Maß 2, Übung 11

January 8, 2020

1 Aufgabe 1

Lemma 1. *Wenn* $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig ist,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig ist,* $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$ *sowie* P *Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *sind und* $f_n \to f$ *gleichmäßig und* $P_n \to P$ *schwach, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}P_n = \int f \mathrm{d}P.$$

Beweis. Ausständig. □

2 Aufgabe 2

Definition 1. *Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen* P_n *auf dem Messraum* $(\Omega, \mathfrak{S})$ *heißt stark konvergent gegen* P*, wenn für alle* $A \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \tag{1}$$

gilt.

Lemma 2. *Wenn* $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$ *sowie* P *Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum* $(\Omega, \mathfrak{S})$ *sind und* $P_n \to P$ *stark, dann gilt für jede beschränkte und messbare Funktion* $f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

$$\lim_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}P_n = \int f \mathrm{d}P.$$

Beweis. Wir wählen eine beliebige beschränkte und messbare Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und ein beliebiges $\epsilon > 0$. Zuerst spalten wir die Funktion in einen Positivteil und einen Negativteil auf.

$$\left| \int f \mathrm{d}P_n - \int f \mathrm{d}P \right| \le \left| \int f^+ \mathrm{d}P_n - \int f^+ \mathrm{d}P \right| + \left| \int f^- \mathrm{d}P_n - \int f^- \mathrm{d}P \right|$$

Gemäß [**?**, Satz 7.30] gibt es eine monoton steigende Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass $t_k \to f^+$ gleichmäßig, wobei $t_k = \sum_{i=1}^{l_k} x_i \mathbf{1}_{[t_k = x_i]}$ ist. Jetzt verwenden wir abermals die Dreiecksungleichung und erhalten

$$\begin{aligned} &\left| \int f^+ \mathrm{d}P_n - \int f^+ \mathrm{d}P \right| \\ &\le \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P_n \right| + \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P \right| + \left| \int t_k \mathrm{d}P_n - \int t_k \mathrm{d}P \right| \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz $t_k \to f^+$ können wir ein $K \in \mathbb{N}$ finden so, dass für alle $k \ge K$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P_n \right| < \frac{\epsilon}{6} \wedge \left| \int \left(f^+ - t_k\right) \mathrm{d}P \right| < \frac{\epsilon}{6}$$

Jetzt können wir $P_n \to P$ stark nützen, was es uns erlaubt ein $N^+ \in \mathbb{N}$ zu finden so, dass für alle $n \geq N^+$:

$$\begin{aligned}\left|\int t_k \mathrm{d}P_n - \int t_k \mathrm{d}P\right| &= \left|\sum_{i=1}^{l_k} x_i P_n(t_k = x_i) - \sum_{i=1}^{l_k} x_i P(t_k = x_i)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{l_k} x_i \left(P_n(t_k = x_i) - P(t_k = x_i)\right)\right| < \frac{\epsilon}{6}\end{aligned}$$

gilt. Da man das Integral des Negativteils analog abschätzen kann gilt also insgesamt, dass $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$

$$\left|\int f \mathrm{d}P_n - \int f \mathrm{d}P\right| < \epsilon$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. □

3 Aufgabe 3

Lemma 3. *Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$ ein sigmaendlicher Maßraum und und seien $P_n, n \in \mathbb{N}$ und P bezüglich μ absolutstetige Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit den Dichten f_n und f und gelte weiters $f_n \to f$ punktweise. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $P_n \to P$ schwach

(b) $P_n \to P$ stark

Beweis. Der Satz von Radon Nikodym [**?**, Satz 11.19] garantiert die Existenz der Dichten und deren Nichtnegativität sowie die Tatsache, dass μ-fast überall $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ und f reellwertig sind. □

4 Augabe 4

Lemma 4. *Wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ ist dann konvergiert X_n in Verteilung genau dann, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$ der Grenzwert $p_k := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ existiert und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 1$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Hinrichtung, also $\Rightarrow$. □

5 Aufgabe 6

Lemma 5. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Seien (X_n) und (Y_n) Folgen von Zufallsvariablen sowie X eine Zufallsvariable auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$. Es gelte $X_n \to X$ in Verteilung und $Y_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit. Dann gilt $X_n + Y_n \to X$ in Verteilung.

(b) *Konvergiert eine Folge X_n auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ in Wahrscheinlichkeit gegen X, so gilt auch $X_n \to X$ in Verteilung.*

(c) *Eine Folge X_n auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ konvergiert in Verteilung gegen 0 genau dann, wenn X_n in Verteilung konvergiert.*

6 Aufgabe 7

Lemma 6. *Die Levy-Prokhorov-Metrik ist eine Metrik auf der Menge $M := \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F$ ist eine Verteilungsfunktion$\}$.*

$$d(F, G) := \inf\{\epsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} : F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon\}.$$

Beweis. Es sind drei Eigenschaften nachzuweisen.

(M1) $d(F, G) = 0 \Leftrightarrow F = G$.

Aus $d(F, G) = 0$ folgt definitionsgemäß $F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon$ für beliebig kleine $\epsilon > 0$. Da F monoton nichtfallend ist, existieren der links- und rechtsseitige Grenzwert bei x und mit $\epsilon \to 0$ erhält man $F(x-) \leq G(x) \leq F(x+)$. F und G stimmen also an allen Stetigkeitspunkten von F überein. F und G haben als Verteilungsfunktionen nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $x_k \searrow x$, die nur aus Stetigkeitsstellen von F und G besteht. Daher gilt $F(x) = \lim_k F(x_k) = \lim_k G(x_k) = G(x)$.
Die andere Richtung ist klar.

(M2) $d(F, G) = d(G, F)$.

$E_{FG} := \{\epsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} : F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon\}$,
$E_{GF} := \{\epsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} : G(x - \epsilon) - \epsilon \leq F(x) \leq G(x + \epsilon) + \epsilon\}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $G(x - \epsilon) - \epsilon \leq F(x) \Leftrightarrow G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon$; das erhält man sofort durch beidseitige Addition resp. Subtraktion von ϵ, der Rechtsstetigkeit von G und der Monotonie von F: $G(x) = G(x - \epsilon) \leq F(x) + \epsilon \leq F(x + \epsilon) + \epsilon$.

Analog zeigt man $F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \Leftrightarrow F(x) \leq G(x + \epsilon) + \epsilon$. Daher gilt $E_{FG} = E_{GF}$ und folglich

$$d(F, G) = \inf(E_{FG}) = \inf(E_{GF}) = d(G, F).$$

(M3) $d(F, H) + d(H, G) \geq d(F, G)$.

Sei $d(F, H) \leq \epsilon_1$, $d(H, G) \leq \epsilon_2$. Dann gilt

$F(x - \epsilon_1 - \epsilon_2) - \epsilon_1 - \epsilon_2 \leq H(x - \epsilon_2) + \epsilon_2 \leq G(x) \leq H(x + \epsilon_2) + \epsilon_2 \leq F(x + \epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_1 + \epsilon_2$, also $\epsilon_1 + \epsilon_2 \in E_{FG}$ und somit $\epsilon_1 + \epsilon_2 \geq d(F, G)$.

Nun gilt $d(F, H) + d(H, G) = \inf_{\epsilon_1 \in E_{FH}} \epsilon_1 + \inf_{\epsilon_2 \in E_{HF}} \epsilon_2 = \inf_{\epsilon_1 \in E_{FH},\ \epsilon_2 \in E_{HF}} \epsilon_1 + \epsilon_2$. Infima erhalten Ungleichungen und wir die gewünschte Aussage.

□

References