2.2.12 Lemma. Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $|x| = \operatorname{sgn}(x)x$.

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iii) $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(v) $|x+y| \geq ||x| - |y||$.

Beweis. (i) und (ii) bzw. (iii) folgen ganz leicht, wenn man die Fälle $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ bzw. $x \leq y$ und $x > y$ unterscheidet. (i) sgn(x) heißt „Vorzeichen von x". Fall 1: $x \geq 0$: $|x| = x$, weil x kein Vorzeichen hat. Fall 2: $x < 0$: sgn(x) ist Negativ, also $-x = |x|$. (ii) Fall 1: $x, y > 0$: OK. Fall 2: $x, y < 0$: OK. Fall 3: $x < 0 \wedge y > 0$ und umgekehrt: OK. (iii) Fall 1: $x \leq y$: Fall 1a: $x = y$: $|x-y| = 0$ und fällt weg. $\frac{x+y}{2} = x = y = \max(x,y)$. Fall 1b: $x < y$: Um die Betragstriche zu entfernen, muss man mit einem $-$ vorbeugen, also $|x-y| \to -(x-y) = y-x$. $\frac{x+y+y-x}{2} = y$. Fall 2: $x > y$: Anders als in Fall 1b. ist $|x-y| \to x-y$ ausreichend. $\frac{x+y+x-y}{2} = x$. Bei min gibt es ein $-$, das alles immer umkehrt, also passt es. Wir zeigen (iv) und (v):

Die (iv) ist klar, falls eine der Zahlen x oder y Null ist.

Sonst unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y) \neq 0 \Rightarrow |x+y| = |\operatorname{sgn}(x)(|x|+|y|)|$
$= |x| + |y|$

$|\operatorname{sgn}(x)(|x|+|y|)| = |\operatorname{sgn}(y)(|x|+|y|)|$. Dabei wurde sgn(x) aus $|x+y|$ herausgehoben, um $|x|+|y|$ zu bekommen. Durch die Betragstriche geht das $sgn(x)$ schließlich verlohren.

⇝ $sgn(x) = -sgn(y) \neq 0 \Rightarrow |x+y| = |sgn(x)(|x|-|y|)|$
$= ||x|-|y|| \leq |x|+|y|$

$|sgn(x)|x| + sgn(y)|y|| = |sgn(x)|x| - sgn(x)|y|| =$
$|sgn(x)(|x|-|y|)|$. Die Betragstriche absorbieren $sgn(x)$ und die letzte Ungleichung ist trivial.

Grundsätzlich wird in beiden Fällen (i) verwendet als
$|x| = sgn(x)x \Leftrightarrow |x|/sgn(x) = |x|sgn(x) = x$
$\left(\frac{1}{-1} = -1 \wedge \frac{1}{1} = 1\right.$, aber achtung $\left.\frac{1}{0} = \lightning\right)$.

Letztere Ungleichung gilt wegen

$$|x|-|y| \leq |x|+|y| \text{ und } -(|x|-|y|) = |y|-|x| \leq |x|+|y|.$$

Aus (iv) folgt $|x| = |(x+y)+(-y)| \leq |x+y|+|y|$ und damit $|x|-|y| \leq |x+y|$. IdFg. $x := (x+y)$ und $y := (-y)$, wobei $|-y| = |y|$. Ungleichung 1 umgeformt $(-|y|)$ ergibt Ungleichung 2. Vertauschen der Variablen ergibt $|y|-|x| \leq |x+y|$. Eigentlich ist $|x|-|y| \leq |x+y| \Leftrightarrow -(|x|-|y|) \geq -|x+y| \Leftrightarrow |y|-|x| \geq -|x+y|$, also $|y|-|x| \leq |x+y|$. Aus diesen beiden Ungleichungen erhalten wir (v). □