Analysis 3 - Übung

11. UE am 13.01.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 89. *Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$*

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & 0 < x < 1, \\ ax - 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwachen Ableitungen.

Zeigen Sie: Für $u(\boldsymbol{x}) = \log |\boldsymbol{x}|$ und $\nu_i(\boldsymbol{x}) = \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^2}$ ist ν_i die schwache Ableitung $D^i u$ in $\mathbb{R}^n$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 90. *Sind $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, so ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $D_i(uv) = D_i uv + uD_i v$*

Lösung. Durch die Hölder-Ungleichung und $u, v \in L^2(\Omega)$, erhält man unmittelbar, dass $\|uv\|_1 \leq \|u\|_2 \|v\|_2 < \infty$, also $uv \in L^1(\Omega)$.

Laut Blümlinger Satz 6.2.8 bzw. Meyers, Serrin, liegt der Unterraum $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, für $1 \leq p < \infty$ und Ω offen in $\mathbb{R}^n$, dicht in $W^{m,p}(\Omega)$. u, v lassen sich also durch glatte Funktionen, in der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{m,p}$, approximieren.

$$\|f\|_{m,p,\Omega} = \|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

$$\exists\, (u_k), (v_k) \in C^\infty(\Omega) : \lim_{k\to\infty} u_k = u, \ \lim_{k\to\infty} v_k = v$$

Eine, zur Sobolevnorm $\|\cdot\|_{m,p}$, äquivalente Norm $\|\cdot\|_{m,p}^\sim$, ist, laut Blümlinger Korollar 6.2.2, gegeben durch

$$\|f\|_{m,p}^\sim := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p .$$

Weil $(u_k), (v_k)$ bezüglich der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{1,2}$ konvergieren, folgt mit der Hölder-Ungleichung auch, dass

$$\begin{aligned} \|D_i u_k v_k - D_i uv\|_1 &\leq \|D_i u_k v_k - D_i u_k v\|_1 + \|D_i u_k v - D_i uv\|_1 \\ &\leq \|D_i u_k (v_k - v)\|_1 + \|(D_i u_k - D_i u)v\|_1 \\ &\leq \|D_i u_k\|_2 \|v_k - v\|_2 + \|v\|_2 \|D_i u_k - D_i u\|_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Analog erhält man auch

$$\|u_k D_i v_k - u D_i v\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0,\ \|u_k v_k - uv\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Laut Kusolitsch Satz 13.25 gilt: Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$, so konvergiert eine Folge (f_n) aus $\mathcal{L}_p$ genau dann im p-ten Mittel, wenn (f_n) im Maß gegen ein $f \in \mathcal{L}_p$ konvergiert und gilt $\lim_n \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

$$\|f - f_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu(|f - f_n| > \epsilon) = 0,\ \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$$

Daher sind die folgenden Grenzwertvertauschungen gerechtfertigt. Nachdem, wegen der Produktregel, $D_i(u_k v_k) = D_i u_k v_k + u_k D_i v_k$ durchaus gilt, erhält man also

$$\begin{aligned}
-\int uv D_i\phi \, d\lambda^n &= \lim_{k\to\infty} -\int u_k v_k D_i\phi \, d\lambda^n \\
&= \lim_{k\to\infty} \int D_i(u_k v_k) \, d\lambda^n \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\int D_i u_k v_k \phi \, d\lambda^n + \int u_k D_i v_k \phi \, d\lambda^n \right) \\
&= \int D_i uv\phi \, d\lambda^n + \int u D_i v \phi \, d\lambda^n \\
&= \int (D_i uv + u D_i v)\phi \, d\lambda^n.
\end{aligned}$$

Lösung. Um zu zeigen, dass $uv \in L^1(\Omega)$ ist benötigt man nur einmal die Ungleichung von Hölder (siehe Kusolitsch Satz 13.4) um

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_2 \|v\|_2 < \infty$$

einzusehen.
Für den zweiten Teil wollen wir zuerst den Fall betrachten, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $v \in W^{1,2}\Omega \cap C^\infty(\Omega)$. Wählen wir eine beliebige Testfunktion $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)$ so gilt auch $v\Phi \in C_c^\infty(\Omega)$ und daher auch $D_i(c\Phi) \in C_c^\infty(\Omega)$. Mit diesem Wissen und Proposition 6.2.6 aus dem Analysis 3 Skriptum vom Professor Blümlinger, das es erlaubt $D_i(v\Phi) = D_i v\Phi + v D_i \Phi$ zu schreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int (D_i uv + u D_i v)\Phi \mathrm{d}\lambda &= \int (D_i uv\Phi + u D_i v \Phi)\mathrm{d}\lambda \\
&= \int (D_i uv\Phi + u D_i(v\Phi) - uv D_i \Phi)\mathrm{d}\lambda \\
&= \int D_i uv\Phi \mathrm{d}\lambda + \int u D_i(v\Phi)\mathrm{d}\lambda - \int uv D_i\Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= \int D_i uv\Phi \mathrm{d}\lambda - \int D_i uv\Phi \mathrm{d}\lambda - \int uv D_i\Phi \mathrm{d}\lambda \\
&= -\int uv D_i \Phi \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

Damit folgt bereits unmittelbar die gewünschte Aussage $D_i(uv) = D_i uv + u D_i v$.
Nun betrachten wir den Allgemeinen Fall, nämlich $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$. Nach dem Satz von Meyers-Serrin (siehe Analysis 3 Skriptum Blümlinger Satz 6.2.8) wissen wir, dass $W^{1,2}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt. Deshalb können wir eine Folge (v_l) aus $W^{1,2}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ finden mit $lim_{l\to\infty} v_l = v$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Natürlich

ist (v_l) in $W^{1,2}(\Omega)$ auch eine Cauchy-Folge und daher gilt für ein beliebiges $\epsilon > 0$ und hinreichend große $m, l \in \mathbb{N}$ unter Benützung der Ungleichung von Hölder

$$\begin{aligned}\|uv_l - uv_m\|_1 &\leq \|u\|_2 \|v_l - v_m\|_2 \leq \|u\|_{1,2} \|v_l - v_m\|_{1,2} < \frac{\epsilon}{n+1},\\ \|D_i(uv_l - uv_m)\|_1 &\leq \|D_i uv_l - D_i uv_m\|_1 + \|uD_i v_l - uD_i v_m\|_1\\ &\leq \|D_i u\|_2 \|v_l - v_m\|_{1,2} + \|u\|_{1,2} \|v_l - v_m\|_{1,2} < \frac{\epsilon}{n+1}\end{aligned}$$

Damit folgt sofort

$$\|uv_l - uv_m\|_{1,1}^{\sim} = \|uv_l - uv_m\|_1 + \sum_{i=1}^{n} \|D_i(uv_l - uv_m)\|_1 < \epsilon,$$

also dass uv_l eine Cauchy-Folge in $W^{1,1}(\Omega)$ ist. Da nach Satz 6.2.3 gilt, dass $W^{1,1}(\Omega)$ ein Banachraum ist konvergiert also $uv_l \to u\tilde{v} \in W^{1,1}(\Omega)$. Da mit der Ungleichung von Hölder offensichtlich $uv_l \to uv$ in $L^1(\Omega)$ muss $u\tilde{v} = uv$ gelten (stimmt das?). Also wissen wir jetzt, dass $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt. Genauso kann man zeigen, dass $D_i uv_l + uD_i v_l$ im Banachraum $L^1(\Omega)$ gegen $D_i uv + uD_i v$ konvergiert (hab ich nicht nachgeprüft). Nun können wir nützen, dass für eine beliebige Testfunktion $\Phi \in C_c^\infty$ die Funktion $\zeta : W^{1,1}(\Omega) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int u\Phi \mathrm{d}\lambda$ eine stetiges lineares Funktional auf $W^{1,1}(\Omega)$ ist (vgl. Analysis 3 Skriptum Blümlinger Seite 131). Mit der Ungleichung von Hölder erkennt man auch leicht, dass $\xi : L^1(\Omega) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int u\Phi \mathrm{d}\lambda$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^1(\Omega)$ ist. Damit sind die folgenden Grenzwertvertauschungen erlaubt und wir dürfen

$$\begin{aligned}\int (D_i uv + uD_i v)\Phi \mathrm{d}\lambda &= \int \lim_{n\to\infty} (D_i uv_n + uD_i v_n)\Phi \mathrm{d}\lambda\\ &= \lim_{n\to\infty} \int D_i(uv_n)\Phi \mathrm{d}\lambda\\ &= \lim_{n\to\infty} \int uv_n D_i \Phi \mathrm{d}\lambda\\ &= \int \lim_{n\to\infty} uv_n D_i \Phi \mathrm{d}\lambda\\ &= \int uv D_i \Phi \mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

schreiben und sind fertig.

Aufgabe 91. *Verschwindet für eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die schwache Ableitung der Ordnung n, so ist f ein Polynom der Ordnung $n-1$ fast überall.*

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Testfunktion als Summe der n-ten Ableitung einer Testfunktion und einer Linearkombination der Funktionen $\Psi_0^{(l)}, l < n, \Psi_0$ wie im Beweis von 6.1.4. dargestellt werden kann und berechnen Sie $\int x^k \xi^{(l)}(x)dx$ für Testfunktionen ξ und $k \leq l$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 92. *Zeigen Sie, dass aus der Existenz der schwachen Ableitung der Ordnung 2 im Allgemeinen für $n \geq 2$ nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1 folgt.*

Hinweis: Betrachten Sie eine Funktion $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Zeigen Sie, dass für $n = 1$ aus der Existenz einer schwachen k-ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen l-ter Ordnung für $l < k$ folgt.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 93. *Zeigen Sie, dass $f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ genau dann in $W^{m,p}(\Omega)$ liegt, wenn die Abbildungen $\varphi \mapsto \int_\Omega f D^\alpha \varphi d\lambda^n$ fpr $|\alpha| \leq m$ stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der L^q-Norm nach $\mathbb{R}$ ist.*

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Dualraum von L^p der L^q ist, das heißt jede beschränkte lineare Abbildung von einem dichten Teilraum des L^p nach $\mathbb{C}$ ist von der Form $\varphi \mapsto \int \varphi g$ mit $g \in L^q$.

Lösung. Trivial!

Aufgabe 94. *Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$, wenn x Lebesguepunkt der Funktion $\mathbb{1}_{E\cup\{x\}}$ ist.*

Zeigen Sie: Ist jeder Punkt $x \in [0,1]^n$ ein Dichtepunkt einer messbaren Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^n(E) \geq 1$.

Gibt es eine messbare Teilmenge E von $\mathbb{R}$, für die $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Menge der Dichtepunkte von E ist?

Lösung. Trivial!

Aufgabe 95. *Ist X ein Fixpunktraum und Y ein Retrakt von X, so ist Y ein Fixpunktraum.*

Lösung. Dass X **Fixpunktraum** ist heißt, X ist ein topologischer Raum, auf dem jede stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt.

$$X \text{ topologischer Raum} : \forall\, T_X \in C(X,X) : \exists\, x \in X : T_X(x) = x$$

Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X heißt **Retrakt**, wenn es eine stetige Abbildung (**Retraktion**) R von X auf Y mit $R|_Y = \mathrm{id}_Y$ gibt.

$$Y \subseteq X, \exists\, R \in C(X,Y) : R|_Y = \mathrm{id}_Y$$

Sei R die besagte Retraktion und $T_Y \in C(Y,Y)$ beliebig. Die wohldefinierte Komposition dieser stetigen Funktionen, ist stetig.

$$T_X := T_Y \circ R \in C(X,Y) \subseteq C(X,X).$$

Nun besitzt T_X also laut Voraussetzung einen Fixpunkt, also $\exists\, x \in X$:

$$T_Y(R(x)) = T_X(x) = x.$$

Weil $T_X(Y) \subseteq Y$, muss $x \in Y$. Wegen $R|_Y = \mathrm{id}_Y$, gilt $x = R|_Y(x) = R(x) =: y$. Zuletzt, erhält man $T_Y(y) = y$, also einen Fixpunkt y von T_Y.

Aufgabe 96. *Zeigen Sie (Satz von Perron-Frobenius): Jede $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} \geq 0$ für $1 \leq i,j \leq n$ hat einen Eigenwert $\lambda \geq 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $x = (x_1,\ldots,x_n)$ mit $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$.*

Hinw.: Betrachten Sie die Abbildung $\zeta : x \to \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax$ auf dem Simplex $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

Lösung. ζ ist tatsächlich eine Selbstabbildung in $(\Delta, \|\cdot\|_1)$, weil $\forall\, x \in \Delta$:

$$A, x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0 \Rightarrow \zeta(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^n \langle e_i, \zeta(x)\rangle = \|\zeta(x)\|_1 = \left\| \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \right\|_1 = 1.$$

Nachdem $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\|\cdot\|_1 \in C(\mathbb{R}^n)$, muss $\zeta \in C(\Delta, \Delta)$ ebenfalls stetig sein. Laut dem Fixpunktsatz von Brouwer, ist unsere (offensichtlich) kompakt und konvexe Menge $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Fixpunktraum, und ζ besitzt einen Fixpunkt $\exists\, x \in \Delta$:

$$x = \zeta(x) = \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax \Leftrightarrow \lambda x = Ax,$$

wobei $\lambda := \|Ax\|_1 \geq 0$ und $x \geq 0$.

Aufgabe 97. *Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 &= x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{4} &= x_2 \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt.

Lösung. $[-1,1]^2 \in \mathbb{R}^2$!!! Es ist kompakt, es ist konvex, es ist ein ... (laut Brouwer) ... ein Fixpunktraum! T besitzt darin einen Fixpunkt.

$$T : \begin{cases} [-1,1]^2 & \to [-1,1]^2 \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{8}x_2^3 \\ \frac{1}{2}x_1^5 + \frac{1}{4}x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Lieblingsfrage: "Wieso existiert das T?"
Antwort: Dreiecksungleichung, d.h. $\forall\, x \in [-1,1]^2$:

$$\begin{aligned} |\langle e_1, T(x)\rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \leq 1, \\ |\langle e_2, T(x)\rangle| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 98. *Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung u der Gleichung*

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x)$$

in $C[-1,1]$ gibt.

Lösung. Betrachte die, auf dem vollständigen metrischen Raum $(C[-1,1], d_\infty)$ lebende, Selbstabbildung

$$T : u \mapsto \left(x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(u(x) + x) \right).$$

Da $\sin' = \cos$, erhalten wir aus dem MWS der Differentialrechnung, dass $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \exists\, \xi \in [-1,1]$:

$$\left| \frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b} \right| = |\cos(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

Damit gilt $\forall\, u, v \in C[-1,1]$:

$$
\begin{aligned}
d_\infty(T(u), T(v)) &= \sup_{x\in[-1,1]} \left| \left(x + \frac{1}{2}\sin(u(x)+x) \right) - \left(x + \frac{1}{2}\sin(v(x)+x) \right) \right| \\
&= \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} |\sin(u(x)+x) - \sin(v(x)+x)| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} |u(x)+x-(v(x)+x)| \\
&= \frac{1}{2} d_\infty(u,v).
\end{aligned}
$$

Somit ist die Selbstabbildung T eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raumes $(C[-1,1], d_\infty)$ mit Kontraktionsfaktor $\kappa := \frac{1}{2} < 1$. Es existiert also, laut dem Banach'schen Fixpunktsatz, eine eindeutige Lösung.