Satz 2.6.3 (Austauschsatz von Steinitz[6]) Es seien M ein endliches Erzeugendensystem eines Vektorraumes V mit $\# M = s$ und $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ eine endliche linear unabhängige Familie in V. Dann gibt es r verschiedene Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_r \in M$ so, dass

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \cup (M \setminus \{m_1, m_2, \ldots, m_r\})$$

auch ein Erzeugendensystem von V ist. Daher gilt $r \leq s$.

Beweis. Wir nehmen an, dass wir bereits $k \geq 0$ verschiedene Vektoren $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$ so gefunden haben, dass für $M_k := M \setminus \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ die Menge

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cup M_k$$

ein Erzeugendensystem von V ist. Also $\exists k \in \mathbb{N}$: $m_1, \ldots, m_k \in M \wedge M_k := M \setminus \{m_1, \ldots, m_k\} \Rightarrow \{a_1, \ldots, a_k\} \cup M_k$ l.u. Dabei ist klarerweise $k \leq s = \# M$. Das geht, weil wenn $\nexists k \in \mathbb{N}^\times : \ldots$, dann zumindest ... Das ist für $k = 0$ in trivialer Weise möglich. ... weil dann ja $M_0 := M \setminus \emptyset = M$ ist laut Prämisse ein ES. Nun gehen wir schrittweise vor:

- Falls $k = r$, so sind wir fertig. $k > r$ ist nicht möglich, da $(a_1, \ldots, a_k)$ dann nicht immer l.u. sein muss (zB, wenn eine maximal l.u. Menge vorliegt). Für $k < r$ geht das aber, laut A 2.4.4, schon ...

Andernfalls ist $k < r$, es existiert a_{k+1}, und dieser Vektor lässt sich mit Hilfe des obigen Erzeugendensystems in der Form

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} y_i a_i + \sum_{m \in M_k} x_m m \qquad (*)$$

schreiben. $\exists a_{k+1}$, weil $(a_1, \dots, a_r)$ l.u. ist und wegen $k < r$ mindestens ein a_{k+1} mehr als $(a_1, \dots, a_k)$ hat.

$$a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} y_i a_i = \sum_{m \in M_k} x_m m$$

ist möglich, weil M_k ein ES ist, also kann man auf den oberen Ausdruck umformen. Da $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ l.u. ist, kann a_{k+1} keine Linearkombination von $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ alleine sein, ..., d.h., es gilt immer

$$a_{k+1} \neq \sum_{i=1}^{k} y_i a_i .$$

Daher ist $\sum_{m \in M_k} x_m m \neq \mathcal{O}$. ... Wir können also aus M_k einen Vektor m' so auswählen, dass $x_{m'} m' \neq \mathcal{O}$. Wenn die Summe nicht $\mathcal{O}$ ist, dann gibt es mindestens einen Summanden, der nicht $\mathcal{O}$ ist, weil ja $\mathcal{O} + \dots + \mathcal{O} = \mathcal{O}$. $x_{m'} m' \neq \mathcal{O} \Rightarrow x_{m'} = 0 \wedge m' \neq \mathcal{O}$. Diesen Vektor nennen wir m_{k+1}, und wir setzen $M_{k+1} := M_k \setminus \{m_{k+1}\}$. $m_{k+1} := m' \neq \mathcal{O}$. $M_{k+1} := M_k \setminus \{\mathcal{O}\}$ würde keinen Sinn machen, weil sonst $M_{k+1} = M_k$ sein könnte, also $k+1 = k$?! Nach dem Austauschlemma 2.6.2 ist dann

$\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\} \cup M_{k+1}$

wieder ein Erzeugendensystem. Der obere Ausdruck kann auch so umgeschrieben werden:

$a_{k+1} \cup ((\{a_1, \dots, a_k\} \cup M_k) \setminus \{m_{k+1}\})$,

weil $a_1, \dots, a_k \neq m_{k+1}$. Angenommen, für $1 \leq j \leq a_k$ ist $a_j = m_{k+1}$. Dann ließe sich der obere Ausdruck $(*)$ umschreiben

$$„(*)" = a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} y_i a_i + \sum_{m \in M_k} x_m m = \sum_{i=1}^{k} y_i a_i + x_{m_{k+1}} m_{k+1}$$

$$+ \sum_{m \in M_k \setminus \{m_{k+1}\}} x_m m = \sum_{i=1}^{k} y_i a_i + x_{a_j} a_j + \dots = \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i a_i + \dots,$$

wobei $\forall i \neq j: \tilde{y}_i := y_i$ und $\tilde{y}_j := y_j + x_{a_j}$.
Aus dem umgeschriebenen Ausdruck, erkennt man deutlich, dass m_{k+1} mit a_{k+1} ausgetauscht wurde.

Nach Konstruktion bricht dieses Austauschverfahren nach genau r Schritten ab. ... wenn $K = 0$ am Anfang. Sonst bricht das Verfahren nach höchstens r Schritten ab. Daher gilt in der Tat $r \leq s$. Wenn $r > s$, dann kann es keine r verschiedenen Elemente $m_1, m_2, \dots, m_r \in M$ mit $\# M = s$ geben. $\square$