Cours de mathématiques

6^e G, cours de base

Nom	Frank Rollinger
Contact	frank.rollinger@education.lu
Etablissement	LTMA
Classe	6G
Année scolaire	2019/20

I Nombres relatifs

1. Rappels

Les nombres relatifs (positifs et négatifs) peuvent être représentés sur une droite graduée, appelée **(axe des) abscisse(s)**.

Propriété 1

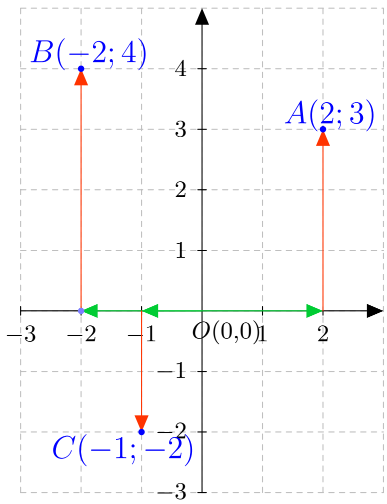
Le nombre 0 est à la fois positif et négatif.

Définition 1

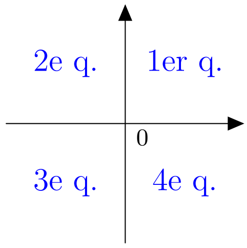
L'**ensemble des entiers relatifs** (positifs et négatifs), noté $\mathbb{Z}$, avec

$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$$

On peut définir un deuxième axe coupant l'axe des abscisses en 0. Cet axe est appelé **axe des ordonnées**.
Exemple :



*vocabulaire : abscisse, ordonnée, origine, coordonnées*Un repère est subdivisé en quatre sous-aires, appelés **quadrants** :



Remarque : Avec 2 axes, on peut repérer des points dans un plan (2d),
Avec 3 axes, on peut repérer des points dans l'espace (3d) [→ section TG].

Définition 2

Dans un repère du plan, la position d'un point est représentée par deux nombres relatifs :

∗) Le premier est lu sur l'axe des abscisses. Ce nombre est appelé **abscisse**.

∗) Le deuxième est lu sur l'axe des ordonnées. Ce nombre est appelé **ordonnée**.

Les deux nombres sont les **coordonnées** du point.

Définition 3

La **valeur absolue** d'un nombre est sa valeur numérique sans tenir compte de son signe.

2. Somme de nombres relatifs

Retenons :
Pour ajouter deux nombres de même signe,

1. on garde le signe et
2. on ajoute leurs valeurs absolues.

Remarque : Lorsqu'on a deux signes consécutifs, on doit mettre des parenthèses.

Retenons :
Pour ajouter deux nombres de signes contraire,

1. on note le signe du nombre relatif ayant la plus grande valeur absolue et
2. on retranche la plus petite valeur absolue de la plus grande.

Définition 4

Deux nombres relatifs dont la somme est 0 sont appelés *nombres opposés*.

Retenons :
Pour effectuer une somme, on peut déplacer les termes dans l'ordre que l'on veut. C'est la commutativité de l'addition.

Définition 5

Deux nombres relatifs sont **opposés** si leur somme est égale à zéro.

Exemples : 3 et -3 sont opposés, ainsi que 1,5 et $-1{,}5$. De même : $-\frac{1}{3}$ est l'opposé de $\frac{1}{3}$.

3. Différence de nombres relatifs

Au lieu de retirer la carte avec -6, on peut ajouter $+6$.
Au lieu de retirer $+7$, on peut ajouter -7 (nombre opposé).
Conclusion : Retirer un nombre relatif revient à ajouter l'opposé de ce nombre :

$$-(+a) = +(-a)$$

$$-(-a) = +(+a)$$

Retenons :
Pour tout nombre a :

$$\begin{array}{rcl} +(+a) & = & +a \\ +(-a) & = & -a \\ -(+a) & = & -a \\ -(-a) & = & +a \end{array}$$

4. Écriture simplifiée

Pour effectuer une suite de calculs, on additionne les nombres deux à deux.
(Faire un exercice pour montrer le regroupement des nombres deux à deux.)

➲ Ex. 101, 102, 105, 106, 107, 109 p.57f (CP)
➲ Ex. 54 p.82
➲ Ex. 55', 56*, 57* p.82
Beispiller maan fir di nei convention anzeféiren

Retenons : (Convention d'écriture)
Dans une suite d'additions de nombres relatifs, on supprime les signes d'addition et les parenthèses autour de chaque nombre. En plus, on peut supprimer le signe d'un nombre positif en début de calcul.

➲ Ex. 58, 59, 60*-62* p.82

Selon disposition du temps : problèmes et énigmes.

5. Multiplication et division de nombres relatifs

5.1. Rappels

Retenons :
Afin d'effectuer une suite de calculs on doit respecter l'ordre suivant :

1. D'abord, on effectue les calculs entre parenthèses,
2. ensuite les multiplications et divisions.
3. Puis les sommes (et les différences).

5.2. Règles de calcul

Activité

$$\begin{aligned} (+2)\cdot(+3) &= +6 \\ (+1)\cdot(+3) &= +3 \\ (+0)\cdot(+3) &= 0 \\ (-1)\cdot(+3) &= -3 \\ (-2)\cdot(+3) &= -6 \end{aligned}$$

Retenons :
Un nombre négatif multiplié par un nombre positif donne un nombre négatif.

$$\begin{aligned} (-2)\cdot(+3) &= -6 \\ (-2)\cdot(+2) &= -4 \\ (-2)\cdot(+1) &= -2 \\ (-2)\cdot(+0) &= 0 \\ (-2)\cdot(-1) &= +2 \\ (-2)\cdot(-2) &= +4 \end{aligned}$$

Retenons :
Pour multiplier/diviser deux nombres relatifs, on détermine d'**abord le signe** du produit :

$$\boxed{\begin{array}{cccl} (+..) & \cdot & (+..) & = +.. \\ (+..) & \cdot & (-..) & = -.. \\ (-..) & \cdot & (+..) & = -.. \\ (-..) & \cdot & (-..) & = +.. \end{array}}$$

Ensuite, on multiplie les **nombres** sans signe.

Remarque : Lorsqu'on a deux signes d'opération $(+; -; \cdot; :)$ consécutifs, alors on doit mettre des parenthèses.

À l'aide de la multiplication $(+3)\cdot(-4) = -12$, on obtient deux divisions :

$$(-12) : (+3) = -4 \text{ et } (-12) : (-4) = +3.$$

Retenons :
Les règles de calcul pour la division correspondent à ceux de la multiplication :

1. D'abord on note le signe,
2. ensuite on divise les nombres sans signe.

Retenons :
Pour multiplier/diviser deux nombres relatifs, on détermine d'abord le signe du produit :

∗) si les deux nombres sont du même signe, le produit est positif.

∗) si les deux nombres sont de signes contraires, le produit est négatif.

Ensuite, on multiplie les deux nombres sans signe.

A l'aide de la multiplication $(+3)\cdot(-4) = -12$, on obtient deux divisions :

$$(-12) : (+3) = -4 \text{ et } (-12) : (-4) = +3.$$

De plus :

$$(-2)\cdot(-5) = +10 \Rightarrow (+10) : (-2) = -5$$

Par conséquent :

$$\boxed{\begin{array}{lll} (+..) & \cdot(+..) & = +.. \\ (+..) & \cdot(-..) & = -.. \\ (-..) & \cdot(+..) & = -.. \\ (-..) & \cdot(-..) & = +.. \end{array}}$$

Remarque :

- $(-12) : (+3) = \dfrac{-12}{+3} = -\dfrac{12}{3}$
- $(+10) : (-2) = \dfrac{+10}{-2} = -\dfrac{10}{2}$
- $(-12) : (-4) = \dfrac{-12}{-4} = +\dfrac{12}{4}$

Retenons :
Quand on multiplie plusieurs nombres relatifs, alors le signe du produit est

∗) positif, si le nombre de facteurs négatifs est pair.

∗) négatif, si le nombre de facteurs négatifs est impair.

➾ Ex.45 p.18
➾ Ex.87 p.21 (problème)

Exemple
Comparer les calculs suivants :

$$\begin{aligned} &(-25)\cdot(-17)\cdot(+4) \\ &= (+425)\cdot(+4) \\ &= 1\,700 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\underbrace{(-25)\cdot(+4)}_{=-100}\cdot(-17) \\ &= 1\,700 \end{aligned}$$

Pour faciliter le calcul on peut regrouper les facteurs :

Propriété 2 (Commutativité de la multiplication)

Multiplier plusieurs nombres relatifs peut se faire dans n'importe quel ordre.

Le carré d'un nombre

Comparer les calculs suivants :

$$\begin{array}{rl} & (-4)^2 \\ = & (-4)\cdot(-4) \\ = & 16 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & -4^2 \\ = & -4\cdot 4 \\ = & -16 \end{array}$$

Dans le premier exemple, le carré se rapporte à tout ce qui est écrit entre parenthèses ; il faut multiplier -4 par -4. Dans le deuxième exemple, le carré se rapporte seulement au nombre 4 et non pas au signe parce que 4 est le seul nombre qui se trouve en-dessous de l'exposant 2. Le signe est copié (une fois) et le nombre 4 est multiplié par 4.

Définition 6

Dans une expression du type a^n, a est appelé la <u>base</u> et n l'<u>exposant</u>.

Effectuer les calculs suivants :

$$3+(-7)^2 = \qquad (3-7)^2 : 8+5 =$$

Retenons :
On effectue d'abord les calculs entre parenthèses, puis les carrés et ensuite les multiplications/divisions avant les sommes/soustractions.

Ex. 115/116/119 p.60 (CP)

Exercices

1 Construire une droite graduée (axe des abscisses) et y placer le plus précisément possible les événements suivants :

A) le temple de Jérusalem est détruit en 70 après Jésus-Christ ;
B) Jules César naît en 100 avant J.-C. ;
C) Constantin crée Constantinople en 324 après J.-C. ;
D) Alexandre le Grand meurt en 324 avant J.-C.

2 Construire une droite graduée et placer les points suivants.

$$A(+3); B(-3); C(-3{,}5);$$

$$D(+3{,}5); E(+2{,}5); F(-2{,}5).$$

3 Construire une droite graduée et placer les points suivants.

$$M(+200); N(-400); P(-250);$$

$$Q(+300); R(+50).$$

4 Construire une droite graduée et placer les points suivants.

$$S(+3\,500); T(-4\,000); U(-1\,500);$$

$$V(+3\,000); W(-2\,500).$$

5 Recopier et compléter par « $<$ » ou « $>$ ».

a) $-5{,}5 \ldots -2{,}5$
b) $+2{,}5 \ldots -5{,}5$
c) $-4 \ldots +4{,}5$
d) $-5{,}5 \ldots -0{,}5$
e) $+1{,}5 \ldots -1{,}5$
f) $-0{,}5 \ldots +1{,}5$

6 Ranger par ordre croissant.

$$+3{,}5;\ -6;\ -6{,}5;\ +4;\ -4{,}5;\ -4;\ -7.$$

7 Ranger par ordre décroissant.

$$+8{,}72;\ -4{,}3;\ +8{,}6;\ +8{,}5;\ 0;\ -4{,}72.$$

8 Si possible, compléter par un entier relatif tel que l'inégalité soit vraie.

a) $4 < \ldots < 6$
b) $-4 < \ldots < -2$
c) $-2 < \ldots < 0$
d) $-1 < \ldots < 1$
e) $-1{,}1 < \ldots < -2{,}1$
f) $-7{,}1 < \ldots < -6{,}9$

9 Trouver, si possible, un nombre :

a) négatif plus petit que (-15) ;
b) négatif plus grand que (-4) ;
c) plus petit que (-4) et plus grand que (-7) ;
d) plus petit que (-3) et plus grand que $(+1)$;
e) plus petit que 0 et plus grand que (-4) ;
f) plus petit que (-7) et plus grand que (-5) ;

10 Dans quel quadrant sont situés les points suivants ?

$$A(2{,}6; -3);\ B(-2; 3{,}4);$$

$$C(-2{,}6; -3{,}5);\ D(6{,}4; 2{,}3).$$

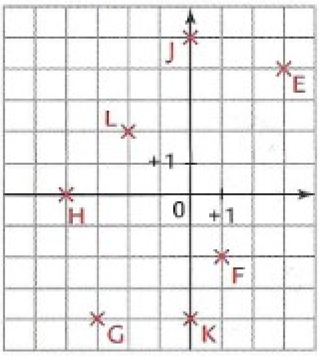
11 Dans quel quadrant sont situés les points suivants ?

$$P(+3\,000; -500);\ Q(-500; -3\,000);$$

$$R(-500; +3\,000);\ S(+100; +200).$$

12 Soit la figure ci-dessous.

a) Quelle est l'abscisse de E ?
b) Quelle est l'ordonnée du point E ?
c) Quelles sont les coordonnes des autres points ?



13 Soit la figure ci-dessous.

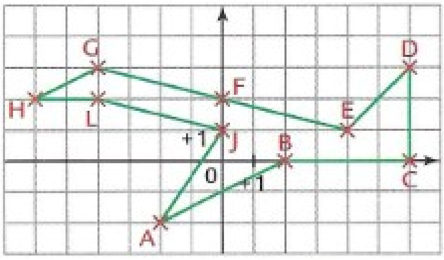
a) Quel point a pour abscisse +2 ?

b) Quel point a pour ordonnée −2 ?

c) Quelles sont les coordonnes des points G,A,B et F ?

d) Nommer deux points qui ont la même abscisse.

e) Nommer deux points qui ont la même ordonnée.



14 Placer les points suivants dans un repère.

$A(+5;+4)$; $B(+5;+8)$; $C(-3;+4)$; $D(-3;+8)$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Et de $ABCD$?

15 Sur une droite graduée, quelle est la distance des nombres 2; 5; −4; −57 et l'origine 0 ?

16 Indiquer la valeur absolue des nombres suivants : 2 ; 5 ; −4 ; −57.

17 Dans un jeu vidéo, on joue toujours deux parties. On peut gagner ou perdre des points, marqués par des nombres positifs ou négatifs. Le tableau ci-dessous regroupe les résultats de quelques jeux de Pierre.

Jeu	1^{re} partie	2^{e} partie
a)	+3	+7
b)	+9	+3
c)	−4	−2
d)	−5	−6

Effectuer le bilan pour chaque jour en notant chaque fois le calcul associé.

18 Ci-dessous sont les résultats de Julie pour le même jeu vidéo.

Jeu	1^{re} partie	2^{e} partie
a)	$+8$	-5
b)	-3	$+7$
c)	-12	$+11$
d)	$+3$	-7

Effectuer le bilan pour chaque jour en notant chaque fois le calcul associé.

19 Effectuer les calculs suivants.

a) $(-13) + (+10) =$

b) $(-7) + (-4) =$

c) $(+9) + (-12) =$

d) $(-12) + (+13) =$

e) $(+18) + (-24) =$

f) $(-46) + (+46) =$

20 Effectuer les calculs suivants.

a) $(-8) + (+12) =$

b) $(+9) + (-13) =$

c) $(+5) + (-4) =$

d) $(-16) + (-18) =$

e) $(-17) + (+6) =$

f) $(-12) + (+3) =$

21 Effectuer les calculs suivants.

a) $(+15) + (-17) =$

b) $(-98) + (-3) =$

c) $(-75) + (+19) =$

d) $(+81) + (-8) =$

e) $(+17) + (-21) =$

f) $(-23) + (-24) =$

22 Effectuer les calculs suivants.

a) $(+65) + (-17) =$

b) $(-28) + (-13) =$

c) $(+9) + (-36) =$

d) $(+18) + (-19) =$

e) $(+75) + (-26) =$

f) $(-48) + (-42) =$

23 Effectuer les calculs suivants.

a) $(-2{,}45) + (+3{,}84) =$

b) $(+7{,}8) + (-5{,}2) =$

c) $(+8{,}1) + (-9{,}3) =$

d) $(-24{,}8) + (-2{,}7) =$

e) $(-54{,}2) + (+45{,}9) =$

f) $(+97{,}5) + (-54{,}7) =$

24 Effectuer les calculs suivants.

a) $(+1{,}01) + (-1{,}1) =$

b) $(-15{,}8) + (+23{,}7) =$

c) $(-1) + (+0{,}1) =$

d) $(-58{,}8) + (-12{,}2) =$

e) $(-99{,}9) + (+0{,}01) =$

f) $(+12{,}05) + (-13{,}07) =$

25 Compléter.

a) $(+9{,}2) + \ldots = -5$

b) $\ldots + (-0{,}5) = -0{,}4$

c) $\ldots + (+1{,}9) = 0$

d) $(-2{,}01) + \ldots = 0$

e) $(-0) + \ldots = -52{,}7$

f) $\ldots + (+7{,}15) = +6{,}12$

26 Effectuer les calculs suivants.

a) $(-15)+(-9)+(+8)+(-12)+(-8)=$

b) $(+91)+(-57)+(+15)+(-26)=$

c) $(-13)+(+24)+(+45)+(-49)+(-24)=$

d) $(+47)+(-45)+(-87)+(+62)+(+78)=$

e) $(-29)+(-74)+(+42)+(-101)+|-17|=$

f) $(-76)+(-12)+(+98)+(-45)+|+21|+(+112)=$

27 Effectuer les calculs suivants.

a) $(-18)+(-12)+(-11)+(+18)+(+13)=$

b) $(-52)+(+48)+(-60)+(+4)=$

c) $(+78)+(-60)+(+1)+(-18)=$

d) $(+121)+(-88)+(-71)+(+25)+(+8)=$

e) $(-19)+(+80)+(-51)+(-55)=$

f) $(-324)+(+547)+|-124|+(-327)=$

28 Effectuer les calculs suivants.

a) $(+2{,}8)+(-7{,}9)+(-2{,}3)+(+19{,}2)=$

b) $(+1{,}1)+(-2{,}2)+(+3{,}3)+(-4{,}4)=$

c) $(-12{,}07)+(+19{,}8)+(-25{,}4)+(-9{,}7)+(-1{,}87)=$

d) $(-1{,}08)+(-2{,}71)+(+3{,}87)=$

e) $(+15{,}09)+(+14{,}3)+(+27{,}8)+(-0{,}1)+(-0{,}09)=$

f) $(-27{,}8)+(-17{,}05)+(+24{,}8)+(+16)+(+0{,}06)+(-0{,}01)=$

29 Calculer mentalement.

a) $(-183)+(+7)+(+12)+(-4)+(+183)=$

b) $(-54)+(+87)+(+3)+(+54)+(-87)=$

c) $(+68)+(-38)+(-2)+(-68)+(+38)=$

d) $(-19)+(-12)+(+19)+(+53)+(+12)=$

e) $(+21)+(+47)+(-15)+(-47)+(+9)=$

f) $(-64)+(+12)+(-23)+(-8)+(+23)=$

30 Compléter tel que l'égalité soit vraie.

a) $(-4)+(\ldots)=0$

b) $(\ldots)+(+8)=0$

c) $(\ldots)+(-7)=0$

d) $(+5)+(\ldots)=0$

31 Trouver la valeur de la lettre dans chaque cas.

a) $m+(+8)=0$

b) $(-4)+p=0$

c) $r+(-6)=0$

d) $(+7)+t=0$

32 Dans un jeu, Tim a obtenu des cartes avec les points suivants :

$$+7; \quad -2; \quad +5; \quad -6.$$

a) Déterminer la somme de ses points.

Un autre joueur tire une des cartes de Tim.

b) Déterminer à l'aide du résultat précédent la nouvelle somme lorsque l'autre joueur a tiré la carte avec $+7$.

c) Même question si l'autre joueur a tiré la carte avec -6.

d) Même question si l'autre joueur a tiré la carte avec -2.

e) Est-il possible de noter les calculs ci-dessus sous forme d'une addition ?

33 Calculer.

a) $(+7)-(-5)-(+4)+(-2)=$

b) $(-1)+(-1)-(-2)-(+2)=$

c) $(-12)-(-59)+(-45)-(-18)=$

d) $(-52)+|-21|-(-17)-(-52)=$

e) $(+24)+(-56)-(-47)+(-42)-(+32)-(-99)=$

f) $(-427)+(-781)-(-547)-(+155)=$

34 Calculer.

a) $(-9)-(-4)=$

b) $(-8)-(+3)=$

c) $(+7)-(+2)=$

d) $(+16)-(-3)=$

e) $(-5)-(-9)=$

f) $(+8)-(+15)=$

35 Calculer.

a) $(+4)-(-9)=$

b) $(+6)-(-3)=$

c) $(-6)-(+8)=$

d) $(-9)-(-4)=$

e) $(+7)-(+3)=$

f) $(+5)-(+9)=$

36 Calculer.

a) $(+14)-(-17)=$

b) $(+26)-(-18)=$

c) $(-46)-(+38)=$

d) $(+17)-(+23)=$

e) $(-39)-(-14)=$

f) $(+35)-(+49)=$

37 Trouver la valeur de la lettre dans chaque cas.

a) $e-(-8)=0$

b) $f-(+5)=0$

c) $(-9)-g=0$

d) $h-(+7)=0$

38 Calculer.

a) $(-4{,}8)+(+3{,}5)=$

b) $-2{,}9)-(-3{,}2)=$

c) $(+8{,}2)-(+5{,}6)=$

d) $(+5{,}8)+(-2{,}4)=$

39 Calculer.

a) $(+2{,}5)+(-4{,}5)=$

b) $(-5{,}5)-(-3{,}5)=$

c) $(+7{,}5)-(+4{,}5)=$

d) $(+6{,}5)-(+9{,}5=$

e) $(-8{,}5)+(+9{,}5)=$

f) $(-6{,}5)-(-8{,}5)=$

40 Calculer.

a) $(+6{,}2)-(+8{,}2)=$

b) $(+4{,}5)-(+3{,}5)=$

c) $(+8{,}6)+(-4{,}3)=$

d) $(+9{,}3)-(-3{,}8)=$

e) $(-1{,}8)-(-1{,}3)=$

f) $(-5{,}4)+(+7{,}2)=$

41 Calculer.

a) $(+7)-(-10)=$

b) $(+6)+(-3)=$

c) $(-4)-(+12)=$

d) $(-9)-(-4)=$

e) $(-17)+(-13)=$

f) $(+5)-(+9)=$

42 Écrire d'abord en écriture simplifiée, puis calculer.

a) $(+1)-(+2)+(-3)-(-4)=$

b) $(-1{,}24)+(-2{,}59)-(-1{,}4)=$

c) $(+6{,}75)-(+4{,}07)+(+4{,}8)=$

d) $(-1{,}01)+(+2{,}24)-(+1{,}98)-(-0{,}09)=$

e) $(+10{,}2)-(+4{,}72)-|-1|=$

f) $(+9{,}74)-(-10{,}21)+(-0{,}85)-(-0{,}99)=$

43 Calculer.

a) $-12+18-9-12=$

b) $45-13-78+24=$

c) $-1{,}28+5{,}78-1{,}22=$

d) $-(-0{,}05+7{,}54)-2{,}54-1{,}7=$

e) $-45-(45-8+5)-9=$

f) $29+(68-73)-32=$

44 Calculer mentalement.

a) $54-108+54=$

b) $30-32+40-50+20=$

c) $72-68+53-72+15=$

d) $98-24-24=$

e) $-121+30+22-31=$

f) $35-85+75-15=$

45 Joe possède 12 cartes à collectionner. Il achète 6 paquets, chacun contenant 8 nouvelles cartes. Combien de cartes possède-t-il ?

46 Effectuer les calculs suivants. Indiquer au moins deux facteurs et deux termes.

11	$+$	$9\cdot 5-$	$2)=$	$(4+2\cdot$
10	$:$	$8\cdot 8=$	$4\cdot 5-$	$8)\cdot 5=$
$5=$		$6\cdot(7-$	$6=$	

47 Calculer.

a) $(-6)\cdot(+5)=$

b) $(-8)\cdot(-7)=$

c) $(-12)\cdot(-11)=$

d) $(-15)\cdot(+15)=$

e) $(+32)\cdot(-25)=$

f) $(-50)\cdot(-42)=$

48 Calculer.

a) $(-2{,}5)\cdot(-1{,}5)=$

b) $(+6{,}7)\cdot(-12)=$

c) $(-18)\cdot(+20)=$

d) $-9{,}1\cdot(+11)=$

e) $19\cdot(-3)=$

f) $-6\cdot 21=$

49 Déterminer :

a) le produit de 99 facteurs tous égaux à -1,

b) la somme de 99 termes tous égaux à -1,

c) la somme de tous les termes de 1 à 99,

d) le signe du produit de tous les facteurs allant de -67 à -154.

50 Calculer.

a) $(-1)^3=$

b) $(-5)^0=$

c) $-5^0=$

d) $(4{,}08-7{,}1+2{,}12)^2=$

e) $-5\cdot(-17+25-42)=$

f) $-12-[5-3\cdot(-54)+1]=$

51 Calculer.

a) $-12:3=$

b) $-45:(-15)=$

c) $60:(-30)=$

d) $-(-35):(-5)=$

e) $80:(-100)=$

f) $(-8):(-0{,}1)=$

52 Calculer.

a) $-45:1\,000=$

b) $-45{,}7:(-100)=$

c) $45{,}7-100=$

d) $(-15):(-6)=$

e) $5\cdot(-125)=$

f) $1:(-1)=$

53 Soit $A=b^2-4ac$. Déterminer A pour :

a) $a=-1;\quad b=2;\quad c=-5.$

b) $a=5;\quad b=-5;\quad c=-6.$

c) $a=-7;\quad b=-1;\quad c=-1.$

54 Vrai ou faux. Justifier chaque fois.

a) $-x$ est un nombre négatif.

b) x^2 est un nombre positif.

c) Multiplier un nombre x par -2 donne un nombre inférieur à x.

d) Diviser un nombre x par $-0{,}1$ donne un nombre inférieur à x.

55 Calculer.

a) $160-(3\cdot 5^2-3\cdot 5)=$

b) $142-(50-3\cdot 6^2)=$

c) $2\cdot 10^2-4\cdot(5-5^2)+20=$

d) $-4^2\cdot\left(1+8+(-4)^2\right)=$

e) $(18-4\cdot 5)\cdot(6\cdot 3-10)\cdot(-3^2)=$

f) $\left(7-4^2\right)\cdot(-18:3+12)\cdot\left(2\cdot 3^2-20\right)=$

II Puissances

1. Puissances à exposants positifs

Exercice 1

Le roi Belkib (Indes) promit une récompense fabuleuse à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait. Lorsque le sage Sissa, fils du Brahmine Dahir, lui présenta le jeu d'échecs, le souverain, demanda à Sissa ce que celui-ci souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.
Sissa demanda au prince de déposer un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grain à chaque case.
Le prince accorda immédiatement cette récompense sans se douter de ce qui allait suivre :

a) Déterminer le nombre de grains de riz sur la 11e case.

b) Déterminer le nombre de grains de riz sur la 21e case.

c) Estimer le nombre de grains de riz sur la 64e case.

Solution 1

$2^{10} = 1\,024$
$2^{20} \approx 1\,mio$
$2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ grains = environ 500 fois la production **actuelle** d'une année.

Exemples

- ⋆ $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ facteurs égaux}} = 2^4$ (On lit : "2 exposant 4")
- ⋆ $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ facteurs égaux}} = 5^6$ (5 exposant 6)
- ⋆ $\underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ facteurs égaux}} = 3^2$ (3 exposant 2 ou 3 au carré)
- ⋆ $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ facteurs égaux}} = 4^3$ (4 exposant 3 ou 4 au cube)

Définition 1

Soit x un nombre quelconque et n un nombre entier (strictement) positif. Alors

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\ldots \cdot x}_{n \text{ facteurs égaux}}$$

est une **puissance** et

- ⋆ x s'appelle **base**
- ⋆ n s'appelle **exposant**

On pose :

$$x^1 = x; \qquad x^0 = 1.$$

Mais 0^0 n'existe pas!

Exercice 2

Calculer.

a) $5^3 =$ d) $2^4 =$
b) $0{,}3^2 =$ e) $(-4)^3 =$
c) $0{,}1^3 =$ f) $(-1{,}3)^2 =$

Solution 2

-

A retenir ! (Puissances usuelles)

∗) $1^2 =$ ∗) $6^2 =$ ∗) $11^2 =$
∗) $2^2 =$ ∗) $7^2 =$ ∗) $12^2 =$
∗) $3^2 =$ ∗) $8^2 =$ ∗) $13^2 =$
∗) $4^2 =$ ∗) $9^2 =$ ∗) $14^2 =$
∗) $5^2 =$ ∗) $10^2 =$ ∗) $15^2 =$

∗) $1^3 =$ ∗) $3^3 =$ ∗) $5^3 =$
∗) $2^3 =$ ∗) $4^3 =$

∗) $2^0 =$ ∗) $2^4 =$ ∗) $2^8 =$
∗) $2^1 =$ ∗) $2^5 =$ ∗) $2^9 =$
∗) $2^2 =$ ∗) $2^6 =$
∗) $2^3 =$ ∗) $2^7 =$ ∗) $2^{10} =$

Exercice 3

Calculer.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

b) $13^0 =$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 =$

d) $\left(-\frac{1}{8}\right)^1 =$

e) $(-7)^0 =$

f) $-7^0 =$

Solution 3

-

Exercice 4

Vrai ou faux. Justifier.

a) 2^4 est le double de 2^3.

b) $2^3 = 3^2$.

c) $2^4 = 2 \cdot 4$

d) 5^2 est la moitié de 5^4.

Solution 4

-

Exercice 5

Trouver pour chaque cas n.

a) $27 = 3^n$

b) $n^3 = 125$

c) $5^n = 125$

d) $n^2 = 81$

e) $5^n = 1$

f) $n^1 0 = 0$

Solution 5

-

Exercice 6

Calculer.

a) $0{,}2^3 =$

b) $0{,}04^2 =$

c) $1{,}3^2 =$

d) $10^2 10^3 \cdot 10^5 =$

e) $2^3 \cdot 3^2 =$

f) $2^3 \cdot 2^3 =$

Solution 6

-

Exercice 7

Écrire sous la forme d'une puissance (a^n).

a) $6^2 \cdot 6^3 =$

b) $5 \cdot 5^3 =$

c) $7^2 \cdot 7^4 =$

d) $1^3 \cdot 1^8 =$

e) $11^{12} \cdot 11^{13} =$

f) $2^3 \cdot 3^2 =$

Solution 7

-

Exercice 8

Déterminer si le résultat est positif ou négatif.

a) $(-2)^2 =$
b) $-2^2 =$
c) $-(-2)^2 =$
d) $-(-81)^3 =$
e) $-3^{20} =$
f) $-1^2 \cdot (-5)^3 =$

Solution 8

-

Exercice 9

Calculer.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 =$
b) $\frac{2^2}{5} =$
c) $\left(\frac{-5}{3}\right)^2 =$
d) $\frac{-5^2}{3} =$

Solution 9

-

2. Puissances à exposants négatifs

Considérons le tableau suivant :

exp.	puiss.		rés.	
$-1 \downarrow$	3^3	$=$	27	$\downarrow : 3$
$-1 \downarrow$	3^2	$=$	9	$\downarrow : 3$
$-1 \downarrow$	3^1	$=$	3	$\downarrow : 3$
$-1 \downarrow$	3^0	$=$	1	$\downarrow : 3$
$-1 \downarrow$	3^{-1}	$=$	$\frac{1}{3}$	$\downarrow : 3$
$-1 \downarrow$	3^{-2}	$=$	$\frac{1}{9}$	$\downarrow : 3$
	3^{-3}	$=$	$\frac{1}{27}$	

Définition 2

Soit x un nombre quelconque non nul. Soit n un entier positif. Alors

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

est **l'inverse de** x^n.

Exercice 10

Calculer.

a) $2^{-3} =$

b) $3^{-2} =$

c) $0{,}1^{-2} =$

d) $(-5)^{-1} =$

e) $(-7)^{-2} =$

f) $-7^{-2} =$

Solution 10

-

Remarque :

- $\dfrac{1}{x}$ est l'inverse de x si $x \overset{!}{\neq} 0$.
- Si l'exposant est -1, il suffit d'inverser le nombre entre parenthèses.

Exercice 11

Calculer.

a) $2^{-1} =$

b) $5^{-1} =$

c) $4^{-1} =$

d) $10^{-2} =$

e) $10^{-4} =$

f) $2^{-2} =$

Solution 11

-

Exercice 12

Écrire sous forme d'une puissance (a^n).

a) $\dfrac{1}{25} =$

b) $64 = 2^n$

c) $0{,}01 =$

d) $\dfrac{1}{8} =$

e) $0{,}001 =$

f) $27 =$

Solution 12

-

Exemple

$$\begin{aligned}
10^2 &= 100\\
10^1 &= 10\\
10^0 &= 1\\
10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0{,}1\\
10^{-2} &= 0{,}01\\
10^{-3} &= 0{,}001
\end{aligned}$$

Propriété 1

Si n est un entier positif, alors :

$$10^n = 1\underbrace{000.....00}_{\text{n zéro}}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0{,}00.....00}_{\text{n zéro}}1$$

Exercice 13

Écrire sous forme d'un nombre décimal.

a) $10^{-4} =$
b) $10^{9} =$
c) $10^{1} =$
d) $10^{-5} =$
e) $10^{0} =$
f) $10^{-3} =$

Solution 13

-

Exercice 14

Écrire sous forme d'une puissance de base 10.

a) 100
b) 0,000 1
c) un dixième
d) un milliard
e) un million
f) un millionième

Solution 14

-

Exercice 15

Calculer.

a) $25{,}36 : 0{,}001 =$
b) $25{,}47 \cdot 0{,}01 =$
c) $0{,}000\,7 : 0{,}01 =$
d) $123\,456 : 0{,}000\,01 =$
e) $1{,}2 \cdot 0{,}1 =$
f) $1{,}2 : 0{,}1 =$

Solution 15

-

3. La notation scientifique

pour 6G : seulement base 10 Cette notation est utilisée pour écrire des nombres très grands ou très petits. La vitesse de la lumière par exemple est environ :

$$300\,000\,000\ m/s = 3 \cdot 10^8\ m/s.$$

Définition 3

La notation scientifique d'un nombre positif est :

$$a \cdot 10^n$$

où a est un mombre positif entre 1 et 10 (10 exclu!)
et n est un entier positif ou négatif.

Exercice 16

Écrire en notation scientifique.

a) $80\,000\,000\,000\,000 =$
b) $4\,500\,000\,000 =$
c) $0{,}000\,000\,000\,000\,001 =$
d) $-0{,}000\,003\,9 =$
e) $-0{,}5 =$
f) $1 =$

Solution 16

-

Exercice 17

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont écrits en notation scientifique ? Expliquer.

a) $3{,}8 \cdot 10^5$
b) $0{,}54 \cdot 10^{-4}$
c) $5{,}9 \cdot 4^{10}$
d) $6{,}92 \cdot 10^{-5}$
e) $34 \cdot 10^5$
f) $0{,}6 \cdot 10^5$

Solution 17

-

*ex. suppl.*Ex 59-61, 63, 66 p.98

Comparaison de deux nombres positifs écrits en notation scientifique

Exercice :

Compléter par $>$ ou $<$.

a) $6 \cdot 10^7 < 3 \cdot 10^9$
b) $5 \cdot 10^4 > 8 \cdot 10^{-5}$
c) $3{,}2 \cdot 10^-5 > 3{,}4 \cdot 10^{-9}$
Conclusion : Si les exposants des puissances de base 10 sont différents alors le plus grand nombre est celui avec le plus grand exposant.
d) $3 \cdot 10^3 > 2 \cdot 10^3$
e) $2 \cdot 10^{-2} < 4 \cdot 10^{-2}$
f) $4{,}021 \cdot 10^5 > 4{,}201 \cdot 10^5$
Conclusion : Si les exposants des puissances de base 10 sont égaux alors le plus grand nombre est celui avec le plus grand facteur a.

Exercice 18

Donner l'écriture scientifique de la masse de ces planètes, puis les ranger par ordre croissant!

Mars	$64185 \cdot 10^{19}$
Jupiter	$0{,}189 \cdot 10^{28}$
Uranus	$886{,}31 \cdot 10^{23}$
Vénus	$0{,}0487 \cdot 10^{26}$

Solution 18

-

Exercice 19

Donner l'écriture scientifique de la masse de ces atomes, puis les ranger par ordre croissant!

Uranium	$0{,}395 \cdot 10^{-24}$
Aluminium	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$
Or	$32{,}7 \cdot 10^{-26}$
Fer	$9274 \cdot 10^{-29}$
Cuivre	$1055 \cdot 10^{-28}$

Solution 19

-

Propriété 2 (Règles de calcul avec puissances)

Pour a, b des nombres réels et n, p des nombres entiers.

- $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$
- $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a \neq 0)$

Remarque : Il faut avoir un produit/quotient pour appliquer les règles de calcul avec puissances :
C1 : Multiplication
Ensuite, on recopie une fois la base si elles sont égales (et ajoute les exposants) ou bien on recopie l'exposant s'ils sont égaux (et on multiplie les bases) :
C2 : même base ou même exposant.

Exercice 20

Vrai ou faux. Justifier.

a) $3^5 \cdot 3^2 = 3^{10}$
b) $(-4)^8 \cdot (-4)^3 = (-4)^{11}$
c) $2^5 \cdot 2^3 = 2^{15}$
d) $3^2 + 3^5 = 3^7$
e) $2^5 \cdot 2^3 = 2^8$
f) $3^2 + 3^5 = 3^{10}$

Solution 20

-

Exercice 21

Si possible, écrire sous forme d'une seule puissance. Sinon, justifier.

a) $3^5 \cdot 3^2 =$

b) $10^7 \cdot 10^{22} =$

c) $7^2 \cdot 7 =$

d) $(-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

e) $-2^3 \cdot (-2)^4 =$

f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 =$

Solution 21

-

Exercice 22

Compléter

a) $3^5 \cdot \ldots^5 = 12^5$

b) $5^7 \cdot 2^{\cdots} = \ldots^7$

c) $\ldots^4 \cdot 6^4 = 24^4$

d) $\ldots^3 \cdot 3^{\cdots} = 15^3$

Solution 22

-

Exercice 23

Écrire, si possible sous forme d'une seule puissance. Sinon, justifier.

a) $13 \cdot 13^2 \cdot 13^3 =$

b) $(-4)^2 \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^5 =$

c) $7^4 + 7^2 + 7^3 =$

d) $1{,}2^4 \cdot 1{,}2^6 \cdot 1{,}2^2 =$

e) $21^2 \cdot 21^5 \cdot 21^7 \cdot 21^3 =$

f) $(-8)^4 \cdot (-8)^3 \cdot (-8)^7 =$

Solution 23

-

Exercice 24

Écrire, si possible sous forme d'une seule puissance. Sinon, justifier.

a) $2^2 \cdot 9 =$

b) $3^3 \cdot 8 =$

c) $4^2 \cdot 25 =$

d) $64 \cdot 5^2 =$

e) $1\,000 \cdot 3^3 =$

f) $81 \cdot 7^2 =$

Solution 24

-

Exercice 25

Écrire, si possible sous forme d'une seule puissance. Sinon, justifier.

a) $\dfrac{7^4}{7} =$

b) $\dfrac{0{,}2^7}{0{,}2^3} =$

c) $8^5 : 8^2 =$

d) $\dfrac{12^6}{12^4} =$

e) $\dfrac{3^7}{3^9} =$

f) $\dfrac{2^5}{8} =$

Solution 25

-

Exercice 26

Écrire, si possible sous forme d'une seule puissance. Sinon, justifier.

a) $\left(3^5\right)^3 =$

b) $\left(-2^3\right)^4 =$

c) $\left(-2^4\right)^3 =$

d) $4^6 \cdot 9^6 =$

e) $\dfrac{36^5}{9^5} =$

f) $\left(\dfrac{8}{100}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{15}{6}\right)^8 =$

Solution 26

-

Exercice 27

Compléter.

a) $\left(2^5\right)^3 = 2^{\cdots}$

b) $\left(3^2\right)^4 = 9^{\cdots}$

c) $\left(4^3\right)^2 = 4^{\cdots}$

d) $\left(4^3\right)^{\cdots} = 4^{-9}$

e) $\left(2^{\cdots}\right)^{-1} = 2^5$

Solution 27

-

Exercice 28

Calculer.

a) $25^2 \cdot 45{,}3 \cdot 4^2 =$

b) $0{,}2^7 \cdot 4^3 \cdot 5^7 \cdot 2{,}5^3 =$

c) $5^7 \cdot 2^8 =$

d) $2^3 \cdot 10^3 \cdot 125 \cdot 10^{-6} =$

e) $6^4 \cdot \dfrac{3^4}{18^3} =$

Solution 28

Enoncé : Calculer.

a) $453\,000$

b) $1\,000$

c) $2 \cdot 10^7$

d) 1

e) 18

Exercice 29

Écrire, si possible, sous forme d'une puissance avec la plus petite base possible.

a) $3^5 \cdot 3^0 \cdot 3^{-3} \cdot 3 =$

b) $27 \cdot 3^5 =$

c) $25^4 =$

d) $27^2 \cdot 9^5 =$

e) $2^6 + 2^6 =$

f) $2^6 \cdot 2^6 =$

Solution 29

Enoncé : Écrire, si possible, sous forme d'une puissance avec la plus petite base possible.

a) 3^3

b) 3^8

c) 5^{20}

d) 3^{16}

e) 2^7

f) 2^{12}

Exercice 30

Soit

$$A = 2 \cdot 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

a) Donner l'écriture décimale de A.

b) Donner l'écriture scientifique de A.

c) Écrire A sou forme d'un produit d'un nombre entier par une puissance de base 10.

Solution 30

-

Exercice 31

Écrire sous la forme d'une seule puissance.

a) $\dfrac{3^{-14}}{3^6} =$

b) $\dfrac{7^6 \cdot 49}{7^{-9}} =$

c) $\dfrac{8 \cdot 2^8}{4} =$

d) $\dfrac{9 \cdot 27}{81} =$

e) $\dfrac{6 \cdot 6}{16 - 7} =$

f) $\dfrac{7^{-2}}{7^{-3}} =$

Solution 31

-

Exercice 32

Écrire sous la forme d'une seule puissance.

a) $\dfrac{10^{18}\cdot 10^{-20}}{10^{-4}\cdot 10^{-6}} =$

b) $\dfrac{4^{10}\cdot 4^{-5}}{(4^{-3})^{-5}} =$

c) $\dfrac{21^4}{7^4} =$

d) $36\cdot 16\cdot 81 =$

e) $\dfrac{9^2}{3^2} =$

f) $4^5\cdot 8 =$

Solution 32

-

Exercice 33

Il y a environ $2{,}025\cdot 10^{13}$ globules rouges dans 4,5 litres de sang humain. Combien de globules rouges y a-t-il dans 3 litres de sang ?

Solution 33

-

Exercice 34

Quelle serait l'épaisseur d'un très gros livre qui aurait un milliard de pages, sachant qu'une feuille a une épaisseur d'un dixième de millimètre ?

Solution 34

-

Exercice 35

Si 6,8 milliards de personnes boivent 1,5 l d'eau par jour, quelle sera la quantité d'eau bue par jour en litres ? Donner le résultat en écriture scientifique.

Solution 35

-

Exercice 36

Une tête possède en moyenne 100 000 cheveux. Sachant qu'il y a 6 milliards de terriens, donne un ordre de grandeur du nombre de cheveux sur Terre.

Solution 36

-

Exercice 37

Le premier mars, Laura lance une rumeur : le collège sera fermé le 1er avril. Elle prévient 3 personnes. Le 2 mars chacune des trois personnes prévenues la veille propage à son tour cette rumeur en prévenant trois nouvelles personnes. Ainsi, chaque jour, une personne prévenue la veille prévient trois nouvelles personnes. Exprimer sous forme d'une puissance le nombre de personnes qui auraient appris la rumeur :

a) le jour du 2 mars,

b) le jour du 4 mars,

c) le jours du 10 mars,

d) le jours du 15 mars.

Solution 37

-

Exercice 38

Un moustique pèse en moyenne 1,5mg (milligrammes). Combien faut-il de moustiques pour obtenir le poids d'un éléphant pesant 6 tonnes ?.

Solution 38

-