

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzübung 4

Übungstermin: 22.4.2020

22. April 2020

Aufgabe 16:

Wenden Sie die Methode der (Zweischritt-) Richardson Extrapolation aus Abschnitt 2.7 auf das explizite Euler-Verfahren an.

- a) Welches Verfahren entsteht dabei?
- b) Weisen Sie unabhängig von Abschnitt 2.7 nach, dass dieses Verfahren die Konvergenzordnung 2 besitzt.

Aufgabe 17:

Implementieren Sie das implizite Euler Verfahren unter Verwendung des Newton-Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems. Der Algorithmus soll als Input-Parameter einen Vektor von Stützstellen t , einen Startwert y_0 , die rechte Seite und Ableitung der rechten Seite f bzw. $\frac{\partial}{\partial y}f$ sowie eine geeignete Abbruchbedingung für das Newton Verfahren (Toleranz und/oder maximale Anzahl an Iterationen) akzeptieren.

Testen Sie das Verfahren an folgenden Anfangswertproblemen: Sei $Y = (y_1, y_2)^\top$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Sei $Z = (z_1, z_2)^\top$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 999(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad Z(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Vergleichen Sie dabei auch mit den Ergebnissen und Schrittweiten des eingebetteten Runge-Kutta Verfahren RK5(4) aus Aufgabe 15. Verwenden Sie dazu die Parameter $t \in [0, 10]$, $\rho = 0.7$, $\eta = 1.5$, $\text{tol} = 10^{-6}$, $h_{\min} = 10^{-10}$.

Aufgabe 18:

Gegeben sei ein implizites, s -stufiges Runge-Kutta Verfahren der Form

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline 0 & b^\top \end{array}. \quad (3)$$

Zeigen Sie: Angewendet auf das Anfangswertproblem $y' = \lambda y$ mit $y(0) = y_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt für hinreichend kleine h

$$y_{i+1} = R(\lambda h)y_i \quad (4)$$

mit einer rationalen Funktion $R = P/Q$ und Polynomen $P, Q \in \Pi_s$ vom maximalen Grad s .

Aufgabe 19:

Beweisen Sie, welche Konsistenzordnungen die impliziten Runge-Kutta Verfahren aus Example 3.11 (impliziter Euler), Example 3.12 (implizite Trapezregel) und Example 3.13 (implizite Mittelpunktsregel) besitzen.

Aufgabe 20:

Implizite Runge-Kutta Verfahren führen zu einem nichtlinearen Gleichungssystem, dessen Lösung sehr aufwändig sein kann. Zur Vereinfachung kann man folgende Verfahren zur Lösung von autonomen Differentialgleichungen $y'(t) = f(y(t))$ verwenden.

Gegeben sei $b \in \mathbb{R}^m$, $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $A_{ij} = 0$ für $i \leq j$ und $B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $B_{ij} = 0$ für $i < j$. Weiter sei J die Jacobi-Matrix von f an der Stelle y_ℓ , d.h. $J := \partial_y f(y_\ell)$. Dann beschreiben die folgenden Gleichungen ein implizites Einschrittverfahren

$$k_i = hJ \sum_{j=1}^i (B_{ij} - A_{ij}) k_j + f \left(y_\ell + h \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} k_j \right), \quad i = 1, \dots, m \quad (5a)$$

$$y_{\ell+1} := y_\ell + h \sum_{j=1}^m b_j k_j. \quad (5b)$$

- a) Zeigen Sie, dass für dieses Verfahren nur m lineare Gleichungssysteme (und keine nichtlinearen) gelöst werden müssen.
- b) Mit welchem Gesamtaufwand sind diese linearen Gleichungssysteme lösbar, wenn $B_{ii} = \beta$ für alle $i = 1, \dots, m$?
- c) Zeigen Sie, dass diese linearen Gleichungssysteme für alle $h > 0$ eindeutig lösbar sind, wenn $B_{ii} = \beta > 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und wenn J nur negative Eigenwerte besitzt.
- d) Zeigen Sie, dass (5) für lineare Funktionen f ein implizites Runge-Kutta Verfahren beschreibt.