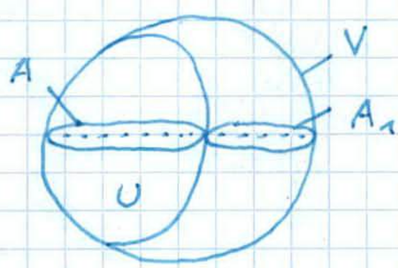
Satz 2.8.7 Ist U ein Unterraum von V, so gibt es mindestens einen komplementären Unterraum von V.

Beweis. Die Unterräume U, T von V sind komplementär, laut 2.8.6, genau dann, wenn $U \oplus T = V$. Wir wählen eine Basis A von U und ergänzen diese durch eine l.u. Menge $A_1 \subset V \setminus U$ zu einer Basis von V. ... laut Basisergänzungssatz 2.5.8. Also ist $A \cup A_1$ eine Basis von V. Nun weisen wir nach, dass U und $[A_1]$ komplementär bezüglich V sind:



Sei $m \in U \cap [A_1]$. Es muss $m = \mathcal{O}$ folgen. Der Vektor m besitzt nach Satz 2.5.3 eine eindeutig bestimmte Darstellung als Linearkombination in der Basis $A \cup A_1$ von V. ... weil $m \in U \subset V$. Wegen $m \in U = [A]$ sind in dieser Linearkombination die Koeffizienten bei allen Vektoren aus A_1 gleich Null.

$$\sum_{v \in A \cup A_1} x_v v = \sum_{v \in A} x_v v + \sum_{v \in A_1} x_v v = m = \sum_{v \in A} x_v v \Rightarrow$$

$$\sum_{v \in A_1} x_v v = \mathcal{O},$$

und weil A_1 l.u. ist, folgt aus Satz 2.4.5, dass diese LK trivial ist, d.h. $\forall v \in A_1 : x_v = 0$.

Wegen $m \in [A_1]$ sind auch die restlichen Koeffizienten gleich Null.

$$\ldots = m = \sum_{v \in A_1} x_v v \Rightarrow \sum_{v \in A} x_v v = \mathcal{O},$$

und weil die Basis A l.u. ist, folgt wie vorher, dass $\forall v \in A: x_v = 0$. Insgesamt ergibt das $m = \mathcal{O}$.

$$\sum_{v \in A \cup A_1} x_v v = \sum_{\ldots} 0 \cdot v = \sum_{\ldots} \mathcal{O} = \mathcal{O} = m.$$

Somit gilt $U \cap [A_1] = \{\mathcal{O}\}$. ... weil $\forall m \in U \cap [A_1]: m = \mathcal{O}$. Der Summenraum $U + [A_1]$ enthält nach Konstruktion die Basis $A \cup A_1$ von V, was $U + [A_1] = V$ ergibt. $U + [A_1] = [A] + [A_1]$.
Sei $m \in V$ beliebig, so gilt

$$\sum_{v \in A \cup A_1} x_v v = \sum_{v \in A} x_v v + \sum_{v \in A_1} x_v v = m,$$

also $m \in [A] + [A_1]$. „$\subseteq$" ist trivial, also $U + [A_1] = V$. $\square$