1. Geg.: Mengenfolge $A_n = B(\frac{(-1)^n}{n}, 0, 1)$,

$B(a,b,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$;

Ges.: $\limsup_n A_n$

$$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n : x^2 + y^2 - 2x\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2} \leq 1\}$$

$$\overset{?}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, \pm 1)\}$$

„$\subseteq$" Zz: $\forall \varepsilon > 0 : x^2 + y^2 \leq 1 + \varepsilon$

$(\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 \leq 1 + 1/n) \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$.

Ww: $\underbrace{|(x^2+y^2) - [(x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2]|}$ $< \varepsilon$ ab einem $k \in \mathbb{N}$.

$$= |2x\frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{k^2}| = 2x\frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{k^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2xk(-1)^k \geq 1 \checkmark \text{ oBdA. } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq (x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2 + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon.$$

„$\supseteq$" Sei $x^2 + y^2 \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

$$(x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2 = x^2 - 2x\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2} + y^2$$

$$\leq \underbrace{1 - 2x\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2} \leq 1}_{2xk(-1)^k \geq 1 \ \Leftrightarrow}.$$

Ges.: $\liminf_n A_n$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2 \leq 1\} = \cdots$$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n : (x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2 \leq 1\}$

$\overset{?}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

„$\subseteq$" Ang.: $x^2 + y^2 \geq 1$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n : \underbrace{(x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2}_{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq 1} \underbrace{- 2x \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2}}_{\forall k \in 2\mathbb{N}-1 : \dots > 0}} > 1 \quad \lightning$$

„$\supseteq$" Sei $x^2 + y^2 < 1$.

$$(x - \frac{(-1)^k}{k})^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2x \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2}$$

$$\leq \frac{1}{k^2} - 2x \frac{(-1)^k}{k} + 1 .$$

Diese Ungleichung gilt für $k \to \infty$, also auch ab einem gewissen $n \in \mathbb{N}$.

2. Gg: $\mathfrak{S}$ σ-Algebra über Ω mit $\forall \omega \in \Omega$: $\{\omega\} \in \mathfrak{S}$,

μ_d direkt $:\Leftrightarrow \exists D \in \{D \in \mathfrak{S} : |D| \leq \aleph_0\} : \mu_d(D^c) = 0$,

μ_c stetig $:\Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) = 0$;

Zz: $\forall \mu$ endliches Maß: $\exists \mu_d$ direkt, μ_c stetig:

$\mu = \mu_d + \mu_c$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $D_n := \{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) > \frac{1}{n}\}$ ist endlich, weil sonst $\exists n \in \mathbb{N} : \mu(D_n) > \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} 1/n = \infty$, aber μ ist endlich $\lightning$

Sei $D := \{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) = 0\}$, dann

$|D| = |\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n| \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |D_n| \leq \aleph_0$.

Sei $A \in \Omega$, dann $A = \underbrace{(A \cap D)}_{\in \mathfrak{S}} + \underbrace{(A \cap D^c)}_{\in \mathfrak{S}}$, also

$\mu(A) = \mu_d(A \cap D) + \mu_c(A \cap D^c)$, wenn für $M \in \mathfrak{S}$

$\mu_d(M) := \mu(M \cap D)$, $\mu_c(M) := \mu(M \cap D^c)$.

μ_d ist direkt, weil $|D| \leq \aleph_0$ und $\mu_d(D^c) = 0$.

μ_c ist stetig, weil $\forall \omega \in \Omega : \mu_c(\{\omega\}) = 0$.

3. Geg.: $A, B, C \in (\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum,

$\mathbb{P}(A) = 0.7$, $\mathbb{P}(B) = 0.6$, $\mathbb{P}(C) = 0.5$,

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4$, $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.2$, $\mathbb{P}(C \cap A) = 0.3$,

$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1$;

Ges.: $\mathbb{P}(A \mid B \cup C)$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))}{\mathbb{P}(B \cup C)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))}{\mathbb{P}(B \cup C)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)} = 2/3.$$

Ges.: $\mathbb{P}(A \mid B \setminus C)$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B \cap C^c)} = 3/4, \text{ weil}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \cap C) \cup (B \cap C^c)) = \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C^c) - \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \cap C^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap C),$$

und analog

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

4. Geg.: Ein Würfel wird 2-mal geworfen.

(a) Ges.: Mengendarstellung von

A ... 1te Augenzahl = 6

B ... 2te Augenzahl = 6

C ... 1te + 2te Augenzahl = 7

$$A = \bigcup_{i=1}^{6} \{(6, i)\}, \quad B = \bigcup_{i=1}^{6} \{(i, 6)\}, \quad C = \bigcup_{i=1}^{6} \{(i, 7-i)\};$$

(b) Zz: A, B, C paarweise, nicht vollständig unabhängig

d.h. $(A, B, C) =: (X_1, X_2, X_3)$, dann

$$\forall i \neq j : P(X_i \cap X_j) = P(X_i) P(X_j),$$

$$\neg \forall \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{E}(I) : \underbrace{P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right)}_{=0} = \underbrace{\prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j})}_{\neq 0}.$$

5. Gg: A, B, C unabhängig.

Zz: A^c, B^c, C^c unabhängig.

Ww: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c \cap (B \cup C)^c) = P((A \cup B \cup C)^c)$$
$$= 1 - P(A \cup B \cup C)$$
$$= 1 - P(A) \cdot P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)$$
$$- P(A \cap B \cap C)$$
$$= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = P(A^c)P(B^c)P(C^c).$$

Der Rest folgt analog.

6. Gg: μ, ν Maße auf $\mathfrak{S}$ Sigmaalgebra.

Zz: $\mathfrak{D} := \{A \in \mathfrak{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$ Dynkin-System i.w.S.

(i) Zz: $A, B \in \mathfrak{D}$, $A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{D}$

$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$.

(ii) Zz: $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$ disjunkt: $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{D}$.

$\mu(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

Gg: μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße

Zz: $\mathfrak{D}$ i.e.S.

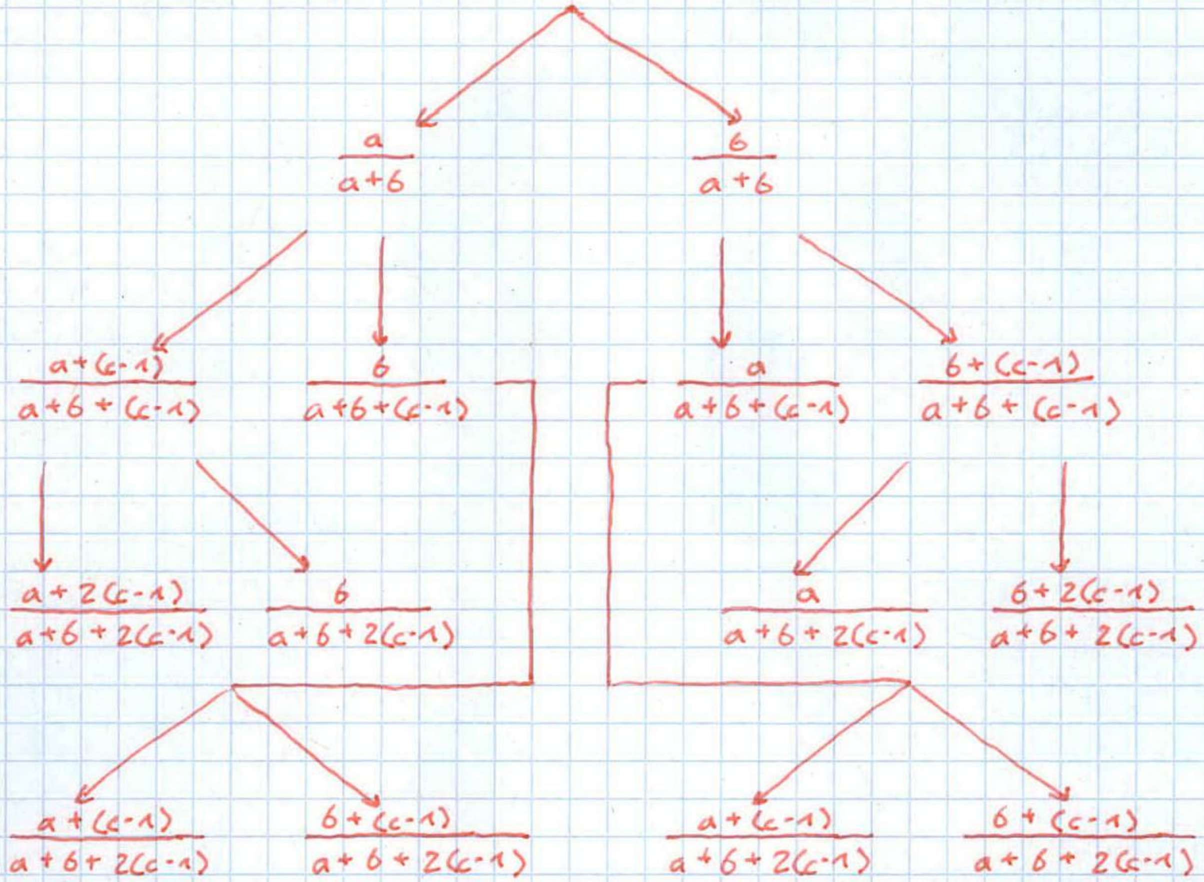
(iii) Zz: $\Omega \in \mathfrak{D}$

$\mu(\Omega) = 1 = \nu(\Omega)$.

7. Geg.: a ... weiße Kugeln, b ... schwarze Kugeln } In Urne

- Kugel ziehen (aus Urne)
- c Kugeln der gezogenen Farbe nachfüllen

} ein Zug



Ges.: P(2te gezogene Kugel = weiß)

$$= \frac{a}{a+b}\,\frac{a+(c-1)}{a+b+(c-1)} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+(c-1)} = \frac{a}{a+b}$$

Ges.: P(3te gezogene Kugel = weiß)

$$= \frac{a}{a+b}\,\frac{a+(c-1)}{a+b+(c-1)}\,\frac{a+2(c-1)}{a+b+2(c-1)} +$$

$$\frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b+(c-1)}\,\frac{a+(c-1)}{a+b+2(c-1)} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+(c-1)}\,\frac{a+(c-1)}{a+b+2(c-1)}$$

$$+ \frac{b}{a+b}\,\frac{b+(c-1)}{a+b+(c-1)}\,\frac{a}{a+b+2(c-1)} = \frac{a}{a+b}$$