Hinweis: Manche (sehr wenige) der folgenden Beispiele sind falsch, manche enthalten offene Fragen, manche sind besonders schwierig. Die Lösung eines falschen Beispiels besteht in einer Erklärung, was bzw. warum etwas falsch ist. (Ein falscher Allsatz kann zB durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden.)

Naive Mengenlehre

1. Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein (d.h., für beliebige $x, x_1, y, \ldots$)? Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel).

   a. Wenn $\{x\} = \{y\}$, dann ist auch $x = y$.
   b. Wenn $\{x, z\} = \{y, z\}$, dann ist auch $x = y$.
   c. Wenn $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$, dann gilt zumindest eine der folgenden beiden Aussagen: (12) $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$; (21) $x_1 = y_2$ und $x_2 = y_1$.
   d. Wenn $\{x_1, x_2, x_3\} = \{y_1, y_2, y_3\}$, dann ist zumindest eine der folgenden 6 Aussagen wahr:

   (123) $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.
   (132) $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$.
   (213) $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$, $x_3 = y_3$.
   (231) $x_1 = y_2$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_1$.
   (312) $x_1 = y_3$, $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2$.
   (321) $x_1 = y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_1$.

2. Von der Eigenschaft E wissen wir bereits, dass sie auf alle Singletons (=einelementige Mengen) zutrifft. Nehmen wir an, dass E immer dann auf eine Menge $A \cup \{b\}$ zutrifft, wenn E auf A zutrifft (und b beliebig ist). Können wir daraus schließen,

   - … dass E für alle endlichen nichtleeren Mengen gilt?
   - … dass E für alle nichtleeren Mengen gilt?
   - … dass E für alle höchstens abzählbaren nichtleeren Mengen gilt?

3. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\{\,\{x\},\,\{x,y\}\,\} = \{\,\{x'\},\,\{x',y'\}\,\}$, dann gilt $x = x'$ und $y = y'$.

4. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\{\,x,\,\{x,y\}\,\} = \{\,x',\,\{x',y'\}\,\}$, dann gilt $x = x'$ und $y = y'$.

5. Zeigen oder widerlegen Sie: Sei $* := \{\emptyset\}$. Wenn $\{\,\{\emptyset, x\},\,\{*, y\}\,\} = \{\,\{\emptyset, x'\},\,\{*, y'\}\,\}$, dann gilt $x = x'$ und $y = y'$.

Sei $\mathscr{A}$ eine Menge von Mengen. Eine *Auswahlfunktion für A* ist eine Funktion f, die jedem Element $B \in \mathscr{A} \setminus \{\emptyset\}$ eines seiner Elemente zuweist, d.h. es muss also für alle nichtleeren[1] $B \in \mathscr{A}$ die Beziehung $f(B) \in B$ gelten. Geben Sie in den folgenden Aufgaben explizite Auswahlfunktionen für die jeweiligen Mengenfamilien an.

6. $\mathscr{A}_6$ sei die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{N}$.

7. $\mathscr{A}_7$ sei die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

8. $\mathscr{A}_8$ sei die Familie aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

9. $\mathscr{A}_9$ sei die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.

10. $\mathscr{A}_{10}$ sei die Familie aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen. (Zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ heißen äquivalent, wenn die Folge $(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}$ ihrer Differenzen eine Nullfolge bildet.)

[1] Oft wird vorausgesetzt, dass die leere Menge $\emptyset$ kein Element von $\mathscr{A}$ ist.

11. $A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$, wobei $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Zeigen Sie $A \times B \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$ (wobei $\mathfrak{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$).

12. Wir schreiben B^A für die Menge aller Funktionen von A nach B. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$$B^A \subseteq A \times B, \quad B^A \subseteq \mathfrak{P}(A \times B), \quad B^A \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B)), \quad B^A \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}((A \times B)))$$

13. Berechnen Sie $\bigcup A$, $\bigcup\bigcup A$, $\bigcap A$, $\bigcap\bigcap A$ für jede der folgenden Mengen A:

$$A_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\},\ A_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\},\ A_3 = \{1, 3, 5, \ldots\},\ A_4 = \{3, 4, 5, 6\}$$

(Verwenden Sie die Definitionen $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, ..., $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ...)

In der („offiziellen“) Sprache der Mengenlehre verwenden wir neben dem zweistelligen Relationssymbol ε das Gleichheitszeichen, beliebig viele prädikatenlogische Variable x, x_1, A, B, $\mathcal{C}$, etc, die logischen Konstanten $\top$ und $\bot$, die Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ sowie die Quantoren $\forall$ und $\exists$, nicht aber die Symbole $\emptyset$, $\{\cdots\}$, $\cup$, $\cap$, etc.

14. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die offizielle Sprache der Mengenlehre:

    a. $A = \{x\}$
    b. $B = \{x, y\}$
    c. $C = P \cap Q$
    d. $D = \bigcup \mathcal{E}$, wobei die rechte Seite als $\{x : \exists E \in \mathcal{E}(x \in E)\}$ definiert ist.
    e. $F = \bigcup\{U, V\}$.

Aussagenlogik

15. Geben Sie für jede der folgenden Formeln eine Baumdarstellung an, sowie Präfix- und Postfixform. (Präfix=polnische Notation, Postfix=umgekehrte polnische Notation.)

$$p_1 \rightarrow \neg p_2 \qquad (\neg p_1) \rightarrow p_2 \qquad \neg(p_1 \rightarrow p_2) \qquad \neg(\neg(p_1 \rightarrow p_2)) \qquad p_1$$

16. Geben Sie alle zweistelligen Operationen auf der 2-elementigen Menge $M := \{\texttt{wahr}, \texttt{falsch}\}$ an (das heißt: alle Funktionen $f : M \times M \rightarrow M$, und finden Sie treffende Namen für jede dieser Abbildungen. (Die Abbildung, die dem Paar $(\texttt{wahr}, \texttt{wahr})$ den Wert `wahr` zuordnet, den drei anderen Paaren der Wert `falsch`, könnte man zum Beispiel „Konjunktion“, oder „und-Verknüpfung“, oder „beide“, oder „Serienschaltung“ nennen.)

17. Wie viele dreistellige Operationen gibt es auf einer zweielementigen Menge? Wie viele n-stellige?

18. Zeigen Sie:

    a. $\neg(p_1 \wedge p_2) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2$.
    b. Für alle Formeln A und B gilt $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

19. Zeigen Sie: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

20. Seien A und B aussagenlogische Formeln.

    a. Die Aussage „$A \Rightarrow B$“ ist genau dann wahr, wenn „$\top \Rightarrow A \rightarrow B$“ gilt, d.h., wenn die Formel $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist.
    b. Die Aussage „$A \Rightarrow B$“ ist genau dann wahr, wenn „$A \wedge (\neg B) \Rightarrow \bot$“ gilt.

21. Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

    a. $(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4) \to ((p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_4))$.
    (Implikationen werden von rechts nach links geklammert; $A \to B \to C$ ist als als Abkürzung für $(A \to (B \to C))$ zu lesen, NICHT als $((A \to B) \to C)$, und auch NICHT als $(A \to B) \wedge (B \to C)$.

    b. $(p_1 \to p_3) \to (p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

    c. $(p_1 \to p_3) \to (p_2 \to p_3) \to ((p_1 \wedge p_2) \to p_3)$.

    d. $(p_1 \to p_2 \to p_3) \to ((p_1 \wedge p_2) \to p_3)$

    e. $(p_1 \to p_2) \vee (p_2 \to p_1)$.

Belegungen

Sei b eine Belegung, A eine Formel. Statt $\hat{b}(A) = 1$ sagen wir auch „b erfüllt die Formel A".
In den nächsten 3 Aufgaben verstehen wir unter einer „Belegung" eine Funktion von der Menge $\{p_1, \ldots, p_n\}$ nach $\{0, 1\}$.

22. Sei $n \geq 2$. Wieviele Belegungen (der Variablen $p_1, \ldots, p_n$) erfüllen die Formel

$$(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \to p_n) \text{ ?}$$

23. Sei $n \geq 2$. Geben Sie eine Formel (in den Variablen $p_1, \ldots, p_n$) an, die von genau n Belegungen erfüllt wird.

24. Sei n groß, $k \leq 2^n$. Geben Sie eine Formel (in den Variablen $p_1, \ldots, p_n$) an, die von genau k Belegungen erfüllt wird. Versuchen Sie, eine möglichst kleine Formel zu finden (mit etwa $O(n)$ Symbolen).

Erfüllbarkeit

Eine Menge Σ von aussagenlogischen Formeln heißt „erfüllbar", wenn es eine Belegung b der in Σ vorkommenden Variablen gibt, die für alle $A \in \Sigma$ die Bedingung $\hat{b}(A) = 1$ erfüllt.
Wir nennen eine Menge Σ *erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

25. Sei $\Sigma \cup \{A\}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln. Zeigen Sie:

    (a) Σ ist genau dann erfüllbar, wenn zumindest eine der Mengen $\Sigma \cup \{A\}$, $\Sigma \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist.

    (b) Σ ist genau dann *erfüllbar, wenn zumindest eine der Mengen $\Sigma \cup \{A\}$, $\Sigma \cup \{\neg A\}$ *erfüllbar ist.

26. Geben Sie eine *-erfüllbare Menge an, die nicht erfüllbar ist.

27. Zeigen Sie:

    (a) Wenn Σ *erfüllbar ist, und für jede aussagenlogische Variable p entweder $p \in \Sigma$ oder $(\neg p) \in \Sigma$ gilt, dann ist Σ auch erfüllbar (und zwar durch genau eine Belegung).

    (b) Wenn Σ *erfüllbar ist, dann gibt es eine *erfüllbare Menge $\Sigma' \supseteq \Sigma$, die die Bedingung in (a) erfüllt.

Überabzählbare Mengen

Wir betrachten eine aussagenlogische Sprache mit einer (möglicherweise überabzählbaren) festen Variablenmenge V. (Formeln und Klauseln sind weiterhin endlich, Formelmengen dürfen auch unendlich groß sein, sogar überabzählbar.)
Eine Menge Σ von Formeln heißt *erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist. Σ heißt „maximal *erfüllbar", wenn Σ zwar *erfüllbar ist, aber es keine echte Obermenge von Σ gibt, die auch noch *erfüllbar ist.

28. Für jede *erfüllbare Menge Σ gibt es eine maximal *erfüllbare Obermenge $\Sigma' \supseteq \Sigma$. (Hinweis: Wohlordnung, oder Lemma von Zorn, oder Lemma von Tukey.)

29. Sei Σ maximal *erfüllbar. Dann ist Σ erfüllbar, und es gibt genau eine Belegung b, die Σ erfüllt.

CNF, DNF

30. Welche der folgenden Formeln sind in CNF, welche in DNF?

$$\neg p_1,\ \neg p_1 \vee p_2,\ \neg(p_1 \vee p_3),\ \neg p_1 \wedge p_4,\ \neg p_1 \to p_5,\ (\neg p_1 \vee p_6) \wedge p_7,\ (((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \wedge p_4)$$

Anmerkung: „$\neg$" bindet stärker als die anderen Junktoren; Daher: $\neg p_1 \vee p_2 := ((\neg p_1) \vee p_2)$.

31. Geben Sie zu den Formeln im vorigen Beispiel, die nicht in CNF sind, eine äquivalente Formel in CNF an.

32. Detto für DNF.

Interpolation

33. Sei A eine Formel, die nur die Variablen $p_1, \ldots, p_n$ verwendet, und sei B eine Formel, die nur die Variablen $p_k, \ldots, p_{k+\ell}$ verwendet, $1 < k \leq n < k + \ell$.
Nehmen wir weiters an, dass $A \Rightarrow B$ gilt.
Zeigen Sie, dass es dann eine Formel C geben muss, die nur die Variablen $p_k, \ldots, p_n$ verwendet, sodass sowohl $A \Rightarrow C$ als auch $C \Rightarrow B$ gilt.
(Wir nennen so eine Formel C einen „Interpolanten".)

Hinweis: Betrachten Sie alle dualen Klauseln D in den Variablen $p_k, \ldots, p_n$, für die $D \Rightarrow B$ gilt. Sei C die Disjunktion dieser dualen Klauseln. Zeigen Sie nun $C \Rightarrow B$ (leicht) und $A \Rightarrow C$ (schwieriger, indirekt).

Oder: Betrachten Sie alle Klauseln E in den Variablen $p_k, \ldots, p_n$, für die $A \Rightarrow E$ gilt; sei C die Konjunktion dieser Klauseln. Zeigen Sie nun $A \Rightarrow E$ und $E \Rightarrow C$.

34. Sei A eine Formel, die nur die Variablen $p_1, \ldots, p_n$ verwendet, und sei B eine Formel, die nur die Variablen $p_k, \ldots, p_{k+\ell}$ verwendet, mit $n < k$. Nehmen wir weiters an, dass $A \Rightarrow B$ gilt. Dann gilt zumindest eine der folgenden Aussagen:

- $A \Rightarrow \bot$. (Mit anderen Worten: A ist Kontradiktion.)
- $\top \Rightarrow B$. (Mit anderen Worten: B ist Tautologie.)

(Insbesondere gibt es also eine Formel C, die keine Variablen verwendet, und die $A \Rightarrow C$ und $C \Rightarrow B$ erfüllt.)

König

Ein Baum $(T,<)$ ist eine partiell geordnete Menge mit kleinstem Element, in der für alle $t \in T$ die Menge $T_{<t} := \{x : x < t\}$ endlich und linear geordnet ist. Ein Ast ist eine maximale linear geordnete Teilmenge. Wir definieren $Lev(n,T) := \{t \in T : T_{<t}$ hat n Elemente$\}$.

35. Sei $(T,<)$ ein unendlicher Baum, sodass $Lev(n,T)$ für alle n endlich ist. Zeigen Sie, dass T einen unendlichen Ast hat.

Unendliche „Klauseln“

Für die nächsten beiden Aufgaben betrachten wir eine Sprache mit abzählbar vielen aussagenlogischen Variablen. Eine $_\infty$Klausel ist eine endliche oder unendliche Menge von Literalen. Eine Belegung b erfüllt eine $_\infty$Klausel C, wenn es ein Literal $L \in C$ mit $\hat{b}(L) = 1$ gibt. Eine Menge M von $_\infty$Klauseln heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt, die alle $_\infty$Klauseln in M erfüllt; M ist *erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von M (diese darf also endliche viele ∞-Klauseln enthalten) erfüllbar ist.

36. Geben Sie eine *erfüllbare Menge von $_\infty$Klauseln an, die nicht erfüllbar ist.
37. Geben Sie eine unerfüllbare Menge M von $_\infty$Klauseln an, die unter Resolution abgeschlossen ist, aber nicht die leere Klausel enthält. („Unter Resolution abgeschlossen“ heißt: Wann immer $p \in C \in M$, $\neg p \in D \in M$, dann ist auch $(C \setminus \{p\}) \cup (D \setminus \{\neg p\})$ in M.)
    Wenn möglich, wählen Sie M so, dass
    (a) die Menge der Klauseln (=endliche $_\infty$Klauseln) in M endlich ist.
    (b) oder: dass die Menge der unendlichen $_\infty$Klauseln in M endlich ist.
    (c) oder sogar: dass M endlich ist. (D.h., (a) und (b) gelten.)

Topologischer Zugang

Die Menge $\mathscr{B}$ aller totalen Belegungen $b : \{p_1, p_2, \ldots\} \to \{0,1\}$ trägt eine natürliche Topologie, die so genannte Produkttopologie; eine Basis für diese Topologie besteht aus den Mengen $O_c := \{b : b \text{ setzt } c \text{ fort}\}$, wobei c alle endlichen partiellen Belegungen durchläuft. ($\mathscr{B}$ wird dadurch zu einem kompakten Hausdorff-Raum, und sogar homöomorph zur Cantormenge.)
Sei $K \subseteq \mathscr{B}$ eine Menge von totalen Belegungen. Wir nennen eine Menge Σ von Formeln (oder Klauseln) K-erfüllbar, wenn es eine Belegung $b \in K$ gibt, die Σ erfüllt. Eine Menge ist K-*erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge K-erfüllbar ist.

38. Charakterisieren Sie die Eigenschaft „Jede K-*erfüllbare Menge ist auch K-erfüllbar“ durch eine topologische Bedingung an die Menge K.

Resolution

39. Sei M die folgenden Menge von Klauseln:
    $$M := \{\{\neg p, q\}; \{\neg r, s\}; \{p, r\}\}$$
    Finden Sie die kleinste Menge von Klauseln, die M enthält und unter Resolution abgeschlossen ist.
40. Zeigen Sie, dass die leere Klausel mit (mehrfach ausgeführter) Resolution aus den Klauseln $\{\,\{\neg p, q\}; \{\neg r, s\}; \{p, r\}; \{\neg q\}; \{\neg s\}\,\}$ herleitbar ist. Was hat dies mit Aufgabe 21 zu tun?

41. Geben Sie eine unerfüllbare (nichtleere) Menge von Klauseln an, die weder die leere Klausel noch einelementige Klauseln enthält.

42. Wir interpretieren $p \to q$ als Abkürzung für $\neg(p \wedge \neg q)$. Bilden Sie unter Verwendung der Regel $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ eine zur Negation von

$$(\neg p \vee q) \to (p \to q)$$

äquivalente Formel in konjunktiver Form, schreiben Sie sie als Klauselmenge, und zeigen Sie dann mit dem Resolutionsverfahren, dass diese Klauselmenge unerfüllbar (und somit die ursprüngliche Formel eine Tautologie) ist.

43. Analog für $(p \to q) \to \big((q \to r) \to (p \to r)\big)$.

44. Gegeben ist die Klauselmenge $M = \{\{p, q\}; \{p, \neg q, r\}; \{p, \neg q, \neg r\}; \{\neg p, q\}; \{\neg p, \neg q, \neg r\}\}$. Ist die leere Klausel in $\hat{M}$ enthalten?
(Erinnerung: $\hat{M}$ ist definiert als die kleinste unter Resolution abgeschlossenen Menge, die M enthält.)

45. Sei M eine Klauselmenge und $M' = \{C \in M \mid \text{es gibt keine Variable } p \text{ mit } p \in C \text{ und } \neg p \in C\}$. Zeigen Sie dass M und M' äquivalent sind. (Das heißt: Jede Belegung b, die M erfüllt, erfüllt auch M', und umgekehrt.)

46. Sei M eine Klauselmenge und $C, D \in M$ wobei C echte Teilmenge von D ist ($C \subset D$). Zeigen Sie dass M und $M' = M \setminus \{D\}$ äquivalent sind.

47. Zeigen Sie dass die Klauselmenge $M = \{\{\neg p_1, p_3\}; \{p_1, p_2\}; \{\neg p_3\}; \{\neg p_2, p_3\};\}$ unerfüllbar ist a) durch Angabe ihres semantischen Baumes und b) durch Angabe einer Resolutionswiderlegung.

48. Seien $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ endliche Mengen. Sei $P = \{p_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ eine Menge aussagenlogischer Variablen. Jede Belegung b von P induziert eine Relation $R_b \subseteq A \times B$ durch $(a_i, b_j) \in R_b$ gdw $b(p_{i,j}) = 1$. Finden Sie aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ so dass:

    1. $\hat{b}(\varphi_1) = 1$ gdw R_b ist eine Funktion
    2. $\hat{b}(\varphi_2) = 1$ gdw R_b ist eine injektive Funktion
    3. $\hat{b}(\varphi_3) = 1$ gdw R_b ist eine surjektive Funktion
    4. $\hat{b}(\varphi_4) = 1$ gdw R_b ist eine bijektive Funktion

    Für welche $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist φ_2 unerfüllbar?

    (Anmerkung: Die Größe der Formeln hängt von n und k ab.)

49. Ein Sudoku ist eine Matrix $S = (s_{i,j}) \in \{\lambda, 1, \ldots, 9\}^{9\times 9}$ wobei das Symbol λ für "leer" stehen soll. Eine Lösung von S ist eine Matrix $L = (l_{i,j}) \in \{1, \ldots, 9\}^{9\times 9}$ so dass gilt:

    1. $s_{i,j} \neq \lambda$ impliziert $l_{i,j} = s_{i,j}$, und
    2. Für die folgenden $K \subseteq \{1, \ldots, 9\} \times \{1, \ldots, 9\}$ gilt:

    $$(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in K, (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2) \text{ impliziert } l_{i_1,j_1} \neq l_{i_2,j_2}$$

       (a) Für jede Zeile,
       (b) Für jede Spalte,
       (c) Für jede 3x3-Matrix mit Startkoordinaten kongruent 1 modulo 3

    Finden Sie, ähnlich wie in Beispiel 48, eine Menge P aussagenlogischer Variablen, eine Bijektion von Belegungen von P mit Relationen über $\{1, \ldots, 9\} \times \{1, \ldots, 9\} \times \{1, \ldots, 9\}$ sowie eine Formel φ_S so dass $\hat{b}(\varphi_S) = 1$ gdw b eine Lösung von S induziert.

Ergänzung

50. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die offizielle Sprache der Mengenlehre:

    a. $b = S(a)$, wobei allgemein $S(a) := a \cup \{a\}$ definiert ist.

    b. $n \in \omega$.

    c. $x = \omega$.

    d. $y = S(\omega)$.

    e. $z = S(S(\omega))$.

51. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die offizielle Sprache der Mengenlehre:

    a. $x = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

    b. $y = \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$, wobei $\omega + 1 := S(\omega)$, $\omega + 2 := S(\omega + 1)$, etc.

    c. $z = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$.

Ableitungskalküle

In den folgenden Beispielen betrachten wir Zeichenfolgen (Strings), die aus den Zeichen $1, +, =$ zusammengesetzt sind. Auch die leere Folge gilt als Zeichenfolge; sie hat Länge 0. Meist wird sie mit ε oder mit Λ bezeichnet.
Gewisse Zeichenfolgen zeichen wir als „ableitbar“ aus.
Gewisse Zeichenfolgen nennen wir „Axiome“; Axiome A schreiben wir in der Form

$$\frac{\emptyset}{A}$$

an. Wir lesen dies als „A ist ableitbar“. Eine „Regel“, die wir in der Form

$$(*) \qquad \frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$$

schreiben, lesen wir als „Wenn A_1, …, A_n ableitbar sind, dann auch B“.
Die Menge der ableitbaren Zeichenfolgen ist die kleinste Menge M, die alle Axiome enthält und unter allen Regeln abgeschlossen ist. (Das heißt: Wann immer eine Regel $(*)$ haben, deren „Voraussetzungen“ A_1, …, A_n in M liegen, muss auch die „Folgerung“ B in M liegen.)

52. Wir betrachten ein Ableitungssystem mit dem einzigen Axiom $\dfrac{\emptyset}{1+1=11}$ und den Regeln $\dfrac{A}{1A1}$ (für jede Zeichenfolge A) und $\dfrac{A=B}{A1=1B}$ für beliebige Zeichenfolgen A, B.
    Zeigen Sie, dass die Zeichenfolgen $11 + 11 = 1111$ und $11111 + 11 = 1111111$ ableitbar sind.

53. Zeigen Sie, dass die folgenden Zeichenfolgen alle nicht ableitbar sind: $1 + 1 + 1 = 111$, $1 + 1 = 111$, $1 = 1$.

54. Geben Sie ein Kriterium an, das entscheidet, ob eine vorgegebene Zeichenfolge ableitbar ist.

In den folgenden Beispielen betrachten wir Zeichenfolgen, die aus $1, +, !, =$ zusammengesetzt sind. Unser Ableitungssystem enthält nun das einzige Axiom $\dfrac{\emptyset}{1!}$ und die folgenden Regeln:

$$\frac{A!}{1A!} \qquad \frac{A!}{A+1=A} \qquad \frac{A+B=C}{A+B1=CA}$$

(für beliebige Zeichenfolgen A, B, C).

55. Zeigen Sie, dass die Zeichenfolgen 1111! und $1111 + 11 = 11111111$ ableitbar sind.

56. Geben Sie ein Kriterium an, das entscheidet, ob eine vorgegebene Zeichenfolge ableitbar ist.

Die nächsten beiden Aufgaben sind beide lösbar. Eine hat jedoch eine viel einfachere Lösung als die andere.

57. Geben Sie ein (möglichst einfaches) Ableitungssystem an, in dem eine Zeichenfolge der Form 1^n (also n aufeinanderfolgende Einser) genau dann ableitbar ist, wenn n eine Primzahl ist. In Ihrem System dürfen neben dem Symbol 1 auch andere Symbole vorkommen, zum Beispiel das Symbol |; es könnte zum Beispiel hilfreich sein, das Ableitungssystem so zu definieren, dass ein String der Form $1^n|1^k$ genau dann ableitbar ist, wenn n ein Teiler von k ist. Die Aufgabenstellung schreibt nur vor, welche Strings der Form 1^n ableitbar sein sollen; welche Strings mit anderen Symbolen Sie ableitbar machen wollen, bleibt Ihnen überlassen.
(Mit „möglichst einfach“ ist hier und in den folgenden Aufgaben insbesondere gemeint, dass die Axiome und Regeln einem einfachen Schema folgen, so wie in den vorangehenden Aufgaben. Das Schema „1^n ist Axiom genau dann, wenn n Primzahl ist“ ist nicht einfach.)

58. Geben Sie ein (möglichst einfaches) Ableitungssystem an, in dem eine Zeichenfolge der Form 1^n (also n aufeinanderfolgende Einser) genau dann ableitbar ist, wenn $n > 1$ ist und keine Primzahl ist.

In den folgenden Beispielen betrachten wir Zeichenfolgen, die aus $0, 1, =$ zusammengesetzt sind. Unser Ableitungssystem enthält nun das einzige Axiom $\dfrac{\emptyset}{1 = 1}$ und die folgenden Regeln:

$$\frac{A = B}{A0 = BB} \qquad \frac{A = B}{A1 = BB1}$$

(für beliebige Zeichenfolgen A, B).

59. Zeigen Sie, dass in diesem System die Zeichenfolgen $11 = 111$ und $110 = 111111$ ableitbar sind.

60. Geben Sie ein Kriterium an, das entscheidet, ob eine vorgegebene Zeichenfolge ableitbar ist.

Wir betrachten nun einen aussagenlogische Sprache, in der nur die Variablen $p_1, p_2, \ldots$ sowie die Junktoren $\to$ und $\neg$ vorkommen (keine weiteren Junktoren). Für alle Formeln A, B, C sind die folgenden drei Formeln Axiome:

- $A \to (B \to A)$
- $\Big(A \to (B \to C)\Big) \to \Big((A \to B) \to (A \to C)\Big)$
- $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Die einzige Regel ist Modus Ponens:

$$\frac{A \to B,\ A}{B}$$

61. Alle ableitbaren Formeln sind Tautologien.

62. Zeigen Sie, dass für jede Formel A die Formel $A \to A$ ableitbar ist.
(Hinweis: Betrachten Sie das zweite Axiom mit $B := A$ und $C := (A \to A)$.)

63. $A \to \neg\neg A$ ist ableitbar.

64. $\neg\neg A \to A$ ist ableitbar.

(Anmerkung: Man kann zeigen, dass die ableitbaren Formeln genau die Tautologien sind.)

Substitution

65. Wählen Sie eine Sprache $\mathscr{L}$, und geben Sie einen (möglichst einfachen) Term s sowie Terme t_1, t_2 in dieser Sprache an, sodass die Terme $s[x/t_1,\ y/t_2]$ $\quad (s[x/t_1])[y/t_2]$ $\quad (s[y/t_2])[x/t_1]$ alle verschieden sind. (Mit $s[x/t_1,\ y/t_2]$ ist gemeint, dass in s alle Vorkommnisse von x durch t_1 und gleichzeitig alle freien Vorkommnisse von y durch t_2 ersetzt werden. x und y sind hier verschiedene Variable.)

66. Sei $\mathscr{M}$ eine Struktur, sei b eine Belegung, seien s und t Terme, und x eine Variable. Sei $a := \bar{b}(t)$. Dann ist $\bar{b}(s[x/t]) = \overline{b_{x/a}}(s)$. (Mit $b_{x/a}$ ist jene Belegung b' gemeint, die $b'(x) = a$ erfüllt, und sonst mit b übereinstimmt.)
(Beziehen Sie sich in Ihrem Beweis auf die induktive Definition der Substitution.)

67. Sei $\mathscr{M}$ eine Struktur, sei b eine Belegung, sei φ Formel, sei t Term, und x eine Variable.
Dann ist $\hat{b}(\varphi[x/t]) = \widehat{b_{x/a}}(\varphi)$ mit $a := \bar{b}(t)$ (wenn die Substitution $\varphi[x/t]$ erlaubt ist).

68. Geben Sie (in einer geeigneten Sprache) eine (möglichst einfache) Formel φ an, sowie einen Term t, eine Struktur $\mathscr{M}$ und eine Belegung b, sodass mit $b' := b_{x/\bar{b}(t)}$ die Werte $\hat{b}(\varphi[x/t])$ und $\widehat{b'}(\varphi)$ verschieden sind.

Spektren

Für jede geschlossene Formel φ (das heißt: φ hat keine freien Variable) definieren wir das *Spektrum* $Sp(\varphi)$ als die Menge aller natürlichen Zahlen n, sodass es ein endliches Modell von φ mit genau n Elementen gibt.
(Wir sagen, dass $\mathcal{M}$ ein Modell von φ ist, wenn für alle Belegugen b die Gleichung $\hat{b}(\varphi) = 1$ gilt.)

69. Sei φ eine Formel, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt. Zeigen Sie: Wenn $k \in Sp(\varphi)$, und $n > k$, dann $n \in Sp(\varphi)$.

70. Geben Sie eine Formel φ an, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt, sodass $Sp(\varphi) = \{n \in \mathbb{N} : n > 5\}$.

Wir schreiben $\mathscr{S}$ für die Menge aller Spektren (für beliebige prädikatenlogische Sprachen). $\mathscr{S}$ ist eine Untermenge der Potenzmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

71. Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von $\{1, 2, \ldots\}$ ein Spektrum ist. (Wie definieren Sie „endlich“? Verwenden Sie vollständige Induktion? Wenn ja, geben Sie explizit die Behauptung $B(n)$ an, von der Sie $B(0)$ und $B(n) \Rightarrow B(n+1)$ zeigen.)

72. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}$ unter Durchschnitten abgeschlossen ist. (Anleitung: Sei $A = Sp(\varphi_1)$, $B = Sp(\varphi_2)$. Erklären Sie, warum Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, dass die Sprachen zu φ_1 und φ_2 disjunkt sind…)

73. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}$ unter Vereinigungen abgeschlossen ist.

74. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}$ unter Komplementen abgeschlossen ist.

75. Zeigen Sie von möglichst vielen der folgenden Mengen, dass sie Spektren sind: Die Menge der Primzahlen, die Menge aller zusammengesetzten Zahlen (=Nichtprimzahlen > 1), die Menge aller Quadratzahlen, die Menge aller Zweierpotenzen, die Menge aller Potenzen von 5, die Menge aller Primzahlpotenzen, die Menge $\{1, 14, 141, 1414, 14142, \ldots\} = \{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor : n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

76. Geben Sie eine (möglichst einfache) Menge an, die kein Spektrum ist.

Prädikatenlogik: Gültigkeit

Wir betrachten in den folgenden Übungsbeispielen eine prädikatenlogische Sprache mit Relationssymbolen P, Q, R, $\leq$, sowie (wenn nötig oder sinnvoll) weiteren Funktions- und Konstantensymbolen f, g, $+$, 0, c, d, ... (Die Stelligkeit ist jeweils dem Kontext zu entnehmen.)

Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig (d.h., gelten in jeder Struktur unserer Sprache, unter jeder Belegung)? Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an (wenn möglich, ein endliches).

77. $(\forall x \exists y\, R(x,y)) \to (\exists y \forall x\, R(x,y))$, $\quad (\forall x \exists y\ x \leq y) \to (\exists y \forall x\ x \leq y)$
78. $(\forall x \exists y\, R(x,y)) \to (\forall y \exists x\, R(y,x))$, $\quad (\forall x \exists y\, x \leq y) \to (\forall y \exists x\, y \leq x)$
79. $(\exists y \forall x\, R(x,y)) \to (\forall x \exists y\, R(x,y))$, $\quad (\exists y \forall x\ x \leq y) \to (\forall x \exists y\ x \leq y)$
80. $\left(\forall x\, \forall y\, \forall z \Big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z) \Big)\right) \wedge \Big(\forall x\, \exists y\, R(x,y)\Big) \quad \to \quad \exists x\, R(x,x)$
81. $\exists x(\, \exists y\, P(y) \quad \to \quad P(x)\,)$. Wir vereinbaren, dass Quantoren stärker binden als Junktoren. Gemeint ist also die Formel $\exists x \Bigg(\ (\exists y\, P(y)) \quad \to \quad P(x) \Bigg)$.
82. $\forall x(Px \to Qx) \to \big((\forall x\, Px) \to (\forall x\, Qx)\big)$

Logische Axiome, MP

83. Sei h ein Homomorphismus von den aussagenlogischen in die prädikatenlogischen Formeln (einer festen Sprache $\mathscr{L}$), d.h. $h(\top) = \top$, $h(\bot) = \bot$, $h(\varphi \wedge \psi) = h(\varphi) \wedge h(\psi)$, und analog für die anderen Junktoren. Sei $\mathscr{U}$ eine $\mathscr{L}$-Struktur, und sei b eine Belegung (im prädikatenlogischen Sinn).
    Dann gibt es eine aussagenlogische Belegung b', die $\widehat{b'}(A) = \hat{b}(h(A))$ für alle aussagenlogischen Formeln A erfüllt.
84. Schließen Sie aus der vorigen Aufgabe: Wenn A aussagenlogische Tautologie ist, h ein Homomorphismus, dann ist $h(A)$ allgemeingültig.
85. Sei φ und ψ Formeln einer Sprache $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ eine Struktur für $\mathscr{L}$ und b eine Belegung. Zeigen Sie: Wenn $\mathscr{M} \models \varphi[b]$ und $\mathscr{M} \models (\varphi \to \psi)[b]$, dann $\mathscr{M} \models \psi[b]$.
    Zeigen Sie: Wenn $\mathscr{M} \models \varphi$ und $\mathscr{M} \models (\varphi \to \psi)$, dann $\mathscr{M} \models \psi$.
86. Sei x nicht frei in φ. Dann ist $\varphi \leftrightarrow \forall x\ \varphi$ allgemeingültig.
87. Jede Formel der Form $\forall x\ (\varphi \to \psi) \to (\forall x\ \varphi \ \to\ \forall x\ \psi)$ ist allgemeingültig.
    Geben Sie ein (möglichst einfaches) Beispiel einer Formel der Form $(\forall x\ \varphi \ \to\ \forall x\ \psi) \to \forall x\ (\varphi \to \psi)$, die nicht allgemeingültig ist.

Modelle von Formeln, $\models$

88. Geben Sie eine Formel A (ohne freie Variable) an, sodass für jede endliche nichtleere Menge U die folgenden Aussagen äquivalent sind:
    (a) Die Anzahl der Elemente von U ist gerade
    (b) Es gibt ein Modell $\mathscr{U}$ mit Universum U, sodass $\mathscr{U} \models A$

    (Hinweis: Bijektion)
    In dieser wie auch in den nächsten beiden Aufgaben können Sie die Sprache geeignet wählen.

89. Geben Sie eine Formel A (ohne freie Variable) an, sodass für jede Struktur $\mathscr{U}$ mit endlichem Universum U die folgenden Aussagen äquivalent sind:
    (a) Die Anzahl der Elemente von U ist gerade
    (b) $\mathscr{U} \models A$
90. Geben Sie eine Formel A (ohne freie Variable) an, sodass für jede Struktur $\mathscr{U}$ mit Universum U die folgenden Aussagen äquivalent sind:
    (a) U hat genau 3 Elemente
    (b) $\mathscr{U} \models A$
91. Seien σ, τ geschlossene Formeln. Zeigen Sie:
    (a) $\{\sigma\} \vDash \tau$ genau dann, wenn $\vDash \sigma \to \tau$.
    (b) Sei Σ Menge von geschlossenen Formeln. $\Sigma \cup \{\sigma\} \vDash \tau$ genau dann, wenn $\Sigma \vDash \sigma \to \tau$.
92. Geben Sie Formeln φ und ψ (in einer geeigneten Sprache $\mathscr{L}$) an, sodass zwar (a) aber nicht (b) gilt:
    (a) Für alle $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}$ gilt: wenn $\mathscr{M} \models \varphi$, dann $\mathscr{M} \models \psi$.
    (b) Für alle $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}$ gilt: $\mathscr{M} \models \varphi \to \psi$.
93. Geben Sie Formeln φ und ψ an, sodass im vorigen Beispiel zwar (b) aber nicht (a) gilt.

Formale Beweise, $\vdash$

94. a. Geben Sie einen formalen Beweis für eine der Formeln in 77–82 an. (Hinweis: Das ist sehr leicht.)
    b. Seien φ und ψ beliebige Formeln.
    Geben Sie einen formalen Beweis für die Formel $(\forall x\, \varphi) \to \forall x\, (\varphi \vee \psi)$ an. (Wenn Ihnen das zu leicht ist: Finden Sie einen möglichst kurzen Beweis.)
95. Geben Sie einen formalen Beweis für die Formel $(\forall x\, P(x)) \to \exists x\, P(x)$ an. (Hinweis: Finden Sie zuerst formale Beweise für die Formeln $(\forall x\, P(x)) \to P(x)$ und $P(x) \to \exists x\, P(x)$ und verketten Sie diese beiden formalen Beweise.
96. Sei Σ eine Menge von Formeln. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
    (a) $\Sigma \vdash \bot$
    (b) Für alle φ gilt $\Sigma \vdash \varphi$.
    (c) Es gibt eine endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma' \vdash \varphi$.

    (Mengen Σ mit dieser Eigenschaft heißen „inkonsistent“ oder „syntaktisch inkonsistent“.)
97. Sei Σ eine Menge von geschlossenen Formeln in einer Sprache $\mathcal{L}$. Zeigen Sie von mindestens 3 der folgenden Aussagen, dass sie äquivalent sind. (Tatsächlich sind alle 4 äquivalent.)
    (a) $\Sigma \vDash \bot$
    (b) Für alle φ gilt $\Sigma \vDash \varphi$.
    (c) Es gibt eine endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma' \vDash \bot$.
    (d) Es gibt keine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathscr{M}$ die $\mathscr{M} \vDash \Sigma$ erfüllt.

    (Mengen Σ mit dieser Eigenschaft heißen „unerfüllbar“, manchmal auch „semantisch inkonsistent“.)

Deduktionstheorem, halbformale Beweise

Beachten Sie in den folgenden Aufgaben, dass es immer um formale Beweise (oder Ableitungen) geht, und wir den Vollständigeitssatz noch nicht bewiesen haben. Sie können also nicht mit der „Wahrheit“ oder „Gültigkeit“ von Formeln argumentieren, sondern nur mit dem (unseren) formalen Beweisbegriff, also mit Axiomen und Modus Ponens.

98. Der „indirekte Beweis“: Wenn $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$, dann $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Erklären Sie, wie man aus einem formalen Beweis P_1 für $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ einen formalen Beweis P_2 für $\Sigma \vdash \neg\varphi$ machen kann, und geben Sie eine obere Abschätzung für die Länge von P_2 (verglichen mit der fvon P_1) an. Ebenso: Wenn $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$, dann $\Sigma \vdash \varphi$.

99. Beweis durch Fallunterscheidung: Wenn $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, und $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$, dann $\Sigma \vdash \psi$. Wie in der vorigen Aufgabe: Geben Sie an, wie man aus den beiden gegebenen formalen Beweisen einen formalen Beweis für ψ konstruieren kann.

100. Sei ψ eine Formel mit der freien Variable z. Seien x und y zwei (verschiedene) Variable, die nicht in ψ vorkommen. Wir schreiben $\psi(x)$ und $\psi(y)$ statt $\psi(z/x)$ bzw $\psi(z/y)$.
Zeigen Sie $\neg\exists y\, \psi(y) \vdash \exists y\, \psi(y) \to \chi$ und $\exists x\, \psi(x) \vdash \exists x\, (\varphi \to \psi(x))$ für alle Formeln χ, φ, und schließen Sie daraus $\vdash \exists x\, (\exists y\, \psi(y) \to \psi(x))$.
(Die Formel $\exists y\, A \to B$ wird als $(\exists y\, A) \to B$ gelesen.)

101. Das Deduktionstheorem besagt: Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ (also wenn B aus den nichtlogischen Axiomen Γ, zusammen mit A beweisbar ist), dann gilt auch $\Gamma \vdash (A \to B)$.

     Das Generalisierungstheorem besagt: Wenn $\Gamma \vdash A(c)$, wobei die Konstante c nicht in den Formeln von Γ vorkommt (und nicht in $A(x)$), dann gilt auch $\Gamma \vdash \forall x\, A(x)$.

     Gilt die Umkehrung des Deduktionstheorems? Gilt die Umkehrung des Generalisierungstheorems? (In welchem Sinn?)

102. Beweisen Sie das Generalisierungstheorem (in der Formulierung der vorigen Aufgabe).

Einführung von Quantoren

103. Sei R ein Relationssymbol, und seien x, y verschiedene Variable. Geben Sie einen formalen Beweis von $\exists x\, R(x) \to \exists y\, R(y)$ an.

104. Beweisen Sie die starke $\exists$-Einführung. Das heißt: Wenn $\Phi \vdash A \to B$, und x weder in Φ noch in B frei vorkommt, dann $\Phi \vdash \exists x A \ \to \ B$.
(Hinweis: Verwenden Sie die starke $\forall$-Einführung.)

105. Formulieren und beweisen Sie die schwache $\exists$-Einführung.

106. Verwenden Sie das $\forall$- und $\exists$-Einführung, um $\vdash (\forall x\, A(x)) \to (\exists x\, A(x))$ zu beweisen.

107. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig?

     a. $\forall x\, [A(x) \wedge B(x)] \to [\forall x\, A(x)] \wedge [\forall x\, B(x)]$
     b. $\forall x\, [A(x) \vee B(x)] \to [\forall x\, A(x)] \vee [\forall x\, B(x)]$
     c. $\exists x\, [A(x) \wedge B(x)] \to [\exists x\, A(x)] \wedge [\exists x\, B(x)]$
     d. $\exists x\, [A(x) \vee B(x)] \to [\exists x\, A(x)] \vee [\exists x\, B(x)]$

108. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? ($A \leftarrow B$ bedeutet $B \to A$.)

     a. $\forall x\, [A(x) \wedge B(x)] \leftarrow [\forall x\, A(x)] \wedge [\forall x\, B(x)]$
     b. $\forall x\, [A(x) \vee B(x)] \leftarrow [\forall x\, A(x)] \vee [\forall x\, B(x)]$

c. $\exists x\,[A(x) \wedge B(x)] \leftarrow [\exists x\,A(x)] \wedge [\exists x\,B(x)]$
d. $\exists x\,[A(x) \vee B(x)] \leftarrow [\exists x\,A(x)] \vee [\exists x\,B(x)]$

109. Skizzieren Sie einen (halb-)formalen Beweis einer der Formeln aus den vorigen beiden Beispielen.

110. Und noch einen. (Jetzt natürlich von einer anderen Formel.)

111. Und noch einen.

112. Zeigen Sie, dass aus dem Paarmengenaxiom der Satz „Wenn A und B nicht leer sind, dann ist $A \times B$ nicht leer“ folgt. „$A \times B$ nicht leer“ ist hier als „es gibt z, a, b mit $a \in A$, $b \in B$, $z = (a, b)$“ zu lesen.

Vollständige Theorien

113. Sei $\mathscr{L}$ eine Sprache der Prädikatenlogik, Σ eine vollständige konsistente Theorie in $\mathscr{L}$.

    Zeigen Sie für alle geschlossenen Formeln A und B:

    - $\Sigma \vdash A \vee B$ genau dann, wenn $\Sigma \vdash A$ oder $\Sigma \vdash B$.
    - $\Sigma \vdash A \wedge B$ genau dann, wenn $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash B$.
    - $\Sigma \vdash \neg A$ genau dann, wenn $\Sigma \nvdash A$.

114. Die 3 Äquivalenzen in der vorigen Aufgabe lassen sich in der Form von 6 Implikationen schreiben. Welche dieser 6 Implikationen

    - ... gelten für alle Theorien Σ?
    - ... gelten für alle konsistenten Theorien Σ?
    - ... implizieren Vollständigkeit von Σ? (Unter der Voraussetzung, dass Σ konsistent ist.)

115. Zeigen Sie folgendes Korollar bzw. folgenden Spezialfall des Vollständigkeitssatzes: Für alle geschlossenen Formeln σ gilt: σ ist erfüllbar ($\exists \mathscr{M} \models \sigma$) oder widerlegbar ($\vdash \neg\sigma$).

116. Beweisen Sie den Vollständigkeitssatz aus dem gerade besprochenen Spezialfall mit Hilfe des Kompaktheitssatzes.

117. Sei $\mathscr{L}$ eine (möglicherweise überabzählbare) Sprache der Prädikatenlogik, Σ_0 eine konsistente Theorie in $\mathscr{L}$. Sei P die Menge aller konsistenten Theorien $\Sigma \supseteq \Sigma_0$ in der Sprache $\mathscr{L}$. Durch die Relation $\subseteq$ wird P partiell geordnet.

    Zeigen Sie:

    - Jede Kette in P (d.h., jede durch $\subseteq$ total geordnete Teilmenge $K \subseteq P$) ist beschränkt. (Das heißt, für jede Kette $K \subseteq P$ gibt es $\Sigma^* \in P$, sodass für alle $\Sigma \in K$ die Beziehung $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ gilt.)
      Hinweis: Prüfen Sie nach, ob die von Ihnen konstruierte Menge Σ^* wirklich in P liegt. Beachten Sie dabei, dass nicht jede Kette ordnungsisomorph zu $(\mathbb{N}, <)$ ist.
    - Wenn $\Sigma \in P_{\mathscr{L}}$ maximal ist (also: es gibt kein $\Sigma' \supsetneq \Sigma$ in P), dann ist Σ vollständig.
    - Schließen Sie aus dem Lemma von Zorn, dass es zu jeder konsistenten Theorie Σ_0 eine vollständige konsistente Theorie $\Sigma_1 \supseteq \Sigma_0$ gibt.

118. Sei Σ vollständige Henkintheorie, und sei $\mathscr{M}$ die zugehörige in der Vorlesung definierte Struktur (Äquivalenzklassen von geschlossenen Termen). Zeigen Sie, dass für alle geschlossenen Terme t die Gleichung $t^{\mathscr{M}} = [t]_\sim$ gilt. (Was ist mit der linken Seite gemeint?)

Mod und Th

Mit $Mod(\Sigma)$ bezeichnen wir die Klasse aller Strukturen $\mathscr{M}$ (einer vorgegebenen Sprache), die $\mathscr{M} \models \Sigma$ erfüllen. Sei $\mathfrak{M}$ eine Klasse von Strukturen. Mit $Th(\mathfrak{M})$ bezeichnen wir die Theorie von $\mathfrak{M}$, d.h. die Menge aller geschlossenen Formeln φ, die in **jedem** $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ erfüllt sind. (Statt $Mod(\{\sigma\})$ schreiben wir $Mod(\sigma)$, statt $Th(\{\mathscr{M}\})$ schreiben wir $Th(\mathscr{M})$.)

119. Zeigen Sie $\mathfrak{M} \subseteq Mod(Th(\mathfrak{M}))$.

120. Zeigen Sie $Th(Mod(\Sigma)) = \{\sigma \mid \Sigma \vdash \sigma\}$.

121. Zeigen Sie $Th(\mathfrak{M}) = Th(Mod(Th(\mathfrak{M}))$ und $Mod(\Sigma) = Mod(Th(Mod(\Sigma)))$.

Galoisverbindungen

Sei $R \subseteq A \times B$. Für $X \subseteq A$ definieren wir $X^\uparrow := \{b \in B : \forall x \in X\ R(x, b)\}$ und analog definieren wir für $Y \subseteq B$ die Menge $Y^\downarrow := \{a \in A : \forall y \in Y\ R(a, y)\}$.

122. Zeigen Sie:

    a. $X \mapsto X^\uparrow$ ist antimonoton von (bez Mengeninklusion).
    b. $X \subseteq X^{\uparrow\downarrow}$ für alle $X \subseteq A$, und $X^{\uparrow\downarrow\uparrow} = X^\uparrow$.
    c. $X = X^{\uparrow\downarrow}$ genau dann, wenn es ein Y mit $X = Y^\downarrow$ gibt. (Solche Mengen heißen „Galois-abgeschlossen“.)

123. Zeigen Sie $X^{\uparrow\downarrow\uparrow} = X^\uparrow$ für alle $X \subseteq A$. (Analog $Y^{\downarrow\uparrow\downarrow} = Y^\downarrow$ für alle $Y \subseteq B$.)

124. Sei A ein Vektorraum, B die Menge der Linearformen und R die Menge aller Paare $(a, b) \in A \times B$, sodass $b(a) = 0$ ($\langle b, a\rangle = 0$) gilt. Welche $X \subseteq A$ sind Galois-abgeschlossen? Welche $Y \subseteq B$ sind Galois-abgeschlossen?

125. Sei B Menge aller geschlossenen Formeln (einer vorgegebenen Sprache $\mathscr{L}$), A Menge aller $\mathscr{L}$-Strukturen auf einer festen Menge (z.B: auf den natürlichen Zahlen), und sei $R \subseteq A \times B$ durch $\models$ definiert.

    - Welche Teilmengen von B sind Galois-abgeschlossen? (Hier kann man eine recht explizite Beschreibung finden.)
    - Welche Teilmengen von A sind Galois-abgeschlossen? (Hier eher nicht.)

Kompaktheitssatz

Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik besagt: Wenn $\Sigma \models \varphi$, dann gibt es eine endliche Menge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma' \models \varphi$.
Sei $n \geq 2$. Mit $\exists^n$ (oder genauer $\exists^{\geq n}$) kürzen wir die Formel $\forall x_2 \cdots \forall x_n\, \exists y\, (y \neq x_2 \wedge \cdots \wedge y \neq x_n)$ ab. (Oder: die dazu beweisbar äquivalente Formel $\exists x_1 \cdots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$.)

126. Wie viele Junktoren und wie viele Quantoren enthält die Formel $\exists^{\geq 7}$?

127. Beschreiben Sie alle Modelle von $\exists^{\geq 7}$. Geben Sie eine geschlossene Formel φ_8 an, sodass $Mod(\varphi_8)$ genau aus jenen Strukturen besteht, die genau 8 Elemente haben.

128. Wir betrachten die Sprache der Gruppentheorie (ein zweistelliges Funktionssymbol $*$, eine einstelliges $^{-1}$, ein Konstantensymbol 1). Lösen Sie möglichst viele der folgenden Probleme (bzw zeigen Sie gegebenenfalls, dass sie unlösbar sind):

    - Finden Sie eine Formel σ_G, sodass $Mod(\sigma_G)$ die Klasse aller Gruppen ist.

- Finden Sie eine Formel σ_{eG}, sodass $Mod(\sigma_{eG})$ die Klasse aller endlichen Gruppen ist.
- Finden Sie eine Formel σ_{uG}, sodass $Mod(\sigma_{uG})$ die Klasse aller unendlichen Gruppen ist.
- Finden Sie eine Formelmenge Σ_{eG}, sodass $Mod(\Sigma_{eG})$ die Klasse aller endlichen Gruppen ist.
- Finden Sie eine Formelmenge Σ_{uG}, sodass $Mod(\Sigma_{uG})$ die Klasse aller unendlichen Gruppen ist.

Hinweis: Verwenden Sie für den Nachweis der Unlösbarkeit die Formeln $\exists^{\geq n}$ und den Kompaktheitssatz.

129. Sei Σ eine Theorie mit folgenden Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl $n' > n$ und ein $\mathscr{M} \in Mod(\Sigma)$ mit genau n' Elementen. Zeigen Sie, dass es in $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine unendliche Struktur gibt.

130. Sei $\mathscr{M}$ eine unendliche abzählbare Struktur. Zeigen Sie, dass es in $Mod(Th(\mathscr{M}))$ eine überabzählbare Struktur gibt. (Hinweis: Vollständigkeitssatz und Kompaktheitssatz gelten auch für überabzählbare Sprachen. Verwenden Sie überabzählbar viele Konstantensymbole.)

131. Seien Σ_1 und Σ_2 Theorien in einer gemeinsamen Sprache, sodass $\mathrm{Mod}(\Sigma_1) \cap \mathrm{Mod}(\Sigma_2) = \emptyset$ ist. Dann gibt es eine geschlossene Formel σ_1 mit $\mathrm{Mod}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Mod}(\sigma_1)$ und $\mathrm{Mod}(\Sigma_2) \subseteq \mathrm{Mod}(\neg\sigma_1)$.

132. Sei M eine nichtleere Menge, $\mathscr{L}$ eine prädikatenlogische Sprache, und sei X die Menge aller $\mathscr{L}$-Strukturen mit Universum M. Zeigen Sie:

    a. Die Famile $\{\mathrm{Mod}(\sigma) : \sigma \text{ geschlossene Formel}\}$ bildet Basis einer 0-dimensionalen Topologie τ auf X. (Eine Topologie heißt 0-dimensional, wenn es eine Basis gibt, die unter Komplementen abgeschlossen ist; äquivalent: wenn es eine Basis gibt, deren Mengen alle clopen sind, also offen und abgeschlossen. Das klassische Beispiel eines 0-dimensionalen aber nicht diskreten Raums ist die Cantormenge.)
    b. Im allgemeinen ist (X, τ) kein Hausdorffraum. Geben Sie eine sinnvolle Äquivalenzrelation $\sim$ auf X und eine sinnvolle Topologie $\tau_\sim$ auf $X/\sim$ an, sodass $X/\sim$ Hausdorffraum ist.
    c. (X, τ) ist kompakt, ebenso $(X/\sim, \tau_\sim)$. (D.h., jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.)

133. Zeigen Sie (mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, aber ohne Auswahlaxiom, Lemma von Zorn oder den Hausdorffschen Kettensatz zu verwenden), dass es auf jeder Menge eine lineare Ordung gibt. Wenn das zu einfach ist: Zu jeder partiellen Ordung $(P, \leq)$ gibt es eine lineare Ordung $(P, \leq')$ mit $\forall x\, \forall y : (x \leq y \ \Rightarrow x \leq' y)$.

    (Hinweis: Betrachten Sie eine Sprache, die ein zweistelliges Relationssymbol enthält, sowie für jedes Element Ihrer Menge eine neue Konstante.)

134. Wir betrachten eine Theorie Σ in der Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Die Theorie verlangt, dass E (genauer: $E^{\mathscr{M}}$ für jedes $\mathscr{M}$, welches Σ erfüllt) eine Äquivalenzrelation ist, in der jede Klasse unendliche viele Elemente enthält.
    Weiters definieren wir $\Sigma_2 := \Sigma \cup \{\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (xEy \vee yEz \vee xEz)\, \}$.

    a. Geben Sie die Formeln in Σ an.
    b. Wie viele abzählbar unendliche Modelle hat Σ_2 bis auf Isomorphie? Geben Sie alle an.
    c. Geben Sie mindestens 3 (nichtisomorphe) Modelle von Σ_2 an, deren Universum $\mathbb{R}$ ist.
    d. Finden Sie alle vollständigen konsistenten Theorien $\Sigma' \supseteq \Sigma_2$ (wobei wir zwei Theorien als gleich betrachten, wenn sie dieselben Konsequenzen haben).
    Hinweis: Verwenden Sie den Vollständigkeitssatz sowie Ihr Resultat aus Punkt b.

Henkintheorien

135. Sei Σ eine konsistente Theorie. Sei A eine Formel, in der (höchstens) die Variable x frei vorkommt. Sei c eine Konstante, die in keiner Formel in $\Sigma \cup \{A\}$ vorkommt. Zeigen Sie, dass dann auch die Theorie $\Sigma \cup \{\exists x\, A(x) \to A[x/c]\}$ konsistent ist.

136. Sei Σ eine konsistente Theorie. Sei B eine Formel, in der (höchstens) die Variable x frei vorkommt. Sei c eine Konstante, die in keiner Formel in $\Sigma \cup \{B\}$ vorkommt. Zeigen Sie, dass dann auch die Theorie $\Sigma \cup \{B[x/c] \to \forall x\, B\}$ konsistent ist.

137. Sei $\mathcal{L}$ eine prädikatenlogische Sprache, und sei Σ eine konsistente Henkin-Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$ mit der folgenden Eigenschaft:

     Für alle Konstantensymbole c, d in $\mathcal{L}$ gilt entweder $\Sigma \vdash c = d$ oder $\Sigma \vdash c \neq d$.

     Weiters habe Σ die Eigenschaft, dass es zwei Konstantensymbole 0, 1 mit $\Sigma \vdash 0 \neq 1$ gibt. Zeigen Sie, dass Σ vollständig sein muss.

138. Geben Sie explizit eine konsistente Henkintheorie an, deren Sprache nur ein einziges Konstantensymbol (möglicherweise aber weitere Prädikaten- und/oder Funktionssymbole) enthält. (Wenn das zu leicht ist: Geben Sie zwei derartige Theorien an, wobei die eine vollständig und die andere unvollständig sein soll.)

139. Geben Sie eine Sprache $\mathscr{L}$ und zwei $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}_1$ und $\mathscr{M}_2$ an, sodass $Th(\mathscr{M}_1)$ eine Henkintheorie ist, nicht aber $Th(\mathscr{M}_2)$.

140. Jede Theorie mit der schwachen Henkin-Eigenschaft hat auch die starke Henkin-Eigenschaft. (Hinweis: Verwenden Sie die Formel $\exists x(\exists y \psi(y) \to \psi(x))$, siehe Aufgabe 100.)

141. Zeigen Sie: Sei Σ vollständige konsistente Henkintheorie. Dann gibt es für jede geschlossene Formel der Form $\forall x\ \varphi$ eine Konstante c mit $\Sigma \vdash \forall x\, \varphi \ \leftrightarrow\ \varphi[x/c]$.
     Verwenden Sie diesen Satz, um den Beweis des Vollständigkeitssatzes abzuschließen (d.h., um den Induktionsschritt „Allquantor" durchzuführen.)

Skolemtheorien

Sei Σ eine Theorie (=Menge von geschlossenen Formeln) in der Sprache $\mathscr{L}$. Wir nennen Σ eine Skolem-Theorie, wenn es für alle[2] $n \geq 0$ und alle Formeln der Form $\exists y\ \psi$ mit den freien Variablen $x_1, \dots, x_n$ ein n-stellige Funktionssymbol f gibt, sodass $\sigma \vdash \exists y\ \psi \to \psi[y/f(\bar{x})]$ (wobei wir $f(\bar{x})$ statt $f(x_1, \dots, x_n)$ schreiben).
Für zwei $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}_1$ und $\mathscr{M}_2$ mit $M_1 \subseteq M_2$ sagen wir $\mathscr{M}_1 \leq \mathscr{M}_2$ („$\mathscr{M}_1$ ist Unterstruktur von $\mathscr{M}_2$"), wenn für alle Funktionssymbole f in $\mathscr{L}$ gilt, dass $f^{\mathscr{M}_1} = f^{\mathscr{M}_2} \restriction M_1$ (genauer: $f^{\mathscr{M}_1} = f^{\mathscr{M}_2} \restriction M_1^k$, wenn k die Stelligkeit von f ist), sowie $c^{\mathscr{M}_1} = c^{\mathscr{M}_2}$ für alle Konstantensymbole, und $R^{\mathscr{M}_1} = R^{\mathscr{M}_2} \cap M^k$ für alle (k-stelligen) Relationssymbole R.
Wir schreiben $\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2$ wenn erstens $\mathscr{M}_1 \leq \mathscr{M}_2$ gilt, und überdies für jede Formel φ und jede Belegung b mit Werten in M_1: $\mathscr{M}_1 \models \varphi[b] \ \Leftrightarrow\ \mathscr{M}_2 \models \varphi[b]$.

142. Finden Sie ein möglichst interessantes) Beispiel $\mathscr{L}, \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \varphi, b$, sodass zwar $\mathscr{M}_1 \leq \mathscr{M}_2$ gilt, aber nicht $\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2$ (letzeres belegt durch φ und b.

143. Finden Sie ein Beispiel $\mathscr{L}, \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$, sodass $\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2$ und $M_1 \neq M_2$.

144. Geben Sie ein explizites Beispiel einer konsistenten Skolemtheorie an.

145. Sei Σ Skolemtheorie. Zeigen Sie:

     (∗) Zu jeder Formel φ gibt es eine reine Allformel φ' (also eine Formel in Pränexform ohne Existenzquantoren) mit $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

[2] Wir betrachten hier Konstantensymbole als 0-steelige Funktionssymbole

PEANO-Axiome

(Die Axiome finden Sie auf der Seite `http://dmg.tuwien.ac.at/goldstern/lgm/`.)

Für jede natürliche Zahl n definieren wir einen Term Δ_n:
Δ_0 ist die Konstante 0, und Δ_{n+1} ist der Term $S(\Delta_n)$.

146. Geben Sie einen formalen Beweis des Assoziativgesetzes der Addition aus den Peano-Axiomen: $(x+y)+z = x+(y+z)$. (Hinweis: IND_A für eine geeignete Formel A.)
Folgern Sie, dass in PA der Satz $\forall x\ (x+x)+x = x+(x+x)$ beweisbar ist.

147. Zeigen Sie, dass der Satz $\forall x\ (x+x)+x = x+(x+x)$ nicht aus den folgenden Axiomen folgt:
    - $\forall x(x+0=x)$
    - $\forall x \forall y(x+Sy = S(x+y))$
    - $\psi(0) \land \forall x(\psi(x) \to \psi(Sx)) \ \to\ \forall x(\psi(x))$,
    wobei $\psi(x)$ Abkürzung für $(x+x)+x = x+(x+x)$ sein soll.

148. Geben Sie einen halbformalen Beweis von $0+x=x$ aus den Peanoaxiomen.

149. Geben Sie einen halbformalen Beweis von $S0+x = x+S0$ aus den Peanoaxiomen.

150. Geben Sie einen halbformalen Beweis des Kommutativgesetzes der Addition aus den Peano-Axiomen: $x+y=y+x$. (Hinweis: Verwende die vorigen Aufgaben.)

151. Zeigen Sie, dass die Formel $x+y=y+x$ nicht aus den beiden Axiomen $\forall x(x+0=x)$ und $\forall x \forall y : (x+Sy) = S(x+y)$ bewiesen werden kann. (Hinweis: Finden Sie eine Struktur, in der die beiden Axiome gelten, wo aber Addition nicht kommutativ ist.)
Wenn Ihnen das zu leicht ist: finden Sie ein Struktur, in der zusätzlich die Axiome $\forall x : Sx \neq 0$ und $\forall x, y : (Sx = Sy \to x = y)$ gelten.

152. Geben Sie einen formalen Beweis von $\Delta_2 + \Delta_2 = \Delta_4$.

153. Zeigen Sie: Wenn $i+j=n$, dann ist $\Delta_i + \Delta_j = \Delta_n$ beweisbar. Geben Sie auch eine grobe Abschätzung der Länge Ihres formalen Beweises an. Welche Peano-Axiome haben Sie verwendet?
Schließen Sie, dass für alle n die Formel $\psi(\Delta_n)$ aus Aufgabe 147 aus den dort erwähnten Axiomen beweisbar ist.

154. Wenn $PA \vdash \forall x\, \varphi(x)$, gilt dann auch für alle n auch $PA \vdash \varphi(\Delta_n)$?

155. Wenn für alle n die Beziehung $PA \vdash \varphi(\Delta_n)$ gilt, gilt dann auch $PA \vdash \forall x\, \varphi(x)$?

156. Sei Σ eine Theorie (in der Sprache $0, S, +, \cdots$) mit folgenden Eigenschaften:
    a. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt $\Sigma \vdash \Delta_n + \Delta_k = \Delta_{n+k}$.
    b. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt $\Sigma \vdash \Delta_n \cdot \Delta_k = \Delta_{nk}$.
    c. Für alle $n \neq k$ gilt $\Sigma \vdash \Delta_n \neq \Delta_k$.
    d. Für alle Formeln $\varphi(x)$ mit einer freien Variable x gilt:
    $$(\forall n\ \Sigma \vdash \varphi(\Delta_n)) \ \Leftrightarrow\ \Sigma \vdash \forall x\ \varphi(x)$$
    Dann gilt für alle *geschlossenen* Formeln σ: Wenn $\mathbb{N} \models \sigma$, dann $\Sigma \vdash \sigma$.
    (Hinweis: Induktion nach Aufbau von σ. Beachten Sie, dass σ von der Form $\forall x\, \psi$ sein kann, wobei ψ dann im allgemeinen nicht geschlossen ist.)

Logik 2.Stufe

157. Zeigen Sie, dass die Formel

$$\exists X \left[\forall x, y, z : (X(x,y) \wedge X(y,z) \to X(x,z)) \ \wedge \ (\forall x : \neg X(x,x)) \ \wedge \ \forall x \, \exists y : X(x,y) \right]$$

(in Logik zweiter Stufe, mit einer zweistelligen Relationsvariablen X) in jeder unendlichen Struktur gilt, aber in keiner endlichen Struktur.
(Hinweis: Jede unendliche Mengen enthält eine injektive Kopie von $\mathbb{N}$.)

158. Wählen Sie eine geeignete Sprache $\mathscr{L}$, und zeigen Sie, dass die Menge aller geschlossenen allgemeingültigen Formeln *zweiter Stufe* σ in $\mathscr{L}$ nicht semi-entscheidbar ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Trakhtenbrot: Die Menge aller „endlich allgemeingültigen" Formeln (in einer geeigneten erststufigen Sprache) ist nicht semi-entscheidbar. Eine Formel heißt *endlich allgemeingültig*, wenn sie in jeder endlichen Struktur gilt.)

Andere Kalküle

Wir betrachten eine feste Sprache $\mathcal{L}$. Sei Fml die Menge aller Formeln in $\mathcal{L}$, und $\mathscr{P}(Fml)$ die Menge aller Mengen von Formeln.
Sei $\mid\!\sim$ eine Relation zwischen $\mathscr{P}(Fml)$ und Fml mit folgenden Eigenschaften (für alle $\Phi, \Psi \subseteq Fml$ und alle $A, B \in Fml$):

- Wenn $\Phi \subseteq \Psi$ und $\Phi \mid\!\sim A$ gilt, dann auch $\Psi \mid\!\sim A$.
- Wenn $A \in \Psi$, dann $\Psi \mid\!\sim A$.
- [„Schnitt"] Wenn $\Psi \cup \{A\} \mid\!\sim B$, und $\Psi \mid\!\sim A$, dann $\Psi \mid\!\sim B$.
- $\emptyset \mid\!\sim B$ für alle Tautologien B.
- Deduktionstheorem: $\Phi \cup \{A\} \mid\!\sim B$ genau dann, wenn $\Phi \mid\!\sim A \to B$.
- Generalisierungstheorem: Wenn die Variable x in den Formeln in Φ nicht frei vorkommt: Wenn $\Phi \mid\!\sim B$, dann auch $\Phi \mid\!\sim \forall x \, B$.
- Wenn $\Phi \mid\!\sim \forall x \, B$, und wenn die Substitution $B[x/t]$ erlaubt ist, dann $\Phi \mid\!\sim B[x/t]$.
- $\mid\!\sim (\exists x \, \psi \ \leftrightarrow \ \neg \forall x \, \neg \psi)$.

159. Zeigen Sie unter den obigen Voraussetzungen:
   a. Modus Ponens: Wenn $\Phi \mid\!\sim A \to B$, und $\Phi \mid\!\sim A$, dann $\Phi \mid\!\sim B$.
   b. Generalisierungsaxiom: $\emptyset \mid\!\sim B \to \forall x B$, wenn x in B nicht frei vorkommt.
   c. Distributivitätsaxiom: $\mid\!\sim \forall x(A \to B) \to (\forall x \, A \to \forall x \, B)$.
   d. Substitutionsaxiom (wenn sinnvoll).
   e. Starke Einführung des Allquantors
   f. Schwache Einführung des Allquantors
   g. Starke Einführung des Existenzquantors
   h. Schwache Einführung des Existenzquantors

160. Sei $\mid\!\sim$ eine Relation, die die obigen Voraussetzungen erfüllt. Nehmen wir weiters an, dass $\emptyset \mid\!\sim A$ genau dann gilt, wenn $\emptyset \vdash A$.
Zeigen Sie für alle endlichen Mengen Φ: $\Phi \mid\!\sim A$ genau dann, wenn $\Phi \vdash A$.

161. Geben Sie eine Relation $\mid\!\sim$ an, die alle oben genannten Bedingungen erfüllt, aber nicht „kompakt“ ist; das heißt: Geben Sie eine Relation $\mid\!\sim$ wie oben an, sowie eine Menge Φ und eine Formel A, sodass zwar $\Phi \mid\!\sim A$ gilt, es aber keine endliche Menge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, die $\Phi_0 \mid\!\sim A$ erfüllt.

162. Wir nennen zwei Mengen Φ und Ψ $\mid\!\sim$-äquivalent, wenn $\Phi \leq \Psi$ und $\Psi \leq \Phi$ gilt, wobei $\leq$ so definiert ist:

     $\Phi \leq \Psi$ genau dann,
     wenn es zu jeder Formel $A \in \Phi$ eine Formel $A' \in \Psi$ gibt mit $\mid\!\sim (A \leftrightarrow A')$

     Kann man aus der $\mid\!\sim$-Äquivalenz von Φ und Ψ schließen, dass $\Phi \mid\!\sim B$ genau dann gilt, wenn $\Psi \mid\!\sim B$ gilt? Gilt dies zumindest dann, wenn die Mengen Φ und Ψ endlich sind?

Das leere Modell

Wir betrachten eine Sprache ohne Konstantensymbole und ohne nullstellige Relationssymbole. Die leere Struktur ist so definiert: Ihr Universum ist die leere Menge, alle Funktions- und alle Relationssymbole werden als die leere Menge interpretiert. (Die leere Menge ist sowohl eine k-stellige Funktion als auch eine k-stellige Relation, für $k \geq 1$.)
Wir definieren eine auf allen geschlossenen Formeln definierte Wahrheitsfunktion $\hat{\emptyset}$ so:

- $\hat{\emptyset}(\forall x\, \psi) = 1$ für alle Formeln ψ.
- $\hat{\emptyset}(\exists x\, \psi) = 0$ für alle Formeln ψ.
- $\hat{\emptyset}$ ist Homomorphismus in Bezug auf die Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$, und $\hat{\emptyset}(\bot) = 0$, $\hat{\emptyset}(\top) = 1$.

Statt $\hat{\emptyset}(\sigma) = 1$ schreiben wir $\models_0 \sigma$.
Wir schreiben $\models_{\geq 0} \sigma$, wenn σ erstens allgemeingültig ist und zweitens auch in der leeren Struktur gilt (also auch $\models_0 \sigma$ erfüllt). (Das heißt, σ gilt sowohl in allen nichtleeren Strukturen als auch in der leeren Struktur.)

163. Wenn $\models_0 (A \rightarrow B)$, und $\models_0 A$, dann auch $\models_0 B$. Analoges gilt für $\models_{\geq 0}$.

164. Geben Sie eine allgemeingültige geschlossene Formel σ an, für die $\not\models_0 \sigma$ gilt. (Wenn möglich: ein Axiom.)

165. Geben Sie eine geschlossene Formel τ an, für die zwar $\models_0 \tau$ gilt, sodass weder τ noch $\neg\tau$ allgemeingültig ist.

166. Finden Sie eine berechenbare Abbildung $\sigma \mapsto \sigma^0$ von den geschlossenen Formeln in die geschlossenen Formeln, sodass für alle geschlossenen Formeln σ gilt:

     $$\models \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\geq 0} \sigma^0$$

     (Hinweis: Finden Sie eine geeignete Formel α und einen Junktor $*$, sodass die Abbildung $\sigma \mapsto \alpha * \sigma$ funktioniert.)

167. Finden Sie eine berechenbare Abbildung $\sigma \rightarrow \sigma^+$ von den geschlossenen Formeln in die geschlossenen Formeln, sodass für alle geschlossenen Formeln σ gilt:

     $$\models_{\geq 0} \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \models \sigma^+$$

     (Hinweis: Finden Sie einen Junktor $*$ und einen booleschen Homomorphismus H von den Formeln in die variablenfreien Formeln, sodass die Abbilding $\sigma \mapsto H(\sigma) * \sigma$ funktioniert.)

168. Welche unserer geschlossenen logischen Axiome gelten auch in der leeren Struktur?

Pränexform

169. Seien $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ Formeln, wobei x nicht frei in ψ ist, und y nicht frei in φ. Geben Sie halbformale Beweise für die folgenden Formeln:
    - $\forall x\, \exists y\ (\varphi(x) \wedge \psi(y)) \ \leftrightarrow\ ((\forall x\, \varphi(x)) \wedge (\exists y \psi(y)))$
    - $\forall x\, \exists y\ (\varphi(x) \vee \psi(y)) \ \leftrightarrow\ ((\forall x\, \varphi(x)) \vee (\exists y \psi(y)))$

170. Seien $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ wie in der vorigen Aufgabe. Vervollständigen Sie die folgende Angabe in sinnvoller Weise:
    Zeigen Sie, dass $\exists x\, (\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (?? \to ??)$ allgemeingültig ist.
    Zeigen Sie, dass $\exists x\, (\psi \to \varphi(x)) \leftrightarrow (?? \to ??)$ allgemeingültig ist.

171. Finden Sie zu jeder der folgenden Formeln eine äquivalente Formel in Pränexform. Finden Sie zu einer dieser Formeln zwei strukturell verschiedene aber äquivalente Formeln in Pränexform. (Hier sollen zwei Formeln als strukturell gleich gelten, wenn eine aus der anderen durch Variablenumbenennung und tautologische Konsequenzen (wie $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall x(B \wedge A \wedge A) \vee \bot$) erhalten werden kann.)
    (a) $\neg(\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$.
    (b) $\neg(\forall x\, P(x) \to \forall y\, Q(y))$.
    (c) $\neg(\exists x\, P(x) \to \forall y\, Q(y))$.

Skolemisierung

172. Finden Sie (durch Skolemisierung) eine Formel in Pränexform ohne Existenzquantoren, die zur Formel
    $$\exists x\, \exists y\, \forall z\, ((P(x) \vee P(y)) \wedge \neg P(z))$$
    erfüllungsäquivalent ist.

173. Finden Sie (durch Skolemisierung) eine Formel in Pränexform ohne Existenzquantoren, die zur Formel
    $$\forall z\, \exists x\, \exists y\, ((P(x) \vee P(y)) \wedge \neg P(z))$$
    erfüllungsäquivalent ist.

174. Finden Sie eine Sprache $\mathscr{L}$, eine Menge von neuen Funktionssymbolen $\{f, g, \ldots\}$, eine Allformel φ (d.h. Pränexformel ohne Existenzquantoren) in der um die neuen Funktionssymbole erweiterten Sprache, sodass φ nicht durch Skolemisierung einer Pränexformel ψ in $\mathscr{L}$ erhalten werden kann.

175. Finden Sie eine Formel $\forall x\, \exists y\, \varphi$ die das Funktionssymbol f enthält sodass $\forall x\, \exists y\, \varphi$ nicht erfüllbarkeitsäquivalent ist zu $\forall x\, \varphi(y/f(x))$.

Unifikation

176. Stellen Sie fest, ob die folgenden Mengen von Literalen unifizierbar (im strikten Sinn) sind. Gegeben Sie gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator an; verwenden Sie den in der Vorlesung besprochenen Algorithmus.
    - $E_1 = \{R(x, g(x)), R(f(y), y)\}$.
    - $E_2 = \{R(x, g(x)), \neg R(f(y), z)\}$.
    - $E_3 = \{P(x, g(x, x), y), P(y, g(f(z), u), f(c))\}$.
    - $E_4 = \{P(x, g(x, x), y), P(y, g(c, u), f(c))\}$.

    Hier sind x, y, z, u Variable, c ein Konstantensymbol, f, g Funktionssymbole und P, R sind Prädikatensymbole.

Resolution

Unter einer „Instanz“ eine Formel φ (die meist als Klausel gegeben ist) verstehen wir jede Formel $\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$, die man durch (beliebig viele) sinnvolle Substitutionen erhält. Unter einer Grundinstanz verstehen wir eine Instanz ohne freie Variable.

177. Sei φ die Formel $[\forall x\, \exists y\, (P(x) \to \neg P(y))] \to \exists x\, \neg P(x)$. Wir wollen mit Hilfe des Resolutionsalgorithmus aus der Vorlesung zeigen, dass φ allgemeingültig ist.

    (a) Geben Sie eine bereinigte Formel φ_a an, die zu $\neg\varphi$ äquivalent ist.

    (b) Geben Sie eine Formel φ_b in Pränexform an, die zu φ_a äquivalent ist.

    (c) Geben Sie eine reine Allformel φ_c an, die zu φ_b erfüllungsäquivalent ist.

    (d) Formen Sie φ_c in äquivalente KNF φ_d um.

    (e) Geben Sie eine Resolutionswiderlegung der zu φ_d korrespondierenden Klauselmenge an.

178. Wir verwenden eine Sprache mit den zweistelligen Relationssymbolen $<$, $\ll$, $\lll$ und zwei zweistelligen Funktionssymbolen $+$, $*$ (und Konstantenymbolen a, b). Zeigen Sie (mit Resolution), dass die folgende KNF unerfüllbar ist:

    $$\{\, \{a+b < a*b\}\ ;\ \{x_2 \not< y_2,\, x_2+y_2 \ll x_2*y_2\}\ ;\ \{x_2 \not\ll y_2,\, x_2+y_2 \lll x_2*y_2\}\ ;\ \{x \not\lll y\}\,\}$$

    Finden Sie eine Menge von Grundinstanzen dieser Klauseln, die aussagenlogisch unerfüllbar ist.

179. Verallgemeinern Sie das vorige Beispiel: Geben Sie eine Menge von n Klauseln (mit $O(n)$ Symbolen) an, die unerfüllbar ist, wobei aber die kleinste Menge von Grundinstanzen, die aussagenlogisch unerfüllbar ist, mehr als $O(n)$ Symbole enthält (sogar mehr als $O(n^7)$).

180. Finden Sie eine aussagenlogisch unerfüllbare Mengen von Instanzen der folgenden Klauselmenge: $\{\{R(x, x+x, y)\}, \{\neg R(x+x, y, y+y)\}\}$.

181. Verallgemeinern Sie das vorige Beispiel: Geben Sie eine Menge von 2 Klauseln (mit $O(n)$ Symbolen) an, die unerfüllbar ist, wobei aber die kleinste Menge von Grundinstanzen, die aussagenlogisch unerfüllbar ist, mehr als $O(n)$ Symbole enthält.

182. Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die Formeln der Aufgaben 172 und 173 unerfüllbar sind.

183. Zwei Formeln heissen gültigkeitsäquivalent falls beide allgemeingültig oder beide nicht allgemeingültig sind.

    Zeigen Sie: Zu jeder Formel φ gibt es eine geschlossene gültigkeitsäquivalente Formel ψ der Gestalt $\psi = \exists\bar{x} \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}$ wobei die $L_{i,j}$ Literale sind. Ausserdem ist ψ aus φ effektiv berechenbar.

184. Eine geschlossene Formel der Gestalt $\psi = \exists\bar{x} \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}$ kann als duale Klauselmenge aufgefasst werden (d.h. als eine Menge von Mengen von Literalen die allerdings – im Unterschied zu einer normalen Klauselmenge – interpretiert wird als Disjunktion von Konjunktionen von Literalen). $\mathrm{G}(\psi)$ wird analog zur Vorlesung definiert als Menge aller Grundinstanzen von dualen Klauseln aus ψ.

    Zeigen Sie: Eine geschlossene Formel der Gestalt $\psi = \exists\bar{x} \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}$ ist allgemeingültig genau dann wenn es eine endliche Menge $M_0 \subseteq \mathrm{G}(\psi)$ gibt, so dass $\bigvee_{C \in M_0} C$ eine Tautologie ist.

185. Gegeben ist die Klauselmenge $M = \{C_1; C_2; C_3; C_4; C_5\}$ wobei $C_1 = \{Q(a), Q(b)\}$, $C_2 = \{\neg P(x, f(x))\}$, $C_3 = \{\neg Q(x), Q(f(x))\}$, $C_4 = \{\neg Q(x), P(a, x)\}$, $C_5 = \{\neg Q(f(x)), P(b, x)\}$. Geben Sie eine Resolutionswiderlegung von M an.

186. Gegeben ist die Klauselmenge $M_n = \{\{P(a)\}; \{\neg P(x), P(f(x))\}, \{\neg P(f^{2^n}(a))\}\}$ wobei $f^k(a)$ wie folgt definiert ist: $f^0(a)$ ist a und $f^{k+1}(a)$ ist $f(f^k(a))$. Geben Sie eine Resolutionswiderlegung von M_n mit $O(n)$ Schritten an. Zeigen Sie dass jede AL-Resolutionswiderlegung von $G(M_n)$ mindestens 2^n Schritte hat.

187. Sei H die Menge aller Formeln der Gestalt $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n \bigvee_{j=1}^m L_j$ für Quantoren $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und Literale L_j. Geben Sie einen Algorithmus an, der als Eingabe ein $\psi \in H$ erhält und feststellt, ob ψ allgemeingültig ist.
(Hinweis: Verwenden Sie die Klauselnormalform und Resolution)

Infinitäre Beweissysteme

Für jede partielle Ordung $(P, <)$ definieren wir den Begriff P-Beweis (oder genauer: $(P, <)$-Beweis) so: Ein P-Beweis ist eine (partielle) Funktion B von P in die Menge aller Formeln, die folgende Eigenschaft hat:

> Für alle p in dom(B) (dem Definitionsbereich von B) gilt: $B(p)$ ist ein logisches Axiom, oder es gibt $p_1, p_2 < p$ in dom(B), sodass $B(p)$ durch Modus Ponens aus $B(p_1)$ und $B(p_2)$ entsteht. (Das heißt: $B(p_1)$ hat die Form $\varphi \to \psi$, $B(p_2) = \varphi$, und $B(p) = \psi$.)

(Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir B auch als totale Funktion annehmen, da wir jede partielle Funktion durch die Definition „$B(p) := \top$ sonst“ zu einer totalen Funktion, die noch immer die obige Bedingung erfüllt, erweitern können.)
Wir nennen eine Formel φ P-beweisbar, wenn φ in einem P-Beweis vorkommt. Der in der Vorlesung betrachtete Beweisbarkeitsbegriff ist dann $(\mathbb{N}, <)$-Beweisbarkeit.

188. Sei $(P, <)$ wohlfundiert. (Das heißt: jede nichtleere Teilmenge von P hat mindestens ein minimales Element.) Wenn φ P-beweisbar ist, dann ist φ $\mathbb{N}$-beweisbar (also allgemeingültig).

189. Beschreiben Sie die Menge aller $(\mathbb{Q}, <)$-beweisbaren Formeln.

Wir betrachten die Sprache der Peano-Arithmetik: $0, 1, +, \cdot, \uparrow, \leq$. Mit PA_0 bezeichnen wir die Menge der Axiome für Nachfolger, Addition, Multiplikation, Exponentiation und Ordnung, also die PA-Axiome ohne die Induktionsaxiome. (Siehe http://dmg.tuwien.ac.at/goldstern/lgm/peano.pdf)
Wir schreiben Δ_n für den Term $0 + 1 + 1 + \cdots + 1$ (der in der natürlichen Interpretation den Wert n hat), also $\Delta_0 := 0$ und $\Delta_{n+1} := (\Delta_n) + 1$.
Unter der „natürlichen Interpretation“ dieser Sprache verstehen wir das Modell $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, mit den offensichtlichen Interpretationen: $+^{\mathbb{N}}$ ist die übliche Addition, etc.

190. Für jeden geschlossenen Term t gibt es genau eine Zahl n mit $\mathrm{PA}_0 \vdash t = \Delta_n$. (Und zwar: den Wert $t^{\mathbb{N}}$ in der natürlichen Interpretation unserer Sprache.)

191. Für jede geschlossene quantorenfreie Formel σ gilt: $\mathbb{N} \models \sigma$ genau dann, wenn $\mathrm{PA}_0 \vdash \sigma$.

192. Für jede geschlossene Formel $\forall x\, \varphi$ gilt $\mathbb{N} \models \forall x\, \varphi$ genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{N} \models \varphi(x/\Delta_n)$.

193. Wir betrachten das folgende Beweissystem: Sei $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der lexikographischen Ordnung. Ein $(\mathrm{PA}_0, P, \forall)$-Beweis ist eine (partielle) Funktion B von P in die Menge aller Formeln, wobei für alle $p \in P$ zumindest eine der folgenden Bedingungen gilt:
    - $B(p)$ ist ein logisches Axiom.
    - $B(p)$ ist ein Axiom in PA_0.
    - Es gibt $p_1, p_2 < p$, sodass $B(p)$ aus $B(p_1)$ und $B(p_2)$ durch Modus Ponens entsteht.
    - $B(p)$ ist von der Form $\forall x\, \psi$, und es gibt $p_0, p_1, p_2, \ldots < p$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $B(p_i)$ ist die Formel $\psi(\Delta_i)$.

In diesen Beweisen ist also neben Modus ponens noch eine „infinitäre“ Regel erlaubt, die man informell so umschreiben kann: „Wenn wir $\psi(x)$ für jede natürliche Zahl x bewiesen haben, dann haben wir auch $\forall x\ \psi(x)$ bewiesen.“

Mit P_k bezeichen wir die Menge aller Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i \leq k$; das sind $k + 1$ Kopien von $\mathbb{N}$ hintereinander. Der Begriff des $(\mathrm{PA}_0, P_k, \forall)$-Beweises ist in der offensichtlichen Weise definiert.

Zeigen Sie, dass die Menge aller $(\mathrm{PA}_0, P, \forall)$-beweisbaren Formeln genau die in $\mathbb{N}$ gültigen Formeln sind.

Hinweis: Die eine Richtung folgt leicht aus den vorigen Aufgaben. Für die andere Richtung: Es genügt, dies für Formeln in Pränexform zu zeigen. Zeigen Sie, dass für jede geschlossene Formel φ in Pränexform mit k Allquantoren gilt: Wenn $\mathbb{N} \models \varphi$, dann ist φ schon $(\mathrm{PA}_0, P_k, \forall)$-beweisbar.

Primitiv rekursive Funktionen

Wir nennen eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv (genauer: „primitiv rekursive Relation“, oder „primitiv rekursiv als Relation“), wenn ihre charakteristische Funktion χ_R primitiv rekursiv ist. ACHTUNG: Es gibt Funktionen, die zwar nicht primitiv rekursiv sind, die aber in diesem Sinn eine primitiv rekursive Relation sind.
In jeder der folgenden Aufgaben dürfen Sie die jeweils vorigen Aufgaben verwenden.

194. Zeigen Sie, dass mehrere der folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind: (Manche dieser Funktionen sind gelegentlich undefiniert, zB an der Stelle 0. Setzen Sie die Funktion so zu einer totalen Funktion fort, dass Sie von der Fortsetzung zeigen können, dass sie primitiv rekursiv ist.)

    Geben Sie explizit die primitiv rekursiven Funktionen h und g an, die Sie im Schema der primitiven Rekursion[3] verwenden.

    - Addition, Multiplikation, $n!$, modulo-Funktion, $\binom{n}{k}$
    - Die durch
    $$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{wenn } x \in A \\ h(x) & \text{sonst} \end{cases}$$
    definierte Funktion, wenn g, h pr.rek. Funktionen sind und A eine pr.rek. Menge.
    - Die charakteristische Funktion jeder endlichen Menge.
    - $(n, k) \mapsto (q, r)$ mit $qk + r = n$, $0 \leq r < k$.
    - $(n, k) \mapsto \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. (Gaußklammer)
    - $(n, k) \mapsto \max(0, \lfloor \frac{p(n)}{q(k)} \rfloor)$, wobei p und q beliebige Polynome mit ganzzahligen (möglicherweise negativen) Koeffizienten sind.
    - Die Funktion $(n, k) \mapsto k$-te Dezimalstelle von n.
    - $n \mapsto \lfloor \sqrt{2} * 10^n \rfloor$.
    - Eine geeignete (von Ihnen zu wählende) injektive (bijektive?) Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
    - Die Fibonacci-Folge $f(0) = f(1) = 1$, $f(n + 2) = f(n) + f(n + 1)$. (Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Funktion $n \mapsto 2^{f(n)} \cdot 3^{f(n+1)}$.)
    - Ihre Lieblingsfunktion. (Möglichst nichttrivial.)

195. Und noch von ein paar weiteren Funktionen dieser Liste.

[3] Gemeint ist eine Definition der Form $f(\vec{x}, 0) = h(\vec{x})$, $f(\vec{x}, y + 1) = g(\vec{x}, f(\vec{x}, y), y)$. Aus notationellen Gründen treten oft die als trivial geltenden Projektionen Π^n_k auf.

196. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Dann ist die auch die durch $(\Sigma f)(n) := \sum_{i<n} f(i)$ definierte Funktion auch primitiv rekursiv, und überdies (schwach) monoton wachsend.

     Sei umgekehrt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ schwach monoton wachsend. Wenn g primitiv rekursiv ist, dann ist auch die durch $(\Delta g)(n) := g(n+1) - g(n)$ definierte Funktion primitiv rekursiv.

197. Das Gleiche für „berechenbar“ statt „primitiv rekursiv“.

198. Analog für eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei $\Sigma f(\vec{x}, n) := \sum_{i<n} f(\vec{x}, i)$.

199. Es gibt eine nicht berechenbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Weiters: Es gibt eine nicht berechenbare totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die strikt monoton wachsend ist.

200. Es gibt eine nicht berechenbare totale Funktion $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass die durch $f_n(k) := g(n,k)$ und $h_k(n) := g(n,k)$ definierten Funktionen $f_0, f_1, \ldots, h_0, h_1, \ldots : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ alle berechenbar (sogar primitiv rekursiv) sind.
     Hinweis: Fassen Sie die Funktion aus der vorigen Aufgabe als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf.

201. Sei $E \subseteq \mathbb{N}^2$ primitiv rekursiv als Relation, und seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Dann ist auch $\{(n,k) : (f(n), g(k)) \in E\}$ primitiv rekursiv.

202. Sei $P \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Dann ist auch die Funktion

$$f(\vec{x}, z) = \min(\{y < z : (\vec{x}, y) \in P\} \cup \{z\})$$

     primitiv rekursiv.

Nachtrag: Elementare Untermodelle

203. Seien $\mathscr{M}_1 \leq \mathscr{M}_2$ mit folgender Eigenschaft: für alle k und endlichen Mengen $E \subseteq M_1$ der Größe k und für alle $b \in M_2$ gibt es einen Automorphismus $\pi : M_2 \to M_2$, der einerseits alle Elemente von E auf sich selbst abbildet, aber andererseits $\pi(b) \in M_1$ erfüllt.

     Zeigen Sie, dass dann $\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2$ gilt.

     (Hinweis: Induktion nach Aufbau von φ.)

204. Wir betrachten eine Sprache $\mathscr{L}$, die keine Konstanten und keine Funktionssymbole enthält, und als einziges Relationssymbol die Gleichheit. Seien $M_1 \subseteq M_2$ unendliche Mengen; wir fassen sie als $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}_1$ bzw. $\mathscr{M}_2$ auf. Verwenden Sie die vorige Aufgabe, um $\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2$ zu zeigen.

Programmierung

Sei $p : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ eine injektive primitiv rekursive Funktion, die außerdem $p(a,b,c) > \max(a,b,c)$ für alle a, b, c erfüllt.
Wir definieren eine Folge f_k von primitiv rekursiven Funktionen so:
f_0 ist die 0-stellige konstante Funktion 0, f_1 ist die 1-stellige konstante Funktion 0.
Für $n = p(a,b,c)$: Wenn $a = 0$, dann ist f_n die konstante b-stellige Funktion 0. Wenn $a = 1$, dann ist f_n die Nachfolgerfunktion $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wenn $a = 2$ und $b \geq c \geq 1$, dann ist $f_n = \pi^b_c$. Wenn $a = 3$, und $f_b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^\ell$, $f_c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, dann ist $f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^\ell \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^{\ell+1}$ als $f_n(\bar{x}) = (f_b(\bar{x}), f_c(\bar{x}))$. Wenn $a = 4$, $f_b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^\ell$, $f_c : \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}^n$, dann ist $f_n := f_c \circ f_b$. Wenn $a = 5$ und f_b $k+1$-stellig, f_c $k+2$-stellig, dann ist $f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch $f_n = PR(f_b, f_c)$ definiert. Sonst sei f_n die konstante einstellige Nullfunktion.

205. Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ genau die Menge aller primitiv rekursiven Funktionen ist, und dass es für jede primitiv rekursive Funktion f unendliche viele n mit $f = f_n$ gibt. (Und wenn das nicht stimmt, weil in der Definition der f_n eine Klausel fehlt, dann korrigieren Sie die Definition.)

206. Sei $F(n,k) := f_n(k)$, falls $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, und $F(n,k) = 0$, falls f_n nicht einstellig ist. Skizzieren Sie ein Programm P, das F berechnet (also bei Eingabe von n und k den Wert $F(n,k)$: ausgibt.

    Verwenden Sie Ihr Programm P, um ein neues Programm Q zu definieren, sodass die von Q berechnete Funktion f_Q total ist, aber mit keiner Funktion f_n übereinstimmt. (Oder sogar: $\forall n \forall k > n : f_Q(k) > f_n(k)$ erfüllt.)

Die Ackermannfunktion

Eine totale Funktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Ackermannfunktion, wenn sie für alle $x, y \in \mathbb{N}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

A.1 $a(0,y) = y+1$

A.2 $a(x+1,0) = a(x,1)$

A.3 $a(x+1,y+1) = a(x,a(x+1,y))$.

207. Zeigen Sie dass es

    (a) höchstens eine

    (b) mindestens eine

    Ackermannfunktion gibt. (Sobald wir dies bewiesen haben, geben wir der nun eindeutig bestimmten Ackermannfunktion den Namen A.)

    Ihr Beweis enthält vermutlich mehrere Hilfssätze, die Sie jeweils mit vollständiger Induktion beweisen. Geben Sie immer explizit an, von welcher Menge M sie die Eigenschaften $0 \in M$ und $x \in M \to x+1 \in M$ zeigen.

    (c) Berechnen (oder beschreiben) Sie $A(4, 2020)$.

    (d) Schreiben Sie ein Programm (bzw: skizzieren Sie einen Algorithmus) ohne rekursive Funktionsaufrufe, welches bei Eingabe x, y den Wert von $A(x,y)$ berechnet. (Sie dürfen davon ausgehen, dass Sie beliebig viel Speicherplatz zur Verfügung haben, etwa in Form von mehrdimensionalen Arrays.)

Für $c \in \mathbb{N}$ schreiben wir A_c für die Funktion $A_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $A_c(y) = A(c,y)$.
Für jede totale Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ schreiben wir $f < A_c$, wenn für alle $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ die Ungleichung $f(\vec{x}) < A_c(\max \vec{x})$ gilt.

208. Zeigen Sie, dass A in beiden Argumenten streng monoton ist; außerdem: dass $A(x,y+1) \leq A(x+1,y)$ für alle x, y gilt.

209. Seien $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^k \to N$ mit $f_1, \ldots, f_k, h < A_c$. Wenn[4] $g := h(f_1, \ldots, f_k)$, dann gibt es ein c' mit $g < A_{c'}$.

210. Wenn f durch primitive Rekursion aus h und g entsteht, und $h < A_c$, $g < A_c$ gilt, dann gibt es ein c' mit $f < A_{c'}$.

211. Schließen Sie aus den vorigen Aufgaben:

    a. Für jede primitiv rekursive Funktion f gibt es ein c mit $f < A_c$.

    b. Die Funktion $x \mapsto A(x,x)$ ist nicht primitiv rekursiv (aber berechenbar).

[4] $g := h(f_1, \ldots, f_k)$ ist Abkürzung für: $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : g(\vec{x}) = h(f_1(\vec{x}), \ldots, f_k(\vec{x}))$