3.2.8 Satz. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X.

(i) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq k}}$ gegen $x \in X$ konvergiert. Es kommt also nicht auf endlich viele Folgenglieder an, ob und wogegen eine Folge konvergiert.

(iii) Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = x$ und $\lim_{n\to\infty} x_{n-k} = x$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

(iv) Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Beweis. Wir zeigen zunächst (i). Ok. Es gelte $x_n \to x$ und $x_n \to y$, wobei $x \neq y$ und damit $d(x,y) > 0$. Laut (M1) ist $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$ und $d(x,y) \geq 0$. Wähle $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \frac{d(x,y)}{3}$, $n \geq N_1$, und $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, y) < \frac{d(x,y)}{3}$, $n \geq N_2$. IdFg. $\frac{d(x,y)}{3} = \epsilon$. Dann folgt für $N := \max\{N_1, N_2\}$ der Widerspruch

$$d(x,y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) < \frac{d(x,y)}{3} + \frac{d(x,y)}{3} = \frac{2d(x,y)}{3} < d(x,y).$$

Die erste Ungleichheit folgt aus (M3), also der Dreiecksgleichung. Für die zweite beachte man (M2), also konkret $d(x_n, x) = d(x, x_n)$, wobei N für $n \geq N_1, N_2$ eingesetzt werden darf, weil $N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow N \geq N_1, N_2$. Zuletzt noch $\frac{2d(x,y)}{3} < d(x,y) \Leftrightarrow 2d(x,y) < 3d(x,y) \Leftrightarrow 0 < d(x,y)$ (siehe oben).

Wir zeigen auch noch (iv). OK. Die Verifikation der restlichen Aussagen sei dem Leser überlassen. Fauler Sack! OK. (ii) folgt irgendwie schon aus (3.3), also $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$, weil $\mathbb{Z}_{\geq k} := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ und man dann statt N auch immer $N + |K|$ nehmen kann (, weil ja $n \geq N \Rightarrow n \geq N + |K|$). OK. (iii) lässt sich damit eigentlich auch begründen. Sei also $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge der gegen x konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dabei ist $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : j \mapsto n(j)$ ist streng monoton wachsend, also $n(1) < n(2) < n(3) < \ldots$. Ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \epsilon$, wenn nur $n \geq N$.
... weil $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ja konvergent gegen x ist (vgl. (3.3)).
Ist nun $J \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n(J) \geq N$ (zB. $J = N$), so folgt für $j \geq J$ auch $n(j) \geq N$ und somit $d(x_{n(j)}, x) < \epsilon$.
$j \geq J \Rightarrow n(j) \geq n(J)$, wegen dem „streng monoton wachsend" und gemeinsam mit $n(J) \geq N \Rightarrow n(j) \geq N$.
$n(j)$ kann man also problemlos für n in (3.3) einsetzen und erhält $d(x_{n(j)}, x) < \epsilon$. Also gilt $\lim_{j \to \infty} x_{n(j)} = x$. ... was eigentlich nur eine andere Schreibweise ist (vgl. unter (3.3)). $\square$