

Partielle Differentialgleichungen

1. Übung am 1.10.2020

Richard Weiss

Florian Schager

Paul Winkler

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Operatornorm von

$$T: \ell^2 \rightarrow \ell^1, \quad Tx = (x_1, x_2/2, x_3/3, x_4/4, \dots).$$

Lösung. Wir zeigen, dass die Operatornorm $\|T\| = \pi/\sqrt{6}$ ist.

Sei dazu $x \in \ell^2$. Laut der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt folgende Abschätzung.

$$\|Tx\|_1^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right| \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \left| \frac{1}{n} \right| \right)^2 \stackrel{\text{CSB}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)}_{\|x\|_2^2} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)}_{\pi^2/6}$$

Dadurch erhalten wir eine Abschätzung nach oben für die Operatornorm von T .

$$\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_1}{\|x\|_2} : x \in \ell^2 \setminus \{0\} \right\} \leq \pi/\sqrt{6}$$

Für die andere Ungleichung, betrachten wir die Folge $x := (1/n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

$$\implies Tx = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1 \implies \|T\| \geq \frac{\|Tx\|_1}{\|x\|_2} = \pi/\sqrt{6}$$

□

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{P}([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ der normierte Vektorraum aller Polynome $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$. Ist die Abbildung $D: \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$, $Dp = p'$ beschränkt? Wenn ja, berechnen Sie $\|D\|$.

Lösung. Wir zeigen, dass der Operator D auf $\mathcal{P}([0, 1])$ unbeschränkt ist.

Dazu, definieren wir die folgenden Polynome.

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1 \\ p_1(x) &:= 1/2 + x/2 \\ p_2(x) &:= 1/3 + x/3 + x^2/3 \\ &\vdots \\ p_n(x) &:= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ berechnen wir die Norm von p_n ...

$$\|p_n\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |p_n(x)| = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} = 1$$

... und dessen Ableitung $p'_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{ix^i}{n+1}$...

$$\|p'_n\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |p'_n(x)| = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} = n/2.$$

Damit, kann $\|D\|$ beliebig groß werden.

$$\Rightarrow \|D\| := \sup \left\{ \frac{\|Dp\|_\infty}{\|p\|_\infty} : p \in \mathcal{P}([0,1]) \setminus \{0\} \right\} \geq \frac{\|p'_n\|_\infty}{\|p_n\|_\infty} = n/2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Paul's elegantere Polynome: Monome

□

Aufgabe 3. Beweisen Sie mithilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)} \leq 2(x+y+z)$$

Lösung.

$$\begin{aligned} a &:= (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})^T, \\ b &:= (\sqrt{3x+y}, \sqrt{3y+z}, \sqrt{3z+x})^T, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{lhs} = (a, b) \stackrel{\text{CSB}}{\leq} \|a\|_2 \|b\|_2 = (x+y+z)^{1/2} (4(x+y+z))^{1/2} = 2(x+y+z)$$

Richard's FAIL:

Bezeichne (\cdot, \cdot) das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 . Der Übersicht halber definieren wir noch $a, b \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} a &:= (\sqrt{x(3x+y)}, \sqrt{y(3y+z)}, \sqrt{z(3z+x)})^T, \\ b &:= (1, 1, 1)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{lhs} = (a, b) &\stackrel{\text{CSB}}{\leq} \|a\|_2 \|b\|_2 = \underbrace{(1^2 + 1^2 + 1^2)}_3^{1/2} \underbrace{(x(3x+y) + y(3y+z) + z(3z+x))}_{3x^2+xy \quad 3y^2+yz \quad 3z^2+zx}^{1/2} \\ &\stackrel{!}{\leq} \sqrt{3} \sqrt{3} \underbrace{(x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2zx)}_{(x+y+z)^2}^{1/2} \stackrel{!}{=} \text{rhs} \end{aligned}$$

Bei dem ersten „!“ , verlangen wir, dass $xy, yz, zx \geq 0$; Bei dem zweiten, gehen wir davon aus, dass in der Angabe ein 3er statt einem 2er stehen sollte.

□

Aufgabe 4. Beweisen Sie mithilfe der hölderschen Ungleichung:

$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \quad (a, b \geq 0)$$

Lösung. Bezeichne (\cdot, \cdot) das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^2 . Der Übersicht halber definieren wir noch $x = (a, b)^T, y = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$. Weiters, wählen wir $p := 3$ und die entsprechende Hölder-Konjugierte q .

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \stackrel{!}{=} 1 \iff q := \frac{1}{1 - 1/p} = \frac{p}{p - 1} = 3/2$$

$$\implies \text{rhs} = (x, y)^3 \stackrel{\text{Hölli}}{\leq} \|x\|_3^3 \|y\|_{3/2}^3 = (|a|^3 + |b|^3) \underbrace{\left((|1|^{3/2} + |1|^{3/2})^{2/3} \right)^3}_4 = \text{lhs}$$

□

Aufgabe 5. Beweisen Sie mithilfe der jensenschen Ungleichung die youngsche Ungleichung für Produkte ($1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$):

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \geq 0).$$

Lösung. Wegen der Konkavität des \ln , und $1/p + 1/q = 1$, folgt mit der jensenschen Ungleichung

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \stackrel{\text{Jens}}{\leq} \ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right).$$

Aus der Monotonie der \exp erhält man daraus die youngsche Ungleichung.

□

Aufgabe 6. Lösen Sie die homogene eulersche Differentialgleichung

$$a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

mit $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ durch die Transformation $z(t) = y(e^t)$.

Lösung. Wir wollen eine ODE lösen, in der z, z', z'' vorkommen. Man kann aber nicht einfach bei den Ableitungen e^t für x substituieren. Das liegt daran, dass $y' = y'$, wir wollen aber eigentlich (z) nach t ableiten. Aushilfe bietet die Kettenregel ...

$$\begin{aligned} z(t) = y(e^t) &\iff y(e^t) = z(t) \\ z'(t) = y'(e^t) e^t &\iff y'(e^t) = z'(t) e^{-t} \\ z''(t) = \frac{d}{dt} [y'(e^t) e^t] &= \underbrace{\frac{d}{dt} [y'(e^t)] e^t}_{y''(e^t) e^t} + \underbrace{y'(e^t) e^t}_{z'(t) e^{-t}} \iff y''(e^t) = (z''(t) - z'(t)) e^{-2t} \end{aligned}$$

JETZT können wir endlich substituieren.

$$\begin{aligned} \text{rhs} &= a_2(e^t)^2 y''(e^t) + a_1 e^t y'(e^t) + a_0 y(e^t) = a_2 e^{2t} (z''(t) - z'(t)) e^{-2t} + a_1 e^t z'(t) e^{-t} + a_0 z(t) \\ &= a_2 z''(t) + (a_1 - a_2) z'(t) + a_0 z(t) \end{aligned}$$

Diese ODE lässt sich nun leicht lösen.

$$Z := (z, z')^T \implies Z'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & \frac{a_2 - a_1}{a_2} \end{pmatrix}}_{=:A} Z(t) \implies Z(t) = e^{tA}$$

Wenn man das z gefunden hat, muss man nur noch rücksubstituieren.

$$z(t) = y(e^t) \iff z(\ln x) = y(x)$$

□

Aufgabe 7. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(0, x) = g(x)$$

für $u : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $g \in C^3(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass bei $t = 0$ die Funktionen u_t, u_x, u_{xx} und u_{tx} schon durch g bestimmt sind.

Lösung.

$$\implies g'(x) = u_x(0, x) \implies \exists!_{t=0} u_x \implies \exists!_{t=0} u_{xx} = u_t \implies \exists!_{t=0} u_{tx}$$

□

Aufgabe 8. ToDo!

Lösung. ToDo!

□

Aufgabe 9. (i) Zeigen Sie, dass für fixes $\lambda = \mu^2 > 0$ die Funktion

$$w(x, y) = (Ax + B)(C \cos \mu y + D \sin \mu y)$$

mit beliebigen Konstanten A, B, C, D die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = 0$$

löst.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$w(x, y, z, t) = \frac{A}{(t - t_0)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a(t - t_0)} \right]$$

mit beliebigen Konstanten $A, t_0, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

(mit $a \in \mathbb{R}$) löst.

Lösung. (i)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) &= A(C \cos \mu y + D \sin \mu y) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) &= (Ax + B)(-\mu C \sin \mu y + \mu D \cos \mu y) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) &= (Ax + B)(-\mu^2 C \cos \mu y - \mu^2 D \sin \mu y) = -\lambda w(x, y) \end{aligned}$$

$$\implies \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y)}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y)}_{-\lambda w(x, y)} + \lambda w(x, y) = 0$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, z, t) &= w(x, y, z, t) \frac{-2(x - x_0)}{4a(t - t_0)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, z, t) &= w(x, y, z, t) \frac{4(x - x_0)^2}{16a^2(t - t_0)^2} + w(x, y, z, t) \frac{-1}{2a(t - t_0)} = w(x, y, z, t) \frac{1}{2a(t - t_0)} \left(\frac{(x - x_0)^2}{2a(t - t_0)} - 1 \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, z, t) &= \dots = w(x, y, z, t) \frac{1}{2a(t - t_0)} \left(\frac{(y - y_0)^2}{2a(t - t_0)} - 1 \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(x, y, z, t) &= \dots = w(x, y, z, t) \frac{1}{2a(t - t_0)} \left(\frac{(z - z_0)^2}{2a(t - t_0)} - 1 \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, z, t) &= \frac{A}{(t - t_0)^{5/2}} (-3/2) \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a(t - t_0)} \right] + \\ &\quad \frac{A}{(t - t_0)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a(t - t_0)} \right] \left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a(t - t_0)^2} \right) (-1) \\ &= w(x, y, z, t) \frac{1}{t - t_0} \left(-3/2 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a(t - t_0)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{ rhs} &= a \left(w(x, y, z, t) \frac{1}{2a(t-t_0)} \left(\frac{(x-x_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. w(x, y, z, t) \frac{1}{2a(t-t_0)} \left(\frac{(y-y_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. w(x, y, z, t) \frac{1}{2a(t-t_0)} \left(\frac{(z-z_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1 \right) \right) \\
&= w(x, y, z, t) \frac{1}{2(t-t_0)} \left(\left(\frac{(x-x_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1 \right) + \left(\frac{(y-y_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1 \right) + \left(\frac{(z-z_0)^2}{2a(t-t_0)} - 1 \right) \right) = \text{lhs}
\end{aligned}$$

□

Partielle Differentialgleichungen - Übung

2. UE am 8.10.2020

Richard Weiss

Florian Schager
Paul Winkler

Christian Sallinger
Christian Göth

Fabian Zehetgruber

Aufgabe 1. Bestimmen und skizzieren Sie diejenigen Gebiete in R^2 , für welche die folgenden Differentialgleichungen jeweils elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind:

(i) $(y^2 + 1)u_{xx} + 2xu_{xy} + 9u_{yy} - uu_y = y^2 - x,$

(ii) $xu_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + xu_x = 1.$

Lösung. Wir erinnern uns an die allgemeine Form aus dem Skriptum (bzw. der Vorlesung) ...

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f, \quad (2.7)$$

... und an die Definitionen von elliptisch, parabolisch und hyperbolisch ...

2-6.png

Definition 2.6. Die Klassifikation der Gleichung (2.7) lautet wie folgt:

- Falls $b^2 - ac < 0$ an der Stelle (x, y) , so heißt (2.7) elliptisch an (x, y) .
- Falls $b^2 - ac > 0$ an der Stelle (x, y) , so heißt (2.7) hyperbolisch an (x, y) .
- Falls $b^2 - ac = 0$ an der Stelle (x, y) , so heißt (2.7) parabolisch an (x, y) .

(i)

$$a = y^2 + 1$$

$$b = x$$

$$c = 9$$

$$f = y^2 - x + uu_y$$

$$0 \stackrel{!}{=} b^2 - ac = x^2 - 9(y^2 + 1) \implies x = \pm 3\sqrt{y^2 + 1}$$

(ii)

$$a = x$$

$$b = y$$

$$c = 1$$

$$f = 1 - xu_x$$

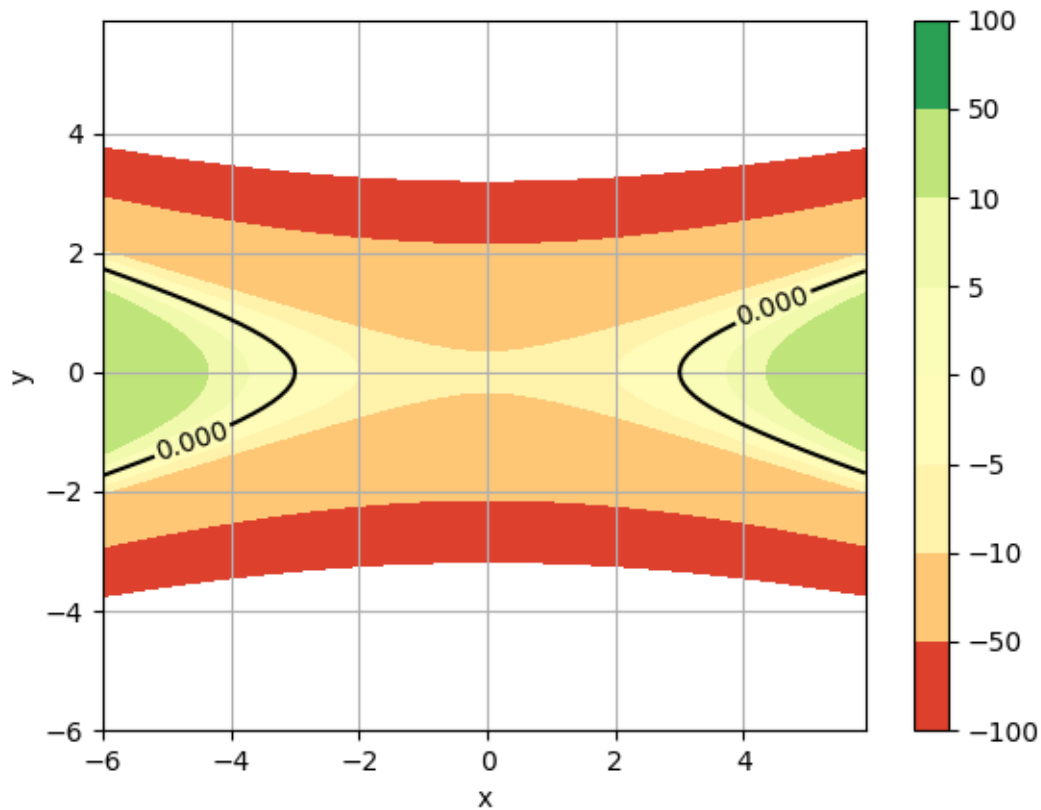


Abbildung 1: $x = \pm 3\sqrt{y^2 + 1}$

$$0 \stackrel{!}{=} b^2 - ac = y^2 - x \implies x = y^2$$

Die PDEs sind

- parabolisch auf dem graphen,
- hyperbolisch darunter, und
- elliptisch darunter.

Aufgabe 2. (i) Lösen Sie das Randwertproblem für die Laplacegleichung in ebenen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} (\Delta u)(r, \varphi) &= 0 \text{ für } r < R, \\ u(R, \varphi) &= f(\varphi) \text{ für alle } \varphi, \end{aligned}$$

wobei

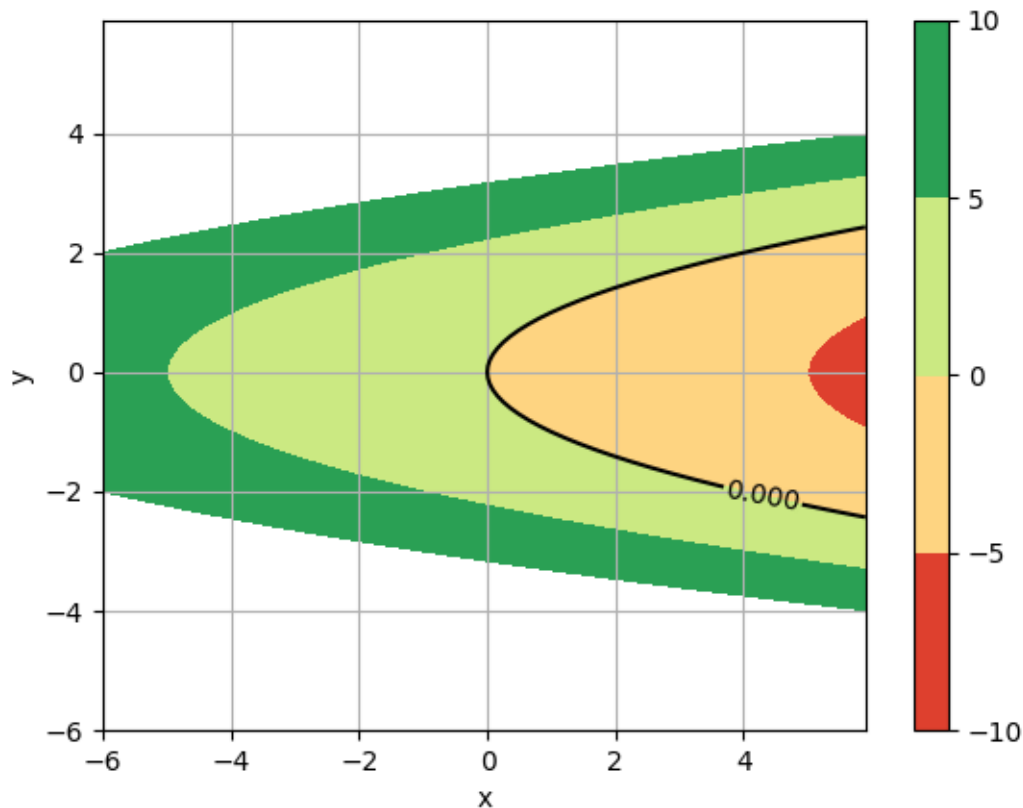


Abbildung 2: $x = y^2$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$

der Laplaceoperator in Polarkoordinaten, $R > 0$ eine positive Konstante und f eine stückweise stetig differenzierbare 2π -periodische Funktion ist?

(ii) Wie sieht die Lösung konkret im Fall

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0 & \varphi = 0, \pi \\ 1 & 0 < \varphi < \pi \\ -1 & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

mit $R = 1$ aus?

Hinweis: Verwenden Sie einen Separationsansatz. Betrachten Sie dazu zunächst Einzellösungen u_n der Gestalt $u_n(r, \varphi) = v_n(r) \cdot w_n(\varphi)$ (mit w_n 2π -periodisch), welche die Differentialgleichung erfüllen und insbesondere C^2 im Nullpunkt sind. Die gesuchte Gesamtlösung ergibt sich dann als Summe über die Einzellösungen u_n mit geeigneten Koeffizienten. Falls Sie dabei auf die homogene eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung

stoßen, verwenden Sie Aufgabe 6 von Blatt 1 oder schlagen sie in einer beliebigen Quelle ein Fundamentalsystem von Lösungen nach.

Differentialgleichung 2-Ordnung - Wikipedia.png

Beispiel [\[Bearbeiten \]](#) [Quelltext bearbeiten \]](#)

Gegeben sei die eulersche Differentialgleichung

$$a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad x > 0.$$

Zu lösen ist nach obigem Satz zunächst die folgende lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a_2 (z''(x) - z'(x)) + a_1 z'(x) + a_0 z(x) = 0,$$

also

$$a_2 z''(x) + (a_1 - a_2) z'(x) + a_0 z(x) = 0.$$

Das zu dieser Differentialgleichung gehörige charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = a_2 \lambda^2 + (a_1 - a_2) \lambda + a_0$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_2 - a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{(a_2 - a_1)^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}.$$

Fall 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, beide reell.

Dann ist $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ ein Fundamentalsystem für die transformierte lineare Differentialgleichung. Die Rücktransformation liefert, dass $\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}\}$ ein Fundamentalsystem für die ursprüngliche eulersche Differentialgleichung ist.

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2$.

Dann ist $\lambda := \frac{a_2 - a_1}{2a_2}$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Daher ist $\{e^{\lambda z}, ze^{\lambda z}\}$ ein Fundamentalsystem für die transformierte lineare Differentialgleichung. Die Rücktransformation liefert, dass $\{x^\lambda, x^\lambda \ln x\}$ ein Fundamentalsystem für die ursprüngliche eulersche Differentialgleichung ist.

Fall 3: λ_1, λ_2 beide nicht reell.

Dann sind λ_1, λ_2 komplex konjugiert zueinander. Also ist $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ ein (komplexes) Fundamentalsystem. Sei $\lambda_1 = \mu + i\nu, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{e^{\mu z} \sin(\nu z), e^{\mu z} \cos(\nu z)\}$ ein reelles Fundamentalsystem der transformierten linearen Differentialgleichung. Rücktransformation liefert $\{x^\mu \sin(\nu \ln x), x^\mu \cos(\nu \ln x)\}$ als Fundamentalsystem für die ursprüngliche eulersche Differentialgleichung. □

Abbildung 3: Lösen einer Eulerschen Differentialgleichung 2. Ordnung nach Wikipedia

Lösung. (i) Wir machen den Ansatz $u(r, \varphi) = v(\varphi)w(\varphi)$. Einsetzen in die PDE liefert Folgendes.

$$v_{rr}(r)w(\varphi) + \frac{1}{r}v_r(r)w(\varphi) + \frac{1}{r^2}v(r)w_{\varphi\varphi}(\varphi) = 0 \implies \frac{r^2 v_{rr}(r) + r v_r(r)}{v(r)} = -\frac{w_{\varphi\varphi}(\varphi)}{w(\varphi)} = \lambda_{r,\varphi}$$

Da die linke Seite nur von r und die rechte Seite nur von φ abhängt, ist $\lambda := \lambda_{r,\varphi}$ konstant. Wir erhalten also zwei Differentialgleichung. Die w -ODE lautet wie folgt (mit dem charakteristischen Polynom χ).

$$w_{\varphi\varphi} + \lambda w = 0, \quad \chi(\mu) = \mu^2 + \lambda$$

Für $\lambda \neq 0$ erhalten wir die folgende Lösung.

$$w(\varphi) = c_1 \exp(i\varphi\sqrt{\lambda}) + c_2 \exp(-i\varphi\sqrt{\lambda}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Die Lösung soll 2π -periodisch sein, also $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, also $\lambda = n^2$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Weil $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}$, dürfen wir ein trigonometrisches Fundamentalsystem wählen. Wir schreiben die möglichen Lösungen wie folgt an. (Für $-n \in \mathbb{N}$, können wir das -1 aus dem \sin ziehen und in das $c_{n,1}$ stecken und der \cos schluckt es sowieso.)

$$w_n(\varphi) = c_{n,1} \cos(n\varphi) + c_{n,2} \sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}, c_{n,1}, c_{n,2} \in \mathbb{R}$$

Sei nun $\lambda = 0$.

$$\implies w_{\varphi\varphi} = 0 \implies w(\varphi) = \left(\int \int w_{\varphi\varphi}(\phi) \, d\phi \, d\phi \right)(r) = c_{0,1}\varphi + c_{0,2}, \quad c_{0,1}, c_{0,2} \in \mathbb{R}$$

Davon sind aber bloß die konstanten Funktionen 2π -periodische Lösungskandidaten. Daher, muss $c_{0,1} = 0$.

Wir widmen uns nun der φ -ODE. Diese ist eine homogene eulersche Differentialgleichung.

$$a_2 r^2 v_{rr} + a_1 r v_r + a_0 v = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = -\lambda$$

Wie wir solch eine Differentialgleichung lösen wissen wir schon von Blatt 1 Aufgabe 6, oder Wikipedia also Abbildung 3 (oder beides).

$$\frac{1}{2a_2} \left(a_2 - a_1 \pm \sqrt{(a_2 - a_1)^2 - 4a_2 a_0} \right) = \pm \sqrt{\lambda}$$

Für $\lambda \neq 0$, muss $\sqrt{\lambda} \neq -\sqrt{\lambda}$, und wir erhalten wir die folgende Lösung. (Für $-n \in \mathbb{N}$, vertauschen die Konstanten $c_{n,3}$ und $c_{n,4}$.)

$$v_n(r) = c_{n,3} r^n + c_{n,4} r^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_{n,3}, c_{n,4} \in \mathbb{R}$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir

$$v_n(r) = c_{n,3} r^n + c_{n,4} r^n \ln r, \quad n = 0, \quad c_{n,3}, c_{n,4} \in \mathbb{R}$$

u soll nun C^2 im Nullpunkt sein. Dort ist allerdings v_n nur definiert, falls $c_{n,4} = 0$. Insgesamt liefert der Separationsansatz folgende Lösungskandidaten.

$$\begin{aligned} u_n(r, \varphi) &= v_n(r) w_n(\varphi) = c_{n,3} r^n (c_{n,1} \cos(n\varphi) + c_{n,2} \sin(n\varphi)) = r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)), \\ n &\in \mathbb{N}, \quad c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3} \in \mathbb{R}, \quad a_n := c_{n,3} c_{n,1}, \quad b_n := c_{n,3} c_{n,2} \\ u_0(r, \varphi) &= v_0(r) w_0(\varphi) = c_{0,3} c_{0,2} =: a_0, \\ c_{0,3}, c_{0,2} &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Weil jeder einzelne dieser Lösungskandidaten seinen Beitrag leisten könnte, summieren wir diese und hoffen (durch die Koeffizienten) auf das Beste. (Sei dabei $b_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Es leistet aber keinen Beitrag und dient nur zur Formalität.)

$$u(r, \varphi) \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$$

Korollar 3.1.9. Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion f konvergiert ihre Fourierreihe in allen Punkten x_0 gegen $(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))/2$.

Abbildung 4: Blümlinger - Analysis 3

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1,$$

Abbildung 5: Fourier-Cheat-Sheet

Wir wollen nun noch die Koeffizienten bestimmen.

Wir berechnen also deren Fourierkoeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$, $n \in \mathbb{N}$, frei nach Abbildung 5. Es muss auf jeden Fall $\tilde{a}_0 = 0$, ansonsten gibt's ein kleines Problem!

Die offiziellen Koeffizienten bekommen wir nun durch normalisieren. (Wir wollen schließlich die Randbedingung $u(R, \cdot) = f$ gewährleisten.)

$$a_n := \frac{\tilde{a}_n}{R^n}, \quad b_n := \frac{\tilde{b}_n}{R^n}$$

ToDo:

- „Wohldefiniertheit“: Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ fest. Laut Abbildung 4, konvergiert die Fourierreihe von $u(R, \cdot) = f$. Diese kann man (für jenes feste φ) als Potenzreihe in R auffassen. Weil diese ja in R konvergiert, hat sie auch einen (sogar noch) größeren Konvergenzradius. Insbesondere konvergiert auch (die Potenzreihe) $u(r, \varphi)$.
- „Ableitung“: Weil $u(r, \varphi)$ als Potenzreihe absolut und somit gleichmäßig konvergiert, dürfen wir Limitten, also auch Ableitungsoperatoren hineinziehen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\Delta u)(r, \varphi) &= u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) r^{n-2} (a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} n r^{n-2} (a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{n-2} (a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1) r^{n-2} + n r^{n-2} - n^2 r^{n-2}) (a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)) = 0 \end{aligned}$$

- „Randbedingung“: Das folgt unmittelbar aus der „Wahl“ der Fourierkoeffizienten.

(ii)

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi))$$

Nachdem f ungerade ist, fallen die cos-Koeffizienten weg, und wir müssen nur noch die sin-Koeffizienten berechnen. Außerdem, ist ja $R = 1$; wir können R^n also getrost weglassen. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \underbrace{f(\varphi)}_1 \sin(n\varphi) \, d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{f(\varphi)}_{-1} \sin(n\varphi) \, d\varphi \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos(n\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\pi} + \frac{1}{n} \cos(n\varphi) \Big|_{\varphi=\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi + \cos 2n\pi - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \in 2\mathbb{N}, \\ \frac{4}{n\pi}, & n \in 2\mathbb{N} - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um den Nullpunkt und $g, f \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachten Sie das Cauchyproblem

$$u_t + g(u)u_x = 0, \quad u(0, x) = f(x)$$

für $(t, x) \in I \times \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Charakteristiken und überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen für den Existenzsatz 2.3 erfüllt sind.
- Bestimmen Sie eine Lösung für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

mit den Anfangsdaten $u(0, x) = -x$ und geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an. Skizzieren Sie die Charakteristiken und die Lösung zu verschiedenen Zeitpunkten.

Lösung. (i) Unsere Differentialgleichung hat die Form

$$\begin{aligned} \bar{t}(y) &= 0, \bar{x}(y) = y, \bar{u}(y) = f(y), \\ \Gamma &= \{(\bar{t}(y), \bar{x}(y)) : y \in \mathbb{R}\}, \quad S = \{(\bar{t}(y), \bar{x}(y), \bar{u}(y)) : y \in \mathbb{R}\}, \\ a(t, x, u)u_t + b(t, x, u)u_x &= c(t, x, u), \\ a(t, x, u) &= 1, \quad b(t, x, u) = g(u), \quad c(t, x, u) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben gelernt wie man so eine Differentialgleichung mit der Charakteristikenmethode löst. Dafür lösen wir als erstes das System an Differentialgleichungen

$$\frac{\partial t}{\partial s} = a(t, x, u) = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = b(t, x, u) = g(u), \quad \frac{\partial u}{\partial s} = c(t, x, u) = 0.$$

Aus der Nebenbedingung ergeben sich für die Lösungen noch zusätzlich die Bedingungen

$$t(0, y) = \bar{t}(y) = 0, \quad x(0, y) = \bar{x}(y) = y, \quad u(0, y) = \bar{u}(y) = f(y).$$

Die erste und letzte ODE löst man mit Integration nach s . Die Integrationskonstante ergibt sich aus dem Anfangswert.

$$\implies t(s, y) = s, \quad u(s, y) = f(y)$$

Damit, und einer weiteren Integration (einer s -Konstanten), bekommt man die Lösung der zweiten ODE.

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s, y) = g(u(s, y)) = g(f(y)) \implies x(s, y) = s \cdot g(f(y)) + y.$$

Für festes y ist also eine Charakteristik gegeben durch

$$(t^{(y)}(s), x^{(y)}(s), u^{(y)}(s)) = (s, s \cdot g(f(y)) + y, f(y)).$$

Sind die Voraussetzungen von Satz 2.3 erfüllt? Wir rechnen nach.

$$\det \frac{\partial(t, x)}{\partial(s, y)} = \det \begin{pmatrix} t_s(0, y) & t_y(0, y) \\ x_s(0, y) & x_y(0, y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a(t, x, u) & \bar{t}_y(y) \\ b(t, x, u) & \bar{x}_y(y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g(f(y)) & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Und wir sehen, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, es gibt also lokal eine Lösung.

- (ii) Nun haben wir es mit einem Spezialfall des bisher Betrachteten zu tun, nämlich mit $g(u) = u$ und $f(x) = -x$. Wir nützen die Ergebnisse vom vorigen Teil und erhalten

$$\begin{aligned} t(s, y) &= s, \\ x(s, y) &= s \cdot g(f(y)) + y = s \cdot g(-y) + y = -sy + y = y(1 - s), \\ u(s, y) &= f(y) = -y \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} t = s &\iff s = t \\ x = y(1 - s) = y(1 - t) &\iff y = \frac{x}{1 - t} \end{aligned}$$

und damit als Lösung

$$u(t, x) = u(s(t, x), y(t, x)) = y(t, x) = \frac{x}{t - 1},$$

eine auf $(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$ definierte Funktion. Plots dazu findet man in den Abbildungen 6 und 7.

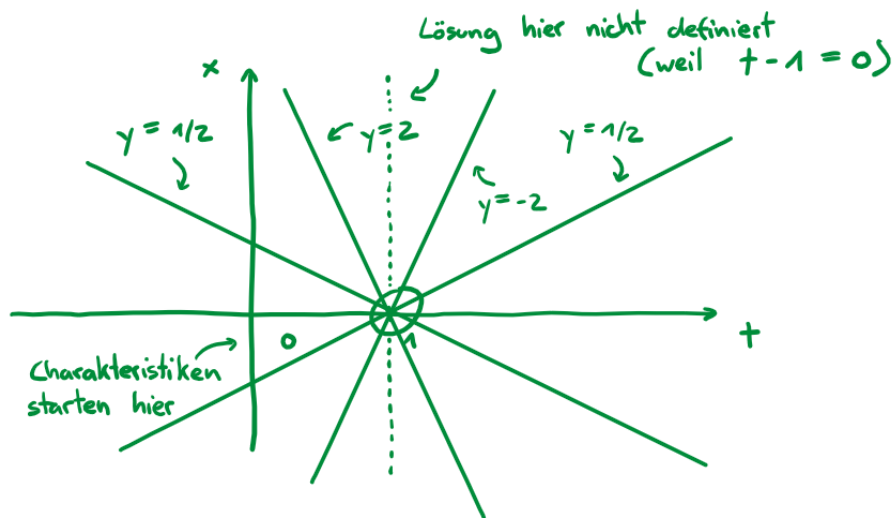


Abbildung 6: Charakteristiken von u im \mathbb{R}^2

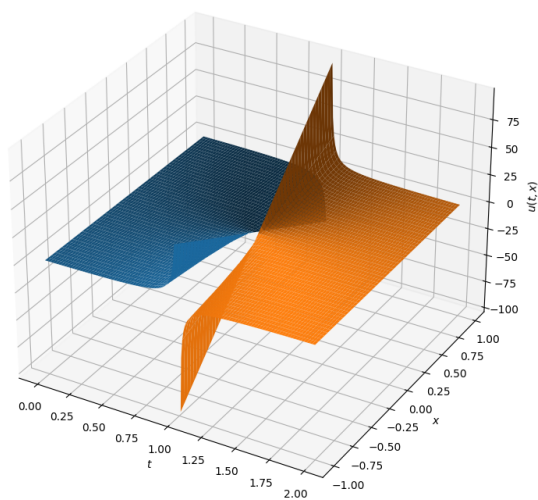


Abbildung 7: Graph von u im \mathbb{R}^3

Aufgabe 4. Lösen Sie folgendes Problem für $x > 0$ mithilfe der Methode der Charakteristiken:

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= u + 1 \\ u(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

wobei ψ eine beliebige Funktion ist.

Lösung. Wir bringen zunächst die PDE in die allgemeine Form aus dem Skript (bzw. Vorlesung).

$$\begin{aligned} a(x, y, u) &= -y, \quad b(x, y, u) = x, \quad c(x, y, u) = u + 1, \\ \bar{x}(t) &= t, \quad \bar{y}(t) = 0, \quad \bar{u}(t) = \psi(t), \\ \Gamma &= \{((\bar{x}(t), \bar{y}(t)) : t \in \mathbb{R})\} \in \mathbb{R}^2, \quad S = \{((\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)) : t \in \mathbb{R})\} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Die folgende Abbildung 8 soll die räumliche Intuition hinter der Methode der Charakteristiken wiederholen.

der Charakteristiken - Skizze.png

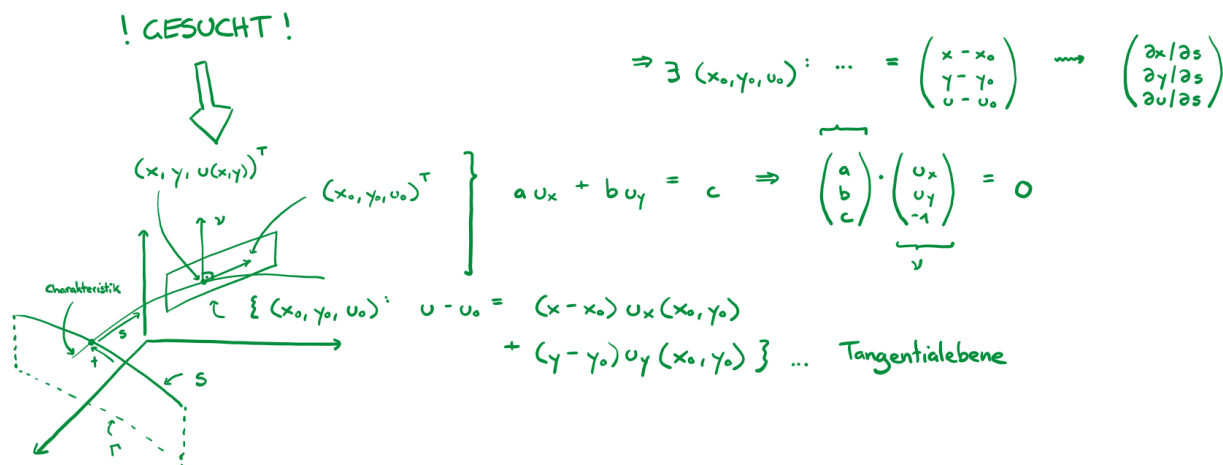


Abbildung 8: Methode der Charakteristiken - Skizze

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = b = -x, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = c = u + 1,$$

mit Anfangswerten

$$x(0, t) = \bar{x}(t) = t, \quad y(0, t) = \bar{y}(t) = 0, \quad u(0, t) = \bar{u}(t) = \psi(t).$$

Wir lösen die ODE für festes t als folgendes inhomogenes lineares System mit konstanten Koeffizienten.

$$v(s) := \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ u(s, t) \end{pmatrix} \Rightarrow v' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} v + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b}, \quad v(0) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

Um die partielle Lösung v zu bekommen, brauchen wir zuerst eine (alle) homogene(n). Damit, ist ein Fundamentalsystem gemeint. Nachdem die ODE konstante Koeffizienten hat, ist die Exponentialmatrix e^{sA} ein Solches. Um sie zu finden, müssen wir A diagonalisieren (oder zumindest die Jordan-Normalform finden). Dazu, berechnen wir die Eigenwerte $\lambda_{1,2,3}$ von A , als Nullstellen des Charakteristischen Polynoms χ_A . Man kann sich, durch Laplace-entwickelnach der rechten (unteren) Spalte (Zeile) viel Arbeit ersparen.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda^2) = (1-\lambda)(1-i)(1+i) \\ \Rightarrow \lambda_{1,2,3} &= 1, \pm i\end{aligned}$$

Die Eigenvektoren $v_{1,2,3}$ von A dürfen auch nicht fehlen. Das verläuft nach folgendem Schema $\forall i = 1, 2, 3$:

$$Av_i = \lambda_i v_i \iff (A - \lambda_i)v_i = 0 \iff v_i \in \ker(A - \lambda_i)$$

Konkret ...

$$\begin{aligned}A - \lambda_1 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ A - \lambda_2 &\mapsto \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ A - \lambda_3 &\mapsto \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Die Eigenpaare (samt algebraischen Vielfachheiten) bekommt man auch ganz leicht mit `SymPy`.

```
A = sp.Matrix([[0, 1, 0], [-1, 0, 0], [0, 0, 1]])
display(A)
```

```
eigen_info = A.eigenvects()
display(eigen_info)
```

Wir fassen die Eigenvektoren (jeweils die angegebenen Repräsentanten) in eine Transformationsmatrix $V := (v_1, v_2, v_3)$ zusammen, und berechnen deren Determinante. Man kann sich, durch Laplace-entwickeln nach der linken (unteren) Spalte (Zeile) viel Arbeit ersparen.

$$\Rightarrow \det V = \begin{vmatrix} 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-i - i) = 2i \neq 0$$

Nachdem die Determinante $\det V$ nicht verschwindet, muss V invertierbar sein. Wir invertieren V wie üblich: Durch Spaltenumformungen (d.h. von links drauf-multiplizieren von geeigneten regulären Permutations-Matrizen P_1, \dots, P_n), so lange, bis

$$PV = I_3 \iff PI_3 = V^{-1}, \quad P := \prod_{i=1}^n P_i.$$

Der Übersicht halber, schreiben wir die Matrizen über bzw. unter einander.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} V \\ I_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{P_3} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 1/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ V^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Also, ist A diagonalisierbar, mit

$$\Rightarrow A = V \Lambda V^{-1}, \quad \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Somit, können wir die Exponentialmatrix (das Fundamentalsystem) e^{sA} endlich ausrechnen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{sA} &= V e^{s\Lambda} V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{is} & ie^{-is} \\ 0 & e^{is} & e^{-is} \\ e^s & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{is}}{2} + \frac{e^{-is}}{2} & -\frac{ie^{is}}{2} + \frac{ie^{-is}}{2} & 0 \\ \frac{ie^{is}}{2} - \frac{ie^{-is}}{2} & \frac{e^{is}}{2} + \frac{e^{-is}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Exponentialmatrix bekommt man auch schnell mit **SymPy**.

```
s = sp.Symbol('s')
display(s)
```

```
exp_sA = sp.exp(s * A)
display(exp_sA)
```

Die Inverse bekommt man sehr schnell.

$$\Rightarrow (e^{sA})^{-1} = e^{-sA} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$$

Wir setzen nun in die Formel für die Partikulärlösung ein. (Das ist in Wahrheit eine Zusammenfassung der „Variation der Konstanten“.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ u(s, t) \end{pmatrix} = v(s) &= e^{sA} \underbrace{(e^{0A})^{-1}}_{I_3} v(0) + e^{sA} \underbrace{\int_0^s (e^{\xi A})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\xi}_{(0,0,e^{-\xi})^T} = e^{sA} \left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \psi(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\int_0^s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\xi} \end{pmatrix} d\xi}_{(0,0,1-e^{-s})^T} \right) \\ &= \begin{pmatrix} t \cos s \\ t \sin s \\ e^s(\psi(t) + 1) - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A \frac{\partial}{\partial s}]{} \begin{pmatrix} -t \sin s \\ t \cos s \\ e^s(\psi(t) + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt also folgende Lösung unserer ODE.

$$x(s, t) = t \cos s, \quad y(s, t) = t \sin s, \quad u(s, t) = e^s(\psi(t) + 1) - 1$$

Wir transformieren $(s, t) \mapsto (x, y)$, indem wir die ersten beiden Gleichungen nach s und t auflösen und in die dritte einsetzen. Das funktioniert, laut dem „Hauptsatz über implizite Funktionen“ bzw. „Umkehrsatz“ bzw. Skriptum (bzw. Vorlesung), $\forall t \neq 0$:

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t \sin 0 & \cos 0 \\ t \cos 0 & \sin 0 \end{vmatrix} = t \neq 0.$$

Konkret, dividieren wir die ersten beiden Gleichungen ...

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{t \sin s}{t \cos s} = \tan s \Rightarrow s = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

... und wenden die \mathbb{R}^2 euklidische Norm an ...

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(t \cos s)^2 + (t \sin s)^2} = |t| \underbrace{\sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s}}_1$$

Einsetzen liefert das endgültige Ergebnis.

$$\Rightarrow u(x, y) = \exp \arctan \frac{y}{x} \left(\psi \left((\operatorname{sgn} x) \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 1 \right) - 1$$

Wir setzen $y = 0$ und überprüfen die Anfangsbedingung. Damit diese auch für $x < 0$ gilt, mussten wir $\operatorname{sgn} x$ einfügen. Um die Ableitung zu überprüfen, verwenden wir jetzt aber wirklich **SymPy**.

```
x, y = sp.symbols('x y')
psi = sp.Function('psi')
u = sp.exp(sp.atan(y / x)) * (psi(sp.sqrt(x**2 + y**2)) + 1) - 1
display(u)

u_x = u.diff(x).simplify()
display(u_x)

u_y = u.diff(y).simplify()
display(u_y)
```

```

lhs = -y * u_x + x * u_y
rhs = u + 1
residuum = sp.simplify(lhs - rhs)
display(residuum)

```

Lösung. Wir bringen zunächst die PDE in die allgemeine Form aus dem Skript (bzw. Vorlesung).

$$\begin{aligned}
a(x, y, u) &= -y, & b(x, y, u) &= x, & c(x, y, u) &= u + 1, \\
\bar{x}(t) &= t, & \bar{y}(t) &= 0, & \bar{u}(t) &= \psi(t), \\
\Gamma &= \{(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^2, & S &= \{(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = b = -x, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = c = u + 1,$$

mit Anfangswerten

$$x(0, t) = \bar{x}(t) = t, \quad y(0, t) = \bar{y}(t) = 0, \quad u(0, t) = \bar{u}(t) = \psi(t).$$

Zuerst suchen wir eine Lösung für u . Wir können die Variablen separieren und berechnen dann

$$\begin{aligned}
\int (1 + u)^{-1} &= \ln(1 + u) + c_1 \quad \text{und erhalten} \quad \ln(1 + u) + c_1 = s \\
\text{und gemeinsam mit der Nebenbedingung} \quad u(s, t) &= (\psi(t) + 1)e^s - 1
\end{aligned}$$

Die anderen beiden Differentialgleichungen leiten wir ein weiteres Mal ab und erhalten

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = -\frac{\partial y}{\partial s} = -x \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{\partial x}{\partial s} = -y$$

also zweimal die gleiche Differentialgleichung mit dem charakteristischen Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1$ also den Lösungen $y(s, t) = c_2 \sin(s) + c_3 \cos(s)$ und $x(s, t) = c_4 \sin(s) + c_5 \cos(s)$. Nun soll außerdem

$$c_3 = y(0, t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{gelten, und damit} \quad c_4 \cos(s) - c_5 \sin(s) = \frac{\partial x}{\partial s} \stackrel{!}{=} -y = -c_2 \sin(s)$$

also $c_4 = 0$ und $c_2 = c_5$. Uns bleibt $x(s, t) = c_2 \cos(s)$ und $y(s, t) = c_2 \sin(s)$. Nun wissen wir außerdem

$$c_2 = x(0, t) \stackrel{!}{=} t \quad \text{also} \quad x(s, t) = t \cos(s) \quad \text{und} \quad y(s, t) = t \sin(s).$$

Daraus erhalten wir

$$t = \frac{x}{\cos(s)} \quad \text{und} \quad y = t \sin(s) = x \tan(s) \quad \text{also} \quad s = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{und} \quad t = \frac{x}{\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}.$$

So ergibt sich die Lösung

$$u(x, y) = \left(\psi\left(\frac{x}{\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}\right) + 1 \right) \exp\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) - 1.$$

Aufgabe 5. Lösen Sie folgendes Problem mithilfe der Methode der Charakteristiken und geben Sie an, wo die Lösung definiert ist:

$$\begin{aligned}(y+u)u_x + yu_y &= x - y, \\ u(x, 1) &= 1 + x\end{aligned}$$

Lösung. Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\frac{\partial x}{\partial s} = y + u, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = x - y,$$

mit Anfangswerten

$$x(0, t) = t, \quad y(0, t) = 1, \quad u(0, t) = 1 + t.$$

Anstatt sofort ein lineares (3×3) -System aufzustellen, bemerken wir zunächst, dass $y(s, t) = e^s$. Wir benötigen also bloß folgendes inhomogene lineare (2×2) -System (mit konstanten Koeffizienten im linearen Teil).

$$v(s) := \begin{pmatrix} x(s, t) \\ u(s, t) \end{pmatrix} \implies v' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v + \underbrace{\begin{pmatrix} e^s \\ -e^s \end{pmatrix}}_{=:b(s)}, \quad v(0) = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$.

$$\begin{aligned}\implies \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \\ \implies \lambda_{1,2} &= \pm 1\end{aligned}$$

Wir bestimmen die zugehörigen Eigenvektoren $v_{1,2}$.

$$\begin{aligned}A - \lambda_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies v_1 \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ A - \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies v_2 \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

$$\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad V := (v_1, v_2)$$

Wir berechnen die Inverse von V .

$$\begin{bmatrix} V \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \\ V^{-1} \end{bmatrix}$$

Somit, können wir die Exponentialmatrix von A ausrechnen.

$$\begin{aligned}\Rightarrow e^{sA} &= V s^\Lambda V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{s\lambda_2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^s & e^{-s} \\ e^s & -e^{-s} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^s + e^{-s} & e^s - e^{-s} \\ e^s - e^{-s} & e^s + e^{-s} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nachdem ein Fundamentalsystem nach Spaltenumformungen wieder ein Fundamentalsystem bleibt, werden wir die Exponentialmatrix transformieren. Das soll die folgenden Rechnungen vereinfachen.

$$e^{sA} \mapsto \begin{pmatrix} e^s & -e^{-s}/s \\ e^s & e^{-s}/2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^s & -e^{-s} \\ e^s & e^{-s} \end{pmatrix} =: Y(s)$$

Die Inverse bekommen wir mit dem Determinanten-Trick.

$$Y(s)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-s} & e^{-s} \\ -e^s & e^s \end{pmatrix}$$

Damit, können wir die Partikulärlösung nun konkret hinschreiben.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(s, t) \\ u(s, t) \end{pmatrix} = v(s) = Y(s) \left(Y(0)^{-1} v_0 + \int_0^s Y(\xi)^{-1} b(\xi) \, d\xi \right) = \begin{pmatrix} te^s + e^s - e^{-s} \\ te^s + e^{-s} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten insgesamt also folgende Lösung unserer ODE.

$$x(s, t) = te^s + e^s - e^{-s}, \quad y(s, t) = e^s, \quad u(s, t) = te^s + e^{-s}$$

Wir transformieren $(s, t) \mapsto (x, y)$, indem wir die ersten beiden Gleichungen nach s und t auflösen und in die dritte einsetzen. Das funktioniert, weil

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} te^s + e^s + e^{-s} & e^s \\ e^s & 0 \end{vmatrix} = -e^{2s} \neq 0.$$

Konkret ...

$$\begin{aligned}\Rightarrow s &= \ln y \\ \Rightarrow t &= x/y - 1 + 1/y^2 \\ \Rightarrow u &= x - y + 2/y\end{aligned}$$

Die Lösung ist, laut unseren Rechnungen, auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ definiert. „Zufälligerweise“ gilt sie sogar auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Lösung. Wie bereits in den vorigen beiden Aufgaben lösen wir

$$\frac{\partial x}{\partial s} = y + u \quad \text{mit} \quad x(0, t) = t, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = y \quad \text{mit} \quad y(0, t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = x - y \quad \text{mit} \quad u(0, t) = 1 + t.$$

Die zweite Differentialgleichung lässt sich leicht lösen, nämlich ist $y(s, t) = e^s$ eine Lösung die zudem noch die zusätzliche Bedingung erfüllt. Die anderen beiden Differentialgleichungen wollen wir ein weiteres Mal ableiten und erhalten so

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} = y + x - y = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} = y + u - y = u,$$

also zweimal die gleiche homogene Differentialgleichung. Diese haben das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1$ also die Lösung $x(s, t) = c_1 e^s + c_2 e^{-s}$ und $u(s, t) = c_3 e^s + c_4 e^{-s}$, wobei die scheinbaren Konstanten noch von t abhängen können. Nun wissen wir außerdem

$$c_1 e^s - c_2 e^{-s} = \frac{\partial x}{\partial s}(s) \stackrel{!}{=} y + u = e^s + c_3 e^s + c_4 e^{-s}, \quad \text{also} \quad c_1 = 1 + c_3 \quad \text{und} \quad -c_2 = c_4$$

Diese beiden Gleichungen können wir nützen und erhalten

$$t = x(0, t) = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad 1 + t = u(0, t) = c_3 + c_4 = c_1 - 1 - c_2$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems ist nun wirklich nicht mehr schwer und wir erhalten

$$c_1 = 1 + t, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = t \quad \text{und} \quad c_4 = 1$$

also die Funktionen

$$x(s, t) = (1 + t)e^s - e^{-s} \quad \text{und} \quad u(s, t) = te^s + e^{-s}$$

Aus $y = e^s$ erhalten wir schnell $s = \ln(y)$ und damit

$$x = (1 + t)e^s - e^{-s} = (1 + t)y - y^{-1} \quad \text{umgeformt also} \quad t = \frac{x}{y} + y^{-2} - 1$$

woraus sich insgesamt

$$u(x, y) = te^s + e^{-s} = \left(\frac{x}{y} + y^{-2} - 1 \right) y + y^{-1} = x + \frac{2}{y} - y$$

ergibt. Die Lösung ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wohldefiniert. **erfüllt sie dort auch überall die Differentialgleichung?**

Partielle Differentialgleichungen - Übung

3. UE am 15.10.2020

Richard Weiss

Florian Schager
Paul Winkler

Christian Sallinger
Christian Göth

Fabian Zehetgruber

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(i) Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sodass

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) f_i(x).$$

(ii) Gilt $xT = 0$ für eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, so ist $T = c\delta$ für eine Konstante c .

(iii) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u' = 0$ impliziert $u = \text{const.}$

(iv) Für jedes $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ existieren Konstanten c_0, c_1 sodass

$$f\delta' = c_0\delta + c_1\delta'.$$

Lösung. (i) Sei also $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Wir verwenden die Taylorsche Formel, siehe dazu Kaltenbäck Satz 10.2.10, und erhalten

$$f(x) = f(y) + \int_0^1 df((1-t)y + tx)(x-y)dt = f(y) + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}((1-t)y + tx)dt.$$

Mit der Definition

$$f_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}((1-t)y + tx)dt$$

erhalten wir die gewünschte Gestalt, die f_i sind auch C^∞ weil man eine beliebige partielle Ableitung des Integranden auf dem Intervall $[0, 1]$ mit dem Supremum majorisieren kann also den Differentialoperator mit dem Integral vertauschen darf. Vergleiche dazu Kusolitsch Korollar 9.37.

(ii) Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $xT = 0$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Gemäß Hinweis wählen wir ein $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\forall x \in \text{supp } \varphi : \chi(x) = 1$ (gibt es sowas? Ja, betrachte die Faltung von $\mathbb{1}_A$ mit $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, sodass $\text{dist}(\text{supp } \varphi, A^C) > \delta$ mit einer bekannten Testfunktion g mit $\text{supp } g \subset [-\delta, \delta]$. Da $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist auch $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt $f * g \equiv 1$ auf $\text{supp } \varphi$.) Wir berechnen

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle T, \chi(\varphi(0) + x\varphi_1) \rangle = \varphi(0)\langle T, \chi \rangle + \underbrace{\langle xT, \chi\varphi_1 \rangle}_{=0}.$$

Nun hängt das χ allerdings noch von φ ab, wir erhalten obige Gleichheit allerdings für alle $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\forall x \in \text{supp } \varphi : \chi(x) = 1$. Für ein $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(0) \neq 0$ gilt also für alle entsprechenden χ die Gleichheit $c := \frac{\langle T, \psi \rangle}{\psi(0)} = \langle T, \chi \rangle$. Für eine beliebige weitere Funktion $\hat{\psi}$ können wir nun das χ so wählen, dass es nicht nur am Träger von $\hat{\psi}$ sondern auch am Träger von ψ den Wert 1 annimmt. Für solch ein χ kennen wir aber schon den Wert $\langle T, \chi \rangle = c$.

- (iii) Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u' = 0$. Wir erinnern uns an den Beweis von Blümlingers Prop. 6.14. Sei Ψ_0 eine Testfunktion die $\int_{\mathbb{R}} \Psi_0 d\lambda = 1$ erfüllt. Wir definieren für beliebiges $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Funktion $\zeta := \phi - \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \Psi_0$, welche $\int_{\mathbb{R}} \zeta d\lambda = 0$ erfüllt. Die Funktion $\theta(x) := \int_{-\infty}^x \zeta d\lambda$ ist aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ und es gilt $\theta' = \zeta$. So erhalten wir die Darstellung $\phi = \theta' + \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \Psi_0$. So können wir berechnen

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \theta' \rangle + \left\langle u, \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \Psi_0 \right\rangle = \langle u', \theta \rangle + \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \langle u, \Psi_0 \rangle = \langle \langle u, \Psi_0 \rangle, \phi \rangle$$

- (iv) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\langle f\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', f\varphi \rangle = -(f\varphi)'(0) = -f(0)\varphi'(0) - f'(0)\varphi(0) = f(0)\langle \delta', \varphi \rangle - f'(0)\langle \delta, \varphi \rangle$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sin \lambda x$,
(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin \lambda x}{x}$,

und zeigen Sie, dass

- (iii) $\lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a}{x^2 + a^2} = \pi \delta$.

Lösung. (i) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig. Es gilt

$$|\langle \sin(\lambda x), \phi \rangle| = \left| \frac{1}{\lambda} \langle \cos(\lambda x), \phi' \rangle \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} |\cos(\lambda x) \phi'(x)| dx \leq \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} |\phi'(x)| dx \rightarrow 0$$

für λ gegen ∞ .

- (ii) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig und $\text{supp } \phi \subseteq [-a, a]$. Es gilt

$$\left\langle \frac{\sin(\lambda x)}{x}, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \phi(x) dx = \underbrace{\int_{|x| > a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \phi(x) dx}_{=0} + \int_{|x| < a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \phi(x) dx = \quad (1)$$

$$\int_{|x| < a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} (\phi(x) - \phi(0)) dx + \phi(0) \int_{|x| < a} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx. \quad (2)$$

Wir definieren $\psi(x) := \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}$ und erkennen, dass wir ψ mit $\psi(0) := \phi'(0)$ stetig fortsetzen können. Wir wenden auf das linke Integral partielle Integration und die Dreiecksungleichung an und sehen, dass es für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen Null geht:

$$\left| \int_{|x| < a} \sin(\lambda x) \psi(x) dx \right| = \left| -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x) \psi(x) \Big|_{t=-a}^a + \left| \frac{1}{\lambda} \int_{|x| < a} \cos(\lambda x) \psi'(x) dx \right| \quad (3)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} (2\|\psi\| + 2a\|\psi'\|) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0. \quad (4)$$

Für das zweite Integral substituieren wir $x \setminus \lambda x$ und verwenden wir unser Wissen aus der Analysis:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-a\lambda}^{a\lambda} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (5)$$

und somit

$$\frac{\sin(\lambda x)}{x} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \pi \delta. \quad (6)$$

(iii) Mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left\langle \arctan\left(\frac{x}{a}\right), \phi \right\rangle = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{a \rightarrow 0+} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \phi(x) dx = \pi \left\langle H - \frac{1}{2}, \phi \right\rangle,$$

wobei H die Heaviside-Funktion ist und nach Beispiel 3.12 die Gleichheit $H' = \delta$ gilt. Mit Lemma 3.13 erhalten wir

$$\frac{a}{x^2 + a^2} = \left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right)' \rightarrow \left(\pi \left(H - \frac{1}{2} \right) \right)' = \pi \delta$$

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine reguläre Distribution definiert, die punktweise Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ \text{undefiniert} & x = 0 \end{cases}$$

jedoch nicht.

(ii) Es bezeichne $\text{pv}(\frac{1}{x})$ die Distribution

$$\langle \text{pv}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \text{pv}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$.

(iii) Überprüfen Sie, dass $(\ln|x|)' = \text{pv}(\frac{1}{x})$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt.

Lösung. (i) Gegeben sei eine beliebige kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$. Wir wählen $a \in \mathbb{R}^+$ mit $K \subseteq [-a, a]$. Laut der Regel von L'Hospital, gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \ln(\epsilon)\epsilon = 0.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_K |f(x)| \, dx &= \int_{-a}^a |\ln |x|| \, dx = 2 \int_0^a |\ln x| \, dx = 2 \left(\int_0^1 -\ln x \, dx + \int_1^a \ln x \, dx \right) \\
&= 2 \left(- \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\ln(x)x - x) \Big|_{\epsilon}^1 + (\ln(x)x - x) \Big|_1^a \right) \\
&= 2 \left(- \underbrace{(\ln(1)1 - 1)}_{<\infty} + \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\ln(\epsilon)\epsilon - \epsilon)}_0 + \underbrace{(\ln(a)a - a)}_{<\infty} - \underbrace{(\ln(1)1 - 1)}_{<\infty} \right) < \infty
\end{aligned}$$

Betrachte hingegen

$$\int_0^1 |f'(x)| \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \log(1) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \log(\epsilon) = \infty.$$

(ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\left\langle \text{pv} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} \, dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(- \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x)}{x} \, dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \right) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \, dx
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle (\log |x|)', \varphi \rangle &= -\langle \log |x|, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \log |x| \varphi'(x) \, dx = - \int_0^{\infty} \log |x| (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) \, dx \\
&= - \int_0^{\infty} \log |x| (\varphi(x) - \varphi(-x))' \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \, dx = \left\langle \text{pv} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{x - i\epsilon} = \text{pv} \left(\frac{1}{x} \right) + \pi i \delta.$$

Lösung. Wir beginnen mit der folgenden Rechnung.

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = \frac{x + i\epsilon}{(x - i\epsilon)(x + i\epsilon)} = \frac{x + i\epsilon}{|x - i\epsilon|^2} = \frac{x + i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} + i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

Wegen der zweite Summand konvergiert, wissen wir schon aus der zweiten Aufgabe. Kümmern wir uns also um den ersten. Sei dazu $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$f_{\epsilon} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log \left(\sqrt{x^2 + \epsilon^2} \right) \phi(x), \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log |x| \phi(x)$$

Seien $a \in \mathbb{R}^-$, $b \in \mathbb{R}^+$, sodass $\text{supp } \phi \subseteq [a, b]$. Wir können also mit dem Satz von der dominierten Konvergenz die folgende Vertauschung des Grenzwerts mit dem Integral rechtfertigen. Auf den Intervallen $[a, -\delta]$, $[\delta, b]$ ist für $\epsilon^2 < \delta/2$ die Funktion

$$g(x) = \max \left\{ \left| \log \left(\sqrt{a^2 + 1} \right) \right|, \left| \log \left(\sqrt{b^2 + 1} \right) \right|, \left| \log \left(\sqrt{\delta/2} \right) \right| \right\} |\phi(x)|$$

eine integrierbare Majorante. Während für das Intervall $[-\delta, \delta]$ für $\delta^2 + \varepsilon^2 < 1$ die Ungleichung

$$\left| \log \left(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \right) \right| \leq |\log(|x|)|$$

gilt, also können wir als integrierbare Majorante $g(x) = |\log |x| \phi(x)|$ nehmen.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\langle \log \left(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \right), \phi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \log \left(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \right) \phi(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b \log \left(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \right) \phi(x) \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{-\delta} f_\varepsilon(x) \phi(x) \, dx + \int_{-\delta}^{\delta} f_\varepsilon(x) \phi(x) \, dx + \int_{\delta}^b f_\varepsilon(x) \phi(x) \, dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \log |x| \phi(x) \, dx = \langle \log |x|, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.13 folgt die gewünschte Gleichheit.

$$\frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\log \left(\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \right) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} [\log |x|]' = \text{pv} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Aufgabe 5. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt von endlicher Ordnung wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt sodass man für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ eine Konstante $C > 0$ finden kann, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ gilt:

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{C^m(K)}.$$

In diesem Fall heißt m die Ordnung von u . Gibt es kein solches m , sagt man, dass u unendliche Ordnung hat.

Bestimmen Sie die Ordnung folgender Distributionen ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen):

- (i) $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,
- (ii) $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,
- (iii) $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $x_0 \in \Omega$,
- (iv) $\varphi \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \partial^{\alpha_j} \varphi(x_j)$ für eine Folge $(x_j)_j$ in Ω ohne Häufungspunkt und $\alpha_j \in \mathbb{N}_0^n$.

Lösung. (i) Wir behaupten, die Ordnung ist 0. Sei dazu $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Menge, $C = 1$, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{C(K)}$$

Die Ungleichung ist für $0 \in K$ klar, ansonsten ist $0 \notin \text{supp}(\varphi)$ und die Ungleichung trivialerweise erfüllt.

(ii) Wir behaupten, die Ordnung ist 0. Sei dazu wieder $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Menge, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_K f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{C(K)} \|f|_K\|_{L^1(K)}$$

Mit $C = \|f|_K\|_{L^1(K)}$ als Konstante (in φ) haben wir die Behauptung also gezeigt.

- (iii) Wir behaupten, die Ordnung ist kleiner (eventuell gleich) $|\alpha|$. Erinnern wir uns zuerst an die Definition der Norm.

$$\|\phi\|_{C^k(K)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)|$$

Sei nun $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Menge, $C = 1$, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|\langle \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0), \varphi \rangle| = |\partial^\alpha \varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_{C^{|\alpha|}(K)}$$

Wie in (i) gilt die Ungleichung sowohl für $x_0 \in K$ als auch $x_0 \notin K$.

- (iv) Hier unterscheiden wir

1. Fall: $\max |\alpha_j| < \infty$. Dann wählen wir $m = \max |\alpha_j|$. Für kompaktes $K \subset \Omega$ gilt, da die Folge x_j in Ω keinen Häufungspunkt hat

$$C_K := |\{j \in \mathbb{N} : x_j \in K\}| < \infty$$

Das C_K sei nun also unsere Konstante. Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(K)$

$$\left| \left\langle \varphi \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \partial^{\alpha_j} \varphi(x_j), \varphi \right\rangle \right| = \left| \sum_{x_j \in \mathbb{K}} \partial^{\alpha_j} \varphi(x_j) \right| \leq \sum_{x_j \in \mathbb{K}} |\partial^{\alpha_j} \varphi(x_j)| \leq C_K \|\varphi\|_{C^m(K)}$$

2. Fall: Nun gibt es also $j \in \mathbb{N}$ sodass $|\alpha_j| = \infty$. Sei nun $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wählen wir nun eine kompakte Menge K_m sodass es ein $j_0 \in \mathbb{N} : x_{j_0} \in K \wedge |\alpha_{j_0}| > m$ gibt. Es soll von allen Folgengliedern nur $x_{j_0} \in K$ (solange keine doppelt vorkommen ist das auch möglich). Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(K)$

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \partial^{\alpha_j} \varphi(x_j) \right| = |\partial^{\alpha_{j_0}} \varphi(x_{j_0})|$$

und damit, wenn wir in (iii) noch Gleichheit für die Ordnung zeigen können, ist die Ordnung größer m .

Aufgabe 6. Eine Distribution heißt *positiv* wenn $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \geq 0$ gilt.

- (i) Zeigen Sie, dass jede positive Distribution Ordnung 0 hat.
- (ii) Zeigen Sie, dass folgende Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nicht positiv ist:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx.$$

Lösung. (i) Seien $K \subseteq \Omega$ kompakt und $u \in \mathcal{D}(K)'$ positiv sowie $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Laut der Konstruktion aus Aufgabe 1, $\exists \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\forall x \in K : \chi(x) = 1, \quad \chi \geq 0.$$

Laut der Definition der Supremumsnorm gilt $\phi := \varphi - \chi \|\varphi\|_{C(K)} \leq 0$. Wegen der Linearität von u , folgt aus $\phi \leq 0$ auch $\langle u, \phi \rangle \leq 0$.

$$\implies \langle u, \phi \rangle \leq 0 \iff \langle u, \varphi \rangle \leq \langle u, \chi \rangle \|\varphi\|_{C(K)}$$

(ii) Wir wählen die Funktion φ welche, wie wir aus der Vorlesung wissen, aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist und $\varphi \geq 0$ erfüllt.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Man beachte, dass $\text{supp } \varphi \subseteq [-1, 1]$. Außerdem nimmt die Funktion im Punkt 0 ihr Maximum an.

$$\implies \forall x \in [-1, 1] : \varphi(x) \leq \varphi(0) \implies \langle T, \varphi \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx < 0$$

Damit T nicht positiv.

Aufgabe 7. Der Träger einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist das Komplement der größten offenen Menge, auf der T verschwindet:

$$\text{supp } T = \Omega \setminus \bigcup \{U \subseteq \Omega \text{ offen} \mid T \text{ verschwindet auf } U\}.$$

Zeigen Sie:

- (i) Für $f \in C(\Omega)$ ist der distributionelle Träger gleich dem üblichen Träger der Funktion f .
- (ii) Ist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution von endlicher Ordnung m und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion deren Ableitung $\partial^\alpha \psi$ für $|\alpha| \leq m$ verschwindet, dann ist $\langle T, \psi \rangle = 0$.
- (iii) Gilt $\text{supp } T \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$, dann folgt $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
- (iv) Gilt $fT = 0$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$, dann folgt $\text{supp } T \subseteq \{x : f(x) = 0\}$.

Lösung. (i) Sei $f \in C(\Omega)$. Wir definieren die Mengen

$$A := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}, \quad B := \bigcup \left\{ U \subseteq \Omega \text{ offen} \mid \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left(\text{supp } (\phi) \subseteq U \Rightarrow \int_{\Omega} f \phi \, d\lambda^n = 0 \right) \right\}$$

und wollen $A = \Omega \setminus B$ zeigen.

\subseteq : Sei $x \in A$ und $V \subseteq \Omega$ eine beliebige offene Umgebung von x . Nach Definition von A gibt es ein $y \in V$ mit $f(y) \neq 0$, o.B.d.A $f(y) > 0$. Wegen der Stetigkeit von f finden wir nun eine Umgebung $W \subset V$ von y mit $f(W) > 0$. Nun wählen wir ein $0 \neq \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\phi \geq 0$ und $\text{supp}(\phi) \subseteq W$. Nun ist aber $\int_{\Omega} f \phi \, d\lambda^n > 0$, also ist $x \notin B$ und damit ist $x \in \Omega \setminus B$.

\supseteq : Sei $x \in A^c$, also gibt es eine Umgebung V von x mit $f(V) = 0$. Für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp}(\phi) \subseteq V$ gilt also $\int_{\Omega} f \phi \, d\lambda^n = 0$ also $V \subseteq B$ und damit $x \in B$.

(ii) Definieren wir die kompakte Menge $K := \text{supp}(\psi)$, so gilt $|\langle T, \psi \rangle| \leq C \|\psi\|_{C^m(K)} = 0$

(iii) Nach Definition von $\text{supp } T$ gilt also

$$\text{supp } \phi \subseteq \bigcup \{U \subseteq \Omega \text{ offen} \mid \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp } \psi \subseteq U \implies \langle T, \psi \rangle = 0\} =: V. \quad (7)$$

Mit der Identität als Karte ist die offene Menge V eine C^∞ Mannigfaltigkeit und wird wie man oben sieht überdeckt. Wir wählen eine dieser Überdeckung untergeordnete, lokal endliche C^∞ -Zerlegung der Eins $(\zeta_k)_{k=0}^\infty$ mit $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \zeta_k \geq 0$. Nun gilt für beliebiges $l \in \mathbb{N}$, einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und jedes $x \in \Omega$

$$\left| \sum_{k=1}^l \zeta_k(x) D^\alpha \phi(x) \right| = \left| D^\alpha \phi(x) \sum_{k=1}^l \zeta_k(x) \right| \leq |D^\alpha \phi(x)|.$$

Definiere $\psi_l := \sum_{k=1}^l \zeta_k(x) \phi(x)$. Also gilt auch $\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \psi_l| \leq \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi(x)| < \infty$ womit wir sehen, dass der linke Grenzwert für $l \rightarrow \infty$ existiert. Klarerweise gilt für alle $l \in \mathbb{N}$, dass $\text{supp } \psi_l \subseteq \text{supp } \phi$. Wegen der lokalen Endlichkeit (hineinziehen des Differentialoperators) und der eben gezeigten Konvergenz gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha(\phi(x) - \psi_l(x))| = \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} \left| D^\alpha \sum_{k=l}^\infty \zeta_k(x) \phi(x) - D^\alpha \psi_l(x) \right| = \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{k=l+1}^\infty \zeta_k(x) D^\alpha \phi(x) \right| = 0.$$

Die Folge von Funktionen ψ_l konvergiert also im Sinne von Definition 3.2 gegen ϕ . Damit und mit der Stetigkeit von T im Sinne der eben gezeigten Konvergenz gilt

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \sum_{k \in \mathbb{N}} \zeta_k \phi \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle T, \psi_l \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle T, \zeta_k \phi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = 0. \quad (8)$$

(iv) Seien $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$ so, dass $fT = 0$. Sei $x \in \Omega$ so, dass $f(x) \neq 0$, o.B.d.A $f(x) > 0$. Wegen der Stetigkeit von f finden wir eine Umgebung U von x mit $f(U) > 0$. Für ein beliebiges gegebenes $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp}(\phi) \subseteq U$ definieren wir $\psi := \frac{\phi}{f}$ und erhalten

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, f\psi \rangle = \langle fT, \psi \rangle = 0$$

und damit ist $x \notin \text{supp}(T)$.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass die Faltung

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y) \, dy$$

für $f, g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist, wenn $\text{supp } f$ und $\text{supp } g$ beide nach unten (oder beide nach oben) beschränkt sind. Berechnen Sie dann $f * f * \dots * f$ ($n \in \mathbb{N}$ Faktoren) für $f(t) = H(t)$.

Lösung. Seien die Träger von f und g o. B. d. A. nach unten beschränkt, d. h. es gebe ein $C \in \mathbb{R}$, sodass

$$(-\infty, C) \cap (\text{supp} f \cup \text{supp} g) = \emptyset. \quad (9)$$

Die Faltung $f * g$ ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) g(y) \, dy. \quad (10)$$

Damit der Integrand nicht Null ist, müssen also $x - y$ und y jeweils größer als C sein. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- Fall 1: $x < 2C$. In diesem Fall gilt für $y > C$

$$x < 2C < y + C \quad (11)$$

und damit $x - y < C$. Deshalb ist der Integrand und damit $f * g(x)$ in diesem Fall stets Null.

- Fall 2: $x > 2C$. Das Integral vereinfacht sich zu

$$(f * g)(x) = \int_C^{x-C} f(x - y) g(y) \, dy. \quad (12)$$

Für festes x ist $[C, x - C]$ eine kompakte Menge. f und g sind lokal quadratisch integrierbar. Die Existenz des Integrals ist somit eine unmittelbare Folgerung aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Wir wollen nun die n -te Faltung der Heaviside-Funktion H induktiv berechnen. Die Behauptung ist

$$H *^{(n)} H(t) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \frac{t^n}{n!}. \quad (13)$$

Für $n = 1$ gilt nach dem ersten Aufgabenteil (mit $C = 0$)

$$H * H(t) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \int_0^t H(t - y) H(y) \, dy = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \int_0^t 1 \, dy = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) t. \quad (14)$$

Im Induktionsschritt gilt (der Träger von $H *^{(n-1)} H$ ist nach Induktionsvoraussetzung nach unten durch Null beschränkt) wieder mit Teil eins

$$H *^{(n)} H(t) = H * (H *^{(n-1)} H) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \int_0^t \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \, dy = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \frac{t^n}{n!}. \quad (15)$$

Partielle Differentialgleichungen

4. Übung am 22.10.2020

Richard Weiss

Florian Schager
Paul Winkler

Christian Sallinger
Christian Göth

Fabian Zehetgruber

Aufgabe 1. Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^n mit C^∞ -Rand und $\mathbb{1}_\Omega$ ihre Indikatorfunktion. Zeigen Sie

$$\langle \Delta \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, ds,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist.

Lösung. Klarerweise ist $\mathbb{1}_\Omega \in L^1_{\text{loc}}$. Somit ist der Ausdruck auf der linken Seite, als Linearkombination von Ableitungen von dieser Distribution, wohldefiniert. Der Laplace-Operator Δ ist formal selbstadjungiert und $\Delta = \text{div}(\nabla)$. Wenn wir Ω als offen annehmen, können wir den Satz von Gauß anwenden (ansonsten müssen wir uns noch was einfallen lassen):

Satz 1.5 (Gauß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und äußerem Normaleneinheitsvektor ν , definiert auf $\partial\Omega$. Ferner sei $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ eine vektorwertige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \text{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, ds.$$

1-5 (Gauss).png

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \Delta \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle &= \langle \mathbb{1}_\Omega, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \text{div}(\nabla \varphi) \, dx \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi \cdot \nu \, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, ds \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass

$$F = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n}$$

eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(u) = \text{div}(u)$ auf \mathbb{R}^n ist, wobei σ_n die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^n ist. Achtung: Obwohl F eigentlich eine vektorwertige Distribution in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)^n$ ist, wird das nicht gebraucht um die Behauptung

$$\langle \text{div} F, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

zu zeigen, da $\text{div} F = \frac{1}{\sigma_n} \sum_i \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

Definition 3.19. Seien L ein linearer formaler Differentialoperator wie zu Beginn dieses Abschnitts und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen eine distributionelle Lösung von

$$L(U_\xi) = \delta_\xi,$$

wobei δ_ξ die verschobene Delta-Distribution aus Beispiel 3.11 ist, Fundamentallösung von L mit Pol in ξ .

3-19.png

Lösung. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen im Folgenden partiell integrieren.

der partiellen Integration.png

Hierbei bezeichnet das Integral auf der rechten Seite das Oberflächenintegral auf $\partial\Omega$. Man nennt F auch ein *Vektorfeld*. Der Satz von Gauß bleibt gültig, wenn $\partial\Omega$ die disjunkte Vereinigung von endlich vielen C^1 -Flächenstücken ist.

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, und es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ergibt die Produktregel $\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F$ und damit

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} F dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial\Omega} u (F \cdot \nu) ds.$$

Dies ist das mehrdimensionale Analogon der partiellen Integration.

Die Partielle Integration basiert auf dem Integral-Satz von Gauß. Um diesen anzuwenden, brauchen wir eine offene und beschränkte Menge. Das garantieren wir formal, indem wir $\Omega \supseteq \operatorname{supp}(\phi)$ als offene und beschränkte Menge mit C^1 -Rand wählen und durch $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus B_\epsilon(0)$ für $\epsilon > 0$ die Singularität 0 rausschneiden. Wir integrieren somit nur auf Ω bzw. Ω_ϵ . (Außerhalb des Trägers, verschwindet alles).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle LF, \phi \rangle &= \langle \operatorname{div} F, \phi \rangle = \left\langle \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right), \phi \right\rangle = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \left\langle \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right), \phi \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{x_i}{|x|^n}, \partial_i \phi \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sigma_n} \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^n}, \partial_i \phi \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^n} \partial_i \phi \, dx = -\frac{1}{\sigma_n} \int_{\Omega} \frac{x}{|x|^n} \cdot \nabla \phi(x) \, dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\sigma_n} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{x}{|x|^n} \cdot \nabla \phi(x) \, dx \stackrel{\text{PI}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma_n} \left(\int_{\Omega_\epsilon} \operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^n} \right) \phi(x) \, dx - \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{x}{|x|^n} \phi(x) \cdot \nu \, ds \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma_n} \left(\int_{\Omega_\epsilon} \operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^n} \right) \phi(x) \, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{x}{|x|^n} \phi(x) \cdot \nu \, ds}_0 - \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{x}{|x|^n} \phi(x) \cdot \nu \, ds \right) \end{aligned}$$

Wir kümmern uns nun um die übrigen Integrale separat. Das Erste fällt weg, weil

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^n} \right) &= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right) = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{n/2} - x_i 2x_i \frac{n}{2} (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{n/2-1}}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^n} \\
&= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \frac{1 - \frac{nx_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{n/2}} \\
&= \frac{1}{\sigma_n} \frac{n - n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{n/2}} = 0.
\end{aligned}$$

Das Zweite wird zu genau dem Rest, den wir brauchen. Dazu bemerken wir, dass das Normalvektorfeld auf $\partial B_\epsilon(0)$ wie folgt aussieht.

$$|x| = \epsilon, \quad \nu(x) = -\frac{x}{|x|}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung berechnen wir den Rest.

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{x}{|x|^n} \phi(x) \cdot \nu \, ds &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{x \cdot x}{|x|^{n+1}} \phi(x) \, ds = \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{|x|^2}{|x|^{n+1}} \phi(x) \, ds = \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\epsilon^2}{\epsilon^{n+1}} \phi(x) \, ds \\
&\stackrel{\text{MWS}}{=} \epsilon^{1-n} \phi(x_\epsilon) \operatorname{meas} \partial B_\epsilon(0) = \epsilon^{1-n} \epsilon^{n-1} \sigma_n \phi(x_\epsilon) = \sigma_n \phi(x_\epsilon)
\end{aligned}$$

Formal gilt noch zu zeigen, dass $F_i = \frac{x_i}{|x|^n}$ eine L^1_{loc} -Funktion ist, dazu betrachten wir das Integral über den Radialanteil in sphärischen Koordinaten. Dort betrachten wir eine Kugel die unser Kompaktum umfasst. Dann gilt für $g(x) = |x|^{1-n}$, da $r = |x|$

$$\int_0^r z^{1-n} z^{n-1} dz = r < \infty$$

Damit ist nach folgender Rechnung auch $\sum_{i=1}^n |F_i|$, und somit auch F_i eine L^1_{loc} -Funktion.

$$\int_K \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x|^n} \, dx \stackrel{CS}{\leq} \int_K n \frac{|x|}{|x|^n} \, dx = n \int_K |x|^{1-n} \, dx < \infty$$

□

Aufgabe 3. Gegeben $v \in C^2(\mathbb{R})$, sei $u(x, t) = v(x/\sqrt{t})$ für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie:

$$u_t = u_{xx} \iff v''(z) + \frac{z}{2} v'(z) = 0.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung v und damit u .

(ii) Wählen Sie die Konstanten in u so, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0 \text{ für } x < 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 1 \text{ für } x > 0.$$

- (iii) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Funktion $f(x, t) = (\partial_x u(\cdot, t) * \varphi)(x)$ (Faltung in der x -Variablen) folgendes Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung löst:

$$\begin{aligned} f_t - f_{xx} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

Lösung. (i) Da $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = u_t - u_{xx} &= \partial_t v(x/\sqrt{t}) - \partial_{xx} v(x/\sqrt{t}) = -\frac{x}{2\sqrt{t}^3} v'(x/\sqrt{t}) - \frac{1}{t} v''(x/\sqrt{t}) = -\frac{z}{2t} v'(z) - \frac{1}{t} v''(z) \\ &\iff \frac{z}{2} v'(z) + v''(z) = 0. \end{aligned}$$

Nun lösen wir die gewöhnliche Differentialgleichung für $w := v'$

$$\begin{aligned} w'(z) + \frac{z}{2} w(z) = 0 &\iff \frac{w'(z)}{w(z)} = -\frac{z}{2} \iff \ln(w(z))' = -\frac{z}{2} \iff \ln(w(z)) = -\frac{z^2}{4} + C_0 \\ &\iff w(z) = C_1 \exp(-z^2/4). \end{aligned}$$

Also erhalten wir $v(z) = C_1 \int_0^z \exp(-s^2/4) ds + C_2$ und $u(x, t) = v(x/\sqrt{t}) = C_1 \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4) ds + C_2$.

(ii)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} C_1 \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4) ds + C_2 = \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\pi} C_1 + C_2.$$

Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\sqrt{\pi} C_1 + C_2 &= 0 \iff C_2 = C_1 \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} C_1 + C_2 &= 1 \iff 2C_1 \sqrt{\pi} = 1 \iff C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iff C_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Unter diesen zusätzlichen Bedingungen lautet unsere Lösung nun

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4) ds + \frac{1}{2}.$$

- (iii) Da $u(\cdot, t)$ und $\partial_x u(\cdot, 1)$ stetig sind, sind sie insbesondere auch lokal integrierbar und es folgt mit Lemma 3.14

$$\begin{aligned} f_t - f_{xx} &= \partial_t((\partial_x u(\cdot, t) * \varphi)(x)) - \partial_{xx}(\partial_x u(\cdot, t) * \varphi)(x) \\ &= (\partial_{tx} u(\cdot, t) * \varphi)(x) - (\partial_{xxx} u(\cdot, t) * \varphi)(x) \\ &= ((\partial_{tx} u(\cdot, t) - \partial_{xxx} u(\cdot, t)) * \varphi)(x) \\ &= ((\partial_x(\partial_t u(\cdot, t) - \partial_{xx} u(\cdot, t))) * \varphi)(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (\partial_x u(\cdot, t) * \varphi)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (u(\cdot, t) * \varphi')(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} u(x-y, t) \varphi'(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x-y, t) \varphi'(y) dy = \int_{-\infty}^x \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x-y, t) \varphi'(y) dy + \int_x^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x-y, t) \varphi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \varphi'(y) dy = \varphi(x). \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Grenzwert und Integral gelingt mittels dominierter Konvergenz wegen der Abschätzung

$$|u(x-y, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-y)/\sqrt{t}} \exp(-s^2/4) ds + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-s^2/4) ds + \frac{1}{2}$$

□

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(x, y) = (8\pi)^{-1} (x^2 + y^2) \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

ist eine Fundamentallösung von Δ^2 mit Pol in $(0, 0)$ im \mathbb{R}^2 , wobei

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^2 u_{x_i x_i x_j x_j}.$$

Lösung. Wir zeigen also für beliebiges $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$\langle \Delta^2 u, \phi \rangle := \langle u, \Delta^2 \phi \rangle \stackrel{!}{=} \phi(0)$$

Wir machen einen Ansatz wie im Skript: Sei $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$, dann soll

$$\phi(0) \stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta^2 \phi dx$$

Nun integrieren wir viermal partiell gemäß dem Satz von Gauß:

der partiellen Integration.png

Hierbei bezeichnet das Integral auf der rechten Seite das Oberflächenintegral auf $\partial\Omega$. Man nennt F auch ein *Vektorfeld*. Der Satz von Gauß bleibt gültig, wenn $\partial\Omega$ die disjunkte Vereinigung von endlich vielen C^1 -Flächenstücken ist.

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, und es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ergibt die Produktregel $\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F$ und damit

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} F dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial\Omega} u(F \cdot \nu) ds.$$

Dies ist das mehrdimensionale Analogon der partiellen Integration.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta^2 \phi dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} u \operatorname{div} \underbrace{\nabla \Delta \phi}_F dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\nabla u}_F \cdot \underbrace{\nabla \Delta \phi}_u dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla \Delta \phi \cdot \nu) ds = \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\operatorname{div} \nabla u}_{\Delta u} \underbrace{\Delta \phi}_{\operatorname{div} \nabla \phi} dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta \phi(\nabla u \cdot \nu) ds + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla \Delta \phi \cdot \nu) ds = \\ &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \Delta u \cdot \nabla \phi dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta u(\nabla \phi \cdot \nu) ds - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta \phi(\nabla u \cdot \nu) ds + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla \Delta \phi \cdot \nu) ds = \\ &= \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta^2 u \phi dx}_0 - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi(\nabla \Delta u \cdot \nu) ds + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta u(\nabla \phi \cdot \nu) ds - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta \phi(\nabla u \cdot \nu) ds + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\nabla \Delta \phi \cdot \nu) ds \end{aligned}$$

Die Integrale über den Rand sehen wir uns einzeln an. Dabei ist der Normalenvektor an $\partial\Omega_\varepsilon$ gegeben durch

$$\nu(x, y) = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Für das erste wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung an: Es existiert ein $x_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(0)$, sodass

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi(\nabla \Delta u \cdot \nu) ds = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi \left(\frac{1}{2\pi(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \right) ds = \phi(x_\varepsilon) \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} 1 ds = \phi(x_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(0)$$

Das zweite transformieren wir in Polarkoordinaten, also $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$. Da $\Delta u = \frac{\ln(x^2 + y^2) + 2}{4\pi}$ erhalten wir unter Anwendung der CS-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\ln(x^2 + y^2) + 2)(\nabla \phi \cdot \nu) ds \right| &\leq \frac{\|\nabla \phi\|}{4\pi} \left(\int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \ln(r^2) r d\varphi dr + \underbrace{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} 2 ds}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0} \right) = \frac{\|\nabla \phi\|}{2} \int_0^\varepsilon \ln(r^2) r dr = \\ &= \frac{\|\nabla \phi\|}{2} \left[\frac{r^2 \ln(r^2) - r^2}{2} \right]_{r=0}^\varepsilon = \|\nabla \phi\| \frac{\varepsilon^2 (\ln(\varepsilon^2) - 1)}{4} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Beim dritten berechnen wir nun zuerst $\nabla u \cdot \nu = \frac{(x^2 + y^2) \ln(\sqrt{x^2 + y^2})}{4\pi} + \frac{x^2 + y^2}{8\pi}$. Dann erhalten wir wiederum mit TRAFO:

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Delta \phi (\nabla u \cdot \nu) ds \right| \leq \|\Delta \phi\| \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{r^3 \ln r}{4\pi} + \frac{r^3}{8\pi} d\varphi dr = \|\Delta \phi\| \int_0^\varepsilon \frac{r^3 \ln r}{2} + \frac{r^3}{4} dr = \|\Delta \phi\| \left(\frac{4\varepsilon^4 \ln \varepsilon - \varepsilon^4}{16} + \frac{\varepsilon^4}{32} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Auch beim letzten können wir das so durchführen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (x^2 + y^2) (\ln(\sqrt{x^2 + y^2})) (\nabla \Delta \phi \cdot \nu) ds \right| &\leq \frac{\|\nabla \Delta \phi\|}{8\pi} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} r^3 \ln(r) d\varphi dr = \frac{\|\nabla \Delta \phi\|}{4} \int_0^\varepsilon r^3 \ln(r) dr = \\ &= \frac{\|\nabla \Delta \phi\|}{4} \frac{4\varepsilon^4 \ln(\varepsilon) - \varepsilon^4}{16} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Damit ist diese Funktion also wirklich eine Fundamentallösung.

Alternative Lösung:

Durch elementares Ableiten erhält man

$$(\Delta u)(x, y) = \frac{\log(\sqrt{x^2 + y^2}) + 1}{2\pi}. \quad (1)$$

Nach Satz 4.1 ist $\frac{\log(r)}{2\pi}$ eine Fundamentallösung des Laplace-Operators, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Daher gilt

$$\langle \Delta^2 u, \phi \rangle = \left\langle \Delta \left(\frac{\log(\sqrt{x^2 + y^2}) + 1}{2\pi} \right), \phi \right\rangle = \quad (2)$$

$$\left\langle \Delta \left(\frac{\log(\sqrt{x^2 + y^2})}{2\pi} \right) + \underbrace{\Delta \frac{1}{2\pi}}_{=0}, \phi \right\rangle = \left\langle \Delta \frac{\log(r)}{2\pi}, \phi \right\rangle \stackrel{\text{Satz 4.1}}{=} \langle \delta_0, \phi \rangle. \quad (3)$$

□

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die formal adjungierten Operatoren von

(i) $L\phi = a(x, y)\phi_x + b(x, y)\phi_y + c(x, y)\phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$

(ii) $L\phi = x^2\phi'' + \phi' - 3x^2\phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$

(iii) $L\phi = \Delta\phi + v(x)\nabla \cdot \phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$

mit $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Lösung. (i)

$$\begin{aligned} L^*(\phi) &= -\partial_x(a(x, y)\phi) - \partial_y(b(x, y)\phi) + c(x, y)\phi \\ &= -a_x(x, y)\phi - a(x, y)\phi_x - b_y(x, y)\phi - b(x, y)\phi_y + c(x, y)\phi \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} L^*(\phi) &= (x^2\phi)'' - \phi' - 3x^2\phi = (2x\phi + x^2\phi')' - \phi' - 3x^2\phi \\ &= 2\phi + 4x\phi' + x^2\phi'' - \phi' - 3x^2\phi \end{aligned}$$

(iii)

$$L\phi = \Delta\phi + \sum_{i=1}^n v_i \partial_{x_i} \phi$$

Nun bleibt $\Delta\phi$ nach Definition des formal adjungierten Operators erhalten und es gibt sich insgesamt

$$L^*(\phi) = \Delta\phi - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(v_i\phi) = \Delta\phi - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v_i \phi - \sum_{i=1}^n v_i \partial_{x_i} \phi = \Delta\phi - \operatorname{div}(v)\phi - v \nabla \phi$$

□

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von ∂^α in \mathbb{R}^n mit Träger in

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \forall i = 1, \dots, n : x_i \geq 0\},$$

wobei alle $\alpha_i > 0$ sind.

Lösung. Wir behaupten die allgemeine Lösung lautet

$$U_0(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!}.$$

Wir behaupten per Induktion

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!} \partial_\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \phi(0).$$

Betrachte zuerst den Fall $n = 1$:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1!} \\ \langle \partial_\alpha U_0, \phi \rangle &= (-1)^\alpha \langle U_0, \phi^{(\alpha)} \rangle \\ &= (-1)^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \phi^{(\alpha)}(x) dx \\ &= (-1)^\alpha (-1)^{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{x^0}{0!} \phi'(x) dx \\ &= -1 \int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Nun zum Induktionsschritt $n - 1 \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_\alpha U_0, \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!} \partial_\alpha \phi(x) dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!} \partial_\alpha \phi(x) dx_n d\bar{x} \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha_n-1}}{(\alpha_n-1)!} \partial_\alpha \phi(\bar{x}, x_n) dx_n d\bar{x} \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{\alpha_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x_i) \frac{x_i^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!} \phi(\bar{x}, 0) d\bar{x} = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \phi(0) = \phi(0).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7. Bestimmen Sie Fundamentallösungen mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$ folgender Differentialoperatoren auf \mathbb{R} :

- (i) $L(u) = u'$
- (ii) $L(u) = u''$
- (iii) $L(u) = u' - au$ ($a \neq 0$)

Hinweis: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung u_{hom} der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ und verwenden Sie einen Ansatz der Form $U_0(x) = C_1 u_{hom}(x)$ für $x < 0$, $U_0(x) = C_2 u_{hom}(x)$ für $x > 0$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Lösung. (i) Wir wählen die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases}$$

und rechnen für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig nach

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Also ist die Heaviside-Funktion eine Fundamentallösung zur Polstelle 0. Für eine Fundamentallösung U_ξ zur Polstelle $\xi \in \mathbb{R}$ gehen wir nach folgender Formel vor:

$$U_\xi(x) = \tau_{-\xi} U_0(x) = \tau_{-\xi} H(x) = H(x - \xi) = \begin{cases} 0 & : x < \xi \\ 1 & : x \geq \xi \end{cases}.$$

(ii) Die Lösung ist aus dem Skript bekannt:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & : x \leq \xi \\ \xi(x - 1) & : x > \xi \end{cases}$$

(iii) Wir lösen $Lu = u' - au \stackrel{!}{=} 0$.

$$\frac{u'}{u} = a \iff \ln(u)' = a \iff \ln(u) = ax + C \iff u = D \exp(ax)$$

Wir machen den Ansatz

$$U_0(x) = \begin{cases} C_1 \exp(ax) & : x < 0 \\ C_2 \exp(ax) & : x \geq 0 \end{cases}$$

und setzen für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ beliebig ein:

$$\begin{aligned} \langle L(U_0), \phi \rangle &= -\langle U_0, \phi' + a\phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} U_0(\phi' + a\phi) dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 C_1 \exp(ax)(\phi' + a\phi) dx - \int_0^{\infty} C_2 \exp(ax)(\phi' + a\phi) dx \\ &= -[C_1 \exp(ax)\phi]_{-\infty}^0 - [C_2 \exp(ax)\phi]_0^{\infty} \\ &= (C_2 - C_1) \exp(0)\phi(0) = (C_2 - C_1) \langle \delta, \phi \rangle \end{aligned}$$

Für $C_2 - C_1 = 1$ ist also U_0 eine Fundamentallösung an der Polstelle 0. Wählen wir also der Einfachheit halber $C_2 = 1$ und $C_1 = 0$, dann erhalten wir

$$U_{\xi}(x) = \tau_{-\xi} U_0(x) = \begin{cases} 0 & : x < \xi \\ \exp(a(x - \xi)) & : x \geq \xi \end{cases}.$$

□

Partielle Differentialgleichungen

5. Übung am 29.10.2020

Richard Weiss

Florian Schager
Paul Winkler

Christian Sallinger
Christian Göth

Fabian Zehetgruber

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für $L(u) = u' - au$ ($a \in \mathbb{R}$) eine Greensche Funktion G auf $\Omega = (0, \infty)$, also für festes $x \in \Omega$ gelten

$$LG(x, \cdot) = \delta_x \quad \text{in } \Omega, \quad G(x, \cdot) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Lösung. Wir suchen also eine Funktion G mit

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ G_y(x, y) - aG(x, y) &= \delta_x, & x, y > 0 \end{aligned}$$

Wir kennen aus der letzten Übung eine Fundamentallösung für den Operator $L(u) = u' - au$ mit Polstelle x :

$$U_x(y) = \begin{cases} 0 & : y < x \\ \exp(a(y-x)) & : y \geq x \end{cases}$$

Es sieht so aus, als hätten wir Glück gehabt: Für $x > 0$ ist $U_x(0) = 0$. Also definieren wir

$$G(x, y) := U_x(y)$$

und haben gewonnen! □

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) &= f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

mit $k(x) > 0$ für $0 \leq x \leq 1$ eine Funktion $g(x, y)$ (genannt *greensche Funktion*) sodass

$$u(x) = \int_0^1 g(x, y) f(y) dy$$

das Randwertproblem löst. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (i) Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit einer Funktion $K(x)$, welche das homogene Problem

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = 0$$

löst und die Randbedingung bei $x = 1$ erfüllt.

- (ii) Integrieren Sie die erhaltene Gleichung von $x = 0$ bis $x = 1$, um einen Ausdruck für $u'(0)$ zu erhalten.

(iii) Leiten Sie daraus eine Formel für $u'(x)$ und dann $u(x)$ her.

(iv) Bringen Sie die Formel für $u(x)$ auf die gewünschte Form.

Überprüfen Sie am Ende, dass

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dg}{dy}(x, y) \right) &= \delta(x - y) \\ g(x, 0) &= g(x, 1) = 0 \end{aligned}$$

gilt.

Hinweis: Die Methode ist im Spezialfall $k(x) = 1$ mit $K(x) = 1 - x$ etwas einfacher.

Lösung. (i) Lösen wir also das homogene Problem mit Randbedingung $u(1) = 0$:

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = 0 \iff -k(x)u'(x) = C \iff u(x) = C \int_x^1 \frac{1}{k(y)} dy$$

Setzen wir $C = 1$ erhalten wir eine Lösung $K(x) = \int_x^1 \frac{1}{k(y)} dy$.

Rechnen wir mal mal:

$$-(k(x)u'(x))'K(x) = f(x)K(x)$$

(ii) Integrieren wir mal:

$$\begin{aligned} -\int_0^1 (k(x)u'(x))'K(x)dx &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\ \iff -[k(x)u'(x)K(x)]_{x=0}^1 + \int_0^1 k(x)u'(x)K'(x)dx &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\ \iff k(0)u'(0)K(0) - \underbrace{k(1)u'(1)K(1)}_{=0} - \int_0^1 u'(x)dx &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\ \iff k(0)u'(0)K(0) + \underbrace{(u(0) - u(1))}_{=0} &= \int_0^1 f(x)K(x)dx \\ \iff u'(0) &= \frac{\int_0^1 f(x)K(x)dx}{k(0)K(0)} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
-(k(x)u'(x))' = f(x) &\iff -k(x)u'(x) = \int_0^x f(x)dx - k(0)u'(0) \\
&\iff u'(x) = \frac{k(0)u'(0) - \int_0^x f(y)dy}{k(x)} \\
&\iff u(x) = \int_0^x \frac{k(0)u'(0) - \int_0^y f(z)dz}{k(y)} dy \\
&\iff u(x) = k(0)u'(0) \int_0^x \frac{1}{k(y)} - \int_0^y \frac{f(z)}{k(y)} dz dy \\
&\iff u(x) = k(0)u'(0)(K(0) - K(x)) - \int_0^x \int_0^y \frac{f(z)}{k(y)} dz dy \\
&\iff u(x) = \frac{\int_0^1 f(y)K(y)dy}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \int_0^x \int_0^y \frac{f(z)}{k(y)} dz dy \\
&\iff u(x) = \int_0^1 \frac{f(z)K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x))dz - \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,x]}(y) \mathbb{1}_{[0,y]}(z) \frac{f(z)}{k(y)} dy dz \\
&\iff u(x) = \int_0^1 \frac{f(z)K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - f(z) \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,x]}(y) \mathbb{1}_{[z,1]}(y) \frac{1}{k(y)} dy dz \\
&\iff u(x) = \int_0^1 \frac{f(z)K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - f(z) \mathbb{1}_{[0,x]}(z)(K(z) - K(x))dz \\
&\iff u(x) = \int_0^1 f(z) \left[\frac{K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(z)(K(z) - K(x)) \right] dz
\end{aligned}$$

Also erhalten wir mit

$$g(x, z) = \frac{K(z)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(z)(K(z) - K(x))$$

die lange gesuchte greensche Funktion.

(iv) Zuerst die Randbedingungen, die sind einfacher (und wir brauchen sie für die erste Gleichheit noch):

$$g(x, 0) = \frac{K(0)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(0)(K(0) - K(x)) = (K(0) - K(x)) - (K(0) - K(x)) = 0,$$

$$g(x, 1) = \frac{K(1)}{K(0)}(K(0) - K(x)) - \mathbb{1}_{[0,x]}(1)(K(1) - K(x)) = 0.$$

Wie ist die erste Gleichheit zu verstehen? Ich kann für festes x zeigen, dass δ_x rauskommt...

$$\begin{aligned}
-\left\langle \frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dg}{dy}(x, y) \right), \phi(y) \right\rangle &= -\langle g(x, y), (k(y)\phi'(y))' \rangle \\
&= -\int_0^1 g(x, y) (k(y)\phi'(y))' dy \\
&= -[g(x, y)k(y)\phi'(y)]_{y=0}^1 + \int_0^1 k(y)\phi'(y)g_y(x, y) dy \\
&= \int_0^1 k(y)\phi'(y)g_y(x, y) dy \\
&= \int_0^x k(y)\phi'(y) \left(\frac{K(x) - K(0)}{K(0)k(y)} + \frac{1}{k(y)} \right) dy + \int_x^1 k(y)\phi'(y) \left(\frac{K(x) - K(0)}{K(0)k(y)} \right) dy \\
&= \int_0^x \phi'(y) \frac{K(x)}{K(0)} dy + \int_x^1 \phi'(y) \frac{K(x) - K(0)}{K(0)} dy \\
&= \frac{K(x)}{K(0)} \phi(x) - \phi(0) + \phi(1) \frac{K(x) - K(0)}{K(0)} - \phi(x) \frac{K(x) - K(0)}{K(0)} = \phi(x).
\end{aligned}$$

Zum Schluss verwenden wir die kuriose Tatsache, dass $\phi(0) = \phi(1) = 0$, da ϕ eine Testfunktion auf $[0, 1]$ ist. □

Aufgabe 3. Berechnen Sie die greensche Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$ für Δ auf der Vierelebene

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

mit Hilfe der Spiegelungsmethode. Stellen Sie mit dieser greenschen Funktion die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(x, 0) = f(x) \text{ für } x > 0, \quad u(0, y) = g(y) \text{ für } y > 0$$

dar, wobei f und g stetig und beschränkt auf $(0, \infty)$ sind. Ist diese Lösung eindeutig?

Lösung. Wir verwenden die Fundamentallösung im \mathbb{R}^2 ,

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0).$$

Die Spiegelungsmethode liefert nach richtiger Anwendung beide Teile von (4.4).

1. Nachdem wir, durch addieren von gespiegelten Fundamentallösungen, nur Pole außerhalb von Ω einführen, und uns auf Ω am Ende beschränken, ist der erste Teil automatisch gegeben.
2. Wir wollen im zweiten Teil, dass die Greensche Funktion mit $(\xi, \eta) \in \partial\Omega$ verschwindet. Schematisch lässt sich das mit Matrizen ausdrücken. Der Text unter den Matrizen soll die Spiegelung beschreiben. Die Summe der Matrizen soll (auf dem Rand) 0 werden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & N & \\ W & & O \\ & S & \end{pmatrix}}_{\text{keine}} - \underbrace{\begin{pmatrix} & S & \\ W & & O \\ & N & \end{pmatrix}}_{x \text{ Achse}} - \underbrace{\begin{pmatrix} & N & \\ O & & W \\ & S & \end{pmatrix}}_{y \text{ Achse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} & S & \\ O & & W \\ & N & \end{pmatrix}}_{x \& y \text{ Achse}} = 0$$

Definition 4-3.png

4-3.png

Insgesamt erhalten wir durch die Spiegelungsmethode folgenden Kandidaten für die Greensche Funktion.

$$\begin{aligned}
G(x, y, \xi, \eta) &= U\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right|\right) - h_{(x, y)}\left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= U\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right|\right) - U\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\xi \\ \eta \end{pmatrix}\right|\right) - U\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \\ -\eta \end{pmatrix}\right|\right) + U\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\xi \\ -\eta \end{pmatrix}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right. \\
&\quad \left. - \ln \sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \ln \sqrt{(x + \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) - \ln((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2) \right. \\
&\quad \left. - \ln((x + \xi)^2 + (y - \eta)^2) + \ln((x + \xi)^2 + (y + \eta)^2) \right)
\end{aligned}$$

Wir wollen die Repräsentationsformel für das Dirichlet-Problem benutzen um einen Lösungskandidaten zu finden. Unsere Rand-Funktionen können wir zu einer zusammenfassen.

$$h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \begin{cases} u(0, y) = g(y), & x = 0, \\ u(x, 0) = f(x), & y = 0 \end{cases}$$

Satz 4-4 (Repraesentationsformel fuer das Dirichlet-Problem.png)

Weil unser Dirichlet-Problem homogen ist, fällt das zweite Integral von (4.5) weg. Wir erhalten somit folgende Repräsentation von u .

$$u(x, y) = \int_{\partial\Omega} h(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y, \xi, \eta) \, ds(\xi, \eta) = - \int_0^\infty \underbrace{h(0, \eta)}_{g(\eta)} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, y, 0, \eta)}_{=: K_\xi(x, y, \eta)} \, d\eta - \int_0^\infty \underbrace{h(\xi, 0)}_{f(\xi)} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y, \xi, 0)}_{=: K_\eta(x, y, \xi)} \, d\xi$$

Wir berechnen die (eigentlich negativen) Kerne explizit.

$$K_\xi(x, y, \eta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{x^2 + (y + \eta)^2} + \frac{x}{x^2 + (y - \eta)^2} \right), \quad K_\eta(x, y, \xi) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{y}{y^2 + (x + \xi)^2} + \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} \right)$$

Wir berechnen deren Integrale.

$$I_\eta := \int_0^\infty K_\xi(x, y, \eta) \, d\eta = \frac{1}{\pi} \left(\arctan_2 \left(\frac{x}{y} \right) - \arctan_2 \left(\frac{x}{-y} \right) \right) \stackrel{x \geq 0}{=} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} - \arctan -\frac{y}{x} \right) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{y}{x}$$

$$I_\xi := \int_0^\infty K_\eta(x, y, \xi) \, d\xi = \frac{1}{\pi} \left(\arctan_2 \left(\frac{y}{x} \right) - \arctan_2 \left(\frac{y}{-x} \right) \right) \stackrel{y \geq 0}{=} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x}{y} - \arctan -\frac{x}{y} \right) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{y}$$

Um zu sehen, dass die Summe der Integrale konstant gleich 1 ist, bemerken wir, dass dies für $x := y := 1$ gilt, und die Ableitungen nach x und y verschwinden.

$$\implies I := I_\xi + I_\eta = \frac{2}{\pi} \left(\arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x} \right) = 1$$

Der erste Teil von (4.4) funktioniert analog zu Beweis von Satz 4.5. Der zweite Teil nicht ganz ...

$$u(x, y) \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0), \\ \xrightarrow{y \rightarrow 0} \\ \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0} g(y_0). \end{cases}$$

Weil das sehr aufwändig ist, tun wir das aber nur für die x -Achse.

$$\begin{aligned} |u(x, y) - f(x_0)| &= \left| \int_0^\infty g(\eta) K_\xi(x, y, \eta) \, d\eta + \int_0^\infty f(\xi) K_\eta(x, y, \xi) \, d\xi - f(x_0) \cdot I \right| \\ &\leq \underbrace{\int_0^\infty K_\xi(x, y, \eta) |g(\eta) - f(x_0)| \, d\eta}_{\dots} + \underbrace{\int_0^\infty K_\eta(x, y, \xi) |f(\xi) - f(x_0)| \, d\xi}_{\text{siehe Beweis von Satz 4.5}} \end{aligned}$$

Das zweite Integral wird im Beweis von Satz 4.5 abgeschätzt; Wir kümmern uns daher bloß um das erste. Dazu bemerken wir, dass g und f beschränkt sind.

$$\dots \leq \sup_{\eta \in (0, \infty)} |g(\eta) - f(x_0)| \int_0^\infty K_\xi(x, y, \eta) \, d\eta = \frac{2}{\pi} \underbrace{\sup_{\eta \in (0, \infty)} |g(\eta) - f(x_0)| \arctan \frac{y}{x}}_{< \infty} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

Eindeutigkeit gilt nicht, da $u(x, y) + Cxy$ für $C \in \mathbb{R}$ ebenso eine Lösung ist. □

Aufgabe 4. Betrachten Sie die *Helmholtz-Gleichung*

$$(\Delta + k^2)u = f \text{ in } \mathbb{R}^3$$

mit der Wellenzahl $k > 0$, der Wellenquelle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und dem Wellenfeld $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$.

- (i) Berechnen Sie eine radialsymmetrische Funktion $G(x, \xi) = g(|x - \xi|)$, für die $(\Delta_x + k^2)G = \delta_\xi$ gilt, und die der *sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) g(r) = 0$$

genügt.

Anmerkung: Diese Bedingung stellt eine Randbedingung (im Unendlichen) dar, weshalb man G auch eine greensche Funktion nennt.

- (ii) Stellen Sie die/eine Lösung u der Helmholtz-Gleichung mit Hilfe von $G(x, \xi)$ dar. Zeigen Sie, dass für eine radialsymmetrische Funktion f diese Lösung auch radialsymmetrisch ist.
- (iii) Konstruieren Sie aus G zwei weitere Funktionen G_{Dir} und G_{Neu} , welche greensche Funktionen auf $\Omega := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ sind und auf $\partial\Omega$ homogene Dirichlet- bzw. homogene Neumann-Randbedingungen erfüllen.

Lösung. (i) Da unser Ableitungsoperator nur konstante Koeffizienten hat suchen wir eine Lösung mit Pol in 0 und verschieben diese dann nach Satz 3.21, den wir anwenden können da unser Differentialoperator ja konstante Koeffizienten hat, um eine Polstelle in ξ zu erhalten. Unsere Funktion g soll nun radialsymmetrisch sein mit Radius $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Wir berechnen zuerst für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = g'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = g'(r) \frac{x_i}{r}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = g''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + g'(r) \frac{1}{r} - g'(r) \frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r^2}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$(\Delta_x + k^2)G = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + k^2 G = g''(r) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{r^2} + g'(r) \frac{3}{r} - g'(r) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{r^3} + k^2 g(r) = g''(r) + \frac{2}{r} g'(r) + k^2 g(r)$$

Also wird $(\Delta_x + k^2)G = 0$ zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für g die für $r > 0$ zu lösen ist.

$$0 = g''(r) + \frac{2}{r} g'(r) + k^2 g(r)$$

Durch Multiplikation mit r und unter der Verwendung der Produktregel bekommen wir

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rg) + k^2(rg) = 0$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind gegeben durch $g = C \frac{1}{r} e^{\pm ikr}$, $C \in \mathbb{C}$. Um der sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung zu genügen wählen wir $g = C \frac{1}{r} e^{ikr}$ mit der noch unbestimmten Konstante C und rechnen nach

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) g(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(C \frac{ike^{ikr}r - e^{ikr}}{r^2} - ikC e^{ikr} \frac{1}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{1}{r^2} e^{ikr} (ikr - 1) - ikC e^{ikr} \frac{1}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} e^{ikr} ikrC - \frac{1}{r} e^{ikr} C - e^{ikr} ikC = 0 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Funktion $G(x, \xi) = g(|x - \xi|)$ auch Fundamentallösung ist sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ beliebig, $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)$, dann ist (mit PI nach Gauss)

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta_x + k^2)G(\cdot, 0), \phi \rangle &= \langle G(\cdot, 0), (\Delta_x + k^2)\phi \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} G(x, 0)(\Delta + k^2)\phi(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} G(x, 0)\Delta\phi(x) \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} G(x, 0)k^2\phi(x) \, dx \\
&= - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla G(x, 0) \cdot \nabla \phi(x) \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} G(x, 0)k^2\phi(x) \, dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(x, 0)\nabla\phi \cdot \nu \, ds \\
&= \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta_x + k^2)G(x, 0)\phi(x) \, dx}_{=0} + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(x, 0)\nabla\phi \cdot \nu \, ds - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi \nabla G(x, 0) \cdot \nu \, ds
\end{aligned}$$

Die beiden Randintegrale schauen wir uns für $\varepsilon \rightarrow 0$ noch einmal genauer an.

$$\left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(x, 0)\nabla\phi \cdot \nu \, ds \right) \leq \underbrace{|g(\varepsilon)|}_{\frac{C}{\varepsilon}} \underbrace{\text{meas}(\partial\Omega_\varepsilon)}_{\varepsilon^2 S_3} \max_{x \in \mathbb{R}^3} |\nabla\phi(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Beim zweiten verwenden wir $\nu(x) = -r$, wenden den MWS der Integralrechnung an und wählen $C = -\frac{1}{S_3}$

$$\begin{aligned}
&- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi \nabla g(|x|) \cdot \nu \, ds \stackrel{\text{MWS}}{=} \phi(x_\varepsilon) \frac{\partial g}{\partial r}(\varepsilon) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} 1 \, ds \\
&= \phi(x_\varepsilon) C \frac{ike^{ik\varepsilon}\varepsilon - e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 S_3 = -\phi(x_\varepsilon) \underbrace{(ike^{ik\varepsilon}\varepsilon - e^{ik\varepsilon})}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(0)
\end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\langle (\Delta_x + k^2)G(\cdot, 0), \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$$

- (ii) Um eine Lösung mit $G(x, \xi)$ darzustellen verwenden wir wieder Satz 3.21. Dieser besagt, dass $G(x, 0) * f$ eine distributionelle Lösung von $L(u) = f$ ist. Mit den Rechenregeln für Distributionen gilt für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle g * f, \phi \rangle = \langle g, \phi * Rf \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} g(|y|)(\phi * Rf)(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} g(|y|)f(x-y)\phi(x) \, dx \, dy$$

wobei $(Rf)(x) = f(-x)$ und die zweite Gleichheit wegen $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ gilt. Daher ist

$$(G(x, 0) * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} g(|y|)f(x-y) \, dy$$

Weil f eine Testfunktion ist, ist die Faltung $G * f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und damit auch eine klassische Lösung.

Um einzusehen, dass die Lösung für rotationssymmetrisches f auch rotationssymmetrisch ist seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $|x_1| = |x_2|$ und R die Rotationsabbildung, die x_2 auf x_1 abbildet. Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie von g und f erhalten wir

$$\begin{aligned}(g * f)(x_1) &= \int_{\mathbb{R}^3} g(|x_1|) f(|x_1 - y|) \, dy = \int_{\mathbb{R}^3} g(|R(x_1)|) f(|R(x_1 - y)|) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} g(|x_2|) f(|x_2 - Ry|) \, dy \stackrel{TRAO}{=} \int_{\mathbb{R}^3} g(|x_2|) f(|x_2 - u|) \underbrace{|\det(R^{-1})|}_{=1} \, du = (g * f)(x_2)\end{aligned}$$

(iii) Wir schreiben noch einmal genau auf, was G_{Dir} und G_{Neu} erfüllen sollen:

$$\begin{aligned}\Delta G_{\text{Dir}}(\cdot, \xi) &= \delta_\xi \text{ in } \Omega, \quad G_{\text{Dir}}(\cdot, \xi) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ \Delta G_{\text{Neu}}(\cdot, \xi) &= \delta_\xi \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial G_{\text{Neu}}}{\partial \nu}(\cdot, \xi) = 0 \text{ auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

Um die Dirichlet-Randbedingung zu erfüllen spiegeln wir in der (x, y) -Ebene und erhalten so mit $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$G_{\text{Dir}}(x, \xi) = G(x, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) - G(x, (\xi_1, \xi_2, -\xi_3))$$

Diese Funktion hat in Ω nur den Pol (ξ_1, ξ_2, ξ_3) und erfüllt somit die erste Bedingung. Die Randbedingung rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}&G((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) - G((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)) = \\ &-\frac{1}{S_3} \left(\frac{e^{ik\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}}}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}} - \frac{e^{ik\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}}}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}} \right) = 0\end{aligned}$$

Um die Neumann-Randbedingungen zu erfüllen, spiegeln wir ebenfalls aber addieren die Funktionen

$$G_{\text{Neu}}(x, \xi) = G(x, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) + G(x, (\xi_1, \xi_2, -\xi_3))$$

Auch diese hat in Ω nur einen Pol und die Randbedingung rechnen wir wieder nach, wobei der Normalenvektor durch $\nu = (0, 0, -\xi_3)$ gegeben ist.

Wir berechnen mit $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (0 - \xi_3)^2} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (0 + \xi_3)^2}$

$$\begin{aligned}S_3 \frac{\partial G_{\text{Neu}}}{\partial \nu}(x, \xi) &= -S_3 \frac{\partial G_{\text{Neu}}}{\partial x_3}(x, \xi) = -S_3 \left(\frac{\partial G}{\partial x_3}((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) + \frac{\partial G}{\partial x_3}((x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)) \right) \\ &= \frac{\frac{-2ik\xi_3}{r} \exp(ikr) - \exp(ikr) \frac{-2\xi_3}{r}}{r^2} + \frac{\frac{2ik\xi_3}{r} \exp(ikr) - \exp(ikr) \frac{2\xi_3}{r}}{r^2} = 0.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5. Betrachten Sie den Differentialoperator $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ für $c \in \mathbb{R}_+$ und $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$G(x, t) = \frac{1}{2c} H(t) [H(x + ct) - H(x - ct)]$$

eine Fundamentallösung von L mit Pol in $(x, t) = (0, 0)$ ist, wobei H die Heaviside-Funktion ist.

- (ii) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von L mit Pol in $(x, t) = (\xi, \tau)$.
 (iii) Berechnen Sie $\partial_t G(x, t)$.

Lösung. (i)

$$\begin{aligned}
 \langle LG, \phi \rangle &= \langle G, L\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} G(x, t) L\phi(x, t) \, dt \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2c} \underbrace{H(t)}_{\mathbb{1}_{(0, \infty)}(t)} \left[\underbrace{H(x+ct) - H(x-ct)}_{\mathbb{1}_{(-ct, ct)}(x)} \right] (\phi_{tt}(x, t) - c^2 \phi_{xx}(x, t)) \, dt \, dx \\
 &= \frac{1}{2c} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{|x|/c}^{\infty} \phi_{tt}(x, t) \, dt \, dx - c^2 \int_0^{\infty} \int_{-ct}^{ct} \phi_{xx}(x, t) \, dx \, dt \right) \\
 &= \frac{1}{2c} \left(\int_{\mathbb{R}} -\phi_t(x, |x|/c) \, dx - c^2 \int_0^{\infty} \phi_x(ct, t) - \phi_x(-ct, t) \, dt \right) \\
 &= \frac{1}{2c} \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi_t(x, |x|/c) \, dx - c^2 \int_0^{\infty} \phi_x(ct, t) \, dt + c^2 \int_0^{\infty} \phi_x(-ct, t) \, dt \right) \\
 &\stackrel{(u=x/c)}{=} -\frac{1}{2c} \left(c \int_0^{\infty} \phi_t(cu, u) \, du + c \int_0^{\infty} \phi_t(-cu, u) \, du + c^2 \int_0^{\infty} \phi_x(ct, t) \, dt - c^2 \int_0^{\infty} \phi_x(-ct, t) \, dt \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} c\phi_x(cu, u) + \phi_t(cu, u) \, du + \int_0^{\infty} -c\phi_x(-cu, u) + \phi_t(-cu, u) \, du \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{2} (\phi(cu, u)|_{u=0}^{\infty} + \phi(-cu, u)|_{u=0}^{\infty}) = \phi(0).
 \end{aligned}$$

Die Gleichheit (*) folgt hierbei aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{du} (u \mapsto \phi(cu, u)) &= \nabla \phi \begin{pmatrix} cu \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = c\phi_x(cu, u) + \phi_t(cu, u), \\
 \frac{d}{du} (u \mapsto \phi(-cu, u)) &= \nabla \phi \begin{pmatrix} -cu \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix} = -c\phi_x(-cu, u) + \phi_t(-cu, u).
 \end{aligned}$$

- (ii) Weil L ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, erhalten wir gemäß Satz 3.21 eine Fundamentallösung im Pol $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ durch

$$(t, x) \mapsto G(x - \xi_1, t - \xi_2).$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_t G, \phi \rangle &= -\langle G, \partial_t \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^2} G(x, t) \partial_t \phi(x, t) \, d(x, t) = -\frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}} \int_{|x|/c}^{\infty} \partial_t \phi(x, t) \, dt \, dx \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}} \phi(x, |x|/c) \, dx = \frac{1}{2c} \left(\int_0^{\infty} \phi(x, x/c) \, dx + \int_0^{\infty} \phi(-x, x/c) \, dx \right) \\
 &\stackrel{(u=x/c)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \phi(cu, u) + \phi(-cu, u) \, du.
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6. Bestimmen Sie mit der Spiegelungsmethode eine greensche Funktion für das Dirichlet-Problem für Δ auf dem Keil

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \text{ und } 0 < y < x\}.$$

Lösung. Betrachte die Fundamentallösung von Δ mit Pol $(\xi, \eta) \in \Omega$. Nun ergänzen wir diese Fundamentallösung mit insgesamt sieben Spiegelpolen, mit alternierenden Vorzeichen. Die Pole lauten also wie folgt:

$$\begin{aligned} &+(\xi, \eta), \quad -(\eta, \xi) \\ &+(-\eta, \xi), \quad -(-\xi, \eta) \\ &+(-\xi, -\eta), \quad -(-\eta, -\xi) \\ &+(\eta, -\xi), \quad -(\xi, -\eta) \end{aligned}$$

Dass das so auch funktioniert lässt sich, so wie in Aufgabe 3, mit Matrizen veranschaulichen.

$$\begin{aligned} &\underbrace{\begin{pmatrix} NW & N & NO \\ W & & O \\ SW & S & SO \end{pmatrix}}_{\text{keine}} - \underbrace{\begin{pmatrix} SW & S & SO \\ W & & O \\ NW & N & NO \end{pmatrix}}_{x \text{ Achse}} - \underbrace{\begin{pmatrix} NO & N & NW \\ O & & W \\ SO & S & SW \end{pmatrix}}_{y \text{ Achse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} SO & S & SW \\ O & & W \\ NO & N & NW \end{pmatrix}}_{x \& y \text{ Achse}} \\ &- \underbrace{\begin{pmatrix} SO & O & NO \\ S & & N \\ SW & W & NW \end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale}} + \underbrace{\begin{pmatrix} SW & W & NW \\ S & & N \\ SO & O & NO \end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale \& } x \text{ Achse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} NO & O & SO \\ N & & S \\ NW & W & SW \end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale \& } y \text{ Achse}} \\ &- \underbrace{\begin{pmatrix} NW & W & SW \\ N & & S \\ NO & O & SO \end{pmatrix}}_{\text{Neben-Diagonale \& } x \& y \text{ Achse}} = 0 \end{aligned}$$

Die Summe aller dieser Fundamentallösung hat dann genau einen Pol in unserem Keil und lautet

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} (\ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) - \ln((x - \eta)^2 + (y - \xi)^2) + \ln((x + \eta)^2 + (y - \xi)^2) - \ln((x + \xi)^2 + (y - \eta)^2) + \ln((x + \xi)^2 + (y + \eta)^2) - \ln((x + \eta)^2 + (y + \xi)^2) + \ln((x - \eta)^2 + (y + \xi)^2) - \ln((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2))$$

Klarerweise ist diese Funktion eine Fundamentallösung in unserem Gebiet Ω . Für die Randbedingungen an $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = 0 \vee x = y\}$.

Fall 1: $y = 0$

$$\begin{aligned} G(x, 0, \xi, \eta) &= \frac{1}{4\pi} (\ln((x - \xi)^2 + \eta^2) - \ln((x - \eta)^2 + \xi^2) + \ln((x + \eta)^2 + \xi^2) - \ln((x + \xi)^2 + \eta^2) + \ln((x + \xi)^2 + \eta^2) - \ln((x + \eta)^2 + \xi^2) + \ln((x - \eta)^2 + \xi^2) - \ln((x - \xi)^2 + \eta^2)) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\underbrace{\ln((x - \xi)^2 + \eta^2) - \ln((x - \xi)^2 + \eta^2)}_{=0} - \underbrace{\ln((x - \eta)^2 + \xi^2) + \ln((x - \eta)^2 + \xi^2)}_{=0} + \underbrace{\ln((x + \eta)^2 + \xi^2) - \ln((x + \eta)^2 + \xi^2)}_{=0} - \underbrace{\ln((x + \xi)^2 + \eta^2) + \ln((x + \xi)^2 + \eta^2)}_{=0}) \end{aligned}$$

Fall 2: $x = y$

$$\begin{aligned} G(x, x, \xi, \eta) &= \frac{1}{4\pi} (\ln((x - \xi)^2 + (x - \eta)^2) - \ln((x - \eta)^2 + (x - \xi)^2) + \ln((x + \eta)^2 + (x - \xi)^2) - \ln((x + \xi)^2 + (x - \eta)^2) + \ln((x + \xi)^2 + (x + \eta)^2) - \ln((x + \eta)^2 + (x + \xi)^2) + \ln((x - \eta)^2 + (x + \xi)^2) - \ln((x - \xi)^2 + (x + \eta)^2)) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\underbrace{\ln((x - \xi)^2 + (x - \eta)^2) - \ln((x - \eta)^2 + (x - \xi)^2)}_{=0} + \underbrace{\ln((x + \eta)^2 + (x - \xi)^2) - \ln((x + \xi)^2 + (x - \eta)^2)}_{=0} + \underbrace{\ln((x + \xi)^2 + (x + \eta)^2) - \ln((x + \eta)^2 + (x + \xi)^2)}_{=0} - \underbrace{\ln((x - \eta)^2 + (x + \xi)^2) + \ln((x - \xi)^2 + (x + \eta)^2)}_{=0}) \end{aligned}$$

