Zur algebraischen Realisierung dieses Verfahrens führen wir zunächst sogenannte Schlupfvariablen ein. Damit wird eine Ungleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \leq b$$

transformiert zu

$$s = b - \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \quad \text{und} \quad s \geq 0.$$

Dabei wird s als *Schlupfvariable* bezeichnet. Variablen die keine Schlupfvariablen sind, werden als *freie Variablen* bezeichnet.

Definition 10.7. Ein lineares Programm in *Schlupfform* in den Variablen $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist gegeben durch die Menge S der Indizes der Schlupfvariablen, die Menge F der Indizes der freien Variablen mit $S \cap F = \emptyset$ und $S \cup F = \{1, \dots, n\}$ sowie den Gleichungen

$$z = \nu + \sum_{j \in F} c_j x_j \text{ max!}$$
$$x_i = b_i - \sum_{j \in F} a_{i,j} x_j \text{ für } i \in S$$

und inkludiert implizit die Nichtnegativitätsbedingungen $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Ein lineares Programm in Schlupfform ist also durch das Tupel (F, S, A, b, c, ν) vollständig spezifiziert.

Lemma 10.2. *Jedes lineare Programm in Standardform kann in ein äquivalentes lineares Programm in Schlupfform transformiert werden.*

Beweis. Durch wiederholte Einführung von Schlupfvariablen werden zum ursprünglichen Programm äquivalente lineare Programm erzeugt. Dieser Vorgang endet wenn nur noch Ungleichungen von der Form $x_i \geq 0$ übrig sind. □

Definition 10.8. Sei $L = F, S, A, b, c, \nu$ ein lineares Programm in Schlupfform in den Variablen $\{x_1, \dots, x_n\}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ so dass $x_i = 0$ für alle $i \in F$ und x alle Gleichungen erfüllt. Dieses $x \in \mathbb{R}^n$ wird als *Basislösung* von L bezeichnet. Falls x auch alle Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, dann heißt x *zulässige Basislösung.*

Über seine Basislösung spezifiziert eine Schlupfform also einen bestimmten Punkt im $\mathbb{R}^n$. Im Simplex-Verfahren werden wir (nach einer Phase der Initialisierung) nur solche Schlupfformen betrachten deren Basislösung zulässig ist. Auf diese Weise spezifiziert also eine Schlupfform einen Knoten des Polytops der zulässigen Lösungen. Der Simplex-Algorithmus realisiert nun die Bewegung von einem Knoten zu einem Nachbarknoten durch Transformation einer Schlupfform mit zulässiger Basislösung in eine andere Schlupfform mit zulässiger Basislösung. Diese Transformation geschieht durch Austausch einer freien Variablen x_f mit einer Schlupfvariablen x_s. In der neuen Basislösung ist dann nicht mehr $x_f = 0$, sondern $x_s = 0$. Wir illustrieren die Funktionsweise des Simplex-Algorithmus auf der algebraischen Ebene zunächst anhand eines Beispiels.

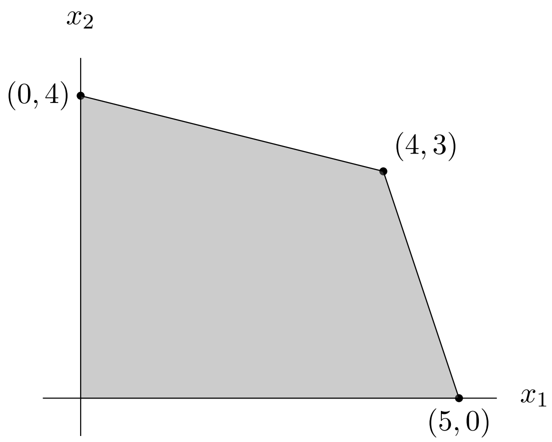

Abbildung 10.2: Beispiel für den Simplex-Algorithmus

Beispiel 10.6. Wir wollen auf das folgende lineare Programm in Standardform den Simplex-Algorithmus anwenden:

$$\begin{aligned} z = x_1 + 2x_2 \,\text{max!} \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{aligned}$$

Dieses lineare Programm ist in Abbildung 10.2 graphisch dargestellt. Zunächst bringen wir es in Schlupfform:

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 \\ x_3 &= 15 - 3x_1 - x_2 \\ x_4 &= 16 - x_1 - 4x_2 \end{aligned}$$

wobei $F = \{1, 2\}$, $S = \{3, 4\}$ und $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ implizit ist. Die Basislösung dieses Programms ist $(0, 0, 15, 16)$. Der Vektor $(0, 0, 15, 16)$ ist eine zulässige Basislösung. Seine Einschränkung auf die ersten beiden Komponenten ist der Vektor $(x_1, x_2) = (0, 0)$ der den aktuellen Knoten des Polytops im ursprünglichen Problem angibt, siehe Abbildung 10.2.

Da x_2 in der Zielfunktion den höchsten positiven Koeffizienten hat, wählen wir x_2 zum Vertauschen mit einer Schlupfvariablen. Aus der Gleichung von x_3 folgt dass $x_2 \leq 15$ ist. Aus der Gleichung von x_4 folgt dass $x_2 \leq 4$ sein muss. In Hinblick darauf, in der nächsten Basislösung $x_2 = 4$ und damit $x_4 = 0$ zu setzen vertauschen wir also x_2 und x_4. Dazu schreiben wir zunächst die Gleichung von x_4 zu $x_2 = 4 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4$ um und ersetzen dadurch in allen anderen Gleichungen x_2. So erhalten wir das neue lineare Programm

$$\begin{aligned} z &= 8 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 &= 4 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 &= 11 - \frac{11}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4 \end{aligned}$$

wobei $F = \{1, 4\}$ und $S = \{2, 3\}$ ist. Die Basislösung dieses Programms ist $(0, 4, 15, 0)$ was dem Punkt $(x_1, x_2) = (0, 4)$ entspricht, einem benachbarten Knoten des Polytops der zulässigen Lösungen.

Nun hat x_1 in der Zielfunktion den höchsten positiven Koeffizienten. Aus der Gleichung von x_2 folgt dass $x_1 \leq 16$ ist. Aus der Gleichung von x_3 folgt dass $x_1 \leq 4$ ist. Wir vertauschen also x_1 und x_3. Wir haben $x_1 = 4 - \frac{4}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4$ und damit erhalten wir das neue Programm

$$\begin{aligned} z &= 10 - \frac{4}{22}x_3 - \frac{9}{44}x_4 \\ x_1 &= 4 - \frac{4}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \\ x_2 &= 3 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{12}{44}x_4 \end{aligned}$$

wobei $F = \{3, 4\}$, $S = \{1, 2\}$. Die Basislösung dieses Programms ist $(4, 3, 0, 0)$ was dem Punkt $(x_1, x_2) = (4, 3)$ entspricht.

Da nun alle Koeffizienten in der Zielfunktion negativ sind, kann durch Erhöhung der freien Variablen der Zielwert nicht mehr erhöht werden. Wir haben also eine optimale Lösung gefunden: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ und $z = 10$.

Der Simplex-Algorithmus kann als Pseudocode wie in Algorithmus 43 formuliert werden. Dabei

Algorithmus 43 Der Simplex-Algorithmus

```
Prozedur SIMPLEX(A, b, c)
    (F, S, A, b, c, ν) := INITSIMPLEX(A, b, c)
    Solange ∃j ∈ F mit c_j > 0
        Wähle f ∈ F mit c_f > 0
        Δ := BESCHRÄNKUNGEN(S, A, b, f)
        Sei s ∈ S so dass Δ[s] minimal ist
        Falls Δ[s] = ∞ dann
            Antworte "unbeschränkt"
        sonst
            (F, S, A, b, c, ν) := AUSTAUSCH(F, S, A, b, c, ν, s, f)
        Ende Falls
    Ende Solange
    Antworte BASISLÖSUNG(F, S, A, b, c, ν)
Ende Prozedur
```

werden die folgenden Unterprozeduren verwendet:

Die Prozedur BESCHRÄNKUNGEN(S, A, b, f) liefert ein Datenfeld Δ der Länge $n = |F| + |S|$ zurück so dass, für alle $s \in S$ der Wert $\Delta[s]$ angibt welchen Wert x_f maximal annehmen kann, ohne die Schlupfvariable x_s kleiner als 0 zu machen.

Die Prozedur AUSTAUSCH$(F, S, A, b, c, \nu, s, f)$ löst die Gleichung von x_s nach x_f auf und setzt diese Darstellung von x_f in alle anderen Gleichungen ein. Dadurch erzeugt sie eine neue Schlupfform die sich von F, S, A, b, c, ν dadurch unterscheidet dass s von einer Schlupfvariable zu einer freien Variable geworden ist und f von einer freien Variable zu einer Schlupfvariable. Diese neue Schlupfform hat die selbe Menge zulässiger Lösungen und die selbe Zielfunktion, lediglich deren Darstellung wurde verändert. Diese neue Schlupfform wird dann von AUSTAUSCH zurückgegeben.

Zunächst zeigen wir die partielle Korrektheit (d.h. ohne Betrachtung der Termination) der Simplex-Schleife. Mit Simplex-Schleife ist hier die Schleife in Algorithmus 43 gemeinsam mit der letzten Zeile, die mit der aktuellen Basislösung antwortet, gemeint. Dazu stellen wir zuerst noch eine Überlegung zur optimalen Lösung an.

Definition 10.9. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$. Ein $x \in A$ heißt *(globales) Optimum* von f falls $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in A$. Ein $x \in A$ heißt *lokales Optimum* von f falls es eine Umgebung U von x gibt so dass $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in U \cap A$.

Lemma 10.3. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f : A \to \mathbb{R}$ linear und x ein lokales Optimum von f, dann ist x auch ein globales Optimum.*

Beweis. Sei U eine Umgebung von x so dass $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in U \cap A$. Sei $z \in A$. Dann existiert aufgrund der Konvexität von A ein $t \in (0,1)$ so dass $tx + (1-t)z \in U \cap A$. Damit ist $f(x) \geq f(tx + (1-t)z)$ und, aufgrund der Linearität von f, $f(x) \geq tf(x) + (1-t)f(z)$. Also $f(x) \geq f(z)$. □

Lemma 10.4. *Falls $L = F, S, A, b, c, \nu$ eine Schlupfform mit zulässiger Basislösung ist und die Simplex-Schleife, angewandt auf L, terminiert dann gilt:*

1. *Falls L unbeschränkt ist, dann antwortet die Simplex-Schleife mit "unbeschränkt".*
2. *Falls L eine optimale Lösung mit Zielwert $z \in \mathbb{R}$ hat, dann liefert die Simplex-Schleife eine Lösung mit Zielwert z.*

Beweis. Die Simplex-Schleife kann nur entweder mit "unbeschränkt" oder mit einer Lösung antworten. Wir beginnen mit den folgenden beiden Beobachtungen: 1. Falls die Simplex-Schleife mit einer Lösung x antwortet, dann ist x ein lokales Optimum weil alle $c_i \leq 0$ sind und damit wegen Lemma 10.3 auch ein globales Optimum. 2. Falls die Simplex-Schleife mit "unbeschränkt" antwortet, dann ist $(x_1, \ldots, x_{f-1}, a, x_{f+1}, \ldots, x_{|S|+|F|})$ für alle $a \geq x_f$ zulässig. Da $c_f > 0$ ist damit L unbeschränkt.

Falls also L unbeschränkt ist, dann kann wegen 1. die Simplex-Schleife nicht mit einer Lösung antworten (sonst hätte L ja eine optimale Lösung), also antwortet L mit "unbeschränkt". Falls L eine optimale Lösung hat, dann kann wegen 2. die Simplex-Schleife nicht mit "unbeschränkt" antworten (sonst wäre L ja unbeschränkt), also antwortet L mit einer Lösung, die nach 1., eine optimale Lösung ist. □