6. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 25.01.2021

6

6.1 HALLO HAMILTON-JACOBI. DAS FREIE TEILCHEN

Die Hamilton-Jacobi Gleichung hat generell mehrere Lösungen. Zeigen Sie für ein freies Teilchen, $H(q,p) = p^2/2m$, dass sowohl

a)

$$S_1(q, \alpha_1, t) = \frac{m(q-\alpha_1)^2}{2t} \tag{6.1}$$

b) als auch

$$S_2(q, \alpha_2, t) = q\sqrt{2m\alpha_2} - \alpha_2 t \tag{6.2}$$

Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung sind. Finden Sie die Lösungen $q(t)$. Was sind α_1 und α_2? (Diese Größen haben eine anschauliche Interpretation.)

6.2 HÜPFENDES TEILCHEN AUF VERTIKALEM ZYLINDER I

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im homogenen Schwerefeld (g) auf einem unendlich hohen Zylinder. Weiters nehmen wir an dass das Teilchen bei $z = 0$ elastisch wieder nach oben reflektiert wird. Sie können daher das System (zwischen zwei Reflektionen) mit folgender Hamiltonfunktion beschreiben:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz \tag{6.3}$$

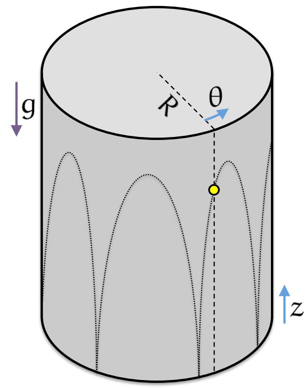

FIGURE 6.1: *Teilchen auf dem Zylinder*

a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Jacobi Gleichung für die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2, t)$?

b) Wählen Sie den unten stehenden Separationsansatz und lösen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung.

$$S(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2, t) = W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2) + W_z(z, \alpha_1, \alpha_2) - Et$$

Identifizieren Sie dabei die folgenden Separationskonstanten:

$$\alpha_1 = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 + mgz$$

c) Zeigen Sie ausgehend von Ihrer Lösung der H-J Gleichung dass die Koordinaten $\theta(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ und $z(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ folgende Form annehmen:

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{mR^2} t$$
$$z(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \frac{\alpha_2}{mg} - \frac{g}{2}(\beta_2 + t)^2$$

6.3 HÜPFENDES TEILCHEN AUF VERTIKALEM ZYLINDER II

Mit den unten stehenden Lösungen aus 6.2 können Sie dieses Beispiel unabhängig von 6.2 rechnen und auf Wirkungs-Winkel Variablen $(\phi_z, \phi_\theta, I_z, I_\theta)$ transformieren.

$$p_z = \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2 gz} \qquad\qquad p_\theta = \alpha_1$$

a) Fertigen Sie ein Phasenraumportrait für den z Freiheitsgrad an (z-p_z Diagram mit repräsentativen Trajektorien). An welchen Stellen machen sich hier die Reflexionen des Teilchens bemerkbar?

b) Berechnen Sie die Wirkungsintegrale

$$I_z = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}_z} p_z\, dz \qquad\qquad I_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}_\theta} p_\theta\, d\theta$$

wobei $\mathcal{C}_z$ und $\mathcal{C}_\theta$ geschlossene Trajektorien im Phasenraum sind. *Hinweis: Die $\mathcal{C}_z$ sind hier durch die Reflexionen des Teilchens an $z = 0$ geschlossen.*

c) Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(I_z, I_\theta)$ als Funktion der Wirkungsvariablen?

BONUS) Zeigen Sie, dass Ihre gefundene kanonische Transformation auf Wirkungs-Winkel Variablen $(\phi_z, I_z, \phi_\theta, I_\theta)$ auf folgende Ausdrücke führt:

$$I_z = \frac{1}{3\pi m^2 g}(p_z^2 + 2m^2 gz)^{3/2} \qquad\qquad I_\theta = p_\theta$$
$$\phi_z = -\frac{\pi p_z}{\sqrt{p_z^2 + 2m^2 gz}} \qquad\qquad \phi_\theta = \theta$$

6.4 KEPLERBAHN

Betrachten Sie das reduzierte Einteilchenproblem mit reduzierter Masse μ im Potential $V = -K/r$. Die Bewegungsebene sei als x-y-Ebene gewählt, so dass die Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$H = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{p_y^2}{2\mu} - \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Der Drehimpuls zeigt in z-Richtung $L_z = xp_y - p_x y$ und der Laplace-Runge-Lenz-Vektor liegt in der x-y-Ebene mit Komponenten

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mu K}{r}\mathbf{r}.$$

Wir drehen das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_x$.

a) Zeigen Sie dass sich $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ in Polarkoordinaten schreiben lässt als

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar\cos(\phi) = L^2 - \mu K r \tag{6.4}$$

wobei $\phi = 0$ in x-Richtung fällt.

b) Verwenden Sie obiges Resultat um die Bahngleichung $r(\varphi)$ zu bestimmen. Charakterisieren Sie die Kurve mittels der Parameter $d = r(\phi = \pi/2)$ und der (numerischen) Exzentrizität $e = d/r(\phi = 0) - 1$.

c) Skizzieren Sie die Bahn in den Fällen $0 < e < 1$ und $e > 1$.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
6.1 / 6.2 a-b / 6.2 c / 6.3 a-b / 6.3 c / BONUS / 6.4