A 6.1.1 Gg: $\mathcal{A} = r + X \subseteq V$ affiner Raum;

(a) Sei $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.

Zz: $\mathcal{A}_1$ ist affiner UR von $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ und $\forall a, b, c \in \mathcal{A}_1 : c + [a-b] \subseteq \mathcal{A}_1$.

„$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{A}_1$ affiner UR von $\mathcal{A}$. Insbesondere, ist $\mathcal{A}_1$ ein affiner Raum, d.h.

$\exists s \in V \; \exists U \in Sub(V) : \mathcal{A}_1 = s + U$, sowie

$s \in \mathcal{A}$ und $U \subseteq X$.

$\mathcal{A} \neq \emptyset$, weil $s + 0 \in \mathcal{A}_1$.

Seien $a, b, c \in \mathcal{A}_1$.

U lässt sich als $\{x - y \mid x, y \in \mathcal{A}_1\}$ darstellen und

$\exists x \in U : c = s + x$.

Weil $a, b \in \mathcal{A}_1$ und $x \in U$, gilt $x + [a-b] \subseteq U$.

$$\underbrace{s + (x}_{c} + \underbrace{[a-b]}_{\text{UR von } U}) \subseteq \mathcal{A}_1 .$$

„$\Leftarrow$" Weil $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, $\exists s \in \mathcal{A}_1 : s \in \mathcal{A}$.

Wähle $U := \{x - y \mid x, y \in \mathcal{A}_1\}$.

Zz: $\mathcal{A}_1 = s + U$:

„$\subseteq$" Sei $a \in \mathcal{A}_1$, so gilt

$$a = s + \underbrace{(a - s)}_{\in U, \text{ weil } a, s \in \mathcal{A}_1} \in s + U .$$

„$\supseteq$" Sei $a \in s + U$, also $\exists x, y \in \mathcal{A}_1$:

$a = s + (x - y) \in s + [x - y] \subseteq \mathcal{A}_1$.

Sei nun $u \in U$, so gilt $s + u \in \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
Weil $s \in \mathcal{A}$, $\exists z \in X : s = r + z$, also
$r + z + u \in \mathcal{A}$. Daher $z + u \in X$ und somit
auch $u \in X$.
U ist tatsächlich ein Unterraum, weil wenn $a, b \in U$,
dann $\exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{A}_1$, sodass $\forall c \in K$:
$a + bc = (x_1 + c(x_2 - y_2)) - y_2$, weil $x_1 + [x_2 - y_2]$
$\subseteq \mathcal{A}$.
Alternativ, sieht man $U \subseteq X$ dadurch, dass $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow$
$\{x - y \mid x, y \in \mathcal{A}_1\} \subseteq \{\tilde{x} - \tilde{y} \mid \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{A}\}$.

(6) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ seien affine UR von $\mathcal{A}$.
Zz: $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow$
$(\forall g_1 \subseteq \mathcal{A}_1 \exists g_2 \subseteq \mathcal{A}_2 : g_1 \parallel g_2) \vee$
$(\forall g_2 \subseteq \mathcal{A}_2 \exists g_1 \subseteq \mathcal{A}_1 : g_2 \parallel g_1)$.

„$\Rightarrow$" Es seien $\mathcal{A}_1 = r_1 + U_1$ und $\mathcal{A}_2 = r_2 + U_2$,
also $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$ (oBdA.).
Sei $g_1 \in \mathcal{A}_1$ eine Gerade, also $g_1 = r_1 + [u_1 - v_1]$.
Daher $u_1, v_1 \in U_2$, also $\exists g_2 = r_2 + [u_1 - v_1] \subseteq \mathcal{A}_2$:
$g_1 \parallel g_2$.

„$\Leftarrow$" Seien nun $u_1, v_1 \in U_1$ und $g_1 := r_1 + [u_1 - v_1]$.
oBdA. gelte bloß, $\exists g_2 = r_2 + [u_2 - v_2] \subseteq \mathcal{A}_2$:
$u_2, v_2 \in U_2$.
Weil $\dim g_1 = 1 = \dim g_2$, folgt $[u_1 - v_1] \subseteq [u_2 - v_2]$
$\Rightarrow [u_1 - v_1] = [u_2 - v_2]$, also $u_1 - v_1 \in [u_2 - v_2] \subseteq U_2$.
Somit gilt $u_1, v_1 \in U_2$.

A 7.2.X

(1) $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$

Stimmt, laut Multiplikationssatz.

(2) $\det(r \cdot g) = r \cdot \det g$

Stimmt nicht, weil r aus jeder Zeile / Spalte der Matrix zu g herausgezogen wird:
$\det(r \cdot g) = r^n \cdot \det g$.

Gegenbeispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 = 2^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\det(f + g) = \det f + \det g$

Stimmt nicht. Betrachte Gegenbeispiel aus (2), mit $\det E_n$ anstatt 2^2 und „+" statt „·".

(4) $\det f = \det\langle B^*, f(B)\rangle$

Stimmt, weil laut Definition von $\det f$ gilt

$$\det f = \frac{[\Delta \circ f^{(n)}](B)}{\Delta(B)} = \frac{\Delta(f^{(n)}(B))}{\Delta(B)} = \frac{\cancel{\Delta(B)} \det\langle B^*, f(B)\rangle}{\cancel{\Delta B}}.$$

(5) $\det f = \det\langle B^*, f(C)\rangle$

Stimmt nicht, weil

$$\det f = \det\langle B^*, f(C)\rangle = \det\langle B^*, C\rangle \underbrace{\det\langle C^*, f(C)\rangle}_{\det f}$$

und i.A. $\det\langle B^*, C\rangle \neq E_n$.

Gegenbeispiel:

$B = E_2$, $C = 2B$, und $f = id_V$, dann

$1 = \det id_V = \det \langle E_2^*, id(2E_2)\rangle = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$

(6) $\det f = \det \langle C^*, f(C)\rangle$

Stimmt, wegen (4).

(7) $f = 0 \Leftrightarrow \det f = 0$

„$\Rightarrow$" Stimmt, weil die Nullmatrix nicht in $GL_n(K)$ enthalten ist, also $\det f = 0$.

„$\Leftarrow$" Stimmt nicht, weil es auch singuläre Matrizen gibt, die nicht die Nullmatrix sind.

(8) f ist injektiv $\Leftrightarrow \det f \neq 0$

Stimmt, weil

f injektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv $\Leftrightarrow \det f \neq 0$.

(9) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \det f \neq 0$

Stimmt, und wird analog zu (8) begründet.

A 7.3.6 $\varphi : GL_n(K) \to GL_n(K)$

(a) $\varphi_A : X \mapsto AXA^{-1}$ ist homomorph $(A \in GL_n(K))$:

$\varphi_A(XY) = AXYA^{-1} = AXA^{-1}AYA^{-1} = \varphi_A(X)\varphi_A(Y)$.

$\ker \varphi_A = \{E_n\}$:

$\varphi_A(E_n) = AE_nA^{-1} = E_n$;

Sei $X \in GL_n(K) \setminus \{E_n\}$, dann

$\varphi_A(X) = \underbrace{(AX)}_{\neq A}A^{-1} \neq E_n$, weil Inversen eindeutig sind.

(b) $\varphi_\psi : X \mapsto \psi(\det X)E_n$ ist homomorph ($\psi : K^\times \to K^\times$ homomorph):

$\varphi(XY) = \psi(\det(XY))E_n = \psi(\det X \det Y)E_n =$
$\psi(\det X)\psi(\det Y)E_n = \psi(\det X)E_n\,\psi(\det Y)E_n =$
$\varphi(X)\varphi(Y)$.

i. A. $\ker \varphi \supseteq SL_n(K)$, bzw. $\{X \in GL_n(K) : \det X \in \ker \psi\}$:

Sei $X \in SL_n(K)$, dann
$\varphi(X) = \psi(\det X)E_n = \psi(1)E_n = 1 \cdot E_n = E_n$.
Sei nun $X \in GL_n(K) \setminus SL_n(K)$, dann
$\varphi(X) = \underbrace{\psi(\det X)E_n}_{\text{i.A. } \neq 1 \text{, außer } \det X \in \ker \psi} = ?$

A 7.4.2 IA: Sei $n=0$, so gilt

$$\prod_{\substack{i<j \\ i,j \in \mathbb{N}^0_{\leq n}}} (x_i - x_j) := 1 = (x_0)^0 = \det V(x_0)$$

IV: $\prod_{\substack{i<j \\ i,j \in \mathbb{N}^\times_{\leq n+1}}} (x_i - x_j) = \det V(x_1, \dots, x_{n+1})$.

Wir wenden Spaltenumformungen an und subtrahieren (links nach rechts) ein Vielfaches der jeweils rechten Spalte von der linken. Die Determinante bleibt dabei unverändert.

$$V_{n+1} = \begin{bmatrix} (x_0)^{n+1} & \cdots & (x_0)^0 \\ \vdots & & \vdots \\ (x_{n+1})^{n+1} & \cdots & (x_{n+1})^0 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (x_1)^{n+1} - (x_1)^n x_0 & \cdots & (x_1)^1 - (x_1)^0 x_0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_{n+1})^{n+1} - (x_{n+1})^n x_0 & \cdots & (x_{n+1})^1 - (x_{n+1})^0 x_0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (x_1)^n (x_1 - x_0) & \cdots & (x_1)^1 (x_1 - x_0) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_{n+1})^n (x_{n+1} - x_0) & \cdots & (x_{n+1})^1 (x_1 - x_0) & 1 \end{bmatrix} =: A.$$

Nun gilt aber laut dem Entwicklungssatz, dass

$$\forall i,j \in \mathbb{N}_{\leq n+1} : \det A = \sum_{k=0}^{n+1} a_{ik} a_{ki}^\# = \sum_{\ell=0}^{n+1} a_{\ell j} a_{j\ell}^\#, \text{ mit}$$

$a_{ki}^\# := \det A_{ik} = (-1)^{i+k} \det \bar{A}_{ik}$, wobei

$$A_{ik} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{00} & & 0 & & a_{(n+1)0} \\ \vdots & A_1 & \vdots & A_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & A_3 & \vdots & A_4 & \vdots \\ a_{(n+1)0} & & 0 & & a_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \text{ } i\text{-te Spalte} \end{array} \quad \text{und } \bar{A}_{ik} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

Wähle nun $i := 0$ und entwickle über die 0-te Spalte:

$$\det A = a_{0(n+1)} \, a_{(n+1)0}^{\#} =$$

$$(-1)^{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n+1} (x_k - x_0) \right] \det \begin{bmatrix} (x_1)^n & \cdots & (x_1)^0 \\ \vdots & & \vdots \\ (x_{n+1})^n & \cdots & (x_{n+1})^0 \end{bmatrix} = \cdots$$

Hierbei wurden aus $A_{0(n+1)}$ jeweils zeilenweise die Faktoren $(x_k - x_0)$ herausgehoben ($\forall k : 1 \leq k \leq n+1$).
Diese müssen jeweils vertauscht ($x_k \leftrightarrow x_0$), bzw. mit (-1) multipliziert werden. Wenn n ungerade ist, ändert dies Nichts, da $n+1$ (gerade) mal multipliziert wird; $(-1)^{n+1}$ fällt weg. Analoges gilt für n ungerade.

$$\cdots \overset{(IV)}{=} \left[\prod_{k=1}^{n+1} (x_0 - x_k) \right] \cdot \left[\prod_{\substack{i<j \\ i,j \in \mathbb{N}^{\times}_{\leq n+1}}} (x_i - x_j) \right] = \left[\prod_{\substack{i<j \\ i,j \in \mathbb{N}^{0}_{\leq n+1}}} (x_i - x_j) \right]. \quad \square$$

A 7.4.8

(a) Zz: $a^*: V \to K: x \mapsto \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$ und $U := [a_1, \dots, a_{n-1}] \subseteq \ker a^*$.

$a^* \in L(V, K)$, laut Definition und der Determinanten-Form-Axiome (i) und (ii).
Sei $x \in U$, so ist $\{a_1, \dots, a_{n-1}, x\}$ l.a. und $\Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = 0$, laut Axiom (iii), bzw. Satz 7.2.12.
Also ist $x \in \ker a^*$.

(b) Zz: U Hyperebene von $V \Leftrightarrow U = \ker a^*$.

„$\Rightarrow$" Zz: $U \supseteq \ker a^*$.
Sei $x \in \ker a^*$.
Weil U eine Hyperebene ist, muss $\dim U = n-1$. Also ist $(a_1, \dots, a_{n-1})$ eine Basis von U.
Wäre nun $x \notin U$, so wäre $\Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, x) \neq 0$, da ja $\{a_1, \dots, a_{n-1}, x\}$ l.u.

„$\Leftarrow$" Zz: $\ker a^* \neq V$, d.h. $\exists x \in V \setminus \ker a^*$.
Nun, $\ker a^* = U = [a_1, \dots, a_{n-1}]$, aber $\dim V = n > n-1$.

(c) (α) Sei $H := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ eine Hyperebene,

so bilden wir eine Linearform

$a^*: V \to K: x \mapsto \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x \right)$, wobei

$\ker a^* = H$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ 2 & 2 & -1 & x_2 \\ 3 & 0 & 2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & x_2 \\ 3 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} +$$

$$2\,(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ 3 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 2 \cdot x_4 - x_3 + x_2 \cdot 3 - 2 \cdot x_2 - x_3 \cdot 2 + x_4 \cdot 3 +$$

$$2\,(2 \cdot x_4 + 3 \cdot x_3 + x_1 \cdot 3 - 2 \cdot x_1 - x_3 - x_4 \cdot 3 \cdot 3) =$$

$$4x_4 - x_3 + 3x_2 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_4 + 6x_3 +$$

$$6x_1 - 4x_1 - 2x_3 - 27x_4 =$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 0.$$

A 7.5.1

(A 3.5.3 α) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Wir berechnen die Kofaktoren:

$$a_{13}^{\#} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)(-3) + (-1) - (-2)(-3) - (-1)2(-1)$$

$$= 3 - 1 - 6 - 2 = -6,$$

$$a_{23}^{\#} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\left[(-3) - (-3) - (-1)2 \right] = -2,$$

$$a_{33}^{\#} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1 + (-2) - 1 - (-2)2 =$$

$$1 - 2 - 1 + 4 = 2,$$

$$a_{43}^{\#} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-\left[(-1) + (-1)(-3) - (-2)(-3) \right] =$$

$$-\left[-1 + 3 - 6 \right] = 4;$$

Wir entwickeln über die 3. Zeile und

$$\det A = \underbrace{a_{31}}_{1} a_{31}^{\#} + \underbrace{a_{32}}_{0} a_{23}^{\#} + \underbrace{a_{33}}_{0} a_{33}^{\#} + \underbrace{a_{34}}_{1} a_{43}^{\#} = -2.$$

Laut Satz 7.5.2 bekommen wir durch $a_{ek}^{\#} / \det A$, die 3. Spalte von A^{-1}: $(3, 1, -1, 2)^T$.

A 7.5.5 $f: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$

(a) $f: (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)^T$. ...

Die Matrix, die f beschreibt, ist $-E_n$. Es gilt also $\det f = (-1)^n$.

(b) $f: (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})^T$.

" ist das Ergebnis von Spaltenvertauschungen auf E_n. Also $\det f = \operatorname{sgn} \sigma$.

(c) $f: (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (x_1, \dots, x_p, -x_{p+1}, \dots, -x_n)^T$.

Nachdem aus der zugehörigen Matrix $(n-p)$-mal (-1) herausgezogen werden kann, um E_n zu erhalten, ist $\det f = (-1)^{n-p}$.

(d) $f: (x_i)_{i=1}^{n\;T} \mapsto (x_1 - x_n, \dots, x_n - x_1)^T$.

Die Matrizen sind

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 & & -1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ 0 & & 1 & -1 & & 0 \\ & & -1 & 1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ -1 & & & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & & & -1 \\ & \ddots & & 0 & & \iddots & \\ & & 1 & & -1 & & \\ 0 & & & 0 & & & 0 \\ & & -1 & & 1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ -1 & & & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

für n gerade, für n ungerade.

Also ist $\det f = 0$.