203. Seien $\mathscr{M}_1 \le \mathscr{M}_2$ mit folgender Eigenschaft: für alle k und endlichen Mengen $E \subseteq M_1$ der Größe k und für alle $b \in M_2$ gibt es einen Automorphismus $\pi : M_2 \to M_2$, der einerseits alle Elemente von E auf sich selbst abbildet, aber andererseits $\pi(b) \in M_1$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass dann $\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2$ gilt.

(Hinweis: Induktion nach Aufbau von φ.)

1) Atomformeln: $x_1 = x_2$, b Belegung mit Werten in M_1.

$$\hat{b}_1(x_1=x_2) = 1 \iff b(x_1) = b(x_2) \iff \hat{b}_2(x_1=x_2) = 1$$

2) Junktoren: sei $\hat{b}_1(\varphi) = \hat{b}_2(\varphi)$ und $\hat{b}_1(\psi) = \hat{b}_2(\psi)$

exemplarisch: $\hat{b}_1(\varphi \wedge \psi) = \hat{b}_1(\varphi) \wedge_B \hat{b}_1(\psi) = \hat{b}_2(\varphi) \wedge_B \hat{b}_2(\psi) = \hat{b}_2(\varphi \wedge \psi)$

3) Sei $\hat{b}_1(\varphi) = \hat{b}_2(\varphi)$ für alle Belegungen mit Werten in M_1

$$\hat{b}_1(\forall\varphi) = \inf\{\widehat{b_{x\to m}}_1(\varphi) \mid m \in M_1\} \overset{?}{=} \inf\{\widehat{b_{x\to m}}_2(\varphi) \mid m \in M_2\} = \hat{b}_2(\forall x\varphi)$$

interessanter Fall $\hat{b}_1(\forall\varphi) = 1$

Ang. $\hat{b}_2(\forall\varphi) = 0$, d.h. $\exists\, m_0 \in M$: $\widehat{b_{x\to m_0}}_2(\varphi) = 0$

Sei $E := \{b(y) \mid y$ kommt in φ (frei) vor$\} \setminus \{m_0\} \subseteq M_1$

Nun gibt es einen Automorphismus $\pi : M_2 \to M_2$ mit $\pi(m_0) \in M_1$ und $\pi|_E = id$

$\pi \circ b$ ist Belegung mit Werten in M_1

$\widehat{b_{x\to m_0}}(\varphi) = \widehat{\pi(b_{x\to m_0})}(\varphi) = 1$ ↯

z.z. $\widehat{\pi \circ b}(\varphi) = \hat{b}(\varphi)$ ← für alle Belegungen (mit Werten in M_2), alle Automorphismen

1) Atomformeln: $R(x_1, \dots, x_n)$ $\quad \widehat{\pi\circ b}_2(R(x_1,\dots,x_n)) = 1$

starke Strukturverträglichkeit

$$\iff (\pi(b(x_1)), \dots, \pi(b(x_n))) \in R^{M_2} \overset{?}{\iff} (b(x_1), \dots, b(x_n)) \in R^{M_2}$$

2) Sei $\widehat{\pi\circ b}_2(\varphi) = \hat{b}_2(\varphi)$, $\widehat{\pi\circ b}_2(\psi) = \hat{b}_2(\psi)$

$$\widehat{\pi\circ b}_2(\varphi\wedge\psi) = \widehat{\pi\circ b}_2(\varphi) \wedge_B \widehat{\pi\circ b}_2(\psi) = \hat{b}_2(\varphi\wedge\psi)$$

3) $\widehat{\pi\circ b}_2(\forall\varphi) = \inf\{\widehat{(\pi\circ b)_{x\to m}}(\varphi) \mid m \in M_2\} = \inf\{\widehat{\pi\circ(b_{x\to\pi^{-1}(m)})}(\varphi) \mid m \in M_2\}$

$= \inf\{\widehat{b_{x\to\pi^{-1}(m)}}(\varphi) \mid m \in M_2\} =$

$= \inf\{\widehat{b_{x\to m}} \mid m \in M_2\} = \hat{b}_2(\forall\varphi)$