1. (a) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph in $\mathbb{E} := \{z : |z| < 1\}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \le 1$ in $\mathbb{E}$. Untersuchen sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$$

auf punktweise und kompakte Konvergenz in $\mathbb{E}$. Ist die Grenzfunktion holomorph?

(b) Untersuchen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(z^n)$$

auf punktweise und kompakte Konvergenz in $\mathbb{E}$. Ist die Grenzfunktion holomorph?

a) o.B.d.A.: $f \not\equiv 0$

Da f nach dem Maximumsprinzip auf G kein Betragsmaximum annehmen kann gilt sogar $\forall z \in \mathbb{E}: |f(z)| < 1$ Nach dem Schwarzschen Lemma gilt $\forall z \in \mathbb{E}: |f(z)| \le |z|$ und da $|z| < 1 \Rightarrow |z^n| < 1$ gilt ist

$\sum_{n=1}^{\infty} |f(z^n)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$, die Reihe konvergiert also punktweise auf $\mathbb{E}$

$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: \; g_N : \mathbb{E} \to \mathbb{C}: z \mapsto \sum^{N} f(z^n)$ ist holomorph und punktweise konvergent

Sei $K \subseteq \mathbb{E}$ bel. $\forall z \in K: |z| < 1$, also auch $\delta := \max\{|z| : z \in K\} < 1$

$\forall z \in K: \sum_{n=1}^{\infty} \|f(z^n)\|_{\infty, K} \le \sum_{n=1}^{\infty} |f(w^n)| = \frac{1}{1-|w|}$, mit $|f(w^n)| = \max\{|f(z^n)| : z \in K\}$ also auf K nach dem Weierstraß-Kriterium glm. konvergent und da K beliebig war ist $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$ kompakt konvergent, nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz der Grenzwert holomorph.

b) fehlt!

2. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in den Gebieten

$$f(z) = z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3}, \quad G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$$
$$f(z) = z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2, \quad G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

•) $\left|z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2\right| = |z^2|\left|z^3 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}\left|z^3 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{4}\left(|z|^3 + \frac{1}{3}|z| + \frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3+4+6}{24}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{13}{24} = \frac{13}{96} < \frac{32}{96} = \left|\frac{1}{3}\right|$

nach dem Satz von Rouché hat f gleich viele Nullstellen in G wie $\frac{1}{3}$, also keine

•) $|z^7 - 5z^4| = |z|^4\,|z^3 - 5| = |z^3 - 5| \geq 4 > 3 = |z|^2 + 2 \geq |iz^2 - 2|$

Nach dem Satz von Rouché hat $z^7 - 5z^4$ gleich viele Nullstellen in G wie f

$z^7 - 5z^4 = 0 \Leftrightarrow z^4(z^3 - 5) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{5}$

$\sqrt[3]{5} \notin G$ also gibt es 4 Nullstellen, da z^4 eine 4-fache Nullstelle ist.

3. Sei (g_n) eine Folge von ganzen Funktionen und $g_n \to g$ kompakt. Zeigen Sie: Haben die $g_n(z)$ nur reelle Nullstellen, dann hat $g(z)$ nur reelle Nullstellen oder $g \equiv 0$.

Sei $g \not\equiv 0$; Ang. $g(w) = 0$ und $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Nach dem Identitätssatz liegt die Nullstelle w isoliert in der Menge der Nullstellen.

Wir können also ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ finden mit $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq \varepsilon\}$, $K \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und

$\forall z \in K \setminus \{w\}: g(z) \neq 0$. Nun ist der Rand $S := \partial K$ eine kompakte Menge und wir

finden $\delta \in \mathbb{R}^+$: $\delta < \min\{|g(z)| : z \in S\}$ und wegen $g_n \to g$ kompakt

$\exists k \in \mathbb{N}: \forall z \in S: |g_k(z) - g(z)| < \delta < |g(z)|$

Nach dem Satz von Rouché haben g und $g + g_k - g = g_k$ gleich viele Nullstellen in K,

aber $\mathbb{R} \cap K = \emptyset$ und g hat eine Nullstelle in K also auch g_k ↯ zu g_k hat nur reelle Nullstellen.

4. Es sei G ein beschränktes Gebiet, f_n sei eine Folge von auf dem Abschluss von G stetigen Funktionen, die auf G selbst holomorph sind. Zeigen Sie: Wenn f_n auf dem Rand von G gleichmäßig konvergiert, so auch auf dem Abschluss von G.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\max\{|f_n(z)| : z \in G \cup \partial G\} \in \partial G$ nach dem Maximumsprinzip, und weil $G \cup \partial G$ kompakt ist und f_n stetig. Sei $g_n := f_n|_{\partial G}$ und $\lim_{n\to\infty} g_n = g$

Nun gilt $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \forall z \in \partial G : |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$, also $|g_n(z)| < |g(z)| + \varepsilon$

Als glm. Grenzwert stetiger Fkt. ist g wieder stetig und es gilt

$\forall n \geq N : \forall w \in G \cup \partial G : |f_n(w)| < \max\{|g_n(z)| : z \in G \cup \partial G\} < \max\{|g(z)| : z \in G \cup \partial G\} + \varepsilon$

Da wir bis N nur endl. viele stetige Fkt. auf kompakten Mengen vorliegen haben gilt

$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} \ \forall z \in G \cup \partial G : |f_n(z)| < M$

insbes. ist die Folge der holomorphen $h_n := f_n|_G$ lokal beschränkt

Nach dem Satz von Montel gibt es eine Teilfolge h_{n_k}, die gleichmäßig (weil $\bar{G}$ kompakt ist) gegen eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Da die f_{n_k} die stetigen Fortsetzungen der h_{n_k} sind ist $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ mit $f|_G = h$ und $f|_{\partial G} = g$

Sei $\alpha_n := f_n - f$, α_n ist also holomorphe Funktion

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. Wegen $f_n|_{\partial G} \to f|_{\partial G}$ glm. gilt $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \forall z \in \partial G : |\alpha_n(z)| < \varepsilon$ und da nach dem Maximumsprinzip das Betragsmaximum von α_n auf ∂G angenommen wird gilt $\forall z \in G \ |\alpha_n(z)| < \varepsilon$, also glm. Konvergenz.

5. Zeigen Sie, dass $p_n(z) := \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen $\exp(z)$ konvergiert, indem Sie zeigen, dass $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal beschränkt ist und indem Sie $\lim_{n\to\infty} p^{(k)}(0)$ für alle k bestimmen.

•) „lokal beschränkt" Sei $w \in \mathbb{C}$ bel. und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sowie $U := \{z \in \mathbb{C} : |z-w| < \varepsilon\}$

Sei $z \in U$ bel., $n \in \mathbb{N}$ bel.: $|p_n(z)| = \left|1+\frac{z}{n}\right|^n \le \left(|1| + \frac{|z|}{n}\right)^n < \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^{n+1} \overset{(*)}{\le} (1+|z|)^2 \le (|1|+|w|+\varepsilon)^2$,

wobei wir (*) bereits in Analysis 1 (vgl. Kaltenbäck Bsp. 3.4.3 (iv)) nachgerechnet haben

•) $p_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \Rightarrow p_n(0) = 1$

$p_n'(z) = n\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n} = \left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-1} \Rightarrow p_n'(0) = 1$

$p_n''(z) = (n-1)\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-2}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-2}$

Behauptung: $p_n^{(k)}(z) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-k}$ (für n hinr. groß)

Sei also die Behauptung für k bereits erfüllt

$p_n^{(k+1)}(z) = \left(\frac{n!}{n^k(n-k)!}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-k}\right)' = \frac{n!\,(n-k)}{n^k(n-k)!}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-(k+1)}\frac{1}{n} = \frac{n!}{n^{k+1}(n-(k+1))!}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-(k+1)}$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ bel. $\lim_{n\to\infty} p_n^{(k)}(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k(n-k)!} = \prod_{j=0}^{k-1} \lim_{n\to\infty}\frac{n-j}{n} = \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{j}{n}\right) = 1$

•) Nach dem Ableitungskriterium konvergiert nun $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt was, wie wir aus der Vorlesung wissen, äquivalent zu lokal glm. Konvergenz ist.

6. Zeigen Sie: Jede ganze Funktion, deren Nullstellen einfach sind und genau in $\mathbb{Z}$ liegen, ist von der Form

$$f(z) = ze^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

wobei g eine ganze Funktion ist.

Bestimmen Sie diese Darstellung speziell für $f(z) = \sin(\pi z)$.

- Für bel. $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left|- \frac{z^2}{n^2}\right| = |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent, nach dem Kriterium für die absolute Konvergenz unendlicher Produkte konvergiert daher $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ absolut

- Sei ein kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$ gegeben. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall z \in K: \frac{|z|^2}{n_0^2} < 1$

Sei $\forall k \in \mathbb{N}: h_k : K \to \mathbb{C} : z \mapsto \ln\left(1 - \frac{z^2}{(n_0+k)^2}\right)$ eine Folge von beschränkten, komplexwertigen Funktionen. Nun ist $\sum_{k=1}^{\infty} \| h_k \|_\infty < \infty$, da das Supremum auf der kompakten Menge wegen der Stetigkeit der h_k und von $|\cdot|$ ein Maximum ist. Nach dem Weierstraß-Kriterium ist daher $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ gleichmäßig konvergent, also auch $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

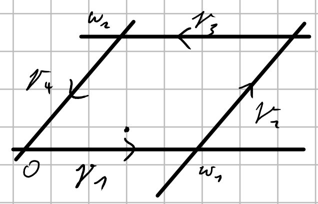
Auf ganz $\mathbb{C}$ ist nun $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ kompakt konvergent, also ist auch die Grenzfkt. holomorph.

fehlt!

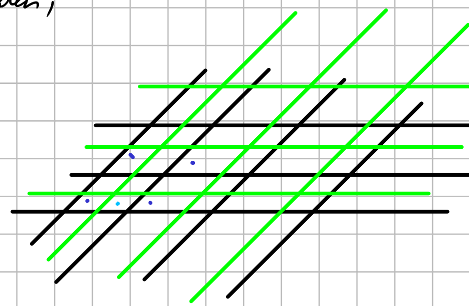
7. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell linear unabhängig und f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe nichtkonstante *doppelt periodische Funktion* mit den Perioden ω_1 und ω_2, d.h. mit der Eigenschaft

$$f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, dass f auf dem *Fundamentalbereich* $F = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 : 0 \leq \lambda_j < 1\}$ ebenso viele Polstellen wie Nullstellen hat (gezählt jeweils mit Vielfachheiten).



•) Da f nichtkonstant ist gibt es in F, weil Polstellen isoliert sind und die Nullstellen wegen des Identitätssatzes keinen Häufungspunkt haben, nur endlich viele Null- und Polstellen.



•) Sei $u \in \mathbb{C}$ bel. und seien $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1[$ mit $f(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = 0$

Wir können die Darstellung $u = (k_1 + \mu_1) w_1 + (k_2 + \mu_2) w_2$ verwenden, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ und $\mu_1, \mu_2 \in [0,1[$ wegen der doppelten Periode von f, reicht es stattdessen $a = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$ zu betrachten.

Fall 1: „$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \{a\} + F$", dann ist der Punkt ebenfalls in der neuen Menge $\{a\} + F$ eine Nullstelle.

Fall 2: „$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \notin \{a\} + F$"

Fall 2.1: „$\lambda_1 < \mu_1 \wedge \lambda_2 \geq \mu_2$" Dann ist $1 + \lambda_1 < 1 + \mu_1$ also $(1+\lambda_1) w_1 + \lambda_2 w_2 \in \{a\} + F$ und Nullstelle

Fall 2.2: „$\lambda_1 \geq \mu_1 \wedge \lambda_2 < \mu_2$" analog

Fall 2.3: „$\lambda_1 < \mu_1 \wedge \lambda_2 < \mu_2$": Wähle $(1+\lambda_1) w_1 + (1+\lambda_2) w_2 \in \{a\} + F$ Nullstelle

Für Polstellen genauso

Mit dieser bijektiven Identifizierung sehen wir, dass in $\{u\} + F$ gleich viele Null- und Polstellen liegen wie in F

•) Da es nur endl. viele Null- und Polstellen gibt, $\exists\, u \in \mathbb{C}$ so, dass f in $\partial(\{u\} + F)$ keine Null- und Polstellen hat.

$\exists\, a, b \in]0,1[: \forall\, \lambda_1 \in]0,a[, \lambda_2 \in]0,b[: f(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \neq 0$ mit einer Verschiebung um $\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$ mit $\mu_1 \in]0,a[$, $\mu_2 \in]0,b[$ funktioniert das

•) Seien also o.B.d.A. keine Null- und Polstellen in ∂F, dann können wir den Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral anwenden und erhalten

$N_F - P_F = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \underset{\text{doppelt periodisch}}{=} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} = 0$

8. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell linear unabhängig. Man zeige, dass es bis auf Addition einer Konstanten genau eine doppelt periodische meromorphe Funktion mit den Perioden ω_1 und ω_2 gibt, die außer einem Pol bei 0 mit dem Hauptteil $1/z^2$ keinen weiteren Pol im Fundamentalbereich hat.

•) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die alle Punkte $k_1 w_1 + k_2 w_2 \in \mathbb{C}$ mit $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$ genau einmal trifft. Sei außerdem $\forall n\in\mathbb{N}$ $P_n(z) := z^2$, sei $a_n = k_n w_1 + m_n w_2$

Entsprechend dem Satz von Mittag-Leffler sei $h_n(z) := P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \frac{1}{(z-a_n)^2}$

Taylor um $z=0$ für $a_n \neq 0$: $\frac{1}{(z-a_n)^2} = \frac{1}{a_n^2}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell+1}{a_n^\ell} z^\ell$, das wissen wir bereits aus Übung 2

also $\left| \frac{1}{(z-a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2} \right| = \left| \frac{a_n^2 - (z-a_n)^2}{a_n^2 (z-a_n)^2} \right| = \left| \frac{2za_n - z^2}{a_n^2 (z-a_n)^2} \right| = \frac{|z|\ |2a_n - z|}{|a_n|^2 |z-a_n|^2}$

Für bel. $K \subseteq \mathbb{C}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n \notin K$

Um Konvergenz auf K festzustellen reicht es nun die Konvergenz von $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^3}$ zu untersuchen

Für bel. $\ell \in \mathbb{N}$: es gibt genau 4ℓ Folgenglieder n mit $|k_n|+|m_n| = \ell$

$f: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}: (x,y) \mapsto \frac{|x w_1 + y w_2|}{|x|+|y|}$

Da $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $f(tx,ty) = f(x,y)$ können x,y am Einheitskreis gewählt werden

also $\operatorname{ran} f = \operatorname{ran} f|_{\partial E}$

Da ∂E kompakt ist und f stetig nehmen wir $b := \min f|_{\partial E}$

und erhalten $\forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $b \leq \frac{|x w_1 + y w_2|}{|x|+|y|} \Leftrightarrow b(|x|+|y|) \leq |x w_1 + y w_2|$

In unserem Fall also $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{k_n w_1 + m_n w_2} \leq \frac{1}{b(|k_n|+|m_n|)}$ und damit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|k_n w_1 - m_n w_2|^3} \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4\ell}{b^3 \ell^3} = 4b^{-3}\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-2} < \infty$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2}\right)$ konvergiert also kompakt auf $\mathbb{C}\setminus\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

Nach dem Satz von Mittag-Leffler ist also $f(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2}\right)$ eine meromorphe Fkt. mit den richtigen Polstellen.

Auch die 2π-Periodizität sieht man leicht, da $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} + \{(0,1)\} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} + \{(1,0)\} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Damit ist die Existenz gezeigt.

•) Seien f, g entsprechende Fkt. Wir wissen bereits, dass wir $f = \frac{f_1}{f_2}$ und $g = \frac{g_1}{g_2}$ mit ganzen Fkt. g_1, g_2, f_1, f_2 schreiben können. $h := f - g$ ist wegen der Periodizität von f und g beschränkt und $h = \frac{f_1 g_2 - g_1 f_2}{f_2 g_2}$, da f und g die gleichen Polstellen haben gilt $f_2(z) g_2(z) = 0 \Rightarrow f_1(z) g_2(z) - g_1(z) f_2(z) = 0$ also ist h ganze Fkt. (nach Heben der Unstetigkeiten) $\xrightarrow{\text{Liouville}}$ $f = g + c$