Satz 2.4.6 Sei $M = (m_i)_{i\in I}$ eine Familie in $V$, und für ein fest gewähltes $j \in I$ sei die Teilfamilie $(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ linear unabhängig. Dann ist $M$ genau dann linear unabhängig, falls

$$m_j \notin [(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}]. \tag{2.20}$$

Beweis. (a) Falls $M$ l.u. ist, folgt (2.20) unmittelbar aus der Definition der linearen Unabhängigkeit.
Laut 2.4.1, ist $(m_i)_{i\in I}$ definitionsgemäß l.u., falls

$$\forall j \in I: \ m_j \neq \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i \text{ mit } x_i \in K.$$

Da die Hülle die Menge aller LK darstellt, folgt (2.20).

(b) Sei (2.20) erfüllt. Das wird „⇐". Wir betrachten eine beliebige Linearkombination

$$o = x_j m_j + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i m_i. \tag{2.21}$$

... Darin muss $x_j = 0$ gelten, da sich sonst $m_j$ – so wie im Beweis von Satz 2.4.4 – als Linearkombination der Teilfamilie $(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ schreiben ließe. Man könnte $x_j m_j$ nach links bringen, durch $x_j$ dividieren, weil $x_j \neq 0$ und hätte dann eine LK von $m_j$ gefunden, was aber (2.20) widerspräche. In (2.21) kann daher Summand $x_j m_j$ weggelassen werden. ... weil $x_j m_j = 0 m_j = 0$. Wenden wir Satz 2.4.5 auf die verbleibende Linearkombination an, so ergibt die lineare Unabhängigkeit der Teilfamilie $(m_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$, dass $x_i = 0$ für alle $i \in I \setminus \{j\}$ erfüllt ist. Das ist die Definition einer trivialen LK des $\mathcal{O}$. Somit ist (2.21) eine triviale Linearkombination des Nullvektors. Genau das sagt Satz 2.4.5 eh aus, LoL. Da wir von einer beliebigen Linearkombination des Nullvektors ausgegangen sind, ergibt Satz 2.4.5, dass M l.u. ist. $\mathcal{O}$ lässt sich ausschließlich trivial darstellen; ergo, M ist l.u. $\square$