

Kapitel 9

Ebene autonome Systeme

Wir betrachten in diesem Kapitel den speziellen, aber wichtigen zweidimensionalen autonomen Fall. Dazu seien $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, und die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \tag{9.1}$$

gegeben. Wir nehmen im ganzen Kapitel an, dass die Lösungen von (9.1) durch ihre Anfangswerte eindeutig bestimmt sind. So ist $x(t; x_0)$ die Lösung von (9.1) mit Anfangswert $x(0) = x_0 \in G$. Die Menge der Equilibria wird wie zuvor mit \mathcal{E} bezeichnet, also

$$\mathcal{E} := f^{-1}(0) = \{x \in G : f(x) = 0\}.$$

Im Gegensatz zum n -dimensionalen Fall mit $n \geq 3$ sind die Limesmengen der Lösungen im Fall $n = 2$ sehr gut verstanden. So sagt das *Poincaré-Bendixson-Theorem*, dass eine Limesmenge, die kein Equilibrium enthält, schon Orbit einer periodischen Lösung ist. Was macht den Fall $n = 2$ so besonders? Die Antwort darauf ist der *Jordansche Kurvensatz*, der besagt, dass eine *Jordan-Kurve*, also eine geschlossene, stetige, doppelunktfreie Kurve, die Ebene in zwei disjunkte offene, zusammenhängende Teilmengen zerlegt, in ihr Inneres und in ihr Äußeres.

9.1 Transversalen

Das zentrale Hilfsmittel in der Poincaré-Bendixson-Theorie ist das Konzept der *Transversalen*.

Definition 9.1.1. Ein Segment $L = \{\tau y_0 + (1 - \tau)y_1 : \tau \in [0, 1]\}$ mit $y_0 \neq y_1$, heißt **Transversale** für das Vektorfeld f , falls

$$f(x) \neq \lambda(y_1 - y_0) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, x \in L, \tag{9.2}$$

erfüllt ist.

In anderen Worten, L ist eine Transversale, falls kein Equilibrium auf L liegt, und die Richtung der Transversalen von der von $f(x)$ für jedes $x \in L$ verschieden ist, d.h. $y_1 - y_0$ und $f(x)$ sind für jedes $x \in L$ linear unabhängig.

Bemerkung 9.1.2.

1. Ist $x \in G \setminus \mathcal{E}$, dann existiert eine Transversale durch x . Eine solche kann jede Richtung haben, mit Ausnahme von der von $\pm f(x)$. Dies folgt aus der Stetigkeit von f , da man Transversalen beliebig kurz wählen darf.
2. Das Segment $L = \{\tau y_0 + (1 - \tau)y_1 : \tau \in [0, 1]\}$ ist genau dann eine Transversale, wenn

$$(T) \quad (f(x)|z) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in L, z \neq 0 \text{ mit } (y_1 - y_0|z) = 0,$$

erfüllt ist.

3. Ist L eine Transversale und $x_0 \in L$, so gilt $x(t; x_0) \notin L$ für alle $|t| \neq 0$ hinreichend klein. Dies bedeutet, wenn ein Orbit L trifft, dann kreuzt es L . Denn wäre $x(t_k, x_0) \in L$, für eine Folge $t_k \rightarrow 0$, so würde

$$\frac{(x(t_k, x_0) - x(0, x_0)|z)}{t_k} = 0$$

für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $(y_1 - y_0|z) = 0$ gelten. Daraus folgt aber $(f(x_0)|z) = 0$, im Widerspruch zu (T).

4. Alle Orbits, die eine Transversale treffen, überqueren sie in der gleichen Richtung. Denn ist $z \neq 0$ orthogonal zu L , so hat die stetige Funktion $\varphi(\tau) := (f(\tau y_0 + (1 - \tau)y_1)|z)$ für alle $\tau \in [0, 1]$ das gleiche Vorzeichen.

Proposition 9.1.3. Sei $L = \{\tau y_0 + (1 - \tau)y_1 : \tau \in [0, 1]\}$ eine Transversale für (9.1), und sei $x_0 \in L \cap G$ kein Endpunkt von L . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Kugel $\bar{B}_\delta(x_0)$, sodass jede Lösung $x(t; x_1)$ mit Anfangswert $x_1 \in \bar{B}_\delta(x_0)$ die Transversale für ein $t_1 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ trifft.

Beweis. Andernfalls gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $x_k \rightarrow x_0$, sodass $x(t, x_k) \notin L$ für alle $t \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ gilt. Sei $z \neq 0$ orthogonal zu L ; setze $\varphi_k(t) = (x(t, x_k) - x_0|z)$, und $\varphi_0(t) = (x(t, x_0) - x_0|z)$. Aus $x_k \rightarrow x_0$ folgt dann $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ gleichmäßig auf $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Nach Annahme ist $x(t, x_k) \notin L$ also $\text{sgn } \varphi_k(t)$ auf $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ konstant. Andererseits hat aber $\varphi_0(t)$ in $t = 0$ einen Vorzeichenwechsel, denn es ist $\varphi_0(0) = 0$ und $\dot{\varphi}_0(0) = (f(x_0)|z) \neq 0$. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten. \square

Die folgende Proposition ist nicht ganz so leicht zu zeigen.

Proposition 9.1.4. Sei $L = \{\tau y_0 + (1 - \tau)y_1 : \tau \in [0, 1]\}$ eine Transversale, und $C = x[a, b]$ ein Teilorbit der Lösung $x(t)$ für (9.1). Dann gelten:

1. $L \cap C$ ist endlich, also $L \cap C = \{x_1, \dots, x_m\}$.

2. Ist $x(t)$ nicht periodisch und $x(t_j) = \tau_j y_0 + (1 - \tau_j) y_1$, mit $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, so gilt entweder $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ oder $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_m$.
3. Ist $x(t)$ periodisch und $C = \gamma(x)$ das Orbit von $x(t)$, so ist $L \cap C$ höchstens einpunktig.

Beweis. 1. Angenommen, $L \cap C$ wäre nicht endlich. Dann gäbe es eine Folge $(x_k) \subset L \cap C$, mit $x_k \rightarrow x_0 \in L \cap C$. Sei $x_k = x(t_k)$ und sei evtl. nach Übergang zu einer Teilfolge $t_k \rightarrow t_0 \in [a, b]$. Es folgt

$$\frac{x_k - x_0}{t_k - t_0} = \frac{x(t_k) - x(t_0)}{t_k - t_0} \rightarrow \dot{x}(t_0) = f(x_0),$$

also mit einem $z \neq 0$ orthogonal zu L

$$0 = \frac{(x_k - x_0|z)}{t_k - t_0} \rightarrow (f(x_0)|z),$$

d.h. $(f(x_0)|z) = 0$ für $x_0 \in L$, im Widerspruch zu (T).

2. Seien $x_j = x(t_j)$, $j = 1, 2$, $t_1 < t_2$ zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte der Lösung mit L , sei $x_j = \tau_j y_0 + (1 - \tau_j) y_1$, und es gelte o.B.d.A. $\tau_1 < \tau_2$, also $x_1 \neq x_2$. Der Kurvenbogen $x[t_1, t_2]$ und das Segment $S[\tau_1, \tau_2] = \{\tau y_0 + (1 - \tau) y_1 : \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$ stellen eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve Γ im \mathbb{R}^2 dar; vgl. Abb. 9.1. Nach dem Jordanschen Kurvensatz teilt diese Kurve Γ die Ebene \mathbb{R}^2 in ein Innengebiet G_i und ein Außengebiet G_a , sodass $\mathbb{R}^2 = G_i \cup \Gamma \cup G_a$ gilt, wobei die

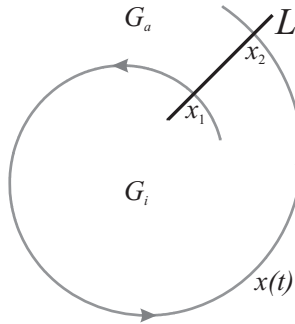


Abbildung 9.1: Transversale

Vereinigungen disjunkt sind. Wir betrachten nun die Lösung für $t \geq t_2$: die Lösung kann den Kurvenbogen $x[t_1, t_2]$ aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen nicht schneiden, und auf $S[\tau_1, \tau_2]$ zeigt das Vektorfeld f ins Außengebiet, denn $f(x_2)$ hat diese Eigenschaft, also gilt sie nach Bemerkung 9.1.2 auf ganz L . Daher ist G_a für diese Lösung positiv invariant, weshalb der nächste Schnittpunkt $x_3 = x(t_3)$ nur im Außengebiet G_a liegen kann, d.h. aber $\tau_3 > \tau_2$. Analog geht es für die negative Zeitrichtung.

3. Ist $x(t_1) = x(t_2) \in L$ so ist $x(t)$ offensichtlich periodisch. Angenommen $x(t)$ ist periodisch und $x(t_1) \neq x(t_2)$. Dann müsste die Lösung für $t \geq t_2$ die Jordan-Kurve Γ aus dem 2. Teil des Beweises schneiden, was nicht möglich ist. Daher ist das Segment $S[\tau_1, \tau_2] = \{x_2\}$ trivial, und Γ ist das geschlossene Orbit von $x(t)$. \square

Proposition 9.1.5. *Sei $\overline{\gamma_+(x)} \subset G$ kompakt, L eine Transversale für (9.1), und sei $y \in L \cap \omega_+(x)$. Dann gibt es eine wachsende Folge $t_k \rightarrow \infty$ mit $x_k := x(t_k) \in L$ und $x_k \rightarrow y$.*

Beweis. Da $y \in \omega_+(x)$ gilt, gibt es eine wachsende Folge $\bar{t}_k \rightarrow \infty$ mit $\bar{x}_k := x(\bar{t}_k) \rightarrow y$; o.B.d.A. kann man $\bar{t}_{k+1} \geq \bar{t}_k + 2$ annehmen. Nach Proposition 9.1.3 gibt es zu $\varepsilon = 1/m$ eine Kugel $\bar{B}_{\delta_m}(y)$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $z \in \bar{B}_{\delta_m}(y)$ mindestens ein $t(z) \in [-1/m, 1/m]$ gibt mit $x(t(z), z) \in L$. Nun gilt für $k \geq k_m$, $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, $x(\bar{t}_k) \in \bar{B}_{\delta_m}(y)$. O.B.d.A. gelte $k_{m+1} \geq k_m + 1$. Wir definieren nun eine Folge (t_m) durch $t_m = \bar{t}_{k_m} + t(\bar{x}_{k_m})$. Dann ist t_m wachsend, denn wegen $|t(\bar{x}_{k_m})| \leq 1/m$ gilt

$$\begin{aligned} t_{m+1} = \bar{t}_{k_{m+1}} + t(\bar{x}_{k_{m+1}}) &\geq \bar{t}_{k_m+1} - \frac{1}{m+1} \\ &\geq \bar{t}_{k_m} + 2 - \frac{1}{m+1} \\ &\geq \bar{t}_{k_m} + 1 \geq \bar{t}_{k_m} + t(\bar{x}_{k_m}), \end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Ferner gilt $t_m \rightarrow \infty$, sowie $x(t_m) \in L$ aber auch $x(t_m) \rightarrow y$, da $x(t_m) = x(t(\bar{x}_{k_m}), \bar{x}_{k_m})$ mit $|t(\bar{x}_{k_m})| \leq 1/m$ ist. \square

Eine interessante Folgerung aus Proposition 9.1.5 ist das

Korollar 9.1.6. *Sei $\overline{\gamma_+(x)} \subset G$ kompakt und L eine Transversale für (9.1). Dann ist $L \cap \omega_+(x)$ höchstens einpunktig.*

Beweis. Angenommen es seien $\bar{x}, \bar{z} \in L \cap \omega_+(x)$. Nach Proposition 9.1.5 gibt es Folgen $t_k \rightarrow \infty$, $s_k \rightarrow \infty$, $t_k < s_k < t_{k+1}$ mit $x_k = x(t_k)$, $z_k = x(s_k) \in L$ und $x_k \rightarrow \bar{x}$, $z_k \rightarrow \bar{z}$. Da sich nach Proposition 9.1.4 die natürliche Ordnung auf $\gamma_+(x)$ auf die Ordnung der Schnittpunkte des Orbits mit L überträgt, folgt mit $x_k = \tau_k y_0 + (1 - \tau_k) y_1$ und $z_k = \sigma_k y_0 + (1 - \sigma_k) y_1$ die Relation $\tau_k < \sigma_k < \tau_{k+1}$. Das impliziert nun $\bar{x} = \bar{z}$. \square

9.2 Poincaré-Bendixson-Theorie

Wir beginnen mit einer Charakterisierung periodischer Lösungen mittels Limesmengen, die typisch zweidimensional ist.

Lemma 9.2.1. *Sei $\overline{\gamma_+(x)} \subset G$ kompakt. Die Lösung $x(t)$ von (9.1) ist genau dann periodisch, wenn $\gamma_+(x) \cap \omega_+(x) \neq \emptyset$ gilt. Ist dies der Fall so ist $\gamma_+(x) = \omega_+(x)$.*

Beweis. Ist $x(t)$ periodisch, so ist offensichtlich $\gamma_+(x) = \omega_+(x)$. Sei nun umgekehrt $y = x(t_0) \in \gamma_+(x) \cap \omega_+(x)$. Ist der Anfangswert x_0 von $x(t)$ ein Equilibrium, so gilt $x(t) = x_0$ für alle $t \geq 0$, also ist auch $y = x_0 \in \mathcal{E}$. Sei also $x_0 \notin \mathcal{E}$; dann ist aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen auch $y \notin \mathcal{E}$. Also gibt es nach Bemerkung 9.1.2 eine Transversale L durch y . Da $y \in \omega_+(x)$ ist, existiert nach Proposition 9.1.5 eine wachsende Folge $t_k \rightarrow \infty$ mit $x(t_k) \in L$ und $x(t_k) \rightarrow y$. Angenommen $x(t)$ ist nicht periodisch. Dann gelten mit der durch die natürliche Ordnung auf $\gamma_+(x)$ erzeugten Ordnung auf L für $t_k \geq t_0$, mit $y = \tau_0 y_0 + (1 - \tau_0) y_1$ und $x(t_k) = \tau_k y_0 + (1 - \tau_k) y_1$ die Relationen $\tau_0 < \tau_k < \tau_{k+1}$. Ferner gilt

$$|\tau_k - \tau_0| |y_1 - y_0| = |x(t_k) - y| \rightarrow 0,$$

also auch $\tau_k \rightarrow \tau_0$ für $k \rightarrow \infty$, ein Widerspruch. Also ist die Lösung $x(t)$ periodisch. \square

Dieses Lemma ist in Dimensionen $n \geq 3$ falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. *Der irrationale Fluss auf dem Torus.* Betrachte das 3D-System

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - \alpha \frac{uw}{\sqrt{u^2 + v^2}}, & u(0) = 3, \\ \dot{v} = u - \alpha \frac{vw}{\sqrt{u^2 + v^2}}, & v(0) = 0, \\ \dot{w} = \alpha(\sqrt{u^2 + v^2} - 2), & w(0) = 0, \end{cases} \quad (9.3)$$

wobei $\alpha \notin \mathbb{Q}$ irrational, $\alpha > 0$ ist. Die Lösung kann man explizit angeben:

$$\begin{aligned} u(t) &= [2 + \cos(\alpha t)] \cos(t), \\ v(t) &= [2 + \cos(\alpha t)] \sin(t), \\ w(t) &= \sin(\alpha t). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich durch direktes Nachrechnen, dass dies tatsächlich die Lösung von (9.3) ist. Es gilt nun

$$(u(t) - 2 \cos(t))^2 + (v(t) - 2 \sin(t))^2 + w(t)^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

d.h. die Lösung liegt auf dem Torus \mathbb{T} , der durch

$$\begin{aligned} u(\phi, \theta) &= [2 + \cos(\theta)] \cos(\phi), \\ v(\phi, \theta) &= [2 + \cos(\theta)] \sin(\phi), \\ w(\phi, \theta) &= \sin(\theta), \quad \phi, \theta \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

parametrisiert ist. Nun gilt $\gamma_+(u, v, w) \subset \omega_+(u, v, w) = \mathbb{T}$, da α irrational ist, aber (u, v, w) ist nicht periodisch. Man nennt solche Funktionen *quasiperiodisch* da es 2 unabhängige “Perioden”, nämlich 2π und $2\pi/\alpha$ gibt. Ist hingegen $\alpha \in \mathbb{Q}$, dann ist die Lösung periodisch; vgl. dazu Übung 9.8.

Wir können nun das Hauptresultat der Poincaré-Bendixson-Theorie beweisen.

Satz 9.2.2 (Poincaré-Bendixson). Sei $\overline{\gamma_+(x)} \subset G$ kompakt, und sei $\omega_+(x) \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Dann ist entweder $\omega_+(x) = \gamma_+(x)$, d.h. $x(t)$ ist eine periodische Lösung, oder aber $\omega_+(x)$ ist ein periodisches Orbit, ein **Grenzzzyklus**.

Beweis. Sei $x(t)$ nicht periodisch. Da $\omega_+(x)$ nichtleer und invariant ist, enthält $\omega_+(x)$ nach Proposition 8.4.2 ein vollständiges Orbit $\gamma(z)$. Da $\omega_+(z)$ ebenfalls nichtleer und kompakt ist, gibt es ein $y \in \omega_+(z) \subset \omega_+(x)$. Da nach Voraussetzung $y \notin \mathcal{E}$ ist, gibt es eine Transversale L durch y . Nach Korollar 9.1.6 ist $\omega_+(x) \cap L = \{y\}$. Andererseits, mit $y \in \omega_+(z)$ zeigt Proposition 9.1.5, dass $\gamma_+(z) \cap L$ nichtleer ist, folglich $y \in \omega_+(z) \cap \gamma_+(z)$, also ist $z(t)$ nach Lemma 9.2.1 ein periodisches Orbit.

Wir zeigen $\omega_+(x) = \gamma_+(z)$. Andernfalls gäbe es eine Folge $(y_k) \subset \omega_+(x) \setminus \gamma_+(z)$ mit $y_k \rightarrow \bar{y} \in \gamma_+(z)$, da $\omega_+(x)$ zusammenhängend ist. Wähle erneut eine Transversale \bar{L} durch \bar{y} . Wieder gilt $\omega_+(x) \cap \bar{L} = \{\bar{y}\}$ nach Korollar 9.1.6, aber aus Proposition 9.1.3 folgt, dass es $|t_k| \leq 1$ gibt, sodass $x(t_k, y_k) \in \bar{L} \cap \omega_+(x)$, also $x(t_k, y_k) = \bar{y} \in \gamma_+(z)$ gilt. Aus der Eindeutigkeit der Lösungen folgt aber $x(t_k, y_k) \in \omega(x) \setminus \gamma(z)$, was einen Widerspruch bedeutet. Daher ist $\omega_+(x) = \gamma_+(z)$. \square

Wir notieren das folgende wichtige

Korollar 9.2.3. Sei $\emptyset \neq K \subset G$ kompakt, $K \cap \mathcal{E} = \emptyset$ und $\gamma_+(x) \subset K$. Dann besitzt (9.1) mindestens eine periodische Lösung in K .

An diesem Korollar ist bemerkenswert, dass man keine weiteren topologischen Eigenschaften wie etwa Konvexität von K braucht; vgl. Satz 7.3.5.

Für den Fall, dass $\omega_+(x)$ höchstens endlich viele Equilibria enthält, ergibt sich das folgende Bild.

Satz 9.2.4. Sei $K \subset G$ kompakt, $\gamma_+(x) \subset K$ und $K \cap \mathcal{E}$ endlich. Dann gelten die Alternativen:

1. $\omega_+(x) = \{x_\infty\}$ für ein $x_\infty \in \mathcal{E}$.
2. $\omega_+(x)$ ist ein periodisches Orbit.
3. $\omega_+(x)$ besteht aus endlich vielen Equilibria und außerdem aus (möglicherweise unendlich vielen) Orbits, die für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen eines dieser Equilibria konvergieren.

Beweis. Da nach Voraussetzung $K \cap \mathcal{E}$ endlich ist, gibt es höchstens endlich viele Equilibria in $\omega_+(x)$. Gilt $\omega_+(x) \subset \mathcal{E}$, dann ist $\omega_+(x) = \{x_\infty\}$ einpunktig, da zusammenhängend; dies ist Alternative 1.

Gibt es nun $x_1 \in \omega_+(x) \setminus \mathcal{E}$, so ist dieses x_1 Anfangspunkt eines vollständigen Orbits $\gamma(z) \subset \omega_+(x)$, da diese Menge invariant ist. $\omega_+(z)$ ist ebenfalls nichtleer; wir nehmen an es gibt ein $y \in \omega_+(z) \setminus \mathcal{E}$. Wähle eine Transversale L durch y . Nach Korollar 9.1.6 ist einerseits $\omega_+(x) \cap L = \{y\}$, andererseits $L \cap \gamma_+(z) \neq \emptyset$, woraus mit Lemma 9.2.1 folgt, dass z ein periodisches Orbit ist. Wie im Beweis von Satz 9.2.2 folgt nun $\omega_+(x) = \gamma_+(z)$; dies ist Alternative 2.

Im verbleibenden Fall hat jedes nichtkonstante Orbit $\gamma(z) \subset \omega_+(x)$ Grenzwerte $x_\infty^\pm \in \omega_+(x) \cap \mathcal{E}$; das ist die dritte Alternative. \square

Vollständige Orbits, die für $t \rightarrow \pm\infty$ Grenzwerte x_∞^\pm haben, heißen **heteroklin**, falls $x_\infty^- \neq x_\infty^+$ ist, und **homoklin** im Fall $x_\infty^- = x_\infty^+$. Ist insbesondere $\omega_+(x) \cap \mathcal{E} = \{x_\infty\}$, so besagt Satz 9.2.4, dass entweder $\omega_+(x) = \{x_\infty\}$ ist, oder $\omega_+(x)$ zusätzlich nur – möglicherweise mehr als ein – homokline Orbits mit Grenzwert x_∞ enthalten kann. Homokline Orbits kann man als Grenzfall periodischer Orbits mit Periode ∞ ansehen. Ist $\omega_+(x) \cap \mathcal{E}$ nicht diskret, so kann $\omega_+(x) \subset \mathcal{E}$ gelten, ohne dass $x(t)$ einen Grenzwert besitzt; vgl. Beispiel 2 in Abschnitt 8.8.

Beispiel 1. Der Brusselator von Prigogine und Nicolis. Das System

$$\begin{cases} \dot{u} = a - bu + u^2v - u, \\ \dot{v} = bu - u^2v, \end{cases} \quad (9.4)$$

wurde vom Nobelpreisträger I. Prigogine zusammen mit dem Mathematiker G. Nicolis verwendet um Mechanismen biologischer Strukturbildung zu erläutern. Hier wollen wir lediglich zeigen, dass dieses System für Parameterwerte $b > 1 + a^2$, $a > 0$, periodische Lösungen besitzt.

Sei $G = \mathbb{R}^2$. Zunächst sind sowohl der Standardkegel \mathbb{R}_+^2 als auch dessen Inneres $\text{int } \mathbb{R}_+^2$ positiv invariant, da $f_1(0, v) = a > 0$ ist, und $f_2(u, 0) = bu \geq 0$ für $u \geq 0$ gilt, sowie > 0 falls $u > 0$ ist. Das einzige Equilibrium des Systems ist $(u_*, v_*) = (a, b/a) \in \text{int } \mathbb{R}_+^2$. Die Linearisierung $A = f'(u_*, v_*)$ ergibt die Matrix

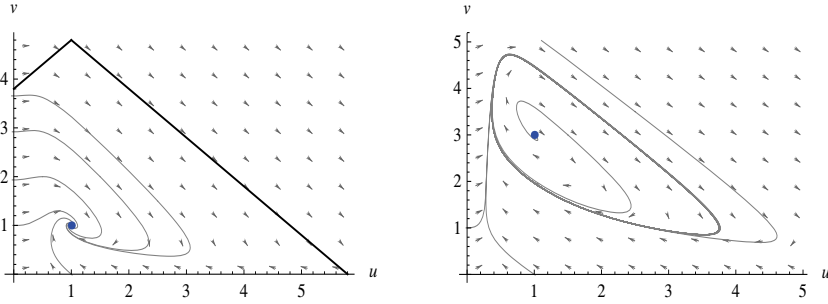
$$A = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix}.$$

Es ist also $\text{sp } A = b-1-a^2 > 0$ und $\det A = a^2 > 0$. Daher ist das Equilibrium (u_*, v_*) für $1 + a^2 < b < (1+a)^2$ eine instabile Spirale und für $b > (1+a)^2$ ein instabiler Knoten; für $b = (1+a)^2$ ist es ein falscher Knoten. Da das Equilibrium (u_*, v_*) für $b > 1+a^2$ in negativer Zeitrichtung asymptotisch stabil ist, ist die Kugel $\bar{B}_r(u_*, v_*)$ nach Satz 8.1.4 bezüglich der Norm $|\cdot|_Q$ negativ invariant, sofern $r > 0$ klein genug ist und das Vektorfeld f zeigt auf $\partial \bar{B}_r(u_*, v_*)$ bezüglich der Norm $|\cdot|_Q$ strikt nach außen. Wir können deshalb den Schluss ziehen, dass im Fall $b > 1 + a^2$ keine nichttriviale Lösung gegen dieses Equilibrium konvergiert. Man beachte außerdem, dass die instabile Mannigfaltigkeit zweidimensional ist, also eine Umgebung des Equilibriums (u_*, v_*) enthält (vgl. auch Kapitel 10).

Um die Existenz einer periodischen Lösung zu zeigen, konstruieren wir zunächst eine positiv invariante Menge

$$K = \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : u + v \leq \alpha, v - u \leq \beta\},$$

mit $\alpha, \beta \geq 0$ wie folgt; vgl. Abb. 9.2. Sei $(u, v) \in \partial K$ mit $u + v = \alpha$; dann ist $y_1 = [1, 1]^T$ ein Normalenvektor in diesen Punkten, und es gilt $(f(u, v)|y_1) = a - u \leq 0$, sofern $u \geq a$ ist. Gilt andererseits $(u, v) \in \partial K$ mit $v - u = \beta$, so sollte $u \leq a$

Abbildung 9.2: Brusselator mit $a = 1$, $b = 1$, bzw. $b = 3$

gelten. Dann ist in diesem Fall $y_2 = [-1, 1]^T$ ein Normalenvektor, und es gilt $(f(u, v)|y_2) = (u - a) + 2u(b - uv) \leq 2u(b - uv) \leq 0$, sofern $b \leq uv$ ist. Weiter gilt $(f(u, v)|y_2) \leq u - a + 2bu = (1 + 2b)u - a \leq 0$, falls $u \leq a/(1 + 2b)$ gilt. Ist $v = u + \beta$, so gilt $uv \geq b$, falls $u \geq b/\beta$. Dies führt auf die Bedingung $b/\beta \leq a/(1 + 2b)$. Wählt man nun zunächst β so groß, dass $\beta \geq b(1 + 2b)/a$ ist, und dann $\alpha = 2a + \beta$, so ist $K \subset G$ positiv invariant. Da $K \subset G$ kompakt ist, folgt die Beschränktheit aller Lösungen, die in K starten. Deren Limesmengen sind in $K \setminus \{(u_*, v_*)\}$ enthalten, also gilt nach Satz 9.2.2, dass $\omega(x) \subset K$ ein periodisches Orbit ist. Dieses bildet eine geschlossene doppeltpunktfreie C^1 -Kurve, welche die Ebene in ein Innengebiet G_i und ein Außengebiet G_a zerteilt. Wir werden später sehen, dass das Innengebiet G_i das Equilibrium enthält, die periodische Lösung also das Equilibrium umkreist. Man beachte auch, dass die positive Invarianz von K für $\beta \rightarrow \infty$ globale Existenz nach rechts, aller in \mathbb{R}_+^2 startenden Lösungen ergibt.

Beispiel 2. *Ein homoklines Orbit*; vgl. Abb. 9.3. Das System

$$\begin{cases} \dot{x} = x + xy - (x^2 + y^2)^{1/2}, \\ \dot{y} = y - x^2 + (x - y)(x^2 + y^2)^{1/2}, \end{cases} \quad (9.5)$$

lautet in Polarkoordinaten

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\phi} = r(1 - \cos \phi).$$

Es besitzt genau zwei Equilibria, $(0, 0)$ ist ein instabiler echter Knoten, und $(1, 0)$ hat den stabilen Eigenwert -1 mit Eigenvektor e_1 , und den Eigenwert 0 mit Eigenvektor e_2 . Der Einheitskreis bildet ein homoklines Orbit. Weitere homokline Orbits können wegen der Monotonie der Funktion $r(t)$ für $r(0) \notin \{0, 1\}$ nicht existieren. Ebenso sieht man, dass es keine periodischen Orbits gibt. Aus Satz 9.2.4 folgt daher, dass $\omega_+(x_0, y_0)$ für jeden Startwert $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ entweder nur aus dem Equilibrium $(1, 0)$ besteht oder zusätzlich aus dem homoklinen Orbit. Letzteres ist allerdings nicht der Fall, da $\dot{\phi}(t) > 0$ gilt, solange $\phi(t) \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Somit konvergieren alle Lösungen mit Anfangswert $\neq (0, 0)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen das Equi-

librium $(1, 0)$. Es ist daher ein globaler Attraktor in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, aber aufgrund des homoklinen Orbits ist $(1, 0)$ instabil.

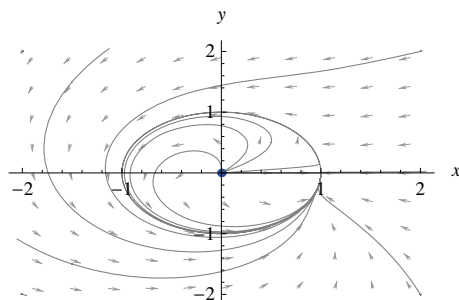


Abbildung 9.3: Ein homoklines Orbit

9.3 Periodische Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Kriterien für Existenz oder Nichtexistenz periodischer Lösungen für (9.1) befassen, die auf der Poincaré-Bendixson-Theorie beruhen, aber auch andere Argumente verwenden.

Abgesehen von *gradientenartigen Systemen*, die nach Satz 8.6.2 in keiner Dimension nichttriviale periodische Lösungen besitzen, ist das bekannteste Kriterium für Nichtexistenz das *Negativ-Kriterium von Bendixson*, welches wir nun beweisen.

Satz 9.3.1. *Sei G einfach zusammenhängend, $\rho \in C^1(G; \mathbb{R})$, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$ und es gelte: Zu jeder offenen Teilmenge $\emptyset \neq U \subset G$ gibt es eine offene Teilmenge $\emptyset \neq V \subset U$ mit*

$$(N) \quad \operatorname{div}(\rho(x)f(x)) > 0, \quad \text{für alle } x \in V.$$

Dann besitzt (9.1) keine nichttrivialen periodischen Lösungen in G .

Beweis. Angenommen, es gäbe eine nichtkonstante periodische Lösung von (9.1) in G . Es sei $\Gamma = \gamma_+(x)$ das Orbit dieser periodischen Lösung; Γ berandet nach dem Jordanschen Kurvensatz das Innengebiet G_i von Γ . Da G einfach zusammenhängend ist, gilt $G_i \subset G$. Da der Rand Γ wenigstens aus C^1 ist, lässt sich der Gaußsche Integralsatz auf G_i anwenden. Es gilt daher

$$0 < \int_{G_i} \operatorname{div}(\rho(x)f(x)) dx = \int_{\Gamma} \rho(x)(f(x)|\nu(x)) d\Gamma,$$

wobei $\nu(x)$ das Feld der äußeren Normalen an Γ bezeichnet. Nun ist das Vektorfeld $f(x)$ tangential an Γ , da Γ das Orbit einer Lösung von (9.1) ist, also gilt

$(f(x)|\nu(x)) = 0$ für alle $x \in \Gamma$. Daher haben wir einen Widerspruch erhalten, d.h. (9.1) besitzt keine echte periodische Lösung. \square

Beispiel 1. Als einfaches Beispiel betrachten wir die nichtlineare Schwingungsgleichung

$$\ddot{u} + h(u)\dot{u} + g(u) = 0.$$

Dabei seien g und h stetig differenzierbar auf \mathbb{R} . Mit $x = (x_1, x_2) = (u, \dot{u})$ ist dieses Problem äquivalent zu (9.1), wobei $f(x) = [x_2, -h(x_1)x_2 - g(x_1)]^T$ ist. Equilibria sind die Punkte $(u_*, 0)$ mit $g(u_*) = 0$. Nun ist $\operatorname{div} f(x) = -h(x_1) < 0$, sofern die Dämpfung $h(u)$ für alle u positiv ist. Satz 9.3.1 impliziert mit $\rho \equiv -1$, dass es keine nichttrivialen periodischen Lösungen geben kann.

Beispiel 2. *Der Brusselator.* Wir hatten im vorhergehenden Abschnitt gesehen, dass der Brusselator für $b > 1 + a^2$ mindestens eine echte periodische Lösung besitzt. Das Negativkriterium von Bendixson zeigt andererseits, dass es für $b \leq 1 + a^2$ keine echten periodischen Lösungen geben kann. Denn es gilt

$$\operatorname{div}(\rho(x)f(x)) < 0, \quad x \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^2, \quad u \neq a,$$

wobei $\rho(x) = u^{-2}e^{2(\frac{1}{a}-a)(u+v)}$, $x = [u, v]^T$, ist; vgl. Übung 9.9. Daher ist das Equilibrium $(a, b/a)$ nach dem Satz von Poincaré-Bendixson für $b \leq 1 + a^2$ global attraktiv in \mathbb{R}_+^2 und für $b < 1 + a^2$ sogar global asymptotisch stabil.

Ein weiteres negatives Kriterium, dass sich insbesondere auf Hamiltonsche Systeme

$$(H) \quad \dot{q} = \partial_p H(q, p), \quad \dot{p} = -\partial_q H(q, p),$$

anwenden lässt, ist komplementär zu gradientenartigen Systemen. Man beachte, dass im Fall $H \in C^2$ die Identität

$$\operatorname{div}[\partial_p H(q, p), -\partial_q H(q, p)]^T = 0$$

gilt.

Satz 9.3.2. *Sei $\Phi \in C^1(G; \mathbb{R})$ ein erstes Integral für (9.1), d.h. es gilt $\dot{\Phi} \equiv 0$ auf G . Φ sei auf keiner offenen Teilmenge U von G konstant. Dann besitzt (9.1) keinen Grenzyklus in G .*

Man beachte, dass dieser Satz *keine* Aussagen über *periodische* Lösungen macht, sondern nur über *Grenzyklen*. Der harmonische Oszillator $\ddot{x} + x = 0$ hat nur periodische Lösungen, aber keinen Grenzyklus.

Beweis. Angenommen, $\Gamma = \omega_+(x_0) \subset G$ wäre ein Grenzyklus; setze $x(t) := x(t, x_0)$. Sei $K \subset G$ eine kompakte Umgebung von Γ , die kein Equilibrium enthält. Da $\operatorname{dist}(x(t), \Gamma) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt, ist $x(t) \in K$ für $t \geq t_0$, sofern t_0 groß genug gewählt ist. Wähle eine Transversale L durch einen Punkt $y \in \Gamma$, und sei $x(t_1), x(t_2) \in L$ mit $t_2 > t_1 \geq t_0$ zwei aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der

Lösung $x(t)$ mit L . Definiere D als den Bereich der durch Γ , die Transversale L und durch den Kurvenbogen $x[t_1, t_2]$ berandet wird. Dann ist $D \subset K$ kompakt und positiv invariant für (9.1). Nach dem Satz von Poincaré-Bendixson haben alle Lösungen, die in D starten, den Grenzzzyklus Γ als Limesmenge. Da Φ entlang Lösungen konstant ist, gilt nun $\Phi(x) = \Phi(y)$ für alle $x \in D$; da aber $\text{int } D \neq \emptyset$ ist, ergibt dies einen Widerspruch zur Annahme, dass Φ auf keiner offenen Menge konstant ist. \square

Das Argument im Beweis von Satz 9.3.2 zeigt, dass ein Grenzzzyklus wenigstens "einseitig" als Menge asymptotisch stabil ist.

Ein positives Kriterium für die Existenz eines Grenzzzyklus haben wir bereits im Beispiel des Brusselators kennengelernt. Wir formulieren es allgemeiner als

Satz 9.3.3. *Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$, $K \subset G$ kompakt und positiv invariant, und gelte $K \cap \mathcal{E} = \{x_*\}$ mit $\text{Re } \sigma(f'(x_*)) > 0$. Dann besitzt (9.1) mindestens einen Grenzzzyklus in K .*

Beweis. Da x_* in negativer Zeitrichtung asymptotisch stabil ist, ist die Kugel $\bar{B}_r(x_*)$ bzgl. der Norm $|\cdot|_Q$ aus Satz 8.1.4 negativ invariant, das Vektorfeld f zeigt auf $\partial B_r(x_*)$ bezüglich der Norm $|\cdot|_Q$ strikt nach außen, sofern $r > 0$ hinreichend klein ist. Daher ist die Menge $D := K \setminus B_r(x_*)$ positiv invariant und auf $\partial B_r(x_*)$ startende Lösungen sind nicht periodisch. Satz 9.2.2 impliziert die Behauptung. \square

9.4 Lienard-Gleichung

Lienard-Gleichung nennt man eine Gleichung der Form

$$(L) \quad \ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Dabei sind die $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus C^1 . Wir setzen

$$H(x) = \int_0^x h(s)ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s)ds, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die auf den ersten Blick unkonventionelle Transformation $y = \dot{x} + H(x)$ überführt (L) in das System

$$(LT) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - H(x), \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases}$$

Die Equilibria von (L) bestehen aus Punkten der Form $(x_*, 0)$, die Equilibria für (LT) sind von der Form $(x_*, H(x_*))$, wobei in beiden Fällen $g(x_*) = 0$ gilt.

Typischerweise ist $g(x)$ eine Rückstellkraft, die das System in die triviale Gleichgewichtslage $x = 0$, also $(0, 0)$ für (LT) bringen will. Daher sind die folgenden Annahmen für $g(x)$ sinnvoll:

(G1) $g(x)x > 0$ für alle $x \neq 0$,

(G2) $G(x) \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$.

Dann ist offenbar $\mathcal{E} = \{(0,0)\}$. Als Ljapunov-Funktion wählen wir den Ansatz $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$. Offenbar ist V aufgrund von (G1) positiv definit, und es gilt $V(x,y) \rightarrow \infty$ für $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, wegen (G2), also ist V koerziv. Für \dot{V} ergibt sich die Beziehung

$$\dot{V}(x,y) = -g(x)H(x) = -(xg(x)) \cdot \frac{1}{x}H(x),$$

folglich gilt $\dot{V}(x,y) \leq 0$ genau dann, wenn $xH(x) \geq 0$ ist.

Die Linearisierung von (LT) im Equilibrium $(0,0)$ ergibt die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -h(0) & 1 \\ -g'(0) & 0 \end{bmatrix},$$

also $\text{sp } A = -h(0)$, und $\det A = g'(0)$. Daher ist $(0,0)$ kein Sattelpunkt des Systems (LT), falls wir zusätzlich $g'(0) > 0$ annehmen.

Der Reibungskoeffizient hat in Anwendungen typischerweise die Eigenschaft

$$(HS) \quad xH(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0,$$

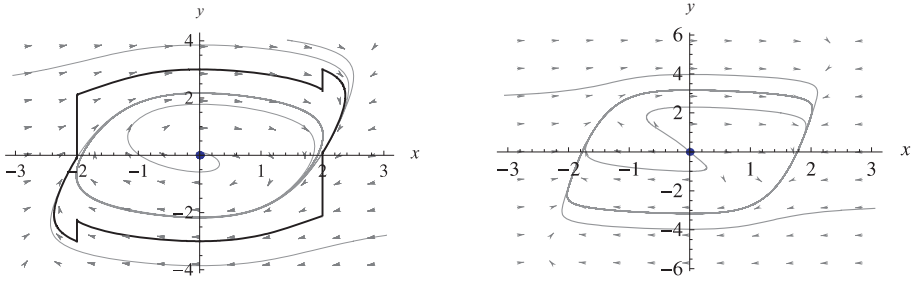
oder er erfüllt

$$(H) \quad h(0) < 0, \quad xH(x) > 0, \quad \text{für alle } |x| \geq a.$$

Das Verhalten des Systems (LT) ist in diesen Fällen wesentlich verschieden.

Wir setzen zunächst (HS) voraus, d.h. es liegt stets Dämpfung vor. Dann gilt $\dot{V} \leq 0$ auf \mathbb{R}^2 , also ist $(0,0)$ nach Satz 8.3.3 stabil. Alle Lösungen existieren global und sind beschränkt, da V koerziv ist. Nun ist $\dot{V}(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. Dann ist aber $\dot{x} = y \neq 0$ mit Ausnahme des Equilibriums $(0,0)$, daher ist V in diesem Fall eine strikte Ljapunov-Funktion. Also ist das System (LT) gradientenartig, und mit Satz 8.6.2 konvergiert jede Lösung gegen das triviale Equilibrium.

Sei nun (H) erfüllt. Dann gilt $\text{sp } A = -h(0) > 0$, also ist das Equilibrium $(0,0)$ instabil, genauer ein instabiler Knoten oder eine instabile Spirale. Wir wollen Satz 9.3.3 anwenden. Dazu besteht die Hauptarbeit darin, eine kompakte positive invariante Menge zu finden. Dann impliziert Satz 9.3.3 die Existenz eines Grenzzyklus. Zunächst sei bemerkt, dass das Vektorfeld $f(x,y) = [y - H(x), -g(x)]^T$ für $x = 0$ horizontal ist, es ist für $y > 0$ nach rechts und für $y < 0$ nach links gerichtet. Für $x = a > 0$ gilt $H(a) > 0$ und $g(a) > 0$, also liegt $f(a,y)$ im 4. Quadranten falls $y > H(a)$ und im 3. Quadranten für $y < H(a)$. Analog gilt für $x = -a < 0$ $H(-a) < 0$ und $g(-a) < 0$, d.h. $f(-a,y)$ liegt im 1. Quadranten für $y > H(-a)$ und im 2. Quadranten wenn $y < H(-a)$ ist. Damit zeigt das Vektorfeld in den vertikalen Streifen $-a < x < a$ hinein, wenn $x = a$ und $y < H(a)$ bzw. $x = -a$ und $y > H(-a)$ gelten, ansonsten zeigt es aus dem Streifen hinaus.

Abbildung 9.4: van der Pol Oszillator mit $\mu = 1$ und $\mu = 3$

(i) Wir setzen

$$c_0 = \sup_{|x| \leq a} |g(x)|, \quad c_1 = \sup_{|x| \leq a} |H(x)|,$$

fixieren ein $R > c_1$, und betrachten die in $(0, R)$ startende Lösung von (LT). Aufgrund von $0 \geq \dot{y}(t) \geq -c_0$ folgt $R \geq y(t) \geq R - c_0 t$, für $t \geq 0$, jedenfalls solange $x(t) \leq a$ gilt. Daher ist $y(t) \geq c_1$, solange $t \leq t_* := (R - c_1)/c_0$ ist. Andererseits gilt $\dot{x}(t) \geq y(t) - c_1 \geq R - c_1 - c_0 t$, solange $x(t) \leq a$ ist, und für solche t ist $x(t) \geq (R - c_1)t - c_0 t^2/2$. Die rechte Seite dieser Ungleichung hat für $t = t_*$ ein Maximum, dessen Wert $(R - c_1)^2/(2c_0)$ beträgt. Gilt daher $a < (R - c_1)^2/(2c_0)$, so erreicht $x(t)$ nach dem Zwischenwertsatz den Wert a für ein $t = t_1(R) \in (0, t_*)$.

Setzt man nun $z = t_1(R)/(R - c_1)$, so folgt $a/(R - c_1)^2 \geq z - c_0 z^2/2$, und mit $z \leq t_*/(R - c_1) = 1/c_0$ gilt daher $t_1(R)/(R - c_1) \rightarrow 0$ mit $R \rightarrow \infty$. Deshalb gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $R(\eta) > c_1$ mit $t_1(R) \leq \eta(R - c_1)$ für alle $R \geq R(\eta)$. Es folgt

$$R \geq y(t_1(R)) \geq R - c_0 t_1(R) \geq R - \eta c_0 (R - c_1), \quad \text{für } R \geq R(\eta).$$

Aus dieser Abschätzung folgt leicht

$$R \geq y(t_1(R)) > c_1 \geq H(a),$$

falls $\eta \in (0, 1/c_0)$ gilt. Die Lösung bleibt also oberhalb der Schaltkurve $y = H(x)$.

Das gleiche Argument lässt sich auf die in $(0, -R)$ startende Lösung anwenden, und ebenso gilt es für negative Zeiten. Diese Lösungen für $R = R(\eta)$ liefern den oberen und unteren Rand der gesuchten Menge K .

(ii) Als nächstes betrachten wir die Lösung mit Anfangswert $(x(0), y(0)) = (a, R)$, $R > c_1$. Diese startet in den Bereich $x \geq a$ hinein. Dort ist V eine Ljapunov-Funktion, also ist $\varphi(t) := V(x(t), y(t)) \leq V(a, R)$. Wir behaupten, dass es ein erstes $t_2(R) > 0$ gibt mit $x(t_2) = a$, die Lösung kehrt also in den Streifen $|x| \leq a$ zurück. Wäre dies nicht der Fall, so würde $x(t) > a$ für alle Zeiten gelten, die

Lösung ist aber beschränkt, besitzt daher eine nichttriviale Limesmenge, welche nach dem Satz von Poincaré-Bendixson ein periodisches Orbit sein müsste. Dies kann aber nicht sein, da $y(t)$ in $x \geq a$ streng fallend ist. Daher gibt es dieses erste $t_2(R)$ mit $x(t) > a$ in $(0, t_2(R))$ und $x(t_2(R)) = a$.

(iii) Offenbar muss $y(t_2(R)) \leq H(a)$ gelten, aufgrund von $\dot{x}(t_2(R)) \leq 0$. Wir wollen $y(t_2(R)) \geq -R + \delta$ zeigen. Allerdings benötigen wir dafür die folgende Zusatzannahme:

$$(H') \quad \underline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} |H(x)| =: H_\infty > 0.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y(t_2)^2 - \frac{1}{2}R^2 &= \varphi(t_2) - \varphi(0) = \int_0^{t_2} \dot{\varphi}(t) dt \\ &= - \int_0^{t_2} g(x(t))H(x(t))dt = - \int_{y(t_2)}^R H(x(y))dy. \end{aligned}$$

Die Zusatzannahme (H') in Verbindung mit (H) ergibt $H(x) \geq \delta_0$ für $x \geq a$. Daraus folgt

$$y(t_2)^2 - R^2 = -2 \int_{y(t_2)}^R H(x(y))dy \leq -2\delta_0(R - y(t_2)),$$

also $y(t_2) \geq -R + 2\delta_0$. Wählt man also $\delta < 2\delta_0$ so folgt die Behauptung. Analog geht man an der linken Seite des Streifens vor.

(iv) Die kompakte Menge ist nun die von diesen 4 Lösungen und 4 vertikalen Segmenten berandete Menge; vgl. Abb. 9.4. Man beachte, dass auf diesen Segmenten, also z.B. $S_1 = \{(a, y) : R \geq y \geq x(t_1(R))\}$, das Vektorfeld f nach K hinein zeigt, da dort $y > H(a)$ gilt. Die Konstruktion ist abgeschlossen, und Satz 9.3.3 ergibt das folgende Resultat:

Satz 9.4.1. *Es seien $g, h \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften.:*

$$(G_0) \quad g'(0) > 0, \quad xg(x) > 0 \text{ für alle } x \neq 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x) = \infty.$$

$$(H_0) \quad h(0) < 0, \quad xH(x) > 0 \text{ für alle } |x| > a, \quad \underline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} |H(x)| > 0.$$

Dann besitzt die Lienard-Gleichung (L) mindestens einen Grenzzyklus.

Für $g(x) = x$ und $h(x) = \mu(x^2 - 1)$ ($\mu > 0$) heißt (L) *van-der-Pol-Gleichung*. Offensichtlich sind die Voraussetzungen (G_0) und (H_0) in diesem Fall erfüllt.

9.5 Biochemische Oszillationen

Differentialgleichungen der folgenden Form treten in der Modellierung gewisser biochemischer Systeme auf.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \nu - f(u, v), \\ \dot{v} &= \eta\nu - \mu v + f(u, v),\end{aligned}\tag{9.6}$$

wobei $\nu, \mu, \eta > 0$ Konstanten sind, und $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ die folgenden Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned}\partial_u f(u, v) &> 0, & \partial_v f(u, v) &> 0, & u, v &> 0; \\ f(0, v) &\leq 0, & f(u, 0) &\geq 0, & u, v &\geq 0.\end{aligned}\tag{9.7}$$

Da nach Voraussetzung f lokal Lipschitz ist, erzeugt (9.6) einen lokalen Fluss in \mathbb{R}^2 . Die zweite Bedingung in (9.7) stellt sicher, dass der Standardkegel \mathbb{R}_+^2 positiv invariant ist. Denn ist $u = 0$, so folgt $\dot{u} = \nu - f(0, v) > 0$, und ebenso impliziert $v = 0$ die Ungleichung $\dot{v} = \eta\nu + f(u, 0) > 0$, das Positivitätskriterium ist also erfüllt.

Um nun globale Existenz der Lösungen nach rechts zu zeigen, genügt es, Anfangswerte $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ zu betrachten, da jede auf dem Rand von \mathbb{R}_+^2 startende Lösung sofort ins Innere des Standardkegels strebt. Wir konstruieren nun für $0 < \varepsilon < \eta\nu/\mu$ und $R > 0$ eine Familie von Mengen $D_{\varepsilon, R} \subset \mathbb{R}_+^2$ wie folgt; man fertige dazu eine Skizze an. Zunächst sei u_ε als Lösung von $\nu = f(u, \varepsilon)$ definiert. Dazu nehmen wir $\nu < \lim_{u \rightarrow \infty} f(u, v)$ für jedes $v > 0$ an. Da $f(0, \varepsilon) \leq 0$ und $f(\cdot, \varepsilon)$ streng wachsend ist, existiert u_ε und ist eindeutig bestimmt. Beginne mit der horizontalen Geraden (u, ε) für $0 \leq u \leq R$ und $R \geq u_\varepsilon$. Auf dieser Strecke ist das Vektorfeld $(\nu - f(u, v), \eta\nu - \mu v + f(u, v))$ nach oben gerichtet. Dann folgen wir der Vertikalen (R, v) von $v = \varepsilon$ bis $v = v_* = (1 + \eta)\nu/\mu$. Auf Grund der Monotonie von f gilt auf dieser Strecke $\nu - f(u, v) \leq \nu - f(u_\varepsilon, \varepsilon)$, also zeigt das Vektorfeld nach links. Danach folgen wir der Geraden $u + v = c$, mit $c = R + (1 + \eta)\nu/\mu$ bis zum Schnittpunkt mit der Ordinate, also $(0, c)$. Durch Addition der Komponenten des Vektorfeldes erhält man auf dieser Strecke $(1 + \eta)\nu - \mu v \leq 0$, da hier $v \geq v_*$ gilt. Also zeigt das Vektorfeld auch auf dieser Strecke in $D_{\varepsilon, R}$ hinein. Schließlich folgt man der Vertikalen von $(0, c)$ zurück zum Ausgangspunkt. Auf diese Weise haben wir beschränkte, konvexe und abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}_+^2 konstruiert, die positiv invariant für (9.6) sind. Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ kann man nun für den Anfangswert $(u_0, v_0) \in D_{\varepsilon, R}$ erreichen, die zugehörige Lösung bleibt in $D_{\varepsilon, R}$, ist also nach rechts beschränkt und existiert damit auch global nach rechts.

Als nächstes berechnen wir die Equilibria (u_*, v_*) von (9.6). Durch Addition der Gleichungen ergibt sich $v_* = (1 + \eta)\nu/\mu > 0$. Das entsprechende u_* ist Lösung von $f(u, v_*) = \nu$. Da $f(\cdot, v_*)$ streng wachsend und $f(0, v_*) \leq 0$ ist, gibt es genau eine Lösung u_* dieser Gleichung, sofern $\nu < \lim_{u \rightarrow \infty} f(u, v_*)$ gilt.

Die Stabilität dieses Equilibriums bestimmt man wie immer mittels Linearisierung A der rechten Seite von (9.6) in (u_*, v_*) . Dies führt auf die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -\partial_u f(u_*, v_*) & -\partial_v f(u_*, v_*) \\ \partial_u f(u_*, v_*) & \partial_v f(u_*, v_*) - \mu \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist

$$\det A = \mu \partial_u f(u_*, v_*) > 0,$$

und für die Spur ergibt sich

$$\operatorname{sp} A = \partial_v f(u_*, v_*) - \partial_u f(u_*, v_*) - \mu.$$

Daher ist (u_*, v_*) kein Sattelpunkt, sondern eine (stabile oder instabile) Spirale bzw. ein (stabiler oder instabiler) Knoten.

Da jede in einem Punkt $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2$ startende Lösung in \mathbb{R}_+^2 bleibt und nach rechts beschränkt ist, ist ihre Limesmenge $\omega_+(u_0, v_0)$ nichtleer, und trifft den Rand von \mathbb{R}_+^2 nicht, da sie invariant ist. (9.6) besitzt genau ein Equilibrium, also gilt nach dem Satz von Poincaré-Bendixson entweder $\omega_+(u_0, v_0) = \{(u_*, v_*)\}$ oder $\omega_+(u_0, v_0)$ ist ein periodisches Orbit. Ein homoklines Orbit kommt hier nicht in Frage, da dann (u_*, v_*) ein Sattelpunkt sein müsste. Insbesondere existiert im Fall $\operatorname{sp} A > 0$ mindestens eine periodische Lösung, und jede Lösung (ausgenommen das Equilibrium (u_*, v_*)) konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen eine periodische Lösung. Damit hat das System in diesem Fall oszillatorisches Verhalten. Wir fassen zusammen.

Satz 9.5.1. *Es seien $\nu, \mu, \eta > 0$ Konstanten. Das Vektorfeld $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ erfülle die Bedingungen $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u, v) > \nu$ für alle $v > 0$, und*

$$\begin{aligned} \partial_u f(u, v) &> 0, & \partial_v f(u, v) &> 0, & u, v &> 0; \\ f(0, v) &\leq 0, & f(u, 0) &\geq 0, & u, v &\geq 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Dann erzeugt das System (9.6) einen globalen Halbfluss auf \mathbb{R}_+^2 . Es existiert genau ein Equilibrium $(u_, v_*) \in \mathbb{R}_+^2$, und es ist $u_*, v_* > 0$. Sei*

$$\gamma_* := \partial_v f(u_*, v_*) - \partial_u f(u_*, v_*) - \mu.$$

Ist $\gamma_ < 0$, so ist (u_*, v_*) asymptotisch stabil, für $\gamma_* > 0$ hingegen instabil. Im Falle $\gamma_* > 0$ konvergiert jede Lösung in \mathbb{R}_+^2 gegen ein periodisches Orbit (natürlich mit Ausnahme des Equilibriums).*

Wir betrachten zum Abschluss zwei

Beispiele. (a) $f(u, v) = uv^2$; dies ist ein vereinfachtes *Sel'kov-Modell*. Hier haben wir

$$u_* = \frac{\mu^2}{(1 + \eta)^2 \nu}, \quad v_* = (1 + \eta) \frac{\nu}{\mu},$$

und

$$\gamma_* = 2u_*v_* - v_*^2 - \mu = \mu \frac{1-\eta}{1+\eta} - (1+\eta)^2 \frac{\nu^2}{\mu^2}.$$

Für $\eta \geq 1$ ist $\gamma_* < 0$, aber für $\eta < 1$ ist $\gamma_* > 0$ genau dann, wenn $\mu^3 > \nu^2(1+\eta)^3/(1-\eta)$ erfüllt ist. Abb. 9.5 zeigt das Phasendiagramm für dieses Modell.

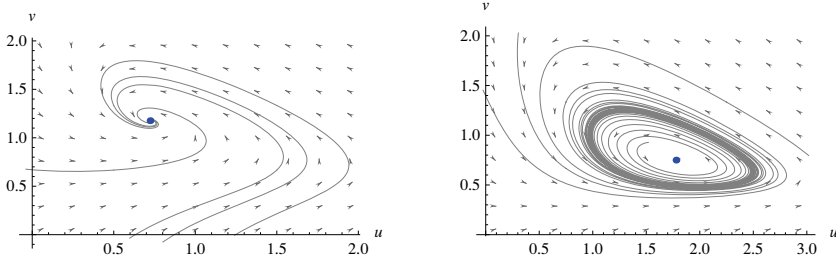


Abbildung 9.5: Biochemischer Oszillator

(b) $f(u, v) = u(1+v)^2$; diese Funktion tritt im *Goldbeter-Lefever-Modell* auf. Da $f(u, 0) > 0$ ist, kann man hier auch den Fall $\eta = 0$ betrachten. Dann sind

$$u_* = \frac{\nu\mu^2}{(\mu+\nu)^2}, \quad v_* = \frac{\nu}{\mu},$$

und

$$\gamma_* = \mu \frac{\nu - \mu}{\mu + \nu} - \frac{(\mu + \nu)^2}{\mu^2}.$$

Für $\nu \leq \mu$ ist hier $\gamma_* < 0$, für $\nu > \mu$ ist $\gamma_* > 0$ genau dann, wenn $(1 + \nu/\mu)^3 < \mu(\nu/\mu - 1)$ gilt.

9.6 Der Index isolierter Equilibria

Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$. Ist $a \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$, so definieren wir $\varphi(a)$ als den Winkel den a mit $e_1 = [1, 0]^T$ bildet. Sei nun $\Gamma \subset G \setminus \mathcal{E}$ eine rechts-orientierte C^1 -Jordan-Kurve, also geschlossen und doppeltpunktfrei. Wir definieren den **Index** von f bzgl. Γ als die Änderung des normierten Winkels $\frac{\varphi(f(x))}{2\pi}$ bei einem Umlauf längs der Kurve Γ :

$$\text{ind}(f, \Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d(\varphi \circ f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d}{ds} \varphi(f(\sigma(s))) ds, \quad (9.9)$$

wobei $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Parametrisierung von Γ bezeichnet. Hierbei ist die Funktion $x \mapsto \varphi(f(x))$ als stetig anzusehen, der Winkel $\varphi(f(x))$ kann also beliebige Werte in \mathbb{R} annehmen. Mit anderen Worten: Der Index von f bzgl. Γ ist die Windungszahl der Kurve $f(\Gamma)$ um 0.

Lemma 9.6.1. Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$, $\Gamma \subset G \setminus \mathcal{E}$ eine C^1 -Jordan-Kurve mit Innengebiet $\Omega \subset G$, und sei $\Omega \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Dann ist $\text{ind}(f, \Gamma) = 0$.

Beweis. Ist $f_1(x) > 0$, so ist

$$\varphi(f(x)) = \arctan\left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right) + 2k\pi,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ konstant ist, solange $f_1(x) > 0$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\varphi(f(\sigma(s))) &= \frac{1}{1 + (f_2/f_1)^2} \frac{d}{ds} \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2} \\ &= \frac{1}{f_1^2 + f_2^2} \left(\begin{bmatrix} f_1 \partial_2 f_2 - (\partial_2 f_1) f_2 \\ (\partial_1 f_1) f_2 - f_1 \partial_1 f_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_2 \\ -\dot{\sigma}_1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Diese Darstellung gilt auch in den anderen Bereichen, nicht nur für $f_1 > 0$. Damit folgt

$$\text{ind}(f, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d}{ds} \varphi(f(\sigma(s))) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (g(x) | \nu(x)) d\sigma,$$

wobei $\nu(x)$ die äußere Normale an $\Gamma = \partial\Omega$, $d\sigma$ das Linienelement auf Γ , und $g(x)$ das Vektorfeld

$$g(x) = \frac{1}{f_1^2 + f_2^2} \begin{bmatrix} f_1 \partial_2 f_2 - (\partial_2 f_1) f_2 \\ (\partial_1 f_1) f_2 - f_1 \partial_1 f_2 \end{bmatrix} (x)$$

bezeichnen. Der Divergenzsatz impliziert daher

$$\text{ind}(f, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (g(x) | \nu(x)) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \text{div } g(x) dx = 0,$$

da g aufgrund von $f(x) \neq 0$ in Ω wohldefiniert ist, und wie eine einfache Rechnung zeigt, $g \in C^1$ die Relation $\text{div } g(x) = 0$ in Ω erfüllt, sofern $f \in C^2$ ist. Das Lemma ist somit für $f \in C^2$ bewiesen. Da sich jedes $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$ auf kompakten Teilmengen von G gleichmäßig durch C^2 -Funktionen approximieren lässt, ist die Behauptung des Lemmas auch für $f \in C^1$ richtig. \square

Sei nun f nur noch stetig in G . Approximiere f durch eine Folge von C^1 -Funktionen f_k , gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G . Dann gilt

$$\text{ind}(f_k, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} [\varphi(f_k(\sigma(1))) - \varphi(f_k(\sigma(0)))] \rightarrow \frac{1}{2\pi} [\varphi(f(\sigma(1))) - \varphi(f(\sigma(0)))],$$

und dies ist unabhängig von der gewählten Folge f_k . Damit ist $\text{ind}(f, \Gamma)$ für alle $f \in C(G; \mathbb{R}^2)$ mittels

$$\text{ind}(f, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} [\varphi(f(\sigma(1))) - \varphi(f(\sigma(0)))]$$

definiert, sofern $\Gamma \cap \mathcal{E} = \emptyset$ ist. Hierbei bezeichnet $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nach wie vor eine C^1 -Parametrisierung von Γ . Es ist klar, dass $\text{ind}(f, \Gamma)$ Werte in \mathbb{Z} annimmt und stetig von f abhängt. Daher gilt Lemma 9.6.1 auch für $f \in C(G; \mathbb{R}^2)$.

Schließlich beseitigen wir noch die Glattheitsannahme an Γ . Dazu sei Γ eine stetige Jordan-Kurve mit $\Gamma \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Wir approximieren Γ von innen her durch eine Folge von C^1 -Jordan-Kurven Γ_k . Ist $k \geq k_0$, mit k_0 hinreichend groß, so ist $\text{ind}(f, \Gamma_k)$ wohldefiniert, und mit Lemma 9.6.1 unabhängig von k . Daher definieren wir

$$\text{ind}(f, \Gamma) := \text{ind}(f, \Gamma_k), \quad k \geq k_0.$$

Lemma 9.6.1 bleibt so für alle stetigen Jordan-Kurven und $f \in C(G; \mathbb{R}^2)$ mit $\Gamma \cap \mathcal{E} = \emptyset$ richtig.

Damit können wir nun den Index eines isolierten Equilibriums von (9.1) einführen. Es sei $x_* \in \mathcal{E}$ isoliert. Wähle eine Jordan-Kurve Γ_* um den Punkt x_* , derart, dass kein weiteres Equilibrium innerhalb oder auf Γ_* liegt, und setze

$$\text{ind}(f, x_*) := \text{ind}(f, \Gamma_*).$$

Diese Zahl heißt **Index** des isolierten Equilibriums x_* von f . Aufgrund von Lemma 9.6.1 ist diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl von Γ_* . Eine direkte Folgerung aus Lemma 9.6.1 und der Definition des Index ist das

Korollar 9.6.2. *Sei $\Gamma \subset G \setminus \mathcal{E}$ eine Jordan-Kurve mit Innengebiet $\Omega \subset G$, und sei $\Omega \cap \mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_m\}$ endlich. Dann gilt*

$$\text{ind}(f, \Gamma) = \sum_{j=1}^m \text{ind}(f, x_j).$$

Der folgende Satz – *Hopfischer Umlaufsatz* genannt –, hat wichtige Konsequenzen für periodische Lösungen von (9.1).

Satz 9.6.3 (Hopfscher Umlaufsatz). *Sei $\Gamma \subset G \setminus \mathcal{E}$ eine C^1 -Jordan-Kurve, und gelte $(f(x)|\nu(x)) = 0$ auf Γ , wobei $\nu(x)$ die äußere Normale an Γ bezeichne. Dann gilt $\text{ind}(f, \Gamma) = 1$. Ist das Innengebiet von Γ in G enthalten, so gibt es dort mindestens ein Equilibrium.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. $|f(x)|_2 = 1$ auf Γ annehmen, und das Koordinatensystem so wählen, dass Γ im ersten Quadranten liegt, und die x -Achse im Punkt $(a, 0)$ berührt. Sei die Parametrisierung $x(s)$ von Γ über die Bogenlänge s , so orientiert, dass $\dot{x}(s) = f(x(s))$ gilt, sowie $x(0) = (a, 0) = x(l)$ ist; es gilt dann $\dot{x}(0) = [1, 0]^T = e_1$.

Wir konstruieren ein Vektorfeld $g(s, t)$ auf dem Dreieck $T = \{(s, t) : 0 \leq s \leq t \leq l\}$ wie folgt:

$$\begin{cases} g(s, s) = f(x(s)), & s \in [0, l] \\ g(0, l) = -e_1 = [1, 0]^T \\ g(s, t) = \frac{x(t) - x(s)}{|x(t) - x(s)|}, & s \neq t. \end{cases}$$

Das Vektorfeld g ist auf T stetig und verschwindet in keinem Punkt, denn es gilt $|g(s, t)|_2 = 1$, für alle $(s, t) \in T$. Daher gilt $\text{ind}(g, \partial T) = 0$ nach Lemma 9.6.1. Die Änderung des Winkels zwischen $g(s, s) = f(x(s))$ und e_1 von 0 nach $le := [l, l]^T$, also $\text{ind}(f, \Gamma)$, ist daher gleich der Änderung des Winkels entlang der Vertikalen von 0 nach le_2 plus der Änderung längs der Horizontalen von le_2 nach le . Sei $\theta(s, t)$ dieser Winkel. Es ist $\theta(0, 0) = 0$ da $g(0, 0) = \dot{x}(0) = e_1$ ist. Da Γ im ersten Quadranten liegt, ist $0 \leq \theta(0, t) \leq \pi$, und $\theta(0, l) = \pi$. Daher ist die Änderung längs der Vertikalen von $(0, 0)$ nach $(0, l)$ gleich π . Ebenso sieht man, dass längs der Horizontalen von $(0, l)$ nach (l, l) $\pi \leq \theta(s, l) \leq 2\pi$ ist, und $\theta(l, l) = 2\pi$, da $g(l, l) = \dot{x}(l) = e_1$ ist. Daher ist $\text{ind}(f, \Gamma) = 1$. \square

Wir formulieren nun die Konsequenzen des Hopfschen Umlaufsatzes für das zweidimensionale autonome System (9.1).

Satz 9.6.4. *Sei $\Gamma \subset G$ ein periodisches Orbit von (9.1) und sei ihr Innengebiet $\Omega \subset G$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. $\text{ind}(f, \Gamma) = 1$;
2. $\Omega \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$;
3. Ist \mathcal{E} diskret, so ist $\Omega \cap \mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_m\}$ endlich, und es gilt

$$\sum_{j=1}^m \text{ind}(f, x_j) = 1.$$

Insbesondere gibt es im Innengebiet Ω von Γ mindestens ein Equilibrium.

Beweis. 1. Da $\Gamma = \gamma_+(x)$ ein periodisches Orbit von (9.1) ist, gilt $\dot{x}(t) = f(x(t))$, d.h. Γ ist C^1 und $f(x)$ ist tangential an Γ , sowie $\neq 0$. Der Hopfsche Umlaufsatz ergibt die Behauptung.

2. Lemma 9.6.1 zeigt, dass wenigstens ein Equilibrium von f im Innengebiet Ω von Γ liegen muss.

3. Es ist $\mathcal{E} \cap \Omega = \mathcal{E} \cap \overline{\Omega}$ kompakt. Da \mathcal{E} diskret ist, gibt es zu jedem $x_* \in \mathcal{E}$ eine Kugel $B_{r_*}(x_*)$ die keine weiteren Equilibria enthält. Da diese Kugeln $\mathcal{E} \cap \Omega$ überdecken, genügen bereits endlich viele, d.h. $\mathcal{E} \cap \Omega$ ist endlich. Die letzte Behauptung folgt aus dem Hopfschen Umlaufsatz und aus Korollar 9.6.2. \square

Als nächstes berechnen wir den Index eines nicht ausgearteten Equilibriums.

Proposition 9.6.5. *Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$ und sei $x_* \in \mathcal{E}$ nicht ausgeartet, es gelte also $\det f'(x_*) \neq 0$. Dann ist $\text{ind}(f, x_*) = \text{sgn} \det f'(x_*)$. Insbesondere gilt $\text{ind}(f, x_*) = -1$ genau dann, wenn x_* ein Sattelpunkt ist. Für Knoten, Spiralen und Zentren gilt hingegen $\text{ind}(f, x_*) = 1$.*

Beweis. Es sei o.B.d.A. $x_* = 0$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gegeben. Mit $A = f'(0)$ ist für $|x| = r$

$$\begin{aligned} |\tau Ax + (1 - \tau)f(x)| &= |Ax - (1 - \tau)(Ax - f(x))| \geq |Ax| - |Ax - f(x)| \\ &\geq |A^{-1}|^{-1}r - \varepsilon r > 0, \end{aligned}$$

sofern $r > 0$ hinreichend klein ist. Daher ist $g_\tau(x) := \tau Ax + (1 - \tau)f(x) \neq 0$ auf $\partial B_r(0)$. Da die Funktion

$$\psi(\tau) := \text{ind}(g_\tau, \partial B_r(0))$$

stetig ist und Werte in \mathbb{Z} hat, folgt $\psi(0) = \psi(1)$, also $\text{ind}(f, 0) = \text{ind}(A, 0)$. Daher genügt es die lineare Abbildung Ax zu betrachten.

Für das im Beweis von Lemma 9.6.1 definierte Vektorfeld $g(x)$ erhalten wir

$$g(x) = \frac{\det A}{|Ax|_2^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Folglich ist für $\Gamma = \partial B_r(0)$ mit $\nu(x) = r^{-1}[x_1, x_2]^\top$

$$\text{ind}(A, 0) = \frac{r \det A}{2\pi} \int_\Gamma \frac{d\sigma}{|Ax|_2^2} = \frac{\det A}{2\pi} \int_{|x|_2=1} \frac{d\sigma}{|Ax|_2^2}.$$

Da $\text{ind}(A, 0)$ eine ganze Zahl ist und stetig in den Einträgen a_{ij} von A , ist diese Zahl konstant, solange $\det A$ nicht das Vorzeichen wechselt. Ist nun $\det A > 0$ und $a_{11}a_{22} > 0$, so ergibt $a_{12}, a_{21} \rightarrow 0$ und $a_{11}, a_{22} \rightarrow \text{sgn } a_{11}$ den Index $\text{ind}(A, 0) = 1$; gilt nun $a_{11}a_{22} \leq 0$, dann ergibt $a_{11}, a_{22} \rightarrow 0$ und $a_{12} \rightarrow \text{sgn } a_{12}$, $a_{21} \rightarrow \text{sgn } a_{21}$ wiederum $\text{ind}(A, 0) = 1$. Ebenso argumentiert man im Fall $\det A < 0$, um dann $\text{ind}(A, 0) = -1$ zu erhalten. Damit ist die Proposition bewiesen. \square

Eine interessante Folgerung ist

Korollar 9.6.6. *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhängend, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$ und es sei jedes Equilibrium $x_* \in \mathcal{E}$ ein Sattelpunkt, es gelte also $\det f'(x_*) < 0$. Dann besitzt (9.1) keine periodische Lösung in G .*

Beweis. Wäre Γ ein periodisches Orbit, so wäre $\text{ind}(f, \Gamma) = 1$ nach Satz 9.6.4. Nach Voraussetzung und mit dem Satz über inverse Funktionen ist \mathcal{E} diskret, also folgt aus Satz 9.6.4 und Proposition 9.6.5

$$1 = \text{ind}(f, \Gamma) = \sum_{j=1}^m \text{ind}(f, x_j) = \sum_{j=1}^m (-1) = -m < 0,$$

ein Widerspruch. \square

Eine weitere Folgerung beinhaltet die Existenz eines Equilibriums.

Korollar 9.6.7. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhängend, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$, und sei $\emptyset \neq K \subset G$ kompakt und positiv invariant. Dann besitzt (9.1) mindestens ein Equilibrium in G .

Beweis. Sei $x_0 \in K$; da K positiv invariant und kompakt ist, ist die Limesmenge $\omega_+(x_0)$ nichtleer. Enthält sie kein Equilibrium, dann ist sie nach dem Satz von Poincaré-Bendixson ein periodisches Orbit. Da G einfach zusammenhängend ist, liegt das Innengebiet dieses Orbits in G . Nach Satz 9.6.4 gibt es dort mindestens ein Equilibrium. \square

Übungen

1. Die Gleichung $\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = 0$ heißt *Duffing-Gleichung*. Man zeige:

- (a) Ist $a \neq 0$, so gibt es keine periodische Lösung.
- (b) Ist $a = 0$, so gibt es keinen Grenzzyklus.

2. Die Gleichung $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ heißt *van-der-Pol-Gleichung*. Man zeige, dass diese Gleichung für $\mu \geq 0$ mindestens eine periodische Lösung besitzt.

3. Man zeige, dass Satz 9.4.1 im Falle $g'(0) = 0$ richtig bleibt.

Tip: $V(x)$ ist eine Ljapunov-Funktion nahe 0 für den Rückwärtsfluss.

4. Die Lienard-Gleichung besitzt *genau* eine periodische Lösung, falls zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 9.4.1 die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $h(x)$ ist gerade, $g(x)$ ungerade, $H(x) < 0$ für $0 < x < a$, $H(x) > 0$ für $x > a$, und $H(x) \rightarrow \infty$ wachsend für $a < x \rightarrow \infty$.

5. Erfüllt $H(x)$ die Bedingung (H_0) aus Satz 9.4.1, so besitzt die Gleichung $\ddot{y} + H(\dot{y}) + y = 0$ mindestens eine periodische Lösung.

Tip: Setzen Sie $x = -\dot{y}$.

6. Seien $f, g \in C(G; \mathbb{R}^2)$, $\Gamma \subset G$ eine Jordan-Kurve, und gelte

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \neq 0, \quad \text{für alle } x \in \Gamma, \alpha, \beta \geq 0, (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Dann sind $\text{ind}(f, \Gamma)$ und $\text{ind}(g, \Gamma)$ wohldefiniert und es gilt $\text{ind}(f, \Gamma) = \text{ind}(g, \Gamma)$.

7. Sei $\Gamma \subset G$ ein periodisches Orbit für (9.1), $f \in C^1(G; \mathbb{R}^2)$, und sei $x_* \in \Omega \subset G$, dem Innengebiet von Γ , ein Sattelpunkt, also $\det f'(x_*) < 0$. Dann gibt es mindestens drei Equilibria von (9.1) in Ω .

8. Führen sie die Details im Torus-Beispiel aus Abschnitt 9.2 aus.

Tip: Approximationssatz von Kronecker.

9. Verifizieren Sie die Bedingung $\text{div}(\rho(x)f(x)) < 0$ im Beispiel 2 in Abschnitt 9.3.

10. Zeigen Sie die Konvergenz der Lösungen in Beispiel 2 aus Abschnitt 9.2 mittels der Lojasiewicz-Technik.