Satz 2.5.4 Für jede Teilmenge B eines Vektorraumes V sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) B ist eine Basis von V.

(b) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V. Das heißt, jede Menge B_1 mit $B_1 \subsetneq B$ ist kein Erzeugendensystem von V.

(c) B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V. Das heißt, jede Menge B_2 mit $B \subsetneq B_2 \subset V$ ist linear abhängig.

Beweis. Hier wird B als Menge statt Familie betrachtet. Das geht, laut 2.4.8, deswegen, weil sich, laut 1.6.9, jede Menge in eine (injektive) Familie transformieren lässt. (Die Indexmenge ist dabei die Menge selbst.) Weil die vorherigen Sätze für allgemeine Familien gelten, so auch für injektiv indizierte. Also auch für Mengen. Familien waren vorher praktischer, weil wir mit Indizes gearbeitet haben. Jetzt brauchen wir (echte) Teilmengen.

(a) $\Rightarrow$ (b). Sei $B_1 \subsetneq B$. B_1 darf kein ES sein! Es gibt also einen Vektor $b \in B \setminus B_1$. ... Da die Basis B l.u. ist, kann b nicht als Linearkombination von $B \setminus \{b\}$ und daher erst recht nicht als Linearkombination von B_1 geschrieben werden. $B \setminus \{b\}$ ist analog zu $I \setminus \{j\}$. Letzteres folgt aus $B_1 \subseteq B \setminus \{b\}$, und weil beim Wechsel zu B_1 nur Vektoren (vielleicht) weggenommen werden. Somit ist B_1

kein Erzeugendensystem von V. Es gibt also einen Vektor, nämlich b, der, laut Satz 2.4.6, nicht in $[B_1]$ ist. Daher $[B_1] \subsetneq V$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Für jeden Vektor $b \in B$ ist $B \setminus \{b\}$ nach Voraussetzung kein Erzeugendensystem von V. $B \setminus \{b\} \subsetneq B$ passt in die VS. Daher lässt sich mindestens ein Vektor aus V, und zwar insbesondere der Vektor b selbst, nicht als Linearkombination von $B \setminus \{b\}$ schreiben. $b \notin [B \setminus \{b\}]$ ist ja die Menge aller LK von $B \setminus \{b\}$. Somit ist das Erzeugendensystem B l.u., also eine Basis von V. Man könnte gleich mit Satz 2.4.6 argumentieren, dass B l.u. ist.

(a) $\Rightarrow$ (c). Sei $B \subsetneq B_2 \subset V$. B_2 darf nicht l.u. sein! Es gibt also einen Vektor $b \in B_2 \setminus B$. Wie vorher. Dann kann b als Linearkombination der Basis B geschrieben werden. ... weil B eine Basis ist, $b \in V$ und Satz 2.5.3. Die Menge $B \cup \{b\}$ ist daher l.a., und dies gilt nach A 2.4.4 auch für die Obermenge B_2 von $B \cup \{b\}$. l.a. $\Leftrightarrow \neg$ l.u.

(c) $\Rightarrow$ (a). Sei $x \in V$ beliebig gewählt. ... Wir unterscheiden zwei Fälle: Für $x \in B$ lässt sich x klarerweise als Linearkombination von B schreiben. Der Koeffizient von x sei 1 und sonst 0. Für $x \notin B$ ist $B \cup \{x\}$ als echte Obermenge von B nach Voraussetzung l.a. ... analog zu $B \setminus \{b\} \subsetneq B$ von „(b) $\Rightarrow$ (a)". Wir wenden Kontraposition von Satz 2.4.6 auf die l.a. Menge $B \cup \{x\}$ und die l.u. Menge B an. Also $x \in [(B \cup \{x\}) \setminus \{x\}] = [B]$.

Das zeigt, dass sich x auch in diesem Fall als Linearkombination von B schreiben lässt. Was ist die Hülle $[B]$? Zusammenfassend gilt: Die l.u. Menge B ist ein Erzeugendensystem von V, also eine Basis von V. $\forall x \in V: x \in [B]$, also $V \subseteq [B] \subseteq V \Rightarrow$ ES. $\square$