Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Conrad Gößnitzer, Michael Innerberger

Numerik von Differentialgleichungen - Kreuzlübung 8

Übungstermin: 20.5.2020 13. Mai 2020

Aufgabe 36:
Konstruieren Sie ein Adamsverfahren mit $k = 2$, $s = 1$ und $r = 1$ und variablen Schrittweiten $h_j := t_j - t_{j-1}$ der Form

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^{2} \beta_{i,j}(h_{i-1}, h_i, h_{i+1}) f_{i-j}, \qquad f_{i-j} := f(t_{i-j}, y_{i-j}). \tag{1}$$

Zur Bestimmung der Konstanten $\beta_{i,j}$ können Sie ein Computeralgebrasystem (wie z.B. Maple) verwenden. Vergleichen Sie Ihr Verfahren mit den Werten aus dem Vorlesungsskript für äquidistante Schrittweiten.

Aufgabe 37:
Zur Konstruktion von linearen k-Schritt Verfahren für die Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ kann man folgendermaßen vorgehen: Sei $\{t_0, \ldots, t_N\}$ ein uniformes Gitter mit Gitterweite h. Gegeben seien die Werte $y_\ell, \ldots, y_{\ell+1-k}$. Zur Berechnung von $y_{\ell+1}$ sei $p_\ell \in \Pi_k$ das Polynom, welches die Bedingungen

$$p_\ell(t_{\ell+1-j}) = y_{\ell+1-j}, \qquad j = 0, \ldots, k, \tag{2a}$$

und

$$p'_\ell(t_{\ell+1}) = f\left(t_{\ell+1}, y_{\ell+1}\right) \tag{2b}$$

erfüllt. Dann definieren wir $y_{\ell+1} := p_\ell(t_{\ell+1})$.

a) Geben Sie die Konstanten in Gleichung (5.2) des Vorlesungsskriptes für dieses Verfahren abstrakt an und zeigen Sie, dass diese unabhängig von h sind. Unter welchen Voraussetzungen ist das Verfahren wohldefiniert?

b) Geben Sie die Koeffizienten der Verfahren für $k = 1, 2, 3$ explizit an.

c) Beweisen Sie, dass

$$\tilde{\eta}_\ell(p, h) := \sum_{j=0}^{k} \left\{ h\beta_j p'(t_{\ell+1-k} + jh) - \alpha_j p(t_{\ell+1-k} + jh) \right\} \tag{3}$$

bei diesen Verfahen für alle $p \in \Pi_k$ verschwindet. Welche Konsistenzordnung haben diese Verfahren?

Aufgabe 38:
Schreiben Sie ein Programm, welches für $k \in \mathbb{N}$ das explizite bzw. implizite k-Schritt Verfahren maximaler Konsistenzordnung berechnet. Geben Sie dann speziell das explizite bzw. implizite 2- und 3-Schritt Verfahren maximaler Ordnung an.

Aufgabe 39:
Sei

$$\rho(\lambda) := (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2(\lambda - \lambda_3)^3 \tag{4}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

a) Geben Sie alle Lösung der zugehörigen linearen Differenzengleichungen explizit an.

b) Zeigen Sie, dass die in a) gefundenen Lösungen wirklich alle Lösungen der Differenzengleichung sind. Führen Sie dazu die Schritte im Beweis von Theorem 5.25 des Vorlesungsskriptes explizit für dieses Problem durch.

Aufgabe 40:
Implementieren Sie einen ODE-Löser auf Basis eines beliebigen, expliziten linearen Mehrschrittverfahrens mit k Schritten. Übergabeparameter sollten die Parameter $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ und $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$, die Schrittweite h sowie die notwendigen Daten zur Beschreibung des Anfangswertproblemes sein. Testen Sie Ihr Programm anhand einiger der bisher in den Übungen verwendeten Anfangswerprobleme und den expliziten Adams-Verfahren aus dem Vorlesungsskript. Zur Berechnung der benötigten Startwerte für das Mehrschrittverfahren verwenden Sie ein geeignetes Runge-Kutta Verfahren. Testen Sie auch das Beispiel Example 5.17 des Vorlesungsskriptes.