1.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2019

Zur Notation: für ein beliebiges Mengensystem $\mathfrak{C}$ sollen $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ der Reihe nach den von $\mathfrak{C}$ erzeugten Ring, Sigmaring, die erzeugte Algebra bzw. Sigmaalgebra und das erzeugte Dynkin-System bezeichnen.

1. Von welchem Typ (Semiring, Ring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, Dynkin) sind folgende Mengensysteme?
   (a) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \infty \text{ oder } |A^C| < \infty\}$,
   (b) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \operatorname{card}(A) \leq \aleph_0 \text{ oder } \operatorname{card}(A^C) \leq \aleph_0\}$,
   (c) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \Omega : |A| \text{ gerade}\}$,
   (d) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{C} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

2. Zeigen Sie, dass ein Mengenring mit der symmetrischen Differenz als Addition und dem Durchschnitt als Multiplikation einen Ring im Sinne der Algebra bildet.

3. Bestimmen Sie alle Algebren über $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

4. $\mathfrak{T}_i, i = 1 \ldots n$ seien Semiringe über Ω. Zeigen Sie, dass dann auch
$$\mathfrak{T} = \{\bigcap_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \mathfrak{T}_i, i = 1, \ldots, n\}$$
   ein Semiring ist.

5. Zeigen Sie: wenn $\mathfrak{S}$ eine Sigmaalgebra ist, dann gilt für $C \subseteq \Omega$
$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\}) = \{(A \cap C) \cup (B \setminus C) : A, B \in \mathfrak{S}\}.$$

6. $\mathfrak{R}$ sei ein Ring. Zeigen Sie
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathfrak{R} \text{ oder } A^C \in \mathfrak{R}\}.$$
   Wenn $\mathfrak{R}$ ein Sigmaring ist, dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ eine Sigmaalgebra.

7. $(\mathfrak{R}_n, n \in \mathbb{N})$ sei eine nichtfallende $(\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1})$ Folge von Ringen über derselben Grundmenge Ω. Zeigen Sie, dass auch
$$\mathfrak{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{R}_n$$
   ein Ring ist. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die analoge Aussage für Sigmaringe nicht gilt.