Bgm 144, Finde eine Skolemtheorie!

$\Sigma := \{\forall x \forall y (x = y)\}$?

$\hat{b}(\exists y \psi) = \sup\{\widehat{b_{y\to m}}(\psi) \mid m \in M\} =$

$= \widehat{b_{y\to m_0}}(\psi)$

$\hat{b}(\psi[{}^{y}/_{f(\bar{x})}]) = \widehat{b_{y\to f^{M}(b'(\bar{x}))}}(\psi) = \widehat{b_{y\to m_0}}(\psi)$

Σ heißt Skolem-Theorie wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ und alle Formeln $\exists y \psi$ mit freien Var. $x_1, \ldots, x_n$ ein n-stelliges f gibt mit $\Sigma \vdash \exists y \psi \to \psi[{}^{y}/_{f(\bar{x})}]$

$\exists y (y = 2x_1 + x_2) \to \underbrace{2x_1 + x_2}_{f(x_1, x_2)} = 2x_1 + x_2$

(∗) Zu jeder Formel φ gibt es eine reine Allformel φ' (also eine Formel in Pränexform ohne Existenzquantoren) mit $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

146. Sei Σ eine Theorie, die (∗) aus der vorigen Aufgabe erfüllt, und seien $\mathscr{M}_1 \leq \mathscr{M}_2$ Modelle, in denen Σ gilt. Zeigen Sie $\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2$.

Sei φ bel. Formel und b bel. Belegung mit Werten in M_1

z.z.: $\mathcal{M}_1 \models \varphi[b] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \varphi[b]$

"$\Leftarrow$" $\mathcal{M}_2 \models \varphi[b]$ und $\mathcal{M}_2 \models \Sigma$ und $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi'$ also $\mathcal{M}_2 \models \varphi \Leftrightarrow \varphi'[b]$

also $\mathcal{M}_2 \models \varphi'[b]$, $\quad \varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \underbrace{\psi}_{\text{Matrix}}$ quantorenfrei

Seien $t_1, \ldots, t_n$ Terme

$\hat{b}_2(R(t_1, \ldots, t_n)) = 1 \Leftrightarrow (b_2'(t_1), \ldots, b_2'(t_n)) \in R^{\mathcal{M}_2} \Leftrightarrow (b_1'(t_1), \ldots, b_1'(t_n)) \in R^{\mathcal{M}_1} \Leftrightarrow \hat{b}_1(R(t_1, \ldots, t_n))$

$b_1'(t) = b_2'(t)$ durch Induktion nach dem Termaufbau, weil b nur Werte in M_1 hat, also auch b_1', b_2'

sei $\hat{b}_1(\psi_i) = \hat{b}_2(\psi_i)$, $i \in \{1, 2\}$, exemplarisch

$\hat{b}_1(\psi_1 \wedge \psi_2) = \hat{b}_1(\psi_1) \wedge_B \hat{b}_1(\psi_2) = \hat{b}_2(\psi_1) \wedge_B \hat{b}_2(\psi_2) = \hat{b}_2(\psi_1 \wedge \psi_2)$

also wissen wir für quantorenfreie Formeln, für Allquantoren:

$1 = \inf\{\widehat{b_{x\to m}}(\psi) \mid m \in M_2\} \leq \inf\{\widehat{b_{x\to m}}(\psi) \mid m \in M_1\}$

"$\Rightarrow$" z.z.: $\inf\{\widehat{b_{x\to m}}(\psi) \mid m \in M_2\} \geq \inf\{\widehat{b_{x\to m}}(\psi) \mid m \in M_1\}$

$\inf\{\underbrace{\widehat{b_{x\to m}}(R(x,y))}_{= 1 \Leftrightarrow (m, b'(y)) \in R^{\mathcal{M}_2}} \mid m \in M_2\} \geq \inf\{\widehat{b_{x\to m}}(R(x,y)) \mid m \in M_1\}$