2.9.10 Lemma. Sind $x > 0$, $z > 0$ und $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, so gilt $\sqrt[q]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x}}$, $\sqrt[q]{xz} = \sqrt[q]{x}\sqrt[q]{z}$ sowie

$$\left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p}. \tag{2.12}$$

Beweis: $\sqrt[q]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x}}$ folgt aus $\left(\frac{1}{\sqrt[q]{x}}\right)^q = \frac{1}{(\sqrt[q]{x})^q} = \frac{1}{x}$ und der Tatsache, dass nach Satz 2.9.5 $\sqrt[q]{\frac{1}{x}}$ die eindeutige Lösung y von $y^q = \frac{1}{x}$ ist. Die Formel, aus der unsere Eigenschaft folgt gilt: Weil die erste Gleichheit mit der dritten Eigenschaft (2.5) im Buch auf Seite 36 gezeigt werden kann:
$x^{-p} = \frac{1}{x^p}$ und wir schreiben $x = \frac{1}{\hat{x}}$; $-p = \hat{p} \Leftrightarrow p = -\hat{p}$;
$\Rightarrow \left(\frac{1}{\hat{x}}\right)^{\hat{p}} = \frac{1}{(1/\hat{x})^{-\hat{p}}} = \frac{1}{\hat{x}^{\hat{p}}}$, wobei die letzte Gleichheit wieder durch (2.5) erklärbar ist. Die zweite Gleichheit der oberen Formel gilt, weil $\sqrt[q]{x}$ die eindeutige Lösung y von $y^q = x$ ist. Aus dieser Formel betrachtet man aber nur den ersten und letzten Term.

Wegen $\left(\sqrt[q]{x}\sqrt[q]{z}\right)^q = \left(\sqrt[q]{x}\right)^q\left(\sqrt[q]{z}\right)^q = xz$ muss $\sqrt[q]{x}\sqrt[q]{z}$ mit $\sqrt[q]{xz}$ übereinstimmen. Die Eigenschaft $(x \cdot y)^p = x^p \cdot y^p$ ist induktiv schnell bewiesen. Sie stimmt trivialerweise für $p = 0$ und $(x \cdot y)^{p+1} = (x \cdot y)^p (x \cdot y) \overset{IV}{=} x^p \cdot y^p \cdot x \cdot y = x^{p+1} \cdot y^{p+1}$, sowie $(x \cdot y)^{p-1} = (x \cdot y)^p (x \cdot y)^{-1} \overset{IV}{=} x^p \cdot y^p \cdot 1/(x \cdot y)^1 = x^p \cdot y^p \cdot \frac{1 \cdot 1}{x^1 \cdot y^1} = x^p \cdot y^p \cdot \frac{1}{x^1} \cdot \frac{1}{y^1} = x^p \cdot y^p \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = x^{p-1} \cdot y^{p-1}$. Weil $q \in \mathbb{N}$, ist x^q injektiv und $xz = \left(\sqrt[q]{xz}\right)^q$, daher $\left(\sqrt[q]{x}\sqrt[q]{z}\right)^q = \left(\sqrt[q]{xz}\right)^q \Rightarrow \sqrt[q]{x}\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{xz}$.

Ist $p = 0$, so ist (2.12) trivialerweise richtig, da ja $\sqrt[q]{1} = 1$.
$\left(\sqrt[q]{x}\right)^0 = 1 = \sqrt[q]{x^0} = \sqrt[q]{1} = 1^q$, eindeutige Lösung blabla.

Sonst folgt (2.12) aus $\left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right)^q = \left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^q\right)^p = x^p$ (siehe (2.5)) und der Tatsache, dass nach Satz 2.9.5 $\sqrt[q]{x^p}$ die eindeutige Lösung y von $y^q = x^p$ ist. Ok. $\square$