3.5.4 Proposition. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es wird auf (3.9) vorbereitet, also $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Aus der Konvergenz folgt die Existenz einer Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}, n \geq N$. $\epsilon/2$ kann beliebig groß und klein sein, weil wenn $\epsilon > 0$, dann ist jeder positive reelle Wert für $\epsilon/2$ möglich. Hier bezeichnet x den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, der nach Voraussetzung existiert, über den aber nichts bekannt zu sein braucht. Es wird hierbei bloß die Eigenschaft von x, also $d(x_n, x) < \epsilon/2$ mit $n \geq N$, verwendet. Dann gilt nach der Dreiecksgleichung für $n, m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dabei sind n und m beliebig und größer gleich N (vielleicht sogar $n = m$). Merke, dass hier die Symmetrie ausgenützt wird, also $d(x_m, x) = d(x, x_m) < \epsilon/2$. Und „zack", es steht schon das Herzstück von (3.9) da (grün auf weiß). □