Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Numerische Mathematik - Kreuzlübung 2

Übungstermin: 15.10.2019 10. Oktober 2019

Aufgabe 7:
Seien $x = 5$, $y = 10$ und $z = -8$.
a) Geben Sie die Zahlen in Binärdarstellung der Form $\left(v \sum_{i=1}^{l} a_i 2^{-i}\right) 2^e$ mit einem Vorzeichen $v \in \{-1, 1\}$, einer Mantissenlänge $l = 3$, einem Exponenten $e \in \mathbb{Z}$ und Ziffern $a_i \in \{0, 1\}$ an.
b) Verwenden Sie eine Mantissenlänge von 3 zur Berechnung von $(x \oplus y) \oplus z$ und $x \oplus (y \oplus z)$. Die Maschinenaddition $\oplus$ soll dabei so ausgeführt werden, dass zunächst exakt addiert wird und dann auf die zulässige Mantissenlänge abgeschnitten wird.
c) Machen Sie eine lineare Vorwärtsanalyse beider Ausdrücke und erklären Sie damit die Ergebnisse aus (b). Für welche x, y, z sind die Unterschiede zwischen den Ausdrücken besonders deutlich, wenn man $x > 0$, $y + z > 0$ und $z < 0$ voraussetzt?

Aufgabe 8:
a) Berechnen Sie die relative und absolute Kondition der Auswertung eines durch die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ gegebenen Polynoms

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle x bezüglich Störungen in den Koeffizienten a_i und bezüglich Störungen in x.
b) Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = 8118x^4 - 11482x^3 + x^2 + 5741x - 2030$$

an der Stelle $x = 0.707107$. Das „exakte“ Resultat ist

$$p(x) = -1.9152732527082 \cdot 10^{-11}.$$

Wie ist die Auswertung dieses Polynoms an der Stelle x konditioniert? Wie genau läßt sich $p(x)$ mit einem Rechner bei einfacher Genauigkeit (eps

$\approx 10^{-8}$) bestimmen, wenn die Koeffizienten a_i exakt ausgewertet werden können?

c) Ein Rechner, der mit doppelter Genauigkeit (eps $\approx 10^{-16}$) rechnet, liefere bei exakter Auswertung der Koeffizienten den Wert

$$\tilde{p}(x) = -1.9781509763561 \cdot 10^{-11}.$$

Beurteilen Sie das Ergebnis anhand der oben berechneten Konditionszahl(en).

Aufgabe 9:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine symmetrische Matrix und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deren Eigenwerte. Berechnen sie die absoluten Konditionszahlen des Problems

$$(a, b, c) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2).$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Konditionszahlen zur Lösung einer quadratischen Gleichung.

Aufgabe 10:
Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fix. Berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes über implizite Funktionen die relativen Konditionszahlen des Problems: Gesucht ist die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ bei gegebener invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Aufgabe 11:
Es sei

$$f(x) := \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \qquad x \neq 0.$$

a) Ist die Auswertung von $f(x)$ für kleine $|x|$ gut konditioniert?

b) Zeigen Sie, dass die Auswertung von $f(x)$ in dieser Version für kleine $|x|$ instabil ist. Nehmen Sie dabei an, dass die Auswertungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ einen relativen Fehler in Höhe der Maschinengenauigkeit hervorruft.

c) Leiten Sie mit Hilfe der Rechenregeln für trigonometrische Funktionen eine stabile Auswerteformel für kleine $|x|$ her. Auch hier können Sie annehmen, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ mit Maschinengenauigkeit berechnet werden können.

Aufgabe 12:
Die beiden Ausdrücke

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}\right), \qquad x \geq 1 \tag{1}$$

und

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}, \qquad x \geq 1 \tag{2}$$

sind algebraisch äquivalent.

Untersuchen Sie die Stabilität der Auswerteformeln mit Hilfe einer linearen Vorwärtsanalyse und erklären Sie die Ergebnisse. Welche der beiden Formeln ist numerisch sinnvoller?