UE DGA WS2020-2021
Übungsblatt 4

Aufgabe 19:

Lösen Sie die Rekursion $na_n = (n+1)a_{n-1} + 2n$ mit $a_0 = 0$.

Aufgabe 20:

Lösen Sie folgendes System von Rekursionen

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 4a_n - b_n, \quad \text{für } n \geq 1$$

mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1, b_0 = 0$ indem Sie das System in eine äquivalente Rekursion 2. Ordnung umformen.

Aufgabe 21:

Gegeben sei die durch folgenden Algorithmus definierte Funktion

F(n, a, b, c)
if n=0 **then**
    return 1
end if
if n=1 **then**
    return 2
end if
$A =$F$(n-2, b, c, a)$
$B =$F$(n-2, c, a, b)$
$C =$F$(n-2, b, a, c)$
if F$(n-1, A, B, C) \equiv 0 \pmod 3$ **then**
    return F$(n-1, A-1, B, C+1)$+F$(0, A, B, C)$
else
    return F$(n-1, B-1, A+B+C, A \cdot C)$+F$(0, A, B, C)$
end if

Bezeichne $a(n)$ die Anzahl der Aufrufe von F$(0, x, y, z)$ mit irgendwelchen Parametern x, y und z bei der Berechnung von F(n, a, b, c). Bestimmen Sie eine Rekursionsgleichung (inklusive Anfangsbedingungen) für $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ und lösen Sie diese.

Aufgabe 22:

Die Türme von Hanoi: Gegeben seien drei Stäbe A, B, C und n verschieden große Scheiben. Anfangs seien alle Scheiben der Größe nach auf Stab A aufgereiht, die größte ganz unten. Dieser Turm von Scheiben soll nun unter folgenden Regeln von A nach B transferiert werden:

- In jedem Zug darf nur eine Scheibe bewegt werden.

- Eine größere Scheibe darf nie über einer kleineren platziert werden.

Sei a_n die minimale Anzahl der benötigten Züge. Ermitteln Sie a_n durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion.

Aufgabe 23:

Im Übungsblatt 3 haben wir gesehen, wie sich die Fibonacci-Zahlen mithilfe von Potenzen der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ effizient berechnen lassen. Man kann diese Methode adaptieren, um Zahlenfolgen, die andere Rekursionsgleichungen erfüllen, zu berechnen. Wir betrachten im Folgenden die Potenzen der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiere

$$M_n := M^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

und betrachte die Koeffizienten dieser Matrix.

a Geben Sie eine Rekursion für die Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ an.

b Lösen Sie diese Rekursion, um eine explizite Formel für a_n zu enthalten.

c Geben Sie einen Algorithmus zur effizienten Berechnung von M^n an und analysieren sie dessen Laufzeit in Abhängigkeit von n (O-Notation genügt).

Aufgabe 24:

a Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 2$ und $T(n) = T(n-1)+2$ für $n \geq 2$, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie ihr Ergebnis anschließend mit der Substitutionsmethode.

b Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 2$ und $T(n) = 3T(n-1)+2$ für $n \geq 2$, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie ihr Ergebnis anschließend mit der Substitutionsmethode.