Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben: “Integraloperatoren”

(Lectures 18 – 24)

Sei X eine Menge und ν ein Maß auf X. Hat man eine Funktion $k : X \times X \to \mathbb{C}$, so kann man die Abbildung K betrachten, die definiert ist als

$$(Kf)(x) := \int_X k(x,y) f(y)\, d\nu(y).$$

Man bezeichnet K als den *Integraloperator mit Kern k und Maß ν.*

Natürlich ist von vornherein überhaupt nicht klar für welche Funktionen f das Integral in der Definition von K überhaupt existiert, und für welche Räume man K als Operator zwischen ihnen betrachten kann. Dies muss von Fall zu Fall spezifiert werden, und es ergeben sich verschiedene Ergebnisse, je nachdem welche Voraussetzungen man an k stellt und zwischen welchen Räumen man den Operator K betrachtet.

IO / 1: Sei X eine Menge, μ ein σ-endliches Maß auf X, sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$, und betrachte den Integraloperator K mit Kern k und Maß μ.

Zeige, dass $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mu\times\mu)}$. Zeige, dass seine Hilbertraumadjungierte $K^* \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ der Integraloperator mit Kern $k^*(x,y) := \overline{k(y,x)}$ ist.

IO / 2: Sei X eine Menge und μ ein σ-endliches Maß auf X. Zeige:

(a) Seien $a_i, b_i \in L^2(\mu)$, $i = 1, \dots, n$. Setze $k(s,t) := \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)$ und betrachte den Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k. Dann ist $\dim \operatorname{ran} K \leq n$.

(b) Sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Dann ist der Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k und Maß μ kompakt.

IO / 3: Der *Volterra-Operator* ist der Integraloperator $(Vf)(x) := \int_0^x f(t)\, dt$. Zeige, dass $V \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ mit $\|V\| = \frac{2}{\pi}$, dass V kompakt ist, und dass

$$(V^* f)(x) = \int_x^1 f(t)\, dt.$$

Zeige, dass $\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$.

IO / 4: Sei $k \in C([0,1]^2)$, und betrachte den Integraloperator $(Kf)(x) := \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt$.

Zeige, dass $K \in \mathcal{B}(C([0,1]))$ mit

$$\|K\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\, dt \leq \|k\|_{C([0,1]^2)}.$$

Zeige, dass K kompakt ist.

IO / 5: Gibt es eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die der Gleichung

$$f(x) + \int_0^x e^{x\cos t} f(t)\, dt = x^2 + 1,\ x \in [0,1],$$

genügt? Falls ja, ist f eindeutig?

Hinweis. Ist der Punkt -1 im Spektrum des Operators ?
