1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. u ist zweimal reell stetig differenzierbar in G mit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Ferner sei $f : K \to \mathbb{C}$ auf einer Kreisscheibe $K \subseteq G$ holomorph, Zeigen Sie: Falls u in K der Realteil von f ist, kann f längs eines jeden Weges in G analytisch fortgesetzt werden.

Sei γ ein beliebiger beim Mittelpunkt von K beginnender stetiger Weg in G und $\alpha : G \to \mathbb{R} : z \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(z)$ und $\beta : G \to \mathbb{R} : z \mapsto -\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ sowie $g = \alpha + i\beta$. Es gilt

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

also ist g holomorph. Wir wissen aus der Analysis bereits $f' = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_K - i \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_K = g|_K$ (vgl. Kaltenbäck Lemma 11.6.4). Nun lässt sich f' längs γ durch g analytisch fortsetzen. Damit wissen wir bereits, dass auch f eine analytische Fortsetzung längs γ hat.

2. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung einer ganzen Funktion. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ bestimme man das Residuum

$$\operatorname{Res}_0 \frac{f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n}.$$

$n \in \mathbb{Z}$ bel.; $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $z^{-n}\left(f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = z^{-n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^{-k}\right) =$

$$= z^{-n}\left(a_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{|k|} z^k\right) = a_0 z^{-n} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{|k|} z^{k-n}$$

$k-n=-1 \iff k = n-1$; wir wissen bereits, dass der (-1)-te Koeffizient das Residuum ist

Fall 1: „$n=1$": $\operatorname{Res}_0 \frac{f(z)+f(\frac{1}{z})}{z^n} = 2a_0$

Fall 2: „$n \neq 1$": $\operatorname{Res}_0 \frac{f(z)+f(\frac{1}{z})}{z^n} = a_{|n-1|}$

3. Welche Werte kann das Integral $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+a^2}$, $a \in \mathbb{C}$, für geschlossene Kurven in $\mathbb{C}\setminus\{\pm ia\}$ annehmen?

$f(z) := (z^2+a^2)^{-1}$

Fall 1: „$a = 0$" $\operatorname{Res}_0 f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{-2it}\, e^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt - i \int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt\right) = 0$$

$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, \nu_\gamma(0)\, \operatorname{Res}_0 f = 0$ nach dem Residuensatz

Fall 2: „$a \neq 0$" $\operatorname{Res}_{\pm ia} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z \mp ia| = \varepsilon} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left((\pm ia + \varepsilon e^{it})^2 + a^2\right)^{-1} i\varepsilon e^{it}\,dt =$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon^2 e^{2it} \pm 2ia\varepsilon e^{it} - a^2 + a^2\right)^{-1} e^{it}\,dt = \frac{\varepsilon}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{\varepsilon(\varepsilon e^{2it} \pm 2ia\varepsilon e^{it})}\,dt\right) =$$

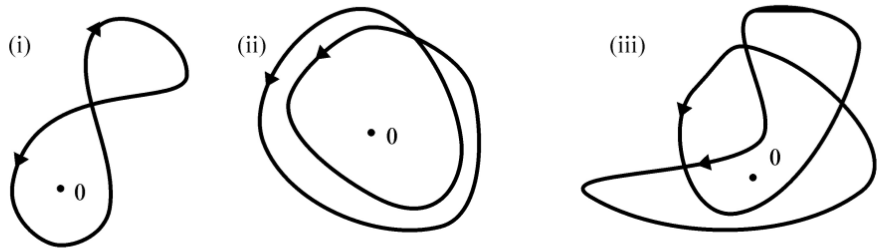
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{(z \pm 2ia))^{-1}}{z}\,dz = \pm\frac{1}{2ia}$$ nach der Cauchyschen Integralformel

Mit dem Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\nu_\gamma(ia)\operatorname{Res}_{ia} f + \nu_\gamma(-ia)\operatorname{Res}_{-ia} f\right) =$$

$$= 2\pi i \left(\nu_\gamma(ia)\frac{1}{2ia} - \nu_\gamma(-ia)\frac{1}{2ia}\right)$$

4. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{\sinh z}{z^2}\, dz$ für γ laut Skizze:



$$f(z) = \frac{\sinh(z)}{z^2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2z^2} = \frac{1}{2z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n - (-1)^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2n!} z^{n-2}$$

Das Residuum ist der (-1)-te Koeffizient also $\operatorname{Res}_0 f = 1$

(i) Nach dem Residuensatz ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \underbrace{\nu_\gamma(0)}_{=1} \underbrace{\operatorname{Res}_0 f}_{=1} = 2\pi i$

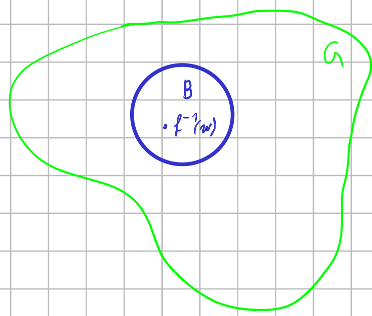
(ii) $\int_\gamma f(z)\,dz = 4\pi i$

(iii) $\int_\gamma f(z)\,dz = 4\pi i$

5. Es sei $f : G \to f(G)$ biholomorph auf einem Gebiet G, d.h. f ist bijektiv und f, f^{-1} sind holomorph. Weiters sei $B := \{z : |z - z_0| < r\}$ mit $\overline{B} \subseteq G$ für gewisse $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Zeigen Sie, dass für $w \in f(B)$ gilt:

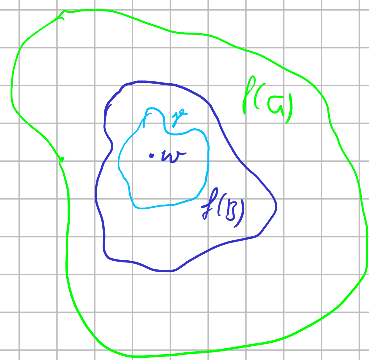
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

$$g(z) = \frac{z f'(z)}{f(z) - w};$$



$$f^{-1}(\gamma(t)) \overset{!}{=} f^{-1}(w) + \varepsilon e^{it2\pi} \Leftrightarrow \gamma(t) := f(f^{-1}(w) + \varepsilon e^{it2\pi})$$

ist ein stetiger, geschlossener Weg, der sich (außer am Anfangs- und Endpunkt) selbst nicht schneidet, γ ist ganz im Gebiet (nach dem Gebietssatz) $f(G)$ und $f(G)$ ist einfach zusammenhängend, da alle Homotopien im einfach zusammenhängenden Gebiet B mit f zu einer Homotopie in $f(B)$ werden. Also umläuft γ keinen Punkt des Komplements von $f(G$



$$\operatorname{Res}_{f^{-1}(w)} g = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - f^{-1}(w)| = \varepsilon} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f^{-1}(\gamma(t))\, f'(f^{-1}(\gamma(t)))}{f(f^{-1}(\gamma(t))) - w} f^{-1\prime}(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f^{-1}(\gamma(t))\, (f(f^{-1}(\gamma(t))))'}{\gamma(t) - w} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f^{-1}(\gamma(t))\, \gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^{-1}(z)}{z - w} dz = f^{-1}(w)$$ nach der Cauchyschen Integralformel

und nach dem Residuensatz gilt, da g wegen der Injektivität von f nur eine isolierte Singularität hat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} g(z)\, dz = \nu_{\partial B}(f^{-1}(w))\, \operatorname{Res}_{f^{-1}(w)} g = f^{-1}(w)$$

6. Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten. Zeigen Sie: Die Funktion $g(z) := z^{-2}f(z^{-1})$ ist in einer punktierten Umgebung von 0 holomorph, und es gilt $\operatorname{Res}_0 g = \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_a f$.

Seien $a_1, \dots, a_n$ die isolierten Singularitäten von f und $m := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$

$U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{m}\} \setminus \{0\}$ (eine punktierte Umgebung von 0)

Dann ist g auf U holomorph, denn für $z \in U$ bel. gilt $|z^{-1}| > m$

$$\operatorname{Res}_0 g = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z^{-1})}{z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon^{-1} e^{-it})}{\varepsilon^2 e^{2it}}\varepsilon e^{it}\,dt =$$

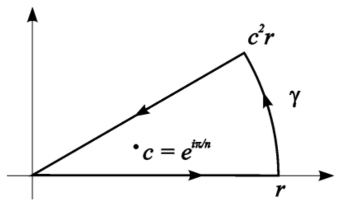
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon^{-1}e^{-it})\,\varepsilon^{-1}e^{-it}\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon^{-1}e^{-it})\,\varepsilon^{-1}(-i)e^{-it}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon^{-1}e^{it})\,\varepsilon^{-1} i e^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon^{-1}} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\nu_\gamma(a_i)}_{=1} \operatorname{Res}_{a_i} f$$

und da $\forall a \in \mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ nach dem Cauchyschen Integralsatz direkt $\operatorname{Res}_a f = 0$ gilt

$$\operatorname{Res}_0 g = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_i} f = \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_a f$$

7. Zeigen Sie: $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}(\sin\frac{m}{n}\pi)^{-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $0<m<n$, indem Sie $f(z)=\frac{z^{m-1}}{1+z^n}$ über γ (siehe Skizze unten links) integrieren



$$\underbrace{\int_\gamma \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,dz}_{I} = \underbrace{\int_0^r \frac{t^{m-1}}{1+t^n}\,dt}_{I_1} + \frac{i}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{r^{m-1}e^{i(m-1)\frac{t}{n}}}{1+r^n e^{it}}\, r e^{i\frac{t}{n}}\,dt}_{I_2} + \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{n}}\int_r^0 \frac{t^{m-1}e^{i\frac{2\pi}{n}(m-1)}}{1+t^n e^{i2\pi}}\,dt}_{I_3}$$

$$|I_2| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{r^m e^{i\frac{m}{n}t}}{1+r^n e^{it}}\,dt\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{|(r^n e^{it})^{\frac{m}{n}}|}{|1+r^n e^{it}|} = r^m\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1+r^n e^{it}|}\,dt \le \frac{2\pi r^m}{r^n-1} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$-I_3 = e^{i2\pi\frac{m}{n}}\int_0^r \frac{t^{m-1}}{1+t^n}\,dt = e^{i2\pi\frac{m}{n}} I_1$$

$$I = \int_\gamma \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_c f \overset{\text{Korollar zum Residuenbest.}}{=} \frac{2\pi i\, c^{m-1}}{n\, c^{n-1}} = \frac{2\pi i}{n} e^{i\frac{m-1}{n}\pi} e^{i\frac{-(n-1)}{n}\pi} = \frac{2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}(m-n)}$$

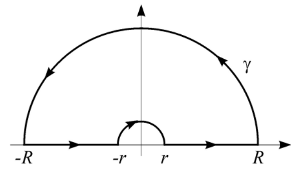
$$I = I_1 + iI_2 + I_3 \Leftrightarrow \frac{2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi(m-n)}{n}} = I_1 + iI_2 - e^{i2\pi\frac{m}{n}} I_1 = I_1(1-e^{i2\pi\frac{m}{n}}) - \frac{2\pi}{n} e^{i\pi\frac{m}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_1(1-e^{i2\pi\frac{m}{n}}) = \frac{2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi(m-n)}{n}} - iI_2 = e^{i\frac{\pi m}{n}}\left(\frac{2\pi i}{n} e^{-i\pi} - iI_2 e^{-i\frac{\pi m}{n}}\right) = -e^{i\frac{\pi m}{n}}\left(iI_2 e^{-i\frac{\pi m}{n}} + \frac{2\pi i}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow I_1 \cancel{e^{i\pi\frac{m}{n}}}\left(e^{-i\pi\frac{m}{n}} - e^{i\frac{\pi m}{n}}\right) = -\cancel{e^{i\pi\frac{m}{n}}}\left(iI_2 e^{-i\frac{\pi m}{n}} + \frac{2\pi i}{n}\right) \Leftrightarrow -2i\sin\left(\frac{m}{n}\pi\right) I_1 = -iI_2 e^{-i\frac{\pi m}{n}} - i\frac{2\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{m}{n}\pi\right)\right)^{-1} + \underbrace{I_2 e^{-i\frac{\pi m}{n}}\cdot\frac{1}{2}}_{\xrightarrow{r\to\infty} 0}$$

also $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{m}{n}\pi\right)\right)^{-1}$



8. Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$, indem Sie $\dfrac{l(z)}{1+z^2}$, wobei l ein geeigneter Zweig des Logarithmus ist, über γ laut Skizze (oben rechts) integrieren.

$l: \{re^{i\varphi} \mid r\in\mathbb{R}^+, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}\} \to \mathbb{C}: re^{i\varphi} \mapsto \log r + i\varphi$

$$\frac{i\pi^2}{2} = \frac{2\pi i\, l(i)}{2i} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{l(z)}{1+z^2} = \int_\gamma \frac{l(z)}{1+z^2}\,dz =$$

$$\underbrace{\int_0^\pi \frac{l(Re^{it})}{1+R^2e^{2it}}\, Rie^{it}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{-R}^{-r}\frac{l(t)}{1+t^2}\,dt}_{I_2} + \underbrace{\int_\pi^0 \frac{l(re^{it})}{1+r^2e^{2it}}\, rie^{it}\,dt}_{I_3} + \underbrace{\int_r^R \frac{l(t)}{1+t^2}\,dt}_{I_4}$$

$$|I_1| = \left|Ri\int_0^\pi \frac{\log(R)+it}{1+R^2e^{2it}}\,e^{it}\,dt\right| \le R\int_0^\pi \frac{|\log(R)+it|}{|1+R^2e^{2it}|}\,dt \le R\,\frac{\sqrt{\log(R)^2+\pi^2}}{R^2-1}\,\pi \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$I_2 = \int_{-R}^{-r}\frac{l(-te^{i\pi})}{1+t^2} = \int_{-R}^{-r}\frac{\log(-t)+i\pi}{1+t^2}\,dt = \int_r^R \frac{\log(t)}{1+t^2}\,dt + i\pi\int_r^R\frac{1}{1+t^2}\,dt = I_4 + i\pi(\arctan(R)-\arctan(r))$$

$$|I_3| = \left|-ir\int_0^\pi \frac{\log(r)+it}{1+r^2e^{2it}}\,e^{it}\,dt\right| \le r\int_0^\pi\frac{|\log(r)+it|}{|1+r^2e^{2it}|}\,dt \le \frac{r\pi\sqrt{\log(r)^2+\pi^2}}{1-r^2} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

also $$\frac{i\pi^2}{2} = I_1 + I_3 + 2I_4 + i\pi(\arctan(R)-\arctan(r)) \xrightarrow[r\to 0]{R\to\infty} 2\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \frac{i\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$$