UE DGA WS2020-2021
Übungsblatt 2

Aufgabe 7:
Zum asymptotischen Vergleich von Folgen.

(a) Vergleichen Sie das asymptotische Verhalten von $f(n) = n!$ und $g(n) = (n+2)!$, d.h. überlegen Sie sich ob eine (welche) der Funktionen ein $o, O, \omega, \Omega, \Theta$ der anderen Funktion ist.

(b) Vergleichen Sie das aymptotische Verhalten von $f(n) = n^{\log_2 4}$ und $g(n) = 3^{\log_2(n)}$, d.h. überlegen Sie sich ob eine (welche) der Funktionen ein $o, O, \omega, \Omega, \Theta$ der anderen Funktion ist.

(c) Zeigen Sie an Hand der Definition, dass für positive Funktionen f und g die Beziehung

$$max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

gilt.

(d) Gilt selbige Beziehung ebenfalls für $min(f(n), g(n))$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(e) Folgt aus $f(n) = O(g(n))$, dass $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

(f) Gilt für alle positiven Funktionen f die Beziehung $f(n) = O((f(n))^2)$?

(g) Finden Sie eine Funktion f, sodass weder $f(n) = O(n)$ noch $f(n) = \Omega(n)$ gilt.

Aufgabe 8:
Zeigen Sie:

$$2^{2^{\lfloor \log_2 \log_2 n \rfloor}} = O(n)$$

und bestimmen Sie die größte Zahl $c > 0$, sodass

$$2^{2^{\lfloor \log_2 \log_2 n \rfloor}} = \Omega(n^c)$$

.

Aufgabe 9:

In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Russisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Russisch, 4 Englisch und Russisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?
(Hinweis: Prinzip von Inklusion und Exklusion)

Aufgabe 10:
Gegeben sei die Adjazenzmatrix A eines gerichteten Graphes $G = (V, E)$, welcher keine Schlingen (also Kanten (v, v), mit $v \in V$) und keine Mehrfachkanten enthält. Eine universelle Senke in solch einem gerichteten Graphen G ist ein Knoten s mit Hingrad $d^-(s) = |V| - 1$ und Weggrad $d^+(s) = 0$. Man zeige, dass es möglich ist, durch Untersuchen der Adjazenzmatrix A in Laufzeit $O(|V|)$ festzustellen, ob G solch eine universelle Senke enthält oder nicht.

Aufgabe 11:

Sei G der vollständige Graph auf 6 Knoten (d.h. 6 Knoten und eine Kante zwischen je 2 von ihnen). Jede Kante ist rot oder blau gefärbt. Zeigen Sie: es exisitiert in dem Graphen ein Dreieck (induzierter Teilgraph mit 3 Knoten) mit nur roten Kanten oder ein Dreieck mit nur blauen Kanten.
(Hinweis: Schubfachprinzip)

Aufgabe 12:

Beweisen Sie, dass es unter je neun Punkten in einem Würfel der Kantenlänge 2 stets zwei Punkte gibt, deren Abstand höchstens $\sqrt{3}$ ist.
(Hinweis: Schubfachprinzip)