

Kapitel 10

Linearisierung und invariante Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel untersuchen wir das Verhalten von Lösungen der autonomen Differentialgleichung

$$\dot{z} = f(z) \quad (10.1)$$

in der Nähe eines Equilibriums. Dazu sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ und $z_* \in G$ mit $f(z_*) = 0$.

10.1 Sattelpunkte autonomer Systeme

Wir nennen z_* einen **Sattelpunkt**, falls die Matrix $A = f'(z_*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, aber jeweils mindestens einen mit positivem und negativem Realteil. Wähle $R > 0$, sodass $B_R(z_*) \subset G$ gilt. Wir setzen wieder $x = z - z_*$, $h(x) = f(x + z_*) - f'(z_*)x$, $x \in B_R(z_*)$ und betrachten das Verhalten der Gleichung

$$\dot{x} = Ax + h(x) \quad (10.2)$$

in der Nähe von $x_* = 0$, wobei $A = f'(z_*)$. Man beachte, dass nach Konstruktion $h \in C^1(B_R(0); \mathbb{R}^n)$ und $h(0) = h'(0) = 0$ gilt. Abb. 10.1 zeigt anschaulich, wie sich das Phasenportrait in der Nähe des Sattelpunktes $x_* = 0$ ändert, wenn man vom linearen Problem

$$\dot{y} = Ay \quad (10.3)$$

zum nichtlinearen Problem (10.2) übergeht. Die gesamten Trajektorien werden durch die Nichtlinearität $h = h(x)$ verbogen, um so stärker, je weiter man sich vom Sattelpunkt entfernt. Die topologischen Eigenschaften des Flusses bleiben dabei allerdings erhalten. Dieses Verhalten ist nicht nur an den zweidimensionalen Fall gebunden, wie wir gleich sehen werden.

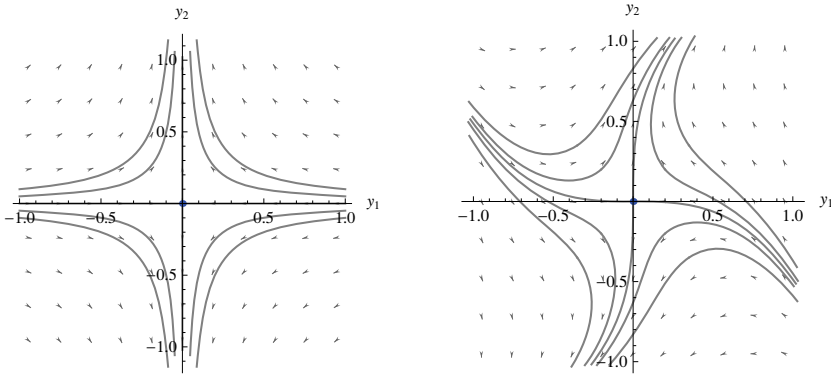


Abbildung 10.1: Linearer und nichtlinearer Sattelpunkt

Dazu benötigen wir jedoch noch eine Bezeichnung. Der **Morse-Index** $k \in \mathbb{N}$ eines Sattelpunktes $z_* \in G$ von (10.1) wird durch die Anzahl der Eigenwerte von $A = f'(z_*)$ mit positivem Realteil (Vielfachheit mitgezählt) definiert.

Wir kommen nun zur genauen Beschreibung nichtlinearer Sattelpunkte. Der nachfolgende Satz ist dabei für Equilibria von (10.1) formuliert.

Satz 10.1.1. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ und sei $z_* \in G$ ein Sattelpunkt von (10.1). Setze*

$$\mathcal{M}_s = \{y \in G : z(t, y) \text{ existiert auf } \mathbb{R}_+ \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, y) = z_*\},$$

und

$$\mathcal{M}_u = \{y \in G : z(t, y) \text{ existiert auf } \mathbb{R}_- \text{ und } \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, y) = z_*\}.$$

Ferner bezeichnen wir mit X_s bzw. X_u die von den stabilen bzw. instabilen Eigenwerten von $A = f'(z_*)$ aufgespannten Teilräume des \mathbb{R}^n , deren Dimensionen durch $\dim X_s = n - k$ und $\dim X_u = k$ gegeben sind, wobei k der Morse-Index von z_* ist. Dann gilt

1. \mathcal{M}_s bzw. \mathcal{M}_u sind C^1 -Mannigfaltigkeiten der Dimension $n - k$ bzw. k , welche durch z_* verlaufen, d.h. $z_* \in \mathcal{M}_s \cap \mathcal{M}_u$.
2. Die Tangentialräume von \mathcal{M}_s bzw. \mathcal{M}_u in z_* sind X_s bzw. X_u ; insbesondere schneiden sich \mathcal{M}_s und \mathcal{M}_u in z_* transversal.
3. Die Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}_s und \mathcal{M}_u sind invariant bezüglich (10.1).
4. Es gibt Zahlen $0 < \delta \leq \rho$ derart, dass für alle $y \in B_\delta(z_*)$ gilt

$$y \notin \mathcal{M}_s \implies |z(t, y) - z_*| > \rho, \text{ für mindestens ein } t > 0,$$

und

$$y \notin \mathcal{M}_u \implies |z(t, y) - z_*| > \rho, \text{ für mindestens ein } t < 0.$$

Beweis. Es genügt, alle Behauptungen für die *stabile Mannigfaltigkeit* \mathcal{M}_s zu beweisen, denn durch Zeitumkehr ergeben sich die entsprechenden Aussagen für die *instabile Mannigfaltigkeit* \mathcal{M}_u . Sei P_s die Projektion auf den Teilraum X_s längs X_u , d.h. es gilt $R(P_s) = X_s$ und $N(P_s) = X_u$; ferner sei $P_u = I - P_s$. Dann existieren Konstanten $M \geq 1$, $\eta > 0$, sodass die Abschätzungen

$$|e^{At}P_s| \leq Me^{-\eta t} \text{ und } |e^{-At}P_u| \leq Me^{-\eta t}$$

für alle $t > 0$ gelten. Wir wählen nun $r > 0$ so klein, dass die Abschätzung

$$|h(x)| \leq \frac{\eta}{2M}|x|, \quad \text{für } |x| \leq r$$

erfüllt ist und zeigen zunächst, dass \mathcal{M}_s die C^1 -Eigenschaft in einer Kugel um $z_* \in G$ besitzt.

Dazu betrachten wir die Integralgleichung

$$u(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}P_s h(u(s))ds - \int_t^\infty e^{A(t-s)}P_u h(u(s))ds, \quad (10.4)$$

wobei $x \in X_s$ ist. Um die Existenz einer Lösung von (10.4) zu sichern, verwenden wir den Satz über implizite Funktionen, den wir aus [25, Theorem 15.1, Corollary 15.1] zitieren.

Satz 10.1.2 (über implizite Funktionen). *Seien X, Y, Z Banach-Räume, $\mathcal{U} \subset X$, $\mathcal{V} \subset Y$ Umgebungen von $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$, $F : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow Z$ stetig, und stetig differenzierbar bezüglich y . Ferner gelte $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y^{-1}(x_0, y_0) \in \mathcal{B}(Z, Y)$. Dann existieren Kugeln $B_\delta(x_0) \subset \mathcal{U}$, $B_\rho(y_0) \subset \mathcal{V}$ und genau eine stetige Abbildung $\Phi : B_\delta(x_0) \rightarrow B_\rho(y_0)$, sodass $\Phi(x_0) = y_0$ und $F(x, \Phi(x)) = 0$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt. In $B_\delta(x_0) \times B_\rho(y_0)$ besitzt die Gleichung $F(x, y) = 0$ keine weiteren Lösungen. Gilt für ein $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ zusätzlich $F \in C^m(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, so ist auch $\Phi \in C^m(B_\delta(x_0))$.*

Wir definieren einen Banachraum U durch

$$U := \{u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) : \|u\|_\eta = \sup_{t \geq 0} |u(t)|e^{\eta t/2} < \infty\}.$$

Nach Übung 10.1 ist die Abbildung $H : X_s \times B_r^U(0) \rightarrow U$, definiert durch

$$H(x, u)(t) = u(t) - e^{At}x - \int_0^t e^{A(t-s)}P_s h(u(s))ds + \int_t^\infty e^{A(t-s)}P_u h(u(s))ds$$

stetig differenzierbar bezüglich $(x, u) \in X_s \times B_r^U(0)$. Es gilt $D_x H(x, u)(t) = -e^{At}P_s$ und für $v \in U$ ist

$$D_u H(x, u)v(t) = v(t) - \int_0^t e^{A(t-s)}P_s h'(u(s))v(s)ds + \int_t^\infty e^{A(t-s)}P_u h'(u(s))v(s)ds.$$

Insbesondere ist $H(0,0) = 0$ und $D_u H(0,0) = I$, denn nach Voraussetzung gilt $h(0) = h'(0) = 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren nun Zahlen $\delta > 0$ und $\rho \in (0, r)$, und eine Funktion $\Phi \in C^1(B_\delta^{X_s}(0); B_\rho^U(0))$, mit $H(x, \Phi(x)) = 0$ für alle $x \in B_\delta^{X_s}(0)$. Ferner ist $\Phi(x)$ die einzige Lösung von $H(x, u) = 0$ in $B_\rho^U(0)$. Differenzieren wir die Gleichung $H(x, \Phi(x)) = 0$ bezüglich $x \in B_\delta^{X_s}(0)$, so erhalten wir die Identität

$$(D_x H)(x, \Phi(x)) + (D_u H)(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0, \quad x \in B_\delta^{X_s}(0).$$

Insbesondere gilt also $\Phi'(0)(t) = e^{At}P_s$, da $\Phi(0) = 0$ ist. Wir setzen $u(t; x) = \Phi(x)(t)$. Dann ist u eine Lösung der Integralgleichung (10.4) und es gilt

$$u(t, x) = e^{At} \left(x - \int_0^\infty e^{-As} P_u h(u(s, x)) ds \right) + \int_0^t e^{A(t-s)} h(u(s, x)) ds. \quad (10.5)$$

Da ferner $u(t, x) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$ gilt, ist $z(t) = z_* + u(t, x)$ eine Lösung von (10.1) mit $z(0) = z_* + u(0, x) = z_* + x - q(x) \in \mathcal{M}_s$. Hierbei ist $q(x)$ durch

$$q(x) = \int_0^\infty e^{-As} P_u h(u(s, x)) ds$$

gegeben, das heißt $q(x) \in R(P_u) = X_u$ und es gilt

$$q'(x) = \int_0^\infty e^{-As} P_u h'(\Phi(x)(s)) \Phi'(x)(s) ds,$$

also mit $h'(0) = 0$ insbesondere $q'(0) = 0$. Wir haben damit durch die Abbildung

$$B_\delta^{X_s}(0) \ni x \mapsto z_* + x - q(x) \in \mathbb{R}^n$$

eine C^1 -Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_s^* \subset \mathcal{M}_s$ definiert, die wegen $q'(0) = 0$ den Raum X_s als Tangentialraum in $x = 0$ bzw. $z = z_*$ besitzt.

Ist nun $z(t) = x(t) + z_*$ eine Lösung von (10.1) mit $|x(t)| \leq \rho$ für alle $t \geq 0$ und gilt $|x(0)| < \delta$, dann existiert das Integral

$$\int_t^\infty e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds,$$

denn es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_t^\infty e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds \right| \leq \int_t^\infty e^{\eta(t-s)} \frac{\eta}{2} \rho ds = \rho/2.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} P_u x(t) &= e^{At} P_u x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds \\ &= e^{At} \left(P_u x(0) + \int_0^\infty e^{-As} P_u h(x(s)) ds \right) - \int_t^\infty e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds, \end{aligned}$$

und da die Funktion $P_u x(t)$ nach Voraussetzung beschränkt ist, erhält man notwendigerweise

$$P_u x(0) + \int_0^\infty e^{-As} P_u h(x(s)) ds = 0.$$

Daher gilt

$$x(t) = e^{At} P_s x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} P_s h(x(s)) ds - \int_t^\infty e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds,$$

das heißt $x(t)$ ist eine Lösung von (10.4) in $B_\rho(0)$. Mittels der Eindeutigkeit der Lösungen von (10.4) in $BUC(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$, dem Raum der beschränkten gleichmäßig stetigen Funktionen auf \mathbb{R}_+ , erhalten wir nun $x(t) = u(t, P_s x(0))$ und daher auch

$$x(0) = u(0, P_s x(0)) = P_s x(0) - q(P_s(x(0))),$$

das heißt $z(0) \in \mathcal{M}_s^*$. Dadurch ist die Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_s^* innerhalb von \mathcal{M}_s lokal um z_* charakterisiert.

Allerdings stimmt es im Allgemeinen nicht, dass $\mathcal{M}_s \cap \bar{B}_\rho(z_*) = \mathcal{M}_s^*$ gilt. Man wähle zum Beispiel ein System, welches ein homoklines Orbit besitzt; vgl. Abb. 1.9. Man bezeichnet \mathcal{M}_s^* auch als die *lokale* stabile Mannigfaltigkeit, während \mathcal{M}_s die *globale* stabile Mannigfaltigkeit darstellt.

Um zu sehen, dass \mathcal{M}_s eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist, sei $y_0 \in \mathcal{M}_s \setminus \{z_*\}$ beliebig fixiert. Es existiert dann ein $t_0 > 0$ mit der Eigenschaft $z(t_0, y_0) =: z_0 \in \mathcal{M}_s^*$. Folglich gilt $z_0 = x_0 - q(x_0) + z_*$, mit einem $x_0 \in B_\delta^{X_s}(0)$. Die Abbildung $y \mapsto z(t_0, y)$ ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung von y_0 auf eine Umgebung von z_0 , mit der Inversen $y \mapsto z(-t_0, y)$. Damit ist die Komposition $g(x) := z(-t_0, x - q(x) + z_*)$ ein Homöomorphismus einer Umgebung von $x_0 \in X_s$ auf eine Teilmenge von \mathcal{M}_s , welche y_0 enthält. Definiert man die Topologie durch die von solchen Umgebungen erzeugte, so wird \mathcal{M}_s zu einer C^1 -Mannigfaltigkeit. \square

Man beachte, dass im Allgemeinen die Topologie auf \mathcal{M}_s *nicht* die von \mathbb{R}^n induzierte ist, vgl. Abb. 1.9. Gilt hingegen $\mathcal{M}_s \cap \mathcal{M}_u = \{z_*\}$, dann stimmt die Topologie auf \mathcal{M}_s mit der von \mathbb{R}^n induzierten überein, vgl. Übung 10.2. Der Beweis von Satz 10.1.1 zeigt, dass die Konvergenzrate der Lösungen auf \mathcal{M}_s bzw. \mathcal{M}_u für $t \rightarrow +\infty$ bzw. $t \rightarrow -\infty$ exponentiell ist.

10.2 Ebene Wellen für Reaktions-Diffusionsgleichungen

In der Biologie, der Chemie und in der Biochemie spielen Wechselwirkungen zwischen Wachstum bzw. Reaktion und Transportprozessen wie Konvektion oder Diffusion eine zentrale Rolle. Ein typisches Beispiel für die Modellierung von Reaktions-Diffusionsprozessen bildet das System partieller Differentialgleichungen

$$\partial_s u(s, \xi) = D \Delta_\xi u(s, \xi) + f(u(s, \xi)), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (10.6)$$

wobei D eine symmetrische positiv definite $\mathbb{R}^{n \times n}$ -Matrix, die Diffusionsmatrix ist, $\Delta_\xi = \sum_{j=1}^N \partial_{\xi_j}^2$ den Laplace-Operator in den Raumvariablen $\xi \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet, und $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ die Reaktionen repräsentiert.

Eine *ebene Welle* für (10.6) ist eine Lösung der Form

$$u(s, \xi) = x((k|\xi) - cs), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (10.7)$$

wobei $k \in \mathbb{R}^N$, $|k|_2 = 1$, den Wellenvektor, also die Ausbreitungsrichtung der Welle beschreibt, und $c \geq 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit bedeutet.

Setzt man ein solches u in (10.6) ein, so sieht man dass u genau dann eine Lösung von (10.6) ist, wenn x die gewöhnliche Differentialgleichung

$$D\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + f(x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10.8)$$

löst. Jede globale Lösung von (10.8) ergibt damit eine ebene Welle für (10.6). Aufgrund der Rotationssymmetrie des Laplace-Operators kann hier der Wellenvektor k beliebig gewählt werden.

Es ist offensichtlich, dass Equilibria x_* von (10.8), also Lösungen der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$, genau den zeitlich und räumlich konstanten Lösungen von (10.6) entsprechen, und Lösungen von (10.8) mit $c = 0$ sind die ebenen *stationären Wellen*, solche mit $c > 0$ die ebenen *fortschreitenden Wellen* von (10.6). Von Interesse sind nun bestimmte beschränkte Wellen, also beschränkte globale Lösungen von (10.8), insbesondere

- **Wellenfronten:** Dies sind genau die heteroklinen Orbits von (10.8), also Lösungen $x(t)$ derart, dass

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_\infty^\pm, \quad x_\infty^- \neq x_\infty^+$$

existieren;

- **Pulswellen:** Dies sind genau die homoklinen Orbits von (10.8), also Lösungen $x(t)$ derart, dass

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_\infty$$

existiert;

- **Wellenzüge:** Dies sind genau die periodischen Orbits von (10.8), also τ -periodische Lösungen $x(t)$, mit minimaler Periode $\tau > 0$.

Daher sind solche Lösungen von (10.8) besonders relevant. Häufig kommen weitere Einschränkungen hinzu, wie Positivität, falls der Vektor u Konzentrationen oder Populationsdichten beschreibt. Betrachten wir ein berühmtes Beispiel.

Beispiel. Die Fisher-Gleichung (Kolmogoroff, Piscounoff 1937). Gegeben sei die Fisher-Gleichung

$$\partial_s u = \Delta u + f(u), \quad (10.9)$$

wobei $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $f(0) = f(1) = 0$, $f(\tau) > 0$ für $\tau \in (0, 1)$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$. Ein typisches Beispiel für f ist die Funktion $f(\tau) = \tau(1 - \tau)$; in diesem Fall beschreibt (10.9) die Ausbreitung einer Population, die logistisch wächst, mittels Diffusion. Die Variable u bedeutet die Größe der Population in x zur Zeit t . Wir suchen eine *Wellenfront* von 1 nach 0, also eine streng fallende Funktion $z(t)$, die das Problem

$$\ddot{z} + c\dot{z} + f(z) = 0, \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

löst. In anderen Worten, gesucht ist ein $c \in \mathbb{R}_+$, sodass das System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -cw - f(z), \end{aligned} \tag{10.10}$$

ein heteroklines Orbit besitzt, welches die Equilibria $(1, 0)$ und $(0, 0)$ miteinander verbindet; vgl. Abb. 10.2.

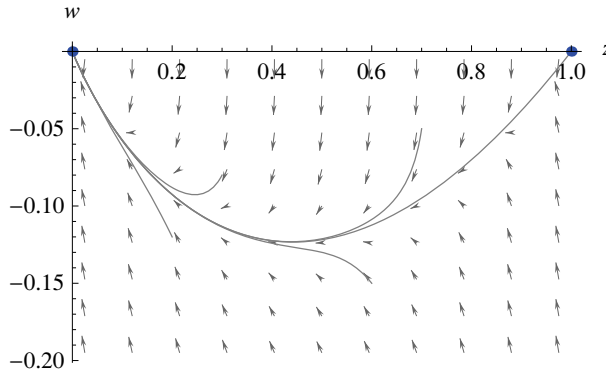


Abbildung 10.2: Heteroklines Orbit für die Fisher-Gleichung

Zunächst schauen wir uns die Linearisierungen $A(x, y)$ von (10.10) in den beiden Equilibria an. Es gilt

$$A(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -c \end{bmatrix},$$

also $\text{sp } A(0, 0) = -c$ und $\det A(0, 0) = f'(0) > 0$. Folglich ist $(0, 0)$ nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität für $c > 0$ stets asymptotisch stabil; genauer eine stabile Spirale für $0 < c < 2\sqrt{f'(0)}$ und ein stabiler Knoten für $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$. Daher ist $c \geq c^* := 2\sqrt{f'(0)}$ notwendig für die Existenz einer Wellenfront für (10.9). Linearisierung von (10.10) in $(1, 0)$ ergibt

$$A(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(1) & -c \end{bmatrix},$$

also $\operatorname{sp} A(1,0) = -c < 0$ und $\det A(1,0) = f'(1) < 0$, das heißt $(1,0)$ ist stets ein Sattelpunkt. Nach Satz 10.1.1 existiert die instabile Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_u , die in $(1,0)$ gerade den Tangentialraum X_u besitzt, der vom positiven Eigenwert von $A(1,0)$ aufgespannt wird; es gilt

$$X_u = \operatorname{span}\{[1, \sqrt{c^2/4 - f'(1)} - c/2]^T\}.$$

Da beide Komponenten des Eigenvektors streng positiv sind, liegt der nach links unten gerichtete Teil der instabilen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_u lokal im Dreieck G , das von den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,-\alpha)$ aufgespannt wird. Aus Übung 10.3 folgt, dass G positiv invariant für (10.10) ist, falls man $\alpha > 0$ geeignet wählt. Daraus folgt, dass der untere Teil der instabilen Mannigfaltigkeit das Dreieck G nicht mehr verlässt. Wegen $\dot{z} \leq 0$ existieren keine periodischen Lösungen von (10.10) in G . Aus Satz 9.2.4 folgt, dass die instabile Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_u das gesuchte heterokline Orbit ist, denn es gibt keine weiteren Equilibria in $\operatorname{int} G$.

Dieses Resultat war damals eine große Überraschung. Um zu verstehen warum, nehmen wir jetzt an, dass f ein Potential besitzt, also $f = \nabla\phi$, wobei $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ ist. Man beachte, dass wir in diesem Fall für $D = I$ genau die Gleichung für das gedämpfte Teilchen im Potentialfeld erhalten! Dann ist $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(D\dot{x}|\dot{x}) + \phi(x)$ eine Ljapunov-Funktion für (10.8), die für $c > 0$ sogar strikt ist. Daher kann es dann keine echten periodischen Lösungen und auch keine homoklinen Orbits geben, also keine fortschreitenden Wellenzüge und Pulse für (10.6). Ist ferner f linear, also $f(x) = Ax$, A symmetrisch, so gibt es überhaupt keine beschränkten Lösungen von (10.8), insbesondere auch keine Wellenfronten. Daher sind *Diffusionswellen* ein speziell nichtlineares Phänomen!

Erfüllt das Potential nun zusätzlich die Lojasiewicz-Ungleichung, dann impliziert Korollar 8.8.2, dass jede beschränkte Lösung, die auf einer instabilen Mannigfaltigkeit eines Sattelpunktes von (10.8) liegt, ein heteroklines Orbit für (10.8) ist, also eine Wellenfront für (10.6) darstellt.

10.3 Normal stabile Equilibria

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$. Wir haben bereits in Abschnitt 5.4 gesehen, dass man das Stabilitätsverhalten eines Equilibriums $z_* \in G$ der Differentialgleichung

$$\dot{z} = f(z) \tag{10.11}$$

mittels der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $f'(z_*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lokal charakterisieren kann. Dabei mussten wir den Fall ausschließen, dass mindestens ein Eigenwert λ von $f'(z_*)$ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ existiert. In diesem Abschnitt wollen wir nun Kriterien angeben, unter denen man auch im Fall $0 \in \sigma(A)$ auf Stabilität des Equilibriums z_* von (10.11) schließen kann. Wir werden außerdem zeigen, dass die Lösung $z(t)$ gegen ein Equilibrium z_∞ konvergiert, welches aber im Allgemeinen von z_* verschieden ist.

Sei $\mathcal{E} \subset G$ die Menge der Equilibria von (10.11), das heißt $z_* \in \mathcal{E}$ genau dann, wenn $f(z_*) = 0$. Für ein $z_* \in \mathcal{E}$ werden wir im Weiteren annehmen, dass z_* in einer m -dimensionalen C^1 -Mannigfaltigkeit von Equilibria enthalten ist. Das heißt, es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$, $0 \in U$ und eine C^1 -Funktion $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- $\Psi(U) \subset \mathcal{E}$, $\Psi(0) = z_*$,
- $\text{Rang } \Psi'(0) = m$.

Wir werden sehen, dass sich in einer Umgebung von z_* keine anderen Equilibria befinden, als jene, die durch die Abbildung Ψ gegeben sind, d.h. $\mathcal{E} \cap B_{r_1}(z_*) = \Psi(U)$ für ein $r_1 > 0$.

Ist z eine Lösung von (10.11), so löst die Funktion $u = z - z_*$ die Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au + h(u), \quad (10.12)$$

mit $A := f'(z_*)$ und

$$h(u) := f(u + z_*) - f(z_*) - f'(z_*)u.$$

Man beachte, dass aufgrund der Voraussetzung $h \in C^1(\tilde{G}, \mathbb{R}^n)$ und $h(0) = h'(0) = 0$ gilt, wobei $\tilde{G} = G - z_*$ ist. Mittels der verschobenen Funktion $\psi(\zeta) = \Psi(\zeta) - z_*$ erhalten wir ferner eine Gleichung für die Equilibria von (10.12)

$$-A\psi(\zeta) = h(\psi(\zeta)), \quad \zeta \in U. \quad (10.13)$$

Es folgt $-A\psi'(\zeta) = h'(\psi(\zeta))\psi'(\zeta)$, also $-A\psi'(0) = h'(0)\psi'(0) = 0$, das heißt $\mathbb{T}_{z_*}\mathcal{E} \subset N(A)$, wobei $\mathbb{T}_{z_*}\mathcal{E}$ den Tangentialraum von \mathcal{E} in z_* bezeichnet. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist der

Satz 10.3.1. *Sei z_* ein Equilibrium von (10.11), $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und es sei $A = f'(z_*)$. Angenommen z_* ist normal stabil, das heißt*

1. *In einer Umgebung von z_* ist die Menge der Equilibria \mathcal{E} eine C^1 -Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$,*
2. $\mathbb{T}_{z_*}\mathcal{E} = N(A)$,
3. 0 *ist ein halbeinfacher Eigenwert von A , das heißt $\mathbb{C}^n = N(A) \oplus R(A)$,*
4. $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re } \mu < 0\}$.

Dann ist z_ stabil und es existiert ein $\delta > 0$, sodass die eindeutige Lösung $z(t)$ von (10.11) zum Anfangswert z_0 mit $|z_0 - z_*| \leq \delta$ für alle $t \geq 0$ existiert und für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen ein $z_\infty \in \mathcal{E}$ konvergiert.*

Beweis. Der Beweis des Satzes gliedert sich in mehrere Teile.

(a) Wir setzen $X_c = N(A)$ und $X_s = R(A)$. Sei P_c die Projektion auf $R(P_c) = X_c$ längs $N(P_c) = X_s$ und P_s sei die Projektion auf $R(P_s) = X_s$ längs $N(P_s) = X_c$.

Insbesondere gilt also $P_c + P_s = I$. Ferner bezeichne $A_l = AP_l$ den Teil der Matrix A in X_l , $l \in \{c, s\}$. Beachte, dass $A_c = 0$ wegen $R(P_c) = N(A)$ gilt. Aus den Voraussetzungen 1. und 2. folgt außerdem

$$\dim X_c = \dim N(A) = \dim T_{z_*}(\mathcal{E}) = m.$$

(b) Betrachte die Abbildung

$$g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow X_c, \quad g(\zeta) := P_c \psi(\zeta).$$

Nach Konstruktion gilt $g \in C^1(U, X_c)$ und $g'(0) = P_c \psi'(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow X_c$ ist ein Isomorphismus. Nach dem Satz von der inversen Funktion ist g daher ein C^1 -Diffeomorphismus von einer Umgebung der 0 in \mathbb{R}^m auf eine Umgebung $B_{\rho_0}^{X_c}(0)$ der 0 in X_c , denn $g(0) = 0$. Die inverse Abbildung $g^{-1} : B_{\rho_0}^{X_c}(0) \rightarrow 0$ ist also C^1 und $g^{-1}(0) = 0$. Wir setzen $\Phi(x) := \psi(g^{-1}(x))$ für $x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$. Dann gilt

$$\Phi \in C^1(B_{\rho_0}^{X_c}(0), \mathbb{R}^n), \quad \Phi(0) = 0, \quad \{\Phi(x) + z_* : x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)\} = \mathcal{E} \cap W,$$

wobei W eine geeignete Umgebung von z_* in \mathbb{C}^n ist. Offensichtlich gilt dann

$$P_c \Phi(x) = ((P_c \circ \psi) \circ g^{-1})(x) = (g \circ g^{-1})(x) = x, \quad x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0),$$

das heißt $\Phi(x) = P_c \Phi(x) + P_s \Phi(x) = x + P_s \Phi(x)$ für $x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$. Mittels der Abbildung $\phi(x) := P_s \Phi(x)$ erhalten wir also

$$\phi \in C^1(B_{\rho_0}^{X_c}(0), X_s), \quad \phi(0) = \phi'(0) = 0, \tag{10.14}$$

und

$$\{x + \phi(x) + z_* : x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)\} = \mathcal{E} \cap W.$$

Die Eigenschaft $\phi'(0) = 0$ folgt aus der Tatsache $R(\Psi'(0)) \subset N(A) = X_c$ und $P_s X_c = 0$ (nach Voraussetzung 2 gilt sogar $R(\Psi'(0)) = N(A)$). Die Mannigfaltigkeit \mathcal{E} kann also durch den verschobenen Graph der Funktion ϕ in einer Umgebung von z_* dargestellt werden. Wenden wir die Projektionen P_c und P_s auf (10.13) an und verwenden wir $x + \phi(x) = \psi(g^{-1}(x))$ für $x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$, so erhalten wir die äquivalenten Gleichungen

$$P_c h(x + \phi(x)) = 0, \quad P_s h(x + \phi(x)) = -A_s \phi(x), \quad x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0), \tag{10.15}$$

für die Equilibria von (10.12). Im Weiteren wählen wir $\rho_0 > 0$ so klein, dass die Abschätzungen

$$|\phi'(x)| \leq 1, \quad |\phi(x)| \leq |x| \tag{10.16}$$

für alle $x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$ gelten. Dies gelingt offenbar immer durch die Eigenschaft (10.14).

(c) Mittels der neuen Variablen

$$\begin{aligned}x &= P_c u = P_c(z - z_*), \\y &= P_s u - \phi(P_c u) = P_s(z - z_*) - \phi(P_c(z - z_*)),\end{aligned}$$

erhalten wir nun das folgende System in $X_c \times X_s$,

$$\begin{cases} \dot{x} = T(x, y), & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = A_s y + R(x, y), & y(0) = y_0, \end{cases} \quad (10.17)$$

mit $x_0 = P_c u_0$ und $y_0 = P_s u_0 - \phi(P_c u_0)$ und den Funktionen

$$\begin{aligned}T(x, y) &= P_c h(x + \phi(x) + y), \\R(x, y) &= P_s h(x + \phi(x) + y) + A_s \phi(x) - \phi'(x)T(x, y).\end{aligned}$$

Aus (10.15) folgt

$$\begin{aligned}T(x, y) &= P_c (h(x + \phi(x) + y) - h(x + \phi(x))), \\R(x, y) &= P_s (h(x + \phi(x) + y) - h(x + \phi(x))) - \phi'(x)T(x, y),\end{aligned} \quad (10.18)$$

insbesondere gilt

$$T(x, 0) = R(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0),$$

das heißt, die Menge der Equilibria \mathcal{E} von (10.11) nahe z_* wurde auf die Menge $B_{\rho_0}^{X_c}(0) \times \{0\} \subset X_c \times X_s$ reduziert. Das System (10.17) heißt *Normalform* von (10.11) nahe des normal stabilen Equilibriums z_* .

(d) Wegen $h \in C^1(\tilde{G}, \mathbb{R}^n)$ und $h(0) = h'(0) = 0$, existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $r = r(\eta) > 0$, sodass die Abschätzung

$$|h(u_1) - h(u_2)| \leq \eta |u_1 - u_2|, \quad u_1, u_2 \in B_r(0), \quad (10.19)$$

gilt. Im Weiteren treffen wir die Annahme $r \in (0, 3\rho_0]$. Mit $u_1 = x + \phi(x) + y$ und $u_2 = x + \phi(x)$ erhalten wir aus (10.16), (10.18) und (10.19)

$$|T(x, y)|, |R(x, y)| \leq C\eta |y|, \quad (10.20)$$

für alle $x \in \bar{B}_\rho^{X_c}(0)$, $y \in \bar{B}_\rho^{X_s}(0)$ und alle $\rho \in (0, r/3)$, wobei $C > 0$ eine gleichmäßige Konstante ist. Nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz besitzt das Problem (10.12) zu jedem $u_0 \in B_\delta(0)$ mit $\delta \in (0, r)$ eine eindeutige lokale Lösung $u(t)$, welche sich nach dem Fortsetzungssatz auf ein maximales Existenzintervall $[0, t_+)$ fortsetzen lässt. Wir zeigen im Weiteren, dass die Lösung $u(t)$ global existiert und stabil ist. Sei $u_0 \in B_\delta(0)$, $N := |P_c| + |P_s|$ mit $N\delta < \rho < \rho_0$. Dann gilt mit (10.16)

$$x_0 = P_c u_0 \in B_{N\delta}^{X_c} \quad \text{und} \quad y_0 = P_s u_0 - \phi(x_0) \in B_{N\delta}^{X_s}.$$

Ferner definieren wir

$$t_1 := t_1(x_0, y_0) := \sup\{t \in (0, t_+) : |x(\tau)|_{X_c}, |y(\tau)|_{X_s} \leq \rho, \tau \in [0, t]\},$$

wobei $(x(t), y(t))$ die eindeutige Lösung von (10.17) zum Anfangswert (x_0, y_0) bezeichnet. Angenommen $t_1 < t_+$. Nach der Formel der Variation der Konstanten gilt für die Lösung $y(t)$ der zweiten Gleichung von (10.17) zum Anfangswert y_0 die Darstellung

$$y(t) = e^{A_s t} y_0 + \int_0^t e^{A_s(t-s)} R(x(s), y(s)) ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Wegen $\sigma(A_s) = \sigma(A) \setminus \{0\}$, Voraussetzung 4. und (10.20) erhalten wir mit einem $\omega > 0$ die Abschätzung

$$|y(t)| \leq M e^{-\omega t} |y_0| + M C \eta \int_0^t e^{-\omega(t-s)} |y(s)| ds,$$

für alle $t \in [0, t_1]$, wobei $M = M(\omega) > 0$ eine Konstante ist. Das Lemma von Gronwall liefert daher

$$|y(t)| \leq M |y_0| e^{(M C \eta - \omega)t}, \quad t \in [0, t_1].$$

Im Folgenden sei nun $\eta > 0$ so klein, dass $M C \eta < \omega/2$ gilt, also

$$|y(t)| \leq M |y_0| e^{-\omega t/2}, \quad t \in [0, t_1].$$

Wir benutzen dieses Resultat für eine geeignete Abschätzung der Lösung $x(t)$. Integration der ersten Gleichung in (10.17) ergibt

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |T(x(s), y(s))| ds \leq |x_0| + C \eta \int_0^t |y(s)| ds \\ &\leq |x_0| + M C \eta |y_0| \int_0^t e^{-\omega s/2} ds = |x_0| + 2 M C \eta |y_0| (1 - e^{-\omega t/2}) / \omega \\ &\leq |x_0| + C_1 |y_0|, \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, t_1]$ mit $C_1 := 2 M C \eta / \omega > 0$. Also gilt

$$|x(t)| + |y(t)| \leq |x_0| + (C_1 + M) |y_0| \leq (1 + C_1 + M) N \delta, \quad t \in [0, t_1].$$

Wähle nun $\delta \leq \rho / [2N(1 + C_1 + M)]$. Es folgt

$$|x(t)| + |y(t)| \leq \rho/2$$

für alle $t \in [0, t_1]$, was aber offensichtlich der Definition von t_1 widerspricht. Wir können daher den Schluss $t_1 = t_+$ treffen und wegen (10.16) gilt

$$|u(t)| \leq |x(t)| + |\phi(x(t))| + |y(t)| \leq \rho/2 + \rho/2 + \rho/2 = 3\rho/2 < r/2,$$

für alle $t \in [0, t_+)$. Dies zeigt, dass die Lösung $u = u(t)$ von (10.12) zum Anfangswert $u_0 \in B_\delta(0)$ die Kugel $B_r(0)$ nie verlässt, das heißt sie existiert für alle $t \geq 0$ und das triviale Equilibrium $u = 0$ von (10.12) bzw. $z = z_*$ von (10.11) ist stabil, denn zu hinreichend kleinem $r > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $z(t) \in B_r(z_*)$ für alle $t \geq 0$, sofern $z_0 \in B_\delta(z_*)$.

(e) Wir zeigen schließlich, dass die Lösung $z(t)$ von (10.11) für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen ein $z_\infty \in \mathcal{E}$ konvergiert. Aus den Abschätzungen von Schritt (d) erhalten wir

$$|y(t)| \leq M|y_0|e^{-\omega t/2},$$

und

$$|x(t)| + |y(t)| \leq \rho/2,$$

für alle $t \geq 0$. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T(x(s), y(s)) ds = \int_0^\infty T(x(s), y(s)) ds \in X_c.$$

Integration der ersten Gleichung in (10.17) ergibt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 + \int_0^\infty T(x(s), y(s)) ds =: x_\infty \in X_c,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} |x(t) - x_\infty| &= \left| \int_t^\infty T(x(s), y(s)) ds \right| \\ &\leq C\eta \int_t^\infty |y(s)| ds \\ &\leq 2MC\eta|y_0|e^{-\omega t/2}/\omega, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Die Funktion $x(t)$ konvergiert also exponentiell gegen x_∞ in X_c . Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) + \phi(x(t)) + y(t)) = x_\infty + \phi(x_\infty) =: u_\infty$$

und $u_\infty + z_*$ ist ein Equilibrium von (10.11). Für die Konvergenzrate von $u(t) \rightarrow u_\infty$ für $t \rightarrow \infty$ ergibt sich nach dem Mittelwertsatz und (10.16)

$$\begin{aligned} |u(t) - u_\infty| &= |x(t) + \phi(x(t)) + y(t) - x_\infty - \phi(x_\infty)| \\ &\leq |x(t) - x_\infty| + |\phi(x(t)) - \phi(x_\infty)| + |y(t)| \\ &\leq 4MC\eta|y_0|e^{-\omega t/2}/\omega + M|y_0|e^{-\omega t/2} \\ &= L|y_0|e^{-\omega t/2}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Damit konvergiert $z(t)$ exponentiell gegen $z_\infty := u_\infty + z_* \in \mathcal{E}$ für $t \rightarrow \infty$. □

Beispiel. Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Betrachte das ebene System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x+y)(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), \\ \dot{y} &= (y-x)(1 - \sqrt{x^2 + y^2}).\end{aligned}\tag{10.21}$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten (r, θ) , erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r(r-1), \\ \dot{\theta} &= r-1.\end{aligned}$$

Die Menge der Equilibria von (10.21) ist also der Einheitskreis und für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in G$ gilt $r(t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$. Das Phasenportrait ist rotationsinvariant, das heißt, es genügt, sich auf ein Equilibrium, sagen wir $z_* = (0, 1)$, einzuschränken. Es bezeichne $f(x, y)$ die rechte Seite von (10.21). Offensichtlich gilt $f \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$ und

$$A = f'(z_*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix A besitzt die beiden Eigenwerte 0 und -1 mit dazu gehörigen Eigenvektoren $[1, 0]^T$ und $[1, 1]^T$. Der Eigenwert 0 ist halbeinfach und der Kern $N(A)$ ist gerade der Tangentialraum $T_{z_*}\mathcal{E}$ an \mathcal{E} in z_* . Also ist z_* normal stabil und Satz 10.3.1 impliziert, dass jede Lösung, welche hinreichend nahe bei z_* startet, für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen einen Punkt auf dem Einheitskreis konvergiert. Außerdem ist z_* stabil (siehe auch Abschnitt 8.8).

Wir geben nun noch zwei Beispiele an, die zeigen, dass man auf die Bedingungen 2 und 3 aus Satz 10.3.1 nicht verzichten kann.

Beispiele. (a) Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und betrachte das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^3 - y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^m, \\ \dot{y} &= -y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^3 + x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^m.\end{aligned}\tag{10.22}$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten (r, θ) , erhalten wir das entkoppelte System

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r(r-1)^3, \\ \dot{\theta} &= (r-1)^m.\end{aligned}$$

Zunächst untersuchen wir den Fall $m = 1$. Die Menge der Equilibria ist wieder durch den Einheitskreis gegeben. Wie im Beispiel zuvor führen wir die Stabilitätsanalyse nur für das Equilibrium $z_* = (0, 1)$ durch. Es gilt

$$A = f'(z_*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $f(x, y)$ die rechte Seite von (10.22) bezeichnet. Daher ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 2 und dem Eigenraum $N(A) = \text{span}\{(1, 0)\} = T_{z_*}\mathcal{E}$. Der Eigenwert $\lambda = 0$ ist also *nicht* halbeinfach, das heißt, die Voraussetzung 3 aus Satz 10.3.1 ist nicht erfüllt. Hier konvergieren die Lösungen nicht, vgl. Beispiel 1 aus Abschnitt 8.8.

(b) In diesem Beispiel betrachten wir wieder das System (10.22), aber hier mit $m = 2$. In diesem Fall ist \mathcal{E} wieder der Einheitskreis und für die Linearisierung in $z_* = (0, 1)$ gilt

$$A = f'(z_*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit 2 und es gilt $N(A) = \mathbb{R}^2$, d.h. $\lambda = 0$ ist halbeinfach. Nun ist aber augenscheinlich die Bedingung 2 aus Satz 10.3.1 nicht erfüllt, denn $T_{z_*}\mathcal{E} = \text{span}\{(1, 0)\} \subsetneq \mathbb{R}^2$. Wie Beispiel 2 aus Abschnitt 8.8 zeigt, konvergieren die Lösungen nicht.

10.4 Normal hyperbolische Equilibria

Wir wollen nun den Fall untersuchen, dass das Spektrum $\sigma(A)$ der Linearisierung $A = f'(z_*)$ von (10.11) auch Eigenwerte mit positivem Realteil enthält. Also nehmen wir im Weiteren an, dass sich $\sigma(A)$ wie folgt zerlegen lässt:

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_s \cup \sigma_u, \quad \sigma_j \neq \emptyset, \quad j \in \{u, s\},$$

mit $\sigma_s \subset \{\mu \in \sigma(A) : \text{Re } \mu < 0\}$ und $\sigma_u \subset \{\mu \in \sigma(A) : \text{Re } \mu > 0\}$. In dieser Situation können wir das folgende Resultat beweisen.

Satz 10.4.1. *Sei z_* ein Equilibrium von (10.11), $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und es sei $A = f'(z_*)$. Angenommen z_* ist **normal hyperbolisch**, das heißt*

1. *In einer Umgebung von z_* ist die Menge der Equilibria \mathcal{E} eine C^1 Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$,*
2. $T_{z_*}\mathcal{E} = N(A)$,
3. *0 ist ein halbeinfacher Eigenwert von A , das heißt $\mathbb{C}^n = N(A) \oplus R(A)$,*
4. $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ und $\sigma_j \neq \emptyset, \quad j \in \{u, s\}$.

Dann ist z_ instabil. Zu jedem hinreichend kleinem $\rho > 0$ existiert ein $\delta \in (0, \rho]$, sodass die Lösung $z(t)$ von (10.11) zum Anfangswert $z_0 \in B_\delta(z_*)$ genau eine der beiden folgenden Eigenschaften besitzt.*

- $\text{dist}(z(t^*), \mathcal{E}) > \rho$ für ein $t^* > 0$, oder
- $z(t)$ existiert für alle $t \geq 0$ und $z(t) \rightarrow z_\infty \in \mathcal{E}$ exponentiell für $t \rightarrow \infty$.

Beweis. Die Instabilität von z_* folgt sofort aus Satz 5.4.1. Wegen Voraussetzung 3 können wir den Raum \mathbb{C}^n wie folgt zerlegen:

$$\mathbb{C}^n = N(A) \oplus N(\lambda_2) \oplus \dots \oplus N(\lambda_{r_1}) \oplus N(\lambda_{r_1+1}) \oplus \dots \oplus N(\lambda_{r_2}),$$

wobei $2 \leq r_1 < r_2$, $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für $j \in \{2, \dots, r_1\}$ und $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ für $j \in \{r_1 + 1, \dots, r_2\}$. Seien P_c, P_s, P_u die zugehörigen Projektionen auf $X_c = N(A)$, $X_s = N(\lambda_2) \oplus \dots \oplus N(\lambda_{r_1})$ und $X_u = N(\lambda_{r_1+1}) \oplus \dots \oplus N(\lambda_{r_2})$, das heißt $P_c + P_s + P_u = I$. Ferner bezeichne $A_l = AP_l$ den Teil der Matrix A in X_l , $l \in \{c, s, u\}$. Wegen $R(P_c) = N(A)$ gilt wieder $A_c \equiv 0$. Für ein Element $v \in \mathbb{C}^n$ verwenden wir im Weiteren die Norm

$$|v| = |P_c v| + |P_s v| + |P_u v|. \quad (10.23)$$

Sei ferner Φ die im Beweisschritt (b) von Satz 10.3.1 gewonnene Abbildung und wir definieren $\phi_l(x) = P_l \Phi(x)$ für alle $x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$. Dann gilt

$$\phi_l \in C^1(B_{\rho_0}^{X_c}(0), X_l), \quad \phi_l(0) = \phi'_l(0) = 0, \quad l \in \{s, u\} \quad (10.24)$$

und

$$\{x + \phi_s(x) + \phi_u(x) + z_* : x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)\} = \mathcal{E} \cap W,$$

für eine geeignete Umgebung W von z_* . Von nun an sei $\rho_0 > 0$ so klein gewählt, dass die Abschätzungen

$$|\phi'_l(x)| \leq 1, \quad |\phi_l(x)| \leq |x|, \quad l \in \{s, u\}, \quad (10.25)$$

für alle $x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$ gelten. Wenden wir die Projektionen P_l , $l \in \{c, s, u\}$ auf die stationäre Gleichung (10.13) an, so erhalten wir das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} P_c h(x + \phi_s(x) + \phi_u(x)) &= 0, \\ P_l h(x + \phi_s(x) + \phi_u(x)) &= -A_l \phi_l(x), \quad x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0), \quad l \in \{s, u\}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Wir definieren die neuen Variablen

$$x = P_c u, \quad y = P_s u - \phi_s(x) \quad \text{und} \quad v = P_u u - \phi_u(x).$$

Diese Definitionen ergeben die *Normalform* von (10.11) in $X_c \times X_s \times X_u$ in der Nähe des *normal hyperbolischen* Equilibriums z_* zu

$$\begin{cases} \dot{x} = T(x, y, v), & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = A_s y + R_s(x, y, v), & y(0) = y_0, \\ \dot{v} = A_u v + R_u(x, y, v), & v(0) = v_0, \end{cases} \quad (10.27)$$

wobei die Funktionen T , R_s und R_u durch

$$T(x, y, v) = P_c(h(x + y + v + \phi_s(x) + \phi_u(x)) - h(x + \phi_s(x) + \phi_u(x))),$$

und

$$R_l(x, y, v) = P_l(h(x + y + v + \phi_s(x) + \phi_u(x)) - h(x + \phi_s(x) + \phi_u(x))) - \phi'_l(x)T(x, y, v), \quad l \in \{s, u\},$$

gegeben sind. Aus diesen Darstellungen folgt $T(x, 0, 0) = R_l(x, 0, 0) = 0$, $l \in \{s, u\}$, für alle $x \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$, das heißt, die Menge der Equilibria \mathcal{E} nahe z_* wurde auf die Menge $B_{\rho_0}^{X_c}(0) \times \{0\} \times \{0\} \subset X_c \times X_s \times X_u$ zurückgeführt.

Sei nun $\eta > 0$ gegeben. Dann existiert ein $r = r(\eta) > 0$, sodass aus (10.19) die Abschätzung

$$|T(x, y, v)|, |R_l(x, y, v)| \leq C\eta(|y| + |v|), \quad l \in \{s, u\}, \quad (10.28)$$

für alle $x, y, v \in \bar{B}_{3\rho}^{X_l}(0)$, $l \in \{c, s, u\}$ mit $3\rho \in (0, r/5)$ folgt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $r \leq 5\rho_0$ annehmen. Sei

$$z(t) = x(t) + y(t) + v(t) + \phi_s(x(t)) + \phi_u(x(t)) + z_*$$

die Lösung von (10.11) zum Anfangswert $z_0 \in B_\delta(z_*)$, $\delta \leq \rho$ mit dem Existenzintervall $[0, t_+)$. Dann existiert entweder ein $t^* \in (0, t_+)$ mit $\text{dist}(z(t^*), \mathcal{E}) > \rho$ oder $\text{dist}(z(t), \mathcal{E}) \leq \rho$ für alle $t \in [0, t_+)$. Wir betrachten den letzteren Fall und setzen

$$t_1 := t_1(x_0, y_0, v_0) := \sup\{t \in (0, t_+) : |z(\tau) - z_*| \leq 3\rho, \tau \in [0, t]\}.$$

Angenommen es gilt $t_1 < t_+$. Aus (10.23) folgt zunächst $|x(t)| \leq 3\rho$ für alle $t \in [0, t_1]$. Wegen (10.25) gilt aber auch

$$\begin{aligned} |z(t) - z_*| &\geq |x(t)| + |y(t) + \phi_s(x(t))| \\ &\geq |x(t)| - |\phi_s(x(t))| + |y(t)| \geq |y(t)|, \quad t \in [0, t_1], \end{aligned}$$

also $|y(t)| \leq 3\rho$; entsprechend erhält man auch $|v(t)| \leq 3\rho$ für alle $t \in [0, t_1]$. Da \mathcal{E} abgeschlossen ist, gibt es für jedes $z \in B_{3\rho}(z_*)$ ein $\bar{z} \in \mathcal{E}$, mit der Eigenschaft $\text{dist}(z, \mathcal{E}) = |z - \bar{z}|$. Gilt zusätzlich $\text{dist}(z, \mathcal{E}) \leq \rho$, so erhalten wir aus der Dreiecksungleichung die Abschätzung $|\bar{z} - z_*| < 4\rho$. Für $4\rho \leq \rho_0$ existiert daher ein $\bar{x} \in B_{\rho_0}^{X_c}(0)$, mit $\bar{z} = \bar{x} + \phi_s(\bar{x}) + \phi_u(\bar{x}) + z_*$. Aus diesen Überlegungen und mit (10.25), erhalten wir somit die verbesserte Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho &\geq \text{dist}(z(t), \mathcal{E}) = |z(t) - \bar{z}(t)| \\ &= |x(t) - \bar{x}(t)| + |y(t) + \phi_s(x(t)) - \phi_s(\bar{x}(t))| \\ &\quad + |v(t) + \phi_u(x(t)) - \phi_u(\bar{x}(t))| \\ &\geq |x(t) - \bar{x}(t)| + |y(t)| - |\phi_s(x(t)) - \phi_s(\bar{x}(t))| \geq |y(t)|, \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, t_1]$; entsprechend erhält man auch die verbesserte Abschätzung $|v(t)| \leq \rho$ für alle $t \in [0, t_1]$.

Wir werden uns zunächst mit der Gleichung für $v(t)$ befassen. Da die Matrix A_u nur Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt, integrieren wir die Gleichung für $v(t)$ bezüglich t rückwärts, das heißt, wir verwenden die Lösungsdarstellung

$$v(t) = e^{A_u(t-t_1)}v(t_1) - \int_t^{t_1} e^{A_u(t-s)}R_u(x(s), y(s), v(s))ds, \quad t \in [0, t_1]. \quad (10.29)$$

Aus (10.28) und der Eigenschaft $|v(t_1)| \leq \rho$ ergibt sich

$$|v(t)| \leq Me^{\omega(t-t_1)}\rho + \eta MC \int_t^{t_1} e^{\omega(t-s)}(|y(s)| + |v(s)|)ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Integration von 0 bis t_1 ergibt

$$|v|_{L_1(0,t_1)} \leq M\rho/\omega + (\eta MC/\omega)(|y|_{L_1(0,t_1)} + |v|_{L_1(0,t_1)}). \quad (10.30)$$

Im nächsten Schritt leiten wir eine Abschätzung für $|y|_{L_1(0,t_1)}$ her. Dazu integrieren wir die Gleichung für $y(t)$. Es folgt

$$|y(t)| \leq Me^{-\omega t}|y_0| + \eta MC \int_0^t e^{-\omega(t-s)}(|y(s)| + |v(s)|)ds, \quad t \in [0, t_1],$$

und nach einer weiteren Integration von 0 bis t_1

$$|y|_{L_1(0,t_1)} \leq M|y_0|/\omega + (\eta MC/\omega)(|y|_{L_1(0,t_1)} + |v|_{L_1(0,t_1)}). \quad (10.31)$$

Addition von (10.30) und (10.31) ergibt

$$|y|_{L_1(0,t_1)} + |v|_{L_1(0,t_1)} \leq M|y_0|/\omega + M\rho/\omega + (2\eta MC/\omega)(|y|_{L_1(0,t_1)} + |v|_{L_1(0,t_1)}).$$

Wähle $\eta > 0$ zusätzlich so klein, dass $2\eta MC/\omega \leq 1/2$ gilt. Dann folgt

$$|y|_{L_1(0,t_1)} + |v|_{L_1(0,t_1)} \leq 2M(\rho + |y_0|)/\omega. \quad (10.32)$$

Nun wenden wir uns der Gleichung für $x(t)$ zu. Mit Hilfe von (10.28) erhalten wir aus (10.32) für alle $t \in [0, t_1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |T(x(s), y(s), v(s))|ds \\ &\leq |x_0| + \eta C(|y|_{L_1(0,t)} + |v|_{L_1(0,t)}) \leq |x_0| + 2\eta MC(\rho + |y_0|)/\omega. \end{aligned}$$

Wir wählen zuerst $\eta > 0$, dann $|x_0|$ hinreichend klein und erhalten somit wegen $|y(t)|, |v(t)| \leq \rho$ für alle $t \in [0, t_1]$ die Ungleichung $|z(t) - z_*| < 3\rho$, welche für alle $t \in [0, t_1]$ gilt. Das bedeutet aber einen Widerspruch zur Definition von t_1 , also gilt $t_1 = t_+$. Ferner können wir sagen, dass im Fall $\text{dist}(z(t), \mathcal{E}) \leq \rho$, $t \geq 0$, die Lösungen $x(t), y(t), v(t)$ global existieren und die Abschätzung

$$|x(t)|, |y(t)|, |v(t)| \leq 3\rho,$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Die Gleichung für $y(t)$ und (10.28) ergeben

$$|y(t)| \leq Me^{-\omega t}|y_0| + \eta MC \int_0^t e^{-\omega(t-s)}(|y(s)| + |v(s)|)ds. \quad (10.33)$$

Da $|v(t)| \leq 3\rho$ für alle $t \geq 0$ gilt und $e^{A_u(t-t_1)} \rightarrow 0$ exponentiell für $t_1 \rightarrow \infty$, folgt aus (10.29) die Lösungsdarstellung

$$v(t) = - \int_t^\infty e^{A_u(t-s)} R_u(x(s), y(s), v(s))ds,$$

also mit (10.28)

$$|v(t)| \leq \eta MC \int_t^\infty e^{\omega(t-s)}(|y(s)| + |v(s)|)ds. \quad (10.34)$$

Aus (10.33) und (10.34) erhalten wir für $\varphi(t) := |y(t)| + |v(t)|$ die nicht-kausale Integralungleichung

$$\varphi(t) \leq ce^{-\omega t} + \beta \int_0^\infty e^{-\omega|t-s|}\varphi(s)ds =: \mu(t), \quad t \geq 0, \quad (10.35)$$

mit $c := M|y_0|$ und $\beta := \eta CM$. Im Weiteren wollen wir nun zeigen, dass $\varphi(t)$ eine Abschätzung der Form $\varphi(t) \leq be^{-\alpha t}$ für geeignete $\alpha > 0$ und $b > 0$ erfüllt. Dazu beachte man zunächst, dass $\mu(t)$ eine beschränkte positive Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-\ddot{\mu} + \omega^2\mu = 2\omega\beta\varphi \quad (10.36)$$

ist, mit $\mu(t) \geq \varphi(t) \geq 0$. Subtraktion des Terms $2\omega\beta\mu$ in (10.36) liefert

$$-\ddot{\mu} + \omega_1^2\mu = 2\omega_1\beta\psi, \quad (10.37)$$

wobei $\omega_1 := (\omega^2 - 2\omega\beta)^{1/2} > 0$ für $\beta < \omega/2$, also $\eta > 0$ hinreichend klein, und $\psi(t) := \omega(\varphi(t) - \mu(t))/\omega_1$ gilt. Jede beschränkte Lösung von (10.37) besitzt nach dem Superpositionsprinzip die Darstellung

$$\mu(t) = be^{-\omega_1 t} + \beta \int_0^\infty e^{-\omega_1|t-s|}\psi(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Wegen $\psi(t) \leq 0$ folgt die Abschätzung

$$|y(t)| + |v(t)| = \varphi(t) \leq \mu(t) \leq be^{-\omega_1 t},$$

für alle $t \geq 0$, also insbesondere $y(t) \rightarrow 0$ und $v(t) \rightarrow 0$ exponentiell für $t \rightarrow \infty$. Schließlich können wir in der Lösungsdarstellung für $x(t)$ wegen (10.28) zur Grenze $t \rightarrow \infty$ übergehen und sehen, dass der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 + \int_0^\infty T(x(s), y(s), v(s))ds \in X_c$$

existiert. Damit ist

$$\begin{aligned} z_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) + y(t) + v(t) + \phi_s(x(t)) + \phi_u(x(t))) + z_* \\ &= x_\infty + \phi_s(x_\infty) + \phi_u(x_\infty) + z_*, \end{aligned}$$

ein Equilibrium von (10.11). Ähnlich wie im Beweis zu Satz 10.3.1 sieht man, dass $z(t)$ exponentiell gegen z_∞ konvergiert. \square

Als direkte Folgerung aus Satz 10.4.1 und Satz 8.6.2 erhalten wir das folgende

Korollar 10.4.2. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset G$ kompakt und sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine strikte Ljapunov-Funktion für (10.11). Sei ferner $z(t)$ eine Lösung von (10.11) mit $\gamma_+(z) \subset K$, welche ein normal stabiles oder ein normal hyperbolisches Equilibrium z_* in ihrer Limesmenge $\omega_+(z)$ hat. Dann konvergiert $z(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen $z_* \in \mathcal{E}$. Liegt $z(t)$ ferner in der instabilen Mannigfaltigkeit eines Sattelpunktes, so ist $z(t)$ ein heteroklines Orbit.*

Beweis. Nach Satz 8.6.2 gilt $\text{dist}(z(t), \mathcal{E}) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, d.h. wir können die Distanz der Lösung zur Menge der Equilibria für hinreichend großes t kontrollieren. Ferner existiert zu dem normal stabilen bzw. normal hyperbolischen Equilibrium $z_* \in \omega_+(z)$ eine Folge (t_k) , sodass $z(t_k) \rightarrow z_*$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Wählt man nun t_k hinreichend groß, so impliziert Satz 10.3.1 bzw. Satz 10.4.1 die erste Behauptung. Da V eine strikte Ljapunov-Funktion ist, folgt die zweite Behauptung aus Satz 10.1.1. \square

10.5 Teilchen im Potentialfeld mit Dämpfung

Seien $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aus C^2 und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus C^1 , mit $g(0) = 0$. Das Problem

$$\begin{aligned} \ddot{u} + g(\dot{u}) + \nabla \phi(u) &= 0, \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \end{aligned} \tag{10.38}$$

ist mit $x := [x_1, x_2]^\top := [u, \dot{u}]^\top$ äquivalent zum System $\dot{x} = f(x)$, wobei

$$f(x) = [\dot{u}, -g(\dot{u}) - \nabla \phi(u)]^\top = [x_2, -g(x_2) - \nabla \phi(x_1)]^\top$$

ist. Die Menge \mathcal{E} der Equilibria dieses Systems besteht aus Paaren der Form $(x_1, 0)$, wobei x_1 kritischer Punkt von ϕ ist. Als Ljapunov-Funktion betrachten wir die Energie

$$V(x) = \frac{1}{2}|x_2|_2^2 + \phi(x_1);$$

die Beziehung

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -(g(x_2(t))|x_2(t)) = -(g(\dot{u}(t))|\dot{u}(t))$$

längs Lösungen zeigt, dass V eine Lyapunov-Funktion ist, sofern $(g(y)|y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$; sie ist strikt, wenn $(g(y)|y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ gelten. Ist weiter ϕ koerziv, gilt also $\phi(u) \rightarrow \infty$ für $|u| \rightarrow \infty$, so ist jede Lösung beschränkt, und ihre Limesmengen sind somit nichtleer und liegen in \mathcal{E} .

Wir untersuchen nun, unter welchen Zusatzbedingungen ein Equilibrium $x_* = (u_*, 0)$ normal stabil bzw. normal hyperbolisch ist. Dazu untersuchen wir die Menge der kritischen Punkte von ϕ nahe bei u_* . Hier gibt es prinzipiell zwei Fälle zu unterscheiden:

- (a) $\nabla^2\phi(u_*)$ ist nicht singulär. In diesem Fall ist das Equilibrium isoliert in \mathcal{E} .
- (b) $\nabla^2\phi(u_*)$ ist singulär. In diesem Fall ist u_* typischerweise nicht isoliert, die kritischen Punkte von ϕ bilden eine Mannigfaltigkeit. Wir nennen u_* *nicht ausgeartet*, wenn der Tangentialraum dieser Mannigfaltigkeit mit dem Kern von $\nabla^2\phi(u_*)$ übereinstimmt.

Sei konkreter $\phi(u) = \varphi(|u|_2^2)$, wobei $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ aus C^2 sei, mit $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = 0$, $\varphi''(1) > 0$, $\varphi'(r) \neq 0$ für $r \neq 1$. Die Einheitssphäre S^1 besteht dann aus strikten Minima des Potentials, 0 ist ein lokales Maximum, und es gibt keine weiteren kritischen Punkte von ϕ . Das typische Beispiel ist das *Double-Well-Potential* $\phi(u) = \frac{1}{4}(|u|_2^2 - 1)^2$. In dieser Situation ist $\nabla\phi(u) = 2\varphi'(|u|_2^2)u$, und

$$\nabla^2\phi(u) = 2\varphi'(|u|_2^2)I + 4\varphi''(|u|_2^2)u \otimes u,$$

also ist $\nabla^2\phi(0) = 2\varphi'(0)I$ negativ definit da $\varphi'(0) < 0$ gilt, und $\nabla^2\phi(u) = 4\varphi''(1)u \otimes u$ für $u \in S^1$. Damit ist 0 Eigenwert von $\nabla^2\phi(u)$ der geometrischen Vielfachheit $n-1$ für jedes $u \in S^1$, und der Kern besteht aus allen Vektoren v mit $(u|v) = 0$; das ist genau der Tangentialraum an S^1 in u . Die Annahme $\varphi''(1) > 0$ ist dabei wesentlich, ansonsten ist jeder Punkt auf der S^1 ausgeartet. Insbesondere ist für $\phi(u) = \frac{1}{2k}(|u|_2^2 - 1)^k$ im Fall $k \geq 3$ jeder Punkt $u \in S^1$ ausgeartet.

Um die Bedeutung von *nicht ausgeartet* im allgemeinen Fall genauer zu verstehen, sei $B = \nabla^2\phi(u_*)$, und sei $k = \dim N(B)$. Da B symmetrisch ist, gilt $\mathbb{C}^n = N(B) \oplus R(B)$ und die Zerlegung ist orthogonal. Wir wählen eine Basis $T = [\tau_1, \dots, \tau_k]$ von $N(B)$ und eine Basis $N = [\nu_1, \dots, \nu_{n-k}]$ von $R(B)$, und betrachten die Gleichung

$$h(r, s) := N^T \nabla\phi(u_* + Tr + Ns) = 0.$$

$h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ist aus C^1 , es gilt $h(0, 0) = 0$ und $\partial_s h(0, 0) = N^T B N$ ist invertierbar. Der Satz über implizite Funktionen ergibt eine C^1 -Funktion $s : B_\rho(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit $s(0) = 0$ und $h(r, s(r)) = 0$ für alle $r \in B_\rho(0)$. Ferner gilt $0 = N^T B T + N^T B N s'(0)$, also $s'(0) = 0$. Damit ist die Gleichung $\nabla\phi(u) = 0$ für die Equilibria nahe u_* äquivalent zu

$$T^T \nabla\phi(u_* + Tr + Ns(r)) = 0, \quad (10.39)$$

und eine C^1 -Parametrisierung der Lösungsmenge nahe u_* ist durch die Abbildung $r \mapsto u_* + Tr + Ns(r)$ gegeben. Nun kann man schließen, dass u_* genau dann nicht ausgeartet ist, wenn (10.39) für alle $r \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^k$ mit einem $\delta > 0$ erfüllt ist.

Als nächstes betrachten wir die Linearisierung $A = f'(u_*, 0)$, also

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\nabla^2 \phi(u_*) & -g'(0) \end{bmatrix}.$$

$\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von A , falls $B = \nabla^2 \phi(u_*)$ singulär ist. Der Kern von A besteht aus den Vektoren $[v, 0]^T$, wobei $v \in N(B)$ ist. Sei als nächstes $[v, w]^T \in N(A^2)$. Dann gelten

$$Bv + g'(0)w = 0 \quad \text{und} \quad Bw = 0.$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit \bar{w} , der zweiten mit \bar{v} , und Subtraktion führt auf $(g'(0)w|w) = 0$. Die Annahme

$$(g'(0)y|y) \geq \eta|y|_2^2 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n,$$

mit einem $\eta > 0$, ergibt dann $w = 0$ und somit auch $Bv = 0$, d.h. $[v, w]^T \in N(A)$. Daher ist 0 halbeinfach.

Sei $\lambda = \sigma + i\rho$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $[v, w]^T$. Dann gilt $w = \lambda v$ und $\lambda w + g'(0)w + Bv = 0$, also

$$\lambda^2 v + \lambda g'(0)v + \nabla^2 \phi(u_*)v = 0.$$

Multipliziere skalar mit \bar{v} und zerlege in Real- und Imaginärteil, um

$$(\sigma^2 - \rho^2)|v|_2^2 + \sigma \operatorname{Re}(g'(0)v|v) - \rho \operatorname{Im}(g'(0)v|v) + (Bv|v) = 0,$$

und

$$2\sigma\rho|v|_2^2 + \rho \operatorname{Re}(g'(0)v|v) + \sigma \operatorname{Im}(g'(0)v|v) = 0$$

zu erhalten, denn die Matrix B ist symmetrisch. Ist nun die obige Annahme für $g'(0)$ erfüllt, so zeigt die zweite Gleichung, dass es auf der imaginären Achse außer $\lambda = 0$ keine Eigenwerte gibt. Daher ist das Equilibrium x_* normal hyperbolisch, falls u_* nicht ausgeartet ist.

Multiplikation der ersten Gleichung mit σ , der zweiten mit ρ und Addition führt auf

$$\sigma(\sigma^2 + \rho^2)|v|_2^2 + (\sigma^2 + \rho^2)\operatorname{Re}(g'(0)v|v) + \sigma(Bv|v) = 0.$$

Ist $B = \nabla^2 \phi(u_*)$ positiv semidefinit, so zeigt diese Gleichung, dass es in der offenen rechten Halbebene $\sigma > 0$ keine Eigenwerte gibt. In diesem Fall ist x_* daher normal stabil, falls u_* nicht ausgeartet ist. Wir fassen das Bewiesene in folgendem Satz zusammen.

Satz 10.5.1. Sei $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $g(0) = 0$ und es gelte mit einem $\eta > 0$

$$(g'(0)y|y) \geq \eta|y|^2,$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Sei u_* ein kritischer Punkt von ϕ und $x_* = (u_*, 0) \in \mathcal{E}$ sei das zugehörige Equilibrium von (10.38). Dann gelten

1. Ist $\nabla^2\phi(u_*)$ nicht singulär, dann ist $x_* \in \mathcal{E}$ ein hyperbolischer Punkt von (10.38), also asymptotisch stabil, falls $\nabla^2\phi(u_*)$ positiv definit und ein Sattelpunkt, falls $\nabla^2\phi(u_*)$ indefinit ist.
2. Ist $\nabla^2\phi(u_*)$ singulär, aber u_* nicht ausgeartet, dann ist $x_* \in \mathcal{E}$ normal hyperbolisch, und sogar normal stabil, falls $\nabla^2\phi(u_*)$ positiv semidefinit ist.
3. Sei ϕ zusätzlich koerziv und gelte

$$(g(y)|y) > 0$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann konvergiert jede Lösung $x(t)$ von (10.38), die ein nichtsinguläres oder ein normal stabiles oder ein normal hyperbolisches Equilibrium in ihrer Limesmenge $\omega_+(x)$ hat, für $t \rightarrow \infty$ gegen ein Equilibrium.

Beweis. Die dritte Behauptung folgt direkt aus Korollar 10.4.2 im Falle eines normal stabilen oder normal hyperbolischen Equilibriums in $\omega_+(x)$. Liegt jedoch ein nichtsingulärer Punkt $(u_*, 0) \in \omega_+(x)$ vor, so ist $(u_*, 0)$ isoliert in \mathcal{E} , also gilt $\omega_+(x) = \{(u_*, 0)\}$, da $\omega_+(x)$ zusammenhängend ist. Daraus folgt die Konvergenz der Lösung $x(t)$ gegen $(u_*, 0)$. \square

Man vergleiche dieses Resultat mit Korollar 8.8.2 aus Abschnitt 8.8.

Übungen

1. Es gelten die Bezeichnungen aus Satz 10.1.1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $H : X_s \times B_r^U(0) \rightarrow U$, definiert durch

$$H(x, u)(t) = u(t) - e^{At}x - \int_0^t e^{A(t-s)}P_s h(u(s))ds + \int_t^\infty e^{A(t-s)}P_u h(u(s))ds$$

stetig differenzierbar bezüglich $(x, u) \in X_s \times B_r^U(0)$, $r > 0$, ist, wobei U den Banachraum

$$U = \{u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) : \|u\|_\eta = \sup_{t \geq 0} |u(t)|e^{\eta t/2} < \infty\}, \quad \eta > 0$$

bezeichnet.

2. Seien \mathcal{M}_s bzw. \mathcal{M}_u die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit aus Satz 10.1.1. Zeigen Sie, dass im Fall $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{M}_s = \{z_*\}$ die Topologie auf \mathcal{M}_s mit der von \mathbb{R}^n übereinstimmt.

3. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck, welches durch die Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, -\alpha)$, $\alpha > 0$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass das Dreieck G für die Fisher-Gleichung (10.9) invariant ist, falls man $\alpha > 0$ geeignet wählt.

4. Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$(*) \quad \dot{x} = \varphi(|x|_2)x,$$

mit einer C^1 -Funktion $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle Equilibria von $(*)$.

(b) Charakterisieren Sie normal stabil bzw. normal hyperbolisch für $(*)$.

5. Zeigen Sie für die Huxley-Gleichung

$$\partial_s u = \Delta u + f(u),$$

mit $f(r) = r(1-r)(r-a)$, $r \in \mathbb{R}$, $a \in (0, 1/2)$ die Existenz einer Wellenfront.