

# Eigenwertberechnung mithilfe des Lanczos-Verfahrens (Handout)

Göth Christian

Moik Matthias

Sallinger Christian

19. Januar 2021

## 1 Definitionen, Lemmata und Sätze

1. **Satz:** Die Eigenwerte für das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

auf dem Rechteck  $\Omega := (0, a) \times (0, b)$  sind gegeben durch

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (1)$$

2. **Definition:** Sei  $v_0 \in \mathbb{C}^N$  und  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ . Dann bezeichnet

$$\mathcal{K}_m(A, v_0) := \text{span}\{v_0, Av_0, \dots, A^{m-1}v_0\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

den Krylov-Raum von  $A$  und  $v_0$ . Es bezeichne  $\mathcal{P}_m : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{K}_m$  die orthogonale Projektion auf  $\mathcal{K}_m$ .

3. **Lemma:** Sei  $\Pi_m$  der Raum der Polynome in einer Veränderlichen mit maximalem Grad  $m$ . Dann ist  $v \in \mathcal{K}_m(A, v_0) \subset \mathbb{C}^N$  genau dann, wenn ein Polynom  $p \in \Pi_{m-1}$  existiert mit  $v = p(A)v_0$ .  
Ist  $A$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  und zugehörigen Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_N$ , dann existiert eine eindeutige Darstellung  $v_0 = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$  und es gilt

$$v \in \mathcal{K}_m \Leftrightarrow \exists p \in \Pi_{m-1} : v = \sum_{j=1}^N p(\lambda_j) \alpha_j u_j.$$

4. **Lemma:** Sei  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  hermitesch bezüglich des Skalarproduktes  $(\cdot, \cdot)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$  die Eigenwerte von  $A$  (gemäß Vielfachheit gezählt) und  $u_1, \dots, u_N$  die zugehörigen normierten Eigenvektoren. Dann gilt

$$\lambda_1 = \max_{v \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}} \frac{(Av, v)}{(v, v)}, \quad \lambda_k = \max_{\substack{v \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\} \\ (u_j, v) = 0, j=1, \dots, k-1}} \frac{(Av, v)}{(v, v)}, \quad k = 2, \dots, N \quad (2)$$

und

$$\lambda_k = \max_{\substack{S \subset \mathbb{C}^N \\ \dim S = k}} \min_{v \in S \setminus \{0\}} \frac{(Av, v)}{(v, v)}. \quad (3)$$

5. **Definition:** Für  $m \in \mathbb{N}$  sind die Chebyshev-Polynome  $T_m \in \Pi_m$  definiert durch

$$T_m(x) := \frac{1}{2}((x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

6. **Definition:** Alternative Definitionen der Chebyshev-Polynome:

$$T_m(x) := \cos(m \arccos x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (5)$$

7. **Lemma:** Sei  $[a, b]$  ein nicht-leeres Intervall in  $\mathbb{R}$  und sei  $c \geq b$ . Dann gilt mit  $\gamma := 1 + 2\frac{c-b}{b-a} > 0$

$$\min_{\substack{p \in \Pi_m \\ p(c)=1}} \max_{x \in [a, b]} |p(x)| \leq \frac{1}{|T_m(\gamma)|} \leq 2(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})^{-m}. \quad (6)$$

8. **Satz:** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine hermitesche Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$  und der zugehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_n$ . Für  $1 \leq m < n$  werden die Eigenwerte der linearen Abbildung  $\mathcal{A}_m : \mathcal{K}_m(A, v_0) \rightarrow \mathcal{K}_m(A, v_0)$ , die durch  $v \mapsto \mathcal{P}_m A v$  gegeben ist, mit  $\lambda_1^{(m)} \geq \lambda_2^{(m)} \geq \dots \geq \lambda_m^{(m)}$  bezeichnet. Dabei ist  $v_0$  ein beliebiger Startvektor, der nicht orthogonal zu den ersten  $m - 1$  Eigenvektoren von  $A$  ist. Dann gilt

$$0 \leq \lambda_i - \lambda_i^{(m)} \leq (\lambda_i - \lambda_n)(\tan \theta_i)^2 \kappa_i^{(m)} \left( \frac{1}{T_{m-i}(\gamma_i)} \right)^2, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (7)$$

wobei

$$\tan \theta_i := \frac{\|(\text{id} - \mathcal{P}_{u_i})v_0\|}{\|\mathcal{P}_{u_i}v_0\|}, \quad \gamma_i := 1 + 2\frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_n}$$

und

$$\kappa_1^{(m)} := 1, \quad \kappa_i^{(m)} := \left( \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(m)} - \lambda_n}{\lambda_j^{(m)} - \lambda_i} \right)^2, \quad i = 2, \dots, m.$$