ÜBUNGEN ZU "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" WS 2020
BLATT 1 (1. 10. 2020)

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Berechnen Sie die Operatornorm von

$$T\colon \ell^2 \to \ell^1, \qquad Tx = (x_1, x_2/2, x_3/3, x_4/4, \dots).$$

2. Sei $(\mathcal{P}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ der normierte Vektorraum aller Polynome $p\colon [0,1] \to \mathbb{K}$. Ist die Abbildung $D\colon \mathcal{P}([0,1]) \to \mathcal{P}([0,1])$, $Dp = p'$ beschränkt? Wenn ja, berechnen Sie $\|D\|$.

3. Beweisen Sie mithilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)} \le 2(x+y+z).$$

4. Beweisen Sie mithilfe der hölderschen Ungleichung:

$$4(a^3+b^3) \ge (a+b)^3 \qquad (a, b \ge 0).$$

5. Beweisen Sie mithilfe der jensenschen Ungleichung die youngsche Ungleichung für Produkte ($1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$):

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b \ge 0).$$

6. Lösen Sie die homogene eulersche Differentialgleichung

$$a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

mit $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ durch die Transformation $z(t) = y(e^t)$.

7. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad u(0,x) = g(x)$$

für $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, wobei $g \in C^3(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass bei $t = 0$ die Funktionen u_t, u_x, u_{xx} und u_{tx} schon durch g bestimmt sind.

8. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$au_x + bu_y = f(x,y)$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ und stetigem f durch die Variablentransformation $\xi = bx + ay$, $\eta = bx + ay$.

9. (i) Zeigen Sie, dass für fixes $\lambda = \mu^2 > 0$ die Funktion

$$w(x,y) = (Ax+B)(C\cos\mu y + D\sin\mu y)$$

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

mit beliebigen Konstanten A, B, C, D die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = 0$$

löst.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\omega(x, y, z, t) = \frac{A}{(t - t_0)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a(t - t_0)}\right]$$

mit beliebigen Konstanten $A, t_0, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

(mit $a \in \mathbb{R}$) löst.