Prüfung Differentialgleichungen 1 (Melenk) 29.4.2021

Matrikelnr.:	Familienname:
Platznr.:	Vorname:

1:	2:	3:	4:	5:	Summe:

Bemerkungen:

0) Dauer: 2h.
1) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

2) **Taschenrechner mit einzeiligem Display (keine Graphik) sind erlaubt.**

3) Insgesamt können 20 Punkte erreicht werden.

4) Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein. Besser zu viel als zu wenig hinschreiben.

1. (5 Punkte) Betrachten Sie

$$y'(t) = Ay(t), \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & \gamma & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Ruhelage $(0,0,0,0)^\top$ in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.
b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $\gamma = 0$.

---

2. (3 Punkte) Geben Sie eine (nichttriviale) Funktion F mit $F(t, y(t)) = 0$, falls y die Differentialgleichung

$$4ty + 4y^4 + (2t^2 + 5ty^3)y' = 0$$

löst. *Hinweis:* integrierender Faktor von der Form $\varphi(t,y) = t^\alpha y^\beta$.

---

3. (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 0 \quad \text{auf } (1,2).$$

b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Randwertproblem

$$\begin{aligned} x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) &= f(x) \quad \text{auf } (1,2) \\ y(1) + y'(1) &= \gamma_1 \\ y(2) + \alpha y'(2) &= \gamma_2 \end{aligned}$$

für beliebige $f \in C([1,2])$, γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar?
c) Geben Sie eine Formel an, mit der sich eine Partikulärlösung für $f(x) = 2x^3$ bestimmen ließe.

---

4. (3 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(t) = t^2 + y^2(t), \qquad y(0) = 1$$

a) Zeigen Sie mithilfe einer Unterlösung, dass der rechte Rand T^+ des maximalen Existenzintervalls höchstens 1 sein kann.
b) Zeigen Sie nun mithilfe einer geeigneten Oberlösung, dass der rechte Rand T^+ des maximalen Existenzintervalls mindestens 1 ist.

Bitte umdrehen!

5. (5 Punkte) Betrachten Sie das System

$$x' = x + xy - (x+y)\sqrt{x^2+y^2},$$
$$y' = y - x^2 + (x-y)\sqrt{x^2+y^2},$$

welches in Polarkoordinaten die Form

$$r' = r(1-r), \qquad \varphi' = (1-\cos\varphi)r$$

hat.

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen. Sind diese stabil? Begründen Sie.
b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.
c) Zeigen Sie, dass für $R_1 < 1 < R_2$ die Kreisringe $\{(x,y) \mid R_1^2 \leq x^2+y^2 \leq R_2^2\}$ invariante Menge sind.
d) Zeigen Sie, dass die Lösungen für beliebigen Startwert global in der Zeit existieren.
e) Gibt es periodische Lösungen? Gibt es Grenzzyklen? Begründen Sie.