Musterlösungen zum 2ten Test

Gruppe A

Beispiel 1

Die rekursive Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+2} \quad \text{für } n \geq 1,\ x_1 = 1.$$

Behauptung. *Die Folge x_n ist nach unten beschränkt durch 0, d.h. $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang: $x_1 = 1 \geq 0$.
- Induktionsschluss: "$x_n \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq 0$".

$$x_n \geq 0 \Rightarrow x_n + 2 > 0.$$

Daher ist auch $\frac{1}{x_n+2} > 0$. Da laut Induktionsannahme $x_n \geq 0$ gilt folgt

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+2} \geq 0.$$

□

Behauptung. *Die Folge x_n ist monoton fallend, d.h. $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $x_n \geq 0$ ist folgt $x_n + 2 \geq 1$. Somit ist aber $\frac{1}{x_n+2} \leq 1$. Daraus ergibt sich

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+2} \leq \frac{x_n}{1} = x_n.$$

□

Bemerkung. *Die Folge x_n ist monoton fallend, d.h. $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Speziell gilt daher $1 = x_1 \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist damit nach oben beschränkt durch 1.*

Da die Folge x_n nach **unten** beschränkt und monoton **fallend** ist folgt, dass die Folge konvergiert, d.h. es existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n =: x$.

Behauptung. *Der Grenzwert der Folge ist 0.*

Beweis. Da die Folge konvergiert gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n+2} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty}(x_n+2)} = \frac{x}{x+2}.$$

Man beachte, dass $x_n + 2 \geq 2$ ist, und daher $\lim_{n\to\infty}(x_n+2) \geq 2 \neq 0$ gilt. Um den Grenzwet zu bestimmen lösen wir die Gleichung

$$x = \frac{x}{x+2},$$

welche nur für $x = 0$ oder $x = -1$ erfüllt ist. Da $x_n \geq 0$ ausfällt, kann $x = -1$ nicht der Grenzwert sein. Somit ist der Grenzwert der Folge $x = 0$. □

Beispiel 2

Sei $\langle X\,, d\rangle$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus X heißt konvergent gegen $x \in X$, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Behauptung. *Die Folge* $a_n = \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n^3 - n} - \sqrt{n^3 - 1}\right)$ *konvergiert gegen* $-1/2$.

Beweis.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n^3-n} - \sqrt{n^3-1}\right) = \sqrt{n+1}\left(\frac{1-n}{\sqrt{n^3-n} + \sqrt{n^3-1}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n^3+n}}{\sqrt{n^3-n} + \sqrt{n^3-1}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}} \longrightarrow -1/2 \end{aligned}$$

Rechenregeln für **konvergente** Folgen stehen im Skript (Satz 3.3.5). □

Gruppe B

Beispiel 1

Die rekursive Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n} \quad \text{für } n \geq 1,\ x_1 = 2.$$

Behauptung. *Die Folge ist beschränkt durch* $0 < x_n \leq 2$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang: $0 < x_1 = 2 \leq 2$.
- Induktionsschluss: "$0 < x_n \leq 2 \Rightarrow 0 < x_{n+1} \leq 2$".

$$x_n \leq 2 \Rightarrow 3 - x_n \geq 1 \Rightarrow 0 < \underbrace{\frac{1}{3 - x_n}}_{x_{n+1}} \leq 1 < 2.$$

□

Behauptung. *Die Folge ist monoton fallend, d.h.* $x_n \geq x_{n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang: $x_1 = 2 > x_1 = 1$.
- Induktionsschluss: "$x_{n-1} \geq x_n \Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$".

  Aus $x_{n-1} \geq x_n$ folgt $3 - x_{n-1} \leq 3 - x_n$. Wir wissen bereits $0 < x_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt $0 < 3 - x_n$ und $0 < 3 - x_{n-1}$, und wir können schliessen, dass

  $$x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n} \leq \frac{1}{3 - x_{n-1}} = x_n,$$

  was zu zeigen war.

□

Da die Folge x_n nach **unten** beschränkt und monoton **fallend** ist folgt, dass die Folge konvergiert, d.h. es existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n =: x$.

Behauptung. *Der Grenzwert der Folge ist* $\frac{-3+\sqrt{5}}{-2}$.

Beweis. Da die Folge konvergiert, gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty}(3-x_n)} = \frac{1}{3-x}.$$

Man beachte, dass $x_n \leq 2$ ist, also gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \leq 2$, somit ist $\lim_{n\to\infty}(3-x_n) \geq 1$, i.e. die Folge im Nenner ist konvergent, konvergiert aber nicht gegen 0. Um den Grenzwert zu bestimmen lösen wir die Gleichung

$$x = \frac{1}{3-x},$$

welche nur für $x = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{-2}$ erfüllt ist. Da $x_n \leq 2$ ist, muss $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{-2}$ sein. □

Beispiel 2

Sei $\langle X\,, d\rangle$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus X heißt Cauchy-Folge falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Behauptung. *Die Folge* $a_n = \sqrt{n-1}(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+2n})$ *konvergiert gegen* -1.

Beweis.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n-1}(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+2n}) = \sqrt{n-1}\left(\frac{1-2n}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3+2n}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}-2\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} \longrightarrow -1 \end{aligned}$$

Rechenregeln für **konvergente** Folgen stehen im Skript (Satz 3.3.5). □