A 4.6.8 Eine Matrix $B \in K^{n\times m}$ heißt pseudoinvers zu einer Matrix $A \in K^{m\times n}$, falls

$$ABA = A \quad \text{und} \quad BAB = B.$$

(a) Sei $\tilde{A}$ eine Matrix in Normalform, etwa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}.$$

Berechne alle zu $\tilde{A}$ pseudoinverse Matrizen.

(b) Es seien $A \in K^{m\times n}$, $\tilde{A} = QAP$ mit Matrizen $P \in GL_n(K)$ und $Q \in GL_m(K)$, sowie $\tilde{B}$ eine pseudoinverse Matrix von $\tilde{A}$. Zeige, dass dann $P\tilde{B}Q$ zu A pseudoinvers ist.

Hinweis zu (a): Setze eine zu $\tilde{A}$ pseudoinverse Matrix als Blockmatrix der Form

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in K^{n\times m} \text{ mit } X_{11} \in K^{r\times r}$$

an und verwende A 3.3.4.

$$\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Folglich, muss $X_{11} = E_n$.

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}^2 & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Folglich, müssen $X_{21} = X_{21} \cdot X_{11} = X_{21}$, $X_{12} = X_{11} \cdot X_{12} = X_{12}$, und $X_{22} = X_{21} \cdot X_{12}$.

$$(P\tilde{B}Q)A(P\tilde{B}Q) = P(\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B})Q = P\tilde{B}Q,$$
$$A(P\tilde{B}Q)A = (Q^{-1}\tilde{A})\tilde{B}(\tilde{A}P^{-1}) = Q^{-1}\tilde{A}P^{-1} = A.$$

A 4.6.9 Gib zu einer der Matrizen aus A 4.6.3 eine pseudo inverse Matrix an. Führe auch die Probe durch.

Göth'scher Algorithmus. Es sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix mit Rang m. Dann existiert eine Matrix $C \in GL_n(K)$, sodass $AC = (E_m \; \mathcal{O})$. Insbesondere, ist A zur Matrix $B = C^{-1}(E_m \; \mathcal{O})^T$ pseudoinvers.

Beweis. Durch elementare Spaltenumformungen, erreichen wir

$$f_A \Big\downarrow \; \frac{E_n}{A} \mapsto \cdots \mapsto \frac{C}{(E_m \; \mathcal{O})} \Big\downarrow f_A \, .$$

Daraus folgt unmittelbar $AC = (E_m \; \mathcal{O})$, weil

$$f_C \Big\downarrow \; \frac{E_n}{C} \, ,$$

und $A \cdot C = [f_A \circ f_C](E_n) = f_A(C) = (E_m \; \mathcal{O})$.
Daher gilt also $A = (E_m \; \mathcal{O})\, C^{-1}$. Man definiert also $B := C\,(E_m \; \mathcal{O})^T$. Dann gilt $AB = E_m$. Also

$$ABA = A \quad \text{und} \quad BAB = B. \qquad \square$$

So kann man zum Beispiel von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ auch } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$ bestimmen.

A 4.7.1 Löse nach Gauß oder Gauß-Jordan die folgenden beiden $(4,4)$-LGS über $\mathbb{R}$:

$$(\alpha)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 3 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 4 \\ x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \;\; 4x_4 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$\mathrm{III} \mathrel{-}= 2\cdot \mathrm{I}$; $\mathrm{IV} \mathrel{-}= \mathrm{I}$; $\quad \mathrm{III} \mathrel{-}= 2\cdot \mathrm{II}$; $\mathrm{IV} \mathrel{+}= \mathrm{II}$;

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Wir lösen letztere (äquivalente) LGS.

(i) Um die Basisvektoren des Kerns zu bekommen (d.h., die Basisvektoren der Lösungsmenge, des homogenen LGS), vertauschen wir die 2. und 3. Spalte.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -* \\ \\ E_n \end{bmatrix} = [\mathcal{O}]$$

Die Vektoren aus $-*$ lauten: $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, und $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Gemeinsam mit E_n, vertauschen wir wieder, diesmal, die 2. und 3. Zeile:

$$\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \text{ und } \begin{bmatrix}-3\\1\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-3\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Für die Partikulärlösung, betrachten wir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und schreiben an die „O" eine 3 und dann an die „⁝" jeweils 0. Weil die Lösung der 2. Zeile 0 ist und wir die Werte der 1., 2., und 4. Spalte bereits festgelegt haben, muss

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right] + \begin{bmatrix}3\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

den „Lösungs-Unterraum" aufspannen. (Kein UR!)

Das zweite GLS hat aufgrund der 3. und 4. Zeile keine Lösun. Der „Lösungs-UR" ist daher $\emptyset$

A 4.7.4 Die Aufzüge in einem Firmengebäude sind ständig überlastet. Im Rahmen einer Untersuchung wurden 25 080 Wege von Mitarbeitern im Laufe mehrerer Arbeitstage erfasst. Am Beginn und am Ende jedes Beobachtungszeitraumes befanden sich alle Personen stets an ihrem Arbeitsplatz. Jeder Weg von einem in ein anderes Stockwerk wurde mit den Aufzügen zurückgelegt. Folgende Prozentzahlen für die Fahrten mit den Aufzügen liegen vor (0 = Erdgeschoß, 1 = erster Stock usw.):

Nach →		0	1	2	3
Von →	0	0 %	40 %	30 %	30 %
	1	30 %	0 %	50 %	20 %
	2	20 %	10 %	0 %	70 %
	3	30 %	50 %	20 %	0 %

(Die Tabelle ist beispielsweise so zu lesen: Von allen im 2. Stock beginnenden Wegen führten 70 % in den 3. Stock.)
Bestimme für je zwei verschiedene Stockwerke die Anzahl der Fahrten vom einen in das andere Geschoß.
Hinweis: Es liegt ein geschlossenes System vor: Die Summe aller Fahrten in das i-te Geschoß ist gleich der Summe der Fahrten aus dem i-ten Geschoß.

Sei x_i, mit $i \in I := \{0, 1, 2, 3\}$, die Summe der Fahrten in das i-te Geschoß, bzw. laut Hinweis, auch aus dem i-ten Geschoß.
Aus der oberen Tabelle entnehmen wir also

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \cdot x_0 & + & 0{,}4 \cdot x_0 & + & 0{,}3 \cdot x_0 & + & 0{,}3 \cdot x_0 & = & x_0, \\
+ & & + & & + & & + & & \\
0{,}3 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_1 & + & 0{,}5 \cdot x_1 & + & 0{,}2 \cdot x_1 & = & x_1, \\
+ & & + & & + & & + & & \\
0{,}2 \cdot x_2 & + & 0{,}1 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0{,}7 \cdot x_2 & = & x_2, \\
+ & & + & & + & & + & & \\
0{,}3 \cdot x_3 & + & 0{,}5 \cdot x_3 & + & 0{,}2 \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_3 & = & x_3. \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & &
\end{array}$$

Die „Spalten" geben uns wiederum

$$\begin{bmatrix} -1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & -1 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & -1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}7 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dadurch erhält man

$$x_0 = \frac{531}{721} \cdot x_3, \quad x_1 = \frac{635}{721} \cdot x_3, \quad x_2 = \frac{621}{721} \cdot x_3.$$

Die Gesamtzahl der Fahrten ist aber noch immer

$$25\,080 = \sum_{i \in I} x_i = \frac{531 + 635 + 621 + 721}{721} \cdot x_3 \Rightarrow$$

$$x_3 = 7210.$$

Daher dann auch $(x_i)_{i \in I} = (5310, 6350, 6210, 7210)^T$.
Nun braucht man bloß noch in die Tabelle in der Angabe einsetzen.

A 4.7.7 Es seien Linearformen $a_i^* : \mathbb{R}^{6\times 1} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, gegeben durch

$$\langle a_1^*, (x_1, x_2, \dots, x_6)^T \rangle = x_1 + 2x_2 - x_4 + 3x_5 + 6x_6,$$
$$\langle a_2^*, (x_1, x_2, \dots, x_6)^T \rangle = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6,$$
$$\langle a_3^*, (x_1, x_2, \dots, x_6)^T \rangle = x_2 - x_4 - x_5$$

Berechne eine Basis des Unterraumes $\ker a_1^* \cap \ker a_2^* \cap \ker a_3^*$.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 5 & -6 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$\mathrm{II} \mathrel{-}= 2 \cdot \mathrm{I}$ $\qquad$ $\mathrm{II} \mathrel{+}= 3 \cdot \mathrm{III}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -9 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -9 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$\mathrm{I} \mathrel{-}= 2 \cdot \mathrm{III}$ $\qquad$ $\mathrm{II} \mathrel{/}= 4;\ \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III};$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -9/4 & -11/4 & 0 \end{array}\right]}_{=: A}.$$

Für die Basisvektoren, schreiben wir $A = [E_n \ *]$ und

$$[E_3 \ *] \cdot \begin{bmatrix} -* \\ E_3 \end{bmatrix} = [\mathcal{O}] \Rightarrow -* = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 9/4 & 11/4 \end{bmatrix}.$$

Folglich lauten die Basisvektoren des Kerns

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 9/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ und } \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 11/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Das funktioniert, weil 0 das neutrale Element von $\mathbb{R}$ ist und durch oben, alle Vektoren bestimmt sind, die unter a_1^*, a_2^*, a_3^* nach 0 führen.

A 4.7.9 Sei V ein Vektorraum über K und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Skalaren aus K heißt eine lineare Relation von $(a_i)_{i\in I}$, falls $\sum_{i\in I} x_i a_i = \mathcal{O}$. Es ist daher $x_i = 0$ für fast alle $i\in I$.

(a) Beweise: Alle linearen Relationen von $(a_i)_{i\in I}$ sind ein Unterraum von $K^{\langle I\rangle}$.

(b) Bei endlicher Indexmenge $I = \{1, 2, \dots, r\}$ fassen wir $(x_i)_{i\in I}$ als Spaltenvektor auf. Bezeichnet $(e_i)_{i\in I}$ die kanonische Basis von $K^{r\times 1}$, so existiert genau eine lineare Abbildung

$f: K^{r\times 1} \to V$ mit $e_i \mapsto a_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Zeige: $(x_1, x_2, \dots, x_r)^T \in K^{r\times 1}$ ist genau dann eine lineare Relation von $(a_1, a_2, \dots, a_r)$, falls $(x_1, x_2, \dots, x_r)^T \in \ker f$.

Beweis (a). Folgt unmittelbar aus dem Unterraumkriterium. Man beachte $\langle\cdot\rangle$.

(b) „$\Rightarrow$" Sei $I = \{1, \dots, r\}$ und $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \dots, x_r)^T$ eine lineare Relation von $(a_i)_{i\in I} = (a_1, \dots, a_r)$. Dann

$\sum_{i\in I} x_i a_i = \mathcal{O}$.

Wir stellen $(x_i)_{i\in I}$ als Linearkombination von $(e_i)_{i\in I}$ dar und wenden f an.

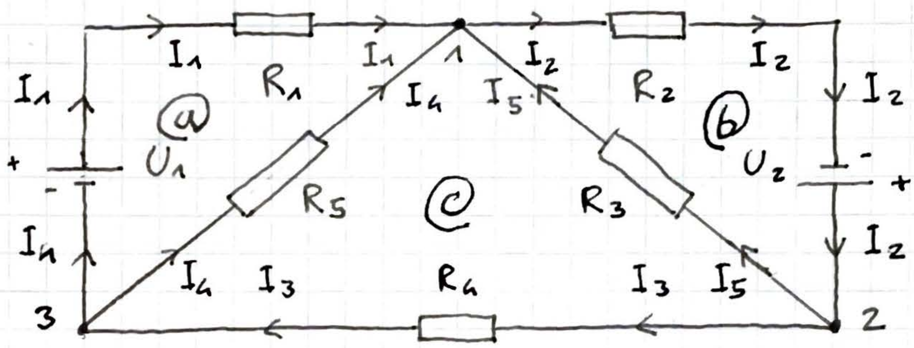
$f(\sum_{i\in I} x_i e_i) = \sum_{i\in I} x_i f(e_i) = \sum_{i\in I} x_i a_i = 0 = \cdots$.

„$\Leftarrow$" Sei umgekehrt $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \ldots, x_r)^T \in \ker f$. Dann

$f((x_i)_{i\in I}) = 0 = \cdots$. $\square$

A 4.7.12 Bestimme im Netz aus Abbildung 4.11 für jeden der fünf Zweige den auftretenden Strom zu einer der folgenden Aufgaben:

(α) $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 1\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$, $R_5 = 1\,\Omega$, $U_1 = 10\,V$, $U_2 = 6\,V$.



Knotenpunkt 1: $I_1 + I_4 + I_5 = I_2$
Knotenpunkt 2: $I_2 = I_3 + I_5$
Knotenpunkt 3: $I_3 = I_1 + I_4$

Knotenregel: $\sum$ Strom-Zuflüsse = $\sum$ Strom-Abflüsse

Laut Ohmschen Gesetz, gilt $U = I \cdot R$, also hier $U = I$.

Laut Maschenregel also

$U_1 = I_1 - I_4 = 10$ und $U_2 = I_2 + I_5 = 6$, sowie $0 = I_3 + I_4 - I_5$.

Gemeinsam mit oben erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc|c} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

III += I; IV −= I; III += II; IV −= II; V −= II;

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -10 \end{array}\right] \mapsto$$

$\mathrm{V} \mathrel{-}= \mathrm{IV};\ \mathrm{VI} \mathrel{-}= \mathrm{IV};$ $\qquad \mathrm{VI} \mathrel{-}= \mathrm{V}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$\mathrm{V} \mathrel{-}= 2 \cdot \mathrm{VI}$

$8 I_5 = 8 \Rightarrow I_5 = 1,$

$I_4 - 3 I_5 = -6 \Rightarrow -6 + 3 I_5 = -3,$

$I_3 - 2 I_4 = 10 \Rightarrow 10 + 2 I_4 = 4,$

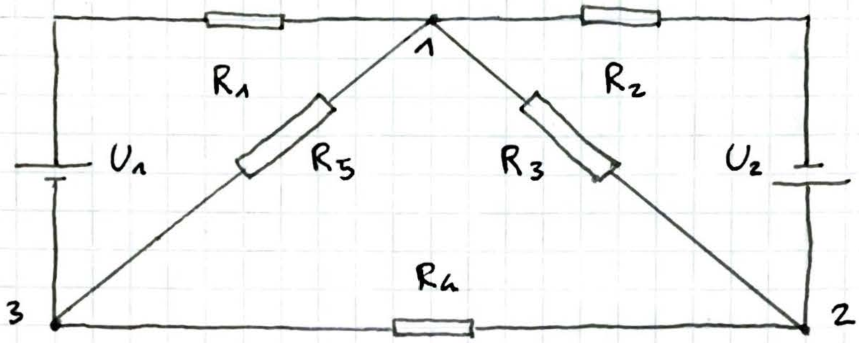
$I_2 - I_3 - I_5 = 0 \Rightarrow I_3 + I_5 = 5,$

$I_1 - I_2 + I_4 + I_5 = 0 \Rightarrow I_2 - I_4 - I_5 = 7.$

Daher $(I_i)_{i \in \{1, \dots, 5\}} = (7, 5, 4, -3, 1)^T.$

A 4.7.13 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$



Wir schreiben (0) für die reelle 3×3 Nullmatrix. Bestimme Matrizen $B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{(0)\}$ so, dass $BA = AC = (0)$ gilt.

Hinweis: Beispiele für derartige Matrizen B, C lassen sich aus Lösungen der beiden homogenen linearen Gleichungssysteme

$(x_1, x_2, x_3) \cdot A = (0, 0, 0)$ sowie $A \cdot (x_1, x_2, x_3)^T = (0,0,0)^T$

gewinnen. Die gesuchten Matrizen sind nicht eindeutig bestimmt.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also für $i \in \{1, 2, 3\}$ ist

$$2 b_{i1} + 4 b_{i2} + 3 b_{i3} = 0,$$
$$1 b_{i1} + 2 b_{i2} + 0 b_{i3} = 0,$$
$$1 b_{i1} + 2 b_{i2} + 1 b_{i3} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{=:\tilde{A}}$$

$I \mathrel{-}= 2II$; $III \mathrel{-}= II$; $\quad I \mathrel{-}= 3III$;

Wir vertauschen die 2. und 3. Spalte von $\tilde{A}$, nur um am Ende, die 2. und 3. Zeile zu vertauschen.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -* \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -* = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das geht, weil wir die Form

$$\begin{bmatrix} E_r & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -* \\ E_{n-r} \end{bmatrix} = 0 = E_r \cdot (-*) + * \cdot E_{n-r},$$

mit $n = 3$ und $r = 2$.

Wir erhalten $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und nach der Vertauschung dann $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Als Ergebnis also $(b_{ij})_{j \in I} = (-2, 1, 0)^T$.

Der Rest folgt analog.