Satz 1.9.5 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) In G gibt es genau ein links-neutrales Element. Dieses ist zugleich das einzige neutrale Element in G.

(b) Zu jedem Element $x \in G$ gibt es genau ein links-inverses Element. Dieses ist zugleich das einzige inverse Element von x.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es in gewissen Produkten nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt:
Nach Axiom 2 besitzt G mindestens ein links-neutrales Element e. Von Eindeutigkeit, oder rechts-neutral ist in Axiom 2 aber nicht die Rede. Nach Axiom 3 gibt es zu jedem $x \in G$ mindestens ein $l \in G$ mit $lx = e$ und zu l ebenfalls mindestens ein Element $k \in G$ mit $kl = e$. Das Axiom 3 wird an der Stelle 2-mal angewendet (ohne Eindeutigkeit, oder $xl = lk = e$). Wir berechnen

$$lx = e = kl \overset{2.}{=} k(el) = k((lx)l) \overset{1.}{=} k(l(xl)) \overset{1.}{=} (kl)(xl) = e(xl) \overset{2.}{=} xl, \tag{1.3}$$

$$xe = x(lx) \overset{1.}{=} (xl)x \overset{(1.3)}{=} ex \overset{2.}{=} x. \tag{1.4}$$

Dabei gelten Gleichheitszeichen ohne Hinweis auf ein Axiom oder eine Formel nach den oben getroffenen Voraussetzungen.
Dabei ist Axiom 1 das Assoziativgesetz.
Die für alle $x \in G$ gültige Formel (1.4) liefert, dass das links-neutrale Element e sogar ein neutrales Element ist.

Bei den beiden Gleichheitsketten (1.3) und (1.4), braucht man sich für das Ergebnis bloß Anfang und Ende anzusehen. Um (a) zu beweisen, zeigen wir: Jedes links-neutrale (und erst recht jedes neutrale) Element $e' \in G$ stimmt mit e überein. Für einen Eindeutigkeits-Beweis nimmt man ein festes und ein beliebiges, „anderes" Element, und zeigt deren Gleichheit. Dazu berechnen wir $e'e$ auf zwei Arten, indem wir unterschiedlich argumentieren. ... jeweils einmal mit jedem Element, e und e'. Einerseits gilt $e'e = e'$, da e ein neutrales Element ist. Das wurde oben gezeigt. Andererseits gilt $e'e = e$, da e' ein links-neutrales Element ist. Das ist (scheinbar) schwächer als neutral-neutral, geht aber auch. Wir haben also insgesamt $e' = e$. $e' = e'e = e$.

Nach Axiom 3 und (1.3) gibt es zu jedem $x \in G$ mindestens ein inverses Element l. Die Eindeutigkeit für Inverse wird jetzt gezeigt. Um (b) zu beweisen, zeigen wir: Jedes zu x links-inverse (und erst recht jedes zu x inverse) Element $l' \in G$ stimmt mit l überein. ... wie für das neutrale Element. Wir haben in der Tat

$$l' = l'e \overset{(1.3)}{=} l'(xl) \overset{1.}{=} (l'x)l = el \overset{2.}{=} l.$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeigen, da e ein neutrales Element ist, und das vorletzte Gleichheitszeichen nach Voraussetzung. Man nehme Anfang und Ende, $l' = l$ und die Eindeutigkeit der Inversen ist nun auch gezeigt. □