Beispiel 75 (bzw. 3.47). Der metrische Raum $\langle \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}), d\rangle$ ist wie folgt definiert:

$$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) := \left\{ (z_n)_n \text{ Folge in } \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{N} |z_n|^2 \text{ konvergent} \right\}, \qquad d((w_n)_n,(z_n)_n) := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |w_n - z_n|^2}.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}), d\rangle$ vollständig ist.

Lösung. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchyfolge in $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ (oder kurz: ℓ^2) gegen ein Element von ℓ^2 konvergiert. Sei dazu also $((z_n^k)_n)_k$ eine Cauchyfolge in ℓ^2, d.h.:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k,\ell \geq k_0 : \qquad \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |z_n^k - z_n^\ell|^2} = d((z_n^k)_n,(z_n^\ell)_n) < \varepsilon. \tag{1}$$

Man beachte, dass $((z_n^k)_n)_k$ damit eine (Cauchy-)Folge von (ℓ^2-)Folgen ist. Nun wollen wir zeigen, dass es ein Element $(z_n)_n \in \ell^2$ gibt, sodass $(z_n^k)_n \xrightarrow[k\to\infty]{d} (z_n)_n$, also sodass $((z_n^k)_n)_k$ für $k \to \infty$ bezüglich d gegen $(z_n)_n$ konvergiert. Wir zeigen diese Behauptung in drei Schritten.

1. Schritt: Wir zeigen, dass $((z_n^k)_n)_k$ komponentenweise eine Cauchyfolge ist, also dass $(z_n^k)_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist. Die Summanden der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \left|z_i^k - z_i^\ell\right|^2$ sind nichtnegativ, also ist die Folge $(S_n)_n$ der Partialsummen monoton wachsend und folglich $S_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist damit

$$\left|z_n^k - z_n^\ell\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|z_i^k - z_i^\ell\right|^2} = \sqrt{S_n} \leq \sqrt{\lim_{n\to\infty} S_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left|z_i^k - z_i^\ell\right|^2}. \tag{2}$$

Aus (1) folgt dann:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k,\ell \geq k_0\ \forall n \in \mathbb{N} : \qquad \left|z_n^k - z_n^\ell\right| < \varepsilon.$$

Das heißt aber genau, dass $(z_n^k)_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist. Damit sind $(\mathrm{Re}(z_n^k))_k, (\mathrm{Im}(z_n^k))_k$ für $n \in \mathbb{N}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergieren diese Folgen. Da eine komplexe Folge genau dann konvergiert, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren, konvergiert auch $(z_n^k)_k$ in $\mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (für $k \to \infty$), d.h.:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists z_n \in \mathbb{C} : \qquad \lim_{k\to\infty} z_n^k = z_n. \tag{3}$$

Dann ist $(z_n)_n = (\lim_{k\to\infty} z_n^k)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. (In diesem Schritt haben wir offenbar die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ mitbewiesen.)

2. Schritt: Wir zeigen, dass $(z_n)_n \in \ell^2$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es wegen (1) ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\forall k,\ell \geq k_0 : \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n^k - z_n^\ell\right|^2 < \varepsilon^2.$$

Aus (2) folgt damit:

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0\ \forall \ell \geq k_0\ : \qquad \sum_{n=1}^{N} \left|z_n^k - z_n^\ell\right|^2 < \varepsilon^2. \tag{4}$$

Wählt man also $N \in \mathbb{N}$ und $k \geq k_0$ beliebig, so gilt die Ungleichung in der obigen Zeile für alle $\ell \geq k_0$. Gemäß (3) ist $\lim_{\ell\to\infty} z_n^\ell = z_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt damit

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left|z_n^k - z_n^\ell\right|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|z_n^k - z_n\right|^2.$$

An dieser Stelle ist wichtig, dass wir die N-te (endliche) Partialsumme betrachten. Gilt für eine konvergente reelle Folge $(x_\ell)_\ell$ die Ungleichung $x_\ell < \varepsilon^2$ für $\ell \geq k_0$, so ist $\lim_{\ell\to\infty} x_\ell \leq \varepsilon^2$. Angewandt auf (4) mit $x_n = \sum_{n=1}^N \left|z_n^k - z_n^\ell\right|^2$ folgt dann:

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0: \qquad \sum_{n=1}^N \left|z_n^k - z_n\right|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{5}$$

Auf $\mathbb{C}^N$ ist $d_N((\alpha_n)_{n=1}^N, (\beta_n)_{n=1}^N) := \sqrt{\sum_{n=1}^N |\alpha_n - \beta_n|^2}$ eine Metrik. Wenden wir nun für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ die Dreiecksungleichung für d_N auf die endlichen Folgen (also N-Tupel) $(z_n)_{n=1}^N$, $(0)_{n=1}^N$ und $(z_n^k)_{n=1}^N$ an, so erhalten wir mit einem Analogon zu (2) und mit (5):

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{n=1}^N |z_n|^2} &= d_N((z_n)_{n=1}^N, (0)_{n=1}^N) \leq d_N((z_n)_{n=1}^N, (z_n^k)_{n=1}^N) + d_N((z_n^k)_{n=1}^N, (0)_{n=1}^N) \\ &= \sqrt{\sum_{n=1}^N |z_n^k - z_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^N |z_n^k|^2} \leq \varepsilon^2 + \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |z_n^k|^2}.\end{aligned}$$

Mit Quadrieren und selbem Argument wie zuvor (monotone, beschränkte Partialsummenfolge) folgt, da die rechte Seite nun nicht mehr von N abhängt, dass $\sum_{n=1}^\infty |z_n|^2$ konvergiert. Alternativ hätte man an dieser Stelle auch einfach auf Beispiel 3.46 im Skript verweisen können. Das heißt genau, dass $(z_n)_n \in \ell^2$ ist.

3. Schritt: Wir zeigen, dass $(z_n^k)_n$ für $k \to \infty$ bezüglich d gegen $(z_n)_n$ konvergiert. Wegen (5) ist die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^N \left|z_n^k - z_n\right|^2$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \left|z_n^k - z_n\right|^2$ und es gilt:

$$\forall k \geq k_0: \qquad \sum_{n=1}^\infty \left|z_n^k - z_n\right|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ (zu Beginn des 2. Schrittes) ja beliebig gewählt wurde, haben wir damit gezeigt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0: \qquad d((z_n^k)_n, (z_n)_n) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |z_n^k - z_n|^2} \leq \varepsilon.$$

Das entspricht zwar nicht genau der Definition von Konvergenz, ist aber, da wir wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ die Ungleichung genau so gut für $\varepsilon/2$ zeigen hätten können, zur Definition von Konvergenz äquivalent. Also haben wir gezeigt:

$$(z_n^k)_n \xrightarrow[k\to\infty]{d} (z_n)_n.$$

Der 3. Schritt des Beweises folgt also im Wesentlichen aus (5); an jener Stelle hätten wir diesen Schritt aber noch nicht durchführen dürfen, denn, um Konvergenz gegen einen Grenzwert in einem metrischen Raum zu zeigen, muss dieser bereits im Definitionsbereich der Metrik, also im metrischen Raum, liegen. Damit sind wir fertig. ∎