4.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2019

1. Der Dichtesatz von Lebesgue: für jede Borel-messbare Menge A gilt fast überall auf A
$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1.$$

2. Aus dem Dichtesatz von Lebesgue folgt, dass es zu jeder Menge mit positivem Lebesguemaß ein Intervall $[a, b]$ gibt, sodass $\lambda(A \cap [a, b]) > \frac{3(b-a)}{4}$. Für $h < (b-a)/2$ folgt daraus $A \cap (A \oplus h) \neq \emptyset$. Mit anderen Worten: $A \ominus A$ enthält ein Intervall.

3. Additive Funktionen auf $\mathbb{R}$ (etwas hochtrabender: Homomorphismen von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}, +)$) sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Jede lineare Funktion $f(x) = cx$ zählt dazu; aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz von additiven Funktionen, die nicht linear sind. Zeigen Sie, dass diese “nichttrivialen Homomorphismen” auf jedem nichtleeren Intervall unbeschränkt sind, also dass jede additive Funktion linear ist, wenn es ein nichtleeres Intervall gibt, auf dem sie beschränkt ist.

4. Zeigen Sie, dass jede messbare additive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear ist (zeigen Sie, dass es ein $M > 0$ gibt, sodass $A = [|f| < M]$ positives Lebesguemaß hat — bei genauerer Betrachtung gilt das sogar für jedes $M > 0$. Was gilt dann für $A \ominus A$?).

5. Wir definieren für $0 \leq x \leq 1$
$$f(x) = \begin{cases} g(q) & \text{wenn } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q \in \mathbb{N}, \operatorname{ggT}(p, q) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass f fäst überall differenzierbar ist, wenn $\sum_q qg(q) < \infty$, speziell für $h(q) = q^{-\alpha}$ mit $\alpha > 2$.

6. Ein Würfel wird zweimal geworfen, X sei die kleinere der beiden Augenzahlen, Y die größere. Bestimmen Sie
$$\mathbb{E}(X|Y = y).$$

7. X hat eine absolutstetige Verteilung mit
$$f(x) = \frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda}(x) > 0.$$
Zeigen Sie:
$$\mathbb{E}(X\,||X| = y\,) = y\frac{f(y) - f(-y)}{f(y) + f(y)}.$$