Satz 1.12.6 Die Konjugation und $id_{\mathbb{C}}$ sind die einzigen Automorphismen in $\mathbb{C}$, die den Unterkörper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ als Ganzes fest lassen.

Beweis. Sei $\zeta \in Aut(\mathbb{C})$ und $\zeta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. ... Dann ist $\zeta(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nach Satz 1.12.5. ...
Aus $i^2 = -1$ erkennen wir $\zeta(i^2) = \zeta(i)^2 = -1$, also $\zeta(i) = \pm i$. $\zeta(i^2) = \zeta(-1) = -1$ und $\zeta(i^2) = \zeta(i \cdot i) = \zeta(i) \cdot \zeta(i) = \zeta(i)^2$. Für alle $x + yi \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$\zeta(x + yi) = \zeta(x) + \zeta(y) \cdot \zeta(i) = x \pm yi,$$

womit ζ entweder die Identität oder die Konjugation ist.
$\zeta(x) + \zeta(y) \cdot \zeta(i) = x + y \cdot \zeta(i) = x + y \cdot (\pm 1)$. $\square$