Simetrías Internas

- La virtud del trabajo de Noether fue separar los resultados en los casos de simetrías globales en los cuales el parámetro de transformación no depende del punto del espacio tiempo, del caso en el que los grupos de simetría dependen del punto del espacio tiempo.

- En el caso de teorías de campos estamos más interesados en la simetría de campos espacios internos como puede ser el cambio de fase de la ecuación de onda (función de onda) en la ecuación de Schrodinger.

- Un cambio de fase, Θ, es un caso particular del parámetro de transformación.

- En general, el parámetro de una transformación, puede ser constante, $\Theta = cte$, que corresponde a una transformación de fase global, o depender del punto del espacio tiempo, $\theta(x)$, que corresponde a una transformación de fase local.

- Las simetrías internas están caracterizadas por la condición $\delta x^\mu = 0$.

- Ahora, si la transformación depende de algún parámetro θ continuo, entonces podemos garantizar la existencia de un parámetro infinitesimal tal que:

$$\delta \phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)\,\theta(x) + b_i^\nu(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)\,\partial_\nu \theta(x)$$

- Para concretar, consideremos como transformación interna el cambio de fase de una función compleja:

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\theta}\phi$$

• Para un θ suficientemente pequeño

$$\phi' = e^{i\theta}\phi \simeq (1+i\theta)\phi \simeq \phi + i\theta\phi$$

• Definimos el cambio interno de una función cómo:

$$\delta\phi \equiv \phi' - \phi,$$

y para el cambio infinitesimal del campo y su complejo conjugado, tenemos que haciendo $\phi_1 = \phi$ y $\phi_2 = \phi^*$

$$\delta\phi = a_1\theta \quad , \quad \delta\phi^* = a_2\theta$$

donde $a_1 = i\phi$ y $a_2 = -i\phi^*$

Para este caso $b_1^\nu = b_2^\nu = 0$.

Primer Teorema de Noether

• Antes de desarrollar el primer teorema de Noether, debemos realizar una derivación reserva para comprender el teorema.

Teorema

- Un campo escalar complejo, es equivalente a dos campos escalares independientes de la misma masa, asociados a un parámetro de transformación θ.

- Para N campos asociados a un parámetro de transformación θ, la dependencia explícita e implícita de la densidad Lagrangiana da lugar al funcional de Acción:

$$S[\phi_i, \partial_\mu \phi_i ; x] = \int_\Omega d^4x \, \mathcal{L}(\phi_i , \partial_\mu \phi_i ; x)$$

- El problema variacional de Noether puede ser establecido en los siguientes términos: ¿Cuales son las condiciones generales que se deben satisfacer, para que una variación en las variables explícitas e implícitas dejen la acción invariante, $\delta S = 0$, donde δS puede contener o no un termino de frontera?

- Recordemos la definición del cambio interno en el campo: $\delta \phi_i(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ y el cambio en x bajo una transformación de Lorentz: $x \to x' = x + \delta x$

- Entonces:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x' \mathcal{L}(\phi_i', \partial_\mu \phi_i'; x') - \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x)$$

$$\therefore = \int_\Omega \frac{\partial x'}{\partial x} d^4x \mathcal{L}\left(\phi_i + \delta\phi_i, \partial_\mu(\phi_i + \delta\phi_i); x + \delta x\right) -$$

$$\int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi; x)$$

Ahora $\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$ y

$$\mathcal{L}(\phi_i + \delta\phi_i, \partial_\mu(\phi_i + \delta\phi_i); x + \delta x) = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i, x)$$

$$+ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu(\delta\phi_i) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu$$

Con esto: $\delta S = \int d^4x\, \partial_\mu(\mathcal{L}\,\delta x^\mu) + \int d^4x \sum_i \Big\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}\delta\phi_i +$

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta\phi_i\right] - \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right]\delta\phi_i \Big\}$$

la condición $\delta S = 0$ implica que:

$$\int d^4x \sum_i \mathcal{E}_i\,\delta\phi_i = \int d^4x \sum_i \partial_\mu B_i^\mu$$

donde

$$\mathcal{E}_i = \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad y \quad B_i^\mu = \mathcal{L}\,\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta\phi_i$$

$$\therefore \quad \sum_i \mathcal{E}_i\,\delta\phi_i = \sum_i \partial_\mu B_i^\mu$$

- Con esto, podemos entender el Primer teorema de Noether. Consideremos primero el caso en el que el parámetro de transformación θ es constante. Como $\partial_\nu\theta = 0$:

$$\delta\phi_i = a_i(\phi_e, \partial_\mu\phi_e)\,\theta(x)$$

Teorema 1: Si la acción S es invariante bajo un grupo continuo de simetrías globales que dependen suavemente de ρ parámetros independientes $\theta_\alpha = cte$ ($\alpha = 1, 2 \ldots \rho$), tal que $\delta\phi_i = a_{\alpha i}\theta^\alpha$, entonces existen las ρ relaciones:

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} = \partial_\mu j^\mu_\alpha ,$$

donde $j^\mu_\alpha = \sum_i B^\mu_i = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_{\alpha i}$

- Si imponemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfagan, es decir $\mathcal{E}_i = 0$, obtenemos α- equaciones de continuidad:

$$\partial_\mu j^\mu_\alpha = 0$$

- Para entender el significado físico de la ecuación de continuidad, consideremos la cuadri-corriente asociada a un único parámetro θ, como es el caso de un campo escalar complejo y su correspondiente conjugado. Expandiendo la ecuación de continuidad en sus componentes espaciales y temporales, tenemos que:

$$\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0 \therefore \frac{\partial j^0}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot \overline{j} = 0$$

Si interpretamos j^0 como la densidad, ρ, de una carga Q:

$$Q = \int_V d^3x \, j^0 = \int_V d^3x \, \rho$$

$$\therefore \int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_V d^3x \, \rho = \frac{dQ}{dt}$$

Si Q se conserva $\therefore \dfrac{dQ}{dt} = 0$.

- Una consecuencia del primer teorema de Noether es que por cada simetría global de la acción, existe una carga conservada.

cuando la conservación de la carga requiera de que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfagan, diremos que la conservación de la carga es propia.

- Note que las ecuaciones de Euler-Lagrange surgen del problema variacional de Noether cuando se impone que la parte inversa sea cero, $\sum_i \partial_\mu j^\mu_{\alpha_i} = 0$, es decir cuando se impone que las cargas se conserven.

Segundo teorema de Noether

- Estudiaremos una versión del segundo teorema de Noether aplicable sólo a simetrías internas.
- Como veremos más adelante, la invariancia de la acción de Schrödinger bajo una transformación de fase global, da lugar a una conservación global de la probabilidad. La probabilidad se conserva en todos los puntos del

espacio simultaneamente. Esto no es incompatible con la relatividad especial, porque no involucra intercambio de información, pero si permite, en particular, que la teletransportación cuántica sea instatanea, por ejemplo.

- Si imponemos que el cambio de fase sea local, es decir, dependiente de cada punto del espacio-tiempo, tendremos que para un campo $\phi_i = \phi, \phi^*$,

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i' = e^{i\theta(x)}\phi_i \simeq \left(1 + i\theta(x)\right)\phi_i$$

$$\therefore \quad \delta\phi_i = i\phi_i\,\theta(x)$$

En el caso en el que el parámetro $\theta(x)$ sea constante, recuperamos el caso de la invarianza global, que en mecánica cuántica dará lugar a la

Conservación global de la probabilidad.

- Una transformación local interesante, es la que ocurre en el caso electromagnético. Las siguientes transformaciones locales, dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell:

$$\phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial}{\partial t}\theta(x)$$

$$\bar{A} \to \bar{A}' = \bar{A} - \bar{\nabla}\theta(x)$$

$$\therefore \quad \delta A^{\mu} = A'^{\mu} - A^{\mu} = \partial_{\mu}\theta(x)$$

- Tanto la transformación del campo ϕ como la del A^{μ} se pueden escribir en términos de una trasformación, en términos del parámetro infinitesimal local $\theta(x)$ y su derivada: $\delta\phi_i = a_i(\phi_i, \partial_{\mu}\phi_i)\,\theta(x) + b_i^{\nu}(\phi_i, \partial_{\mu}\phi_i)\,\partial_{\nu}\theta(x)$

Teorema 2: Si la acción es invariante bajo un grupo gauge continuo, entonces existen ℓ relaciones:

$$\sum_i \varepsilon_i\, a_{\alpha i} = \sum_i \partial_\mu \left(\varepsilon_i\, b^{\mu}_{\alpha i}\right)$$

Demostración: Recordemos, del primer teorema de Noether, que: $\displaystyle\sum_i \int d^4x\, \varepsilon_i\, \delta\phi_i = \sum_i \int d^4x\, \partial_\mu B^{\mu}_i$

$\therefore$ Como $\delta x^\mu = 0$, tenemos:

$$\sum_i \int d^4x\, \varepsilon_i\, \delta\phi_i = \sum_i \int d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\, \delta\phi_i\right]$$

$$\sum_i \int d^4x\, \varepsilon_i \left(a_i\theta + b^\mu_i \partial_\mu \theta\right) = \sum_i \int d^4x\, \partial_\mu \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right] (a_i\theta + b^\nu_i \partial_\nu \theta)\right\}$$

Extrayendo la derivada total del termino izquierdo:

$$\sum_i \int d^4x\, \varepsilon_i a_i \theta - \sum_i \int d^4x \left[\partial_\mu (\varepsilon_i b^\mu_i)\right]\theta = \sum_i \int d^4x\, \partial_\mu \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right] (a_i\theta + b^\nu_i \partial_\nu \theta) - \varepsilon_i b^\mu_i \theta\right\}$$

Usando el teorema de Gauss y escogiendo los $\Theta(x)$ y $\partial_\mu\Theta(x)$ de modo que se desvanezcan en la frontera, obtenemos que:

$$\sum_i \varepsilon_i a_i = \sum_i \partial_\mu \left(\varepsilon_i b_i^\mu\right)$$

- Ahora en el caso especial de un campo de materia complejo, $a_1 = -a_2$ y $b_1 = b_2 = 0$, entonces:

$$\sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right\} a_i = 0$$

$$\sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right\} = 0$$

Teniendo en cuenta, como veremos más adelante, que para un campo complejo:

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i\right] = 0$$

entonces:

$$\sum_i \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i\right] = 0$$

• Este resultado particular para campos complejos se mantiene en general para el conjunto de campos que dependen sólo del parámetro y no de la derivada del parámetro, es decir, el conjunto de campos de materia con $b_i^\mu = 0$. En tal caso, las corrientes conservadas son:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i$$

Simetrías externas.

• Consideremos el caso en el cual el campo es sólo afectado en su dependencia espacio temporal, como ocurre para un campo escalar de Lorentz: $\delta\phi_i = -(\partial_\nu \phi)\delta x^\nu$,

$$\sum_i B_i^\mu = -T_\nu{}^\mu \delta x^\nu, \quad \text{donde}$$

$$T_\nu{}^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}.$$

Si los campos ϕ_i satisfacen la ecuación de movimiento, tenemos: $\partial_\mu (T_\nu{}^\mu \delta x^\nu) = 0$

Si δx^ν es constante, como se espera en el caso de sistemas inerciales, se satisfacen las cuatro ecuaciones de continuidad (una para cada ν)

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$$

El tensor T^μ_ν proviene de asumir la homogeneidad del espacio y el tiempo y es llamado tensor de momentum y energía. La densidad Hamiltoniana se obtiene de T^0_0:

$$\mathcal{H} = T_0{}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

$$= \Pi(x) \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

- El teorema de Noether en este caso establece que la invarianza de la acción bajo traslaciones temporales da lugar a la ecuación de

Continuidad, para $\nu = 0$:

$$\partial_\mu T^\mu_0 = 0$$

Cuya carga conservada corresponde a la energía:

$$H = \int_V d^3x\, T^0_0 = \int_V d^3x\, \mathcal{H}$$

- De igual forma la invarianza para traslaciones espaciales da lugar a ecuaciones de continuidad para cada componente $i = \nu = 1, 2, 3$.

$$\partial_\mu T^\mu_i = 0,$$

cuyas densidad de cargas conservadas, T^0_i, que en forma vectorial escribiremos como $\overline{T}^0$, dan lugar a la conservación del momentum:

$$\overline{P} = \int_V d^3x\, \overline{T}^0$$

Generalizando a un campo complejo:

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$