Satz 3.2.6 Sei $f \in L(V, W)$. Ferner sei $\dim V < \infty$ oder $\dim W < \infty$. Dann ist der Bildraum $f(V)$ endlichdimensional, und es gilt:

(a) f ist genau dann injektiv, falls $\dim V = \dim f(V)$.

(b) f ist genau dann surjektiv, falls $\dim f(V) = \dim W$.

(c) f ist genau dann bijektiv, falls $\dim V = \dim f(V) = \dim W$.

Beweis. Wir schließen an den Beweis von Satz 3.2.5 an und wählen eine Basis $(b_i)_{i \in I}$ von V. Es gibt eine Basis und alle haben gleich viele Elemente. Da neben (3.3) auch $f(V) \subset W$ erfüllt ist, gilt mindestens eine der Ungleichungen

$$\dim f(V) \leq \# I = \dim V < \infty,$$
$$\dim f(V) \leq \dim W < \infty.$$

(3.3) besagt $f(V) = f([(b_i)_{i \in I}]) = [(f(b_i))_{i \in I}]$.
Erstere Ungleichung gilt, weil f nur kollabieren kann, aber nicht erweitern. Daher werden keine neuen Basisvektoren hinzugefügt und dim wird nicht größer.
Weil $f(V)$ ein Unterraum von W ist, ist $\forall v \in f(V): v \in W$ und somit kann keine Basis von $f(V)$ größer also $\dim W$ sein.
Somit ist in jedem Fall $\dim f(V) < \infty$. ...
(a) Nach Satz 3.2.5 (a) ist f genau dann injektiv, falls $(f(b_i))_{i \in I}$ l.u. ist. ... Dies trifft gemäß (3.3) genau dann zu, falls eine Basis von $f(V)$ vorliegt.

Gemäß (3.3) ist $(f(b_i))_{i\in I}$ ein ES von $f(V)$, also ist $(f(b_i))_{i\in I}$ l.u. $\Leftrightarrow$ $(f(b_i))_{i\in I}$ Basis. Wegen $f(V) < \infty$ können wir den zweiten Teil von Satz 2.6.6 anwenden: Das Erzeugendensystem $(f(b_i))_{i\in I}$ ist genau dann eine Basis von $f(V)$, falls $\# I = \dim f(V)$. Satz 2.6.6 bezieht sich auf einen VR und $f(V)$ ist einer. Letzteres ist zu $\dim V = \dim f(V)$ äquivalent, da $\dim V = \# I$ gilt. $(b_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V und $\dim V$ ist die Anzahl ihrer Elemente.

(b) Nach Satz 3.2.5 (b) ist f genau dann surjektiv, falls $(f(b_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von W ist, was gemäß (3.3) zu $f(V) = W$ äquivalent ist. Nochmal (3.3) $\Leftrightarrow$ $f(V) = f([(b_i)_{i\in I}]) = [(f(b_i))_{i\in I}]$ $(= W)$, wobei letzteres genau dann gilt, wenn $f(V) = W$ bzw. $(f(b_i))_{i\in I}$ ES von W ist. Wegen $\dim f(V) < \infty$ können wir die Kontraposition des zweiten Teiles von Satz 2.6.7 anwenden: $f(V) = W$ ist genau dann erfüllt, falls $\dim f(V) = \dim W$. „Es ist $U_1 \subsetneq U_2$ genau dann, falls mindestens eine Basis von U_1 kein Erzeugendensystem von U_2 ist, was zu $\dim U_1 < \dim U_2$ äquivalent ist."
Also $(f(V) \subsetneq W \Leftrightarrow \dim f(V) < \dim W) \Rightarrow$ oben.

(c) folgt aus (a) und (b). ... $\square$