Satz 3.5.4 Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann regulär, falls f_A eine lineare Bijektion von $K^{n \times 1}$ ist. Die Menge aller regulären Matrizen aus $K^{n \times n}$ bildet bezüglich des Matrizenprodukts eine zu $GL(K^{n \times 1})$ isomorphe Gruppe.

Beweis. (a) Ist A regulär, so gibt es eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit der Eigenschaft $BA = E_n$. ... laut Definition 3.5.3. Es folgt $f_B \circ f_A = id_{K^{n \times 1}}$. $f_B \circ f_A = f_{BA} = f_{E_n} = id_{K^{n \times 1}}$, wobei erstere Gleichheit in Satz 3.3.11 steht und letztere aus (3.5) folgt:

$$f_A : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

$\Rightarrow f_{E_n} : (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \mapsto x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

Nach Satz 1.5.4 ist f_A injektiv und nach Satz 3.2.9 sogar bijektiv. f_A hat eine links-inverse $\Rightarrow$ f_A ist injektiv und weil $\dim K^{n \times 1} = \dim K^{n \times 1} = n < \infty$, folgt aus der Injektivität die Bijektivität. f_A ist also eine lineare Bijektion.

(b) Ist f_A eine lineare Bijektion, so existiert deren Umkehrabbildung $(f_A)^{-1}$ und eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $f_B = (f_A)^{-1}$. $(f_A)^{-1}$ gibt es, weil $GL(V)$ eine Gruppe ist und $B \in K^{n \times n}$, weil sich, laut Satz 3.3.4, jede lineare Abbildung $f \in L(K^{n \times 1}, K^{m \times 1})$, durch genau eine Matrix beschreiben lässt. Aus $f_B \circ f_A = id_{K^{n \times 1}}$ folgt dann $BA = E_n$ nach Satz 3.3.11. $f_B \circ f_A = f_{BA} = f_{E_n} = id_{K^{n \times 1}}$.

(c) Sind $A B \in K^{n \times n}$ regulär, so gilt das nach (a) und (b) auch

auch für BA, da $f_B \circ f_A = f_{BA}$ eine lineare Bijektion von $K^{n\times 1}$ ist. BA ist regulär, weil $f_{BA} \in GL(K^{n\times 1})$ und (a) und (b). Das Matrizenprodukt ist nach 3.3.11 assoziativ. ... folgt aus der Assoziativität von f_A, f_B, f_C. Die Einheitsmatrix E_n ist ein links-neutrales Element.

$$E_n \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A.$$

Zu jeder regulären Matrix $A \in K^{n\times n}$ gibt es definitionsgemäß ein links-neutrales Element. Laut 3.5.3 gilt $BA = E_n$. Daher liegt mit der Menge aller regulären Matrizen aus $K^{n\times n}$ eine Gruppe vor. ... nicht abelsch, laut 3.5.8. Diese wird gemäß Satz 3.3.11 durch die Vorschrift $A \mapsto f_A$ isomorph auf $GL(K^{n\times 1})$ abgebildet. Diese Abbildung ist bijektiv und, laut Satz 3.3.11, ein Homomorphismus:

$$\varphi(BA) = f_{BA} \overset{(3.3.11)}{=} f_B \circ f_A = \varphi(B) \circ \varphi(A). \qquad \square$$