Übungen zu Analysis 2, 1. Übung 12. 3. 2019

1. Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\int (x^3 + x^2 - 1)e^{2x-4}\, dx \text{ und } \int x^2 \exp(wx)\, dx,$$

   wobei $w \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest ist.

2. Man berechne

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 2}\, dx \text{ und } \int x^2 \sin x\, dx.$$

3. Man berechne durch geeignete Substitutionen folgende Integrale:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx, \qquad \int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx.$$

4. Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{x^2},$$

   und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist.

   Hinweis: Für die Stetigkeit betrachte man zunächst $x \in [-K, K]$ für ein $K \in \mathbb{N}$ und schreibe $f(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + + \sum_{k=-K}^{K} \frac{1}{(x-k)^2}$. Man zeige, dass man auf die beiden Reihen das Weierstraßkriterium anwenden kann.

5. Für welche $\alpha > 0$ konvergiert die Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}?$$

   Hinw.: Untersuchen Sie das Integral

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x \log^{\alpha} x}\, dx \quad a > 1$$

   auf Konvergenz.

6. Seien f, g Riemann-integrierbare Funktionen auf $[0, t]$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \mu$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \nu$. Zeigen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)g(t-x)\, dx = \mu\nu.$$

   Hinw.:

$$f(x)g(t-x) = (f(x) - \mu)g(t-x) + \mu g(t-x)$$

   und Satz 8.5.1.

7. Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Riemannintegrale existiere:
$$\int_0^\infty e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx.$$

8. Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Riemannintegrale existiere:
$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^2 \, dx.$$

9. Seien X, Y normierte Räume, A eine injektive lineare Abbildung $X \to Y$. Zeigen Sie, dass $A^{-1} : \ A(X) \to X$ genau dann stetig ist, wenn es $\rho > 0$ gibt mit $\|Ax\| \geq \rho \|x\| \ \forall x \in X$.

10. Sei A eine $n \times n$ Matrix, aufgefasst als Abbildung $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Berechnen Sie ihre Abbildungsnorm.