Prüfung Differentialgleichungen A 7. 3. 2007

Kennummer:	Familienname:
Matrikelnummer:	Vorname:

1:	Summe:
2:	
3:	Note:
4:	

Bemerkungen:

1) **Bitte keine zusätzlichen Blätter abgeben! Diese würden beim Korrigieren nicht berücksichtigt werden.**

2) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

3) Bei jedem der vier Beispiele können 10 Punkte erreicht werden.

4) Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden.

5) Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein. Besser zu viel als zuwenig hinschreiben.

1. (10 Punkte) Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei $\varphi(t, a)$ die Lösung des AWP $x(0) = a$. Die Abbildung f sei definiert durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad a \mapsto \varphi(1, a).$$

a) Bestimmen Sie das Bild des Quadrats $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$ unter der Abbildung f.

b) Skizzieren Sie B, $f(B)$ und das Phasenporträt der Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $f(B)$.

2. (10 Punkte) Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xy \\ \dot{y} &= y^2 - x^2 \end{aligned}.$$

a) Bestimmen Sie das Phasenporträt der Differentialgleichung.

b) Ist die Ruhelage $(0,0)$ stabil oder instabil?

Hinweis: die DG

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

ist explizit lösbar.

3. a) (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob für alle $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des AWP

$$\dot{x} = x^3 \sin x, \quad x(0) = a$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

b) (6 Punkte) Betrachtet wird das AWP $x(0) = 1, y(0) = 0$ für die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y^2 + \varepsilon x^3 \end{aligned}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und einem Parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Für $\varepsilon = 0$ ist $x(t) = 1$, $y(t) = 0$ die Lösung des AWP.

Bestimmen Sie die Terme der Ordnung ε in der Entwicklung der Lösung nach Potenzen von ε. Für welche Werte von t ist diese Entwicklung gültig?

4. Lösen Sie das Cauchyproblem

$$u_t + xu_x = t^3, \quad u(x,0) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

mit der Charakteristikenmethode. Dabei ist $\Phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Skizzieren Sie die Charakteristiken in der (x,t)-Ebene und untersuchen Sie für welche $t \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung existiert.