(t) = -\frac{\sinh(t-1)}{\sinh 1} \\ \Rightarrow\ & G(x,t) = \begin{cases} -\sinh x \frac{\sinh(t-1)}{\sinh 1}, & x < t \\ -\sinh(x-1)\frac{\sinh t}{\sinh 1}, & x \geq t \end{cases} \end{aligned}$$

Nachrechnen liefert, dass $y(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)f(t)dt$ das RWP $(*)$ löst. ∎

Lemma 6.8. (*Lagrangeidentität*):
Vor.: Seien $u, v \in C^2([a,b])$.
Beh.: Dann gilt $vLu - uLv = -(p(u'v - uv'))'$
insbesondere folgt $\int\limits_a^b vLu\ dx = \int\limits_a^b uLv\ dx$ falls u, v zusätzlich die homogenen Randwertbedingungen $R_1 u = R_2 u = 0 = R_1 v = R_2 v$ erfüllen.
(Hier fordern wir $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0), (\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$)

Beweis: Die erste Aussage folgt durch Nachrechnen. Für die zweite Aussage unterscheiden wir:

1. Fall: $\alpha_2 = 0$: Damit $\alpha_1 \neq 0$, d.h. $u(a) = 0 = v(a)$
Weiters ist $p(a)u'(a)\underbrace{v(a)}_{=0} - p(a)\underbrace{u(a)}_{=0}v'(a) = 0$
2. Fall: $\alpha_2 \neq 0$:

$$p(a)u'(a)v(a) - p(a)u(a)v'(a) \underset{R_1 u = 0 = R_2 v}{=} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u(a)v(a) - \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u(a)v(a)\right) = 0$$

damit ist immer $p(u'v - uv')|_{x=a} = 0$. Analog bei $x = b$. Damit $0 = \int\limits_a^b uLv - vLu\ dx$ ∎

Bemerkung: Lemma 6.8. zeigt, dass der Operator L auf der Menge der C^2- Funktionen, die die homogene Randbedingung erfüllen bzgl. des L^2 - Skalarprodukts symmetrisch (selbstadjungiert) ist.

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(a,b)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(a,b)}$$

∎

Satz 6.9.
Vor.: Habe (6.5) für $f \equiv 0$ und $\rho_1 = \rho_2 = 0$ nur die triviale Lösung.
Beh.: Dann gilt für die Greensche Funktion aus Satz 6.7

$$G(x,t) = G(t,x) \qquad \forall (x,t) \in [a,b]^2$$

Beweis: Sei $\mathcal{G} : C([a,b]) \Rightarrow C^2([a,b])$ gegeben durch $(\mathcal{G}f)(x) = \int\limits_a^b G(x,t)f(t)\,dt$ der Lösungsoperator für (6.5) mit $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Es reicht zu zeigen:

$$\underbrace{\langle \mathcal{G}f, g\rangle_{L^2[a,b]}}_{= \int_a^b \int_a^b G(x,t)f(t)g(x)\ dt\ dx} \quad = \quad \underbrace{\langle f, \mathcal{G}g\rangle_{L^2[a,b]}}_{= \int_a^b \int_a^b f(t)G(t,x)g(x)\ dx\ dt} \qquad \forall f,g \in C([a,b])$$

Sei $u = \mathcal{G}f, \quad v = \mathcal{G}g$. Dann gilt: $Lu = f$ und $Lv = g$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}f, g\rangle_{L^2(a,b)} &= \langle u, g\rangle_{L^2(a,b)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(a,b)} \\ &\overset{\text{Lemma 6.8.}}{=} \langle Lu, v\rangle_{L^2(a,b)} = \langle f, u\rangle_{L^2(a,b)} = \langle f, \mathcal{G}g\rangle_{L^2(a,b)}\end{aligned}$$ ■

Übung 6.10. Sei (6.5) für $f = 0$ und $\rho_1 = \rho_2 = 0$ nur trivial lösbar. Sei $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0), (\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$, u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen an $Lu = 0$, und es gilt $R_1 u_1 = 0$, $R_2 u_2 = 0$. Dann gilt: ⟦Übungsbeispiel 11.3.⟧

1. $\kappa(x) := p(x)(u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x)) = \text{const} \neq 0$
2. $G(x,t) = \frac{1}{\kappa}\begin{cases} u_1(t)u_2(x), & t \leq x \\ u_1(x)u_2(t), & t > x \end{cases}$

■

6.3 Sturm - Liouville Eigenwertprobleme

6.3.1 Motivation

Sturm - Liouville Eigenwertprobleme (SLEWP) treten z.B. beim Lösen von Partiellen Differentialgleichungen in separierbaren Geometrien auf. Zur Illustration betrachten wir die 1D-Wellengleichung, welche die Auslenkung einer eingespannten schwingenden Saite beschreibt.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = 0 \quad \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{matrix} y(0,t) = 0 \\ y(1,t) = 0 \end{matrix}\right. \quad \forall t \geq 0 \tag{6.7}$$

mit Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} y(x,0) &= y_0(x), \quad x \in (0,1) \\ \frac{\partial}{\partial t}y(x,0) &= y_1(x), \quad x \in (0,1) \end{aligned} \tag{6.8}$$

für gegebene $y_0,\ y_1$.

Idee: Suche „einfache“ Grundlösung der Gleichung (6.6) und verwende das Superpositionsprinzip um die Lösung von (6.6)-(6.8) zu bestimmen.

Ansatz für Lösungen von (6.6): $y(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ („Separation der Variablen“). Einsetzen in (6.6) liefert:

$$\frac{1}{c^2} w''(t)v(x) \stackrel{!}{=} v''(x)w(t)$$
$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{w''(t)}{w(t)}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = \underbrace{\frac{v''(x)}{v(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}}$$

$\Rightarrow$ Es muss eine Konstante λ geben mit

$$\frac{1}{c^2}\frac{w''}{w} = -\lambda = \frac{v''}{v}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda v - v'' &= 0 \quad \text{auf } (0,1), \quad v(0) = 0 = v(1) \\ -\lambda c^2 w - w'' &= 0 \quad \text{auf } (0,\infty) \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung für v ist $v(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$.
Die allgemeine Lösung für w ist $w(t) = c_3 \sin(c\sqrt{\lambda}t) + c_4 \cos(c\sqrt{\lambda}t)$.
Um die Randbedingung $v(0) = v(1) = 0$ zu berücksichtigen, setzen wir $c_2 = 0$ und müssen fordern, dass $\sqrt{\lambda} = \pi n$ für ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, das heißt $\lambda = \pi^2 n^2$.

$\Rightarrow$ Jedes $v(x)w(t) = \sin(n\pi x)(c_3 \sin(c\pi nt) + c_4 \cos(cn\pi t))$ ist eine Lösung von (6.6) und erfüllt die Randbedingung (6.7).

$\Rightarrow$ Ansatz für Lösung von (6.6)-(6.8):

(6.9) $$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)(c_{1,n} \sin(n\pi ct) + c_{2,n} \cos(n\pi ct))$$

Die Koeffizienten $c_{1,n}, c_{2,n}$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung (6.8):

$$y_0(x) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{2,n} \sin(n\pi x), \qquad x \in (0,1)$$
$$y_1(x) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n}(n\pi c) \sin(n\pi x), \qquad x \in (0,1)$$

Also: Aus den Fourierreihen von y_0 und y_1 lässt sich (zumindest formal) eine Lösung des Problems (6.6)-(6.8) angeben. ⟦Für rigorose Theorie benötigt man Eindeutigkeitsaussagen für (6.6)-(6.8) und Konvergenzaussagen für die Reihen⟧
Beobachtung: Entscheidend für den Separationsansatz ist das Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } (v,\lambda) \in C^2([0,1];\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \text{ so dass} \\ &\quad -v'' - \lambda v = 0 \qquad \text{auf } (0,1) \\ &\quad v(0) = 0 \\ &\quad v(1) = 0 \end{aligned}$$

Etwas allgemeiner betrachten wir:

Definition 6.11. Sei (a,b) endliches Intervall. Seien p, q, $r \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit p, $r > 0$ auf $[a,b]$. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$ und $(\beta_1,\beta_2) \neq (0,0)$. Die Aufgabe:
Finde $(y,\lambda) \in C^2([a,b];\mathbb{R}) \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} -(py')' + qy &= \lambda r y \qquad \text{auf } (a,b) \\ R_1 y &:= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = 0 \\ R_2 y &:= \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = 0 \end{aligned}$$

heißt Sturm-Liouville EWP (SLEWP). y heißt Eigenfunktion, λ Eigenwert.

Es liegt nahe, folgende Fragen zu stellen:

1) Gibt es Eigenwerte/Eigenfunktionen?

2) Lässt sich „jede“ Funktion f als Reihe $f(x) = \sum f_n y_n(x)$ darstellen, wobei $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ die Eigenfunktionen sind?

Die Hauptaussagen von SLEWP sind:

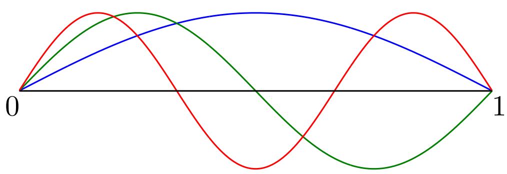
Satz 6.12.
Vor.: Sei $Ly = 0, R_1 y = 0 = R_2 y$ nur trivial lösbar. Ein SLEWP (im Sinn von Definition 6.11.) hat als Lösungen eine Folge von Eigenpaaren $((y_n,\lambda_n))_{n=0}^{\infty}$ ⟦also abzählbar viele⟧.
Beh.: Es gilt:

(i) $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \to \infty$ für $n \to \infty$

(ii) $\exists c_1, c_2 > 0: \; c_1 n^2 \le \lambda_n \le c_2 n^2 \quad \forall n$ hinreichend groß.

(iii) Die Eigenfunktion y_n, die zum EW λ_n gehört, hat in (a,b) genau n Nullstellen. Zwischen 2 Nullstellen von y_n liegt genau eine Nullstelle von y_{n+1}.

Beweis: Funktionalanalysis. ■



Dies sind die ersten drei Eigenfunktionen aus dem Motivationsbeispiel:
$\sin(k \cdot \pi x), \; k \in \{1,2,3\}$ für $x \in [0,1]$

Satz 6.13. (*Entwicklungssatz*):
Vor.: Sei $Ly = 0$, $R_1 y = 0 = R_2 y$ nur trivial lösbar.
Beh.: Die Eigenfunktionen $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ lassen sich so normieren, dass gilt

$$\int_a^b y_n^2 r(x) dx = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Weiters bilden sie ein Orthogonalsystem:

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) r(x) dx = \delta_{nm} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: Funktionalanalysis. ■

Jede Funktion $y \in C^1([a,b];\mathbb{R})$, welche $R_1 y = R_2 y = 0$ erfüllt, lässt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)$ entwickeln, wobei $c_n := \int_a^b y(x) y_n(x) r(x) dx$. Diese Entwicklung heißt Fourierreihe, die c_n heißen Fourierkoeffizienten. Tatsächlich konvergiert die Reihe $\sum c_n y_n$ für jedes $y \in L^2(a,b)$ gegen y $[\![$Konvergenz in $L^2([a,b])]\!]$.

6.3.2 Exkurs: Spektraltheorie kompakter Operatoren

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein komplexer, separabler Hilbertraum mit Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Ein linearer Operator $A : H \to H$ heißt

(i) **selbstadjungiert**, falls $\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_H$, $\forall x, y \in H$

(ii) **beschränkt**, falls $\sup\limits_{0\neq x\in H} \frac{\|Ax\|_H}{\|x\|_H} < \infty$

(iii) **kompakt**, falls für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset H$ gilt:

$(Ax_n)_{n=0}^{\infty}$ hat eine konvergente Teilfolge

Aus der linearen Algebra verallgemeinern wir das Konzept des Eigenwertes: $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, falls

$$\ker(A - \lambda) = \{x \in H : (A - \lambda)x = 0\} \neq \{0\}$$

Die Elemente von $\ker(A - \lambda)$ heißen Eigenvektoren (EV), $\ker(A - \lambda)$ heißt Eigenraum zum Eigenwert λ. $\dim \ker(A - \lambda)$ heißt Vielfachheit von λ.

Lemma 6.14.
Vor.: Sei A selbstadjungiert
Beh.: Dann gilt:

(i) alle EW von A sind reell.

(ii) die EV zu verschiedenen EW sind orthogonal.

Beweis: Analog zu dem Beweis für Matrizen in der VO „Lineare Algebra". ■

Lemma 6.15.
Vor.: Sei A kompakt.
Beh.: Dann gilt:

(i) Es gibt nur abzählbar viele EW von A. Der einzige mögliche Häufungspunkt dieser EW ist $\lambda = 0$.

(ii) Jeder EW $\lambda \neq 0$ hat endliche Vielfachheit.

Beweis: Funktionalanalysis. ■

Satz 6.16. (*Spektralsatz für selbstadjungierte, kompakte Operatoren*):
Vor.: Sei A selbstadjungiert und kompakt.
Beh.: Dann gilt:
$\exists$ Folge $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ von reellen EW mit zugehörigen Eigenvektoren $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, die orthonormal sind. Zudem lässt sich jedes $x \in \operatorname{ran} A := \{Az : z \in H\}$ darstellen als $x = \sum_n \langle x, x_n \rangle_H x_n$. Falls $\overline{\operatorname{ran} A} = H$, dann bilden die Vektoren x_n eine Orthonormalbasis von H.

Beweis: Funktionalanalysis. ■

Satz 6.16a.

Vor.: Sei A selbstadjungiert und kompakt.
Beh.: Dann gilt:

(i) $\overline{\text{ran } A} + \ker A = H$

(ii) $\text{ran } A \perp \ker A$

(iii) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die (höchstens abzählbar vielen) Eigenwerte von A, die ungleich Null sind. Sie sind reell. Seien sie geordnet $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ und treten gemäß ihrer Vielfachheit mehrfach auf. Seien $x_1, x_2, \ldots$ die zugehörigen Eigenvektoren, die orthonormiert seien.
Dann gilt: $x \in \text{ran } A$ impliziert $x = \sum_n \langle x, x_n \rangle_H x_n$. ⟦konvergiert in H⟧

(iv) Der einzig mögliche Häufungspunkt der Eigenwerte λ_n ist Null.

(v) Wählt man eine ONB $(x'_n)_n$ von $\ker A$, so gilt:

$$x = \sum_n \langle x, x_n \rangle_H x_n + \sum_n \langle x, x'_n \rangle_H x'_n \qquad \forall x \in H.$$

(vi) $Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle_H x_n$

Beweis: Funktionalanalysis. ∎

Beispiel:

1) Sei $H = \mathbb{C}^d$ und A gegeben durch eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Dann gilt:

- A ist selbstadjungiert ⟦bedeutet: $\tilde{A} = \tilde{A}^H$⟧
- A ist kompakt ⟦Bolzano-Weierstrass⟧
  Aus der linearen Algebra folgt:

$$\mathbb{C}^d = \text{ran } A \oplus \ker \underbrace{A^H}_{=A} = \text{ran } A \oplus \ker A$$

2) Sei $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ eine ONB von H. Sei $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge. Dann gilt: $x \mapsto Ax := \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle_H e_n$ ist kompakt ⟦Diagonalisierungsargument⟧ und selbstadjungiert. Es ist $\ker A = \text{span}\{e_n : \lambda_n = 0\}$.

3) Seien $l_1, \ldots, l_d \in C([a, b]; \mathbb{R})$. Definiere auf $L^2(a, b)$ den Operator $f \mapsto Af \in L^2$ durch

$$(Af)(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^d l_i(x)\overline{l_i(t)} f(t) dt = \sum_{i=1}^d l_i(x) \int_a^b \overline{l_i(t)} f(t) dt = \sum_{i=1}^d l_i(x) \langle f, l_i \rangle_{L^2}$$

Dann gilt: A ist selbstadjungiert und kompakt.
Übung: $\ker A$ ist ∞-dimensional, A hat höchstens d nichttriviale Eigenwerte. ∎

∎

6.3.3 Anwendung des Spektralsatzes auf SLEWP

Mit $Ly := -(py')' + qy$ ist das SLEWP finde $(y, \lambda) \in (C^2([a, b]; \mathbb{R}) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, so dass

(6.10)
$$\begin{aligned} Ly &= \lambda r y \\ R_1 y = 0 &= R_2 y \end{aligned}$$

$L : C^2 \to C$ ist nicht kompakt. Damit ist die Theorie aus 6.3.2 nicht anwendbar. Allerdings wird sich zeigen, dass der Lösungsoperator kompakt ist. Sei

$$\mathcal{G} : C([a, b]; \mathbb{R}) \to C^2([a, b]; \mathbb{R})$$

der Lösungsoperator für

$$\begin{cases} Ly = f \\ R_1 y = 0 = R_2 y \end{cases}$$

Offensichtlich ist (6.10) äquivalent zu $y = \lambda \mathcal{G}(ry)$, was äquivalent ist zu $\frac{1}{\lambda} y = \mathcal{G}(ry)$.
⟦$\lambda = 0$ ist bei uns nicht zugelassen, da wir fordern, dass $Ly = 0, R_1 y = 0 = R_2 y$ nur trivial lösbar ist, was die Existenz von $\mathcal{G}$ impliziert.⟧
Um die Theorie des Abschnittes 6.3.2 zu verwenden, müssen wir einen komplexen Hilbertraum finden, in dem $\tilde{\mathcal{G}} : z \mapsto \mathcal{G}(rz)$ selbstadjungiert und kompakt ist. Wir wählen für H den Raum $L^2(a, b)$ mit der üblichen Identifizierung von Funktionen, die sich nur auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden. Es wird geschickt sein, $L^2(a, b)$ mit dem Innenprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2_r} := \int_a^b u(x) \overline{v}(x) r(x) dx$$

zu versehen. Nach Voraussetzung ist $r \in C([a, b]; \mathbb{R})$ positiv auf $[a, b]$. Die Norm $\|\cdot\|_{L^2_r}$ ist damit äquivalent zu $\|\cdot\|_{L^2}$.
Übung: $(L^2(a, b), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_r})$ ist ein Hilbertraum ∎

Lemma 6.17.
Vor.: Sei $Ly = 0, R_1 y = 0 = R_2 y$ nur trivial lösbar.
Beh.: Dann gilt: Der Operator $\tilde{\mathcal{G}} : z \mapsto \mathcal{G}(rz)$ erfüllt:

(i) $\tilde{\mathcal{G}}$ ist selbstadjungiert auf $(L^2(a, b), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_r})$.

(ii) $\tilde{\mathcal{G}}$ ist kompakt.

(iii) $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von $\tilde{\mathcal{G}}$.

(iv) Die Eigenpaare $(\lambda_n, y_n))_{n=0}^{\infty}$ von $\tilde{\mathcal{G}}$ erfüllen

  (a) $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}, \lambda_n \to 0$ für $n \to \infty$
  (b) Die Eigenfunktionen $y_n, n \in \mathbb{N}_0$, sind L^2_r-orthogonal und, nach Normierung, erfüllen $\langle y_n, y_m \rangle_{L^2_r} = \delta_{nm}$.
  (c) $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ ist ONB von $(L^2(a, b), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_r})$

(v) Die Paare $((\frac{1}{\lambda_n}, y_n))_{n=0}^{\infty}$ sind die Eigenpaare des SLEWP (6.10).

Beweis:

ad (i): Seien $f, g \in L^2(a,b)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\mathcal{G}} f, g \right\rangle_{L^2_r} &= \int_a^b (\tilde{\mathcal{G}} f)(x)\overline{g(x)} r(x) dx \\
&= \int_a^b (\mathcal{G}(rf))(x)\overline{g(x)} r(x) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b G(x,t) r(t) f(t) dt \right) \overline{g(x)} r(x) dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \int_a^b \underbrace{G(x,t)}_{\overset{\text{Satz 6.9}}{=} G(t,x) = \overline{G(t,x)}} \overline{g(x)}\, \underbrace{r(x)}_{\overline{r(x)}} dx\ r(t) f(t) dt \\
&= \int_a^b r(t) f(t) \overline{\mathcal{G}(gr)} dt = \left\langle f, \tilde{\mathcal{G}}(g) \right\rangle_{L^2_r}
\end{aligned}$$

ad (ii): Der Operator $\mathcal{G}$ (und damit auch $\tilde{\mathcal{G}}$) ist kompakt: Zuerst müssen wir den Operator $\mathcal{G}$, der bisher nur auf $C([a,b];\mathbb{R})$ definiert war, auf $L^2(a,b)$ definieren. Dazu definieren wir $\mathcal{G}$ auf L^2 punktweise durch

$$(\mathcal{G} f)(x) = \int_a^b G(x,t) f(t) dt$$

Weil $G \in C([a,b]^2)$ ⟦vgl. Übung 6.10.⟧ erhalten wir

(a) $|(\mathcal{G} f)(x)| \leq \int_a^b |G(x,t) f(t)| dt \leq \|G(x,\cdot)\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq \sqrt{b-a}\, \|G\|_{C([a,b]^2)} \|f\|_{L^2}$.
Daraus folgt, dass $\mathcal{G} : L^2 \to L^2$. ⟦sogar: $\mathcal{G} : L^2 \to L^\infty$⟧

(b) Für $f \in L^2(a,b)$ ist $\mathcal{G} f$ stetig: Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von G auf $[a,b]^2$ folgt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\left| G(x,t) - G(x',t) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x, x', t \text{ mit } \left| x - x' \right| \leq \delta,\ t \in [a,b]$$

Damit

$$\begin{aligned}
\left| Gf(x) - Gf(x') \right| &= \left| \int (G(x,t) - G(x',t)) f(t) dt \right| \\
&\leq \left\| G(x,\cdot) - G(x',\cdot) \right\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon \sqrt{b-a}\, \|f\|_{L^2} \text{ falls } \left| x - x' \right| \leq \delta
\end{aligned}$$

(c) Die Menge $M := \{\mathcal{G} f : f \in L^2 \text{ mit } \|f\|_{L^2} \leq 1\}$ ist gleichgradig stetig: Dies folgt aus den Argumenten von (b). Wegen (a) ist sie auch punktweise beschränkt. Arzelà-Ascoli liefert damit, dass $M \subset C([a,b])$ präkompakt ist.

(d) Aus (c) folgt, dass $\mathcal{G} : L^2 \to L^2$ ein kompakter Operator ist. ∎

Bemerkung: Um zu sehen, dass $\mathcal{G} : L^2 \to L^2$ kompakt ist, kann man auch zeigen, dass $\mathcal{G} : L^2 \to H^1$ und dann die kompakte Einbettung $H^1 \subset\subset L^2$ verwenden.⟦Blümlinger: Satz von Rellich–Kondrachov, 6.4.1⟧

$$H^1 = W^{1,2}(a,b) = \{u \in L^2(a,b) : u' \in L^2(a,b))\} \text{ ⟦Vgl. Blümlinger Satz 6.2.1⟧}$$

■

6.3.4 Ausgewählte Beweise für die Sätze 6.12, 6.13

Lemma 6.18.

Vor.: Sei $Ly = 0,\ R_1 y = 0 = R_2 y$ nur trivial lösbar. Seien $((\lambda_n, y_n))_{n=0}^{\infty}$ die Eigenpaare des SLEWP (6.10). Sei G die Greensche Funktion für das RWP

$$Ly = f,\ R_1 y = 0 = R_2 y$$

Beh.: Dann gilt:

(i) $\langle G(x,\cdot), y_n \rangle_{L^2_r} = \frac{1}{\lambda_n} y_n(x), \quad x \in (a,b)$

(ii) $\sum\limits_n \left| \frac{1}{\lambda_n} y_n(x) \right|^2 = \|G(x,\cdot)\|^2_{L^2_r} \leq (b-a)\, \|G\|^2_{C([a,b]^2)}\, \|r\|_{C([a,b])}$, falls zusätzlich die (y_n) L^2_r- orthonormal angenommen sind.

Beweis:

ad(i): Es ist $Ly_n = \lambda_n y_n r$. Dann gilt:

$$y_n(x) = (\mathcal{G}(\lambda_n r y_n))(x) = \int_a^b G(x,t)\lambda_n r(t) y_n(t) dt = \lambda_n \langle G(x,\cdot), y_n(\cdot) \rangle_{L^2_r}$$

ad(ii): Folgt aus (i) und der Tatsache, dass $(y_n)_n$ eine ONB von $(L^2(a,b), \langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2_r})$ ist. ■

Lemma 6.19.

Vor.: Seien $u, v \in C^2([a,b])$ und $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von u. Es sei

$$\frac{Lu}{u} \leq \frac{Lv}{v} \qquad \forall x \in (x_0, x_1) \text{ mit } v(x) \neq 0.$$

Beh.: Dann gilt: Genau einer der folgenden Fälle (i),(ii) tritt ein:

(i) $v = cu$ für ein $c \in \mathbb{R}$

(ii) v hat eine Nullstelle in (x_0, x_1)

Beweis: Es gelte nicht (ii). Z.z.: Es gilt (i). Weil $u,\ v \neq 0$ auf (x_0, x_1) angenommen ist, können wir o.B.d.A. $u > 0$, $v > 0$ auf (x_0, x_1) fordern. Die Annahme $u > 0$ auf (x_0, x_1) impliziert

$$u'(x_0) \geq 0 \quad \text{ und } \quad u'(x_1) \leq 0.$$

Dann folgt auf (x_0, x_1) :

$$0 \leq uLv - vLu \underset{\text{Lagrangeidentität}}{=} \Bigg(\underbrace{p(u'v - uv')}_{=:W}\Bigg)'$$

also ist

$$\begin{aligned}
&W' \geq 0 \text{ auf } [x_0, x_1] \\
&W(x_0) = p(x_0)u'(x_0)v(x_0) \geq 0 \\
&W(x_1) = p(x_1)u'(x_1)v(x_1) \leq 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow W \equiv 0$ auf $[x_0, x_1]$

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - u'v}{u^2} = \frac{-W}{pu^2} = 0$$

Das heißt $v = cu$ für ein $c \in \mathbb{R}$. ∎

Satz 6.20.
Vor.: Sei $Ly = 0,\ R_1 y = 0 = R_2 y$ nur trivial lösbar.
Beh.: Dann gilt:

(i) Alle EW λ_n des SLEWP (6.10) sind reell und einfach.

(ii) $\lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$

(iii) Die zugehörigen Eigenfunktionen y_n sind L^2_r- orthogonal und können L^2_r orthonormiert werden.

(iv) Jedes $y \in L^2(a, b)$ kann geschrieben werden als $y = \sum\limits_n \langle y, y_n\rangle_{L^2_r} y_n$
[[Konvergenz in L^2_r]].

(v) Für $y \in C^2([a, b]),\ R_1 y = 0 = R_2 y$ gilt $y(x) = \sum\limits_n \langle y, y_n\rangle_{L^2_r} y_n(x)$, und die Reihe konvergiert gleichmäßig in $x \in [a, b]$.

(vi) Zwischen 2 Nullstellen von y_n liegt eine Nullstelle von y_{n+1}.

Beweis:

ad (i): Wir zeigen, dass die EW einfach sind. [[Reell wurde bereits in Lemma 6.17 gezeigt]]
Annahme, es gibt zwei l.u. Eigenpaare (y, λ), (v, λ) des SLEWP (6.10).

1. Schritt: Behauptung: es gibt eine Linearkombination $z = y + \beta v$ oder $z = v + \beta y$, $\beta \in \mathbb{R}$, so daß $z(a) = z'(a) = 0$.
1. Fall: $\alpha_1 \neq 0$: Falls $v'(a) = 0$, dann folgt wegen $R_1 v = 0$, daß auch $v(a) = 0$ und $z = v$ leistet das Gewünschte. Falls $v'(a) \neq 0$, dann wähle $\beta \in \mathbb{R}$, so daß $z := y + \beta v$ die Bedingung $z'(a) = 0$ erfüllt. Wegen $R_1 z = 0$ folgt dann auch $z(a) = 0$.
2. Fall: $\alpha_1 = 0$: Dann ist $v'(a) = y'(a) = 0$. Falls $v(a) = 0$, dann wähle $z = v$. Falls $v(a) \neq 0$, dann wähle $\beta \in \mathbb{R}$, so daß $z := y + \beta v$ die Bedingung $z(a) = 0$ erfüllt.

2. Schritt: Die Funktion z aus dem ersten Schritt erfüllt

$$\begin{aligned} Lz &= \lambda z \\ R_1 z &= 0 \\ \alpha_1 z(a) - \alpha_2 p(a) z'(a) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen der Eindeutigkeit von AWP, dass $z = 0$. Widerspruch!

ad (v): Sei $y \in C^2([a,b])$ mit $R_1 y = 0 = R_2 y$. Dann gilt:

$$y = \sum_n \langle y, y_n \rangle_{L^2_r} y_n \qquad [\![\text{konvergiert in } (L^2(a,b), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_r})]\!]$$

Sei $x \in [a,b], m, m' \in \mathbb{N}_0$ Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{m'} \langle y, y_n \rangle_{L^2_r} y_n(x) \right|^2 &= \left| \sum_{n=m}^{m'} \langle y, y_n \rangle_{L^2_r} \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n} y_n(x) \right) \right|^2 \\ &\le \sum_{n=m}^{m'} \left| \underbrace{\langle y, y_n \rangle_{L^2_r} \lambda_n}_{= \langle y, L y_n \rangle_{L^2} = \langle L y, y_n \rangle_{L^2}} \right|^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=m}^{m'} \left| \frac{1}{\lambda_n} y_n(x) \right|^2}_{\le (b-a) \|G\|^2_{C([a,b]^2)} \|r\|_{C([a,b])} [\textit{Lemma } 6.8]} \\ &\le \sum_{n=m}^{\infty} |\langle L y, y_n \rangle_{L^2}|^2 \cdot \underbrace{(b-a) \|G\|^2_{C([a,b]^2)} \|r\|_{C([a,b])}}_{=C} \to 0 \text{ für } m \to \infty \end{aligned}$$

$[\![\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ly, y_n \rangle_{L^2}|^2$ konvergiert, denn $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ly, y_n \rangle_{L^2}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \frac{1}{r} Ly, y_n \right\rangle_{L^2_r} \right|^2 = \left\| \frac{1}{r} Ly \right\|^2_{L^2_r}]\!]$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \langle y, y_n \rangle_{L^2_r} y_n(x)$ gleichmäßig in x. Der Limes muss y sein.

ad (vi): Folgt aus Lemma 6.19 mit $u = y_n$ und $v = y_{n+1}$, denn $\frac{Lu}{u} = \lambda_n < \lambda_{n+1} = \frac{Lv}{v}$. ■

6.3.5 2 Beispiele für Separationstechniken bei PDEs

Beispiel 1: Ziel: Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf } \Omega = (0,\pi)^2 \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\text{mit } -\Delta u(x,y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) \right) \text{ und gegebener Funktion } f.$$

Schritt 1: Löse das EWP

$$\begin{aligned} Lu = -\Delta u &= \lambda u \qquad \text{auf } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

Schritt 2: Separationsansatz

$$u(x,y) = v(x)w(y)$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
&-\left(v''(x)w(y) + v(x)w''(y)\right) \stackrel{!}{=} \lambda v(x)w(y) \\
\Rightarrow &-\left(\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)}\right) \stackrel{!}{=} \lambda \\
\Rightarrow &\quad \underbrace{-\frac{v''(x)}{v(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} \quad \stackrel{!}{=} \quad \underbrace{\lambda + \frac{w''(y)}{w(y)}}_{\text{hängt nur von } y \text{ ab}} \\
\Rightarrow &\exists \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}: \ -\frac{v''(x)}{v(x)} = \tilde{\lambda} = \lambda + \frac{w''(y)}{w(y)}
\end{aligned}$$

Nun werden die beiden Probleme getrennt gelöst:

(i) $-v''(x) - \tilde{\lambda} v(x) = 0$
$\Rightarrow v(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\tilde{\lambda}} x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\tilde{\lambda}} x\right)$

(ii) $(\tilde{\lambda} - \lambda)w(y) - w''(y) = 0$
$\Rightarrow w(y) = \tilde{c}_1 \sin\left(\sqrt{\lambda - \tilde{\lambda}}\, y\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\sqrt{\lambda - \tilde{\lambda}}\, y\right)$

Die Randbedingung besagt, dass wir $v(0) = v(\pi) \stackrel{!}{=} 0$ fordern sollten,
$\Rightarrow c_2 = 0$ und (um nichttriviale Lösungen zu erhalten)

$$\sqrt{\tilde{\lambda}} = n, \ n \in \mathbb{N}, \text{ d.h. } \tilde{\lambda} = n^2$$

Die Randbedingung bei $y = 0$ und $y = \pi$ liefert nun für w:

$$w(0) = 0 = w(\pi), \Rightarrow \tilde{c}_2 = 0 \text{ und } \sqrt{\lambda - \tilde{\lambda}} \stackrel{!}{=} m \in \mathbb{N}$$
$$\text{d.h. } \lambda = m^2 + \tilde{\lambda} = m^2 + n^2$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} &u(x,y) = v(x)w(y) = \sin(nx)\cdot\sin(my) \text{ ist Lösung von} \\ &\quad -\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega \\ &\qquad u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{+}$$

mit $\lambda = n^2 + m^2$.
Normieren liefert Eigenpaare

$$(u_{n,m}, \lambda_{n,m}) := \left(\frac{2}{\pi}\sin(nx)\cdot\sin(my), n^2+m^2\right)$$

für das EWP (+).

Schritt 3: Beobachtung: Die Funktionen $(u_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ bilden eine ONB von $L^2(0,\pi)^2$. Wir können also f aus $(*)$ schreiben als

$$f = \sum_{n,m} f_{n,m}u_{n,m}, \quad f_{n,m} = \langle f, u_{n,m}\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Zum Lösen von $(*)$ machen wir den Ansatz

$$u = \sum_{n,m} \tilde{u}_{n,m}u_{n,m} \quad \text{für zu bestimmende Koeffizienten } \tilde{u}_{n,m} \in \mathbb{R}$$

$$\text{also: } -\Delta u \overset{!}{=} f = \sum_{n,m} f_{n,m}u_{n,m}$$

$$\text{wobei: } -\Delta u = -\Delta\left(\sum_{n,m}\tilde{u}_{n,m}u_{n,m}\right) = \sum_{n,m}\tilde{u}_{n,m}(-\Delta u_{n,m}) \overset{(+)}{=} \sum_{n,m}\tilde{u}_{n,m}\lambda_{n,m}u_{n,m}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir nun:

$$\tilde{u}_{n,m} = \frac{f_{n,m}}{\lambda_{n,m}} = \frac{f_{n,m}}{n^2+m^2}$$

also ist die gesuchte Lösung

$$u = \sum_{n,m}\frac{f_{n,m}}{n^2+m^2}u_{n,m}$$

Beispiel 2: Ziel: Finde $u = u(t,x,y)$ so dass

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u\right) = 0 && \text{für } (t,x,y) \in (0,\infty)\times(0,\pi)^2 \\ &u(t,x,y) = 0 && \text{für } t>0,\ (x,y)\in\partial(0,\pi)^2 \\ &u(0,x,y) = u_0(x,y) && \forall (x,y)\in(0,\pi)^2 \end{aligned}$$

für eine gegebene Funktion u_0. ⟦Wärmeleitungsgleichung⟧
Seien $(u_{n,m}, \lambda_{n,m})$ die Eigenpaare von Beispiel 1.
Ansatz:

$$u(t,x,y) = \sum_{n,m}\tilde{u}_{n,m}(t)u_{n,m}(x,y)$$

Einsetzen dieses Ansatzes liefert:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial t}u - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u\right) = \sum_{n,m} \left(\tilde{u}'_{n,m}(t) + \tilde{u}_{n,m}(t)\lambda_{n,m}\right) u_{n,m}(x,y)$$

weil $(u_{n,m})$ ONB von $L^2(0,\pi)^2$ ist, muss also gelten

$$\begin{aligned} &\tilde{u}'_{n,m}(t) + \lambda_{n,m}\tilde{u}_{n,m}(t) = 0 \quad \forall t > 0 \\ \Rightarrow &\tilde{u}_{n,m}(t) = \hat{u}_{n,m}e^{-\lambda_{n,m}t} \end{aligned}$$

Entwickeln der Anfangsbedingung $u_0(x,y)$ in der ONB $(u_{n,m})_{n,m}$ liefert

$$u_0(x,y) = \sum_{n,m} \langle u_0, u_{n,m}\rangle_{L^2(0,\pi)^2}\, u_{n,m}$$

und damit folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\hat{u}_{n,m} = \langle u_0, u_{n,m}\rangle_{L^2(0,\pi)^2}$$

Die Lösung des Problems ist damit

$$u(t,x,y) = \sum_{n,m} \langle u_0, u_{n,m}\rangle_{L^2(0,\pi)^2}\, e^{-\lambda_{n,m}t}u_{n,m}(x,y)$$

KAPITEL

SIEBEN

Grundzüge der Charakteristikenmethode

Eine weitere Möglichkeit, ODE-Techniken für partielle Differentialgleichungen (PDEs) zu verwenden, ist die Charakteristikenmethode.

7.1 Lineare Gleichungen

Betrachte $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, welches

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) = c(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \tag{7.1}$$

löst. Hier sind $u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$, $u_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ und a, b, c hinreichend glatte, reellwertige Funktionen.
Bemerkung: Lösungen sind nicht eindeutig (mit u ist auch $u + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung) ■
Um ODE-Techniken zu verwenden, betrachten wir die Lösung u auf einer Kurve, die in Ω verläuft.
Sei die Kurve beschrieben durch

$$\{(x(s), y(s)) : \ s \in I \subset \mathbb{R}\}$$

Dann gilt für die Funktion

$$\begin{aligned}
&z(s) := u(x(s), y(s)) : \\
&z'(s) = u_x(x(s), y(s)) \cdot x'(s) + u_y((x(s), y(s)) \cdot y'(s)
\end{aligned}$$

Um die PDE (7.1) verwenden zu können, betrachten wir nur Kurven, für die gilt:

$$\begin{aligned}
x'(s) &= a(x(s), y(s)) \\
y'(s) &= b(x(s), y(s))
\end{aligned} \tag{7.2}$$

damit ergibt sich aus (7.1)

$$z'(s) = a(x(s), y(s))u_x(\dots) + b(x(s), y(s))u_y(\dots) = +c(x(s), y(s)).$$

Das motiviert, die *charakteristischen Gleichungen* von (7.1) zu definieren:

$$\begin{aligned}
x' &= a(x,y) \\
y' &= b(x,y) \\
z' &= c(x,y)
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Die entsprechenden Bahnkurven heißen Charakteristiken. Die Projektionen der Kurve $\{(x(s), y(s), z(s) : s \in I\}$ in die $x-y-$Ebene, d.h. die Kurve $\{(x(s), y(s)) : s \in I\}$ heißt die projizierte Charakteristik (oft verkürzt: "Charakteristiken")

Beispiel 7.1. Sei $a \in \mathbb{R}$

$$au_x + u_y = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} x' &= a \\ y' &= 1 \\ z' &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x(s) &= as + x_0 \\ y(s) &= s + y_0 \\ z(s) &= z_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ay - x = \text{const.}$$

D.h. die projizierten Charakteristiken sind Geraden der Form $\{(x, y) : ay - x = \text{const}\}$.
Auf diesen Geraden ist $z(s) = u(x(s), y(s))$ konstant. Damit hat die Lösung $(x, y) \mapsto u(x, y)$ die Form $u(x, y) = f(x - ay)$ für eine Funktion f. Projizierte Charakteristiken sind Geraden mit Steigung $\frac{1}{a}$. Auf diesen Geraden ist die Lösung u konstant. [[wenn f glatt ist, dann erfüllt $u(x, y) = f(x - ay)$ tatsächlich $au_x + 1u_y = af'(x - ay) + (-a)f'(x - ay) = 0$]] ∎

Beispiel 7.2. Wir betrachten

$$\begin{aligned} au_x + u_y &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) &\stackrel{!}{=} u_0(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

für gegebene Funktion u_0.
Um die Lösung mittels des Charakteristikenverfahren zu bestimmen, parametrisieren wir die Kurve $\Gamma = \{(r, 0) : r \in \mathbb{R}\}$ und lösen das AWP:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial s} x(s, r) &= a, \quad x(0, r) = r \\ \tfrac{\partial}{\partial s} y(s, r) &= 1, \quad y(0, r) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(s, r) &= as + r \\ y(s, r) &= s \end{aligned}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial s} z(s, r) = 0, \quad z(0, r) = u_0(r)$$

Wenn wir nun $u(\tilde{x}, \tilde{y})$ wissen wollen, müssen wir das Paar (s, r) so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} x(s, r) &= \tilde{x} \\ y(s, r) &= \tilde{y} \end{aligned}$$

und anschließend $z(s, r)$ $(= u_0(r))$ auswerten.
Also: $\left.\begin{aligned} \tilde{x} &= as + r \\ \tilde{y} &= s \end{aligned}\right\} \Rightarrow r = \tilde{x} - a\tilde{y}, \ s = \tilde{y}$
Das heißt: $z(s, r) = u_0(r) = u_0(\tilde{x} - a\tilde{y})$, das heißt $u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u_0(\tilde{x} - a\tilde{y})$. ∎

Zusammenfassung:
Zum Lösen von $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y), u = g$ auf Γ, wobei Γ eine vorgegebene Kurve und g eine gegebene Funktion auf Γ ist kann man so vorgehen:

1. Parametrisieren $\Gamma : \Gamma = \{(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r)) : r \subset I\}$

2. Aufstellen der charakteristischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}x(s,r) &= a(x,y), \quad x(0,r) = x_\Gamma(r)\\
\frac{\partial}{\partial s}y(s,r) &= b(x,y), \quad y(0,r) = y_\Gamma(r)\\
\frac{\partial}{\partial s}z(s,r) &= c(x,y), \quad z(0,r) = g(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r))
\end{aligned}$$

3. Um $u(\tilde{x},\tilde{y})$ zu erhalten, bestimmt man (s,r) so, dass

$$\begin{cases} \tilde{x} = x(s,r) \\ \tilde{y} = y(s,r) \end{cases} \tag{7.5}$$

und erhält $u(\tilde{x},\tilde{y}) = u(x(s,r), y(s,r)) = z(s,r)$.

Funktioniert das immer? Offensichtlich ist entscheidend, dass man das (nichtlineare) Gleichungssystem (7.5) für (s,r) bei gegebenem $(\tilde{x},\tilde{y})$ lösen kann. Eine Minimalforderung wird sein, zumindest in der Nähe von Γ (d.h. $|s|$ klein) lösen zu können. Damit für $(\tilde{x},\tilde{y})$ "nahe"bei Γ das System (7.5) lösbar ist, wird man fordern, dass die Funktion

$$(s,r) \mapsto F(s,r) := \begin{pmatrix} x(s,r) \\ y(s,r) \end{pmatrix}$$

die folgende Bedingung erfüllt: $(Df)(0,r)$ ist invertierbar (vgl. Satz über implizite Funktionen). Es ist

$$\begin{aligned}
Df(0,r) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s}x(0,r) & \frac{\partial}{\partial r}x(0,r) \\ \frac{\partial}{\partial s}y(0,r) & \frac{\partial}{\partial r}y(0,r) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r)) & \frac{\partial}{\partial r}x(0,r) \\ b(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r)) & \frac{\partial}{\partial r}y(0,r) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also bedeutet die Bedingung für Invertierbarkeit von $Df(0,r)$ geometrisch, dass der Tangentialvektor an Γ (das heißt $\left(\frac{\partial}{\partial r}x(0,r), \frac{\partial}{\partial r}y(0,r)\right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial r}x_\Gamma(r), \frac{\partial}{\partial r}y_\Gamma(r)\right)^T$) und der Tangentialvektor der projizierten Charakteristik auf der Kurve Γ sollten l.u. sein. Dies motiviert

Definition 7.3. Die Kurve $\Gamma = \{(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r)) : r \in I\}$ ist nicht-charakteristisch im Punkt $(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r)) \in \Gamma$, falls die Tangente dort l.u. vom Vektor $(a(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r)), b(x_\Gamma(r), y_\Gamma(r))$ ist. Die Kurve Γ heißt nicht-charakteristisch, falls sie in jedem Punkt nicht-charakteristisch ist.

Bemerkung: Was passiert, wenn man die Randbedingung auf einer Kurve Γ vorgibt, die charakteristisch ist?

1. Man kann die Lösung u nicht außerhalb von Γ bestimmen.

2. Der "Randwert"$g = u|_\Gamma$ kann nicht beliebig gewählt werden.

■

Beispiel:

$$\begin{aligned}
au_x + u_y &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2, \quad a > 0\\
u &= g \quad \text{auf } \Gamma
\end{aligned}$$

wobei $\Gamma = \{(r, \frac{1}{a}r) : r \in \mathbb{R}\}$.
Dann ist Γ charakteristisch! Die Charakteristischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}x(s,r) = a), &\quad x(0,r) = r \\
\frac{\partial}{\partial s}y(s,r) = 1, &\quad y(0,r) = \frac{r}{a} \\
\frac{\partial}{\partial s}z(s,r) = 0, &\quad z(0,r) = g(r, \frac{r}{a})
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
x(s,r) &= as + r \\
y(s,r) &= s + \frac{r}{a} \\
z(s,r) &= g(r, \frac{r}{a})
\end{aligned}$$

Beobachtung: Für jedes feste r ist $\{(x(s,r), y(s,r)) : s \in \mathbb{R}\}$ eine Parametrisierung von $\Gamma = \{(r, \frac{r}{a}) : r \in \mathbb{R}\}$. Insbesondere ist für $(\tilde{x}, \tilde{y}) \notin \Gamma$ und das Gleichungssystem

(7.6)
$$\begin{cases} x(s,r) = \tilde{x} \\ y(s,r) = \tilde{y} \end{cases}$$

nicht lösbar. Weiters ergibt sich, dass die Lösung u auf der projizierten Charakteristik Γ konstant sein muss, d.h. g muss auf Γ konstant sein. ∎

STICHWORTVERZEICHNIS