Satz 2.3.2 (Unterraumkriterium) Eine Teilmenge U von V ist genau dann ein Unterraum, falls U die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

1. $U \neq \emptyset$

2. $a + xb \in U$ für alle $a, b \in U$ für alle $x \in K$.

Beweis. (a) Sind die beiden Bedingungen erfüllt, so folgt $a + (-1)b = a - b \in U$ für alle $a, b \in U$.
1. Sorgt dafür, dass U überhaupt etwas enthält und mit 2. kann man $x = -1$ wählen. Nach dem Untergruppenkriterium 1.9.9 ist $(U, +)$ daher eine Untergruppe von $(V, +)$. Laut Definition 2.2.2, ist $(V, +)$ eine Gruppe. Das zeigt $0 \in U$ und weiter $xb = 0 + xb \in U$ für alle $b \in U$ und alle $x \in K$. Jede Untergruppe enthält die Identität. Die Vektorraum-Axiome werden an den Unterraum vererbt. Alles, was zu zeigen bleibt, ist die Abgeschlossenheit unter $+$ und $\cdot$. Es ist also U gegenüber der Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen und somit ein Unterraum. ...

(b) Sei U ein Unterraum von V. „$\Leftarrow$". Dann gilt wegen $0 \in U$ die Eigenschaft 1. (In jedem Unterraum.) Als Vektorraum über K enthält U für jeden Vektor $b \in U$ auch alle skalaren Vielfachen von b. $\forall b \in U \ \forall x \in K: xb \in U$. Da die Gruppe $(U, +)$ gegenüber der Addition abgeschlossen ist, folgt nun die Gültigkeit der Eigenschaft 2. $\forall a, b \in U$ $\forall x, y \in K: ax + by \in U \Leftrightarrow a + \frac{y}{x} b \in U$. $\square$