1. Seien $T > 0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, wobei $G := \Omega \times (0, T]$ und $\Gamma := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T))$. Betrachten Sie die Differentialoperatoren

$$L_1 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

und $L_2 u = L_1 u + c(x,t)u$, für eine symmetrische und gleichmäßig elliptische Matrix $A = (a_{ij}(x,t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} \in C(\overline{G})$, einen Vektor $b = (b_i(x,t)) \in \mathbb{R}^n$ und $c \in C(\overline{G})$. Zeigen Sie:

(i) Für $u \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $u_t + L_2 u \leq 0$ in G und $u \leq 0$ auf Γ, dass $u \leq 0$ in G.
Hinweis: *Beachten Sie, dass c negative Werte annehmen darf. Welche Differentialungleichung erfüllt $v = e^{\lambda t} u$?*

(ii) Für $u, v \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ mit

$$u_t + L_1 u + f(x,t,u) \leq v_t + L_1 v + f(x,t,v) \quad \text{in } G \text{ und } u \leq v \text{ auf } \Gamma$$

gilt $u \leq v$ in G.

(iii) Für eine stetig differenzierbare Funktion $f = f(x,t,u)$ gilt, dass das Anfangsrandwertproblem für die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_t + L_1 u + f(x,t,u) = 0 & \text{in } G, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

höchstens eine klassische Lösung haben kann.

(i) Was heißt gleichmäßig elliptisch?

$\forall x \, \forall t$: $\lambda_1(x,t), \dots, \lambda_n(x,t) > 0$ bzw. < 0, wobei das die EW von $A(x,t)$ sind.

Sei also $u \in C_1^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $u_t + L_2 u \leq 0$ in G und $u \leq 0$ auf γ.

$v := e^{\lambda t} u$; $\quad \partial_t v = \lambda e^{\lambda t} u + e^{\lambda t} u_t = \lambda v + e^{\lambda t} u_t \leq \lambda v - e^{\lambda t} L_2 u = \lambda v - L_2 v$

$\Rightarrow v_t + L_2(v) \leq \lambda v \Rightarrow v_t + (L_1 v - c(x,t)v) - \lambda v \leq 0 \Rightarrow v_t + L_1 v + \underbrace{(-c(x,t) - \lambda)}_{\tilde{c}_\lambda(x,t)} v \leq 0$

Wegen $c \in C(\overline{G})$ gilt für hinr. kleines μ, dass $\tilde{c}_\mu \geq 0$

Wir definieren $\tilde{L}_2 := L_1 + \tilde{c}_\mu$, es gilt also $v_t + \tilde{L}_2 v \leq 0$

$u \leq 0$ auf $\gamma \Rightarrow v = e^{\lambda t} u \leq 0$ auf γ

Nach dem schwachen Maximumprinzip Satz 6.31. gilt $\quad \sup_{(x,t)\in G} v(x,t) \leq \max\{0, \sup_{(x,t)\in\Gamma} v(x,t)\} = 0$

also $0 \geq v = e^{\lambda t} u$ in G, daher auch $u \leq 0$ in G

(ii) Betrachte $w := u - v$

es gilt $w_t = u_t - v_t \leq L_1 v + f(x,t,v) - L_1 u - f(x,t,u) = -L_1 w + (f(x,t,v) - f(x,t,u)) \overset{(*)}{=} -L_1 w - \underbrace{\partial_3 f(x,t,\xi_{x,t})}_{c(x,t):=} w$ mit $\xi_{x,t} \in [\min(u,v), \max(u,v)]$

$L_2 := L_1 + c$, es gilt $w_t + L_2 w \leq 0$ in G

und $w \leq 0$ auf Γ; nach (i) gilt $w \leq 0$ in G, also $u \leq v$ in G

(*) für x,t betrachte $\varphi_{x,t}(z) := f(x,t,z)$, es gilt $\varphi_{x,t}(v(x,t)) - \varphi_{x,t}(u(x,t)) = -\varphi_{x,t}'(\xi_{x,t}) \, w(x,t) = -\partial_3 f(x,t,\xi_{x,t}) \, w(x,t)$

$\varphi_{x,t}'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{x,t}(z+h) - \varphi_{x,t}(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,t,z+h) - f(x,t,z)}{h} = \partial_3 f(x,t,z)$

(iii) Seien u, v Lösungen des Problems.

es gilt $u_t + L_1 u + f(x,t,u) = v_t + L_1 v + f(x,t,v)$ in G und $\begin{cases} u(x,t) = u_0 = v(x,t) & \text{in } \Omega \\ u = g = v & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$

$\hookrightarrow u = v$ auf Γ

mit (ii) folgt $u \leq v$ und $u \geq v$ also $u = v$

2. Betrachten Sie die skalare Reaktions-Diffusionsgleichung

$$u_t = \Delta u + \lambda u - u^3 \quad \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\,,$$

für $u(x,t) \in \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ und einem negativen Parameter λ.

(i) Bestimmen Sie die räumlich homogenen Lösungen $u = u(t)$ und untersuchen Sie deren asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$.
Hinweis: Die räumlich homogenen Lösungen erfüllen eine gewöhnliche DGl. Bestimmen Sie die Stationärzustände dieser DGl und deren Stabilität.

(ii) Betrachten Sie das ARWP mit der Randbedingung

$$u(x,t) = 0 \text{ für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)\,,$$

und beschränkten Anfangsdaten

$$m \le u(x,0) \le M \text{ für alle } x \in \Omega\,.$$

Zeigen Sie, dass klassische Lösungen $u(x,t)$ des ARWP und die räumlich homogenen Lösungen $\underline{u}(t)$ bzw. $\overline{u}(t)$ von dem ARWP mit Anfangsbedingungen $\underline{u}(0) = \min\{0,m\}$ bzw. $\overline{u}(0) = \max\{0,M\}$ die Ungleichungen

$$\underline{u}(t) \le u(x,t) \le \overline{u}(t) \quad \text{für } x \in \Omega\,,\ t \ge 0\,,$$

erfülllen.

(iii) Was können Sie aus diesen Ungleichungen für das zeitlich asymptotische Verhalten von klassischen Lösungen $u(x,t)$ des ARWP schließen?

(i) Für eine räumlich homogene Lsg. gilt $u_t = \lambda u - u^3$, wobei $\lambda < 0$

$\rightsquigarrow \frac{u_t}{\lambda u - u^3} = 1$; $\int \frac{1}{\lambda u - u^3}\,du \,\Big|\, \begin{matrix} u^2 = v \\ \frac{dv}{du} = 2u \end{matrix} \Big| = \int \frac{1}{2v(\lambda - v)}\,dv \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{\lambda v}\,dv + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\lambda(\lambda - v)}\,dv = \frac{1}{2\lambda}\ln(v) - \frac{1}{2\lambda}\ln(\lambda - v)$

$\frac{a}{v} + \frac{b}{\lambda - v} \overset{!}{=} \frac{1}{v(\lambda - v)}$, also $a(\lambda - v) + b\,v = 1$

mits. $v = \lambda$: $b\lambda = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{\lambda}$

und: $v = 0$: $a\lambda = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\lambda}$

(*)

also $\int \frac{1}{\lambda u - u^3}\,du = \frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{u^2}{u^2 - \lambda}\right)$

$\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{u^2}{u^2-\lambda}\right) = t + \tilde{c} \Rightarrow \frac{u^2}{u^2 - \lambda} = c\,e^{2\lambda t} \Rightarrow u^2 = ce^{2\lambda t}u^2 - ce^{2\lambda t}\lambda$

$\Rightarrow u^2(1 - ce^{2\lambda t}) = -c\lambda e^{2\lambda t}$

$\Rightarrow u = \pm\sqrt{\frac{c\lambda e^{2\lambda t}}{ce^{2\lambda t} - 1}} = \left(\pm \overset{\in \mathbb{C}}{\sqrt{\lambda}}\, e^{\lambda t}\left(e^{2\lambda t} - \frac{1}{c}\right)^{-1/2}\right)$

$\partial_t u(t) = \sqrt{\lambda}\left(\lambda e^{\lambda t}\left(e^{2\lambda t} - \frac{1}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} + e^{\lambda t}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{2\lambda t} - \frac{1}{c}\right)^{-\frac{3}{2}} 2\lambda e^{2\lambda t}\right)$

$= \lambda\left(u^{-1} + \dots\right)$ ✓ (mit Maple)

$c \neq 0$, weil $c = e^{2\lambda\tilde{c}}$

$\left(\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} \pm e^{\lambda t}\left(\lambda\left(e^{2\lambda t} - \frac{1}{c}\right)^{-1}\right)^{1/2} = 0\right.$

$\lambda u - u^3 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee \lambda = u^2 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = \pm\overbrace{\sqrt{\lambda}}^{\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$

$\partial_u(\lambda u - u^3)\big|_{u=0} = \lambda - 3u^2\big|_{u=0} = \lambda < 0$ also asymptotisch stabil