Funktionalanalysis 1

Übungsaufgaben zu:

"Lecture 16 – Orthonormalbasen"

---

16 / 1:* Sei μ das normierte Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi}dx$. Betrachte die Elemente bzw. Teilräume im $L^2([0,2\pi),\mu)$ die definert sind als

$$e_n(t) := e^{int},\ n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n(t) := \frac{e_{-n}(t) + ne_n(t)}{\sqrt{1+n^2}},\ n \in \mathbb{N},$$

$$M := \overline{\operatorname{span}\{e_n : n = 0,1,2,\dots\}}, \quad N := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n = 1,2,\dots\}}.$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Die Räume M und N sind, versehen mit dem $L^2(\mu)$–Skalarprodukt, Hilberträume. Die Mengen $\{e_n : n = 0,1,2,\dots\}$ bzw. $\{u_n : n = 1,2,\dots\}$ sind Orthonormalbasen von M bzw. N.

(b) $M \cap N = \{0\}$.

(c) $M \dot{+} N$ ist dicht in $L^2([0,2\pi),\mu)$, aber nicht gleich ganz $L^2([0,2\pi),\mu)$.

(d) Die Projektion des normierten Raumes $X := M \dot{+} N$ mit Bild M und Kern N ist nicht stetig.

(e) Finde eine stetige Projektion von $L^2([0,2\pi),\mu)$ auf M.
