5. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 18.01.2021

5.1 DER (HERMANN-BERNOULLI-LAPLACE-HAMILTON-PAULI-) RUNGE-LENZ VEKTOR

Der Vektor mit vielen Entdeckern und Namensgebern lautet

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m}\mathbf{p} \times \mathrm{L} - k\hat{\mathbf{r}}, \tag{5.1}$$

mit Masse m, Impuls $\mathbf{p}$, Drehimpuls $\mathbf{L}$, und Einheitsvektor in Radialrichtung ist $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|r|$. Reihen wir uns hinter die Größen der Physik und lernen den Vektor ein bisschen kennen.

a) Zeigen Sie, dass

$$\{A_x, A_y\} = -\frac{2}{m}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}\right) L_z. \tag{5.2}$$

Für welchen Hamiltonian (bzw. welche Art von Potential) erwarten Sie daher, dass der Runge-Lenz Vektor wichtig wird? *Hinweis: Es ist diesmal kürzer das die Poisson-Klammer über ihre Definition (Ableitungen) zu rechnen. Falls Sie es mit Poisson Klammern rechnen, lautet jene von einem Impuls* p_i *und dem Einheitsvektor* $1/r$ *in Radialrichtung* $\{p_i, 1/r\} = x_i/r^3$.

5.2 POISSON KLAMMERN ALS “GENERATOREN”

Um ein Gefühl dafür zu bekommen, was es heißt dass Poisson Klammern “Generatoren” der Bewegung sind, sehen wir uns noch einmal den harmonischen Oszillator an,

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{5.3}$$

Formal kann man die Lösung von $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \{\eta, H\}$ als

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp\left(t\{\bullet, H\}\right)\boldsymbol{\eta}_0 \tag{5.4}$$

schreiben, mit $\boldsymbol{\eta}_0 = (x, p)$. Die Exponentialfunktion ist als Taylorreihe zu verstehen, also

Klar, wir können den harmonischen Oszillator mittlerweile auch anders lösen. Wir nehmen aber absichtlich ein einfaches Beispiel um die etwas abstrakte Poisson Klammern besser verstehen zu lernen.

$$\exp\left(t\{\bullet, H\}\right)\boldsymbol{\eta}_0 = \left(1 + t\{\bullet, H\} + \frac{t^2}{2!}\{\bullet, H\}\{\bullet, H\} + \dots\right)\boldsymbol{\eta}_0. \tag{5.5}$$

Für den Punkt ($\bullet$) setzen Sie immer den Term “rechts davon” ein (der Term $\exp\left(t\{\bullet, H\}\right)$ ist als “Operator” zu verstehen), also z.B.

$$\{\bullet, H\}\{\bullet, H\}\boldsymbol{\eta}_0 = \{\bullet, H\}\{\boldsymbol{\eta}_0, H\} = \{\{\boldsymbol{\eta}_0, H\}, H\}. \tag{5.6}$$

Der Hamiltonian H ist hier als Funktion von $\boldsymbol{\eta}_0$ zu betrachten.

a) Führen Sie zuerst formal eine Taylorentwicklung von $\boldsymbol{\eta}(t)$ und von $\exp\left(t\{\bullet, H\}\right)\boldsymbol{\eta}_0$ für kleine Zeiten t bis zur ersten Ordnung durch und überzeugen Sie sich *(mit einem Resultat aus der Vorlesung)*, dass beide Seiten formal ident sind. *(Beide Seiten sind nicht sofort ident, sondern erst mit einem weiteren kurzen, einfachen Schritt.)*

b) Berechnen Sie nun explizit die Poisson Klammer $\{\boldsymbol{\eta}_0, H(\boldsymbol{\eta}_0)\}$. *Hinweis:* Die 2 Vektorkomponenten (x, p) von $\boldsymbol{\eta}_0$ berechnen Sie dabei getrennt.

c) Wenn man wie in Gleichung (5.6) für alle Ordnungen entwickelt, kann man $\boldsymbol{\eta}(t)$ auch für beliebig große t bestimmen! Finden Sie nun die explizite Lösung *(Sie kennen den harmonischen Oszillator bereits)* für $\boldsymbol{\eta}(t) = \ldots$ in dem Sie die Taylorreihe weiter ausschreiben und geschickt umordnen *(unendlich weit – oder bis Sie sehen, was passiert)*.

5.3 KANONISCHE TRANSFORMATION FÜR EIN TEILCHEN IM GRAVITATIONSFELD

Die Hamiltonfunktion $H(q, p)$ eines Teilchen der Masse m sei gegeben durch

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

Durch die geschickte kanonische Transformation

$$\bar{q}(q, p) = -p \qquad \text{und} \qquad \bar{p}(q, p) = q + Ap^2, \quad A \in \mathbb{R}$$

kann die Berechnung der Bewegungsgleichungen erleichtert werden.

a) Beweisen Sie, dass es sich bei der obigen Koordinatentransformation um eine kanonische Transformation handelt.

b) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$ in den neuen Koordinaten $(\bar{q}, \bar{p})$. Für welchen Wert von A wird $\bar{q}$ eine zyklische Koordinate in $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$?

c) Lösen Sie für $A = 1/(2m^2 g)$ die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für $\bar{q}$ und $\bar{p}$. Transformieren Sie zurück um die alten Koordinaten $q(q_0, p_0, t)$ und $p(q_0, p_0, t)$ als Funktion der Zeit und der Anfangsbedingungen $q_0 = q(0)$ und $p_0 = p(0)$ zu finden.

5.4 KANONISCHE TRANSFORMATIONEN ÜBEN

a) Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{\bar{q}, \bar{p}\}$ und zeigen damit, dass folgende Transformation kanonisch ist:

$$\begin{aligned}\bar{q}(q, p) &= \ln\left(1 + \sqrt{q}\cos(p)\right)\\ \bar{p}(q, p) &= 2\left(1 + \sqrt{q}\cos(p)\right)\sqrt{q}\sin(p)\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie weiters, dass

$$F_3(p, \bar{q}) = -\left(e^{\bar{q}} - 1\right)^2 \tan(p).$$

eine generierende Funktion dieser Transformation ist.

c) Für welche Werte α und β ist die folgende Transformation kanonisch?

$$\begin{aligned}\bar{q}(q, p) &= q^{\alpha}\cos(\beta p)\\ \bar{p}(q, p) &= q^{\alpha}\sin(\beta p)\end{aligned}$$

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
5.1 / 5.2 a-b / 5.2 c / 5.3 / 5.4 a-b / 5.4 c