Kapitel 11

Periodische Lösungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Existenz periodischer Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x + b(t),$$

mit τ-periodischen Funktionen $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Wir untersuchen ferner das Stabilitätsverhalten periodischer Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ für τ-periodische Funktionen $f(t + \tau, x) = f(t, x)$, welche stetig in t und stetig differenzierbar in x sind. Wir werden sehen, dass sich das Stabilitätsverhalten grundlegend ändert, wenn man die Funktion $f(t, x)$ durch eine autonome Funktion $f(x)$ ersetzt.

Bevor wir mit der eigentlichen Existenz- und Stabilitätstheorie periodischer Lösungen starten können, benötigen wir den Funktionalkalkül und beweisen außerdem den spektralen Abbildungssatz für beschränkte lineare Operatoren in $\mathbb{C}^n$.

11.1 Der Funktionalkalkül

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph in einer offenen Umgebung $U \supset \sigma(A)$. Diese Funktionen bilden eine Algebra, die wir mit $\mathcal{H}(U)$ bezeichnen. Für solche f lässt sich in eindeutiger Weise ein $f(A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definieren. Die Abbildung $\Phi : \mathcal{H}(U) \to \mathbb{C}^{n \times n}$, $f \mapsto f(A)$, heißt *Funktionalkalkül*. Sie besitzt sehr schöne Eigenschaften, die in der Analysis sehr nützlich sind.

Ist $U = B_R(0) \supset \sigma(A)$ eine Kugel so besitzt $f \in \mathcal{H}(U)$ eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k$, deren Konvergenzradius $\geq R$ ist. Dann ist die Definition

$$f(A) = \sum_{k \geq 0} f_k A^k$$

natürlich, und diese Reihe ist absolut konvergent, da der Spektralradius $r(A)$ von A kleiner als R ist. Ein Beispiel, dass wir schon in Kapitel 3 betrachtet haben, ist

J. W. Prüss, M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*,
Grundstudium Mathematik, DOI 10.1007/978-3-0348-0002-0_11, © Springer Basel AG 2010

$f_t(z) = e^{zt}$, mittels der Exponentialreihe hatten wir ein Fundamentalsystem für die Gleichung $\dot{x} = Ax$ gefunden.

Allgemeiner hilft hier die folgende Konstruktion, die auf Funktionentheorie basiert. Sei $U \supset \sigma(A)$ fixiert. Wähle eine rechtsorientierte Jordan-Kurve $\Gamma \subset U \setminus \sigma(A)$ so, dass die Windungszahl $n(\Gamma, \lambda) = 1$ für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Solche Kurven nennen wir *zulässig*. Γ muss nicht unbedingt zusammenhängend sein, z.B. könnte Γ aus r kleinen Kreisen um die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von A bestehen. Für $f \in \mathcal{H}(U)$, definieren wir

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z-A)^{-1} dz. \tag{11.1}$$

Man beachte, dass die Resolvente $(z-A)^{-1}$ von A auf der *Resolventenmenge*, also der offenen Menge $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ wohldefiniert und holomorph ist. Daher ist diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl von Γ, ein Dankeschön an den Integralsatz von Cauchy.

Ist f holomorph in $B_R(0)$, $R > r(A)$, so kann man als Kurve Γ den Kreis $\Gamma = \partial B_r(0)$ wählen, wobei $r(A) < r < R$ ist. Ist $f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k$ die Potenzreihe von f, so folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z-A)^{-1} dz = \sum_{k \geq 0} f_k A_k = \sum_{k \geq 0} f_k A^k,$$

denn es ist

$$A_k := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^k (z-A)^{-1} dz = A^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

was man leicht mittels der Identität $z(z-A)^{-1} = I + A(z-A)^{-1}$, dem Integralsatz von Cauchy und Induktion sieht. Daher ist die Definition von $f(A)$ in (11.1) konsistent mit der für Potenzreihen.

Die Abbildung $\Phi : \mathcal{H}(U) \to \mathbb{C}^{n \times n}$ definiert durch $\Phi(f) = f(A)$ ist offenbar linear und stetig. Sie ist aber auch multiplikativ und daher ein *Algebrenhomomorphismus*. Dies sieht man folgendermaßen: Sei Γ' eine weitere zulässige Kurve, sodass Γ innerhalb von Γ' liegt; es ist dann $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \Gamma'$, und $n(\Gamma', z) = 1$ für alle $z \in \Gamma$. Sind nun $f, g \in \mathcal{H}(U)$, so gilt mit der Resolventengleichung $(z-A)^{-1}(w-A)^{-1} = (w-z)^{-1}[(z-A)^{-1} - (w-A)^{-1}]$, dem Satz von Fubini und dem Residuensatz:

$$
\begin{aligned}
f(A)g(A) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} f(z)g(w)(z-A)^{-1}(w-A)^{-1}dwdz \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} f(z)g(w)(w-z)^{-1}(z-A)^{-1}dwdz \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} f(z)g(w)(w-z)^{-1}(w-A)^{-1}dwdz \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(z)[\int_{\Gamma'} g(w)(w-z)^{-1}dw](z-A)^{-1}dz \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'} g(w)[\int_\Gamma f(z)(w-z)^{-1}dz](w-A)^{-1}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)g(z)(z-A)^{-1}dz = (f\cdot g)(A).
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist die Algebra $\Phi(\mathcal{H}(U)) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ kommutativ.

Die Tatsache, dass Φ ein Algebrenhomomorphismus ist, hat wichtige Konsequenzen. Dazu sei $\lambda \in \sigma(A)$ und $Av = \lambda v$, $v \neq 0$. Dann ist $(z-A)^{-1}v = (z-\lambda)^{-1}v$ für $z \in \rho(A)$. Folglich gilt mit der Cauchyformel

$$f(A)v = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-\lambda)^{-1}vdz = f(\lambda)v.$$

Damit ist $f(\lambda)$ Eigenwert von $f(A)$, d.h. es gilt $f(\sigma(A)) \subset \sigma(f(A))$. Sei umgekehrt $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \notin f(\sigma(A))$. Dann ist die Funktion $g(z) = 1/(\mu - f(z))$ in einer Umgebung U von $\sigma(A)$ holomorph, und mit der Multiplikativität des Funktionalkalküls erhalten wir

$$g(A)(\mu - f(A)) = [g\cdot(\mu - f)](A) = 1(A) = I,$$

also ist $\mu - f(A)$ invertierbar. Damit haben wir den *Spektralabbildungssatz* bewiesen:

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)), \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H}(U). \tag{11.2}$$

Sei nun allgemeiner $(\lambda - A)^k v = 0$. Mittels Induktion folgt dann

$$(z-A)^{-1}v = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(z-\lambda)^{-j-1}(\lambda-A)^j v,$$

und daher mit Cauchy's Integralformel

$$
\begin{aligned}
f(A)v &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-\lambda)^{-j-1}dz](\lambda-A)^j v \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(\lambda-A)^j v.
\end{aligned}
$$

Speziell für $k = 2$ ergibt dies

$$(f(\lambda) - f(A))v = f'(\lambda)(\lambda - A)v, \quad (f(\lambda) - f(A))^2 v = (f'(\lambda))^2(\lambda - A)^2 v. \tag{11.3}$$

Es folgt $f(A)N((\lambda - A)^k) \subset N((\lambda - A)^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, insbesondere lässt $f(A)$ alle verallgemeinerten Eigenräume von A invariant.

Sei nun jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $f(\lambda) = \mu$ halbeinfach für A, und sei $f'(\lambda) \neq 0$ auf $f^{-1}(\mu) \cap \sigma(A)$. Ist $(\mu - f(A))^2 v = 0$, so folgt $(\mu - f(A))^2 v_j = 0$ für jedes $v_j \in N(\lambda_j)$, $f(\lambda_j) = \mu$, da die verallgemeinerten Eigenräume linear unabhängig sind. (11.3) impliziert $(\lambda_j - A)^2 v_j = 0$ also $(\lambda_j - A)v_j = 0$ und dann mit (11.3) auch $(\mu - f(A))v_j = 0$. Daher ist der Eigenwert μ halbeinfach für $f(A)$. Ebenso sieht man die Umkehrung: Ist $(\lambda - A)^2 v = 0$ für ein $\lambda \in f^{-1}(\mu)$, dann mit (11.3) $(\mu - f(A))^2 v = 0$. Ist μ halbeinfach für $f(A)$ so folgt $(\mu - f(A))v = 0$ und dann mit (11.3) und $f'(\lambda) \neq 0$ auch $(\lambda - A)v = 0$.

Wir fassen das bewiesene im folgenden Satz zusammen.

Satz 11.1.1. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und $U \supset \sigma(A)$ offen. Dann ist der Funktionalkalkül $\Phi : \mathcal{H}(U) \to \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert durch*

$$\Phi(f) = f(A) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z - A)^{-1}$$

ein Algebrenhomomorphismus. Die Abbildung Φ hat die folgenden Eigenschaften:

1. *$\phi(\mathcal{H}(U))$ ist eine kommutative Unteralgebra von $\mathbb{C}^{n\times n}$.*
2. *Es gilt $\Phi(z^k) = A^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*
3. *$f(A)N((\lambda - A)^k)) \subset N((\lambda - A)^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \sigma(A)$, $f \in \mathcal{H}(U)$.*
4. *$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ für alle $f \in \mathcal{H}(U)$ (Spektralabbildungssatz).*
5. *Gelte $f'(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in f^{-1}(\mu) \cap \sigma(A)$.*
   (a) *μ ist genau dann halbeinfacher Eigenwert für $f(A)$, wenn jedes $\lambda \in f^{-1}(\mu) \cap \sigma(A)$ halbeinfach für A ist.*
   (b) *Es gilt $N(\mu - f(A)) = \bigoplus_{f(\lambda)=\mu} N(\lambda - A)$.*

11.2 Floquet-Theorie

Seien $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$ und $b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ τ-periodisch. In diesem Abschnitt untersuchen wir das lineare System

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(0) = x_0, \tag{11.4}$$

und das zugehörige lineare homogene System

$$\dot{y} = A(t)y, \quad y(0) = y_0. \tag{11.5}$$

Es sei $Y(t)$ ein reelles Fundamentalsystem für (11.5), es gelte also $\det Y(0) \neq 0$ und $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t),\ t \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 3.1.2 erfüllt die Funktion $\varphi(t) = \det Y(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi} = \operatorname{sp} A(t)\varphi, \tag{11.6}$$

insbesondere ist $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Auf Grund der Periodizität von $A(t)$ ist $Z(t) = Y(t+\tau)$ wieder ein Fundamentalsystem für (11.5), denn es ist $\det Z(0) = \det Y(\tau) = \varphi(\tau) \neq 0$ und

$$\dot{Z}(t) = \dot{Y}(t+\tau) = A(t+\tau)Y(t+\tau) = A(t)Z(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Daher gibt es eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $Y(t+\tau) = Y(t)M$ und $\det M \neq 0$. Ist $Z(t)$ ein weiteres Fundamentalsystem, so gilt einerseits $Z(t+\tau) = Z(t)\tilde{M}$ mit einer regulären Matrix $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und andererseits $Z(t) = Y(t)C$, $\det C \neq 0$, folglich

$$Z(t+\tau) = Y(t+\tau)C = Y(t)MC = Z(t)C^{-1}MC = Z(t)\tilde{M}.$$

Die Matrix M ist also bis auf Ähnlichkeitstransformationen eindeutig bestimmt.

Sei $Y_0(t)$ das Fundamentalsystem von (11.5) mit $Y_0(0) = I$. Die zugehörige Matrix $M_0 = Y_0(\tau)$, die also der Relation $Y_0(t+\tau) = Y_0(t)M_0$ genügt, heißt **Monodromie-Matrix** von (11.5) und ihre Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_r$ heißen **Floquet-Multiplikatoren**. Man beachte, dass die Beziehung

$$\prod_{j=1}^{r} \mu_j^{\kappa_j} = \det Y_0(\tau) = e^{\int_0^\tau \operatorname{sp} A(t)dt} > 0, \tag{11.7}$$

gilt, wobei κ_j die algebraische Vielfachheit von μ_j angibt. Insbesondere sind alle Eigenwerte der Matrix M_0 von Null verschieden. Da $A(t)$ hier als reell angenommen wurde, ist die Anzahl aller negativen Eigenwerte μ_j (mit Vielfachheit gezählt) gerade. Ist v_j ein Eigenvektor von M_0 zum Eigenwert μ_j, so erfüllt die Lösung $y_j(t) = Y_0(t)v_j$ die Differentialgleichung (11.5) und es ist $y_j(\tau) = \mu_j v_j$. Man kann die Floquet-Multiplikatoren auch auf diese Weise definieren.

Für die eigentliche Floquet-Theorie benötigen wir nun die Tatsache, dass jede invertierbare Matrix M einen Logarithmus in folgendem Sinne besitzt. Es existiert eine Matrix $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $M = e^L$. Die Matrix L ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt und komplex-wertig. Man erhält eine solche Matrix L mit dem Funktionalkalkül

$$\log M = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-M)^{-1}\log z dz. \tag{11.8}$$

Dabei ist z.B. $\log z$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus und Γ bezeichnet eine Jordan-Kurve, welche alle Eigenwerte $\lambda \in \sigma(M)$ rechtssinnig umrundet, sodass die 0 im Außengebiet von Γ liegt. Eine solche Kurve Γ existiert stets, da $\det M \neq 0$ gilt. Je nach Wahl von Γ erhält man unterschiedliche Logarithmen.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Frage, ob eine reelle Matrix M mit $\det M \neq 0$ einen reellen Logarithmus besitzt. Schon das eindimensionale Beispiel $M = -1$ zeigt, dass die Antwort auf diese Frage im Allgemeinen negativ ausfällt. Tatsächlich ist $\det M > 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz eines reellen Logarithmus von M. Denn ist M reell und existiert eine reelle Matrix L mit $M = e^L$, so folgt $\det M = \det e^L = e^{\operatorname{sp} L} > 0$. Die Bedingung $\det M > 0$ ist aber keineswegs hinreichend, wie das Beispiel

$$M = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0,\ \alpha \neq \beta,$$

aus Übung 11.1 zeigt. Dass die Verhältnisse für Monodromie-Matrizen nicht besser sind, zeigt das

Beispiel.

$$\ddot{x} + (\cos^2 t - 2)\dot{x} + (2 - \cos^2 t + \sin t \cos t)x = 0.$$

Die dazugehörige Matrix für das äquivalente System erster Ordnung ist durch

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 + \cos^2 t - \sin t \cos t & 2 - \cos^2 t \end{bmatrix}$$

gegeben. Die Matrix $A(t)$ ist τ-periodisch, mit der Periode $\tau = \pi$. Man rechnet leicht nach, dass eine Lösung durch die Funktion $x_1(t) = e^t \cos t$ gegeben ist. Nun ist $\dot{x}_1(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, also

$$\begin{bmatrix} x_1(\pi) \\ \dot{x}_1(\pi) \end{bmatrix} = e^\pi \begin{bmatrix} \cos \pi \\ \cos \pi \end{bmatrix} = -e^\pi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -e^\pi \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \dot{x}_1(0) \end{bmatrix},$$

das heißt, $\mu_1 = -e^\pi$ ist ein Floquet-Multiplikator. Den zweiten Multiplikator erhält man aus dem Ansatz

$$\mu_1 \mu_2 = \det M = e^{\int_0^\pi \operatorname{sp} A(s) ds} = e^{2\pi - \int_0^\pi \cos^2 s ds} = e^{3\pi/2},$$

also $\mu_2 = -e^{\pi/2}$. Die Monodromie-Matrix M ist daher ähnlich zu

$$\begin{bmatrix} -e^\pi & 0 \\ 0 & -e^{\pi/2} \end{bmatrix},$$

und wie wir gerade gesehen haben, gibt es zu dieser Matrix keinen reellen Logarithmus.

Es dürfte nun klar geworden sein, dass das Problem mit dem reellen Logarithmus bei den negativen Eigenwerten von M liegt. Besitzt M keine negativen Eigenwerte, so existiert stets zu reellem M ein reeller Logarithmus. Aus Übung 11.2 folgt, dass die Matrix definiert durch

$$\log M = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - M)^{-1} \log \lambda d\lambda,$$

reell ist, wobei Γ_1 eine Jordan-Kurve bezeichnet, die alle Eigenwerte von M rechtssinnig umrundet, sodass $(-\infty, 0]$ im äußeren von Γ_1 liegt und Γ_1 symmetrisch zur reellen Achse ist; vgl. Abb. 11.1.

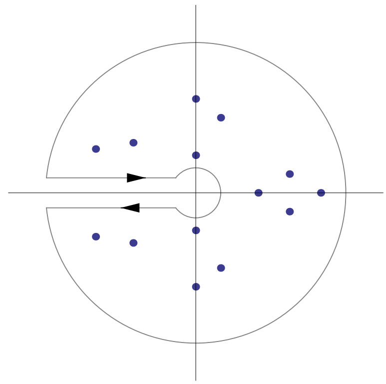

Abbildung 11.1: Integrationsweg Γ_1

Wir haben somit die ersten zwei Aussagen des folgenden Lemmas erhalten.

Lemma 11.2.1.

1. *Sei* $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mit* $\det M \neq 0$. *Dann gibt es ein* $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mit* $M = e^L$.

2. *Sei* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $\sigma(M) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ *und* $\det M > 0$. *Dann gibt es ein* $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $M = e^L$.

3. *Sei* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $\det M > 0$. *Genau dann existiert ein* $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $M = e^L$, *wenn es ein* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt, mit* $B^2 = M$. *Insbesondere gibt es zu jedem* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $\det M \neq 0$ *ein* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $M^2 = e^R$.

Beweis. Es bleibt nur noch die Aussage 3 zu beweisen. Seien $M, L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $M = e^L$. Dann leistet die Matrix $B = e^{\frac{1}{2}L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das gewünschte, denn $B^2 = e^L = M$.

Sei umgekehrt $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, sodass $\det M > 0$ ist. Wir definieren eine Projektion P_1 durch

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda (\lambda - B)^{-1} d\lambda,$$

wobei Λ den in Abb. 11.2 gezeigten Integrationsweg in $\mathbb{C}$ bezeichnet und $P_2 = I - P_1$.

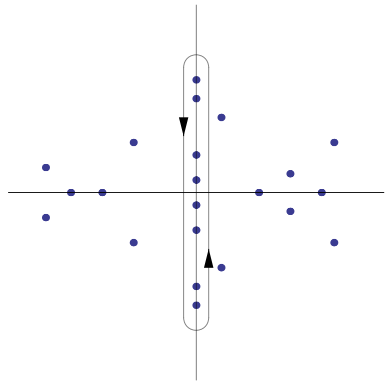

Abbildung 11.2: Integrationsweg Λ

Λ ist symmetrisch zur reellen Achse, also sind die Projektionen reell. Mit Hilfe von P_1 zerlegen wir den Raum $\mathbb{R}^n$ wie folgt. Es gilt $\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$ mit $X_1 = R(P_1)$ und $X_2 = R(P_2)$ und die Matrix B lässt die Räume X_j invariant, d.h. $BX_1 \subset X_1$, $BX_2 \subset X_2$. Ferner gilt $\sigma(B|_{X_1}) \subset i\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\sigma(B|_{X_2}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Wegen $B^2 = M$, reduziert diese Zerlegung auch die Matrix M und es gilt $\sigma(M|_{X_1}) \subset (-\infty, 0)$ sowie $\sigma(M|_{X_2}) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$. Nach Aussage 2 existiert für $M|_{X_2} \in \mathcal{B}(X_2)$ eine Matrix $L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $M|_{X_2} = e^{L_2}$ und ebenso existiert nach 2. für $B|_{X_1} \in \mathcal{B}(X_1)$ ein $L_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B|_{X_1} = e^{L_1}$, denn $\det M|_{X_2}$ und $\det B|_{X_1}$ sind positiv, da die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist. Wir setzen $L = 2L_1P_1 + L_2P_2 = 2L_1 \oplus L_2$. Dann gilt

$$e^L = e^{2L_1} \oplus e^{L_2} = \left(e^{L_1}\right)^2 \oplus e^{L_2} = B^2P_1 + MP_2 = MP_1 + MP_2 = M,$$

denn wegen $LP_j = P_jL,\ j = 1, 2$, zerlegen die Projektionen auch e^L. $\square$

Wir können nun den Hauptsatz der Floquet-Theorie formulieren.

Satz 11.2.2 (Floquet).

1. *Sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n\times n})$ τ-periodisch und $Y_0(t)$ sei das Fundamentalsystem von (11.5) mit $Y_0(0) = I$. Dann existiert ein $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und ein τ-periodisches $R \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n\times n})$ derart, dass die Darstellung*
$$Y_0(t) = R(t)e^{Bt}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{11.9}$$
gilt. Die Transformation $z(t) = R^{-1}(t)x(t)$ führt das System (11.4) in das System
$$\dot z = Bz + c(t), \quad z(0) = z_0 \tag{11.10}$$
über, mit $z_0 = x_0$ und $c(t) = R^{-1}(t)b(t)$. Es gilt ferner
$$\dot R = AR - RB, \quad t \in \mathbb{R}, \quad R(0) = I. \tag{11.11}$$

Ist $A(t)$ reell und kein Floquet-Multiplikator negativ, so können B und $R(t)$ reell gewählt werden.

2. *Sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ τ-periodisch und $Y_0(t)$ sei das reelle Fundamentalsystem von (11.5) mit $Y_0(0) = I$. Dann existiert ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein 2τ-periodisches $R \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ derart, dass die reelle Darstellung*

$$Y_0(t) = R(t)e^{Bt}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11.12}$$

gilt. Die Gleichungen (11.10) und (11.11) gelten auch in diesem Fall.

Beweis. 1. Sei $B = \frac{1}{\tau}\log M_0$ und $R(t) = Y_0(t)e^{-Bt}$. Dann ist R stetig differenzierbar bezüglich t und es gilt

$$R(t+\tau) = Y_0(t+\tau)e^{-B(t+\tau)} = Y_0(t)(M_0e^{-B\tau})e^{-Bt} = Y_0(t)e^{-Bt} = R(t),$$

das heißt, R ist τ-periodisch. Ferner gilt

$$\dot{R}(t) = \dot{Y}_0(t)e^{-Bt} - Y_0(t)e^{-Bt}B = A(t)R(t) - R(t)B, \quad t \in \mathbb{R},$$

und die Transformation $z(t) = R^{-1}(t)x(t)$ ergibt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \left(\frac{d}{dt}R^{-1}(t)\right)x(t) + R^{-1}(t)\dot{x}(t)\\ &= -R^{-1}(t)\dot{R}(t)R^{-1}(t)x(t) + R^{-1}(t)(A(t)x(t) + b(t)) = Bz(t) + c(t).\end{aligned}$$

2. Sei nun $A(t)$ reellwertig. Es gilt $Y_0(2\tau) = Y_0(\tau)M_0 = M_0^2$, da $Y_0(\tau) = M_0$ ist. Nach Lemma 11.2.1 existiert ein reeller Logarithmus $\log M_0^2$. Setzen wir nun $B = \frac{1}{2\tau}\log M_0^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist die reelle matrixwertige Funktion $R(t) = Y_0(t)e^{-Bt}$ 2τ-periodisch, denn

$$R(t+2\tau) = Y_0(t+2\tau)e^{-Bt}e^{-B2\tau} = Y_0(t)e^{-Bt}M_0^2e^{-B2\tau} = R(t).$$

Die Transformation $z(t) = R^{-1}(t)x(t)$ liefert dann (11.10) und $R(t)$ erfüllt die reelle Differentialgleichung (11.11). □

Aus der Darstellung $M_0 = e^{B\tau}$ und dem spektralen Abbildungssatz folgt die Beziehung $\mu = e^{\lambda\tau}$ für $\mu \in \sigma(M_0)$ und $\lambda \in \sigma(B)$. Die Eigenwerte von B heißen **Floquet-Exponenten** von (11.5). Im Gegensatz zu den Floquet-Multiplikatoren sind diese jedoch nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i/\tau$ eindeutig bestimmt.

Korollar 11.2.3. *Sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ τ-periodisch und M_0 sei die Monodromie-Matrix von (11.5). Dann gilt:*

1. *$y = 0$ ist genau dann stabil für (11.5), wenn*
   (a) *$|\mu| \le 1$ für alle $\mu \in \sigma(M_0)$ gilt;*
   (b) *$|\mu| = 1$ für $\mu \in \sigma(M_0)$ impliziert, dass μ halbeinfach ist.*

2. *$y = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil für* (11.5), *wenn $|\mu| < 1$ für alle $\mu \in \sigma(M_0)$ gilt.*

Beweis. Wir überführen zunächst das System (11.5) mit Hilfe von Satz 11.2.2 in ein System mit einer reellen konstanten Koeffizientenmatrix B. Da $R(t)$ und $R^{-1}(t)$ stetig und beschränkt sind, folgen die Behauptungen aus Korollar 5.3.2 und der Eigenschaft $\sigma(M_0^2) = \sigma(M_0)^2 = e^{\sigma(B)2\tau}$. □

11.3 Lineare periodische Gleichungen

In Anwendungen ist es im Allgemeinen schwierig, wenn nicht sogar unmöglich, die Floquet-Faktorisierung (11.9) zu erhalten. Bereits die Bestimmung der Floquet-Multiplikatoren und damit die Bestimmung der Matrizen M_0 und B erweist sich als kompliziert. Andererseits ist Satz 11.2.2 von großem theoretischen Interesse, da der Fall einer periodischen Matrix $A(t)$ auf den Fall einer konstanten Matrix zurückgeführt werden kann. Zur Illustration dieser Methode beweisen wir den

Satz 11.3.1. *Sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ τ-periodisch und μ_j, $j \in \{1, \ldots, r\}$ seien die Floquet-Multiplikatoren von* (11.5). *Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. *Genau dann besitzt das System* (11.5) *eine nichttriviale τ-periodische Lösung, wenn $\mu_j = 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.*
2. *Genau dann besitzt das System* (11.5) *eine nichttriviale $m\tau$-periodische Lösung, wenn $\mu_j^m = 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt. Das heißt, μ_j ist eine m-te Einheitswurzel.*
3. *Genau dann besitzt das System* (11.5) *eine nichttriviale beschränkte Lösung, wenn $|\mu_j| = 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.*
4. *Genau dann besitzt das System* (11.4) *zu jedem τ-periodischen $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ genau eine τ-periodische Lösung, wenn $\mu_j \neq 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.*
5. *Genau dann besitzt das System* (11.4) *zu jedem beschränkten $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ genau eine beschränkte Lösung, wenn $|\mu_j| \neq 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.*

Beweis. 1. Sei $y(t)$ eine nichttriviale τ-periodische Lösung von (11.5), also $y(t + \tau) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $Y_0(t)$ das Fundamentalsystem von (11.5) mit $Y_0(0) = I$, so gilt $y(t) = Y_0(t)y(0)$. Das impliziert aber $y(0) = y(\tau) = M_0 y(0)$. Daher ist $y(0)$ ein Eigenvektor von M_0 zum Eigenwert $\mu = 1$, denn wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von (11.5) gilt $y(0) \neq 0$.

Sei umgekehrt $1 \in \sigma(M_0)$, $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu = 1$ und sei $y(t) = Y_0(t)v$ die eindeutig bestimmte Lösung von (11.5) zum Anfangswert v. Es gilt

$$y(t + \tau) = Y_0(t + \tau)v = Y_0(t)M_0 v = Y_0(t)v = y(t),$$

das heißt, $y(t)$ ist τ-periodisch. Die Aussage 2 beweist man analog.

3. Für den Beweis dieser Aussage machen wir uns Satz 11.2.2 zunutze. Demnach können wir das System (11.5) mittels der Transformation $z(t) = R^{-1}(t)y(t)$ in das reelle autonome System $\dot{z} = Bz$ überführen. Ist nun $|\mu| = 1$ für ein $\mu \in \sigma(M_0)$, so ist $\mu^2 \in \sigma(M_0^2)$ und $|\mu^2| = 1$. Wegen $\sigma(M_0^2) = e^{2\tau\sigma(B)}$ existiert also ein $\lambda \in \sigma(B)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Sei $v \neq 0$ der zu diesem λ gehörige Eigenvektor. Dann ist $z(t) = e^{\lambda t}v = e^{i\operatorname{Im}\lambda t}v$ eine Lösung von $\dot{z} = Bz$ und es gilt $|z(t)| = |v|$, also ist $z(t)$ beschränkt. Damit ist aber $y(t) = R(t)z(t)$ eine beschränkte Lösung von (11.5).

Sei nun $y(t)$ eine nichttriviale beschränkte Lösung von (11.5). Dann ist $z(t)$ ebenfalls eine beschränkte Lösung von $\dot{z} = Bz$. Nach Satz 3.3.4 setzt sich die Lösung $z(t)$ als Linearkombination aus Termen der Form $p_j(t)e^{\lambda t}$, $\lambda \in \sigma(B)$, zusammen, wobei $p_j(t)$ Polynome vom Grad $j \leq m(\lambda) - 1$, $j \in \mathbb{N}_0$, mit Koeffizienten in $\mathbb{C}^n$ sind. Angenommen $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(B)$. Dann gilt $|z(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$, ein Widerspruch. Es existiert also ein $\lambda \in \sigma(B)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Wegen $\sigma(M_0)^2 = \sigma(M_0^2) = e^{2\tau\sigma(B)}$ ist die Aussage 3 bewiesen.

4. Sei $x(t)$ die einzige periodische Lösung von (11.4) zu gegebenem τ-periodischen $0 \not\equiv b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Angenommen $\mu_j = 1$ für ein $\mu_j \in \sigma(M_0)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$. Dann existiert nach Aussage 1 eine nichttriviale τ-periodische Lösung $y(t)$ von (11.5). Damit ist aber $x_1(t) := x(t) + y(t)$ ebenfalls eine von $x(t)$ verschiedene τ-periodische Lösung von (11.4), ein Widerspruch zur Einzigkeit von $x(t)$. Also gilt $\mu_j \neq 1$ für alle $\mu_j \in \sigma(M_0)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Um die Hinlänglichkeit zu zeigen, betrachten wir die zu (11.5) äquivalente Differentialgleichung (11.10). Nach Voraussetzung gilt $\mu_j \neq 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$, also $\lambda_j \neq 2\pi i m/\tau$, $m \in \mathbb{Z}$. Es ist klar, dass wir nur die Existenz einer τ-periodischen Lösung zeigen müssen, denn die Eindeutigkeit ist nach 1. klar. Die Lösungen von (11.10) sind gegeben durch

$$z(t) = e^{Bt}z_0 + \int_0^t e^{B(t-s)}c(s)ds.$$

Um eine τ-periodische Lösung zu erhalten, muss z_0 so bestimmt werden, dass $z(\tau) = z_0$ gilt. Das führt auf die Identität

$$z_0 = e^{B\tau}z_0 + \int_0^\tau e^{B(\tau-s)}c(s)ds.$$

Nach Satz 11.2.2 gilt $\sigma(e^{B\tau}) = \sigma(M_0)$, also $1 \notin \sigma(e^{B\tau})$. Daher ist die Matrix $I - e^{B\tau}$ invertierbar und wir können die obige Identität nach z_0 wie folgt auflösen

$$z_0 = (I - e^{B\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{B(\tau-s)}c(s)ds.$$

Schließlich erhalten wir für die eindeutige periodische Lösung von (11.10) die Darstellung

$$z(t) = (I - e^{B\tau})^{-1} \left(\int_0^t e^{B(t-s)} c(s) ds + \int_t^\tau e^{B(t+\tau-s)} c(s) ds \right)$$
$$= \int_0^\tau G_\tau^0(t,s) c(s) ds,$$

wobei die Greensche Funktion G_τ^0 durch

$$G_\tau^0(t,s) = (I - e^{B\tau})^{-1} \begin{cases} e^{B(t-s)}, & s \le t, \\ e^{B(\tau+t-s)}, & s > t, \end{cases} \quad s,t \in [0,\tau],$$

definiert ist. Für die τ-periodischen Lösungen von (11.4) ergibt sich daher die Darstellung

$$x(t) = \int_0^\tau R(t) G_\tau^0(t,s) R^{-1}(s) b(s) ds.$$

Die Funktion $G(t,s) := R(t) G_\tau^0(t,s) R^{-1}(s)$ heißt Greenscher Kern für die Differentialgleichung (11.4). Damit ist 4. bewiesen.

5. Die Notwendigkeit ist wegen 3. und der Einzigkeit klar. Gilt nun $|\mu_j| \neq 1$, so auch $\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, r\}$. Es bezeichne P_s die Projektion auf den stabilen Teilraum X_s von (11.10), also das Erzeugnis aller stabilen Eigenwerte λ_j, längs dem instabilen Teilraum X_u. Ferner sei $P_u = I - P_s$. Wir setzen

$$G^0(t) = \begin{cases} e^{Bt} P_s, & t > 0, \\ -e^{Bt} P_u, & t < 0, \end{cases}$$

und

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^0(t-s) c(s) ds = \int_{-\infty}^t e^{B(t-s)} P_s c(s) ds - \int_t^\infty e^{B(t-s)} P_u c(s) ds.$$

Ist die Funktion $b = b(t)$ beschränkt, so auch $c = c(t)$. Folglich gilt mit einem $\eta > 0$

$$|z(t)| \le |c|_\infty \int_{-\infty}^t |e^{B(t-s)} P_s| ds + |c|_\infty \int_t^\infty |e^{B(t-s)} P_u| ds$$
$$\le |c|_\infty M \left(\int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-s)} ds + \int_t^\infty e^{\eta(t-s)} ds \right) = 2|c|_\infty |M/\eta,$$

mit einer Konstanten $M > 0$, also ist $z(t)$ beschränkt. Des Weiteren löst $z(t)$ die Differentialgleichung (11.10), denn da man Differentiation und Integration aufgrund der absoluten Konvergenz der Integrale vertauschen darf, erhält man

$$\dot z(t) = P_s c(t) + \int_{-\infty}^t B e^{B(t-s)} P_s c(s) ds + P_u c(t) - \int_t^\infty B e^{B(t-s)} P_u c(s) ds$$
$$= B z(t) + c(t),$$

wegen $P_s + P_u = I$. Für die beschränkten Lösungen von (11.4) ergibt sich nun

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)b(s)ds,$$

wobei $G(t,s) = R(t)G^0(s)R^{-1}(s)$ der Greensche Kern für (11.4) ist. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. $\square$

11.4 Stabilität periodischer Lösungen

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11.13}$$

wobei $f : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^n,\ G \subset \mathbb{R}^n$ offen, stetig in t, stetig differenzierbar bezüglich x und τ-periodisch in t sei. Es sei ferner $x_*(t)$ eine τ-periodische Lösung von (11.13) mit $x_*([0,\tau]) \subset G$. Wähle $r > 0$ so klein, dass $B_r(x_*(t)) \subset G$ für alle $t \in [0,\tau]$ gilt. Für die verschobene Funktion $y(t) = x(t) - x_*(t)$ ergibt sich dann

$$\dot{y} = A(t)y + h(t,y), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.14}$$

Dabei ist $A(t) = \partial_x f(t, x_*(t))$ τ-periodisch und

$$h(t,y) = f(t, x_*(t) + y) - f(t, x_*(t)) - \partial_x f(t, x_*(t))y, \quad y \in B_r(0).$$

Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir für die τ-periodische Funktion $h(t,y)$ die Abschätzung

$$|h(t,y)| \le |y| \int_0^1 |\partial_x f(t, x_*(t) + \theta y) - \partial_x f(t, x_*(t))| d\theta,$$

woraus sich wegen der Stetigkeit und τ-Periodizität von $\partial_x f$ bezüglich t und der Stetigkeit und τ-Periodizität der fixierten Funktion $x_*(t)$ die Eigenschaft

$$h(t,y) = o(|y|) \text{ für } |y| \to 0, \text{ gleichmäßig in } t,$$

ergibt. Aus Satz 11.2.2 und Satz 5.4.1 erhalten wir nun das folgende Resultat.

Satz 11.4.1. *Sei $f : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig in t, stetig differenzierbar bezüglich x, τ-periodisch in t und es sei $x_*(t)$ eine τ-periodische Lösung von* (11.13) *mit $x_*([0,\tau]) \subset G$. Ferner sei $A(t) = \partial_x f(t, x_*(t))$, und $\mu_j,\ j \in \{1, \ldots, r\}$ die Floquet-Multiplikatoren der homogenen Gleichung $\dot{y} = A(t)y$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. *x_* ist uniform asymptotisch stabil für* (11.13)*, falls $|\mu_j| < 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.*

2. *x_* ist instabil für (11.13), falls $|\mu_j| > 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.*

Beweis. Sei $R \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ die 2τ-periodische Funktion aus Satz 11.2.2. Mittels der Transformation $z(t) = R^{-1}(t)y(t)$ ergibt sich die zu (11.14) äquivalente reelle Gleichung

$$\dot{z} = Bz + g(t, z), \tag{11.15}$$

mit der Funktion $g(t, z) = R^{-1}(t)h(t, R(t)z)$. Es ist sofort ersichtlich, dass ebenfalls

$$g(t, z) = o(|z|) \text{ für } |z| \to 0, \text{ gleichmäßig in } t, \tag{11.16}$$

gilt. Wegen der Gleichmäßigkeit in (11.16) überträgt sich der Beweis von Satz 5.4.1 auf (11.15) und der Rest folgt aus der Identität $\sigma(M_0)^2 = \sigma(M_0^2) = e^{2\tau\sigma(B)}$. □

Die erste Aussage von Satz 11.4.1 ist unbefriedigend für periodische Lösungen autonomer Gleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x), \tag{11.17}$$

denn ist $x_*(t)$ eine τ-periodische, nichtkonstante Lösung von (11.17), so ist $\mu_1 = 1$ immer ein Floquet-Multiplikator für $A(t) = f'(x_*(t))$. Setzt man nämlich $u_*(t) = f(x_*(t))$, so ist $u_*(t) \not\equiv 0$ und stetig differenzierbar in t. Folglich ergibt (11.17)

$$\dot{u}_*(t) = f'(x_*(t))\frac{d}{dt}x_*(t) = A(t)f(x_*(t)) = A(t)u_*(t),$$

sowie $u_*(\tau) = f(x_*(\tau)) = f(x_*(0)) = u_*(0)$, also ist $u_*(t)$ eine nichttriviale τ-periodische Lösung der Differentialgleichung $\dot{y} = A(t)y$ und Satz 11.3.1 liefert $\mu_j = 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$. Daher ist der erste Teil von Satz 11.4.1 nicht auf diese Situation anwendbar.

Es gilt sogar noch mehr. Eine nichtkonstante τ-periodische Lösung von (11.17) ist niemals asymptotisch stabil. Denn mit $x_*(t)$ ist $x_*(t+t_0)$ für ein beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ wieder eine τ-periodische Lösung von (11.17). Folglich ist die Funktion

$$\varphi(t) = |x_*(t + t_0) - x_*(t)| \not\equiv 0$$

τ-periodisch, also $\varphi(t) \not\to 0$ für $t \to \infty$. Da aber für $t_0 \to 0$ der Wert $\varphi(0)$ hinreichend klein wird, kann $x_*(t)$ nicht asymptotisch stabil sein.

Diese Überlegungen zeigen, dass der bisher verwendete Stabilitätsbegriff hier nicht sinnvoll ist. Daher führt man die folgende Definition ein.

Definition 11.4.2. *Sei $x_*(t)$ eine τ-periodische Lösung von (11.17) und $\gamma = x_*(\mathbb{R})$ sei ihr Orbit.*

1. *x_* heißt* **orbital stabil**, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, mit $\mathrm{dist}(x(t), \gamma) \le \varepsilon$ für alle $t \ge 0$, falls $\mathrm{dist}(x_0, \gamma) \le \delta$.*

2. *x_* heißt* **asymptotisch orbital stabil**, *falls x_* orbital stabil und γ ein Attraktor für (11.17) ist.*

Man beachte, dass orbitale Stabilität bzw. asymptotisch orbitale Stabilität für Equilibria mit den früheren Stabilitätsbegriffen zusammenfällt. Das folgende Ergebnis zeigt, dass der Begriff der orbitalen Stabilität das richtige Konzept für τ-periodische Lösungen autonomer Gleichungen ist.

Satz 11.4.3. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und sei $x_*(t)$ eine nichtkonstante τ-periodische Lösung von* (11.17) *mit dem Orbit γ. Ferner seien $\mu_1 = 1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ die Floquet-Multiplikatoren von $A(t) = f'(x_*(t))$ mit $|\mu_j| < 1$ für $j \in \{2, \ldots, r\}$ und $\mu_1 = 1$ sei einfach. Dann ist x_* asymptotisch orbital stabil. Es existieren ein $\delta_0 > 0$ und eine stetige Funktion $a : \bar{B}_{\delta_0}(\gamma) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}\tau$ mit der Eigenschaft*

$$x_0 \in \bar{B}_{\delta_0}(\gamma) \Longrightarrow |x(t + a(x_0), x_0) - x_*(t)| \to 0$$

exponentiell für $t \to \infty$. $a(x_0)$ heißt **asymptotische Phase** *von $x(t, x_0)$.*

In Worten bedeutet die Aussage des Satzes, dass es zu jedem Anfangswert x_0 nahe beim periodischen Orbit eine *Phase* $a(x_0)$ gibt, mit der Eigenschaft, dass sich $x(t, x_0)$ für $t \to \infty$ asymptotisch wie die phasenverschobene periodische Lösung $x_*(t - a(x_0))$ verhält.

Beweis von Satz 11.4.3. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

(a) Zunächst konstruieren wir eine lokale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{loc}$ derart, dass alle Lösungen von (11.17) mit Anfangswert auf $\mathcal{M}_{loc}$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen den Orbit γ der nichtkonstanten periodischen Lösung streben. Die Verschiebung $u(t) = x(t) - x_*(t)$ überführt (11.17) in das System

$$\dot{u} = A(t)u + g(t, u), \tag{11.18}$$

mit der τ-periodischen Koeffizientenmatrix $A(t) = f'(x_*(t))$ und

$$g(t, u) = f(x_*(t) + u) - f(x_*(t)) - f'(x_*(t))u.$$

Gemäß Satz 11.2.2 erhalten wir aus der Transformation $y(t) = R(t)^{-1}u(t)$ das System

$$\dot{y} = By + h(t, y), \tag{11.19}$$

mit $h(t, y) := R^{-1}(t)g(t, R(t)y)$ und einer konstanten reellen Koeffizientenmatrix B. Dabei ist $R(t)$ eine reelle 2τ-periodische Funktion mit $R(0) = I$ und es gilt $M_0^2 = e^{2B\tau}$, wobei M_0 die zu $A(t)$ gehörige Monodromie-Matrix bezeichnet. Aus den Bemerkungen zu Beginn dieses Abschnittes folgt außerdem

$$h(t, y) = o(|y|) \text{ für } |y| \to 0, \text{ gleichmäßig in } t.$$

Nach dem spektralen Abbildungssatz besitzt die Matrix B den einfachen Eigenwert $\lambda = 0$ und $r - 1$ Eigenwerte $\lambda_j,\ j \in \{2, \ldots, r\}$, mit negativem Realteil. Ferner gilt die Spektralzerlegung

$$\mathbb{C}^n = N(B) \oplus N(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus N(\lambda_r) =: X_c \oplus X_s.$$

Sei P_s die Projektion auf den Teilraum X_s längs $X_c = N(B)$, das heißt $R(P_s) = X_s$, $N(P_s) = X_c$, und sei $P_c = I - P_s$. Nach einer Translation und Rotation des Koordinatensystems können wir ferner annehmen, dass $x_*(0) = 0$ und $0 \neq f(0) \in R(P_c)$ gilt. Auf X_s und X_c gelten die Abschätzungen

$$|e^{Bt}P_s| \leq Me^{-\eta t} \text{ und } |e^{-Bt}P_c| \leq M,$$

für $t > 0$ mit Konstanten $M \geq 1$ und $\eta > 0$. Wir wählen ein $r > 0$ so klein, dass die Abschätzung

$$|h(t,y)| \leq \frac{\omega}{M}|y| \tag{11.20}$$

für alle $|y| \leq r$, $t > 0$ und für festes $\omega \in (0,\eta)$ erfüllt ist. Betrachte die Integralgleichung

$$y(t) = e^{Bt}z + \int_0^t e^{B(t-s)}P_s h(s,y(s))ds - \int_t^\infty e^{B(t-s)}P_c h(s,y(s))ds, \tag{11.21}$$

wobei $z \in X_s$ ist. Analog zum Beweis von Satz 10.1.1 existieren geeignete Zahlen $\delta, \rho > 0$, sodass die Integralgleichung (11.21) für jedes $z \in B_\delta^{X_s}(0)$ genau eine Lösung $y(t,z) \in B_\rho^U(0)$, $\rho < r$, besitzt, wobei U den Banachraum

$$U = \{u \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n) : |u|_\eta = \sup_{t\geq 0}|u(t)|e^{\eta t/2} < \infty\}$$

bezeichnet. Da die Lösung für $t \to \infty$ exponentiell fällt, ist $y(t,z)$ in t differenzierbar und $y(t,z)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung (11.19) zum Anfangswert

$$y(0,z) = z - \int_0^\infty e^{-Bs}P_c h(s,y(s,z))ds =: z - q(z), \quad z \in B_\delta^{X_s}(0),$$

und es gilt $q(0) = q'(0) = 0$. Die Abbildung $B_\delta^{X_s}(0) \ni z \mapsto z - q(z)$ definiert eine lokale C^1-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{loc}$, welche wegen $q'(0) = 0$ den Tangentialraum X_s in $z = 0$ besitzt.

Aufgrund von $0 \neq f(0) \in X_c$ schneidet die periodische Lösung $x_*(t)$ die lokale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{loc}$ *transversal*. Wegen (11.20), $z \in X_s$ und $y \in U$, folgt aus Integration von (11.21) mit dem Satz von Fubini die Abschätzung

$$|e^{\eta t/4}y|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq \left(\frac{4M}{3\eta}|z| + \frac{4}{3\eta}\omega|e^{\eta t/4}y|_{L_1(\mathbb{R}_+)} + \frac{4}{\eta}\omega|e^{\eta t/4}y|_{L_1(\mathbb{R}_+)}\right).$$

Für ein $0 < \omega \leq 3\eta/32$ erhalten wir somit

$$|e^{\eta t/4}y|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{8M}{3\eta}|z|,$$

was in Kombination mit (11.21) die Abschätzung

$$|e^{\eta t/4}y(t)| \leq M|z| + \frac{16M\omega}{3\eta}|z| \leq M|z| + \frac{M}{2}|z| = \frac{3M}{2}|z| \tag{11.22}$$

für alle $t \geq 0$ liefert. Wegen $|x(t) - x_*(t)| \leq |R(t)||y(t)|$ und $P_s x(0) = P_s y(0) = z$ erhalten wir

$$|x(t) - x_*(t)| \leq C\frac{3M}{2}|P_s|e^{-\eta t/4}|x(0)|, \tag{11.23}$$

für alle $t \geq 0$, wobei $C := \max_{t\in[0,2\tau]} |R(t)| > 0$ ist.

(b) Wir zeigen, dass alle Lösungen, welche hinreichend nahe beim Orbit γ starten, die lokale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{loc}$ in endlicher Zeit treffen. Sei ein Anfangswert $x_1 \in \gamma$ gegeben. Aus dem Beweis von Satz 4.1.2 folgt die Ungleichung

$$|x(t, x_0) - x_*(t, x_1)| \leq c_\tau |x_0 - x_1|,$$

für alle $t \in [0, 2\tau]$, falls die Differenz der Anfangswerte $|x_0 - x_1|$ hinreichend klein ist. Insbesondere existiert die Lösung $x(t, x_0)$ in diesem Fall für alle $t \in [0, 2\tau]$. Aufgrund der τ-Periodizität von $x_*(t)$ existiert zu jedem Anfangswert $x_1 \in \gamma$ ein erstes $t_1 \in [0, \tau]$, sodass $x_*(t_1, x_1) = 0$, also $x_*(t_1, x_1) \in \mathcal{M}_{loc}$. Ferner gilt für alle $t \in [0, 2\tau]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}|x(t, x_0)| &= |x(t, x_0) - x_*(t_1, x_1)| \\ &\leq |x(t, x_0) - x_*(t, x_1)| + |x_*(t, x_1) - x_*(t_1, x_1)| \leq c_\tau|x_0 - x_1| + c_\infty|t - t_1|,\end{aligned}$$

wobei c_∞ durch $c_\infty = \max_{s\in[0,\tau]} |f(x_*(s))|$ definiert ist. Zu gegebenem $\varepsilon_0 > 0$ existieren daher Umgebungen $\mathcal{U}(t_1)$ und $\mathcal{U}(x_1)$, sodass $|x(t, x_0)| \leq \varepsilon_0$ für alle $(t, x_0) \in \mathcal{U}(t_1) \times \mathcal{U}(x_1)$ gilt. Im Weiteren sei $\varepsilon_0 < \delta/|P_s|$. Wir definieren eine Abbildung $F : \mathcal{U}(t_1) \times \mathcal{U}(x_1) \to X_c$ durch

$$F(t, x_0) = P_c x(t, x_0) + q(P_s x(t, x_0)).$$

Nach Satz 4.3.2 ist F stetig differenzierbar bezüglich $(t, x_0) \in \mathcal{U}(t_1) \times \mathcal{U}(x_1)$. Aus der Eindeutigkeit der Lösungen folgt ferner $F(t_1, x_1) = P_c x_*(t_1, x_1) + q(P_s x_*(t_1, x_1)) = 0$ und

$$\begin{aligned}\partial_t F(t_1, x_1) &= P_c f(x_*(t_1, x_1)) + q'(P_s x_*(t_1, x_1))P_s f(x_*(t_1, x_1)) \\ &= P_c f(0) + q'(0)P_s f(0) = f(0) \neq 0.\end{aligned}$$

Wegen $\dim X_c = 1$, existieren nach dem Satz über implizite Funktionen Umgebungen $\mathcal{V}(x_1) \subset \mathcal{U}(x_1)$ und $\mathcal{V}(t_1) \subset \mathcal{U}(t_1)$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $\varphi \in C^1(\mathcal{V}(x_1); \mathcal{V}(t_1))$ mit der Eigenschaft $F(\varphi(x_0), x_0) = 0$, $x_0 \in \mathcal{V}(x_1)$ und $\varphi(x_1) = t_1$. Dies ist aber äquivalent zu

$$x(\varphi(x_0), x_0) = P_s x(\varphi(x_0), x_0) - q(P_s x(\varphi(x_0), x_0)),$$

also $x(\varphi(x_0), x_0) \in \mathcal{M}_{loc} \cap \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$, $x_0 \in \mathcal{V}(x_1)$.

(c) Wir zeigen nun, dass die im letzten Schritt gewonnene lokal definierte Funktion φ Werte in $(0, 2\tau)$ annimmt. Dazu sei zunächst $x_1 = 0 \in \gamma$. Da x_* τ-periodisch ist, gilt $x_*(\tau, x_1) = 0$, also können wir $t_1 = \tau$ setzen. Nach Schritt (b) existiert eine Umgebung $\mathcal{V}_0$ von 0 und eine stetige Funktion $\varphi_0 : \mathcal{V}_0 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_0(0) = \tau$ und $x(\varphi_0(x_0), x_0) \in \mathcal{M}_{loc} \cap \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$, $x_0 \in \mathcal{V}_0$. Durch Verkleinern von $\mathcal{V}_0$ können wir $\varphi_0(x_0) \in (0, 2\tau)$ für alle $x_0 \in \mathcal{V}_0$ annehmen. Sei nun $x_1 \in \gamma \setminus \mathcal{V}_0 =: \gamma_0$. Dann existiert ein hinreichend kleines $\kappa > 0$ und ein $t_1 \in (\kappa, \tau - \kappa)$, sodass $x_*(t_1, x_1) = 0$. Ferner existieren eine Umgebung $\mathcal{V}_1$ von x_1 sowie eine stetige Funktion $\varphi_1 : \mathcal{V}_1 \to \mathbb{R}$, mit $\varphi_1(x_1) = t_1$ und $x(\varphi_1(x_0), x_0) \in \mathcal{M}_{loc} \cap \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ für alle $x_0 \in \mathcal{V}_1$. Durch Verkleinern von $\mathcal{V}_1$ können wir weiterhin $\varphi_1(x_0) \in (0, \tau)$ für alle $x_0 \in \mathcal{V}_1$ annehmen.

Da die Menge γ_0 kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung $\{\mathcal{V}_k\}_{k=1}^N$ von γ_0, wobei die Mengen $\mathcal{V}_k$ Umgebungen von Punkten $x_k \in \gamma_0$, $k \in \{1, \ldots, N\}$ sind. Zu jedem $\mathcal{V}_k$ existiert eine stetige Funktion $\varphi_k : \mathcal{V}_k \to (0, \tau)$, mit $x(\varphi_k(x_0), x_0) \in \mathcal{M}_{loc} \cap \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ für alle $x_0 \in \mathcal{V}_k$. Des Weiteren bildet die Menge

$$\mathcal{V} := \bigcup_{k=0}^{N} \mathcal{V}_k$$

eine Überdeckung des Orbits γ.

(d) In diesem Schritt zeigen wir die orbitale asymptotische Stabilität von x_*. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $x_0 \in \bar{B}_\delta(\gamma) \subset \mathcal{V}$, wobei $\bar{B}_\delta(\gamma)$ durch

$$\bar{B}_\delta(\gamma) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x_0, \gamma) \leq \delta\}$$

definiert ist. Da $\mathcal{V}$ eine Überdeckung von γ ist, gilt $\bar{B}_\delta(\gamma) \subset \mathcal{V}$, falls $\delta > 0$ hinreichend klein gewählt wird. Nach Schritt (c) existiert ein $k \in \{0, \ldots, N\}$ mit $x_0 \in \mathcal{V}_k$ und $x(\varphi_k(x_0), x_0) \in \mathcal{M}_{loc} \cap \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$. Daraus folgt mit (11.23) die Abschätzung

$$|\tilde{x}(t) - x_*(t)| \leq C\frac{3M}{2}|P_s|e^{-\eta t/4}|x(\varphi_k(x_0), x_0)| \leq C\frac{3M}{2}|P_s|e^{-\eta t/4}\varepsilon_0, \; t \geq 0,$$

wobei $\tilde{x}(t)$ durch $\tilde{x}(t) := x(t + \varphi_k(x_0), x_0)$ definiert ist. Das impliziert einerseits die Attraktivität von γ und andererseits

$$\mathrm{dist}(x(t, x_0), \gamma) \leq \varepsilon, \quad \text{für alle } t \geq \varphi_k(x_0),$$

falls $\varepsilon_0 > 0$ hinreichend klein ist. Für die orbitale Stabilität genügt es daher die Abschätzung $\mathrm{dist}(x(t, x_0), \gamma) \leq \varepsilon$ für alle $t \in [0, 2\tau]$ zu zeigen, da nach Schritt (c) stets $\varphi_k(x_0) \in (0, 2\tau)$ für alle $x_0 \in \mathcal{V}_k$, $k = 1, \ldots, N$ gilt. Zu $x_0 \in \bar{B}_\delta(\gamma)$ finden wir ein $x_1 \in \gamma$ mit $|x_0 - x_1| \leq \delta$. Sei $x_*(t, x_1)$ die Lösung von (11.17) mit $x_*(0, x_1) = x_1$. Aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert erhalten wir wie in (b) die Abschätzung

$$|x(t, x_0) - x_*(t, x_1)| \leq c_\tau |x_0 - x_1| \leq c_\tau \delta,$$

für alle $t \in [0, 2\tau]$, wobei $c_\tau > 0$ eine von x_0 und x_1 unabhängige Konstante ist. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ ergibt dies die orbitale Stabilität von x_*.

(e) Für jedes $x_0 \in \bar{B}_{\delta_0}(\gamma),\ 0 < \delta_0 < \delta$, existiert nach Schritt (c) ein $k \in \{0, \dots, N\}$ mit $x_0 \in \mathcal{V}_k$ und

$$|x(t + \varphi_k(x_0), x_0) - x_*(t)| \to 0,$$

exponentiell für $t \to \infty$. Nach (c) gilt bereits $\varphi_k(x_0) \in (0, \tau)$ für $x_0 \in \mathcal{V}_k$, $k \neq 0$ und $\varphi_0(x_0) \in (0, 2\tau)$ für $x_0 \in \mathcal{V}_0$. Daraus folgt die Existenz einer Funktion $a : \bar{B}_{\delta_0}(\gamma) \to \mathbb{R}$, sodass

$$|x(t + a(x_0), x_0) - x_*(t)| \to 0, \tag{11.24}$$

exponentiell für $t \to \infty$ (es gilt sogar $R(a) \subset (0, 2\tau)$). Mit $s = t + k\tau,\ k \in \mathbb{Z}$, folgt aus der τ-Periodizität von x_*

$$\begin{aligned} |x(t + a(x_0) + k\tau, x_0) - x_*(t)| &= |x(s + a(x_0), x_0) - x_*(s - k\tau)| \\ &= |x(s + a(x_0), x_0) - x_*(s)| \to 0, \end{aligned}$$

für $s \to \infty$. In diesem Sinne können wir alle Werte von $a(x_0)$, welche sich um ganzzahlige Vielfache von τ unterscheiden miteinander identifizieren, das heißt $a : \bar{B}_{\delta_0}(\gamma) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}\tau$, wobei $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\tau$ den Quotientenraum von $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Z}\tau$ bezeichnet. Es bleibt noch die Stetigkeit der Funktion a zu zeigen. Angenommen a ist nicht stetig in $x_0 \in \bar{B}_{\delta_0}(\gamma)$. Dann existiert eine Folge $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$, sodass $a(x_n) \to a_0 \neq a(x_0) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\tau$ gilt, das heißt $a_0 - a(x_0) \notin \mathbb{Z}\tau$. Nun gilt wegen (11.23)

$$|x(t + a(x_n), x_n) - x_*(t)| \le Ce^{-\eta t/4}$$

für alle $t \ge 0$, wobei $C > 0$ eine von n unabhängige Konstante ist, da x_* nach Schritt (d) orbital asymptotisch stabil ist. Da die Lösung stetig vom Anfangswert abhängt folgt für $n \to \infty$

$$|x(t + a_0, x_0) - x_*(t)| \le Ce^{-\eta t/4}, \quad t \ge 0.$$

Aus (11.24) erhalten wir somit die Abschätzung

$$|x_*(t - a_0) - x_*(t - a(x_0))| \le 2Ce^{-\eta t/4}, \quad t \ge 0,$$

also

$$|x_*(-a_0) - x_*(-a(x_0))| = |x_*(k\tau - a_0) - x_*(k\tau - a(x_0))| \le 2Ce^{-\eta k\tau/4} \to 0$$

für $k \to \infty$, ein Widerspruch. □

Unter gewissen Voraussetzungen kann man die Stabilitätseigenschaften einer nichtkonstanten periodischen Lösung von (11.17) auch ohne genaue Kenntnis der Floquet-Multiplikatoren bestimmen.

Korollar 11.4.4. *Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$, $n \ge 2$, und x_* eine nichtkonstante τ-periodische Lösung von* (11.17)*, $x_*([0, \tau]) \subset G$. Ferner sei*

$$\triangle := \int_0^\tau (\operatorname{div} f)(x_*(t))dt.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. *Ist* $\triangle > 0$, *so ist* x_* *instabil.*
2. *Ist* $\triangle < 0$ *und* $n = 2$, *so ist* x_* *orbital asymptotisch stabil.*

Beweis. Wir betrachten die linearisierte Gleichung $\dot{y} = A(t)y$ mit $A(t) = f'(x_*(t))$. Offensichtlich gilt $(\operatorname{div} f)(x_*(t)) = \operatorname{sp} f'(x_*(t))$, also folgt aus (11.7)

$$\prod_{j=1}^{r} \mu_j^{\kappa_j} = e^{\int_0^\tau (\operatorname{div} f)(x_*(t))dt},$$

wobei μ_j die Floquet-Multiplikatoren von $A(t)$ mit den algebraischen Vielfachheiten κ_j sind. Im ersten Fall existiert ein $j \in \{1, \ldots, r\}$, mit $|\mu_j| > 1$. Die Instabilität von x_* folgt aus Satz 11.4.1. Im Fall $n = 2$ und $\triangle < 0$ gilt $\mu_1\mu_2 < 1$. Ein Floquet-Multiplikator ist stets gleich Eins, also o.B.d.A. $\mu_1 = 1$. Daraus folgt $|\mu_2| < 1$ und Satz 11.4.3 liefert die zweite Aussage. □

Beispiel. Sei $G = \mathbb{R}^2$ und betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - y^2), \end{aligned}$$

welches die 2π-periodische Lösung $[x_*(t), y_*(t)]^\mathsf{T} = [\sin t, \cos t]^\mathsf{T}$ besitzt, vgl. Abschnitt 8.4. Es gilt $\operatorname{div} f(x, y) = 2 - 4(x^2 + y^2)$, also

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{div} f)(x_*(t), y_*(t))dt = -4\pi < 0.$$

Nach Korollar 11.4.4 ist $[x_*, y_*]^\mathsf{T}$ orbital asymptotisch stabil. Insbesondere besitzt jede Lösung, die in einer hinreichend kleinen Umgebung des Orbits γ von $[x_*, y_*]^\mathsf{T}$ startet eine asymptotische Phase. Man vergleiche dieses Resultat mit Abschnitt 8.4.

11.5 Parameterabhängigkeit periodischer Lösungen

Als weitere Anwendung der Floquet-Theorie betrachten wir in diesem Abschnitt die parameterabhängige Gleichung

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda),$$

in der Nähe einer gegebenen nichtkonstanten τ_*-periodischen Lösung $x_*(t)$ von $\dot{x} = f(t, x, \lambda_*)$, wenn f aus C^1, und $f(\cdot, x, \lambda)$ periodisch mit Periode τ_λ, $\tau_* = \tau_{\lambda_*}$, ist. Hierbei kann man annehmen, dass τ_* die minimale Periode von x_* ist; allerdings muss τ_* nicht unbedingt die minimale Periode von $f(\cdot, x, \lambda_*)$ sein, z.B. im wichtigen autonomen Fall $f(\cdot, x, \lambda) = g(x, \lambda)$.

Sei x_* ein Equilibrium von $\dot{x} = g(x, \lambda_*)$, gelte also $g(x_*, \lambda_*) = 0$. Ist $g \in C^1$ und gilt $\det \partial_x g(x_*, \lambda_*) \neq 0$, also $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$ für alle Eigenwerte von $\partial_x g(x_*, \lambda_*)$

dann impliziert der Satz über implizite Funktionen, dass es ein $\delta > 0$ und eine C^1-Funktion $x : (\lambda_* - \delta, \lambda_* + \delta) \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $x(\lambda_*) = x_*$, und $g(x(\lambda), \lambda) = 0$ für alle $|\lambda - \lambda_*| < \delta$. In einer Umgebung U von (x_*, λ_*) gibt es keine weiteren Equilibria. Gilt ein ähnliches Resultat auch nahe einer periodischen Lösung?

Um diese Frage zu beantworten, ist es zweckmässig die Perioden auf 2π zu transformieren, welches man durch die Transformation $t \to \tau_\lambda t/2\pi$, $f(t, x, \lambda) \to f(\tau_\lambda t/2\pi, x, \lambda)$ erreichen kann. Setzt man nun $\omega(\lambda) = 2\pi/\tau_\lambda$ sowie $\omega_* = \omega(\lambda_*)$ so wird die Gleichung $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ zu

$$\omega(\lambda)\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.25}$$

Gesucht sind nun 2π-periodische Lösungen x_λ von (11.25) nahe bei x_* wenn λ in einer Umgebung von λ_* ist. Beachte, dass $\omega(\lambda)$ mit f aus C^1 ist, sofern f nichtautonom ist. Wir formulieren das erste Resultat für (11.25).

Satz 11.5.1. *Seien $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $\omega : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ aus C^1, f sei 2π-periodisch in t, und $\omega(\lambda_*) = \omega_*$. Gegeben sei eine periodische Lösung $x_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von $\omega_*\dot{x} = f(t, x, \lambda_*)$. Bezeichnet $A_*(t) = \partial_x f(t, x_*(t), \lambda_*)$, also $\omega_*\dot{y} = A_*(t)y$ die Linearisierung von (11.25) für $\lambda = \lambda_*$ in x_*, so sei keiner ihrer Floquet-Multiplikatoren $\mu_1^*, \ldots, \mu_r^*$ gleich Eins.*

Dann gibt es ein offenes Intervall $J \ni \lambda_*$, ein $r > 0$, und eine C^1-Funktion $x : \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}^n$, $x(\cdot, \lambda_*) = x_*$, sodass $x(\cdot, \lambda)$ die einzige 2π-periodische Lösung von (11.25) ist, die $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t, \lambda) - x_*(t)| < r$ erfüllt. Kein Floquet-Multiplikator $\mu_j(\lambda)$ der linearisierten Probleme $\omega(\lambda)\dot{y} = A_\lambda(t)y$, $A_\lambda(t) = \partial_x f(t, x(t, \lambda), \lambda)$, ist gleich Eins. Gilt $|\mu_j^*| < 1$ für alle j, dann auch $|\mu_k(\lambda)| < 1$ für alle k, in diesem Fall sind die periodischen Lösungen $x(\cdot, \lambda)$ asymptotisch stabil für (11.25).

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Satz über implizite Funktionen und dem Resultat über lineare periodische Gleichungen, Satz 11.3.1. Dazu definieren wir die Banachräume X_j, $j = 0, 1$,

$$X_j := C^j_{per}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) := \{x \in C^j(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) : \ x(t + 2\pi) = x(t),\, t \in \mathbb{R}\},$$

mit den Normen

$$\|x\|_0 := \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|, \quad \|x\|_1 := \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |\dot{x}(t)|.$$

und die Abbildung $F : X_1 \times \mathbb{R} \to X_0$ mittels

$$F(x, \lambda)(t) = \omega(\lambda)\dot{x}(t) - f(t, x(t), \lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$

F ist wohldefiniert, aus C^1 und es gilt $F(x_*, \lambda_*) = 0$; allgemeiner sind die 2π-periodischen Lösungen von (11.25) genau die Lösungen von $F(x, \lambda) = 0$. Für die Linearisierung $L := \partial_x F(x_*, \lambda_*)$ erhalten wir

$$Lu(t) = \omega_*\dot{u}(t) - \partial_x f(t, x_*(t), \lambda_*)u(t) = \omega_*\dot{u}(t) - A_*(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da nach Voraussetzung alle Floquet-Multiplikatoren $\mu_j^* \neq 1$ sind, zeigt Satz 11.3.1, dass $L : X_1 \to X_0$ ein Isomorphismus ist. Die erste Behauptung folgt nun mit dem Satz über implizite Funktionen, die weiteren aus der stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte einer Matrix von ihren Koeffizienten, und aus Satz 11.4.1. □

Dieser Satz ist nicht auf den autonomen Fall anwendbar, da dann wenigstens ein Floquet-Multiplikator Eins ist; wie schon im Beweis des Stabilitätssatzes im vorhergehenden Abschnitt ist der autonome Fall schwieriger. Es sei also $f(t,x,\lambda) = g(x,\lambda)$; wir transformieren wieder auf Periode 2π und erhalten das Problem

$$\omega\dot{x} = g(x,\lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.26}$$

In diesem Fall ist die gesuchte Periode τ also auch $\omega = 2\pi/\tau$ nicht a priori bekannt, sie muss mitbestimmt werden. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad kompensiert eine Dimension, also den algebraisch einfachen Floquet-Multiplikator Eins. Das Resultat für den autonomen Fall lautet wie folgt.

Satz 11.5.2. *Sei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ aus C^1. Gegeben seien $\omega_* > 0$ und eine 2π-periodische Lösung $x_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von $\omega_*\dot{x} = g(x,\lambda_*)$. Bezeichnet $A_*(t) = \partial_x g(x_*(t),\lambda_*)$, also $\omega_*\dot{y} = A_*(t)y$ die Linearisierung von (11.26) für $\lambda = \lambda_*$ in x_*, so sei $\mu_0 = 1$ algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator.*

Dann gibt es ein offenes Intervall $J \ni \lambda_*$, ein $r > 0$, und C^1-Funktionen $\omega : J \to \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}^n$, mit $\omega(\lambda_*) = \omega_*$, $x(\cdot,\lambda_*) = x_*$, sodass $x(\cdot,\lambda)$ eine 2π-periodische Lösung von (11.26) ist, die $\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t,\lambda) - x_*(t)| < r$ erfüllt. $x(\cdot,\lambda)$ ist eindeutig bis auf Translationen. $\mu_0 = 1$ ist algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator der linearisierten Probleme $\omega(\lambda)\dot{y} = A_\lambda(t)y$, $A_\lambda(t) = \partial_x g(x(t,\lambda),\lambda)$. Gilt $|\mu_j^*| < 1$ für alle $j \neq 0$, dann auch $|\mu_k(\lambda)| < 1$ für alle $k \neq 0$, in diesem Fall sind die periodischen Lösungen $x(\cdot,\lambda)$ asymptotisch orbital stabil für (11.26).

Beweis. Neben den bereits genannten Problemen, die im autonomen Fall auftreten, sei daran erinnert, dass mit $x_*(\cdot)$ auch alle Translationen $x_*(\cdot + \sigma)$ 2π-periodische Lösungen von $\omega_*\dot{x} = g(x,\lambda_*)$ sind. Um dieser Nichteindeutigkeit aus dem Weg zu gehen, führen wir eine Nebenbedingung ein, die auf der Identität

$$\langle x_*|\dot{x}_*\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x_*(t)|\dot{x}_*(t))dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}|x_*(t)|_2^2 dt = 0$$

beruht. Dabei ist

$$\langle u|v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u(t)|v(t))dt$$

ein für unsere Zwecke geeignetes Innenprodukt auf X_j. Wir definieren die Abbildung $G : X_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to X_0 \times \mathbb{R}$ durch

$$G(x,\omega,\lambda) = (\omega\dot{x} - g(x,\lambda), \langle x|\dot{x}_*\rangle).$$

Diese Funktion ist aus C^1 und erfüllt $G(x_*,\omega_*,\lambda_*) = 0$. Die Linearisierung L von G bzgl. (x,ω) in (x_*,ω_*,λ_*) ist dann durch

$$L(y,\alpha) = (\omega_*\dot{y} - A_*(t)y + \alpha\dot{x}_*, \langle y|\dot{x}_*\rangle), \quad y \in X_1,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

gegeben.

Um die Bijektivität von L zu zeigen, seien $b \in X_0$, $\beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Gleichung $L(y,\alpha) = (b,\beta)$ ist äquivalent zu

$$\omega_* \dot{y} = A_*(t)y - \alpha \dot{x}_* + b(t), \quad y(0) = y(2\pi), \quad \langle y|\dot{x}_*\rangle = \beta.$$

Es bezeichne $Y_*(t)$ das Hauptfundamentalsystem zu $\omega_* \dot{z} = A_*(t)z$, also ist $M_* := Y_*(2\pi)$ die zugehörige Monodromiematrix. Dann ist $\dot{x}_*(t) = Y_*(t)v$ mit $v = \dot{x}_*(0) \neq 0$. Integration der Gleichung für y ergibt mittels Variation der Konstanten und $y_0 = y(0)$

$$y(t) = Y_*(t)y_0 - \frac{t\alpha}{\omega_*}Y_*(t)v + Y_*(t)\frac{1}{\omega_*}\int_0^t Y_*(s)^{-1}b(s)ds,$$

also für $t = 2\pi$

$$(I - M_*)y_0 + \frac{2\pi\alpha}{\omega_*}v = M_*\frac{1}{\omega_*}\int_0^2 \pi Y_*(s)^{-1}b(s)ds. \tag{11.27}$$

Nun ist nach Voraussetzung $\mu_0 = 1$ einfacher Eigenwert von M_*, also $R(I - M_*) \oplus N(I - M_*) = \mathbb{R}^n$, und da $N(I - M_*) = \operatorname{span}\{v\}$ gilt, gibt es genau ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und mindestens ein $y_0 \in \mathbb{R}^n$, sodass (11.27) erfüllt ist. y_0 ist nicht eindeutig und kann durch $y_0 + \gamma v$ ersetzt werden. Dies erlaubt uns auch die Gleichung $\langle y|\dot{x}_*\rangle = \beta$ eindeutig zu lösen, denn

$$\beta = \langle y + \gamma\dot{x}_*|\dot{x}_*\rangle = \langle y|\dot{x}_*\rangle + \gamma\langle \dot{x}_*|\dot{x}_*\rangle$$

lässt sich eindeutig nach γ auflösen. Die Bijektivität von L ist damit bewiesen.

Der Satz über implizite Funktionen ist somit auf G im Punkt $(x_*, \omega_*, \lambda_*)$ anwendbar, und die erste Behauptung damit bewiesen.

Sei nun $u(t)$ eine weitere 2π-periodische Lösung von (11.26). Setze $\varphi(s) = \langle u(\cdot + s)|x_*\rangle = \langle u|x_*(\cdot - s)\rangle$; dann gilt $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, also gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \dot{\varphi}(\xi) = -\langle u|\dot{x}_*(\cdot - \xi)\rangle = -\langle u(\cdot + \xi)|\dot{x}_*\rangle,$$

d.h. die verschobene Funktion $u(\cdot + \xi)$ erfüllt die Nebenbedingung. Dies zeigt, dass die gefundenen 2π-periodischen Lösungen bis auf Translationen eindeutig sind. Die verbleibenden Behauptungen folgen wiederum aus der Stetigkeit der Eigenwerte und aus dem Stabilitätssatz 11.4.3. □

Übungen

1. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0, \ \alpha \neq \beta,$$

keinen reellen Logarithmus besitzt, das heißt, es existiert kein $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $M = e^L$.

2. Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det M > 0$ und $\sigma(M) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$. Ferner sei Γ eine Jordan-Kurve, welche alle Eigenwerte von M umrundet, sodass $(-\infty, 0]$ im äußeren von Γ liegt und Γ symmetrisch zur reellen Achse ist; vgl. Abb. 11.1. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\log M = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - M)^{-1} \log \lambda d\lambda,$$

reell ist.

3. Gegeben sei das System $\dot{x} = A(t)x$, mit

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\sin(2t) & \cos(2t) - 1 \\ \cos(2t) + 1 & \sin(2t) \end{bmatrix},$$

und der speziellen Lösung $[x_1(t), x_2(t)]^\mathsf{T} = [e^{-t}(\cos t + \sin t), e^{-t}(\sin t - \cos t)]^\mathsf{T}$. Berechnen Sie die Floquet-Multiplikatoren von $A(t)$. Ist die triviale Lösung $x_* = 0$ stabil oder instabil?

4. Betrachten Sie das System $\dot{x} = A(t)x$, mit

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{bmatrix},$$

und der speziellen Lösung $[x_1(t), x_2(t)]^\mathsf{T} = [e^{\frac{t}{2}} \cos t, -e^{\frac{t}{2}} \sin t]^\mathsf{T}$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $A(t)$ unabhängig von t sind und berechnen Sie sowohl die Eigenwerte, als auch die Floquet-Multiplikatoren von $A(t)$. Kann man aus der Lage der Eigenwerte von $A(t)$ Rückschlüsse auf die Stabilität der trivialen Lösung $x_* = 0$ ziehen?

5. Beweisen Sie die Aussage 5(b) aus Satz 11.1.1.