3.2.10 Lemma. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Elementen von X, sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Beweis. Zunächst wollen wir die folgende Ungleichung

$$|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2),$$
$$a_1, a_2, b_1, b_2 \in X, \tag{3.6}$$

beweisen. Spoiler alert, die wird im letzten Schritt benützt! Aus der Dreiecksgleichung folgt $d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1) \leq d(a_1, a_2)$ sowie $d(a_2, b_1) - d(a_1, b_1) \leq d(a_1, a_2)$ und damit $|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1)| \leq d(a_1, a_2)$. $d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1) \leq d(a_1, a_2) \Leftrightarrow d(a_1, b_1) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, b_1)$ und $d(a_2, b_1) - d(a_1, b_1) \leq d(a_1, a_2) \overset{(M2)}{=} d(a_2, a_1) \Leftrightarrow d(a_2, b_1) \leq d(a_2, a_1) + d(a_1, b_1)$. $d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1) = -(d(a_2, b_1) - d(a_1, b_1))$ und beide Seiten der Gleichheit sind mit und ohne $\pm$ kleiner gleich $d(a_1, a_2)$, also auch deren Betrag. Entsprechend gilt $|d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2)| \leq d(b_1, b_2)$. ... weil einerseits $d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2) \overset{(M2)}{=} d(b_1, a_2) - d(b_2, a_2) \leq d(b_1, b_2) \Leftrightarrow d(b_1, a_2) \leq d(b_1, b_2) + d(b_2, a_2)$ und andererseits $-(d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2)) = d(a_2, b_2) - d(a_2, b_1) \overset{(M2)}{=} d(b_2, a_2) - d(b_1, a_2) \leq d(b_1, b_2) \overset{(M2)}{=} d(b_2, b_1) \Leftrightarrow d(b_2, a_2) \leq d(b_2, b_1) + d(b_1, a_2)$. Also erhalten wir

$$|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)| \leq |d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1)| + |d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2)| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2).$$

Die erste Ungleichheit lässt sich, weil $d: X \times X \to \mathbb{R}$, auf die Dreiecksgleichung für Reelle Zahlen Lemma 2.2.12 (iv), also $|x+y| \leq |x| + |y|$ zurückführen: $x := d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1) \wedge y := d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2) \Rightarrow x + y = d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1) + d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2) = d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)$. Lemma 2.2.12(v) hingegen, also $(x \leq y \wedge a \leq b) \Rightarrow x + a \leq y + b$, führt zur Ungleichheit 2, weil hier $x := |d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1)|$, $y := d(a_1, a_2)$, $a := |d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2)|$ und $b := d(b_1, b_2)$ und wegen des vorigen Beweisteils. Sei nun $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{2}$, wenn $n \geq N$. $\frac{\epsilon}{2}$ Kann statt ϵ gewählt werden, weil $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Konvergent und $\mathbb{R} \to \mathbb{R}: \epsilon \mapsto \frac{\epsilon}{2}$ bijektiv ist. $\epsilon > 0$ Kann ja beliebig klein sein. Aus (3.6) folgt

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Die erste Ungleichheit wird durch Einsetzen in (3.6) deutlich und die zweite aufgrund $\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, sowie Lemma 2.2.12 (v) mit $<$ statt $\leq$ (siehe oben). Man erhält durch Weglassen von $\leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$, dass $d(d(x_n, y_n), d(x, y)) < \epsilon$, was Konvergenz von $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nach $d(x, y)$ impliziert.

$\square$