Satz 2.5.7 Ist A eine linear unabhängige Teilmenge eines Erzeugendensystems M von V, so kann M durch Wegstreichen von Elementen aus $M \setminus A$ zu einer Basis von V verkürzt werden, d.h., es gibt mindestens eine Basis B von V mit $A \subset B \subset M$.

Beweis. Nach Satz 2.5.5 gibt es unter allen l.u. Mengen Y mit der Eigenschaft $A \subset Y \subset M$ mindestens eine maximale Menge B. Dabei ist $A \subset M \subset V$ l.u. Sei $x \in M$ beliebig gewählt. Der „ES-Teil" bleibt für die „Basis-Eigenschaft" noch zu zeigen, also $V = [B]$. Satz 2.5.4 (c) kann nicht direkt angewendet werden, weil Y a priori keine maximale l.u. TM von V, sondern nur von M. D.h., es könnte $\exists y \in V \setminus M : B \cup \{y\}$ l.u. Indem wir die Überlegungen aus dem Beweisteil (c) $\Rightarrow$ (a) zu Satz 2.5.4 wörtlich gleich widerholen, erkennen wir, dass sich x als Linearkombination von B schreiben lässt. Falls $x \in B \subset M$, ist dies trivial. Falls $x \in M \setminus B$, wissen wir, dass B maximal l.u., also $B \cup \{x\}$ l.a., ist. Also ist, laut Kontraposition von Satz 2.4.6 $x \in [(B \cup \{x\}) \setminus \{x\}] = [B]$. Es gilt also $M \subset [B]$. ... laut Definition 2.3.5 der Hülle und $\forall x \in M : x \in [B] \Leftrightarrow M \subset [B]$. Daraus folgt $[M] \subset [[B]] = [B]$ nach (2.13) und (2.15), was $V = [M] \subset [B]$ ergibt. $\Rightarrow V \subset [B] \subset V \Rightarrow V = [B]$. Daher ist die l.u. Menge B ein Erzeugendensystem von V, also eine Basis von V. ... $\square$