3.4.5 Lemma. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$, so gibt es eine Teilfolge $(x_{m(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\liminf_{n\to\infty} x_n$ konvergiert, und auch eine Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\limsup_{n\to\infty} x_n$ konvergiert.

Beweis. Sei $N\in\mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$. Spoiler, ϵ hat nichts mit dem ϵ aus (3.3) zu tun. Wegen

$$\inf\{x_k : k \geq N\} \leq \liminf_{n\to\infty} x_n < \liminf_{n\to\infty} x_n + \epsilon$$

ist $\liminf_{n\to\infty} x_n + \epsilon$ keine untere Schranke von $\{x_k : k \geq N\}$. Die erste Ungleichheit erkennt man dadurch, dass $(y_N)_{N\in\mathbb{N}} := (\inf\{x_k : k \geq N\})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und man ganz informell (Achtung, bitte nicht nachmachen) auch $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \inf\{x_n : n \geq N\} \overset{!}{:=} \inf\{x_n : n \geq \infty\} \overset{!}{\geq} \inf\{x_k : k \geq N\}$ mit $N\in\mathbb{N}$ schreiben kann. Die Zweite ist wegen $\epsilon > 0$ trivial, wobei ϵ im Limes oder außerhalb stehen kann (vgl. Satz 3.3.5 (ii)). Der Rest ist auch trivial, weil keine untere Schranke größer als inf sein kann $\Leftrightarrow$ alle unteren Schranken sind kleiner oder gleich inf (Verneinungssatz). Also gibt es ein $l(N,\epsilon) \geq N$, sodass

$$\inf\{x_k : k \geq N\} \leq x_{l(N,\epsilon)} < \liminf_{n\to\infty} x_n + \epsilon. \tag{3.7}$$

Im schlimmsten Fall (wenn ϵ sehr klein ist), ist „$\leq$" ein „$=$". l ist übrigens die, für eine Teilfolge notwendige, streng monoton steigende, Funktion der Indizes von x_n. Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge[6] $(x_{m(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem wir zunächst $m(1) = 1$ setzen. Rekursionssatz!

Ist $m(j) \in \mathbb{N}$ definiert, so gilt wegen (3.7) für $m(j+1) := l\left(m(j)+1, \frac{1}{j+1}\right) \geq m(j)+1 > m(j)$

$$\inf\{x_k : k \geq m(j)+1\} \leq x_{m(j+1)} < \liminf_{n\to\infty} x_n + \frac{1}{j+1}.$$

Die obere erste Ungleichheit ist durch $l(N, \epsilon) \geq N$ zu erklären, wobei $m(j)+1$ den Platz von N und $\frac{1}{j+1}$ den Platz von ϵ einnimmt. Das ist ok, weil $\frac{1}{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$ auch stets positiv, wie $\epsilon > 0$ ist. Außerdem sind $m(j), m(j)+1 \in \mathbb{N}$ und daher als Index geeignet. $m(j)$ ist jetzt also offiziell streng monoton steigend. Bei (3.7) muss man jetzt nur noch $m(j)+1$ für N und $\frac{1}{j+1}$ für ϵ, und dann auch $m(j+1)$ für $l\left(m(j)+1, \frac{1}{j+1}\right)$ einsetzen. Für $j \to \infty$ konvergieren die linke und rechte Seite dieser Ungleichungskette gegen $\liminf_{n\to\infty} x_n$. $\lim_{j\to\infty} \inf\{x_k : k \geq m(j)+1\} = \lim_{j\to\infty}\left(\liminf_{n\to\infty} x_n + \frac{1}{j+1}\right)$, weil $m(j)+1$ (anstelle von N) größer wird (gegen ∞ geht), weil $m(j)+1$ streng monoton steigend ist. Deshalb $\lim_{j\to\infty} \inf\{x_k : k \geq m(j)+1\} = \liminf_{n\to\infty} x_n$ (vgl. Definition 3.4.4). $\frac{1}{j+1} \to 0$ fällt weg, trivial. Nach dem Einschlusskriterium Satz 3.3.2 folgt die Konvergenz von $(x_{m(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen $\liminf_{n\to\infty} x_n$. Damit tatsächlich der Einschlussatz angewendet werden kann, müsste man ganz oben „$<$" mit „$\leq$" ersetzen, was ja ok ist. Außerdem folgt strenggenommen $(x_{m(j+1)})_{j\in\mathbb{N}} \to \liminf_{n\to\infty} x_n$, aber egal.

Der Beweis für den Limes Superior verläuft entsprechend. „$\leq$" und „$<$" werden umgekehrt und das eine „$+$" wird zu „$-$". $\square$