Hinweis: Manche (sehr wenige) der folgenden Beispiele sind falsch, manche enthalten offene Fragen, manche sind besonders schwierig. Die Lösung eines falschen Beispiels besteht in einer Erklärung, was bzw. warum etwas falsch ist. (Ein falscher Allsatz kann zB durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden.)

Naive Mengenlehre

1. Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein (d.h., für beliebige $x, x_1, y, \ldots$)? Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel).

   a. Wenn $\{x\} = \{y\}$, dann ist auch $x = y$.
   b. Wenn $\{x, z\} = \{y, z\}$, dann ist auch $x = y$.
   c. Wenn $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$, dann gilt zumindest eine der folgenden beiden Aussagen: (12) $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$; (21) $x_1 = y_2$ und $x_2 = y_1$.
   d. Wenn $\{x_1, x_2, x_3\} = \{y_1, y_2, y_3\}$, dann ist zumindest eine der folgenden 6 Aussagen wahr:

   (123) $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.
   (132) $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$.
   (213) $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$, $x_3 = y_3$.
   (231) $x_1 = y_2$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_1$.
   (312) $x_1 = y_3$, $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2$.
   (321) $x_1 = y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_1$.

2. Von der Eigenschaft E wissen wir bereits, dass sie auf alle Singletons (=einelementige Mengen) zutrifft. Nehmen wir an, dass E immer dann auf eine Menge $A \cup \{b\}$ zutrifft, wenn E auf A zutrifft (und b beliebig ist). Können wir daraus schließen,

   - … dass E für alle endlichen nichtleeren Mengen gilt?
   - … dass E für alle nichtleeren Mengen gilt?
   - … dass E für alle höchstens abzählbaren nichtleeren Mengen gilt?

3. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, dann gilt $x = x'$ und $y = y'$.

4. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\{x, \{x, y\}\} = \{x', \{x', y'\}\}$, dann gilt $x = x'$ und $y = y'$.

5. Zeigen oder widerlegen Sie: Sei $* := \{\emptyset\}$. Wenn $\{\{\emptyset, x\}, \{*, y\}\} = \{\{\emptyset, x'\}, \{*, y'\}\}$, dann gilt $x = x'$ und $y = y'$.

Sei $\mathscr{A}$ eine Menge von Mengen. Eine *Auswahlfunktion für A* ist eine Funktion f, die jedem Element $B \in \mathscr{A} \setminus \{\emptyset\}$ eines seiner Elemente zuweist, d.h. es muss also für alle nichtleeren[1] $B \in \mathscr{A}$ die Beziehung $f(B) \in B$ gelten. Geben Sie in den folgenden Aufgaben explizite Auswahlfunktionen für die jeweiligen Mengenfamilien an.

6. $\mathscr{A}_6$ sei die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{N}$.

7. $\mathscr{A}_7$ sei die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

8. $\mathscr{A}_8$ sei die Familie aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

9. $\mathscr{A}_9$ sei die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.

10. $\mathscr{A}_{10}$ sei die Familie aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen. (Zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ heißen äquivalent, wenn die Folge $(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}$ ihrer Differenzen eine Nullfolge bildet.)

[1] Oft wird vorausgesetzt, dass die leere Menge $\emptyset$ kein Element von $\mathscr{A}$ ist.

11. $A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$, wobei $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Zeigen Sie $A \times B \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$ (wobei $\mathfrak{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$).

12. Wir schreiben B^A für die Menge aller Funktionen von A nach B. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$$B^A \subseteq A \times B, \quad B^A \subseteq \mathfrak{P}(A \times B), \quad B^A \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B)), \quad B^A \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}((A \times B)))$$

13. Berechnen Sie $\bigcup A$, $\bigcup\bigcup A$, $\bigcap A$, $\bigcap\bigcap A$ für jede der folgenden Mengen A:

$$A_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\},\ A_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\},\ A_3 = \{1, 3, 5, \ldots\},\ A_4 = \{3, 4, 5, 6\}$$

(Verwenden Sie die Definitionen $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, ..., $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ...)

In der („offiziellen") Sprache der Mengenlehre verwenden wir neben dem zweistelligen Relationssymbol ε das Gleichheitszeichen, beliebig viele prädikatenlogische Variable x, x_1, A, B, $\mathcal{C}$, etc, die logischen Konstanten $\top$ und $\bot$, die Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ sowie die Quantoren $\forall$ und $\exists$, nicht aber die Symbole $\emptyset$, $\{\cdots\}$, $\cup$, $\cap$, etc.

14. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die offizielle Sprache der Mengenlehre:

    a. $A = \{x\}$
    b. $B = \{x, y\}$
    c. $C = P \cap Q$
    d. $D = \bigcup \mathcal{E}$, wobei die rechte Seite als $\{x : \exists E \in \mathcal{E}(x \in E)\}$ definiert ist.
    e. $F = \bigcup\{U, V\}$.

Aussagenlogik

15. Geben Sie für jede der folgenden Formeln eine Baumdarstellung an, sowie Präfix- und Postfixform. (Präfix=polnische Notation, Postfix=umgekehrte polnische Notation.)

$$p_1 \rightarrow \neg p_2 \qquad (\neg p_1) \rightarrow p_2 \qquad \neg(p_1 \rightarrow p_2) \qquad \neg(\neg(p_1 \rightarrow p_2)) \qquad p_1$$

16. Geben Sie alle zweistelligen Operationen auf der 2-elementigen Menge $M := \{\texttt{wahr}, \texttt{falsch}\}$ an (das heißt: alle Funktionen $f : M \times M \rightarrow M$, und finden Sie treffende Namen für jede dieser Abbildungen. (Die Abbildung, die dem Paar $(\texttt{wahr}, \texttt{wahr})$ den Wert `wahr` zuordnet, den drei anderen Paaren der Wert `falsch`, könnte man zum Beispiel „Konjunktion", oder „und-Verknüpfung", oder „beide", oder „Serienschaltung" nennen.)

17. Wie viele dreistellige Operationen gibt es auf einer zweielementigen Menge? Wie viele n-stellige?

18. Zeigen Sie:

    a. $\neg(p_1 \wedge p_2) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2$.
    b. Für alle Formeln A und B gilt $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

19. Zeigen Sie: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \ \Leftrightarrow\ (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

20. Seien A und B aussagenlogische Formeln.

    a. Die Aussage „$A \Rightarrow B$" ist genau dann wahr, wenn „$\top \Rightarrow A \rightarrow B$" gilt, d.h., wenn die Formel $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist.
    b. Die Aussage „$A \Rightarrow B$" ist genau dann wahr, wenn „$A \wedge (\neg B) \Rightarrow \bot$" gilt.

21. Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

    a. $(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4) \to ((p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_4))$.
    (Implikationen werden von rechts nach links geklammert; $A \to B \to C$ ist als als Abkürzung für $(A \to (B \to C))$ zu lesen, NICHT als $((A \to B) \to C)$, und auch NICHT als $(A \to B) \wedge (B \to C)$.

    b. $(p_1 \to p_3) \to (p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

    c. $(p_1 \to p_3) \to (p_2 \to p_3) \to ((p_1 \wedge p_2) \to p_3)$.

    d. $(p_1 \to p_2 \to p_3) \to ((p_1 \wedge p_2) \to p_3)$

    e. $(p_1 \to p_2) \vee (p_2 \to p_1)$.

Belegungen

Sei b eine Belegung, A eine Formel. Statt $\hat{b}(A) = 1$ sagen wir auch „b erfüllt die Formel A“.
In den nächsten 3 Aufgaben verstehen wir unter einer „Belegung“ eine Funktion von der Menge $\{p_1, \dots, p_n\}$ nach $\{0, 1\}$.

22. Sei $n \geq 2$. Wieviele Belegungen (der Variablen $p_1, \dots, p_n$) erfüllen die Formel

$$(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \to p_n) \ ?$$

23. Sei $n \geq 2$. Geben Sie eine Formel (in den Variablen $p_1, \dots, p_n$) an, die von genau n Belegungen erfüllt wird.

24. Sei n groß, $k \leq 2^n$. Geben Sie eine Formel (in den Variablen $p_1, \dots, p_n$) an, die von genau k Belegungen erfüllt wird. Versuchen Sie, eine möglichst kleine Formel zu finden (mit etwa $O(n)$ Symbolen).

Erfüllbarkeit

Eine Menge Σ von aussagenlogischen Formeln heißt „erfüllbar“, wenn es eine Belegung b der in Σ vorkommenden Variablen gibt, die für alle $A \in \Sigma$ die Bedingung $\hat{b}(A) = 1$ erfüllt.
Wir nennen eine Menge Σ *erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

25. Sei $\Sigma \cup \{A\}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln. Zeigen Sie:

    (a) Σ ist genau dann erfüllbar, wenn zumindest eine der Mengen $\Sigma \cup \{A\}$, $\Sigma \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist.

    (b) Σ ist genau dann *erfüllbar, wenn zumindest eine der Mengen $\Sigma \cup \{A\}$, $\Sigma \cup \{\neg A\}$ *erfüllbar ist.

26. Geben Sie eine *-erfüllbare Menge an, die nicht erfüllbar ist.

27. Zeigen Sie:

    (a) Wenn Σ *erfüllbar ist, und für jede aussagenlogische Variable p entweder $p \in \Sigma$ oder $(\neg p) \in \Sigma$ gilt, dann ist Σ auch erfüllbar (und zwar durch genau eine Belegung).

    (b) Wenn Σ *erfüllbar ist, dann gibt es eine *erfüllbare Menge $\Sigma' \supseteq \Sigma$, die die Bedingung in (a) erfüllt.

Überabzählbare Mengen

Wir betrachten eine aussagenlogische Sprache mit einer (möglicherweise überabzählbaren) festen Variablenmenge V. (Formeln und Klauseln sind weiterhin endlich, Formelmengen dürfen auch unendlich groß sein, sogar überabzählbar.)
Eine Menge Σ von Formeln heißt *erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist. Σ heißt „maximal *erfüllbar", wenn Σ zwar *erfüllbar ist, aber es keine echte Obermenge von Σ gibt, die auch noch *erfüllbar ist.

28. Für jede *erfüllbare Menge Σ gibt es eine maximal *erfüllbare Obermenge $\Sigma' \supseteq \Sigma$. (Hinweis: Wohlordnung, oder Lemma von Zorn, oder Lemma von Tukey.)

29. Sei Σ maximal *erfüllbar. Dann ist Σ erfüllbar, und es gibt genau eine Belegung b, die Σ erfüllt.

CNF, DNF

30. Welche der folgenden Formeln sind in CNF, welche in DNF?

$$\neg p_1,\ \neg p_1 \vee p_2,\ \neg(p_1 \vee p_3),\ \neg p_1 \wedge p_4,\ \neg p_1 \to p_5,\ (\neg p_1 \vee p_6) \wedge p_7,\ (((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \wedge p_4)$$

Anmerkung: „$\neg$" bindet stärker als die anderen Junktoren; Daher: $\neg p_1 \vee p_2 := ((\neg p_1) \vee p_2)$.

31. Geben Sie zu den Formeln im vorigen Beispiel, die nicht in CNF sind, eine äquivalente Formel in CNF an.

32. Detto für DNF.

Interpolation

33. Sei A eine Formel, die nur die Variablen $p_1, \ldots, p_n$ verwendet, und sei B eine Formel, die nur die Variablen $p_k, \ldots, p_{k+\ell}$ verwendet, $1 < k \leq n < k + \ell$.
Nehmen wir weiters an, dass $A \Rightarrow B$ gilt.
Zeigen Sie, dass es dann eine Formel C geben muss, die nur die Variablen $p_k, \ldots, p_n$ verwendet, sodass sowohl $A \Rightarrow C$ als auch $C \Rightarrow B$ gilt.
(Wir nennen so eine Formel C einen „Interpolanten".)

Hinweis: Betrachten Sie alle dualen Klauseln D in den Variablen $p_k, \ldots, p_n$, für die $D \Rightarrow B$ gilt. Sei C die Disjunktion dieser dualen Klauseln. Zeigen Sie nun $C \Rightarrow B$ (leicht) und $A \Rightarrow C$ (schwieriger, indirekt).

Oder: Betrachten Sie alle Klauseln E in den Variablen $p_k, \ldots, p_n$, für die $A \Rightarrow E$ gilt; sei C die Konjunktion dieser Klauseln. Zeigen Sie nun $A \Rightarrow E$ und $E \Rightarrow C$.

34. Sei A eine Formel, die nur die Variablen $p_1, \ldots, p_n$ verwendet, und sei B eine Formel, die nur die Variablen $p_k, \ldots, p_{k+\ell}$ verwendet, mit $n < k$. Nehmen wir weiters an, dass $A \Rightarrow B$ gilt. Dann gilt zumindest eine der folgenden Aussagen:

- $A \Rightarrow \bot$. (Mit anderen Worten: A ist Kontradiktion.)
- $\top \Rightarrow B$. (Mit anderen Worten: B ist Tautologie.)

(Insbesondere gibt es also eine Formel C, die keine Variablen verwendet, und die $A \Rightarrow C$ und $C \Rightarrow B$ erfüllt.)

König

Ein Baum $(T,<)$ ist eine partiell geordnete Menge mit kleinstem Element, in der für alle $t \in T$ die Menge $T_{<t} := \{x : x < t\}$ endlich und linear geordnet ist. Ein Ast ist eine maximale linear geordnete Teilmenge. Wir definieren $Lev(n,T) := \{t \in T : T_{<t} \text{ hat } n \text{ Elemente}\}$.

35. Sei $(T,<)$ ein unendlicher Baum, sodass $Lev(n,T)$ für alle n endlich ist. Zeigen Sie, dass T einen unendlichen Ast hat.

Unendliche „Klauseln"

Für die nächsten beiden Aufgaben betrachten wir eine Sprache mit abzählbar vielen aussagenlogischen Variablen. Eine $_\infty$Klausel ist eine endliche oder unendliche Menge von Literalen. Eine Belegung b erfüllt eine $_\infty$Klausel C, wenn es ein Literal $L \in C$ mit $\hat{b}(L) = 1$ gibt. Eine Menge M von $_\infty$Klauseln heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt, die alle $_\infty$Klauseln in M erfüllt; M ist *erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von M (diese darf also endliche viele ∞-Klauseln enthalten) erfüllbar ist.

36. Geben Sie eine *erfüllbare Menge von $_\infty$Klauseln an, die nicht erfüllbar ist.

37. Geben Sie eine unerfüllbare Menge M von $_\infty$Klauseln an, die unter Resolution abgeschlossen ist, aber nicht die leere Klausel enthält. („Unter Resolution abgeschlossen" heißt: Wann immer $p \in C \in M$, $\neg p \in D \in M$, dann ist auch $(C \setminus \{p\}) \cup (D \setminus \{\neg p\})$ in M.)
 Wenn möglich, wählen Sie M so, dass

 (a) die Menge der Klauseln (=endliche $_\infty$Klauseln) in M endlich ist.

 (b) oder: dass die Menge der unendlichen $_\infty$Klauseln in M endlich ist.

 (c) oder sogar: dass M endlich ist. (D.h., (a) und (b) gelten.)

Topologischer Zugang

Die Menge $\mathscr{B}$ aller totalen Belegungen $b : \{p_1, p_2, \ldots\} \to \{0,1\}$ trägt eine natürliche Topologie, die so genannte Produkttopologie; eine Basis für diese Topologie besteht aus den Mengen $O_c := \{b : b \text{ setzt } c \text{ fort}\}$, wobei c alle endlichen partiellen Belegungen durchläuft. ($\mathscr{B}$ wird dadurch zu einem kompakten Hausdorff-Raum, und sogar homöomorph zur Cantormenge.)
Sei $K \subseteq \mathscr{B}$ eine Menge von totalen Belegungen. Wir nennen eine Menge Σ von Formeln (oder Klauseln) K-erfüllbar, wenn es eine Belegung $b \in K$ gibt, die Σ erfüllt. Eine Menge ist K-*erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge K-erfüllbar ist.

38. Charakterisieren Sie die Eigenschaft „Jede K-*erfüllbare Menge ist auch K-erfüllbar" durch eine topologische Bedingung an die Menge K.

Resolution

39. Sei M die folgenden Menge von Klauseln:

 $$M := \{\{\neg p, q\}; \{\neg r, s\}; \{p, r\}\}$$

 Finden Sie die kleinste Menge von Klauseln, die M enthält und unter Resolution abgeschlossen ist.

40. Zeigen Sie, dass die leere Klausel mit (mehrfach ausgeführter) Resolution aus den Klauseln $\{\,\{\neg p, q\}; \{\neg r, s\}; \{p, r\}; \{\neg q\}; \{\neg s\}\,\}$ herleitbar ist. Was hat dies mit Aufgabe 21 zu tun?

41. Geben Sie eine unerfüllbare (nichtleere) Menge von Klauseln an, die weder die leere Klausel noch einelementige Klauseln enthält.

42. Wir interpretieren $p \to q$ als Abkürzung für $\neg(p \wedge \neg q)$. Bilden Sie unter Verwendung der Regel $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ eine zur Negation von
$$(\neg p \vee q) \to (p \to q)$$
äquivalente Formel in konjunktiver Form, schreiben Sie sie als Klauselmenge, und zeigen Sie dann mit dem Resolutionsverfahren, dass diese Klauselmenge unerfüllbar (und somit die ursprüngliche Formel eine Tautologie) ist.

43. Analog für $(p \to q) \to \big((q \to r) \to (p \to r)\big)$.

44. Gegeben ist die Klauselmenge $M = \{\{p, q\}; \{p, \neg q, r\}; \{p, \neg q, \neg r\}; \{\neg p, q\}; \{\neg p, \neg q, \neg r\}\}$. Ist die leere Klausel in $\hat{M}$ enthalten?
(Erinnerung: $\hat{M}$ ist definiert als die kleinste unter Resolution abgeschlossenen Menge, die M enthält.)

45. Sei M eine Klauselmenge und $M' = \{C \in M \mid \text{es gibt keine Variable } p \text{ mit } p \in C \text{ und } \neg p \in C\}$. Zeigen Sie dass M und M' äquivalent sind. (Das heißt: Jede Belegung b, die M erfüllt, erfüllt auch M', und umgekehrt.)

46. Sei M eine Klauselmenge und $C, D \in M$ wobei C echte Teilmenge von D ist ($C \subset D$). Zeigen Sie dass M und $M' = M \setminus \{D\}$ äquivalent sind.

47. Zeigen Sie dass die Klauselmenge $M = \{\{\neg p_1, p_3\}; \{p_1, p_2\}; \{\neg p_3\}; \{\neg p_2, p_3\}; \}$ unerfüllbar ist a) durch Angabe ihres semantischen Baumes und b) durch Angabe einer Resolutionswiderlegung.

48. Seien $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ endliche Mengen. Sei $P = \{p_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ eine Menge aussagenlogischer Variablen. Jede Belegung b von P induziert eine Relation $R_b \subseteq A \times B$ durch $(a_i, b_j) \in R_b$ gdw $b(p_{i,j}) = 1$. Finden Sie aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ so dass:
    1. $\hat{b}(\varphi_1) = 1$ gdw R_b ist eine Funktion
    2. $\hat{b}(\varphi_2) = 1$ gdw R_b ist eine injektive Funktion
    3. $\hat{b}(\varphi_3) = 1$ gdw R_b ist eine surjektive Funktion
    4. $\hat{b}(\varphi_4) = 1$ gdw R_b ist eine bijektive Funktion

    Für welche $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist φ_2 unerfüllbar?

    (Anmerkung: Die Größe der Formeln hängt von n und k ab.)

49. Ein Sudoku ist eine Matrix $S = (s_{i,j}) \in \{\lambda, 1, \ldots, 9\}^{9\times 9}$ wobei das Symbol λ für "leer" stehen soll. Eine Lösung von S ist eine Matrix $L = (l_{i,j}) \in \{1, \ldots, 9\}^{9\times 9}$ so dass gilt:
    1. $s_{i,j} \neq \lambda$ impliziert $l_{i,j} = s_{i,j}$, und
    2. Für die folgenden $K \subseteq \{1, \ldots, 9\} \times \{1, \ldots, 9\}$ gilt:
    $$(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in K, (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2) \text{ impliziert } l_{i_1,j_1} \neq l_{i_2,j_2}$$
        (a) Für jede Zeile,
        (b) Für jede Spalte,
        (c) Für jede 3x3-Matrix mit Startkoordinaten kongruent 1 modulo 3

    Finden Sie, ähnlich wie in Beispiel 48, eine Menge P aussagenlogischer Variablen, eine Bijektion von Belegungen von P mit Relationen über $\{1, \ldots, 9\} \times \{1, \ldots, 9\} \times \{1, \ldots, 9\}$ sowie eine Formel φ_S so dass $\hat{b}(\varphi_S) = 1$ gdw b eine Lösung von S induziert.

Ergänzung

50. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die offizielle Sprache der Mengenlehre:

    a. $b = S(a)$, wobei allgemein $S(a) := a \cup \{a\}$ definiert ist.
    b. $n \in \omega$.
    c. $x = \omega$.
    d. $y = S(\omega)$.
    e. $z = S(S(\omega))$.

51. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die offizielle Sprache der Mengenlehre:

    a. $x = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
    b. $y = \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$, wobei $\omega + 1 := S(\omega)$, $\omega + 2 := S(\omega + 1)$, etc.
    c. $z = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$.

Ableitungskalküle

In den folgenden Beispielen betrachten wir Zeichenfolgen (Strings), die aus den Zeichen $1, +, =$ zusammengesetzt sind. Auch die leere Folge gilt als Zeichenfolge; sie hat Länge 0. Meist wird sie mit ε oder mit Λ bezeichnet.
Gewisse Zeichenfolgen zeichen wir als „ableitbar“ aus.
Gewisse Zeichenfolgen nennen wir „Axiome“; Axiome A schreiben wir in der Form

$$\frac{\emptyset}{A}$$

an. Wir lesen dies als „A ist ableitbar“. Eine „Regel“, die wir in der Form

$$(*) \qquad \frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$$

schreiben, lesen wir als „Wenn $A_1, \ldots, A_n$ ableitbar sind, dann auch B“.
Die Menge der ableitbaren Zeichenfolgen ist die kleinste Menge M, die alle Axiome enthält und unter allen Regeln abgeschlossen ist. (Das heißt: Wann immer eine Regel $(*)$ haben, deren „Voraussetzungen“ $A_1, \ldots, A_n$ in M liegen, muss auch die „Folgerung“ B in M liegen.)

52. Wir betrachten ein Ableitungssystem mit dem einzigen Axiom $\dfrac{\emptyset}{1+1=11}$ und den Regeln $\dfrac{A}{1A1}$ (für jede Zeichenfolge A) und $\dfrac{A=B}{A1=1B}$ für beliebige Zeichenfolgen A, B.
    Zeigen Sie, dass die Zeichenfolgen $11 + 11 = 1111$ und $11111 + 11 = 1111111$ ableitbar sind.

53. Zeigen Sie, dass die folgenden Zeichenfolgen alle nicht ableitbar sind: $1 + 1 + 1 = 111$, $1 + 1 = 111$, $1 = 1$.

54. Geben Sie ein Kriterium an, das entscheidet, ob eine vorgegebene Zeichenfolge ableitbar ist.

In den folgenden Beispielen betrachten wir Zeichenfolgen, die aus $1, +, !, =$ zusammengesetzt sind. Unser Ableitungssystem enthält nun das einzige Axiom $\dfrac{\emptyset}{1!}$ und die folgenden Regeln:

$$\frac{A!}{1A!} \qquad \frac{A!}{A+1=A} \qquad \frac{A+B=C}{A+B1=CA}$$

(für beliebige Zeichenfolgen A, B, C).

55. Zeigen Sie, dass die Zeichenfolgen 1111! und $1111 + 11 = 11111111$ ableitbar sind.

56. Geben Sie ein Kriterium an, das entscheidet, ob eine vorgegebene Zeichenfolge ableitbar ist.

Die nächsten beiden Aufgaben sind beide lösbar. Eine hat jedoch eine viel einfachere Lösung als die andere.

57. Geben Sie ein (möglichst einfaches) Ableitungssystem an, in dem eine Zeichenfolge der Form 1^n (also n aufeinanderfolgende Einser) genau dann ableitbar ist, wenn n eine Primzahl ist. In Ihrem System dürfen neben dem Symbol 1 auch andere Symbole vorkommen, zum Beispiel das Symbol |; es könnte zum Beispiel hilfreich sein, das Ableitungssystem so zu definieren, dass ein String der Form $1^n|1^k$ genau dann ableitbar ist, wenn n ein Teiler von k ist. Die Aufgabenstellung schreibt nur vor, welche Strings der Form 1^n ableitbar sein sollen; welche Strings mit anderen Symbolen Sie ableitbar machen wollen, bleibt Ihnen überlassen.
(Mit „möglichst einfach“ ist hier und in den folgenden Aufgaben insbesondere gemeint, dass die Axiome und Regeln einem einfachen Schema folgen, so wie in den vorangehenden Aufgaben. Das Schema „1^n ist Axiom genau dann, wenn n Primzahl ist“ ist nicht einfach.)

58. Geben Sie ein (möglichst einfaches) Ableitungssystem an, in dem eine Zeichenfolge der Form 1^n (also n aufeinanderfolgende Einser) genau dann ableitbar ist, wenn $n > 1$ ist und keine Primzahl ist.

In den folgenden Beispielen betrachten wir Zeichenfolgen, die aus $0, 1, =$ zusammengesetzt sind. Unser Ableitungssystem enthält nun das einzige Axiom $\frac{\emptyset}{1=1}$ und die folgenden Regeln:

$$\frac{A = B}{A0 = BB} \qquad \frac{A = B}{A1 = BB1}$$

(für beliebige Zeichenfolgen A, B).

59. Zeigen Sie, dass in diesem System die Zeichenfolgen $11 = 111$ und $110 = 111111$ ableitbar sind.

60. Geben Sie ein Kriterium an, das entscheidet, ob eine vorgegebene Zeichenfolge ableitbar ist.

Wir betrachten nun einen aussagenlogische Sprache, in der nur die Variablen $p_1, p_2, \dots$ sowie die Junktoren $\to$ und $\neg$ vorkommen (keine weiteren Junktoren). Für alle Formeln A, B, C sind die folgenden drei Formeln Axiome:

- $A \to (B \to A)$
- $\Big(A \to (B \to C)\Big) \to \Big((A \to B) \to (A \to C)\Big)$
- $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Die einzige Regel ist Modus Ponens:

$$\frac{A \to B,\ A}{B}$$

61. Alle ableitbaren Formeln sind Tautologien.

62. Zeigen Sie, dass für jede Formel A die Formel $A \to A$ ableitbar ist.
(Hinweis: Betrachten Sie das zweite Axiom mit $B := A$ und $C := (A \to A)$.)

63. $A \to \neg\neg A$ ist ableitbar.

64. $\neg\neg A \to A$ ist ableitbar.

(Anmerkung: Man kann zeigen, dass die ableitbaren Formeln genau die Tautologien sind.)

Substitution

65. Wählen Sie eine Sprache $\mathscr{L}$, und geben Sie einen (möglichst einfachen) Term s sowie Terme t_1, t_2 in dieser Sprache an, sodass die Terme $s[x/t_1,\ y/t_2] \qquad (s[x/t_1])[y/t_2] \qquad (s[y/t_2])[x/t_1]$ alle verschieden sind. (Mit $s[x/t_1,\ y/t_2]$ ist gemeint, dass in s alle Vorkommnisse von x durch t_1 und gleichzeitig alle freien Vorkommnisse von y durch t_2 ersetzt werden. x und y sind hier verschiedene Variable.)

66. Sei $\mathscr{M}$ eine Struktur, sei b eine Belegung, seien s und t Terme, und x eine Variable. Sei $a := \bar{b}(t)$. Dann ist $\bar{b}(s[x/t]) = \overline{b_{x/a}}(s)$. (Mit $b_{x/a}$ ist jene Belegung b' gemeint, die $b'(x) = a$ erfüllt, und sonst mit b übereinstimmt.)
(Beziehen Sie sich in Ihrem Beweis auf die induktive Definition der Substitution.)

67. Sei $\mathscr{M}$ eine Struktur, sei b eine Belegung, sei φ Formel, sei t Term, und x eine Variable. Dann ist $\hat{b}(\varphi[x/t]) = \widehat{b_{x/a}}(\varphi)$ mit $a := \bar{b}(t)$ (wenn die Substitution $\varphi[x/t]$ erlaubt ist).

68. Geben Sie (in einer geeigneten Sprache) eine (möglichst einfache) Formel φ an, sowie einen Term t, eine Struktur $\mathscr{M}$ und eine Belegung b, sodass mit $b' := b_{x/\bar{b}(t)}$ die Werte $\hat{b}(\varphi[x/t])$ und $\widehat{b'}(\varphi)$ verschieden sind.

Spektren

Für jede geschlossene Formel φ (das heißt: φ hat keine freien Variable) definieren wir das *Spektrum* $Sp(\varphi)$ als die Menge aller natürlichen Zahlen n, sodass es ein endliches Modell von φ mit genau n Elementen gibt.
(Wir sagen, dass $\mathcal{M}$ ein Modell von φ ist, wenn für alle Belegugen b die Gleichung $\hat{b}(\varphi) = 1$ gilt.)

69. Sei φ eine Formel, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt. Zeigen Sie: Wenn $k \in Sp(\varphi)$, und $n > k$, dann $n \in Sp(\varphi)$.

70. Geben Sie eine Formel φ an, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt, sodass $Sp(\varphi) = \{n \in \mathbb{N} : n > 5\}$.

Wir schreiben $\mathscr{S}$ für die Menge aller Spektren (für beliebige prädikatenlogische Sprachen). $\mathscr{S}$ ist eine Untermenge der Potenzmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

71. Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von $\{1, 2, \ldots\}$ ein Spektrum ist. (Wie definieren Sie „endlich“? Verwenden Sie vollständige Induktion? Wenn ja, geben Sie explizit die Behauptung $B(n)$ an, von der Sie $B(0)$ und $B(n) \Rightarrow B(n+1)$ zeigen.)

72. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}$ unter Durchschnitten abgeschlossen ist. (Anleitung: Sei $A = Sp(\varphi_1)$, $B = Sp(\varphi_2)$. Erklären Sie, warum Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, dass die Sprachen zu φ_1 und φ_2 disjunkt sind...)

73. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}$ unter Vereinigungen abgeschlossen ist.

74. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}$ unter Komplementen abgeschlossen ist.

75. Zeigen Sie von möglichst vielen der folgenden Mengen, dass sie Spektren sind: Die Menge der Primzahlen, die Menge aller zusammengesetzten Zahlen (=Nichtprimzahlen > 1), die Menge aller Quadratzahlen, die Menge aller Zweierpotenzen, die Menge aller Potenzen von 5, die Menge aller Primzahlpotenzen, die Menge $\{1, 14, 141, 1414, 14142, \ldots\} = \{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor : n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

76. Geben Sie eine (möglichst einfache) Menge an, die kein Spektrum ist.

Prädikatenlogik: Gültigkeit

Wir betrachten in den folgenden Übungsbeispielen eine prädikatenlogische Sprache mit Relationssymbolen P, Q, R, $\leq$, sowie (wenn nötig oder sinnvoll) weiteren Funktions- und Konstantensymbolen f, g, $+$, 0, c, d, ... (Die Stelligkeit ist jeweils dem Kontext zu entnehmen.)

Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig (d.h., gelten in jeder Struktur unserer Sprache, unter jeder Belegung)? Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an (wenn möglich, ein endliches).

77. $(\forall x \exists y\, R(x,y)) \to (\exists y \forall x\, R(x,y))$, $\quad (\forall x \exists y\ x \leq y) \to (\exists y \forall x\ x \leq y)$
78. $(\forall x \exists y\, R(x,y)) \to (\forall y \exists x\, R(y,x))$, $\quad (\forall x \exists y\, x \leq y) \to (\forall y \exists x\, y \leq x)$
79. $(\exists y \forall x\, R(x,y)) \to (\forall x \exists y\, R(x,y))$, $\quad (\exists y \forall x\ x \leq y) \to (\forall x \exists y\ x \leq y)$
80. $\Big(\forall x\, \forall y\, \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\big)\Big) \wedge \Big(\forall x\, \exists y\, R(x,y)\Big) \quad \to \quad \exists x\, R(x,x)$
81. $\exists x (\, \exists y\, P(y) \quad \to \quad P(x)\,)$. Wir vereinbaren, dass Quantoren stärker binden als Junktoren. Gemeint ist also die Formel $\exists x \Big(\ (\exists y\, P(y)) \quad \to \quad P(x)\ \Big)$.
82. $\forall x(Px \to Qx) \to \big((\forall x\, Px) \to (\forall x\, Qx)\big)$

Logische Axiome, MP

83. Sei h ein Homomorphismus von den aussagenlogischen in die prädikatenlogischen Formeln (einer festen Sprache $\mathscr{L}$), d.h. $h(\top) = \top$, $h(\bot) = \bot$, $h(\varphi \wedge \psi) = h(\varphi) \wedge h(\psi)$, und analog für die anderen Junktoren. Sei $\mathscr{U}$ eine $\mathscr{L}$-Struktur, und sei b eine Belegung (im prädikatenlogischen Sinn).
Dann gibt es eine aussagenlogische Belegung b', die $\widehat{b'}(A) = \hat{b}(h(A))$ für alle aussagenlogischen Formeln A erfüllt.
84. Schließen Sie aus der vorigen Aufgabe: Wenn A aussagenlogische Tautologie ist, h ein Homomorphismus, dann ist $h(A)$ allgemeingültig.
85. Sei φ und ψ Formeln einer Sprache $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ eine Struktur für $\mathscr{L}$ und b eine Belegung. Zeigen Sie: Wenn $\mathscr{M} \models \varphi[b]$ und $\mathscr{M} \models (\varphi \to \psi)[b]$, dann $\mathscr{M} \models \psi[b]$.
Zeigen Sie: Wenn $\mathscr{M} \models \varphi$ und $\mathscr{M} \models (\varphi \to \psi)$, dann $\mathscr{M} \models \psi$.
86. Sei x nicht frei in φ. Dann ist $\varphi \leftrightarrow \forall x\ \varphi$ allgemeingültig.
87. Jede Formel der Form $\forall x\ (\varphi \to \psi) \to (\forall x\ \varphi \ \to\ \forall x\ \psi)$ ist allgemeingültig.
Geben Sie ein (möglichst einfaches) Beispiel einer Formel der Form $(\forall x\ \varphi \ \to\ \forall x\ \psi) \to \forall x\ (\varphi \to \psi)$, die nicht allgemeingültig ist.

Modelle von Formeln, $\models$

88. Geben Sie eine Formel A (ohne freie Variable) an, sodass für jede endliche nichtleere Menge U die folgenden Aussagen äquivalent sind:
    (a) Die Anzahl der Elemente von U ist gerade
    (b) Es gibt ein Modell $\mathscr{U}$ mit Universum U, sodass $\mathscr{U} \models A$

    (Hinweis: Bijektion)
    In dieser wie auch in den nächsten beiden Aufgaben können Sie die Sprache geeignet wählen.

89. Geben Sie eine Formel A (ohne freie Variable) an, sodass für jede Struktur $\mathscr{U}$ mit endlichem Universum U die folgenden Aussagen äquivalent sind:
    (a) Die Anzahl der Elemente von U ist gerade
    (b) $\mathscr{U} \models A$

90. Geben Sie eine Formel A (ohne freie Variable) an, sodass für jede Struktur $\mathscr{U}$ mit Universum U die folgenden Aussagen äquivalent sind:
    (a) U hat genau 3 Elemente
    (b) $\mathscr{U} \models A$

91. Seien σ, τ geschlossene Formeln. Zeigen Sie:
    (a) $\{\sigma\} \vDash \tau$ genau dann, wenn $\vDash \sigma \to \tau$.
    (b) Sei Σ Menge von geschlossenen Formeln. $\Sigma \cup \{\sigma\} \vDash \tau$ genau dann, wenn $\Sigma \vDash \sigma \to \tau$.

92. Geben Sie Formeln φ und ψ (in einer geeigneten Sprache $\mathscr{L}$) an, sodass zwar (a) aber nicht (b) gilt:
    (a) Für alle $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}$ gilt: wenn $\mathscr{M} \models \varphi$, dann $\mathscr{M} \models \psi$.
    (b) Für alle $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}$ gilt: $\mathscr{M} \models \varphi \to \psi$.

93. Geben Sie Formeln φ und ψ an, sodass im vorigen Beispiel zwar (b) aber nicht (a) gilt.

Formale Beweise, $\vdash$

94. a. Geben Sie einen formalen Beweis für eine der Formeln in 77–82 an. (Hinweis: Das ist sehr leicht.)
    b. Seien φ und ψ beliebige Formeln.
    Geben Sie einen formalen Beweis für die Formel $(\forall x\, \varphi) \;\to \forall x\, (\varphi \vee \psi)$ an. (Wenn Ihnen das zu leicht ist: Finden Sie einen möglichst kurzen Beweis.)

95. Geben Sie einen formalen Beweis für die Formel $(\forall x\, P(x)) \to \exists x\, P(x)$ an. (Hinweis: Finden Sie zuerst formale Beweise für die Formeln $(\forall x\, P(x)) \to P(x)$ und $P(x) \to \exists x\, P(x)$ und verketten Sie diese beiden formalen Beweise.

96. Sei Σ eine Menge von Formeln. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
    (a) $\Sigma \vdash \perp$
    (b) Für alle φ gilt $\Sigma \vdash \varphi$.
    (c) Es gibt eine endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma' \vdash \varphi$.

    (Mengen Σ mit dieser Eigenschaft heißen „inkonsistent“ oder „syntaktisch inkonsistent“.)

97. Sei Σ eine Menge von geschlossenen Formeln in einer Sprache $\mathcal{L}$. Zeigen Sie von mindestens 3 der folgenden Aussagen, dass sie äquivalent sind. (Tatsächlich sind alle 4 äquivalent.)
    (a) $\Sigma \vDash \perp$
    (b) Für alle φ gilt $\Sigma \vDash \varphi$.
    (c) Es gibt eine endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma' \vDash \perp$.
    (d) Es gibt keine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathscr{M}$ die $\mathscr{M} \vDash \Sigma$ erfüllt.

    (Mengen Σ mit dieser Eigenschaft heißen „unerfüllbar“, manchmal auch „semantisch inkonsistent“.)

Deduktionstheorem, halbformale Beweise

Beachten Sie in den folgenden Aufgaben, dass es immer um formale Beweise (oder Ableitungen) geht, und wir den Vollständigeitssatz noch nicht bewiesen haben. Sie können also nicht mit der „Wahrheit“ oder „Gültigkeit“ von Formeln argumentieren, sondern nur mit dem (unseren) formalen Beweisbegriff, also mit Axiomen und Modus Ponens.

98. Der „indirekte Beweis“: Wenn $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$, dann $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Erklären Sie, wie man aus einem formalen Beweis P_1 für $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ einen formalen Beweis P_2 für $\Sigma \vdash \neg\varphi$ machen kann, und geben Sie eine obere Abschätzung für die Länge von P_2 (verglichen mit der fvon P_1) an. Ebenso: Wenn $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$, dann $\Sigma \vdash \varphi$.

99. Beweis durch Fallunterscheidung: Wenn $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, und $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$, dann $\Sigma \vdash \psi$. Wie in der vorigen Aufgabe: Geben Sie an, wie man aus den beiden gegebenen formalen Beweisen einen formalen Beweis für ψ konstruieren kann.

100. Sei ψ eine Formel mit der freien Variable z. Seien x und y zwei (verschiedene) Variable, die nicht in ψ vorkommen. Wir schreiben $\psi(x)$ und $\psi(y)$ statt $\psi(z/x)$ bzw $\psi(z/y)$.
Zeigen Sie $\neg\exists y\, \psi(y) \vdash \exists y\, \psi(y) \to \chi$ und $\exists x\, \psi(x) \vdash \exists x\, (\varphi \to \psi(x))$ für alle Formeln χ, φ, und schließen Sie daraus $\vdash \exists x\, (\exists y\, \psi(y) \to \psi(x))$.
(Die Formel $\exists y\, A \to B$ wird als $(\exists y\, A) \to B$ gelesen.)

101. Das Deduktionstheorem besagt: Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ (also wenn B aus den nichtlogischen Axiomen Γ, zusammen mit A beweisbar ist), dann gilt auch $\Gamma \vdash (A \to B)$.

     Das Generalisierungstheorem besagt: Wenn $\Gamma \vdash A(c)$, wobei die Konstante c nicht in den Formeln von Γ vorkommt (und nicht in $A(x)$), dann gilt auch $\Gamma \vdash \forall x\, A(x)$.

     Gilt die Umkehrung des Deduktionstheorems? Gilt die Umkehrung des Generalisierungstheorems? (In welchem Sinn?)

102. Beweisen Sie das Generalisierungstheorem (in der Formulierung der vorigen Aufgabe).

Einführung von Quantoren

103. Sei R ein Relationssymbol, und seien x, y verschiedene Variable. Geben Sie einen formalen Beweis von $\exists x\, R(x) \to \exists y\, R(y)$ an.

104. Beweisen Sie die starke $\exists$-Einführung. Das heißt: Wenn $\Phi \vdash A \to B$, und x weder in Φ noch in B frei vorkommt, dann $\Phi \vdash \exists x A \ \to\ B$.
(Hinweis: Verwenden Sie die starke $\forall$-Einführung.)

105. Formulieren und beweisen Sie die schwache $\exists$-Einführung.

106. Verwenden Sie das $\forall$- und $\exists$-Einführung, um $\vdash (\forall x\, A(x)) \to (\exists x\, A(x))$ zu beweisen.

107. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig?

     a. $\forall x\, [A(x) \wedge B(x)] \to [\forall x\, A(x)] \wedge [\forall x\, B(x)]$
     b. $\forall x\, [A(x) \vee B(x)] \to [\forall x\, A(x)] \vee [\forall x\, B(x)]$
     c. $\exists x\, [A(x) \wedge B(x)] \to [\exists x\, A(x)] \wedge [\exists x\, B(x)]$
     d. $\exists x\, [A(x) \vee B(x)] \to [\exists x\, A(x)] \vee [\exists x\, B(x)]$

108. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? ($A \leftarrow B$ bedeutet $B \to A$.)

     a. $\forall x\, [A(x) \wedge B(x)] \leftarrow [\forall x\, A(x)] \wedge [\forall x\, B(x)]$
     b. $\forall x\, [A(x) \vee B(x)] \leftarrow [\forall x\, A(x)] \vee [\forall x\, B(x)]$

c. $\exists x\,[A(x) \wedge B(x)] \leftarrow [\exists x\, A(x)] \wedge [\exists x\, B(x)]$
d. $\exists x\,[A(x) \vee B(x)] \leftarrow [\exists x\, A(x)] \vee [\exists x\, B(x)]$

109. Skizzieren Sie einen (halb-)formalen Beweis einer der Formeln aus den vorigen beiden Beispielen.

110. Und noch einen. (Jetzt natürlich von einer anderen Formel.)

111. Und noch einen.

112. Zeigen Sie, dass aus dem Paarmengenaxiom der Satz „Wenn A und B nicht leer sind, dann ist $A \times B$ nicht leer“ folgt. „$A \times B$ nicht leer“ ist hier als „es gibt z, a, b mit $a \in A$, $b \in B$, $z = (a, b)$“ zu lesen.

Vollständige Theorien

113. Sei $\mathscr{L}$ eine Sprache der Prädikatenlogik, Σ eine vollständige konsistente Theorie in $\mathscr{L}$.

    Zeigen Sie für alle geschlossenen Formeln A und B:

    - $\Sigma \vdash A \vee B$ genau dann, wenn $\Sigma \vdash A$ oder $\Sigma \vdash B$.
    - $\Sigma \vdash A \wedge B$ genau dann, wenn $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash B$.
    - $\Sigma \vdash \neg A$ genau dann, wenn $\Sigma \nvdash A$.

114. Die 3 Äquivalenzen in der vorigen Aufgabe lassen sich in der Form von 6 Implikationen schreiben. Welche dieser 6 Implikationen

    - … gelten für alle Theorien Σ?
    - … gelten für alle konsistenten Theorien Σ?
    - … implizieren Vollständigkeit von Σ? (Unter der Voraussetzung, dass Σ konsistent ist.)

115. Zeigen Sie folgendes Korollar bzw. folgenden Spezialfall des Vollständigkeitssatzes: Für alle geschlossenen Formeln σ gilt: σ ist erfüllbar ($\exists \mathscr{M} \models \sigma$) oder widerlegbar ($\vdash \neg\sigma$).

116. Beweisen Sie den Vollständigkeitssatz aus dem gerade besprochenen Spezialfall mit Hilfe des Kompaktheitssatzes.

117. Sei $\mathscr{L}$ eine (möglicherweise überabzählbare) Sprache der Prädikatenlogik, Σ_0 eine konsistente Theorie in $\mathscr{L}$. Sei P die Menge aller konsistenten Theorien $\Sigma \supseteq \Sigma_0$ in der Sprache $\mathscr{L}$. Durch die Relation $\subseteq$ wird P partiell geordnet.

    Zeigen Sie:

    - Jede Kette in P (d.h., jede durch $\subseteq$ total geordnete Teilmenge $K \subseteq P$) ist beschränkt. (Das heißt, für jede Kette $K \subseteq P$ gibt es $\Sigma^* \in P$, sodass für alle $\Sigma \in K$ die Beziehung $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ gilt.)
      Hinweis: Prüfen Sie nach, ob die von Ihnen konstruierte Menge Σ^* wirklich in P liegt. Beachten Sie dabei, dass nicht jede Kette ordnungsisomorph zu $(\mathbb{N}, <)$ ist.
    - Wenn $\Sigma \in P_{\mathscr{L}}$ maximal ist (also: es gibt kein $\Sigma' \supsetneq \Sigma$ in P), dann ist Σ vollständig.
    - Schließen Sie aus dem Lemma von Zorn, dass es zu jeder konsistenten Theorie Σ_0 eine vollständige konsistente Theorie $\Sigma_1 \supseteq \Sigma_0$ gibt.

118. Sei Σ vollständige Henkintheorie, und sei $\mathscr{M}$ die zugehörige in der Vorlesung definierte Struktur (Äquivalenzklassen von geschlossenen Termen). Zeigen Sie, dass für alle geschlossenen Terme t die Gleichung $t^{\mathscr{M}} = [t]_\sim$ gilt. (Was ist mit der linken Seite gemeint?)