2.7.4 Lemma. Für die Verknüpfungen $+, \cdot$ gilt das Kommutativ- und das Assoziativgesetz.

Beweis. Die Gesetze gelten, da man sie leicht auf die Gültigkeit dieser Gesetze auf $\mathbb{Z}$ zurückführt. Ok. Zum Beispiel gilt das Assoziativgesetz wegen

$$((x,n)+(y,m))+(z,k) = (xm+yn, nm)+(z,k) =$$
$$((xm+yn)k + z(nm), (nm)k) = (x(mk) + (yk+zm)n, n(mk))$$
$$= (x,n) + ((y,m)+(z,k)).$$

Zuerst wird definitionsgemäß addiert, dann nochmal, dann ausmultipliziert und n herausgehoben und umgeklammert. Bei der letzten Gleichheit wird $(x,n)+(yk+zm, mk)$ ausgelassen.

$$((x,n)\cdot(y,m))\cdot(z,k) = (xy, nm)\cdot(z,k) = ((xy)z, (nm)k)$$
$$= (x(yz), n(mk)) = (x,n)\cdot(yz, mk) = (x,n)\cdot((y,m)\cdot(z,k))$$

$$(x,n)\cdot(y,m) = (xy, nm) = (yx, mn) = (y,m)\cdot(x,n)$$

$$(x,n)+(y,m) = (xm+yn, nm) = (yn+xm, mn) =$$
$$(y,m)+(x,n)$$

$\square$