Frage: Wenn auf einem Intervall I distributionell $u'' + u = 0$ gilt, wieso ist dann $u \in C^2(I)$?

Einfacher Fall: $u' + u = 0 \Rightarrow u \in C^\infty(I)$ $\quad (I \subset \mathbb{R} \ldots$ Intervall$)$

Mit $E(x) := e^x$ ist $(Eu)' = E'u + Eu' = E(u + u') = 0 \Rightarrow Eu = \text{const}$,

$\Rightarrow u = \text{const} \cdot E^{-1}$, d. h. $u \in C^\infty(I)$.

Allg. Fall: $u'' + u = 0 \Rightarrow u' = v,\ v' + u = 0$, d. h. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$

Suche eine reguläre Matrix $E(x)$ mit $E'(x) = E(x) \cdot A \quad (x \in I)$,

dann gilt $\left(E \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)' = E A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = E\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow E \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \text{const}$,

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E^{-1} \cdot \text{const}$, d. h. $u \in C^\infty(I)$ $\quad$ (analog für höhere Ableitungen)