Die 11. Übung am 15. 11. von Gruppe 5 (Kol. Brauner) wird auf 16:30 - 18:00 in den SEM 138A verlegt!

Übungen zu Analysis 1, 10. Übung 8. 1. 2019

101. Sei für $s \geq 0 \quad \lfloor s \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq s\}$. Untersuchen Sie die Funktion

$$\Psi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Für welche Werte der Parameter a, b hat die Funktion

$$\Phi : (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} a\frac{\sin x}{x} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ bx \cot x & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

eine stetige Fortsetung auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$? Verwenden Sie dabei keine Differentialrechnung.

102. Sei f stetig auf $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} = b, \quad \lim_{x\to-\infty} = a$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ beschränkt und gleichmäßig stetig ist.

103. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 mit $f(0) = 0$. Es gelte $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Zeigen Sie: f ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

104. Zeigen Sie: Sind $f, g\ (X, d) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $x \mapsto \min(f(x), g(x))$ stetig. Sind f, g gleichmäßig stetig, so ist $\min(f, g)$ gleichmäßig stetig.

105. Ist der gleichmäßige Grenzwert einer Folge reellwertiger gleichmäßig stetiger Funktionen auf einem metrischen Raum (X, d) eine gleichmäßig stetige Funktion?

106. Zeigen Sie: Für zwei Nullfolgen $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_m, y_n \neq 0$ gilt

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^2}{x_m^2 + y_n^2} \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{y_n^2}{x_m^2 + y_n^2}$$

und erklären Sie warum dies kein Widerspruch zu Lemma 6.6.12 ist.

107. Zeigen Sie:

$$\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\arccos\alpha + \arccos\beta = \arccos\left(\alpha\beta - \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\right).$$

108. Für $a, b > 0$ bezeichnen $\log_a, \log_b$ die Umkehrfunktionen der Funktionen $x \mapsto a^x, x \mapsto b^x$. Zeigen Sie:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y); \qquad \frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x.$$

109. Sei für $n \in \mathbb{N}_0, x \in [-1, 1]$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

Berechnen Sie $T_0, T_1, T_2, U_0, U_1, U_2$ und zeigen Sie, dass T_n, U_n Polynome n-ten Grades sind, die den Identitäten

$$T_{n+1}(x) = T_n(x)x - U_{n-1}(1 - x^2), \qquad U_n = xU_{n-1} + T_n$$

genügen, die für n gerade gerade und für n ungerade ungerade sind. (Ein Polynom p heißt gerade (ungerade) wenn $p(x) = p(-x)$ ($p(-x) = -p(x)$) gilt.) und berechnen Sie die Koeffizienten der höchsten Potenzen dieser Polynome.

Hinw.: Zeigen Sie die Behauptungen durch Induktion.

110. Zeigen Sie ohne Verwendung der Exponentialfunktion oder der Logarithmusfunktion, also nur mit Def . 2.9.9, Lemma 2.9.10 und nachfolgenden Rechenregeln, dass für $a > 0$ die Abbildung $x \to a^x$ monoton auf $\mathbb{Q}$ ist. Zeigen Sie, dass diese Abbildung stetig und auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{Q}$ gleichmäßig stetig ist. Folgern Sie daraus, dass es eine eindeutige stetige Fortsetung dieser Funktion von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ gibt.

Hinw.: Für die Stetigkeit verwenden Sie die Monotonie und den binomischen Lehrsatz.