Serie 3

Thema: Bernoullische[1] Differentialgleichung

Bernoullische Differentialgleichungen sind von der Bauart:

$$y' = f(t)y + g(t)y^n$$

Zwei klassische Lösungszugänge:

1. die Substitution $\widetilde{y} := y^{1-n}$ überführt die Gleichung in eine lineare ODE
2. Man verwendet die Variation-der-Konstanten-Formel: Sei $Y(t)$ eine (nichttriviale) Lösung der Gleichung $y' = f(t)y$. Der Ansatz $y(t) = Y(t)c(t)$ führt auf eine separierbare ODE für c.

Aufgaben

$$y' - 2ye^t = 2\sqrt{y}e^t \tag{1}$$

$$2y' \ln t + y/t = \frac{\cos t}{y} \tag{2}$$

$$2y' \sin t + y \cos t = y^3 \sin^2 t \tag{3}$$

[1]eine ganze Sippschaft: Bernoulli, Johann, 1667–1748, Bernoulli, Jacob, 1654–1705 (Bruder von Johann), Bernoulli, Daniel, 1700–1782 (Sohn von Johann); zu erwähnen ist noch Nikolaus (II). Die Differentialgleichung ist nach Jacob benannt.

Lösungen

$$\sqrt{y} + 1 = Ce^{e^t} \tag{1}$$

$$y^2 \ln t = (C + \sin t) \tag{2}$$

$$y^2 \sin t (C - t) = 1 \tag{3}$$