**1. Test für "Diskrete und geometrische Algorithmen"**

30. November 2020

Vorname: ______________________________

Familenname: __________________________ Matrikelnummer: ______________________

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 60 Minuten + 15 Minuten zum Hochladen der Lösungen im TUWEL

| Aufgabe | Punkte |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| gesamt | |

Ich erkläre die Prüfung selbständig, ohne Hilfe Dritter und ohne unerlaubte Hilfsmittel abzulegen.

Unterschrift:

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der folgenden Funktionen mit einer Methode Ihrer Wahl.

(1) $T(n) = 10T\left(\frac{n}{5}\right) + \log n$

(2) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + n^{1/2}\log n$

(3) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

(9 Punkte)

**Aufgabe 2:** Wir betrachten Zeichenfolgen, die sich aus den Zeichen $\{0, 1, 2\}$ zusammensetzen. Sei $a_n$ die Anzahl aller Zeichenfolgen mit Länge $n$ in denen eine 0 immer hinter einer 2 steht.
(zB. Wir betrachten 0, 1, 2, 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 000, ... wobei wir nur 1, 2, 11, 12, 20, 21, 22, ... zählen).

(1) Begründen Sie, warum $a_n$ der folgenden Rekursion 2. Ordnung

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

mit den Anfangswerten $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$ genügt.

(2) Lösen Sie die Rekursionsgleichung mithilfe des charakteristischen Polynoms.

(8 Punkte)

**Aufgabe 3:** Sei $S$ eine Menge von 4 ganzen Zahlen, wobei für alle $a, b \in S$ gilt, dass $a \neq b \mod 7$. Zeigen Sie, dass $a, b \in S$ existieren, sodass

$$a + b = 0 \mod 7$$

Hinweis: Schubfachschluss.

(5 Punkte)

**Aufgabe 4:** Es gibt $n$ Personen, die einen Raum betreten und nach einer Weile wieder verlassen. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ betritt Person $i$ den Raum zur Zeit $a_i$ und verlässt den Raum zur Zeit $b_i$ (wobei $a_i < b_i$). Alle $a_i, b_j$ seien verschieden. Zu Beginn des Tages ist das Licht im Raum ausgeschaltet. Die erste Person, die den Raum betritt, schaltet das Licht ein. Um Strom zu sparen, schaltet Person $i$ beim Verlassen des Raums zur Zeit $b_i$ das Licht aus, wenn sonst niemand im Raum ist. Die nächste Person, die den Raum betritt, schaltet das Licht wieder ein.

Wir wollen nun für gegebene Werte $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ herausfinden, wie oft das Licht eingeschaltet wird. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der berechnet, wie oft das Licht eingeschaltet wird.

Bemerkung: Eine verbale Beschreibung des Algorithmus reicht, Pseudocode ist nicht notwendig. Es ist aber zu begründen, warum der Algorithmus die entsprechende Laufzeit hat.

Hinweis: Betrachten Sie eine Liste $L$ der Länge $2n$, die alle Eingangs- und Ausgangszeiten enthält. Verwenden Sie außerdem 2 Zähler: einer zählt, wie viele Personen sich gerade im Zimmer befinden, und der andere zählt, wie oft das Licht angeschaltet wird.

(8 Punkte)