2.3.7 Lemma. Ist $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper, und bezeichnen wir das multiplikative neutrale Element mit 1_K, so folgt für $x \in K$, $x \geq -1_K$, und $n \in K$, dass

$$(1_K + x)^n \geq 1_K + nx.$$

Beweis. Induktionsanfang: Ist $n = 1$, so besagt die Bernoullische Ungleichung $(1_K + x)^n = 1_K + x \geq 1_K + x$, was offenbar stimmt. Laut Seite 22, Absatz 2, ist die Exponentialfunktion als „$x^1 = x$ und $x^{n'} = x^n \cdot x$" definiert. Weiters ist 1_K ja multiplikativ neutral.

Induktionsschritt: Angenommen die Bernoullische Ungleichung sei nun für $n \in \mathbb{N}$ richtig. Das liefert uns die Induktionsvoraussetzung. Dann folgt wegen $1_K + x \geq 0$, dass

$$(1_K + x)^{n'} = (1_K + x)^n (1_K + x) \geq (1_K + nx)(1_K + x) = 1_K + (n')x + nx^2 \geq 1_K + n'x.$$

Für die erste Gleichheit wird die vorhin angesprochene Definition der Exponentialfunktion benützt. Für die erste Ungleichheit wird die Induktionsvoraussetzung und Lemma 2.2.3 (xi), also hier $0 \leq (1_K + x) \leq (1_K + x) \wedge 0 \leq (1_K + nx) \leq (1_K + x)^n \Rightarrow \ldots$. $(1_K + nx)(1_K + x) = 1_K \cdot 1_K + 1_K \cdot x + nx \cdot 1_K + nx \cdot x = 1_K + (1_K + n) \cdot x + nxx = 1_K + (n')x + nx^2$. Die zweite Ungleichheit rechtfertigen wir abermals mit Lemma 2.2.3 (v), also hier $1_K + n'x \leq 1_K + (n')x \wedge 0 \leq nx^2 \Rightarrow \ldots$. $\square$