Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Alexandra Holzinger, Christoph Helmer

Wintersemester 2019
21.11.2019

Erster Übungstest "Partielle Differentialgleichungen"
Gruppe I

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte füllen Sie das Deckblatt aus. Benutzen Sie für die Lösung jeder Aufgabe das entsprechende Blatt mit der Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Blätter sind bei der Aufsicht erhältlich. Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt. Lösungen, die mit Bleistift geschrieben wurden, werden nicht gewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	4	
2	5	
3	7	
4	9	
Summe	25	

Aufgabe 1: Klassifizierung von partiellen Differentialgleichungen (4 Punkte)

(i) (2 Punkte) Betrachten Sie den Differentialoperator

$$Lu := u_{tt} - \operatorname{div}_x \left(A(x,u)\nabla_x u + u\nabla_x V(x,t) \right) \qquad \text{für } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t \in (0,\infty),$$

wobei $u\colon \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $A\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A(x,u) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & 1+u \end{pmatrix}$$

und $V\colon \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $V(x,t) = t^2 x_1$.

Ist die partielle Differentialgleichung $Lu = 0$ linear, semilinear, quasilinear oder voll–nichtlinear? Begründen Sie Ihre Antwort!

(ii) (2 Punkte) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$. Für welche Werte von α ist die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \alpha\Delta_x u = 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^7$$

elliptisch, hyperbolisch, parabolisch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2: Methode der Charakteristiken (5 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t + 2uu_x - u &= 0, \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u(\ln(x), x) &= x. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Distributionen (7 Punkte)

(i) (1 Punkt) Definieren Sie den Begriff der Distribution.

(ii) (2 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie: Die distributionelle Ableitung einer regulären Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist immer regulär.

(iii) (2 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Folge von regulären Distributionen $u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u_k(x) = \cos(kx)$. Zeigen Sie, dass die Folge (u_k) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gegen 0 konvergiert für $k \to \infty$.

(iv) (2 Punkte) Wir betrachten für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die singuläre Distribution $\langle u, \phi \rangle := \langle \delta_1 + \delta_0, \phi \rangle$, wobei $\langle \delta_x, \phi \rangle = \phi(x)$.
Rechnen Sie nach, dass gilt:

$$\forall\, K \subset \mathbb{R},\ K \text{ kompakt},\ \exists\, C > 0,\, k \in \mathbb{N}_0\ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(K):\ |\langle u, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{C^k(K)}.$$

Aufgabe 4: Fundamentallösungen (9 Punkte)
Betrachten Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ den Differentialoperator

$$Lu := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u + 4xu.$$

(i) (1 Punkt) Definieren Sie den Begriff der Fundamentallösung.

(ii) (4 Punkte) Berechnen Sie alle reellwertigen Fundamentallösungen von L mit Pol an $\xi \in \mathbb{R}$ der Form

$$U_\xi(x) = \begin{cases} C_1 u_{hom}(x) & x > \xi \\ C_2 u_{hom}(x) & x \leq \xi, \end{cases} \tag{1}$$

wobei u_{hom} eine homogene Lösung von Lu ist.

(iii) (2 Punkte) Sie dürfen annehmen, dass alle Fundamentallösung mit Pol in ξ der Form (1) genügen. Gilt nun, dass $\tau_{-\xi} U_0$ eine Fundamentallösung mit Pol in ξ ist? Falls nein, warum ist das kein Widerspruch zur Vorlesung?

(iv) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Greensche Funktion $G\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto G(x, y)$ für $\Omega = (0, \infty)$. d.h. für festes $y \in \Omega$ gelten

$$LG(\cdot, y) = \delta_y \text{ in } \Omega \text{ und } G(\cdot, y) = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$
