Übungen zu Analysis 2, 11. Übung 4. 6. 2019

101. Ist f eine Abbildung von X nach Y und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X, so ist $f(\mathcal{U}) := \{f(F) : \ F \in \mathcal{U}\}$ Filterbasis eines Ultrafilters in Y.

102. Ein Banachlimes auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist eine lineare Abbildung $\Lambda : \ \ell^\infty \to \mathbb{R}$ (ℓ^∞ ist der lineare Raum aller beschränkten Folgen), die translationsinvariant ist, d.h. wenn $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$, $\tau f(n) = f(n+1)$ den Translationsoperator bezeichnet $\Lambda(\tau f) = \Lambda f$ erfüllt und den Abschätzungen $\liminf f \leq \Lambda f \leq \limsup f$ für alle $f \in \ell^\infty$ genügt.

     Sei T der lineare Operator $\ell^\infty \to \ell^\infty$, $Tf(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(i)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} Tf(n) - T(\tau f)(n) = 0$ gilt.

     Zeigen Sie, dass für jeden Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$, der die Mengen $N_i := \{i \in \mathbb{N} : \ i \geq n_0\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ enthält die Mengen $(f(U))_{\ U\in\mathcal{U}}$ Filterbasis eines Ultrafilters sind, der in $[\inf f, \sup f]$ gegen einen Wert genannt $\mathcal{U}$-limes von f mit $\liminf f \leq \mathcal{U} - \lim f \leq \limsup f$ konvergiert.

     Zeigen Sie, dass für jeden solchen Ultrafilter $\mathcal{U}$ durch $\mathcal{U} - \lim Tf$ ein Banachlimes definiert wird.

     (Hinw. Bsp. 101)

103. Auf der Menge $\beta\mathbb{N}$ aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ bilden die Mengen $\mathcal{O}_A := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \ A \in \mathcal{U}\}$ für $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Basis einer Hausdorfftopologie $\mathcal{T}$ in der alle Mengen $\mathcal{O}_A$ sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

104. Ein topologischer Raum mit Basis $\mathcal{B}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung durch Mengen aus $\mathcal{B}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Zeigen Sie damit, dass $\beta\mathbb{N}$ mit der Topologie von Beispiel 103 kompakt ist.

105. Zeigen Sie mithilfe des Lemmas von Zorn, dass für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit Subbasis $\mathcal{S}$ gilt: Enthält jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung, so ist X kompakt.

     Hinw.: Betrachte Sie eine offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X ohne endl. Teilüberdeckung durch Mengen O_i die als endl. Durchschnitt $O_i = \cap_{l=1}^{n_i} S_{i,l}$ von Mengen aus $\mathcal{S}$ darstellbar sind. Zeigen Sie, dass für jedes $i \in I$ und mind. ein (i, l_i) gilt: Die Überdeckung $(O_j)_{j\in I}, S_{i,l_i}$ von X hat keine endl. T.Ü. Betrachten Sie alle Überdeckungen die man durch Hinzunahme von solchen S_{i,l_i} erhält die keine endl.T-Ü. besitzen. Zeigen Sie, dass es für eine geeignete Teilordnung ein maximales Element dieser Familie von Überdeckungen gibt und dass alle Elemente aus der Subbasis dieser Überdeckung bereits eine Überdeckung sind.

106. Sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$G \times G \to G : \ (x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$$

($G \times G$ mit der Produkttopologie) stetig ist.

107. Zeigen Sie, dass die Gruppe aller regulären $n \times n$-Matrizen versehen mit der Relativtopologie des $\mathbb{R}^{n^2}$ eine topologische Gruppe ist.

108. Sei S eine kompakte Halbgruppe, d.h. ein kompakter nichtleerer topologischer Raum S mit einer assoziativen Abbildung $S \times S \to S$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ Zeigen Sie mit dem Lemma von Zorn, dass es eine minimale nichtleere abgeschlossene Unterhalbgruppe gibt. (Eine Unterhalbgruppe ist eine Teilmenge U von S für die gilt $x \in U, \ y \in U \Rightarrow xy \in U$.

109. Eine kompakte linkstopologische Halbgruppe, d.h. eine kompakte Hausdorff-Halbgruppe in der alle Linkstranslationen $s \mapsto as$ stetig sind, hat ein idempotentes Element, d.h. ein Element p, das $pp = p$ erfüllt.

    Hinw.: Für eine minimale abgeschlossene Unterhalbgruppe S und $p \in S$ zeige man $pS = S$ und $Mp := \{x \in S : px = p\}$ ist nichtleere abgeschl. Unterhalbgruppe von S.

110. Eine Totalordnung $\leq$ auf einer nichtleeren Menge M heißt *Wohlordnung* wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein Minimum hat. Zeigen Sie mit dem Lemma von Zorn, dass jede nichtleere Menge eine Wohlordnung besitzt.

    Hinw. Definieren Sie auf der Menge der wohlgeordneten Teilmengen $(K_i, \leq_i)$ eine Teilordnung $\preceq$ durch $(K_i, \leq_i) \prec (K_j, \leq_j)$ für $K_i \subset K_j$, $\preceq_i$ stimmt auf K_i mit $\preceq_j$ überein und $k \in K_j \setminus K_i \Rightarrow l < k \ \forall l \in K_i$.