3. Übungsblatt

Theoretische Informatik
SS 2021, TU Wien
Stefan Hetzl

1. Zeigen Sie dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind[1]:

(a) Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$

(b) Abgeschnittener Vorgänger $x \mapsto \mathrm{p}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ x - 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$

(c) Abgeschnittene Subtraktion $(x, y) \mapsto x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leqslant y \\ x - y & \text{falls } x > y \end{cases}$

(d) Die charakteristische Funktion von kleiner-gleich $(x, y) \mapsto \chi_{\leqslant}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \leqslant y \\ 0 & \text{falls } x > y \end{cases}$

(e) Die charakteristische Funktion der Gleichheit $(x, y) \mapsto \chi_{=}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$

(f) Falls $g, f_0, f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind, dann ist auch

$$h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, \overline{x} \mapsto \begin{cases} f_0(\overline{x}) & \text{falls } g(\overline{x}) = 0 \\ f_1(\overline{x}) & \text{falls } g(\overline{x}) = 1 \\ \vdots & \\ f_{n-1}(\overline{x}) & \text{falls } g(\overline{x}) = n - 1 \\ f_n(\overline{x}) & \text{falls } g(\overline{x}) \geqslant n \end{cases}$$

primitiv rekursiv.

2. Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Zeigen Sie dass die folgenden Funktionen ebenfalls primitiv rekursiv sind:

(a) $(\overline{x}, z) \mapsto \sum_{y=0}^{z} f(\overline{x}, y)$

(b) $(\overline{x}, z) \mapsto \prod_{y=0}^{z} f(\overline{x}, y)$

Sei nun $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0, 1\}$ primitiv rekursiv. Zeigen Sie dass die folgenden Funktionen ebenfalls primitiv rekursiv sind:

[1] Sie dürfen dafür annehmen dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die konstante Funktion $c_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto k$ primitiv rekursiv ist.

(c) $(\overline{x}, z) \mapsto \forall y \leqslant z\, f(\overline{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } y \in \{0, \ldots, z\} \text{ gilt: } f(\overline{x}, y) = 1 \\ 0 & \text{falls ein } y \in \{0, \ldots, z\} \text{ existiert so dass: } f(\overline{x}, y) = 0 \end{cases}$

(d) $(\overline{x}, z) \mapsto \exists y \leqslant z\, f(\overline{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls ein } y \in \{0, \ldots, z\} \text{ existiert so dass } f(\overline{x}, y) = 1 \\ 0 & \text{falls für alle } y \in \{0, \ldots, z\} \text{ gilt: } f(\overline{x}, y) = 0 \end{cases}$

3. Zeigen Sie dass die folgenden Relationen und Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) Teilbarkeit: $(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ ein Teiler von } y \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) Teilerfremdheit: $(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathrm{ggT}(x, y) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) Die Eulersche φ-Funktion: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto |\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, \mathrm{ggT}(i, n) = 1\}|$.

4. Geben Sie eine Turingmaschine an, die eine Duplikation durchführt, d.h. die das Eingabeband

$\rhd$	x_1	$\cdots$	x_n	$\llcorner\!\lrcorner$	$\cdots$
$\uparrow$					

für $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$ in das Ausgabeband

$\rhd$	x_1	$\cdots$	x_n	$\llcorner\!\lrcorner$	x_1	$\cdots$	x_n	$\llcorner\!\lrcorner$	$\cdots$
$\uparrow$									

transformiert.

5. Wir sagen dass eine deterministische Turingmaschine $M = \langle Q, \delta, q_0 \rangle$ *primitiv rekursive Laufzeit* hat falls eine primitiv rekursive Funktion $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ eine Konfiguration (fertig, u, v) existiert sowie ein $k \leqslant t(x)$ so dass $(q_0, \rhd, x) \overset{M^k}{\to} (\mathsf{fertig}, u, v)$.

Zeigen Sie dass eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist genau dann wenn eine Turingmaschine existiert die f in primitiv rekursiver Laufzeit berechnet.

Hinweis: Stützen Sie sich auf die Beweise der Äquivalenz der Begriffe Turing-berechenbar und partiell rekursiv. Sie dürfen die Aussage verwenden dass für alle primitiv rekursiven $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0, 1\}$ *auch die Funktion*

$$(\overline{x}, z) \mapsto (\mu y \leqslant z) g(\overline{x}, y) = \begin{cases} \text{das kleinste } y \leqslant z \text{ so dass } g(\overline{x}, y) = 1 & \text{falls so ein } y \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist.