7.5 Zeigen Sie, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend und bijektiv ist. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ der Funktion $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$.

Beweis. Laut Korollar 7.2.9, reicht es zu zeigen, dass $\forall x \in (0, \pi] : \cos'(x) < 0$. Wir zeigen also, dass $\sin x > 0$.

Mit den Summensätzen 6.9.3 (viii), folgt

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \quad \text{und} \quad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x.$$

Weil $\frac{\pi}{2}$, laut Definition 6.9.9, die kleinste positive Nullstelle von cos ist, folgt gemeinsam mit Satz 6.9.10 (ii), dass

$$\sin 0 = 0 \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Weil cos die Steigung von sin beschreibt, muss wegen $\cos 0 = 1$, $\forall x \in (0, \pi/2] : \sin x > 0$.
Da cos, laut Satz 6.9.3 (vii), symmetrisch um $x = 0$ sein, ist sin, wegen der oberen Abhängigkeit, um $x = \pi/2$, symmetrisch.

Daraus folgt nun auch die Injektivität. Die Surjektivität folgt aus dem Zwischenwertsatz 6.2.6. □

$$\arccos' y = \arccos'(\cos x) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\cos' x} = \frac{1}{-\sin x} \overset{(2)}{=} -\sqrt{\frac{1}{1 - \cos^2 x}} = -\sqrt{\frac{1}{1 - y^2}}.$$

(1) $\Leftrightarrow$ Satz 7.1.12, (2) $\Leftrightarrow$ Satz 6.9.3 (vi).

7.6 Man zeige, dass $\tanh : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ bijektiv und streng monoton wachsend ist. Skizze!

Weiters berechne man die Ableitung der entsprechenden Umkehrfunktion areatanh.

Beweis. Weil $\mathbb{R}$, laut Bemerkung 6.2.1, ein Intervall ist, zeigen wir für die Monotonie, dass $\forall x \in \mathbb{R} : \tanh' x > 0$. Dazu berechnen wir

$$\sinh'(x) = \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right)' = \left(1/2 \cdot e^{x} - 1/2 \cdot e^{-x}\right)' =$$

$$1/2 \cdot e^{x} + 1/2 \cdot e^{-x} = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \cosh(x).$$

Analog folgt $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
Laut Quotientenregel 7.1.7. folgt

$$\tanh'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} =$$

$$\frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)^2 = 1 - \tanh^2(x).$$

Daher ist tanh monoton und ...

somit auch Injektiv.
Aus seiner Definition, erkennt man, mit Korollar 6.1.8, unschwer seine Stetigkeit. Daher ist, laut Korollar 6.5.3, $\tanh(\mathbb{R})$ ein Intervall und in diesem, laut Zwischenwertsatz 6.2.6 auch Surjektiv.
Um $\tanh(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ zu zeigen, berechnen wir

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x)}}{\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{\exp(-x)}{\exp(x)}}{1 + \ldots} \overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^2}{1 + \ldots} \overset{(2)}{=} \frac{1 - \left(\frac{1}{\lim \exp(x)}\right)^2}{1 + \ldots} \overset{(3)}{=} \frac{1 - 0^2}{1 + \ldots} = 1.$$

(1) $\Leftrightarrow$ Satz 6.9.3 (i), (2) $\Leftrightarrow$ Stetigkeit und Proposition 6.1.4, (3) $\Leftrightarrow$ Bemerkung 5.3.9 (v).

Analog rechnet man

$$\ldots = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(-x)}}{\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(-x)}} = \ldots \overset{(1)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp^2(x) - 1}{\ldots + 1} \overset{(2)}{=}$$

$$\frac{\lim \exp^2(x) - 1}{\ldots + 1} = -1. \qquad \square$$

$$\operatorname{areatanh}'(y) = \operatorname{areatanh}'(\tanh x) = \frac{1}{\tanh' x} =$$

$$\frac{1}{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

7.9 Berechnen Sie ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos nx}{\sin(n^2 x^2)}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{\ln x^n} \cdot e^{1/x^2}} = \frac{1}{\exp(\lim\limits_{x \to 0} n \ln x + \frac{1}{x^2})}.$$

Der innere „lim" wird weiter berechnet:

$$\lim_{x \to 0} n \ln x + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 n \ln x + 1}{x^2} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\lim_{x \to 0} x^2 n \ln x + 1\right)$$

$$= \cdots \left(\lim_{x \to 0} \frac{n \ln x}{1/x^2} + 1\right) \overset{(2)}{=} \cdots \left(\lim_{x \to 0} \frac{n/x}{-2/x^3} + 1\right) =$$

$$\cdots \left(\lim_{x \to 0} -\frac{n}{2} \cdot x^2 + 1\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \overset{(3)}{=} +\infty.$$

(1) ⇔ Bemerkung 5.3.8 (iii), (2) ⇔ Regel von de L'Hospital 7.2.14, weil $\lim_{x \to 0} (1/x^2)' = +\infty \neq 0$, (3) ⇔ Bemerkung 5.3.8 (v).

Wieder laut (3) ist der finale GW dann 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot 1/x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{2} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos nx}{\sin(n^2 x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{n \sin(nx)}{n^2 2x \cos(n^2 x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{n\, 2x \cos(n^2 x^2)} =$$

$$\frac{1}{2n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(n^2 x^2)} = \frac{1}{2n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{n \cos(nx)}{1} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

7.10 Die Exponentialfunktion hat eine in der Theorie der Differenzialgleichungen wichtige Eigenschaft: $(e^{ax})' = a e^{ax}$.

Nun sei $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die $f'(x) = a f(x)$ erfüllt. Man zeige: $f(x) = c e^{ax}$ für eine reelle Konstante c.

Hinweis: Differenzieren Sie $f(x) e^{-ax}$!

Beweis. $(f(x)e^{-ax})' = f'(x)e^{-ax} + f(x)(-a)e^{-ax} =$
$a f(x) e^{-ax} - a f(x) e^{-ax} = 0$,

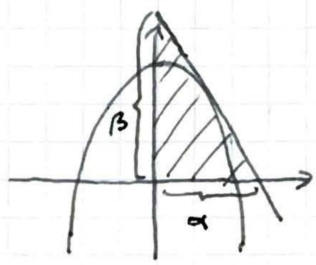
also ist $f(x)e^{-ax}$ eine Konstante c.
Infolge ist

$$f(x)e^{-ax} = ce^{ax} \cdot e^{-ax} = ce^{ax-ax} = ce^{0} = c$$

sinnvoll. $\square$

7.14 Für welchen Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten (daher $a,b > 0$) auf der Parabel $y = 4 - x^2$ besitzt das Dreieck, das von der Tangente in (a,b) an die Parabel und den Koordinatenachsen begrenzt wird minimalen Flächeninhalt?

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass der Kandidat fürs lokale Extremum tatsächlich ein Minimum ist!



Sei $f(x) = 4 - x^2$ jene Parabel. Die Steigung an der Stelle x beträgt $f'(x) = -2x$.

Für jenen Punkt (a,b) gilt also

$$b = 4 - a^2 \quad \text{und} \quad f'(a) = -2a.$$

Wir beschreiben die Tangente von (a,b) durch

$$g_a(x) = (-2a)x + \beta.$$

Daher bekommen wir

$$b = g_a(a) = (-2a)a + \beta \Rightarrow \beta = b + 2a^2.$$

Wir setzen für β ein und bekommen

$$g_a(x) = (-2a)x + (b + 2a^2).$$

Nachdem α den Wert von x bei $g_a(x) = 0$ beschreibt, folgt

$(-2a)\alpha + (6+2a^2) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{6+2a^2}{2a}$.

Die Fläche A, unseres Dreiecks ist durch $\frac{\alpha \cdot \beta}{2}$ zu bestimmen, also setzen wir ein

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6+2a^2}{2a} \cdot (6+2a^2) \right) = \frac{(6+2a^2)^2}{4a} = \frac{((4-a^2)+2a^2)^2}{4a} =$$

$$\frac{(4+a^2)^2}{4a} = \frac{16+8a^2+a^4}{4a} = \frac{1}{4} \cdot a^3 + 2a + 4a^{-1} = A(a).$$

Um unser Extremum zu bestimmen, leiten wir nach a ab,

$$A'(a) = \frac{3}{4} \cdot a^2 + 2 - 4 \cdot a^{-2},$$

und setzen

$$\dots = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot a_0^4 + 2a_0^2 - 4 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 8a - 16 = 0.$$

Daher folgt $a = 4/3$ (nicht -4) und somit $a_0 = \sqrt{a} = 2/\sqrt{3}$.
Unser gesuchte Punkt ist also

$$(a_0, b_0) = (2/\sqrt{3}, 4 - (2/\sqrt{3})^2) = (2/\sqrt{3}, 8/3).$$

Dieses Extremum ist ein Minimum, weil

$$A''(a) = \frac{3}{2} \cdot a + 8 \cdot a^{-1} \Rightarrow A''(a_0) > 0.$$

7.15 Sei $\alpha > 0$. Man bestimme mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} < \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(1+x)^\alpha} \text{ für alle } x > 0,$$

und mit Hilfe dieser Ungleichung die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Beweis. (a) Seien $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$, $a := x$, und $b := x+1$.
Laut Mittelwertsatz 7.2.6, $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Wir berechnen 3-mal:

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1}{(x+1)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha}}{(x+1)-x} = -\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha}\right).$
- $f(\xi) = \left(\frac{1}{\xi^\alpha}\right)' = (\xi^{-\alpha})' = (-\alpha)(\xi^{-\alpha-1}) = -\frac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}}.$
- $f'(b) = \left(\frac{1}{(x+1)^\alpha}\right)' = ((x+1)^{-\alpha})' = (-\alpha)(x+1)^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}}.$

Daher folgt $f'(\xi) < f'(b) \Leftrightarrow$

$$-\frac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}} < -\frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi^{\alpha+1}} > \frac{1}{(x+1)^{\alpha+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{\xi}\right)^{\alpha+1} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1}{\xi} > 1 \Leftrightarrow x+1 > \xi \Leftarrow \xi \in (a,b).$$

Zuletzt noch

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) < f'(b) \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha}\right) < -\frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}}.$$

(b) Wir identifizieren $(1+x)$, mit $n \leq m \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} < \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=3}^{m} \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^\alpha} = \dots$$

$$\dots = 1 + \sum_{n=3}^{m} \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \sum_{n=3}^{m+1} \frac{1}{(n-1)^\alpha} = \dots - \sum_{n=3}^{m} \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{m^\alpha} =$$

$$1 - \frac{1}{m^\alpha}.$$

Wenn m gegen $+\infty$ geht, dann ist die Reihe, laut Lemma 3.3.1 (iii) konvergent. $\square$

7.16 Sei $P_n(x) := 2^{-n}(n!)^{-1}((x^2-1)^n)^{(n)}$ das n-te Legendre-Polynom für $n \geq 0$.

(i) Bestimme $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$.

(ii) Bestimme $P_n(0)$.

(iii) Bestätige $(x\,f(x))^{(n)} = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$ für eine n-fach differenzierbare Funktion f.

(iv) Bestätige $P'_{n+1}(x) = x P'_n(x) + (n+1) P_n(x)$.

Anmerkung: Mit (ii) und (iv) lassen sich die Legrende-Polynome rekursiv berechnen.

(i) $P_0(x) = 2^{-0}(0!)^{-1}((x^2-1)^0)^{(0)} = 1$,

$P_1(x) = 2^{-1}(1!)^{-1}((x^2-1)^1)^{(1)} = \frac{1}{2}(x^2-1)' = \frac{2x}{2} = x$,

$P_2(x) = 2^{-2}(2!)^{-1}((x^2-1)^2)^{(2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^4-2x^2+1)'' =$
$1/8 \cdot (4\cdot 3\cdot x^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot x^0) = 3/2 \cdot x^2 - 1/2$.

(ii) IV: $(x^k)^{(n)} = \frac{k!}{(k-n)!}\cdot x^{k-n}$.

IA: $(x^k)^{(0)} = x^k = \frac{k!}{(k-0)!}\cdot x^{k-0}$

IS: $(x^k)^{(n+1)} = ((x^k)^{(n)})^{(1)} \overset{(IV)}{=} \left(\frac{k!}{(k-n)!}\cdot x^{k-n}\right)^{(1)} = (k-n)\frac{k!}{(k-n)!}\cdot x^{k-n-1}$

$= \frac{k!}{(k-n-1)!}\cdot \ldots = \frac{k!}{(k-(n+1))!}\cdot x^{k-(n+1)}$.

Wir berechnen

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(x^2)^k\right)^{(n)} = \ldots$

$$\dots = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (x^{2k})^{(n)} =$$

$$\frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} x^{2k-n} = \dots$$

Das Legrende-Polynom ist ja immer noch ein Polynom, also in der Form ($m \in \mathbb{N}$)

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 x^0.$$

Für $x = 0$ fallen alle Summanden weg, bis auf a_0.
Wir unterscheiden in 2 Fälle:

- Fall I: n ist gerade.

Da uns bloß der Vorfaktor von x^0 interessiert, können wir $2k - n = 0 \Leftrightarrow 2k = n$ setzen. Weil n gerade ist, macht folgender Ausdruck Sinn:

$$\dots = \frac{1}{2^n n!} \binom{n}{n/2} (-1)^{n-n/2} \frac{n!}{(n-n)!} x^{n-n} =$$

$$\frac{1}{2^n n!} \binom{n}{n/2} (-1)^{n/2} n! = P_n(0) \text{ für } \exists k \in \mathbb{N} : 2k = n.$$

- Fall II: n ist ungerade.

$2k = n$ ist niemals erfüllt, also sind alle Summanden, also insbesondere das Polynom selbst, gleich

$$0 = P_n(0) \text{ für } \exists k \in \mathbb{N} : 2k + 1 = n.$$

(iii) IV: $(x f(x))^{(n)} = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$.

IA: $(x f(x))^{(0)} = x f(x) = x f^{(0)}(x) + 0 \cdot f^{(0-1)}(x)$.

IS: $(x f(x))^{(n+1)} = ((x f(x)^{(n)})^{(1)} = 1 \cdot f^{(n)}(x) + x \cdot f^{(n+1)}(x)$

$+ n \cdot f^{(n-1+1)}(x) = x f^{(n+1)}(x) + (n+1) f^{((n+1)-1)}(x).$

(iv) $P_{n+1}'(x) = x P_n'(x) + (n+1) P_n(x) \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot ((x^2-1)^{n+1})^{(n+1)}\right)' = x\left(\frac{1}{2^n n!} \cdot ((x^2-1)^n)^{(n)}\right)' +$

$(n+1)\left(\frac{1}{2^n n!} \cdot ((x^2-1)^n)^{(n)}\right) \Leftrightarrow$

$\cancel{\frac{1}{2^n n!}} \cdot \frac{1}{2(n+1)} \cdot ((x^2-1)^{n+1})^{(n+2)} = x \cancel{\frac{1}{2^n n!}} \cdot ((x^2-1)^n)^{(n+1)} +$

$(n+1) \cancel{\frac{1}{2^n n!}} \cdot ((x^2-1)^n)^{(n)} \Leftrightarrow$

$\cancel{\frac{1}{2(n+1)}} \cdot ((\cancel{2}x \cancel{(n+1)} (x^2-1)^n)^{(n+1)} = x((x^2-1)^n)^{(n+1)} +$

$(n+1)((x^2-1)^n)^{(n)} \Leftarrow$ (iii)

7.17 Bekannterweise ist $\sin x$ als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ entwickelbar. Man verwende das Taylorsche Restglied um folgende Fragestellung zu beantworten:

Wie groß muss man n wählen, sodass die Differenz des n-ten Taylorpolynoms mit Anschlussstelle 0 von $\sin x$ zur Funktion $\sin x$ auf $[-3, 3]$ höchstens 10^{-6} beträgt?

Das Taylorsche Polynom:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y)$$

Das n-te Restglied:

$$f(x) - T_n(x) =: R_n(x) = \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Wenn $f = \sin$, dann kann $f^{(n+1)}(\xi)$ höchstens 1 sein.
Im Invervall $[-3, 3]$ kann x klarerweise höchstens 3 sein.
Wir bestimmen also das höchste n für

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-6}.$$

Anscheinend ist $n = 17$.
Das gilt auch $\forall n \geq 17$, weil dann $\frac{3}{n+1} < 1$ (das, was dazu multipliziert wird.

7.19 Sei f eine reellwertige stetige Funktion, die auf einem Intervall I definiert ist und die im Inneren von I ableitbar ist. Man beweise, dass f genau dann konvex ist, wenn ihre Ableitung f' monoton wachsend ist.

Wenn für f noch zusätzlich die zweite Ableitung im Inneren von I existiert, wie lässt sich dann die Konvexität durch f'' charakterisieren?

Hinweis: Für die $\Rightarrow$ Richtung verwende man letzte Charakterisierung im Übungsbeispiel 6.41. Für die andere Richtung verwende man den Mittelwertsatz.

Beweis. „$\Rightarrow$" Laut Übungsbeispiel 6.41, gilt

$\forall x_1, x_2, x \in I: x_1 < x < x_2 \Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

oBdA. Sei $|I| \geq 3$. Laut Fakta 5.3.8 (1), folgt:

- $$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

- $$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \geq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

für alle x_1, x_2, x I, mit $x_1 < x < x_2$. Daher ist also $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

„$\Leftarrow$" Wir wenden den Mittelwertsatz 2-mal an, für die Teilintervalle $[x_1, x], [x, x_2] \subseteq I$.

$\exists \xi_1 \in (x_1, x), \xi_2 \in (x, x_2):$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f(\zeta_1) \leq f'(\zeta_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \qquad \square$$