Diskrete und Geometrische Algorithmen

5. Übung am 23.11.2020

Richard Weiss Florian Schager Christian Sallinger Fabian Zehetgruber
Paul Winkler Christian Göth

Aufgabe 25. Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 1$ und $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2 + n$ für $n = 2^k \geq 2$, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie ihr Ergebnis anschließend mit der Substitutionsmethode.

Lösung. Setzen wir also zuerst ein paar mal ein (und addieren dabei nicht direkt damit man das Schema erkennen kann):

$$\begin{aligned}
T(2^0) &= 1 \\
T(2^1) &= 3 + 4 + 2 = 2 + 3 + 2^2 \\
T(2^2) &= 3 \cdot 2 + 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 2^4 + 2^2 = 2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2 + 2^4 + 3 \cdot 2^2 \\
T(2^3) &= 3^2 \cdot 2 + 3^3 + 2^2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 + 2^6 + 2^3 = 2^3 + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3^3 + 2^4 + 2^6 + 3 \cdot 2^4 + 3^2 \cdot 2^2
\end{aligned}$$

Wir stellen die Vermutung

$$T(2^k) = \sum_{i=0}^{k} 2^{k-i} 3^i + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2(k-i)} 3^i$$

auf. Um diese zu Verifizieren verwenden wir Induktion (über k).
IA($k = 0$):

$$T(1) = 1 = 2^0 \cdot 3^0$$

IV: $T(2^k) = \sum_{i=0}^{k} 2^{k-i} 3^i + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2(k-i)} 3^i$

IS: $k \mapsto k+1$

$$\begin{aligned}
T(2^{k+1}) = 3T(2^k) + 2^{2(k+1)} + 2^{k+1} &\overset{IV}{=} 3\left(\sum_{i=0}^{k} 2^{k-i} 3^i + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2(k-i)} 3^i\right) + 2^{2(k+1)} + 2^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k} 2^{k-i} 3^{i+1} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2(k-i)} 3^{i+1} + 2^{2(k+1)} + 2^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} 2^{k-(i-1)} 3^i + \sum_{i=1}^{k} 2^{2[k-(i-1)]} 3^i + 2^{2(k+1)} + 2^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} 2^{k+1-i} 3^i + \sum_{i=0}^{k} 2^{2[(k+1)-i]} 3^i
\end{aligned}$$

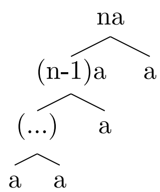
□

Aufgabe 26. Verwenden Sie einen Rekursionsbaum, um eine asymptotische obere Schranke für die Rekursion

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + n \quad \text{für } n > a, \quad T(n) = 0 \quad \text{für } n < a,$$

zu bestimmen ($a \geq 1$). Überprüfen Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

Lösung.

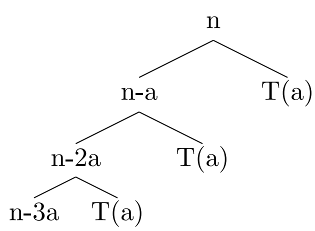


Aus ebenjenem Baum liest man leicht unsere Vermutung für die asymptotische obere Schranke ab.
Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: $T(na) \leq n^2 + nT(a)$.

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad T(a) \leq 1^2 + 1T(a) \\ n \rightsquigarrow n+1: &\quad T((n+1)a) = T(na) + T(a) + n \leq n^2 + nT(a) + T(a) + n \leq (n+1)^2 + (n+1)T(a). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $T(na) = \mathcal{O}(n^2)$ □

Lösung.



Der Baum hat eine Tiefe von $\frac{n}{a}$ und auf jeder Höhe hat er zwei Blätter also insgesamt $2\frac{n}{a}$ Blätter. Außerdem ist der Aufwand in Tiefe k gegeben durch $n - ka + T(a)$. Wir berechenen

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{a}-1} (n - ka + T(a)) + 2\frac{n}{a} = a \sum_{k=1}^{\frac{n}{a}-1} k + \frac{n}{a}(T(a) + 2)$$

Also ist die Vermutung $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$. Wir wollen also zeigen

$$\exists c > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; T(n) \leq cn^2$$

Für alle $n < a$ gilt dies können wir ein beliebiges $c > 0$ aussuchen, da $T(n) = 0$. Außerdem wollen wir c hinreichend groß, dass $T(a) \leq ca^2$ gilt. Unter der Annahme, dass für $n > a$ alle $k < n$ gilt, dass $T(k) \leq ck^2$ wünschen wir uns

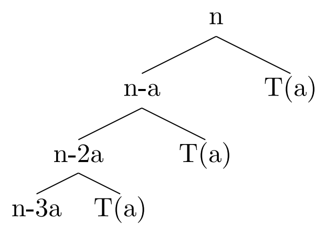
$$\begin{aligned} cn^2 \overset{!}{\geq} T(n) = T(n-a) + T(a) + n \leq c(n-a)^2 + ca^2 + n = cn^2 - 2cna + 2ca^2 + n \\ \Leftarrow 2ca(n-a) \geq n \Leftarrow c \geq \frac{n}{2a(n-a)} \end{aligned}$$

Zusammengefasst wollen wir

1. $n_0 = 0$
2. $c \geq \frac{T(a)}{a^2}$
3. $\forall n > a\ (c \geq \frac{n}{2a(n-a)})$

$\square$

Lösung.



Der Baum hat eine Tiefe von $\frac{n}{a}$ und auf jeder Höhe hat er zwei Blätter also insgesamt $2\frac{n}{a}$ Blätter. Außerdem ist der Aufwand in Tiefe k gegeben durch $n - ka + T(a)$. Wir berechenen

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{a}-1}(n - ka + T(a)) + 2\frac{n}{a} = \frac{n^2}{a} - a\sum_{k=0}^{\frac{n}{a}-1} k + \frac{n}{a}(T(a) + 2) \leq \frac{n^2}{a} + \frac{n}{a}(T(a) + 2)$$

Also ist die Vermutung $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$. Wir wollen also zeigen

$$\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ T(n) \leq cn^2 + ca^2 + T(a)$$

Für unseren Induktionsanfang sei $n_0 = 0 \implies T(n_0) = 0 \leq ca^2 + T(a)$. Nehmen wir nun also an, dass die Ungleichung für alle $k < n$ gilt. Dann gilt auch

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + n \leq c(n-a)^2 + ca^2 + T(a) + n = cn^2 - 2cna + T(a) + n \leq cn^2 + ca^2 + T(a)$$

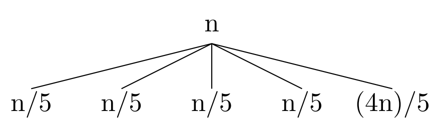
Wobei wir hier $\forall n \geq n_0 :\ 2cna \geq n$ als Bedingung an unser c stellen.
Damit haben wir also gezeigt $T(n) = \mathcal{O}(cn^2 + ca^2 + T(a)) = \mathcal{O}(n^2)$. $\square$

Aufgabe 27. Verwenden Sie einen Rekursionsbaum, um eine asymptotische untere sowie eine asymptotisch obere Schranke (brauchen nicht dieselbe Größenordnung zu haben) für die Rekursion

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n$$

zu finden. Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

Lösung.



$$T(n) = n + \frac{8n}{5} + \frac{64n}{25} + \cdots$$

obere Schranke: $T(n) \leq n^2$

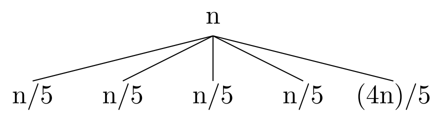
$$T(5n) = 4T(n) + T(4n) + n \leq 4n^2 + 16n^2 + n \leq (5n)^2.$$

untere Schranke: $T(n) \geq n \log(n)$ für $n > 2$:

$$\begin{aligned} T(5n) &= 4T(n) + T(4n) + n \geq 4n\log(n) + 4n\log(4n) + n = 4n\log(4n^2) + n = 8n\log(2n) + n \\ &= 5\log((2n)^{8/5}) + n \geq 5\log(5n) \end{aligned}$$

$\square$

Lösung.



Der Baum hat Arität 5 und eine Tiefe von $\log_{\frac{5}{4}}(n)$. Die Anzahl der Blätter können wir abschätzen durch $5^{\log_{\frac{5}{4}}(n)} = n^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}$. Durch das Masterheorem kann man sich

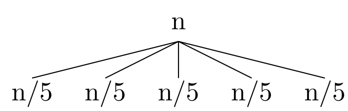
$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n \leq 5T\left(\frac{4n}{5}\right) + n = \mathcal{O}\left(n^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}\right)$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n \geq 5T\left(\frac{n}{5}\right) + n = \Omega(n\log(n))$$

klar machen. Wir wollen uns das ganze auch noch mit dem Rekursionsbaum ansehen, aus diesem erhält man (mit entsprechenden Vereinfachungen) für die obere Schranke:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_{\frac{5}{4}}(n)-1} \left(\frac{8}{5}\right)^i n + n^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} = \mathcal{O}\left(n^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}\right)$$

Für die untere Schranke betrachten wir



Hier haben alle Ebenen den Aufwand n, die Tiefe ist $\log_5(n)$ und die Anzahl der Blätter $5^{\log_5(n)} = n$. Somit

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_5(n)-1} n + n = \Omega(n\log n)$$

Hier jedenfalls der Beweis. Für den Induktionsanfang wollen wir $\forall m \in \{n_0, \ldots, 5n_0-1\} \left(T(m) \overset{!}{\leq} c_0 m^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}\right)$ beziehungsweise $T(m) \geq c_1 m\log(m)$. Für alle $n \geq 5n_0$ wünschen wir uns

$$\begin{aligned} c_0 n^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} \overset{!}{\geq} T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n &\leq 4c_0\left(\frac{n}{5}\right)^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} + c_0\left(\frac{4n}{5}\right)^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} + n \\ \Leftarrow c_0 n^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}\left(1 - 4\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} - \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}\right) &\geq n \end{aligned}$$

wobei $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-\log_{\frac{5}{4}}(5)} = \frac{1}{5}$. Es sieht so aus als müssten wir keine Bedingungen an n_0 stellen, für c_0 wollen wir

1. $\forall m \in \{n_0, \ldots, 5n_0 - 1\} : \ \left(T(m) \leq c_0 m^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}\right)$
2. $\forall n \geq 5n_0 : \ \left(c_0 n^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} \left(1 - 4\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{5}{4}}(5)} - \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{5}{4}}(5)}\right) \geq n\right)$

Nun das gleiche noch für die untere Schranke.

$$
\begin{aligned}
c_1 n \log(n) \overset{!}{\leq} T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n \geq c_1 \frac{4n}{5} \log\left(\frac{n}{5}\right) + c_1 \frac{4n}{5} \log\left(\frac{4n}{5}\right) + n \\
\Leftarrow c_1 4n(\log(n) - \log(5)) + c_1 4n(\log(4) + \log(n) - \log(5)) + 5n - c_1 5n \log(n) \geq 0 \\
\Leftarrow c_1 n(3\log(n) - 8\log(5) + 4\log(4)) + 5n \geq 0
\end{aligned}
$$

Wir wünschen uns also n_0 und c_1 mit

1. $\forall n \geq n_0 : \ (3\log(n) - 8\log(5) + 4\log(4) \geq 0)$
2. $\forall m \in \{n_0, \ldots, 5n_0 - 1\} : \ (T(m) \geq c_1 m \log(m))$
3. $\forall n \geq 5n_0 : \ (c_1 n(3\log(n) - 8\log(5) + 4\log(4)) + 5n \geq 0)$

□

Aufgabe 28. Finden Sie für folgende Rekursionen $T(n)$ asymptotische untere und obere Schranken mittels Master-Theorem.

a) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \log n$

b) $T(n) = T(\frac{8n}{9}) + n$

c) $T(n) = 11T(\frac{n}{3}) + n^{1.5}$

d) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

e) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$

f) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$

Lösung.

Satz 4.4 (Master-Theorem für Teile-und-herrsche-Rekursionsgleichungen)**.** *Seien $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$ mit $a = a_0 + a_1 \geq 1$, sei $b > 1$ und sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann hat die Rekursionsgleichung*

$$T(n) = a_0 T(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor) + a_1 T(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil) + f(n)$$

die folgende asymptotische Lösung.

1. *Falls $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.*
3. *Falls es ein $c < 1$ gibt, so dass für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_0 f(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + a_1 f(\lceil \frac{n}{b} \rceil) \leq cf(n)$ gilt, dann ist $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ und $T(n) = \Theta(f(n))$.*

a) Es ist $a = 2, b = 3$ und wir sind im Fall 3. (mit $c := \frac{2}{3}$), denn

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2f\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3} n \log\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3} n \left(\log n - \log 3\right) \leq \frac{2}{3} n \log n$$

Also gilt $T(n) = \Theta(n \log n)$.

b) Es ist $a = 1, b = \frac{9}{8}$ und wir sind im Fall 3. (mit $c := \frac{8}{9}$), denn

$$f\left(\frac{8n}{9}\right) = \frac{8}{9}n$$

Also gilt $T(n) = \Theta(n)$.

c) Es ist $a = 11, b = 3$ und wir sind im Fall 1. (mit $\varepsilon := \log_3(11) - 1.5$), denn

$$\log_3(11) \approx 2.182 > 1.5 \implies \varepsilon > 0$$
$$f(n) = n^{3/2} = \mathcal{O}(n^{\log_3(11)-\varepsilon})$$

Also gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_3(11)})$.

d) Es ist $a = 4, b = 2$ und wir sind im Fall 1. (mit $\varepsilon := 1$), denn

$$f(n) = n = \mathcal{O}(n^{\log_2(4)-1})$$

Also gilt $T(n) = \Theta(n^2)$.

e) Es ist $a = 4, b = 2$ und wir sind im Fall 2., denn

$$f(n) = n^2 = \Theta(n^2)$$

Also gilt $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.

f) Es ist $a = 4, b = 2$ und wir sind im Fall 3. (mit $c := \frac{1}{2}$), denn

$$4f\left(\frac{n}{2}\right) = 4\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}n^3$$

Also gilt $T(n) = \Theta(n^3)$

$\square$

Aufgabe 29. Gegeben ist die Divide-and-Conquer-Rekursion

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

wobei $f(n)$ eine nichtnegative Funktion mit asymptotischen Wachstum $\Theta(n^{\log_b(a)} \log(n))$ ist. Zeigen Sie für den Fall $n = b^k, k \in \mathbb{N}$, dass $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log^2(n))$

Lösung. Wir gehen wie im Beweis des Master-Theorems vor:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right) + \underbrace{\sum_{w \in X_I(n)} f\left(\frac{n}{b^{|w|}}\right)}_{=:g(n)}$$

$$\begin{aligned}
g(n) &= \Theta\left(\sum_{w \in X_I(n)} \left(\frac{n}{b^{|w|}}\right)^{\log_b(a)} \log\left(\frac{n}{b^{|w|}}\right)\right) \\
&= \Theta\left(\sum_{j=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b(a)} \log\left(\frac{n}{b^j}\right)\right) \\
&= \Theta\left(n^{\log_b(a)} \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1} \left(\frac{a}{b^{\log_b(a)}}\right)^j \log\left(\frac{n}{b^j}\right)\right) \\
&= \Theta\left(n^{\log_b(a)} \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1} \log(n) - j\log(b)\right) \\
&= \Theta\left(n^{\log_b(a)} \lfloor \log_b(n) \rfloor \left(\log(n) - \log(b)\frac{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1}{2}\right)\right) \\
&= \Theta\left(n^{\log_b(a)} \lfloor \log_b(n) \rfloor^2\right) = \Theta\left(n^{\log_b(a)} \log^2(n)\right)
\end{aligned}$$

□

Lösung. Wir schauen uns noch einen alternativen Beweis an. Dafür definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $S(k) := T(b^k)$ und erhalten für $k \in \mathbb{N}^+$

$$S(k) = T(b^k) = aT(b^{k-1}) + f(b^k) = aS(k-1) + f(b^k)$$

Nun wollen wir $S(k) = \Theta(a^k k^2 (\log(b))^2)$ beweisen, wobei $f(b^k) = \Theta(a^k k \log(b))$. Wir wählen zuerst ein $c_0 > 0$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt, dass $f(b^k) \leq c_0 a^k k \log(b)$. Weiters wünschen wir uns für alle $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}
c_1 a^k k^2 (\log(b))^2 \overset{!}{\geq} S(k) = aS(k-1) + f(b^k) &\leq c_1 a^k (k-1)^2 (\log(b))^2 + c_0 a^k k \log(b) \\
&\Leftarrow c_1 a^k (\log(b))^2 (k^2 - (k-1)^2) \geq c_0 a^k k \log(b) \\
&\Leftarrow c_1 \geq \frac{c_0 k}{(2k-1)\log(b)}
\end{aligned}$$

und zuletzt wollen wir noch, um beim Induktionsanfang keine Probleme zu bekommen, $S(k_0) \geq c_1 a^{k_0} k_0^2 (\log(b))^2$. Für die andere Abschätzung wollen wir $c_2 > 0$ und $k_1 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $f(b^k) \geq c_2 a^k k \log(b)$ gilt. Diesmal handeln wir den Induktionsanfang gleich ab und wünschen uns $c_3 > 0$ mit $S(k_0) \geq c_3 a^{k_0} k_0^2 (\log(b))^2$. Darüber hinaus wollen wir noch für alle $k > k_0$

$$\begin{aligned}
c_3 a^k k^2 (\log(b))^2 \overset{!}{\leq} S(k) = aS(k-1) + f(b^k) &\geq c_3 a^k (k-1)^2 (\log(b))^2 + c_2 a^k k \log(b) \\
&\Leftarrow c_3 \leq \frac{c_2 k}{(2k-1)\log(b)}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 30. Gegeben ist die Rekursion

$$a_n = a_{f(n)} + a_{g(n)} + a_{h(n)} + 1$$

für $n > t$ und $a_n = 1$ für $n \leq t$ mit $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ und $f(n) + g(n) + h(n) = n$. Beweisen Sie, dass $a_n = \Theta(n)$ gilt.

Lösung. Wir bemerken zu Beginn, dass $t \geq 2$, sonst haben wir undefinierte Werte. Als Induktionsanfang erhalten wir

$$\forall n \in \{1, \ldots, \lfloor t \rfloor\} \ (a_n = 1 \leq 2n - 1)$$

Nun zeigen wir noch den Induktionsschritt um schließlich $a_n \leq 2n - 1$ zu erhalten:

$$a_n = a_{f(n)} + a_{g(n)} + a_{h(n)} + 1 \leq 2(f(n) + g(n) + h(n)) - 3 + 1 \leq 2n - 1.$$

Untere Schranke: $a_n \geq \frac{n}{t}$:

$$a_n = a_{f(n)} + a_{g(n)} + a_{h(n)} + 1 \geq \frac{f(n) + g(n) + h(n)}{t} + 1 = \frac{n}{t} + 1 \geq \frac{n}{t}.$$

Bei der Abschätzung nach unten wollen wir für den Induktionsanfang noch

$$\forall m \in \{1, \ldots, \lfloor t \rfloor\} \left(a_m = 1 \geq \frac{m}{t}\right)$$

was für $m \leq t$ natürlich erreicht ist. Damit haben wir insgesamt $a_n = \Theta(n)$ gezeigt. $\square$