2. Strang Lemma

$$\boxed{\text{Suche } u \in V: \quad a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V}$$

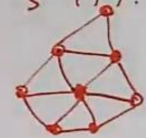
bisher diskretes Problem: Suche $u_h \in \boxed{V_h \subset V}$: $a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \ \forall v_h \in V_h$

konforme FE 1. Strang Lemma

jetzt: $V_h \not\subset V$ (nicht konforme FE)

Beispiele: i) Crouzeix – Raviart Element

bisher: $S^1(\mathcal{T})$:

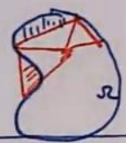


ii) nicht polygonale Gebiete

bisher $\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$

↑ polygonal

Sei $V_h \not\subset V$



Bsp.: $V = H^1_0(\Omega)$

$V_h = S^1_0(\mathcal{T}) \not\subset V$

$$\boxed{\text{Suche } u_h \in V_h: \quad a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h}$$

Anm: i) a auf $V \times V$ koerziv und stetig bzgl. $\|\cdot\|$ sein

ii) a_h auf $V_h \times V_h$ definiert, sei $\|\cdot\|_h$ Norm auf $V + V_h$

- $a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- $a_h(u, v_h) \leq \beta \|u\|_h \|v_h\|_h \quad \forall u \in \underline{V + V_h} = \{f + g,\ f \in V,\ g \in V_h\}$

unabh. von h

2. Strang Lemma

$$\|u-u_h\|_h \le \left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\underbrace{\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h}_{\text{Approximationsfehler}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha}\sup_{w_h\in V_h}\frac{|f_h(w_h)-a_h(u,w_h)|}{\|w_h\|_h}}_{\text{Konsistenzfehler}}$$

Bew.: Sei $v_h \in V_h$ bel.

$$\alpha\,\|u_h-v_h\|_h^2 \le |a_h(u_h-v_h, \overbrace{u_h-v_h}^{=w_h})|$$

$$\le |a_h(u-v_h, w_h)| + |\underbrace{f_h(w_h)}_{=a_h(u_h,w_h)} - a_h(u,w_h)|$$

$$\le \beta\,\|u-v_h\|_h\,\|u_h-v_h\|_h + \frac{|f_h(w_h)-a_h(u,w_h)|}{\|w_h\|_h}\|u_h-v_h\|_h$$

$$\Leftrightarrow \quad \|u_h-v_h\|_h \le \frac{\beta}{\alpha}\|u-v_h\|_h + \frac{1}{\alpha}\sup_{w_h\in V_h}\frac{|f_h(w_h)-a_h(u,w_h)|}{\|w_h\|}$$

$$\Rightarrow \|u-u_h\|_h \le \|u-v_h\|_h + \|v_h-u_h\|_h$$

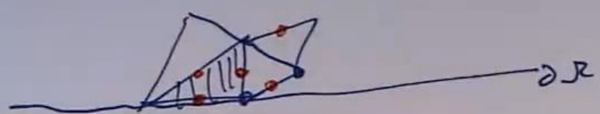
$$\le \left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\|u-v_h\|_h + \frac{1}{\alpha}\ \ldots$$

☐

Crouzeix-Raviart Element

$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$

$V_h^{CR} := \{ v \in L^2(\Omega) : \forall T \in \mathcal{T} : v|_T \in \mathcal{P}^1(T),\ v$ stetig auf Kantenmitten$\}$



$V_{h,0}^{CR} := \{ v \in V_h^{CR},\ v = 0$ auf Randkantenmitten$\} \not\subset H_0^1(\Omega) = V$

Beispiel: $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u v)\,dx \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (\nabla u_h \cdot \nabla v_h + u_h v_h)\,dx \quad , u_h, v_h \in V_{h,0}^{CR} + V$$

$$\| v_h \|_h := \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}} \| v \|^2_{H^1(T)}} \quad \Leftarrow \text{zoom!} \quad \forall v \in V_h + V$$

$$\| v_h \|_h^2 = a_h(v_h, v_h) \leq \| v_h \| \, \| v_h \|^2 \quad \Rightarrow \alpha = \beta = 1$$

Approximationsfehler: $u \in H^2(\Omega)$

$$\inf_{v_h \in V_{h,0}^{CR}} \| u - v_h \|_h \underset{S_0^1(\mathcal{T}) \subset V_{h,0}^{CR}}{\leq} \| u - I_h u \|_{H^1(\Omega)} \leq C h \| u \|_{H^2}$$

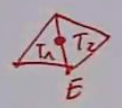
Konsistenzfehler :

$u \in H^2(\Omega)$

$$r(w_h) := a_h(u, w_h) - f(w_h)$$

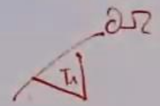
$$= \sum_{T \subset \mathcal{T}} \int_T (\nabla u \nabla w_h + u w_h - f w_h)\, dx$$

$$= \sum_{T \subset \mathcal{T}} \left\{ \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial n} w_h\, ds + \underbrace{\int_T (-\Delta u + u - f) w_h\, dx}_{=0} \right\}$$



$$w_{hE} := \frac{1}{|E|} \int_E w_h\, ds = \frac{1}{|E|} w_h(m_E)$$

Gauss-Quadratur



$$w_{hE}^{T_1} = w_{hE}^{T_2}$$

$w_{hE} = 0$ falls E Randkante

$$\frac{\partial u}{\partial n^{T_1}} = - \frac{\partial u}{\partial n^{T_2}}$$

$$= \sum_{T \subset \mathcal{T}} \sum_{E \subset T} \int_E \frac{\partial u}{\partial n} (w_h - w_{hE})\, ds$$

$$= \sum_{T \subset \mathcal{T}} \sum_{E \subset T} \int_E \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial I_h u}{\partial n} \right) (w_h - w_{hE})\, ds$$

($\frac{\partial I_h u}{\partial n} = \text{const}$, $\int_E (w_h - w_{hE})\, ds = 0$

$$\Rightarrow |r(w_h)| \leq \sum_{T \subset \mathcal{T}} \sum_{E \subset T} \underbrace{\left\| \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial I_h u}{\partial n} \right\|_{L^2(E)}}_{\overset{!}{\leq} C\sqrt{h}\, \|u\|_{H^2(T)}} \underbrace{\| w_h - w_{hE} \|_{L^2(E)}}_{\overset{!}{\leq} C\sqrt{h}\, \|w_h\|_{H^1(T)}}$$

$$\leq 3\bar{C} h \sum_{T \subset \mathcal{T}} \|u\|_{H^2(T)} \|w_h\|_{H^1(T)}$$

$$\Rightarrow \sup_{w_h \in V_h} \frac{|r(w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq \tilde{C}\, h\, \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Konsistenzfehler

insgesamt:

$$\|u - u_h\|_h \leq C\, h\, \|u\|_{H^2(\Omega)}$$