Übungen zu Analysis 3, 5. Übung 11. 11. 2019

37. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge mit $a_n = a_{-n}$ und $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$ für $n \geq 1$, $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie $(a_n - a_{n+1})$ ist auf $\mathbb{N}$ monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ und

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1}) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1}) \to_{N\to\infty} a_0.$$

Zeigen Sie, dass für den Féjerkern (F_n) die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2})F_n(t)$$

in der L^1-Norm gegen eine Funktion f folgt. Zeigen Sie $\hat{f}(l) = a_{|l|}$ und begründen Sie damit, dass das Riemann-Lebesgue-Lemma in dem Sinn nicht verschärft werden kann, dass die Folge der Fourierkoeffizienten "beliebig langsam" gegen 0 konvergiern kann (d.h. für jedes $\alpha > 0$ gibt es $f \in L^1$ mit $\limsup \hat{f}(n)n^{\alpha} > 0$).

38. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y - y'' = \exp(-|t|), \qquad t \in \mathbb{R}$$

indem Sie zuerst von beiden Seiten die Fouriertransformierte bilden. Daraus können Sie (am kürzesten ohne Verwendung der Umkehrformel!) y bestimmen.

39. Für die Operatoren $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ und die Translationen τ_s, Modulationen Mod_s resp. Dilatationen Dil_λ

$$\tau_s f(x) = f(x-s), \quad \mathrm{Mod}_s f(x) = \exp(\mathrm{i}sx) f(x), \quad \mathrm{Dil}_\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x/\lambda)$$

gilt

$$\widehat{\tau_s f}(x) = (\mathrm{Mod}_{-s}\hat{f})(x), \quad \widehat{\mathrm{Mod}_s f}(x) = (\tau_s \hat{f})(x) \quad \text{und } \widehat{\mathrm{Dil}_\lambda f}(x) = \mathrm{Dil}_{1/\lambda}\hat{f}(x)$$

40. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = x\exp(-x^2)$$

Hinw.: Bsp. 2.1.10

41. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

42. Zeigen Sie für den Dirichletkern D_N: $D_N * D_N = 2\pi D_N$.

43. Zeigen Sie: Hat $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine Fouriertransformierte mit Träger in $[-\pi, \pi]$, deren 2π-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ eine absolut konvergente Fourierreihe, so gilt:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$$

44. Zeigen Sie, dass es keine nichttriviale1 Funktion in L^1 mit kompaktem Träger gibt, deren Fouriertransformierte ebenfalls kompakten Träger hat.

    Hinw.: Verwenden Sie das vorige Beispiel und $\sin(\pi(x-n)) = (-1)^n \sin(\pi x)$.

45. Berechnen Sie $\hat{f}$ für $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} f$ für $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$.