A 8.7.2

Geg.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 1 \\ -8 & 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ges.: Ähnliche Matrizen in Jordan-Normalform

- $\det(A - XE_4) = \det\begin{pmatrix} 0-X & 1 \\ -4 & 4-X \end{pmatrix}^2 = (X-2)^4$,

$\operatorname{Ker}(A - 2E_4) = \operatorname{ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$,

$\Rightarrow \operatorname{def}(A - 2E_4) = 2$

$\operatorname{Ker}(A - 2E_4)^2 = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_4) \Rightarrow \operatorname{def}(A - 2E_4)^2 = 4$

$\Rightarrow A \approx \operatorname{diag}(J_2(2), J_2(2))$

- $\det(B - XE_4) = \det\begin{pmatrix} -1-X & 1 \\ -9 & 5-X \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X-2 & 0 \\ 0 & X-2 \end{pmatrix}$
$= (X-2)^4$

$\operatorname{Ker}(B - 2E_4) = \operatorname{ker}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3, e_4\right]$

$\Rightarrow \operatorname{def}(B - 2E_4) = 3$

$\Rightarrow B \approx \operatorname{diag}(J_1(2), J_1(2), J_2(2))$

Zz: Characteristische / Annullator-Polynome von A, B gleich

1) $\chi_A(X) = (X-2)^4 = \chi_B(X)$

2) $\mu_A(X) = (X-2)^2 = \mu_B(X)$

Zz.: $A \not\approx B$

Jordan-Normalformen nicht ähnlich (vgl. Satz 8.7.7).

A 8.7.11 Gg.: $\operatorname{Char} K = 0$, $f \in L(V)$, χ_f zerfällt in Linearfaktoren (über K), $\exists k \in \mathbb{N}^\times : f^k = \mathrm{id}_V$

Zz.: f einfach strukturiert

Sei B Basis v. V, sodass
$\langle B^*, f(B)\rangle = \operatorname{diag}(C_1, \dots, C_r)$, wobei für $i = 1, \dots, r$,
$C_i = \operatorname{diag}(J_{m_1^i}(t_i), \dots, J_{m_1^i}(t_i), \dots, J_{m_p^i}(t_i), \dots)$
und $t_1, \dots, t_r$ EW v. f.

Ww.: $\exists k \in \mathbb{N}^\times : \langle B^*, f(B)\rangle = E_{\dim V}$;
$\forall M_1, \dots, M_n$ Matrizen: $\operatorname{diag}(M_1, \dots, M_n)^k = \operatorname{diag}(M_1^k, \dots, M_n^k)$.

IS. $J_m(t)^{k+1} = J_m(t)^k J_m(t)$

$$= \begin{pmatrix} t^k & \binom{k}{k-1} t^{k-1} & \\ & t^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & \ddots & 1 \\ & & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{k+1} & \binom{k+1}{k} t^k & \\ & t^{k+1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

weil $t^k + \binom{k}{k-1} t^k = \underbrace{\left(\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right)}_{\binom{k+1}{k}} t^k$.

$\Rightarrow$ Alle Jordan-Kästchen haben Größe 1

$\Rightarrow$ $\langle B^*, f(B)\rangle$ ist Diagonalmatrix

A 8.7.12 Zz.: $\nexists A \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \; A^2 = J_2(-1)$

d.h. $\forall A \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \; A^2 \neq J_2(-1)$

Sei $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+w) \\ z(x+w) & yz + w^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 + yz &= -1 \\ yz + w^2 &= -1 \\ y(x+w) &= 1 \\ z(x+w) &= 0 \end{aligned}$$

Fall 1. $z = 0. \Rightarrow x, w = i \notin \mathbb{R}$ ↯

Fall 2. $x = -w. \Rightarrow 1 = y(x+w) = 0$ ↯

A 8.7.14 Geg.: $f \in L(V)$, $m \in \mathbb{N}$.

Ges.: Beispiele für und gegen:

(a) $\{ x \in V : x \text{ HV v. } f \} \leq V$, f-inv.

- Wenn f nur einen EW t hat, dann gilt dies für $V_f(t)$ (vgl. Satz 8.7.4). Oder, betrachte $f = id_V$.

- Seien $t_1, \dots, t_m$ EW v. f, dann ist die Menge oben $= \bigcup_{i=1}^{m} V_f(t_i)$.

Betrachte $\langle E^*, f(E) \rangle := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit $EW_f = \{1, 2\}$.

Die ER sind $[e_1]$ bzw. $[e_2]$, weil

$\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 1 E_2 \right) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [e_1]$,

$\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 E_2 \right) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [e_2]$.

Aber $\forall i \in \mathbb{N}^\times : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

und $V_f(1) \cup V_f(2) = [e_1] \cup [e_2] \not\leq V$

(b) $\{ \cdots \text{stufe}(x) \leq m \} \cdots$ (siehe (a))

(c) $\{ \cdots \text{stufe}(x) = m \} \cdots$ (siehe (a))

(d) $\mathcal{O}$ ist HV v. f

- siehe (a)

- Betrachte $\langle E^*, f(E) \rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die Drehung um $90°$. Sie hat keine HV.

(e) $\forall x$, HV v. f, $\text{stufe}(x) = m$: $f^m(x) = \emptyset$

- siehe (d) ($\forall$ automatisch wahr)

- Betrachte $f = id_V$

A 8.8.1 Gg.: $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{\mathbb{C}}^{4\times 1} = \mathbb{C}^{4\times 1}$,

$$a = \begin{pmatrix} i-1 \\ 0 \\ i \\ i-1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$U := [a, b]_{\mathbb{C}}, \; T := [c, d]_{\mathbb{C}}$;

Zz.: $\overline{U} = T$

„$\supseteq$": Wir setzen an, mit $c_1 \overline{a} + c_2 \overline{b} = c \Rightarrow$

$c_1(-i-1) = 1+i \Rightarrow c_1 = -1$

$c_2(-i-1) = 2 \Rightarrow c_2 = -1+i$

$-c_1 i - c_2 = 1$ ✓

$c_1(-i-1) = 1+i$ ✓

Der Rest geht analog.

Ges.: reelle Basen von:

$$U + T = \begin{bmatrix} i-1 & 0 & 1+i & 1 \\ 0 & i-1 & 2 & -i \\ i & -1 & 1 & 0 \\ i-1 & 0 & 1+i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$U \cap T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, weil $\underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim T}_{2} = \underbrace{\dim(U+T)}_{3} + \dim(U \cap T)$

$\Rightarrow \dim(U \cap T) = 1$ und

$$a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(i-1); \; c - di = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist $U \leq \mathbb{R}^{4\times 1}$?

Dazu müsste $U = \overline{U}$:

$$U = \left[\begin{pmatrix} i-1 \\ 0 \\ i \\ i-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \neq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \overline{U}.$$

A 8.8.2 Geg.: $U \leq \mathbb{R}_{\mathbb{C}}^{6\times 1} = \mathbb{C}^{6\times 1}$, $\dim U = 3, 4$

Ges.: Mögliche Lagen von $U, \overline{U}$, mit Beispielen.

Sei $(a_j + ib_j)_{j\in J}$ l.u., dann ist trivial:

$$0 = \sum_{j\in J} x_j (a_j + ib_j) = \sum_{j\in J} x_j a_j + i \sum_{j\in J} x_j b_j$$

Genauso aber auch

$$0 = \overline{0} = \overline{\sum_{j\in J} x_j (a_j + ib_j)} = \sum_{j\in J} x_j a_j - i \sum_{j\in J} x_j b_j.$$

$\Rightarrow \dim U = \dim \overline{U}$.

Nun gilt $\dim U + \dim \overline{U} = \dim (U + \overline{U}) + \dim (U \cap \overline{U})$.

Fall 1. $\dim U = 3$

$\dim(U+\overline{U})$	0	1	2	3	4	5	6
$\dim(U\cap\overline{U})$	6	5	4	3	2	1	0
				a	b	c	d

(a) $U = \overline{U} = [e_1, e_2, e_3]$

(b) $U = [e_1, e_2, e_6 + ie_3] \Rightarrow \overline{U} = [e_1, e_2, e_6 - ie_3]$

(c) $U = [e_1, e_3 + ie_2, e_6 + ie_3] \Rightarrow$
$\overline{U} = [e_1, e_3 - ie_2, e_6 - ie_3]$

(d) ...

Fall 2. ...

A 8.8.5 Zz.: $\exists f \in L(\mathbb{R}^{3\times 1}, \mathbb{R}^{3\times 1})$:

$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$ EV v. $f_{\mathbb{C}}$ mit EW $0, i,$ bzw. $-i$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & i & -i \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & \underbrace{-1}_{} & 1 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} & E_3 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} \langle E^*, f(E)\rangle$$

usw.

$\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix} \cdot i$

$$\chi_f(X) = -X^3 - X = \chi_{f_{\mathbb{C}}}(X)$$

A 8.8.10 Gg.: $a, b \in \mathbb{R}_{\mathbb{C}}^{4\times 1} = \mathbb{C}^{4\times 1}$, $T := [a, b]_{\mathbb{C}}$,

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

(a) Zz.: $T \oplus \overline{T} = \mathbb{C}^{4\times 1}$

Ww.: $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{T}$, und

$(a, b, \overline{a}, \overline{b}) \mapsto E_4 \Rightarrow T + \overline{T} = \mathbb{C}^{4\times 1}$

Ww.: $\dim(T \cap \overline{T}) + \underbrace{\dim(T + \overline{T})}_{4} = \underbrace{\dim T}_{2} + \underbrace{\dim \overline{T}}_{2}$

$\Rightarrow T \cap \overline{T} = \{\mathcal{O}\}$

(b) Ges.: $\langle E^*, p(E)\rangle$, mit $p: \begin{cases} \mathbb{C}^{4\times 1} \to \mathbb{C}^{4\times 1} \\ x = \underbrace{t_1}_{\in T} + \underbrace{t_2}_{\in \overline{T}} = t_1 \end{cases}$

$$\frac{\begin{matrix} a & b & \overline{a} & \overline{b} \end{matrix}}{\begin{matrix} a & b & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{matrix}} \mapsto \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i & & \\ i & 1 & & \mathcal{O} \\ & & 1 & -i \\ & \mathcal{O} & i & 1 \end{pmatrix}}^{E_4} \Bigg\} \langle E^*, p(E)\rangle$$

(c) Zz.: $\forall x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : [x, p(x)]_{\mathbb{C}} \leq \mathbb{R}^{4\times 1}$

Sei $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, dann $x = \overline{x}$ und

$p(x) = 1/2 \left(x + i \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$.

$(x, p(x)) \mapsto (\overline{x}, \overline{p(x)}) \Rightarrow [x, p(x)] = \overline{[x, p(x)]}$

Nun, betrachte Satz 8.8.11.