ÜBUNGEN ZU “PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN” WS 2020 BLATT 6 (5. 11. 2020), SKRIPTUM BIS ABSCHNITT 5.2

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge und $u \in C^2(\Omega)$. Es gelte für alle $R > 0$ und $x \in \Omega$ mit $\overline{B_R(x)}$ die Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \frac{1}{S_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, ds,$$

wobei S_n die Oberfläche der Einheitskugel ist. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.

2. Zeigen Sie, dass die Aussage von Beispiel **1.** schon für $u \in C^1(\Omega)$ gilt und u dann sogar in $C^\infty(\Omega)$ ist. Hinweis: schreiben sie die Mittelwerteigenschaft als $u(x) = u * v$ für eine geeignete Funktion v; versuchen Sie dann v durch eine besser geeignete Funktion $\phi \in C^2(\Omega)$ zu ersetzen.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie:
(i) Wenn $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ konvex und u harmonisch ist, dann ist $v = \phi(u)$ subharmonisch, d.h. $\Delta v \geq 0$.
(ii) Ist $u \in C^3(\Omega)$ harmonisch, so ist $v = |\nabla u|^2$ subharmonisch.

4. Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes offenes Intervall und $L := \frac{d^2}{x^2} + g\frac{d}{dx}$, mit $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $u \in C^2((a, b)) \cap C([a, b])$ folgende Implikationen gelten.
(i) $Lu > 0$ in $(a, b) \implies u$ kann ihr Maximum nicht in (a, b) annehmen.
(ii) $Lu \geq 0$ in $(a, b) \implies u$ kann ihr Maximum nicht in (a, b) annehmen, außer u ist konstant.
Überlegen Sie, ob (i) und (ii) ihre Gültigkeit behalten, wenn g nur in jedem abgeschlossenen Intervall $[a', b'] \subset (a, b)$, aber nicht unbedingt in $[a, b]$ beschränkt ist.

5. Zeigen Sie, dass folgendes Problem nur die triviale Lösung $u = 0$ hat:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^3 \text{ für } x^2 + y^2 < 1,$$
$$u = 0 \text{ für } x^2 + y^2 = 1.$$

6. Zeigen Sie: Ist w harmonisch auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $x \in \Omega$ sodass $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$, dann gilt für alle $i = 1 \ldots n$:

$$|\partial_i w| \leq \frac{n}{r} \|w\|_{L^\infty(B_r(x))}.$$

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

Zeigen Sie weiters, dass für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k$ gilt:

$$|\partial^\alpha w(x)| \leq \left(\frac{kn}{r}\right)^k \|w\|_{L^\infty(B_r(x))}.$$

7. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in H^1(U)$. Angenommen $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $\sup_{y \in R} |f'(y)| < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \circ u \in H^1(U)$ und $\partial_i(f \circ u) = f'(u)\partial_i u$ gilt. Zeigen Sie dasselbe Resultat für unbeschränkte U unter der zusätzlichen Voraussetzung $f(0) = 0$.

8. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Aufgabe: ist $u \in H^1(\Omega)$, dann sind auch $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = -\min\{u, 0\}$ und $|u|$ in $H^1(\Omega)$. (Hinweis: die ersten beiden Aussagen ergeben sich direkt aus der dritten).