Satz 1.11.11 Sei G eine Gruppe und U ein Normalteiler von G. Gemeinsam mit der Multiplikation

$$(aU)\cdot(bU) \overset{(*)}{:=} (ab)U \text{ für alle } aU, bU \in G/U \qquad (1.7)$$

wird G/U zu einer Gruppe.

Beweis. Wir zeigen, dass die obige Definition von der Auswahl der Repräsentanten a, b unabhängig ist. Wäre dem nicht so, würde die innere Verknüpfungsfunktion nicht wohldefiniert sein. Für $a' \overset{(**)}{=} au' \in aU$ folgt

$$(a'U)\cdot(bU) \overset{(1)}{=} (au'b)U \overset{(2)}{=} (au')(bU) \overset{(3)}{=} a(u'U)b \overset{(4)}{=} a(Ub) \overset{(5)}{=}$$

$(ab)U$,

da $u'U \overset{(i)}{=} U$ und $bU \overset{(ii)}{=} Ub$; $(1) \Leftarrow (*) \wedge (**)$, $(2) \Leftarrow$ $bU := \{bu : u \in U\} \wedge U \subseteq G$ Gruppe (assoziativ), $(3) \Leftarrow$ $(ii) \wedge (2)$, $(4) \Leftarrow (i) \wedge (2)$, $(5) \Leftarrow (ii) \wedge (2)$. analog gilt für $b'' = bu' \in bU$

$$(aU)\cdot(b''U) = (abu'')U = (ab)(u''U) = (ab)U.$$

Damit liegt eine innere Verknüpfung auf G/U vor. ... die jetzt ja, wie gesagt, wohldefiniert ist. Übrigens $G/U := G/{\sim_U}$ mit $a \sim_U b \Leftrightarrow ba^{-1} \in U \leq G$. Diese ist assoziativ, da wir in $abcU$ beliebig Klammern setzen können. Das folgt im Wesentlichen aus (2) oben (und der Assoziativität in U). Es ist $U = eU$ ein neutrales Element, und zu aU gibt $(a^{-1})U$ ein inverses Element ab. Das deckt alle Gruppen-Axiome, sowie deren Voraussetzung ab. $\square$