1. Man beweise, dass durch $w(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{E}$ die Automorphismen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ gegeben sind.

•) Wir wissen aus dem 2. Beweisschritt des Riemannschen Abbildungssatzes, dass

$w_2 : E \to E : z \mapsto \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ ein Automorphismus ist mit $w_2^{-1} : E \to E : z \mapsto (z+z_0)(1+\bar{z}_0 z)^{-1}$

Auch $w_1 : E \to E : z \mapsto ze^{i\varphi}$ ist eine Drehung und ein Automorphismus

Daher auch $w := w_1 \circ w_2$

•) Sei nun f ein bel. Automorphismus von E mit $f(z_0) = 0$. Die Funktion

$g := f \circ w_2^{-1}$ ist ebenfalls ein Automorphismus von E mit $g(0) = 0$

Es ist $g^{-1}(0) = 0$, nach dem Schwarzschen Lemma also für $a \in E$

$|a| = |g^{-1}(g(a))| \leq |g(a)| \leq |a|$, also $|g(a)| = |a|$ und somit ist

g eine Drehung, $g = w_1 \Leftrightarrow f \circ w_2^{-1} = w_1 \Leftrightarrow f = w_1 \circ w_2$

2. Man zeige, dass $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ zu $\mathbb{E}\backslash\{0\}$ konform äquivalent ist.

•) $G :=]-1,1[\cup (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$; $\quad f: \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to G\backslash\{0\} : z \mapsto \frac{1}{z}$

$z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$ bel., dann ist $f(z) \neq 0$, und ang. $f(z) \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[$, dann wäre $z \in [-1,1]$ ↯

$w \in G\backslash\{0\}$ bel. $f(z) \overset{!}{=} w \Leftrightarrow \frac{1}{z} = w \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$, existiert wegen $w \neq 0$ und wegen $w \notin \mathbb{R}\backslash]-1,1[$

ist $z \notin [-1,1]$, f ist also surjektiv, holomorph und sogar injektiv mit

$f^{-1}: G\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash[-1,1]: w \mapsto \frac{1}{w}$ und damit biholomorph

Damit ist $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ konform äquivalent zu $G\backslash\{0\}$

•) Sei $H \neq \mathbb{C}$ ein bel. einfach zusammenhängendes Gebiet, dann ist $H \overset{\text{konform äquivalent}}{\cong} E$. Sei $g: H \to E$ eine biholomorphe Abbildung und $z_0 \in H$ bel.. Dann ist auch $\tilde{g}: H \to E: z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}\, f(z)}$

eine biholomorphe Abb. mit $\tilde{g}(z_0) = 0$, also ist auch $h: H\backslash\{z_0\} \to E\backslash\{0\}: z \mapsto \tilde{g}(z)$

biholomorph und damit $H\backslash\{z_0\} \cong E\backslash\{0\}$

•) Dieses Ergebnis nützen wir. G ist einfach zusammenhängend, also $G \cong E$. eben wurde gezeigt, dass dann auch $G\backslash\{0\} \cong E\backslash\{0\}$, also $\mathbb{C}\backslash[-1,1] \cong G\backslash\{0\} \cong E\backslash\{0\}$

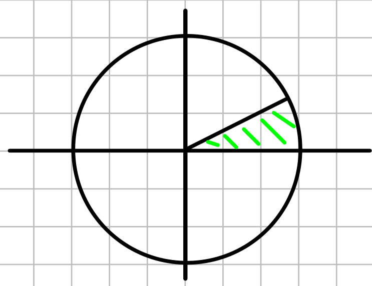
3. Man gebe jeweils eine biholomorphe Abbildung zwischen den angegebenen Gebieten an ($E_\alpha := \{re^{i\phi} : 0 < \phi < \alpha,\ 0 < r < 1\}$ bezeichne den Kreissektor zum Winkel α):

(a) Kreissektor $E_{\frac{\pi}{8}}$ und Kreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

(b) erster Quadrant $Q := \{x + iy : x, y > 0\}$ und Viertelkreisscheibe $E_{\frac{\pi}{4}}$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ biholomorph auf die Kreisscheibe $\mathbb{E}$ abbildet.

a) $\frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\bar z - i)}{(z+i)(\bar z - i)} = \frac{|z|^2 - i(z+\bar z) - 1}{|z|^2 + i(z - \bar z) + 1} =$



$= (|z|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z) + 1)^{-1} (|z|^2 - 1 - 2i\,\mathrm{Re}(z))$

Bezeichnen wir $\varphi: H \to E : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ sowie

so erkennen wir

$\mathrm{Im}(\varphi(z)) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) > 0 \Leftrightarrow z \in Q$. Definieren wir also $f_1: E_{\frac{\pi}{8}} \to E_\pi : z \mapsto z^8$

$f_2: E_\pi \to \overline{E_\pi} : z \mapsto z e^{i\pi}$, beides biholomorphe Abbildungen

Sei $w \in E$ bel. $w \overset{!}{=} \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow wz + wi = z - i \Leftrightarrow z(w-1) = -i(w+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -i\frac{w+1}{w-1} = i\frac{1+w}{1-w}$, also ist $\varphi^{-1}: E \to H : z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ und

$\tilde\varphi^{-1}: \overline{E_\pi} \to Q : z \mapsto \tilde\varphi^{-1}(z)$ und $f_3: Q \to H : z \mapsto z^2$

$\Psi : E_{\frac{\pi}{8}} \to E :\ \Psi = \varphi \circ f_3 \circ \tilde\varphi^{-1} \circ f_2 \circ f_1$

$\Psi(z) = \varphi(f_3(\tilde\varphi^{-1}(z^8 e^{i\pi}))) = \varphi\left(f_3\left(i \frac{1+z^8e^{i\pi}}{1-z^8e^{i\pi}}\right)\right) = \varphi\left(-\left(\frac{1+z^8e^{i\pi}}{1-z^8e^{i\pi}}\right)^2\right) = \frac{-\left(\frac{1+z^8e^{i\pi}}{1-z^8e^{i\pi}}\right)^2 - i}{-\left(\frac{1+z^8e^{i\pi}}{1-z^8e^{i\pi}}\right)^2 + i} =$

$= \frac{-(1+z^8e^{i\pi})^2 - i(1-z^8e^{i\pi})^2}{-(1+z^8e^{i\pi})^2 + i(1-z^8e^{i\pi})^2}$

b) Hier haben wir aus (a): $f_3: Q \to H$; $\varphi: H \to E$; $\Psi^{-1}: E \to E_{\frac{\pi}{8}}$ und wir brauchen noch $f_4: E_{\frac{\pi}{8}} \to E_{\frac{\pi}{4}} : z \mapsto z^2$

$\alpha: Q \to E_{\frac{\pi}{4}}:\ \alpha = f_4 \circ \Psi^{-1} \circ \varphi \circ f_3 = f_4 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \tilde\varphi \circ f_3^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f_3 =$

$= f_4 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \tilde\varphi$

$\alpha(z) = f_4\left(f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\right)\right) = f_4\left(f_1^{-1}\left(e^{i\pi}\frac{z-i}{z+i}\right)\right) = f_4\left(\sqrt[8]{e^{i\pi}\frac{z-i}{z+i}}\right) = \sqrt[4]{e^{i\pi}\frac{z-i}{z+i}}$

wobei $\sqrt[4]{\ }$ hier die Umkehrabb. von $\varphi: E_{\frac{\pi}{4}} \to E_\pi : z \mapsto z^4$ ist.

4. $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $h : \mathbb{C} \to T$ mit $h(z) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Geben Sie mit Hilfe von h einen Atlas an, der T zu einer Riemann'schen Fläche macht!

•) $Q_1 := \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x,y \in]0,1[\}$; $Q_2 := \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x,y \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\}$

$T_1 := T \setminus \{(x,y) \mid x = 1 \vee y = 1\}$; $T_2 := T \setminus \{(x,y) \mid x = -1 \vee y = -1\}$

$\varphi_1 := h|_{Q_1} : Q_1 \mapsto T_1$, $\varphi_2 := h|_{Q_2} : Q_2 \to T_2$

$\varphi_1^{-1} : T_1 \to Q_1 : (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \mapsto x+iy$, wobei $x,y \in]0,1[$ sind

$\varphi_2^{-1} : T_2 \to Q_2 : (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \mapsto x+iy$, wobei $x,y \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ sind

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ sind wohldef. und stetig, und wir erhalten den Atlas $A = \{\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}\}$

weil $T_1 \cup T_2 = T$

Wir betrachten nun

$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(T_1 \cap T_2) \longrightarrow \varphi_1^{-1}(T_1 \cap T_2) : x+iy \mapsto x+iy$, also die Identität und

damit eine biholomorphe Abb.

Nun ist nachgewiesen, dass A analytisch ist, also ist (T, A) eine Riemannsche Fläche

5. Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ definiert durch $h(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$. Zeigen Sie: $\mathcal{A} = \{(U, h^{-1}) : U \text{ offen in } \mathbb{E}\}$ ist ein Atlas von $\mathbb{E}$ und $(\mathbb{E}, \mathcal{A})$ somit eine Riemann'sche Fläche.

Riemann'sche Flächen $(M_1, \mathcal{A}_1), (M_2, \mathcal{A}_2)$ heißen *isomorph*, wenn es eine biholomorphe Abbildung $h : M_1 \to M_2$ gibt. Ist $(\mathbb{E}, \mathcal{A})$ isomorph zu $(\mathbb{E}, \{id\})$?

•) $h_U^{-1}: U \to h(U): w \mapsto \frac{w}{1-|w|}$, U offen in E ; $h_U: h^{-1}(U) \to U: z \mapsto h(z)$

$$h_U^{-1}(h_U(z)) = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{1-\frac{|z|}{1+|z|}} = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{\frac{1+|z|-|z|}{1+|z|}} = z$$

h_U, h_U^{-1} sind holomorph, es handelt sich bei h_U^{-1} also tatsächlich um eine Karte und wegen $h_E^{-1} \in A$ auch sicher um einen Atlas.

Seien U, V bel. offene Teilmengen von E, betr. h_U^{-1}, h_V^{-1}

$h_U^{-1} \circ h_V : h_V^{-1}(U \cap V) \longrightarrow \Psi(U \cap V) : z \mapsto z$ ist biholomorph, daher ist A analytisch und (E, A) eine Riemannsche Fläche

•) $id: E \to E$; Sei $a \in E$ bel.

$h_U^{-1} \in A$, $id \in \{id\}$ mit $a \in U$

$f : h_U^{-1}(E \cap U) \to E : z \mapsto id(id(h_U(z)))$

$f(z) = \frac{z}{1+|z|}$ ist analytisch

genauso ist für bel. $b \in E$ und offenes $V \subseteq E$ mit $b \in V$

$f^{-1} : V \to h_V^{-1}(V) : w \mapsto h_V^{-1}(id(id(w)))$

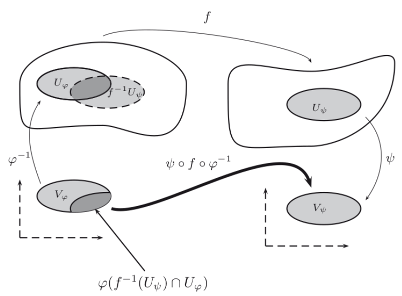
$f^{-1}(w) = \frac{w}{1-|w|}$ analytisch also f biholomorph und daher sind (E, A) und $(E, \{id\})$ isomorph

1.3 Definition. *Zwei Karten φ, ψ auf einer Fläche heißen* ***analytisch verträglich****, falls die Kartentransformationsabbildung*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \longrightarrow \psi(U \cap U')$$

biholomorph (=konform) ist.

1.4 Definition. *Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf einer Fläche X heißt* ***analytisch****, falls je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ analytisch verträglich sind.*



$$f_{\varphi,\psi} : \varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi) \longrightarrow V_\psi, \qquad f_{\varphi,\psi}(z) = \psi f \varphi^{-1}(z).$$

1.8 Definition. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ Riemann'scher Flächen $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ heißt analytisch in einem Punkt $a \in X$, falls die in 1.7 formulierten Bedingungen a), b) erfüllt sind.*

1.7 Hilfssatz. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Flächen. Auf X bzw. Y sei ein analytischer Atlas $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ ausgezeichnet. Schließlich sei $a \in X$ ein fester Punkt und $b = f(a)$. Folgende beiden Bedingungen sind gleichbedeutend:*

a) *Es gibt ein Paar von Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ mit $a \in U_\varphi$ und $\psi \in \mathcal{B}$ mit $b \in U_\psi$. Die Funktion $f_{\varphi,\psi}$ (,welche in einer offenen Umgebung von $\varphi(a)$ definiert ist,) ist analytisch in einer offenen Umgebung von $\varphi(a)$.*

b) *Die Bedingung a) gilt sinngemäß für* ***jedes*** *Paar von Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ mit $a \in U_\varphi$ und $\psi \in \mathcal{B}$ mit $b \in U_\psi$.*

Zusatz. *Die Bedingungen a) und b) übertragen sich von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ auf jedes Paar im wesentlichen gleicher Atlanten $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$.*

6. Sei $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Zahlkugel aufgefasst als Riemann'sche Fläche. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ analytisch, so ist f konstant.

(b) Ist $f \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$, so ist f eine rationale Funktion.

(c) Ist $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ biholomorph, so ist $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit geeigneten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

$\varphi: \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}: z \mapsto z$ und $\psi: \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}: z \mapsto \frac{1}{z}$ bilden einen Atlas auf $\bar{\mathbb{C}}$

a) Da f als analytische Abb. definitionsgemäß stetig ist, gibt es für bel. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $C \in \mathbb{R}^+$: $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > C\}$ so, dass $\forall z \in U: |f(z) - f(\infty)| < \varepsilon \Rightarrow |f(z)| < |f(\infty)| + \varepsilon$ also ist $f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt und da f analytisch ist, ist es eine ganze Funktion, nach dem Satz von Liouville also konstant, und da $\varphi^{-1} = id$ ist $f|_{\mathbb{C}}$ konstant, wegen der Stetigkeit auch f

b) Also $f: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ analytisch, dann ist auch $\hat{f}: \mathbb{C} \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}: z \mapsto f(z)$ analytisch, wobei $f^{-1}(\infty) \setminus \{\infty\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ nach Definition einer meromorphen Funktion diskret ist, es handelt sich bei $\infty \neq a_i \in f^{-1}(\infty)$ also um eine isolierte Singularität von $\hat{f}$. Da $f(a_i) = \infty$ ist und f topologisch ist, gibt es sicher keine Umgebung von a_i in welcher $\hat{f}$ beschränkt ist. Daher kann $\hat{f}$ keine hebbare Singularität sein. Weiters gibt es für bel. $C \in \mathbb{R}^+$ eine Umgebung U von a_i mit $|\hat{f}(U)| > C$, also ist $\hat{f}(U)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$, nach dem Satz von Casorati-Weierstraß (vgl. Jänich Satz 18) ist a_i demnach auch keine wesentliche Singularität. Daher ist a_i ein Pol, dessen Ordnung m_i sein soll. $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}: z \mapsto \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (z-a_i)^{m_i}}_{p(z) :=} \hat{f}(z)$ ist dann eine ganze Funktion.

Fall 1: „$f^{-1}(\infty) = \emptyset$" Dann gelten die Voraussetzungen von (a) und f ist konstant

Fall 2: „$f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$" $\hat{f}$ ist in dem Fall analytisch und hat einen Pol bei ∞ in dem Sinn, dass $\hat{f}(\frac{1}{z})$ einen Pol bei $z = 0$ hat, das Argument dafür ist gleich wie oben bei den Stellen a_i. Aus Übung 4 Aufgabe 5 (ii) wissen wir schon, dass $\hat{f}$ ein nicht konstantes Polynom ist, also auch f mit $f(\infty) = \infty$

Fall 3: „$f^{-1}(\infty) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$" $g = p\hat{f}$ hat dann, weil p wegen Übung 4 Aufgabe 5 (ii) einen Pol bei ∞ hat, ebenfalls einen Pol bei ∞, g ist also ein Polynom und daher ist $\hat{f} = \frac{g}{p}$ eine rationale Funktion und daher auch f

c) Sei also $f: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ biholomorph, sicher $f, f^{-1} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$, nach Punkt (b) also $f = \frac{p}{q}$ mit p, q Polynome, vollständig gekürzt

Fall 1: „$f(\infty) = \infty$" dann ist $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}: z \mapsto f(z)$ ganze Funktion und bijektiv, nach (b) ein Polynom mit genau einer Nullstelle, also vom Grad 1

Fall 2: „ $f(\infty) \neq \infty$" $\exists! u \in \mathbb{C}: f(u) = \infty$, das ist die einzige Nullstelle von q, also ist q ein Polynom vom Grad 1, da $f(\infty) \in \mathbb{C}$ ist sicher grad $p \leq$ grad $q = 1$.

7. Zeigen Sie, die beiden folgenden Aussagen

(a) Jede nicht konstante analytische Abbildung zusammenhängender Riemann'scher Flächen ist offen.

(b) Eine analytische Funktion auf einer zusammenhängenden Riemann'schen Fläche, welche ein Betragsmaximum annimmt, ist konstant

a) Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ zwei zusammenhängende Riemannsche Flächen und $f: X \to Y$ analytisch und nicht konstant. Sei ein bel. offenes $U \subseteq X$ gegeben und sei $a \in U$

Wähle ein $\psi: V \to \psi(V) \in \mathcal{B}$ mit $f(a) \in V$ und ein $\varphi: \tilde{U} \to \varphi(\tilde{U})$ mit $a \in \tilde{U}$. Da f und φ^{-1} topologisch sind gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so, dass $W := \{z \in \mathbb{C} : |z - \varphi(a)| < \varepsilon\}$ und $\varphi^{-1}(W) \subseteq U$ und $f(\varphi(W)) \subseteq V$

Da f analytisch ist gilt das auch für $g: W \to g(W): z \mapsto \psi(f(\varphi^{-1}(z)))$. Sicher gilt $\psi(f(a)) \in g(W)$, weil $\varphi(a) \in W$ ist. Nach der ersten Folgerung des Hilfssatzes 1.12 in Freitag ist $f^{-1}(f(a))$ diskret und daher auch $g^{-1}(\psi(f(a)))$, weil aber W nicht diskret ist kann g nicht konstant sein.

Da W ein Gebiet ist gilt das nach der Gebietstreue (vgl. Jänich Satz 13) auch für $g(W)$, damit ist $g(W)$ insbes. offen und damit ist auch $\psi^{-1}(g(W)) = f(\varphi^{-1}(W))$ offen.

Also $f(\varphi^{-1}(W)) \subseteq f(U)$, offen und $f(a) \in f(\varphi^{-1}(W))$, daher ist $f(U)$ offen.

b) Sei (X, A) zusammenhängende Riemannsche Fläche und $f: X \to \mathbb{C}$ analytische Funktion mit $w \in X: \forall z \in X: |f(z)| \leq |f(w)|$

f ist insbes. eine Abb. wie in (a), also eine offene Abb., also $f(X)$ offen.

Weiters ist $f(X) \subseteq K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |f(w)|\}$, jede Umgebung U von $f(w)$ erfüllt aber $U \cap K^c \neq \emptyset$ also auch $U \cap f(X)^c \neq \emptyset$ ↯ zu $f(X)$ ist offen.

Anm.: In (a) wurde nicht benötigt, dass Y zusammenhängend ist

8. Man zeige: Jede nicht konstante analytische Abbildung $f : X \to Y$ von einer zusammenhängenden kompakten Riemann'schen Fläche X in eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche Y ist surjektiv.
Da man Polynome als analytische Abbildungen der Zahlkugel in sich selbst auffassen kann, erhält man einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

•) Sei $f: X \to Y$ nicht surjektiv, X, Y zusammenhängende Riemannsche Flächen, X kompakt, f nicht konstant.
Da f stetig ist gilt, dass $f(X)$ kompakt ist. Nach Aufgabe 7 (a) ist $f(X)$ außerdem offen.
Als kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist $f(X)$ abgeschlossen, also $f(X)^c$ offen, da
aber $f(X) \cup f(X)^c = Y$ $\lightning$ zu Y zusammenhängend.

•) Sei $\tilde{p}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad ≥ 1

$$p : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} : z \mapsto \begin{cases} p(z), & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

Wir wissen bereits aus der Analysis, dass $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt ist, leicht erkennt man auch, dass sich $\overline{\mathbb{C}}$ nicht [als] Vereinigung zweier disjunkter offener Mengen schreiben lässt, also dass $\overline{\mathbb{C}}$ zusammenhängend ist.

$\varphi: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C} : z \mapsto z$ und $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$ bilden einen Atlas auf $\overline{\mathbb{C}}$

$$f: \underbrace{p^{-1}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \cap \mathbb{C}}_{= p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{p(z)} \quad \text{und } g: \psi(p^{-1}(\mathbb{C}) \cap \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C} : z \mapsto p\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$f_{\varphi,\psi} : \varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi) \longrightarrow V_\psi, \qquad f_{\varphi,\psi}(z) = \psi f \varphi^{-1}(z).$$

sind analytisch, daher ist auch p analytisch, nach (a) also surjektiv, woraus folgt, dass p eine Nullstelle hat.