2.3.12 Satz. Ist $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{N}$, so hat T ein Minimum.

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Das wird also ein Widerspruchs-Beweis. Das Gegenteil wird widerlegt... Sei

$$M = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in T \Rightarrow n < m\}.$$

Das ist die Menge jener natürlicher Zahlen, die kleiner als alle Elemente von T sind. Zunächst gilt $1 \in M$, da sonst 1 das Minimum von T wäre. Wir gehen ja davon aus, dass $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{N}$ und T kein Minimum hat. $1 \leq n \in \mathbb{N}$ für alle n und ist somit das Minimum von $\mathbb{N}$. $T \subseteq \mathbb{N}$ und besteht somit aus natürlichen Zahlen. Wenn also $1 \in M$, so gilt $\forall m \in T : 1 < m$ und daher $1 \notin T$ und ist kein Minimum von T. Ist $n \in M$, und $m \in T$, so folgt $n < m$. ... laut Bedingung der Menge M. Daraus schließen wir $n + 1 \leq m$. Weil zwischen n und $n+1$ keine natürliche Zahl ist, ist $n < m < n+1$, also insbesondere $m < n+1$ nicht möglich. Daher das Gegenteil $n + 1 \leq m$. Wäre $n + 1 = m_0$ für ein $m_0 \in T$, so hätte T das Minimum m_0. Das wäre der gewünschte Widerspruch, wir betrachten aber die Allgemeinheit, also das „worst case scenario". Wir nehmen aber an, dass es ein solches nicht gibt. ... das obige Gegenteil. Also gilt immer $n + 1 < m$, $m \in T$, bzw. $n + 1 \in M$. Weil $n + 1 \leq m \wedge n + 1 \neq m$, folgt $n + 1 < m$, wobei m immer aus T ist. $n + 1 < m$ entspricht der Bedingungen für M, also $n + 1 \in M$. Nach (S3) folgt $M = \mathbb{N}$. „(S3) Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$ und $m' \in M$ für alle $m \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$." Hier verwenden wir $n + 1$ statt m' und n statt m. Ist $m \in T \subseteq \mathbb{N}$, so folgt $m \in M$ und daher der Widerspruch $m < m$. Also $m \in T \subseteq \mathbb{N} = M \Rightarrow m \in M$. Nun setzt man nunmehr in die Bedingung von M ein und erhält $m < m$. $\square$