3.2.6 Lemma. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, also (3.3), genau dann, wenn für gewisse $K \in (0, +\infty)$ und $\alpha \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

$$\forall \epsilon \in (0, \alpha)\, \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < K \cdot \epsilon \text{ für alle } n \geq N. \tag{3.4}$$

Die Konvergenz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x ist auch äquivalent zu (3.3) bzw. (3.4), wenn man in diesen Bedingungen $\dots < \epsilon$ bzw. $\dots < K \cdot \epsilon$ durch $\dots \leq \epsilon$ bzw. $\dots \leq K \cdot \epsilon$ ersetzt.

Beweis. Offenbar folgt (3.4) aus (3.3). (3.3) lautet wie folgt: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Mann könnte (3.3) auch so schreiben: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \dots$, wobei, wegen $\alpha \in (0, +\infty)$, $\epsilon \in (0, \alpha) \neq \emptyset \Rightarrow \epsilon \in \mathbb{R}^+$. Weil $K \in (0, +\infty)$, also positiv ist, macht es keinen Unterschied, ob man, wie in (3.3), $\dots < \epsilon$ schreibt, oder, wie in (3.4), $\dots < K \cdot \epsilon$ schreibt. (Das Produkt $K \cdot \epsilon$ ist ja positiv). Gelte umgekehrt (3.4). Die andere Implikation schließt die Äquivalenz ab. Für $\epsilon > 0$ gilt $\min\left(\frac{\epsilon}{K}, \frac{\alpha}{2}\right) \in (0, \alpha)$. $\frac{\epsilon}{K}$ und $\frac{\alpha}{2}$ sind schließlich positiv. Nimmt man diese Zahl als ϵ in (3.4), so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(x_n, x) < K \cdot \min\left(\frac{\epsilon}{K}, \frac{\alpha}{2}\right) \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wenn $\frac{\epsilon}{K} < \frac{\alpha}{2}$, wird $\frac{\epsilon}{K}$ eingesetzt für ϵ und somit folgt $\dots < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon \leq \epsilon$. Falls jedoch $\frac{\epsilon}{K} \geq \frac{\alpha}{2}$, so folgt $\dots < K \cdot \frac{\alpha}{2} \leq K \cdot \frac{\epsilon}{K} \leq \epsilon$, also stimmt die Ungleichung. Also gilt auch (3.3). ... weil man ja $K \cdot \min\left(\frac{\epsilon}{K}, \frac{\alpha}{2}\right) \leq$ weglassen kann.

Dass als (3.3) bzw. (3.4) die jeweiligen Bedingungen mit $\leq$ anstatt $<$ folgt, ist klar, da aus $<$ ja immer $\leq$ folgt. ... weil $A \Rightarrow A \vee B$. Für die Umkehrung wende die Bedingung mit $\leq$ statt $<$ auf $\frac{\epsilon}{2}$ an. $\frac{\epsilon}{2}$ ist jetzt das beliebige ϵ aus (3.3) und (3.4). $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : \frac{\epsilon}{2} \mapsto \epsilon$ ist schließlich bijektiv, also geht das. Man erhält dann $\dots \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ bzw. $\dots \leq K \cdot \frac{\epsilon}{2} < K \cdot \epsilon$. $\frac{\epsilon}{2} < \epsilon \Leftrightarrow K \cdot \frac{\epsilon}{2} < K \cdot \epsilon$. $\square$