3.3.7 Beispiel.

(i) Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt aus Satz 3.3.5 (vii), dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[q]{n}} = 0$. Streng genommen würde $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{n}} = 0$ folgen, aber mit Lemma 2.9.10, also „$\sqrt[q]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x}}$", folgt auch das Obere. Zusammen mit Satz 3.3.5, (v), erhält man also, dass für alle $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0.$$

Und wieder, erhält man eigentlich $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^r = 0$, aber weil $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (das wurde nirgends im Buch bewiesen, aber ich hab's bei Lemma 2.9.10 mit vollständiger Induktion gezeigt), folgt $\left(\frac{1}{n}\right)^r = (1 \cdot n^{-1})^r = 1^r \cdot n^{-r}$, was laut (2.5) auf Seite 36 unserem gewünschten $\frac{1}{n^r}$ entspricht.

(ii) Um für $x_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+2n}$ den Grenzwert zu berechnen, verwenden wir (2.9) und erhalten

$$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+2n} = \frac{(n^3+1) - (n^3+2n)}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3+2n}} = \frac{1-2n}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3+2n}} = \frac{\frac{1}{n} - 2}{\sqrt{n + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{n + \frac{2}{n}}}.$$

Eigentlich verwenden wir für die erste Gleichheit $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, nachdem wir mit $\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3+2n}$ erweitert haben, wobei die $\sqrt{}^{\,2}$ wegfallen. Dann wird $n^3 - n^3$ gekürzt. Dann wird mit $\frac{1}{n}$ erweitert und in die $\sqrt{\cdot}$ des Nenners gezogen und es wird zu $\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ und viele n fallen weg. Wegen

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{n+\frac{2}{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ergibt Satz 3.3.2, dass der mittlere Ausdruck gegen Null konvergiert. Weil $0 \to 0$ und $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, lässt sich der Einschlusssatz anwenden. Zusammen mit Satz 3.3.5, (iv), folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Das ist wahr, weil $\frac{1}{n} - 2 \to -2$ und $(-2)\cdot 0 = 0$.

(iii) Die Folge $x_n = \sqrt[n]{n}$ konvergiert gegen 1. ... weil... In der Tat gilt für die Folge $a_n := x_n - 1$, dass $a_n \geq 0$ und $(1+a_n)^n = n$. a_n kann, wenn tatsächlich $x_n \to 1$, minimal $1-1=0$ sein. Für die Gleichheit braucht man bloß für a_n und dann für x_n einzusetzen, und $(1+(\sqrt[n]{n}-1))^n = n$.

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$n = (1+a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k 1^{n-k} \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Für die Ungleichheit wird nur die Summe aus $k=0$ und $k=2$ betrachtet, wobei $k=0$ zu $a_n^0 1^{n-0} = 1$ führt und $k=2$ zu $\frac{n!}{2!(n-2)!} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$, weil $n! = n(n-1)(n-2)!$ und $2! = 2$ ist, führt. Jeder Summand ist positiv, oder 0, also ist „$\geq$" legitim. Damit folgt $a_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \to 0$. Also $n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Leftrightarrow n-1 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Leftrightarrow 2(n-1) = n(n-1) a_n^2 \Leftrightarrow \frac{2(n-1)}{n(n-1)} \geq a_n^2$. Gemäß Satz 3.3.5, (vii), gilt $a_n \to 0$ und daher $x_n \to 1$, $n \to \infty$. $0 \leq a_n^2 \leq \frac{2}{n}$ und laut Einschlusssatz dann $a_n^2 \to 0$ und mit Satz 3.3.5 (vii) gilt $\sqrt{a_n^2} = a_n \to 0$ und mit Satz 3.3.5 (ii) ist $x_n = a_n + 1 \to 0$.

(iv) Ist $q > 0$ fest, so gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$. Fest heißt, dass kein „laufendes" n durch q ausgedrückt wird. Betrachte zunächst den Fall $q \geq 1$. Ok. Dann gilt für $n \geq q$

$$1 \leq \sqrt[n]{q} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Die erste Ungleichheit folgt direkt aus $q \geq 1$, weil ja mindestens $1 \leq \sqrt[n]{1} = 1$. Die Zweite ist klar, weil n gegen ∞ geht und $\infty > q$. Nach Satz 3.3.2 folgt $\sqrt[n]{q} \to 1$. Im vorigen Beispiel haben wir $\sqrt[n]{n} \to 1$ gesehen, also macht der Einschlusssatz Sinn. Im Fall $0 < q < 1$ betrachte $\frac{1}{\sqrt[n]{q}} = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ und verwende Satz 3.3.5. Es gilt ja jetzt $0 < q < 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{q}$, also setzt man $\frac{1}{q}$ in den vorigen Fall ein und bekommt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{q}} = 1 \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q}}$. Daher muss $\sqrt[n]{q} \to 1$.

(v) Um für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ $k \in \mathbb{N}$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot z^k$ zu berechnen, sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|\sqrt[n]{n^k} \cdot z| < \frac{1+|z|}{2}$ (< 1) für alle $n \geq N$. $|\sqrt[n]{n^k} \cdot z| = |\sqrt[n]{n}^k \cdot z|$ konvergiert ja wegen vorletztem Beispiel und Satz 3.3.5 (v) und (iv). Weil $|z| < 1$, gilt die eingeklammerte Ungleichheit, da $\frac{1+|z|}{2} = \frac{1}{2} + \frac{|z|}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{2} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| < 1$. Diese Wahl ist wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} \cdot |z| = |z|$ zusammen mit Lemma 3.3.1 möglich. Es ist $|z| < \frac{1+|z|}{2}$, also gilt ab einem gewissen $N \leq n$, dass $|\sqrt[n]{n^k} \cdot z| < \frac{1+|z|}{2}$. Für $n \geq N$ gilt dann

$$0 \leq |n^k \cdot z^n| \leq \left(\frac{1+|z|}{2}\right)^n,$$

und somit $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot z^n = 0$. Die erste Ungleichheit ist wegen der Betragsstriche trivial. Für die zweite ist $|\sqrt[n]{n^k} \cdot z| < \frac{1+|z|}{2} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1+|z|}{2}\right)^n \geq \left|\sqrt[n]{n^k}\cdot z\right|^n = \left|\left(\sqrt[n]{n^k}\cdot z\right)^n\right| = \left|\left(\sqrt[n]{n^k}\right)^n\cdot z^n\right| = \left|n^k\cdot z^k\right|$,

wobei für die erste Gleichheit $|a|\cdot|b| = |a\cdot b|$ für Potenzen angewendet wird. $\left(\frac{1+|z|}{2}\right)^n \to 0$, weil ja $\frac{1+|z|}{2} < 1$ und man das auf Beispiel 3.2.4 (iv) zurückführen kann.