91. Bsp. 6.2. Zeigen Sie auch, dass f in allen rationalen Punkten unstetig ist.

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } x \text{ rational}, \ x = \frac{m}{n} \text{ mit } ggT\{m, n\} = 1. \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem irrationalen Punkt stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es zu jeder irrationalen Zahl x und vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ gibt, sodass $\frac{p}{q} \in (x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{Q}$ sicher $\frac{1}{|q|} < \varepsilon$.

Beweis: Wir zeigen, dass für irrationale x gilt

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t \in \mathbb{R} : d(x, t) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(t)) < \varepsilon.$

Seien $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fest.
Wir wissen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wir müssen also ein solches δ wählen, sodass

$\forall t \in \mathbb{R} : d(x, t) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(t)) = d(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ mit $n \geq N$.

Sei $\tilde{n} < N$ beliebig. Weil $N < \infty$, gibt es nur endlich viele $\tilde{n} \in \mathbb{N}$. Genauso gibt es nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$: $m / \tilde{n}$ ist vollständig gekürzt, sodass

$m/\tilde{n} \leq t + \delta_0$, wobei $\delta_0 > 0$ beliebig ist. Insbesondere gibt es nur endlich viele im Intervall $I := (x - \delta_0, x + \delta_0)$. Setze

$$\delta := \min\{|x - \tfrac{m}{\tilde{n}}| : \tfrac{m}{\tilde{n}} \in I\}.$$

Wähle nun $\frac{p}{q} \in (x - \delta, x + \delta)$ beliebig. Angenommen, es gilt $1/|q| \geq \varepsilon > 1/N \Rightarrow N > |q|$.

Im schlimmsten Fall ist $\frac{p}{q}$ ganz nahe an x, d.h. $\delta = |x - p/q|$. Wenn $x > p/q$, dann

$$(x - \delta, x + \delta) = (x - (x - p/q), x + x - p/q) = (p/q, 2 - p/q),$$

also $p/q \notin (x - \delta, x + \delta)$ ↯. Analoges folgt für $x < p/q$.

Also muss $1/|q| < \varepsilon$. □

Um die Unstetigkeit von f in rationalen $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen,

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 : \exists t \in \mathbb{R} : d(x, t) < \delta \wedge d(f(x), f(t)) \geq \varepsilon,$$

wähle $\varepsilon := f(x)/2$.

In jedem Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ gibt es ein $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. also gilt

$$d(f(x), f(t)) = d(f(x), 0) = f(x) \geq f(x)/2 = \varepsilon. \quad \square$$

93. Bsp 6.6 An welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig und welche Art von Unstetigkeit liegt an den Unstetigkeitsstellen vor?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{falls } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiters bestimme man, für welche Wahl $a, b \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{falls } x \leq 1, \\ ax - x^3, & \text{falls } 1 < x \leq 2, \\ bx^2, & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

f ist in allen Punkten, außer $x = -1$, stetig. Dort liegt eine Unstetigkeitsstelle 1. Art.

Beweis: Wir zeigen vorerst die Stetigkeit von $g: x \mapsto x$, also

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall t \in \mathbb{R} : d(t, x) < \delta \Rightarrow d(g(t), g(x)) < \varepsilon.$

Wähle $\delta := \varepsilon$, dann $d(g(t), g(x)) = d(t, x) < \delta = \varepsilon$.

Laut Korollar 6.1.8, sind $x^2 + 2x + 1$ und $1 - x$ stetig. Wir betrachten die Grenzfälle von f separat.

f ist in $x = 0$ stetig. Wir zeigen dazu

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall t \in \mathbb{R} : d(t, 0) < \delta \Rightarrow d(f(t), f(0)) < \varepsilon.$

Wir setzen $\delta := \min(-1 + \sqrt{1 + \varepsilon/2}, \varepsilon/2)$, also gilt für $-1 \leq t \leq 0$, dass

$|(-1+\sqrt{1+\varepsilon/2})^2 + (-1+\sqrt{1+\varepsilon/2}) \cdot 2| = |1 - 2\sqrt{1+\varepsilon/2} + 1 + \varepsilon/2 - 2 + 2\sqrt{1+\varepsilon/2}| = \varepsilon/2 < \varepsilon$, und sonst

$|1 - \varepsilon/2 - 1| = \varepsilon/2 < \varepsilon$.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : \exists t \in \mathbb{R} : d(t, x) < \delta \wedge d(f(t), f(x)) \geq \varepsilon$.

Es seien $\varepsilon := 1$ und $t := -1 - \delta/2$. Dann gilt

$d(t,x) = |-1 - \delta/2 - (-1)| = \delta/2 < \delta$ und

$d(f(t), f(x)) = |1 - (-1 - \delta/2)| = 2 + \delta/2 \geq \varepsilon = 1$.

f hat bei $x = -1$ eine Unstetigkeitsstelle 1. Art, weil

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = 1 - (-1) = 2 \neq 0 = (-1)^2 + 2(-1) + 1 =$

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$. $\square$

f ist für $a = 3$ und $b = -1/2$.

Beweis: Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{falls } x \leq 1, \\ 3x - x^3, & \text{falls } 1 < x \leq 2, \\ -1/2 \cdot x^2, & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

An den Punkten $x = 1$ und $x = 2$ sind keine Unstetigkeitsstellen. $\square$

44. Bsp. 6.7 Man betrachte folgende Funktion als Funktion von $\mathbb{C} \setminus N$ nach $\mathbb{C}$ (beide mit der euklidischen Metrik versehen), wobei N die Menge der Nullstellen des Nenners ist

$$f(z) = \frac{z^3 - 13z - 12}{z^3 + z^2 + z + 1}.$$

Man zeige, dass f stetig ist, und man gebe die maximale Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, auf die sich f stetig fortsetzen lässt.

Beweis: Wir zerlegen $f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$, $g_1(z) = h_{1,1}(z) + h_{1,2}(z) + h_{1,3}(z)$, $h_{1,1}(z) = z^3$, $h_{1,2}(z) = -13z$, $h_{1,3}(z) = -12$, $g_2(z) = h_{2,1}(z) + h_{2,2}(z) + h_{2,3}(z) + h_{2,4}(z)$, $h_{2,1}(z) = z^3$, $h_{2,2}(z) = z^2$, $h_{2,3}(z) = z$, $h_{2,4}(z) = 1$.

Weil alle Funktionen h stetig sind, ist laut Korollar 6.1.8 auch f stetig. $\square$

Wir können f von $\mathbb{C} \setminus N$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \subseteq \mathbb{C}$ fortsetzen mit

$$f : z \mapsto \frac{z^2 - z - 12}{z^2 + 1}.$$

Beweis: Betrachte $g(z) = z^3 - 13z - 12$. Offensichtlich ist $z = -1$ eine Nullstelle. Wir machen eine Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(z^3 + 0 - 13z - 12) : (z+1) = z^2 - z - 12 \\
-(z^3 + z^2) \\
\quad -z^2 - 13z \\
\quad -(-z^2 - 13z) \\
\qquad -12z - 12 \\
\qquad -(-12z - 12) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also $g(z) = z^3 - 13z - 12 = (z+1)(z^2 - z - 12) = (z+1)(z+3)(z-4)$.

Betrachte $h(z) = z^3 + z^2 + z + 1$

$= (z^3 + z^2) + (z+1) = z^2(z+1) + (z+1) = (z+1)(z^2+1)$.

Daher folgt

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z+1)(z+3)(z-4)}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{(z+3)(z-4)}{z^2+1} = \frac{z^2 - 4z + 3z - 12}{z^2+1} = \frac{z^2 - z - 12}{z^2+1}. \qquad \square$$

1 nicer Beweis für Polynom-Division: Sei $p(x)$ 1 beliebiges Polynom mit NS q. Wie beim normalen Divisions-Algorithmus, subtrahieren wir so lange etwas von $p(x)$ weg (Vielfache von q), bis wir 0 erhalten. Diese Vielfachen werden beschrieben durch $a_1, \dots, a_n$. Also

$p(x) - a_1 q - \dots - a_n q = 0 \Rightarrow p(x) - (a_1 q + \dots + a_n q) = 0$
$\Rightarrow p(x) = a_1 q + \dots + a_n q \Rightarrow p(x) = q \cdot (a_1 + \dots + a_2)$. $\square$

95. Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann hat die Gleichung $f(x) = x$ eine Lösung (Fixpunkt) in $[a,b]$.

Beweis: Definiere $h(x) := f(x) - x$. h ist im Intervall $[a,b]$, laut Korollar 6.1.8, stetig.

Es gilt $h(b) \leq 0 \leq h(a)$, weil $f(b) \in [a,b]$,

$b = \max [a,b] \Rightarrow f(b) \leq b \Rightarrow h(b) = f(b) - b \leq 0.$

Analog argumentiert man für $h(a)$.

Laut Korollar 6.2.6 (Zwischenwertsatz), gilt

$$\exists \tilde{x} \in [a,b] : h(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - \tilde{x} = 0.$$

Also $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. $\square$

96. Zeigen Sie, dass eine injektive stetige Funktion f von einer kompakten Menge K in einen metrischen Raum (Y, d_Y) auf $f(K)$ eine stetige Umkehrfunktion besitzt ohne Betrachtung von Folgen oder Häufungspunkten, sondern unter Verwendung der Sätze 5.2.8, 6.1.12 und 6.1.13.

Beweis. Sei $f: K \to f(K)$ injektiv und stetig, wobei K kompakt ist.

Da die Zielmenge $f(K)$ ist, ist f surjektiv, also bijektiv.

Es gibt also die Inverse Funktion $f^{-1}: f(K) \to K$.

Nach Proposition 6.1.13, ist $f(K)$ kompakt, und nach Proposition 5.2.8 (i) auch abgeschlossen.

Sei $F \subseteq K$ abgeschlossen. Nach Proposition 5.2.8 (ii) ist F auch kompakt. Das Urbild von F ist $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ und daher kompakt, nach Proposition 6.1.13, weil f stetig ist.

Nach Proposition 5.2.8 (i), ist $f(F)$ auch abgeschlossen.

Daher ist f^{-1}, nach Proposition 6.1.12, (iii) $\Rightarrow$ (i), stetig. $\square$

97. Zeigen Sie: Existiert für alle $x \in [a, b]$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ monoton steigender Funktionen f_n, so ist f monoton steigend.

Beweis: Seien vorausgesetzt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f_n(x_1) \leq f_n(x_2),$$
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |f_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |f_n(x_2) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Angenommen, $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \wedge f(x_1) > f(x_2)$,

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} =: \varepsilon > 0.$$

Sei $N := \max(N_1, N_2)$, dann

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| + |f_n(x_2) - f(x_2)| < f(x_1) - f(x_2) \Rightarrow$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| + |f_n(x_2) - f(x_2) + f(x_2)| < f(x_1) \Rightarrow$$

$$|f(x_1) - f_n(x_1) + f_n(x_2)| = |f(x_1) - (f_n(x_1) - f_n(x_2))| =$$

$$|\underbrace{f_n(x_2) - f(x_1)}_{\geq 0} + f(x_1)| < f(x_1).$$

Also haben wir einen ↯. $\square$

Alternativ: Die Kontraposition folgt aus Lemma 3.3.1 (ii). $\square$

98. Zeigen Sie: Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn für jedes gegen x konvergente Netz $(x_i)_{i \in I}$ das Netz $(f(x_i))_{i \in I}$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $f: X \to Y$ stetig, d.h.

$$\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(U_\delta^X(x) \cap X) \subseteq U_\varepsilon^Y(f(x)).$$

Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein beliebiges Netz in X, sodass $x_i \to x$. Das hieße also,

$$\forall i \succeq i_0 \in I : x_i \in U_\delta^X(x) \Rightarrow f(x_i) \in U_\varepsilon^Y(f(x)).$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists i_0 \, I : \forall i \succeq i_0 : d_Y(f(x_i), f(x)) < \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$": Sei nun vorausgesetzt, dass wenn das Netz $(x_i)_{i \in I}$ gegen x konvergiert, dann auch $f(x_i) \to f(x)$.
Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fest und $(x_i)_{i \in I}$ jenes gegen x konvergente Netz. Weil $(f(x_i))_{i \in I}$ auch konvergiert,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists i_0 \in I : \forall i \succeq i_0 : d_Y(f(x_i), f(x)) < \varepsilon.$$

Andererseits konvergiert auch $(x_i)_{i \in I}$, also

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists i_1 \in I : \forall i \succeq i_1 : d_X(x_i, x) < \varepsilon.$$

Weil I gerichtet ist, $\exists i_2 \in I : i_2 \succeq i_1 \wedge i_2 \succeq i_0$.
Setze $\delta := |x_{i_2} - x|$. $\square$

99. Beweisen Sie, dass eine stetige Funktion f von einer kompakten Menge K in einen metrischen Raum Y gleichmäßig stetig ist unter Verwendung von Bsp. 80.

Beweis: Sei $f: K \to Y$, wobei K kompakt und $\langle Y, d_Y \rangle$ ein metrischer Raum ist. Zudem sei f stetig, d.h.

$$\forall x \in K \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f(U_\delta^X(x) \cap K) \subseteq U_\varepsilon^Y(f(x)).$$

Aus Bsp. 80 wissen wir, dass wenn $K \subseteq X \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ kompakt, $\langle X, d_X \rangle$ ein metrischer Raum, und $\forall i \in I : O_i$ ist offen, so $\exists \delta > 0 : \forall x \in K \; \exists i \in I : U_\delta(x) \subseteq O_i$.

Wir wissen, dass die Urbilder $f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(x)))$ ganz K abdecken, da f wohldefiniert ist. Jenes Urbild enthält weiters auch sicherlich x. Jenes Urbild ist nach Proposition 6.1.12 offen.
Wir vereinigen $f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(x))) \cup \underbrace{K^c}_{X \setminus K} =: O_{x,\varepsilon}$, sodass $\bigcup_{(x,\varepsilon) \in K \times \mathbb{R}^+} O_{x,\varepsilon} \supseteq X$. Daher

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K : U_\delta^X(x) \subseteq O_i \Rightarrow U_\delta^X(x) \cap K \subseteq$$
$$f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(x))) \Rightarrow f(U_\delta^X(x) \cap K) \subseteq f(f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(x)))$$
$$= U_\varepsilon^Y(f(x)).$$

Daher folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in K : f(U_\delta^X(x) \cap K) \subseteq U_\varepsilon^Y(f(x)). \qquad \square$$

100. Zeigen Sie, dass die Summe zweier gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig ist. Ist auch das Produkt zweier gleichmäßig stetiger Funktionen, bzw. zweier beschränkter gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig?

Beweis: Seien f, g gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x, t \in X : d_X(x,t) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(t)) < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \forall x, t \in X : d_X(x,t) < \delta \Rightarrow d_Y(g(x), g(t)) < \varepsilon.$$

Sei $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, so funktioniert dieses für beide Aussagen.

Weiters gilt

$$|(f+g)(x) - (f+g)(t)| = |(f(x) + g(x)) - (f(t) + g(t))|$$
$$= |(f(x) - f(t)) + (g(x) - g(t))| \leq |f(x) - f(t)| + |g(x) - g(t)| < 2\varepsilon.$$ $\square$

Das Produkt zweier gleichmäßig stetiger Funktionen ist nicht immer gleichmäßig stetig.

Beweis: Seien $f(x) = g(x) = x$, so sind diese gleichmäßig stetig, da man für die Stetigkeit $\delta := \varepsilon$ wählen kann. δ hängt also nicht von x ab.

Die Funktion $h(x) := f(x) \cdot g(x) = x^2$ ist jedoch nicht gleichmäßig stetig. Wir zeigen

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : \exists x, t \in X : d_X(x,t) < \delta \wedge d_Y(h(x), h(t)) \geq \varepsilon.$$

Sei dazu $t := x + \delta/2$, dann ist

$$|x - t| = |x - (x + \delta/2)| = |-\delta/2| = \delta/2 < \delta.$$

Wir konstruieren nun ein x, sodass $d_Y(h(x) - h(t)) \geq \varepsilon$:

$$|h(x) - h(t)| = |x^2 - (x + \delta/2)^2| = |x^2 - (x^2 + x\delta + \delta^2/4)| =$$

$$|-(x\delta + \delta^2/4)| = |x\delta + \delta^2/4| \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$|x\delta| + |\delta^2/4| = |x| \cdot \delta + \delta^2/4 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$|x| \geq (1 - \delta^2/4)/\delta = 1/\delta - \delta/4. \qquad \square$$

Das Produkt zweier gleichmäßig stetiger Funktionen ist gleichmäßig stetig, wenn sie beschränkt sind.

Beweis: Seien f, g gleichmäßig stetig, d.h. —"—

Sei $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ —"—

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(t)| = |f(x) \cdot g(x) - f(t) \cdot g(t)| \leq$$

$$|f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(t)| + |f(x) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t)| =$$

$$|-f(x) \cdot (g(x) - g(t))| + |g(t) \cdot (f(x) - f(t))| =$$

$$\underbrace{|f(x)|}_{\leq C_1} \cdot \underbrace{|g(x) - g(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{2(C_1 + C_2)}} + \underbrace{|g(t)|}_{\leq C_2} \cdot \underbrace{|f(x) - f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{2(C_1 + C_2)}} < \varepsilon. \qquad \square$$