1. (a) $\mathcal{C}$ ist ein Ring ($\Rightarrow$ Semi-Ring):

Seien $A, B \in \mathcal{C}$, dann $A \cup B \in \mathcal{C}$?

Fall 1: $|A|, |B| < \infty$, dann $|A \cup B| < \infty$, weil

$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists \varphi_A : A \to \mathbb{N}_{\le n}$ bij.

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists \varphi_B : B \to \mathbb{N}_{\le m}$ bij.

Also, wenn oBdA. $A \cap B = \emptyset$, dann

$|A \cup B| = |\{1, \dots, n+m\}| < \infty$.

Fall 2: $|A^{(c)}|, |B^{(c)}| < \infty$, dann $|(A \cup B)^c| < \infty$, weil

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subseteq A^c, B^c$.

..., dann $A \setminus B \in \mathcal{C}$?

Fall 1: ..., dann $|A \setminus B| \le |A| < \infty$.

Fall 2: ..., dann: $(A \setminus B)^c = (A \cap B^c)^c = A \cup B^c$.

$\mathcal{C}$ ist kein σ-Ring ($\Rightarrow$ σ-Algebra, Dynkin):

Betrachte $\{1\} \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, \{2n+1\} \,\dot\cup\, \cdots =$

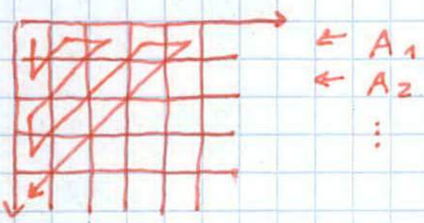
$\dot\bigcup_{n=0}^{\infty} \{2n+1\}$.

$\mathcal{C}$ ist eine Algebra, weil $|\mathbb{N}^c| = |\emptyset| = 0$.

(b) $\mathcal{C}$ ist eine σ-Algebra ($\Rightarrow$ alles):

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, dann $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

Fall 1: $\forall n \in \mathbb{N} : |A_n| \le \aleph_0$:



Fall 2: $\exists k \in \mathbb{N} : (A_k)^c \le \aleph_0$:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \left(\bigcup_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty} A_n \cup A_k\right)^c = \left(\bigcup_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty} A_n\right)^c \cap (A_k)^c \subseteq (A_k)^c.$$

Rest analog zu (a).

(c) $\mathcal{C}$ ist ein Dynkin-System, weil

- $\forall A, B \in \mathcal{C}, B \subseteq A : A \setminus B \in \mathcal{C}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{C} : \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

Sonst nix, weil $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.

(d) $\mathcal{C}$ ist kein Dynkin-System, weil

$\Omega \setminus \{1\} = \{2,3\}$.

$\mathcal{C}$ ist ein Semiring, weil

- $\forall A, B \in \mathcal{C} : A \cap B \in \mathcal{C}$,
- $\forall A, B \in \mathcal{C} : A \subseteq B \Rightarrow$
  $\exists n \in \mathbb{N} : \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} C_k = B \setminus A \wedge \forall k \in \mathbb{N}_{\leq n} : C_k \in \mathcal{C}$:

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \in \mathcal{C}$.

2. Zz: $(R, \Delta, \cap)$ ist ein algebraischer Ring, wobei R ein Mengenring ist.

(a) • Δ ist abgeschlossen, weil in R, „$\cup$" und „$\setminus$" abgeschlossen ist.

• Abelsch durch hinschauen.

• Neutrales Element: $\emptyset$

• Inverses Element: Selbst

„$\cap$" assoziativ laut Definition;

„$\cap$" über „Δ" distributiv:

$(A \Delta B) \cap C = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap C =$

$((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C) =$

$(A \cap C) \setminus (B \cap C) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap C) =$

$(A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

„Δ" assoziativ laut Wahrheitstafel;

3. $A_0 := \{\emptyset, \Omega\}$;

$$\left.\begin{array}{l} A_1 := \{\{1\}, \{2,3\}\} \\ A_2 := \{\{2\}, \{1,3\}\} \\ A_3 := \{\{3\}, \{1,2\}\} \end{array}\right\} \cup A_0 ;$$

$A_\infty := 2^\Omega$;

Weil $|2^\Omega| = 2^{|\Omega|}$, sind wir fertig (die anderen 3 Teilmengen sind keine Algebrae).