1.

Gg.: $F(x) := \begin{cases} x, & \text{für } x < 0 \\ 1+x^2, & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3x, & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 9, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$

(a) Zz.: F Verteilungsfunktion

d.h. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b : \mu((a, b]) = F(b) - F(a)$,

wobei μ ein Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist.

Das ist äquivalent zu:

1, F monoton steigend. ✓

2, F rechtsstetig. $\forall x \in \operatorname{dom} F : F(x+0) = F(x)$ ✓

(b) Ges.:

$$\mu_F(]0,2]) = F(2) - F(0) = 8$$
$$\mu_F(]0,2[) = F(2-0) - F(0) = 5$$
$$\mu_F([0,2[) = F(2-0) - F(0-0) = 6$$
$$\mu_F([0,2]) = F(2) - F(0-0) = 9$$
$$\mu_F(]-1.2, 0.7[) = F(0.7-0) - F(-1.2) = 2.69$$
$$\mu_F(\mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu_F(\{q\}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} F(q) - F(q-0) = 5$$

2.

Gg.: Cantorfunktion $c(x) := \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ c(x) & , \text{alte Cantorfunktion} \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$,

c Verteilungsfunktion;

Zz.: $\mu_c(C) = 1$, wenn $C \ldots$ Cantormenge

Ww.: Wenn $\cdots \Leftrightarrow (a_k)_{k=1}^{n} \in \{0,2\}^n$, dann ..

$$C_n = \bigcup_{\cdots} [0.a_1 \ldots a_n \dot{0}, 0.a_1 \ldots a_n \dot{2}]$$

$$= \sum_{\cdots} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \cancel{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{0}{3^k}}, \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \right]$$

$$\Rightarrow \mu_c(C) = \mu_c(\lim_{n \to \infty} C_n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{\cdots} \mu_c\left(\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k}\right]\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{\cdots} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k/2}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{n} \frac{1}{2^k} - \lim_{x \uparrow \sum_{k=1}^{n} \cdots} c(x) \right)$$

$$= \cdots - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k/2}{2^k}$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1,$$

weil c stetig und zwischen den Teilintervallen von C_n konstant ist.

3. Geg.: $F(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$

Zz.: F ist 2-dimensionale Verteilungsfunktion

1, F monoton steigend. min ist nichtfallend ✓

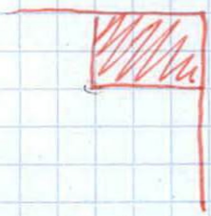
2, F rechtsstetig. $\forall x \in \operatorname{dom} f : F(x+0) = F(x)$ ✓

bzw.

1, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall y \geq x : \|y - x\| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon$

2, $\forall a \geq b : 0 \leq \Delta_a^b F$, wobei

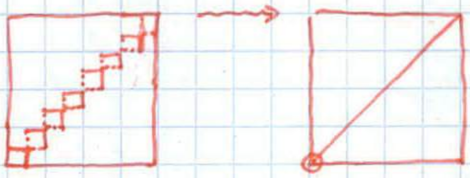
$$\Delta_{a_i}^{b_i} F(x) := F(x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n);$$



Ges.:

$$\mu_F(]0,1] \times]0,1]) = (F(1,1) - F(0,1)) - (F(1,0) - F(0,0)) = 1$$

$$\mu_F(\{(x,x) : 0 < x \leq 1\}) = \dots$$



$$\Rightarrow \dots = \mu_F\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]^2\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(F\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right) - F\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) - \cancel{F\left(\frac{i}{n}, \frac{i-1}{n}\right) + F\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i-1}{n}\right)} \right) = 1.$$

4. Gg.: $F_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, Verteilungsfunktionen;

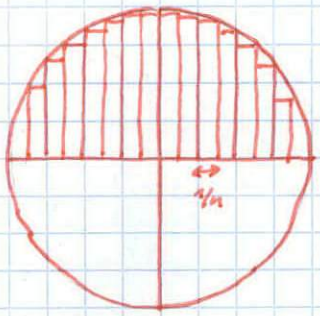
Zz.: $F(x_1, \dots, x_{n+m}) = F_1(x_1, \dots, x_n) F_2(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$
ist $(m+n)$-dimensionale Verteilungsfunktion

1, Rechtsstetigkeit: Ana 1 ✓

2, $\forall a, b \in \mathbb{R}^{n+m},\ a \leq b : \Delta_a^b F \geq 0$

5. Geg.: $F(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 \, [x_2 \geq 0]$ ist eine 2-dim. Verteilungsfunktion

Ges.: $\mu_F(\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}) = 4/3$



Kreisbogen:

$x_1^2 + x_2^2 = 1$

$\Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$

oBdA. betrachte rechtes 1/4.

$$\mu_F\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[\times \left[0, \sqrt{1-(k/n)^2}\right[\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}, \sqrt{1-(k/n)^2}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}, \sqrt{1-(k/n)^2}\right) - \cancel{F\left(\frac{k}{n}, 0\right)} + \cancel{F\left(\frac{k-1}{n}, 0\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) - \frac{k-1}{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$

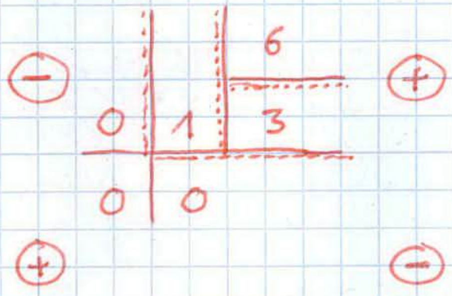
$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1 = \frac{2}{3}.$$

6.

Gg.: $F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x_1 < 0 \text{ oder } x_2 < 0, \\ 1 & \text{wenn } 0 \leq x_1 < 1 \text{ und } x_2 \geq 0, \\ 3 & \text{wenn } x_1 \geq 1 \text{ und } 0 \leq x_2 < 1, \\ 6 & \text{wenn } x_1 \geq 1 \text{ und } x_2 \geq 1. \end{cases}$

Zz.: F ist 2-dimensionale Verteilungsfunktion

- Rechtsstetigkeit
- Monotonie



Ges.:

$\mu_F(\{(0,0)\}) = \lim_{x \to 0} \mu_F([-x, 0])$

$= \lim_{x \to 0} \left(F(0,0) - F(-x-0) - F(0,-x-0) + F(-x-0,-x-0) \right)$

$= 1.$

$\mu_F(\{(1,0)\}) = 3 - 1 - 0 + 0 = 2$

$\mu_F(\{(1,1)\}) = 6 - 3 - 1 + 1 = 3$

$\mu_F(A) =$

$|A \cap \{(0,0)\}| \cdot 1 + |A \cap \{(1,0)\}| \cdot 2 + |A \cap \{(1,1)\}| \cdot 3.$