Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 6

Übungstermin: 6.5.2020 29. April 2020

Aufgabe 26:
Sei $c_1 = 0$, $c_3 = 1$ und $c_2 \in (0,1)$ beliebig.
a) Welche Konvergenzordnung ist für 3-stufige Runge-Kutta Verfahren erreichbar, wenn diese durch Kollokation mit diesen Kollokationspunkten erzeugt werden?
b) Geben Sie die Butcher Tableaus dieser Verfahren an.

Aufgabe 27:
Sei zunächst $[a,b] = [-1,1]$ und $\omega(x) \equiv 1$.
a) Zeigen Sie, dass die Orthogonalpolynome $(q_s)_{s\in\mathbb{N}_0}$ aus Remark B.13 des Vorlesungsskriptes gerade bzw. ungerade Polynome sind, falls s gerade bzw. ungerade ist. Dazu können Sie die Konstruktion dieser Polynome aus der Monombasis mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt verwenden.
b) Sei nun $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^\top \end{array}$ das Butcher Tableau eines durch Kollokation erzeugten m-stufigen Runge-Kutta Verfahrens, bei dem Gauß-Quadratur zur Grundlage genommen wurde. Beweisen Sie, dass die Kollokationspunkte und die Gewichte im folgenden Sinn symmetrisch sind:

$$\left|c_j - \frac{1}{2}\right| = \left|c_{m+1-j} - \frac{1}{2}\right|, \qquad b_j = b_{m+1-j}, \qquad j = 1,\dots,m. \tag{1}$$

Aufgabe 28:
Sei

$$\mathbf{M}_h := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)} \tag{2}$$

mit $N \in \mathbb{N}$ und $h := 1/N$ die Matrix aus Example 4.2 des Vorlesungsskriptes.
a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte λ_j mit zugehörigen Eigenvektoren v_j von $\mathbf{M}_h$ gegeben sind durch

$$\lambda_j = \frac{2}{h^2}\left(-1 + \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)\right), \qquad j = 1,\dots,N-1 \tag{3a}$$

bzw.

$$v^{(j)} := \left(\sin\left(\frac{j\pi}{N}\right), \sin\left(\frac{2j\pi}{N}\right), \dots, \sin\left(\frac{(N-1)j\pi}{N}\right)\right)^\top. \tag{3b}$$

b) Begründen Sie, warum das zugehörige Anfangswertproblem

$$U_h' = M_h U_h, \qquad U_h(0) = G \tag{4}$$

für $G \in \mathbb{R}^{N-1}$ steif genannt wird. Beweisen Sie dazu, dass $\lim_{N\to\infty} \lambda_1 = -\pi^2$ und $\lim_{N\to\infty} \lambda_{N-1} = -\infty$.

Aufgabe 29:
Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (4) auf dem Intervall $[0,1]$ numerisch. Der Anfangswert G soll die Funktion $g(x) := \exp(-30(x-1/2)^2)$ nodal approximieren, d.h. $G_i := g(i/N)$ für $i = 1,\dots,N-1$.
a) Sei die Ortsschrittweite h gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe von (3a), wie groß die Zeitschrittweite τ abhängig von h maximal sein darf, damit das explizite Euler Verfahren zu exponentiell fallenden Lösungen führt.
b) Überprüfen Sie dieses Resultat numerisch. Testen Sie dafür das explizite Euler Verfahren für dieses Problem numerisch für unterschiedliche Orts- und Zeitschrittweiten (z.B. $h = 2^{-1},\dots,2^{-10}$, $\tau = 2^{-1},\dots,2^{-10}$). Dazu können Sie z.B. $\|U_h(t)\|_\infty$ über eine gewisse Zeit $t \in [0,T]$ grafisch darstellen.
c) Testen Sie nun mit dem impliziten Euler Verfahren. Zur Lösung des linearen Gleichungssystem verwenden Sie bitte LU-Faktorisierung und Vorwärts-/Rückwärtssubstitution (z.B. in Python durch die Funktionen `lu_factor` und `lu_solve` der Bibliothek `scipy.linalg`).

Aufgabe 30:
Schreiben Sie ein Programm, welches für ein gegebenes Runge-Kutta Verfahren mit Stabilitätsfunktion R und ein gegebenes Rechteck $Q = \{z \in \mathbb{C} : (\Re(z), \Im(z)) \in [a,b] \times [c,d]\}$ diejenigen $z \in Q$ grafisch hervorhebt, für die $|R(z)| \le 1$ gilt.

Testen Sie dieses Programm mit bereits bekannten expliziten und impliziten Runge-Kutta Verfahren. Verwenden Sie unter anderem die Verfahren aus Remark 4.25 und Definition 4.31. Welche Rechtecke Q sind interessant?