6.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2019

1. Die Cantormenge ist

$$C = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} : a_n \in \{0,2\}\}.$$

Diese Menge kann als Durchschnitt der Mengen

$$C_n = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} : a_k \in \{0,1,2\}, a_k \in \{0,2\} \text{ für } k \leq n\}(n \geq 1)$$

erhalten werden (Anschaulich: $C_0 = [0,1]$ und C_{n+1} wird aus C_n erhalten, indem aus jedem der 2^n Teilintervalle das mittlere Drittel entfernt wird).

Zeigen Sie, dass C überabzählbar ist und $\lambda(C) = 0$ gilt.

2. C sei die Cantormenge. Die Cantorfunktion $c : [0,1] \to [0,1]$ ist definiert durch

$$c(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n/2}{2^n} & \text{wenn } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in C \ (a_n \in \{0,2\}), \\ \sup\{c(y) : y \in C, y \leq x\} & \text{wenn } x \in [0,1] \setminus C. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass c monoton und surjektiv ist (und daher stetig), und dass für $x \in [0,1] \setminus C$ die Ableitung $c'(x) = 0$ ist.

3. Die Hausdorffdimension der Cantormenge: setzen Sie $\alpha = \log(2)/\log(3)$. Zeigen Sie: für das Hausdorffmaß μ_α gilt

$$\mu_\alpha(C) \leq 1$$

(mit etwas mehr Arbeit kann man zeigen, dass hier Gleichheit gilt).

4. Das Blutgruppenbeispiel aus der Vorlesung: die Blutgruppen werden durch ein Gen bestimmt, von dem jeder Mensch zwei Allele mit den möglichen Ausprägungen a, b, und o besitzt, die mit Wahrscheinlichkeiten p_a, p_b und p_0 angenommen werden, und zwar für beide Allele unabhängig. Ein Kind erhält je ein Allel von jedem Elternteil, das jeweils zufällig aus den beiden vorhandenen gewählt wird. Die Kombinationen aa, ao und oa resultieren in Blutgruppe A, bb, bo und ob in B, ab und ba in AB und oo in 0.

Bestimmen Sie die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Blutgruppen bei einem Elternteil, wenn der andere und ein Kind beide Blutgruppe AB haben (verwenden Sie $p_a = 9/30, p_b = 2/30, p_o = 19/30$).

5. An einer bestimmten Krankheit sind 0.1% der Bevölkerung erkrankt. Ein Test erkennt eine Krankheit mit 99% Wahrscheinlichkeit, bei einer gesunden Person zeigt er mit Wahrscheinlichkeit 1% ein falsch positives Ergebnis.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person positiv getestet wird.

(b) Bestimmen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem positiven Testergebnis tatsächlich krank ist.

6. In Satz 2.11 des Skriptums wird gezeigt, dass der Grenzwert einer nichtfallenden Folge von Maßen auf einem beliebigen Mengensystem $\mathfrak{C}$ ein Maß ist, woraus dann die entsprechende Aussage für eine Reihe von Maßfunktionen gefolgert wird. Es würde auch umgekehrt gehen, wenn es zu zwei Maßen μ und ν mit $\mu \leq \nu$ eine "Differenz" gäbe, also ein Maß ζ mit $\nu = \mu + \zeta$. Wenn μ endlich ist, sollte klar sein, dass das möglich ist, aber:

   Es sei $\Omega = \mathbb{Z}$,
$$\mathfrak{C} = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{\{x, x+1\} : x \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0,$$
$$\mu(\mathbb{Z}) = \nu(\mathbb{Z}) = \infty,$$
$$\mu(\{x, x+1\}) = \nu(\{2x-1, 2x\}) = 1, \nu(\{2x, 2x+1\}) = 2, x \in \mathbb{Z}.$$

   Zeigen Sie, dass μ und ν Maße sind und dass es kein Maß ζ auf $\mathfrak{C}$ gibt mit $\nu = \mu + \zeta$.

7. Zeigen Sie: wenn das Mengensystem $\mathfrak{C}$ durchschnittstabil ist und μ und ν zwei Maße auf $\mathfrak{C}$ mit $\mu \leq \nu$, dann gibt es ein Maß ζ auf $\mathfrak{C}$ mit $\nu = \mu + \zeta$. (Definieren Sie
$$\mathfrak{E} = \{A \in \mathfrak{C} : \mu(A) < \infty\}$$
   und
$$\mathfrak{E}^* = \{A \in \mathfrak{C} : \exists (A_n, n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathfrak{E}, A = \sum_n A_n\}.$$

   Für $A \in \mathfrak{E}$ sollte klar sein, was $\zeta(A)$ sein muss, für $A \in \mathfrak{E}^*$ ebenfalls — wobei natürlich zu zeigen ist, dass das Definiertheitsproblem aus dem vorigen Beispiel nicht auftreten kann — und für alle anderen $A \in \mathfrak{C}$ wird $\mu(A) = \infty$ gesetzt).