ÜBUNGEN ZU “PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN” WS 2020 BLATT 5 (29. 10. 2020)

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Bestimmen Sie für $L(u) = u' - au$ ($a \in \mathbb{R}$) eine Greensche Funktion G auf $\Omega = (0,\infty)$, d.h. für festes $x \in \Omega$ gelten

$$LG(x,\cdot) = \delta_x \quad \text{in } \Omega, \quad G(x,\cdot) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

2. Bestimmen Sie für das Randwertproblem

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = f(x), \quad 0 < x < 1$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

mit $k(x) > 0$ für $0 \le x \le 1$ eine Funktion $g(x,y)$ (genannt *greensche Funktion*) sodass

$$u(x) = \int_0^1 g(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y$$

das Randwertproblem löst. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit einer Funktion $K(x)$, welche das homogene Problem

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

löst und die Randbedingung bei $x = 1$ erfüllt.

(ii) Integrieren Sie die erhaltene Gleichung von $x = 0$ bis $x = 1$, um einen Ausdruck für $u'(0)$ zu erhalten.

(iii) Leiten Sie daraus eine Formel für $u'(x)$ und dann $u(x)$ her.

(iv) Bringen sie die Formel für $u(x)$ auf die gewünschte Form.

Überprüfen Sie am Ende, dass

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(k(y)\frac{\mathrm{d}g(x,y)}{\mathrm{d}y}\right) = \delta(x-y),$$
$$g(x,0) = g(x,1) = 0$$

gilt.

Hinweis: die Methode ist im Spezialfall $k(x) = 1$ mit $K(x) = 1 - x$ etwas einfacher.

3. Berechnen Sie die greensche Funktion $G(x,y,\xi,\eta)$ für Δ auf der Viertelebene $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0\}$ mit Hilfe der Spiegelungsmethode. Stellen Sie mit dieser greenschen Funktion die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega\,, \quad u(x,0) = f(x) \text{ für } x > 0\,, \quad u(0,y) = g(y) \text{ für } y > 0$$

dar, wobei f und g stetig sind. Ist diese Lösung eindeutig?

---

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

4. Betrachten Sie die *Helmholtz-Gleichung*

$$(\Delta + k^2)u = f \text{ in } \mathbb{R}^3$$

mit der Wellenzahl $k > 0$, der Wellenquelle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und dem Wellenfeld $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$.

(i) Berechnen Sie eine radialsymmetrische Funktion $G(x, \xi) = g(|x - \xi|)$, für die $(\Delta_x + k^2)G = \delta_\xi$ gilt, und die der *sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung*

$$\lim_{r\to\infty} r\Big(\frac{\partial}{\partial r} - ik\Big)g(r) = 0$$

genügt.

Anmerkung: Diese Bedingung stellt eine Randbedingung (im Unendlichen) dar, weshalb man G auch eine greensche Funktion nennt.

(ii) Stellen Sie die/eine Lösung u der Helmholtz-Gleichung mit Hilfe von $G(x, \xi)$ dar. Zeigen Sie, dass für eine radialsymmetrische Funktion f diese Lösung auch radialsymmetrisch ist.

(iii) Konstruieren Sie aus G zwei weitere Funktionen G_{Dir} und G_{Neu}, welche greensche Funktionen auf $\Omega := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ sind und auf $\partial\Omega$ homogene Dirichlet- bzw. homogene Neumann-Randbedingungen erfüllen.

5. Betrachten Sie den Differentialoperator $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ für $c \in \mathbb{R}_+$ und $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$G(x, t) = \frac{1}{2c} H(t)\big[H(x + ct) - H(x - ct)\big]$$

eine Fundamentallösung von L mit Pol in $(x, t) = (0, 0)$ ist, wobei H die Heaviside-Funktion ist.

(ii) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von L mit Pol in $(x, t) = (\xi, \tau)$.

(iii) Berechnen Sie $\partial_t G(x, t)$.

6. Bestimmen Sie mit der Spiegelungsmethode eine greensche Funktion für das Dirichlet-Problem für Δ auf dem Keil

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \text{ und } 0 < y < x\}.$$