1.Test der Übung zu Analysis 1, Gruppe A, 28.10.2011

1. (a) Sei $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper. Man leite aus der Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion auf K folgende Aussage mittels vollständiger Induktion her:

   Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $a_1, a_2, a_3, \ldots \in K$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \,. \tag{1}$$

   (b) Weiters zeige man mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \,. \tag{2}$$

2. Sei $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper. Man bestimme die Menge aller oberen Schranken und die Menge aller unteren Schranken der Teilmenge

$$M := \{0_K\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1_K}{n \cdot 1_K}, 1_K\right) \cup [2_K, 3_K) \subset K.$$

   Hat diese Menge ein Infimum/Supremum in K? Falls ja, dann bestimme man diese und überprüfe, ob diese auch Minimum bzw. Maximum von M sind! Begründen Sie alle ihre Antworten!

Lösung zu Aufgabe 1a

Die Dreiecksungleichung in einem angeordneten Körper $(K, +, \cdot, P)$ wurde in Lemma 2.2.11 (iii) bewiesen:

$$\text{Für } x, y \in K \text{ gilt} \quad |x + y| \le |x| + |y| \,. \tag{3}$$

Beweis der Aussage (1) mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Die Aussage $A(n_0)$ ist wahr.
Für $n_0 = 2$, gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right| &= |a_1 + a_2| \\
\text{(wegen Dreiecksungleichung (3))} &\le |a_1| + |a_2| = \sum_{j=1}^{n_0} |a_j| \,.
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Ist $A(n)$ wahr für $n \ge n_0$, dann ist $A(n+1)$ wahr.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n+1} a_j\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}\right| \\
\text{(wegen Dreiecksungleichung (3))} &\le \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| + |a_{n+1}| \\
\text{(wegen Induktionsvoraussetzung)} &\le \sum_{j=1}^{n} |a_j| + |a_{n+1}| \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} |a_j| \,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1b

Beweis der Aussage (2) mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Die Aussage $A(n_0)$ ist wahr.
Für $n_0 = 1$ gilt,

$$\sum_{k=1}^{2n_0} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = (-1)^2 \frac{1}{1} + (-1)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{n_0 + k} \,.$$

Induktionsschritt: Ist $A(n)$ wahr für $n \ge n_0$, dann ist $A(n+1)$ wahr.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2(n+1)}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \\
\text{(wegen Induktionsvoraussetzung)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + \sum_{k=2n+1}^{2(n+1)}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + \underbrace{(-1)^{2n+2}}_{=1}\frac{1}{2n+1} + \underbrace{(-1)^{2n+3}}_{=-1}\frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
\text{(Indexverschiebung } k = l+1\text{)} &= \sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{n+l+1} + \frac{1}{(n+1)+n} - \frac{1}{(n+1)+n+1} \\
&= \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{(n+1)+l} + \frac{1}{(n+1)+n}} - \frac{1}{(n+1)+n+1} \\
&= \sum_{l=0}^{n}\frac{1}{(n+1)+l} - \frac{1}{(n+1)+n+1} \\
\text{(Erweiterung der Partialsumme)} &= \sum_{l=0}^{n+1}\frac{1}{(n+1)+l} \underbrace{- \frac{1}{(n+1)+n+1} - \frac{1}{(n+1)+n+1}}_{=-\frac{1}{n+1}} \\
\text{(Erster Summand der Partialsumme fällt weg)} &= \sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{(n+1)+l}\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 2

Wir zeigen zunächst: 0_K ist das Minimum von M. Sei dazu $m \in M$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- 1. Fall: $m \in \{0_K\}$
  Damit ist $m = 0_K$, also $0_K \leq m$.
- 2. Fall: $m \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1_K}{n\cdot 1_K}, 1_K)$
  Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{1_K}{n\cdot 1_K}$. Da bekanntermaßen gilt: $0_K < 1_K \leq n \cdot 1_K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt $0 < \frac{1_K}{n\cdot 1_K}$ und damit aus der Transitivität der Ordnung $m > 0_K$.
- 3. Fall: $m \in [2_K, 3_K)$
  Es folgt sofort $m > 2_K > 0_K$.

Insgesamt ergibt sich also $m \geq 0_K$ für alle $m \in M$. Es bleibt zu zeigen, dass es keine untere Schranke $a > 0_K$ geben kann. Das ist aber sofort ersichtlich, denn $0_K \in M$, und damit ist $a > 0_K$ bereits ein Widerspruch dazu, dass a eine untere Schranke ist.
Es ist also 0_K das Minimum von M. Das Infimum ist damit gleich dem Minimum, $\inf M = 0_K$. Da dies die größte untere Schranke ist ergibt sich aus der Transitivität sofort, dass $(-infty, 0_K]$ die Menge der unteren Schranken ist.
Als nächstes zeigen wir: 3_K ist das Supremum von M. Sei dazu erneut $m \in M$. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung:

- 1. Fall: $m \in \{0_K\}$
  Damit ist $m = 0_K$, und $3_K > 0_K = m$.
- 2. Fall: $m \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1_K}{n\cdot 1_K}, 1_K)$
  Dann gilt aber $m < 1_K < 3_K$.
- 3. Fall: $m \in [2_K, 3_K)$
  Es folgt sofort $m < 3_K$ aus der Definiton von Intervallen.

Insgesamt erhalten wir $3_K > m$ für alle $m \in M$, d.h. 3_K ist eine obere Schranke. Angenommen es gäbe ein $a < 3_K$, dass ebenfalls obere Schranke ist. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- 1. Fall: $a < 2_K$.
  Da $2_K \in [2_K, 3_K) \subset M$ ist dies ein Widerspruch.
- 2. Fall: $a \geq 2_K$.
  Dann ist $a \in [2_K, 3_K)$, also auch $b := \frac{a+3_K}{2_K} \in [2_K, 3_K) \subset M$. Da aber $b > a$ gilt ist dies erneut ein Widerspruch.

Wir haben also gezeigt: 3_K ist die kleinste obere Schranke und damit das Supremum von M. Da $3_K \notin M$ existiert kein Maximum. Die Menge der oberen Schranken ergibt sich aufgrund der Transitivität der Ordnung als $[3_K, \infty)$.

1.Test der Übung zu Analysis 1, Gruppe B, 28.10.2011

1. (a) Sei $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper. Man leite folgende Aussage mittels vollständiger Induktion her:
   Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ gilt
   $$n^2 < 2^n\,. \tag{4}$$
   (b) Weiters zeige man mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
   $$\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{5}$$

2. Sei $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper. Man bestimme die Menge aller oberen Schranken und die Menge aller unteren Schranken der Teilmenge
   $$M := \bigcup_{x\in K, x<-1_K} (x, -1_K) \cup \{-1_K - \frac{1_K}{n\cdot 1_K} | n \in \mathbb{N}\} \cup [3_K, 4_K) \subset K.$$
   Hat diese Menge ein Infimum/Supremum in K? Falls ja, dann bestimme man diese und überprüfe, ob diese auch Minimum bzw. Maximum von M sind! Begründen Sie alle ihre Antworten!

Lösung zu Aufgabe 1a siehe 3.Übungsblatt Aufgabe 3a)

Lösung zu Aufgabe 1b

Beweis der Aussage (5) mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Die Aussage $A(n_0)$ ist wahr.
Für $n_0 = 1$ gilt,

$$\sum_{k=2}^{n_0+1}(k-1)^2 = \sum_{k=2}^{2}(k-1)^2 = (2-1)^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}\,.$$

Induktionsschritt: Ist $A(n)$ wahr für $n \geq n_0$, dann ist $A(n+1)$ wahr.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{(n+1)+1}(k-1)^2 &= \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 + ((n+2)-1)^2 \\
\text{(wegen Induktionsvoraussetzung)} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Wir zeigen zunächst mittels Widerspruch, dass M nach unten unbeschränkt ist:
Annahme: $\exists y \in K \forall m \in M : m \geq y$.

- 1. Fall: $y \geq -1_K$.
  Da $-1_K - 1_K \in M$ und $-2_K < -1_K \leq y$ ist dies ein Widerspruch.

- 2. Fall: $y < -1_K$.
  Da dann auch $y - 1_K < -1_K$ gilt, ist $(y - 1_K, -1_K) \subset M$, d.h. $y - \frac{1_K}{2_K} \in M$. Das ist Widerspruch, da $y > y - \frac{1_K}{2_K}$.

Nun zeigen wir: 4_K ist die kleinste obere Schranke. Sei dazu zunächst $m \in M$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

- 1. Fall: $m \in \bigcup\limits_{x \in K, x < -1_K} (x, -1_K)$
  Damit existiert $x \in K$, so dass $m \in (x, -1_K)$, d.h. $m < -1_K < 4_K$.

- 2. Fall: $m \in \{-1_K - \frac{1_K}{n \cdot 1_K} | n \in \mathbb{N}\}$
  . Da wie gezeigt stets gilt $0_K < 1_K \leq n_K$, ist $0 < \frac{1_K}{n \cdot 1_K} \leq 1$, d.h. für $m = -1_K - \frac{1_K}{n \cdot 1_K}$ gilt $m < -1_K < 4_K$.

- 3. Fall: $m \in [3_K, 4_K)$
  Es folgt sofort $m < 4_K$ aus der Definition von Intervallen.

Insgesamt ergibt sich also $m < 4_K$ für alle $m \in M$. Damit ist 4_K obere Schranke. Angenommen es gäbe ein $y < 4_K$, das ebenfalls obere Schranke ist. Wir machen erneut eine Fallunterscheidung:

- 1.Fall $y < 3_K$
  Da $3_K \in M$ ist dies ein Widerspruch.

- 2. Fall $y \geq 3_K$.
  Wegen $3_K \leq y < 4_K$ gilt auch $3_K \leq y < \frac{y+4_K}{2_K} < 4_K$. Damit ist $\frac{y+4_K}{2_K} \in [3_K, 4_K)$, also ein Element von M. Da zudem gilt $y < \frac{y+4_K}{2_K}$ ist dies jedoch ein Widerspruch zu der Tatsache, dass y eine obere Schranke ist.

Wir haben bewiesen: 4_K ist die kleinste obere Schranke. Aufgrund der Transitivität ist damit $\{y \in K | y \geq 4_K\} = [4_K, \infty)$ die Menge der oberen Schranken. Da es keine unteren Schranken gibt, existiert auch kein Infimum. Das Supremum ist nach Definition die kleinste obere Schranke, also 4_K. Da $4_K \notin M$ existiert kein Maximum.