Satz 3.5.2 Die Menge aller linearen Bijektionen von V auf sich bildet bezüglich des Abbildungsprodukts eine Gruppe.

Beweis. Das Untergruppenkriterium 1.9.9 erweist die Menge der linearen Bijektionen von V auf sich als Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_V. $GL(V) \leq V$, weil

1. selbst bei $V = \{0\}$ gilt $id_V \in GL(V) \neq \emptyset$.
2. wenn $f, g \in GL(V)$ beliegig sind, dann ist $f \circ g^{-1}$ bijektiv und, laut Satz 3.2.2, linear, wenn $x' := g(x)$, $y' := g(y)$ und $x, y \in V$, $c \in K$:

$$(f \circ g^{-1})(x' + cy') = (f \circ g^{-1})(g(x) + cg(y)) =$$
$$(f \circ g^{-1})(g(x + cy)) = f(x + cy) = f(x) + c f(y) =$$
$$(f \circ g^{-1})(g(x)) + c (f \circ g^{-1})(g(y)) = (f \circ g^{-1})(x') +$$
$$c (f \circ g^{-1})(y').$$

Also $f \circ g^{-1} \in GL(V)$. $\square$