ÜBUNGEN ZU “PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN” WS 2020
BLATT 8 (19. 11. 2020), SKRIPTUM BIS ABSCHNITT 6.1

EDUARD NIGSCH, CLAUDIA RAITHEL

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Betrachten Sie die Poisson-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Bestimmen Sie die schwache Formulierung für das Randwertproblem (1).

(b) Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in V$, wobei $V := \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v(x)dx = 0\}$, für das RWP (1). *Hinweis:* Poincaré-Ungleichung aus Aufgabe 4 von letzter Woche.

(c) Diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen und klassischen Lösungen von (1) falls $\int_\Omega f(x)dx \neq 0$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Zeigen Sie, dass die *biharmonische Gleichung*

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega\,, \quad u = \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

eine schwache Lösung besitzt, falls $f \in L^2(\Omega)$. Hierbei ist ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$. Anleitung:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die schwache Formulierung des obigen Randwertproblems

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f v dx \text{ für alle } v \in H_0^2(\Omega)$$

lautet.

(b) Zeigen Sie, dass $a(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx$ eine stetige und koerzive Bilinearform ist. Verwenden Sie hierbei folgende Ungleichung: Für alle $u \in H_0^2(\Omega)$ gilt $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$.

(c) Zeigen Sie die Existenz einer schwachen Lösung des Randwertproblems.

3. Sei $\Omega = (0,1)$. Lösen Sie das folgende Problem: Gesucht ist ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega a(x)u'(x)v'(x) - v(x)dx = 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei $a(x) = \mathbb{1}_{(0,1/2]}(x) + 2 \cdot \mathbb{1}_{(1/2,1)}(x)$.

4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und im ersten Argument stetig differenzierbar mit $f_u(u,x) \geq 0$ für alle $(u,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$, und $\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

eduard.nigsch@tuwien.ac.at, claudia.raithel@tuwien.ac.at.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Delta u = f(u, x) \text{ in } \Omega\,, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega$$

höchstens eine klassische Lösung besitzt (Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung).

(b) Finden Sie für $n = 1$ ein Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f'(u) < 0$ für alle u so, dass

$$u'' = f(u) \text{ in } \Omega\,, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

nicht eindeutig lösbar ist.