A 2.3.3 Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sowie die Menge aller ...

(a) nach oben beschränkten Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (d.h., es gibt ein $c_a \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq c_a$ für alle $i \in \mathbb{N}$).

(d) Nullfolgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (d.h. $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$).

(e) Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{i\to\infty} a_i = 1$.

(g) Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, bei denen $a_i \neq 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

(h) periodischen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (d.h., es gibt eine natürliche Zahl $n_a > 0$ mit $a_i = a_{i+n_a}$ für alle $i \in \mathbb{N}$).

Welche der oben genannten Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Bemerkung: Die Zahlen $c_a, n_a, m_a, \ldots$ können von Folge zu Folge variieren. Mit Schulkenntnissen argumentieren.

(a) Die Menge ist kein Unterraum $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Beweis: $\forall a \in U : -a \notin U$, weil $-a$ nach unten beschränkt ist. $\square$

(d) —"— ein —"—.

Beweis: $\forall a, b \in U, x \in \mathbb{R} : a + bx \in U$, weil $a + bx$ eine Nullfolge ist. $\square$

(e) —"— kein —"—.

Beweis: $\forall a, b \in U, x \in \mathbb{R} : a + bx \notin U$, weil dazu $x = 0$ sein müsste. $\square$

(g) —"— .

Beweis: Das hieße, dass $\mathcal{O} \notin U$. $\square$

(h) —"— ein —"— .

Beweis: $\mathcal{O}$ ist eine periodische Folge.

$\forall a \in U, x \in K: ax \in U$, weil $a_i = a_{i+n_a} \Leftrightarrow a_i x = a_{i+n_a} x$.

$\forall a, b \in U: a + b \in U$, weil wenn $\exists n_a \in \mathbb{N}: \forall i \in \mathbb{N}: a_i = a_{i+n_a}$,

dann ist das Produkt $n_a \cdot n_b =: n_{a+b} \in \mathbb{N}$

A 2.4.2 Sei K ein Körper. Zeige:

(a) Sind $x = (x_1, x_2)^T$ und $y = (y_1, y_2)^T$ Vektoren aus $K^{2\times 1}$, so ist die Familie (x, y) genau dann l.u., falls $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$.

(b) Sind $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ Vektoren aus $K^{n\times 1}$ mit $n \geq 2$, so ist die Familie (x, y) genau dann l.u., falls es $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt mit $i \neq j$ und $x_i y_j - x_j y_i \neq 0$.

Beweis: „(a)": Wir bilden die Kontraposition, wobei oBdA. $x_1 \neq 0 \neq x_2$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2}{x_2} \overset{!}{=} \frac{y_1}{x_1} =: k \in K \Leftrightarrow$$

$$\frac{y_2}{x_2 k} = \frac{y_1}{x_1 k} = 1 \Leftrightarrow \frac{y_2}{x_2} = k = \frac{y_1}{x_1} \Leftrightarrow k \cdot x_1 = y_2 \wedge k \cdot x_2 = y_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k \cdot x_1 \\ k \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k \cdot x = y \Leftrightarrow (x, y) \text{ l.a.},$$

wobei $k \in K$ so gewählt wird, dass die Äquivalenzenkette stimmt.

„(b)": Sei $(x_i, x_j) \sim (y_i, y_j) :\Leftrightarrow \frac{x_i}{x_j} = \frac{y_i}{y_j} \Leftrightarrow x_i y_j - x_j y_i = 0$ eine Äquivalenzrelation zwischen 2 Paaren von beliebigen Komponenten der Vektoren x und y.

„$\Rightarrow$": Wenn (x, y) l.u., dann gibt es zwei Komponentenpaare $\tilde{x} \nsim \tilde{y}$, die sich nicht durch Skalarmultiplikation gleichstellen lassen (außer mit 0).

„$\Leftarrow$": Gibt es zwei $\tilde{x} \nsim \tilde{y}$, so lassen sich x und y mittels Skalarmultiplikation nicht gleichstellen. $\square$

A 2.4.5 Es seien V ein Vektorraum und $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von l.u. Teilmengen von V mit $A_i \subset A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeige: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ist l.u.

Beweis: Wäre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ l.a., dann $\exists j \in I$:

$$v_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} x_i v_i .$$

v_i ist in mindestens einem Unterraum A_i enthalten und daher auch in A_{n+m} mit $m \in \mathbb{N}$. Weil alle v_i auch in mindestens einem A_n und daher auch in A_{n+m} sind, müssen ab einem bestimmten $k \in \mathbb{N}$, $\{v_i : i \in I \setminus \{j\}\} \cup \{v_j\} \subseteq A_k$. Daher sind fast alle A_i mit $i \in I$ l.a. $\square$

$$A_0 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots \subseteq A_{n+m} \subseteq \cdots$$

A 2.6.1: Sei $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ Basis eines Vektorraumes V. Beschreibe alle Vektoren $x \in V$ derart, dass jede der Familien $(x, b_2, \dots, b_n), (b_1, x, \dots, b_n), \dots, (b_1, \dots, b_{n-1}, x)$ eine Basis von V ist.

Anleitung: Stelle x als Linear Kombination der Basis $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ dar.

$$x = \sum_{i \in I} b_i \; ; \text{ wobei } I := \{1, \dots, n\}.$$

Beweis: $x = \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} b_i + b_j \Leftrightarrow b_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} (-1) b_i + x$

Jeder Vektor aus lässt sich als Linearkombination

$$\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i b_i + a_x x \qquad (*)$$

schreiben, da x alle Vielfachen von b_j abdeckt.
Würden wir einen Summanden aus $(*)$ entfernen, so verliert $(*)$ jene Eigenschaft:

- Entferne $a_x x$ und $(*)$ ist kein Erzeugendensystem, weil $b_j \notin [(b_i)_{i \in I \setminus \{j\}}]$.
- Entferne ein beliebiges $a_k b_k$ $(k \in I \setminus \{j\})$ und $(*)$ —"—, weil $b_k \notin \left([(b_i)_{i \in I \setminus \{j,k\}}] \cup [\{x\}]\right)$. $\square$

A 2.6.3 Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $K = GF(q)$ mit $n < \infty$.

(a) Zeige, dass V genau $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$ Basen $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ besitzt. Die Reihenfolge der Basisvektoren ist hier relevant.

(b) Bestimme die Anzahl der (ungeordneten) Basen $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ von V.

Hinweis: Benütze A 2.6.2.

Beweis: „(a)": Sei V ein Vektorraum mit dem Körper K. Weiters sei $K = GF(q)$ und $\dim V = n < \infty$.
Die Wahl einer Basis verläuft folgendermaßen:

- V hat laut A 2.6.2 genau q^n verschiedene Vektoren, wobei bei der ersten Wahl eines Basisvektors alle, bis auf 0 gewählt werden können. Also

$(q^n - 1) \cdot ?$

- Für die nächste Wahl, darf keine Linearkombination aus den vorigen Vektoren gewählt werden. Seien $x \in GF(q)$ und $a_i \in V$. Dann gibt es q^1 mögliche

$x \cdot (a_1, \dots, a_n)$

also Linearkombinationen, da x einen von q Werten aus $\{0, \dots, q-1\}$ annehmen können und weil Wahlen kombinatorisch multipliziert werden. So auch

$(q^n - 1)(q^n - q^1) \cdot$?

Diesen Prozess setzt man bis $q-1$ fort, da die resultierende Vektorfamilie sonst l.a. wäre. Also ist die Anzahl der möglichen Basen-Familien

$$\prod_{k=1}^{n} q^n - q^{k-1}.$$

(b) $$\left(\prod_{k=1}^{n} q^n - q^{k-1}\right) / n!$$

Beweis: „Zähler": siehe „(a)".
„Nenner": $n!$ beschreibt die Anzahl der Vertauschungen von n Objekten und kürzt dadurch redundante Basisvektor-Kombinationen weg. $\square$

A 2.6. B Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien A und B Mengen. Dann gibt es eine injektive Funktion von A nach B oder eine injektive Funktion von B nach A.

Hinweis: Nicht jede Menge ist endlich, und nicht jede Menge lässt sich in der Form $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ schreiben. Betrachten Sie die folgende halbgeordnete Menge:

$H := \{(M, f, N) \mid M \subseteq A, N \subseteq B, f: M \to N$ ist eine Bijektion $\}$.

Wir definieren $(M, f, N) \leq (M', f', N')$ genau dann, wenn folgendes gilt: $M \subseteq M'$, $N \subseteq N'$, und f' ist eine Fortsetzung von f (also $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in M$).

Zeigen Sie:

(a) H ist eine Halbordnung.

(b) H ist nicht leer.

(c) Jede nichtleere Teilkette von H hat eine obere Schranke in H. (In H!)

(d) Wenn (M^*, f^*, N^*) ein maximales Element von H ist, dann muss $M^* = A$ oder $N^* = B$ gelten. Im ersten Fall ist f^* bijektiv von A nach $N \subseteq B$, im zweiten Fall findet man eine Bijektion von B nach $M \subseteq A$.

Beweis: „(a)": H ist eine Halbordnung, weil folgendes gilt:

- Reflektivität: $(M, f, N) \leq (M, f, N)$, weil $M \subseteq M$, $N \subseteq N$, und $f(x) = f(x)$, $\forall x \in M$.

- Antisymmetrie: $(M, f, N) \leq (M', f', N') \wedge (M', f', N') \leq (M, f, N) \Rightarrow (M, f, N) = (M', f', N')$, weil
  $M \subseteq M' \wedge M' \subseteq M \Rightarrow M = M'$;
  $N \subseteq N' \wedge N' \subseteq N \Rightarrow N = N'$;
  $f(x) = f'(x), \forall x \in M$, aber weil $M = M'$, auch
  $f'(x) = f(x), \forall x \in M'$;

- Transitivität: $(M, f, N) \leq (M', f', N') \wedge (M', f', N') \leq (M'', f'', N'') \Rightarrow (M, f, N) \leq (M'', f'', N'')$, weil
  $M \subseteq M' \wedge M' \subseteq M'' \Rightarrow M \subseteq M''$;
  $N \subseteq N' \wedge N' \subseteq N'' \Rightarrow N \subseteq N''$;
  $f(x) = f'(x), \forall x \in M \wedge f(x)' = f''(x), \forall x \in M'$, aber weil $M \subseteq M'$, folgt $f(x) = f'(x) = f''(x), \forall x \in M$;

„(6)": obdA. seien $M = N = \emptyset$, so ist $f: M \to N$ wohldefiniert und bijektiv (man beachte „$\forall$") und somit $H \neq \emptyset$.

A 2.6. C Sei H eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette beschränkt ist. Dann gibt es zu jedem Element h_0 in H ein h_1 in H, welches maximal in H ist und zweitens $h_1 \geq h_0$ erfüllt.

Hinweis: Betrachte die Menge $H' := \{h \in H \mid h \geq h_0\}$.

Beweis: Sei $h_0 \in H$ beliebig fest. $H_0 := \{h \in H : h \geq h_0\}$.
$H_0 \subseteq H \Rightarrow H_0$ ist eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette beschränkt ist.
Falls h_0 maximal in H_0 ist, so gilt $h_0 \geq h_0$. Setze $h_1 = h_0$.
Falls h_0 nicht maximal ist, so ist vielleicht $h_1 > h_0$ maximal; wenn nicht, so betrachte $h_2 > h_1 \cdots h_n > h_0$, mit $n \in \mathbb{N}$. $\exists h_n$, da H_0 nur beschränkte Ketten hat. Setze $h_1 = h_n$.
$h_1 \in H_0 \subseteq H \Rightarrow h_1 \in H$. h_1 ist in H maximal, weil es sonst nicht in H_0 maximal gewesen wäre. $\square$