Musterlösung des vierten Analysis I Übungstests

22. Jänner 2016

Gruppe A

Beispiel 1

Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & x \le 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 0 < x < 1 \\ bx & x \ge 1 \end{cases}$$

in Abhängigkeit der reellen Parameter a, b stetig?
Was ist die größte Teilemenge von $\mathbb{R}$ auf die die Funktion

$$g : \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

stetig fortgesetzt werden kann? Wie und warum.

Lösung: Die Funktion f ist bei x_0 genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x). \tag{1}$$

Zuerst werden die Punkte im inneren der jeweiligen Definitionsbereiche überprüft

- Für $x_0 < 0$ gilt sicherlich (1), da es eine offene Kugel $U_\delta(x_0)$ gibt, die ganz im Definitionsbereich enthalten ist und $x \mapsto e^x + a$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist. Die Aussage gilt unabhängig von a und b.
- Analog zeigt man, dass f bei $0 < x_0 < 1$ stetig ist.
- Auch für $x_0 > 1$ lässt sich dieses Argument anwenden.

$$\boxed{\text{Das heißt } f \text{ ist bei } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \text{ unabhängig von } a \text{ und } b \text{ stetig}}$$

Die einzigen kritischen Punkte bleiben 0 und 1. Daher wird die notwendige und hinreichende Bedingung (1) überprüft.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0-} f(x) &= \lim_{x \to 0-} e^x + a \\ &= e^0 + a \\ &= 1 + a \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}0\right) = \sin(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Außerdem liest man der Definition ab, dass $f(0) = 1 + a$. Daher ist Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn $a = -1$ gilt.

$$\boxed{\text{Das heißt } f \text{ ist bei 0 genau dann stetig, wenn } a = -1.}$$

Das ganze noch einmal für den kritischen Punkt 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1-} f(x) &= \lim_{x\to 1-} \sin\bigl(\frac{\pi}{2}x\bigr) \\ &= \sin\bigl(\frac{\pi}{2}1\bigr) = \sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+} bx \\ &= b\cdot 1 \\ &= b \end{aligned}$$

Man sieht wieder einfach, dass $f(1) = b$. Deswegen muss $b = 1$ gelten, um die Bedingung (1) zu erfüllen.

$$\boxed{\text{Das heißt } f \text{ ist bei 1 genau dann stetig, wenn } b = 1.}$$

Da die Nullstellen des Nenners von $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ genau ± 1 sind, ist g überall sonst stetig als Zusammensetzung stetiger Funkionen. Die Funktion g kann genau dann bei x_0 stetig fortgesetzt werden, wenn $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existiert. Um das für ± 1 zu überprüfen wird $g(x)$ zu nächst umgeformt

$$g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

Laut den Rechenregeln für konvergente Netze gilt

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim_{x\to -1}(1-\frac{1}{x})} = \frac{1}{1-\frac{1}{\lim_{x\to -1} x}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Das heißt } g \text{ kann mit bei } -1 \text{ stetig fortgesetzt werden mit } g(-1) = \tfrac{1}{2}.}$$

Nachdem $\lim_{x\to 1} 1 - \frac{1}{x} = 0$ gilt sicherlich, dass $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ unbeschränkt sein muss. Daraus folgt, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 1} g(x)$ nicht existiert.

$$\boxed{\text{Das heißt } g \text{ kann bei 1 NICHT stetig fortgesetzt werden.}}$$

Beispiel 2

Ist die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)\cdot \mathrm{Re}(z) < 0\} \cup \{1\}$ von $\mathbb{C}$ offen, abgeschlossen oder kompakt?

Lösung:

- offen: Die Menge M ist genau dann offen wenn

  $$\forall x \in M : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } U_\epsilon(x) \subseteq M$$

  Mit $x = 1$ und $\epsilon > 0$ beliebig gilt: $(1-\frac{\epsilon}{2}) \in U_\epsilon(1)$ aber $\mathrm{Re}(1-\frac{\epsilon}{2})\,\mathrm{Im}(1-\frac{\epsilon}{2}) = 0$, also gilt $x \notin M$ und $U_\epsilon(1) \nsubseteq M$. Da ϵ beliebig war gilt

  $$\exists\, x \in M : \forall \epsilon > 0 \text{ gilt: } U_\epsilon(x) \nsubseteq M$$

  $$\boxed{\text{Die Menge } M \text{ ist NICHT offen.}}$$

- abgeschlossen: Die Menge M ist genau dann abgeschlossen wenn jeder Häufungspunkt von M in M enthalten ist.
  Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt wenn es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in M gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.
  Mit $z_n = \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{i}}{n}$ gilt:

  $$\operatorname{Re}(z_n)\operatorname{Im}(z_n) = -\frac{1}{n^2} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

  also $z_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
  Weiters gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Das heißt 0 ist Häufungspunkt von M, wegen $\operatorname{Re}(0)\operatorname{Im}(0) = 0$ ist $0 \notin M$. Also gilt

  $$\exists\, z : z \text{ ist Häufungspunkt von } M \wedge z \notin M.$$

  In anderen Worten

  $$\boxed{\text{Die Menge } M \text{ ist NICHT abgeschlossen.}}$$

- kompakt: Im metrischen Raum $(\mathbb{C}, d_2)$ gilt

  $$M \subseteq \mathbb{C} \text{ kompakt } \Rightarrow M \text{ abgeschlossen}$$

  Da M nicht abgeschlossen ist gilt demnach

  $$\boxed{\text{Die Menge } M \text{ ist NICHT kompakt.}}$$