Teoría Cuántica de Campos Electromagnéticos libres.

- Recordemos la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell:

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0 ; \quad \overline{\nabla}\cdot\overline{D} = 4\pi\rho ; \quad \overline{\nabla}\times\overline{H} = +\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{j}$$

$\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0$. De estas ecuaciones podemos deducir la ecuación de continuidad: $\overline{\nabla}\cdot\overline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

- La intensidad de $\overline{E}$ y $\overline{B}$, puede ser expresada en terminos de un vector de potencial $\overline{A}$ y un potencial escalar φ:

$$\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \overline{\nabla}\varphi , \quad \overline{B} = \overline{\nabla}\times\overline{A}$$

- Los potenciales $\overline{A}$ y φ no son únicos:

$$\overline{A}' = \overline{A} + \overline{\nabla}\chi , \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} ,$$

donde $\chi(\overline{r}, t)$ es una función arbitraria, la cual retorna los mismos campos $\overline{E}$ y $\overline{B}$.

- Esta modificación de los potenciales, que no altera $\overline{E}$ y $\overline{B}$, se conoce como una transformación "gauge" o de calibre

- Para la transformación "gauge", la función de onda tiene que ser transformada: $\psi \to \psi' = \psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right)$

- Ahora, insertamos $\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \overline{\nabla}\varphi$ y $\overline{B} = \overline{\nabla}\times\overline{A}$ en la segunda y tercera ecuación de las ecuaciones de maxwell:

$$\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\overline{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\overline{j} \quad y$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}\cdot\overline{A} + \overline{\nabla}^2\varphi = -4\pi\rho$$

- Describiendo $\overline{A}$ en el sistema de coordenadas Euclidiano:

$$\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A}) - \overline{\nabla}^2\overline{A}$$

- usando esta relación podemos simplificar:

$$\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\overline{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}j,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}\cdot\overline{A} + \overline{\nabla}^2\varphi = -4\pi\rho \qquad \left(\text{recuerde } \overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{F}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{F}) - \nabla^2\overline{F}\right)$$

- Veamos. Si aplicamos la transformación gauge:

$$\overline{A}' = \overline{A} + \overline{\nabla}\chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

$$\therefore \quad \overline{\nabla}^2\overline{A}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{A}'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\overline{j},$$

$$\overline{\nabla}^2\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

donde hemos usado el gauge de Lorentz: $\overline{\nabla}\cdot\overline{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0$

Ondas Electromagnéticas Planas

- Para un espacio vacío: $\bar{J}=0$ y $\rho=0$, podemos encontrar una función gauge tal que: $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}'(\bar{r},t)=0$, $\varphi(\bar{r},t)=0$ para todos los $\bar{r}$ y t. Esto es conocido cómo el gauge de Coulomb.
- Cómo consecuencia, encontramos ondas planas transversales, como una solución para $\bar{A}'$ y consecuentemente para $\bar{A}$ y $\bar{B}$.
- Ahora, quitaremos las primas de la notación:

$$\bar{\nabla}^2\bar{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}=0\,,\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{A}=0\,,\quad \varphi=0$$

- La solución típica de estas ecuaciones está caracterizada por un vector de potencial real, $\bar{A}$, gobernado por el vector de onda $\bar{K}$ y la polarización ε:

$$\bar{A}(\bar{r},t)=2\bar{\varepsilon}\,|\bar{A}_0|\cos(\bar{K}\cdot\bar{r}-\omega t+\alpha)$$

$$=\bar{A}_0\,e^{i(\bar{K}\cdot\bar{r}-\omega t)}+\bar{A}_0^{*}\,e^{-i(\bar{K}\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

$$=\bar{A}_0\,e^{i(\bar{K}\cdot\bar{r}-\omega t)}+\text{c.c}$$

$\rightarrow$ Complejo Conjugado.

donde $\bar{A}_0=|\bar{A}_0|\bar{\varepsilon}\,e^{i\alpha}$ $\rightarrow$ Amplitud

$\omega=Kc=|\bar{K}|c$ y $\bar{A}_0\perp\bar{K}$, para que $\bar{A}(\bar{r},t)$

sea solución de la ecuación de onda.

. Entonces, como $\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \overline{\nabla}\varphi$ y $\overline{B} = \overline{\nabla} \times \overline{A}$

$\overline{E} = -2K\, |\overline{A}_0|\, \overline{\varepsilon}\, \text{Sen}(\overline{K}\cdot\overline{r} - \omega t + \alpha)$

$\overline{B} = -2\, |\overline{A}_0|\, \overline{K} \times \overline{\varepsilon}\, \text{Sen}(\overline{K}\cdot\overline{r} - \omega t + \alpha)$

. Ahora, el vector de Poynting se define como:

$\overline{S} = \frac{c}{4\pi}\, \overline{E} \times \overline{H}$ y es paralelo a $\overline{K}$.

. Recuerde que $\overline{H} = \overline{B}$ en un espacio sin carga eléctrica ni corrientes

. Tomando el promedio en el tiempo del vector de Poynting, sobre un periodo de tiempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$\langle |\overline{S}| \rangle = \frac{\omega^2}{2\pi} |\overline{A}_0|^2$ lo cual representa la intensidad de la onda electromagnética.

Cuantización de Campos Electromagnéticos libres.

- Veamos la ecuación de onda:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{A}(\bar{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\bar{A}(\bar{r},t) = 0$$

- Para el desarrollo de la teoría cuántica del campo electromagnético, es útil expresar el campo a través de un conjunto de variables discretas
- Confinemos el campo en una caja grande de volumen $\Omega = L^3$; de esta manera los modos normales del campo electromagnético son discretizables.
- El campo general $\bar{A}$ es la superposición de estos modos normales $\bar{A}_{k\sigma}$.
- Los coeficientes de Fourier $a_{k\sigma}(t)$ de la expansión, serán tratados cómo las variables reales, las cuales describen la dinámica. Con esto, aspiramos a la cuantización de estas variables de campo.
- Definimos ahora las condiciones de frontera. Es conveniente requerir periodicidad en $\bar{A}$ en los lados:

$$\bar{A}(L,y,z,t) = \bar{A}(0,y,z,t)$$
$$\bar{A}(x,L,z,t) = \bar{A}(x,0,z,t)$$
$$\bar{A}(x,y,L,t) = \bar{A}(x,y,0,t)$$

- Recordando que para todos los modos normales tenemos la misma frecuencia:

$$\bar{A}(x,y,z,t) = \bar{A}(x,y,z)\, e^{i\omega t}$$

- Insertando esto en la ecuación de onda:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\bar{A}(x,y,z) = 0$$

- Una solución normal es: $A_{\sigma K} = N_K \mathcal{E}_{K\sigma}\, e^{i\bar{K}\cdot\bar{x}}$ $(\sigma = 1,2)$

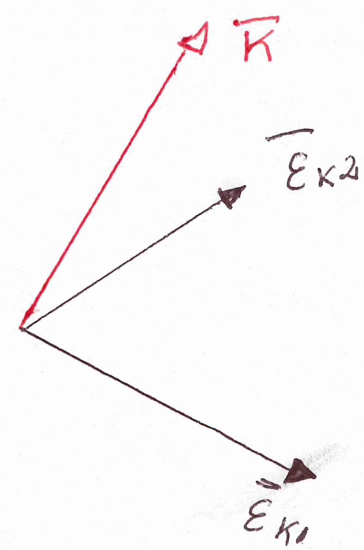
↳ factor de normalización.

donde $K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \frac{\omega_K^2}{c^2}$ $\therefore$ $\omega_K^2 = c^2 K^2$

- Los dos vectores de polarización son perpendiculares al vector de onda.

$$\bar{\mathcal{E}}_{K\sigma}\cdot\bar{K} = 0$$

$$\mathcal{E}_{K\sigma}\cdot\mathcal{E}_{K\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$$



- Para satisfacer las condiciones de frontera:

$$K = (K_x, K_y, K_z) = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) \text{ donde}$$

$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, n_i = enteros.

- La solución más general para el campo $\overline{A}$ es una superposición de todos los modos normales.

- Como la parte espacial de los modos normales es puramente imaginaria (exponenciales), esta superposición es igual a una serie de Fourier:

$$\overline{A}(\overline{x}, t) = \sum_{\substack{K \\ K_z > 0}} \sum_{\sigma_{1,2}} \left[a_{K\sigma}(t) \overline{A}_{K\sigma}(x) + a^*_{K\sigma}(t) \overline{A}^*_{K\sigma}(x) \right]$$

$$= \sum_{\substack{K \\ K_z > 0}} \sum_{\sigma_{1,2}} N_K \varepsilon_{K\sigma} \left[a_{K\sigma}(t) e^{iK\cdot\overline{x}} + a^*_{K\sigma}(t) e^{-iK\cdot\overline{x}} \right]$$

- Nos aseguramos que el vector de potencial, el cual determina los campos electromagnéticos reales, permanezca real a través de sumar el complejo conjugado a cada termino de la suma.

- Ahora, insertando esta expresión en $\overline{\nabla}^2 \overline{A}(\overline{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}(\overline{r}, t) = 0$

$$\sum_{\substack{K \\ K_z > 0}} \sum_{\sigma} N_K \varepsilon_{K\sigma} \left[\left(-K^2 a_{K\sigma}(t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 a_{K\sigma}(t)}{dt^2} \right) e^{iK\cdot\overline{x}} + \left(-K^2 a^*_{K\sigma}(t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 a^*_{K\sigma}(t)}{dt^2} \right) e^{-iK\cdot\overline{x}} \right] = 0$$

De lo cual deducimos que:

$$\frac{d^2 a_{k\sigma}(t)}{dt^2}+\omega_k^2 a_{k\sigma}(t)=0 \qquad (\omega_k^2=k^2c^2)$$

. Esta ecuación diferencial tiene solución:

$$a_{k\sigma}(t) = a_{k\sigma}^{(1)} e^{-i\omega_k t} + a_{k\sigma}^{(2)} e^{i\omega_k t}$$

. Entonces:

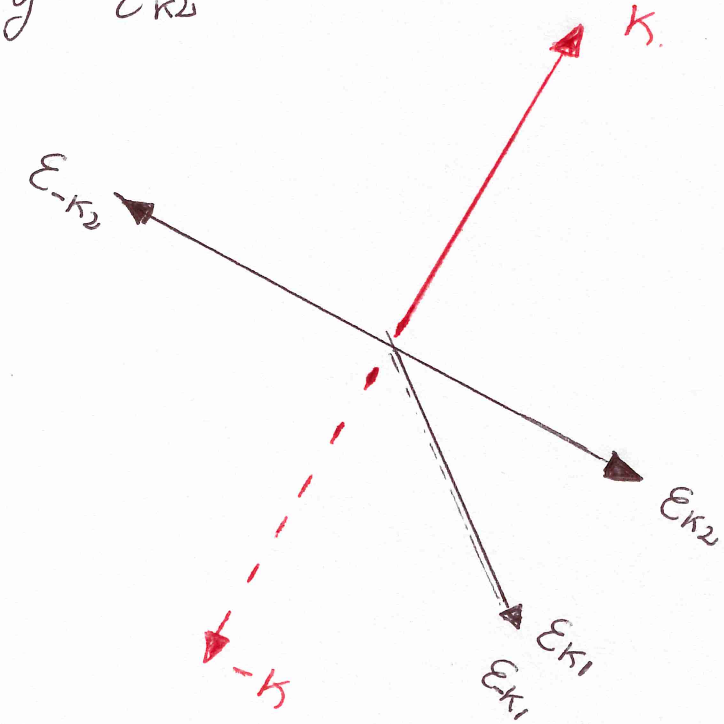
$$\bar{A}(\bar{x},t) = \sum_{\substack{k,\sigma \\ k_z>0}} N_k \bar{\varepsilon}_{k\sigma}\left[a_{k\sigma}^{(1)}(0) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)} + a_{k\sigma}^{(1)*}(0)\, e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)}\right] + N_k \bar{\varepsilon}_{k\sigma}\left[a_{k\sigma}^{(2)}(0) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}+\omega_k t)} + a_{k\sigma}^{(2)*}(0)\, e^{-(\bar{k}\cdot\bar{x}+\omega_k t)}\right]$$

. La restricción $k_z>0$ es aún molesta. Por lo tanto redefinimos $a_{k\sigma}^{(1)}$ y $a_{k\sigma}^{(2)}$ cómo:

$$a_{k\sigma}^{(1)} = a_{k\sigma}(0)$$
$$a_{k\sigma}^{(2)} = -(-1)^{\sigma} a_{-k\sigma}(0)$$

$$\therefore \bar{A}(\bar{x},t) = \sum_{\substack{k,\sigma \\ k_z>0}} N_k \bar{\varepsilon}_{k\sigma}\left[\left[a_{k\sigma}(0) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)} + a_{k\sigma}^{*}(0) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)}\right] - (-1)^{\sigma}\left[a_{-k\sigma}^{*}(0)\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}+\omega_k t)} + a_{-k\sigma}(0) e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x}+\omega_k t)}\right]\right]$$

mientras que las cantidades N_k y ω_k no dependen de la dirección de $\bar{k}$, el vector de polarización cambia a $\varepsilon_{-k\sigma} = -(-1)^{\sigma}\varepsilon_{k\sigma}$ com $\sigma = 1, 2$. Esto nos permite voltear la dirección con lo cual se garantiza la relación ortogonal entre $\bar{k}$, $\bar{\varepsilon}_{k1}$ y $\bar{\varepsilon}_{k2}$



• Con esto reducimos aún más:

$$\bar{A}(\bar{x},t) = \sum_{\substack{k,\sigma \\ k_z>0}} N_k \bar{\varepsilon}_{k\sigma}\left[a_{k\sigma}(0)\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)} + a^{*}_{k\sigma} e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)}\right]$$

$$+ \sum_{\substack{k,\sigma \\ k_z>0}} N_k \bar{\varepsilon}_{-k\sigma}\left[a^{*}_{-k\sigma}(0)\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}+\omega_k t)} + a_{-k\sigma}(0)\, e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x}+\omega_k t)}\right]$$

Si realizamos el siguiente cambio en la segunda.

expression $\sum_{k_z>0} \to \sum_{k_z<0}$:

$$\bar{A}(\bar{x},t) = \sum_{\substack{k,\sigma \\ k_z>0}} N_k \bar{\varepsilon}_{k\sigma}\left[a_{k\sigma}(0)e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)} + a^*_{k\sigma}(0)\, e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)}\right]$$

$$+ \sum_{\substack{k,\sigma \\ k_z<0}} N_k \bar{\varepsilon}_{k\sigma}\left[a_{k\sigma}(0)e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)} + a^*_{k\sigma}(0)\, e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega_k t)}\right]$$

$\therefore$

$$\bar{A}(\bar{x},t) = \sum_{k,\sigma} N_k \varepsilon_{k\sigma}\left[a_{k\sigma}(t)\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} + a^*_{k\sigma}(t)\, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}}\right]$$

donde $a_{k\sigma}(t) = a_{k\sigma}(0)\, e^{-i\omega_k t}$. De esto relación tenemos $\dfrac{d a_{k\sigma}}{dt} = -i\omega_k a_{k\sigma}(t)$, la cual para todo k y σ puede ser interpretada cómo la ecuación de movimiento para el campo.

. Calculemos ahora la energía: $H = \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{L^3} dx^3 (E^2+B^2)$

$$H = \frac{1}{8\pi}\int_{L^3} d^3x \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{A}^*}{\partial t} + (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{A})\right]$$

donde hemos usado el gauge de Coulomb.

$\overline{\nabla}\cdot\overline{A}(\overline{r},t)=0,\quad \varphi(\overline{r},t)=0$ para $\rho=0$

Entonces:

$$\int_{L^3} d^3x \frac{1}{8\pi c^2}\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}^* = -\sum_{k,\sigma}\sum_{k',\sigma'}\frac{\omega_k\omega_{k'}}{8\pi c^2}N_kN_{k'}\overline{\varepsilon}_{k\sigma}\cdot\overline{\varepsilon}_{k'\sigma'}$$

$$*\int_{L^3} d^3x\left(a_{k\sigma}e^{i\overline{k}\cdot\overline{x}}-a^*_{k\sigma'}e^{-i\overline{k}\cdot\overline{x}}\right)$$

$$*\left(a_{k'\sigma'}e^{i\overline{k}'\cdot\overline{x}}-a^*_{k'\sigma'}e^{-i\overline{k}'\cdot\overline{x}}\right)$$

Ahora, usemos la relación de ortogonalidad:

$$\int_{L^3} d^3x\, e^{i\overline{k}\cdot\overline{x}}e^{-i\overline{k}'\cdot\overline{x}} = L^3\delta_{kk'}$$ y tambien

$$\overline{\varepsilon}_{k\sigma}\cdot\overline{\varepsilon}_{k'\sigma'}=\delta_{\sigma\sigma'},\quad \overline{\varepsilon}_{k\sigma}\cdot\overline{\varepsilon}_{-k\sigma'}=-(-1)^{\sigma}\delta_{\sigma\sigma'}$$

Con estas expresiones y usando:

$$\int_{L^3} d^3x\,(\overline{\nabla}\times\overline{A})\cdot(\overline{\nabla}\times\overline{A}^*) = \sum_{k,\sigma}\frac{\omega_k^2}{8\pi c^2}N_k^2L^3\Big[\left[a_{k\sigma}a^*_{k\sigma}+a^*_{k\sigma}a_{k\sigma}\right]$$

$$-(-1)^{\sigma}\left[a_{k\sigma}a_{k\sigma}+a^*_{k\sigma}a^*_{k\sigma}\right]\Big]$$

Con todo esto, es sencillo encontrar que:

$$H = \sum_{k,\sigma} \frac{\omega_k^2}{4\pi c^2} N_k^2 L^3 \left(a_{k\sigma} a_{k\sigma}^* + a_{k\sigma}^* a_{k\sigma} \right)$$

Si escogemos $N_k = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k}}$ tendríamos una expresión idéntica a la energía de osciladores armónicos desacoplados

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,\sigma} \hbar \omega_k \left(a_{k\sigma} a_{k\sigma}^* + a_{k\sigma}^* a_{k\sigma} \right)$$

- En otras palabras, los modos normales del campo electromagnético, con la elección de N_k, se comportan como un oscilador clásico con energía $\hbar\omega_k$.
- Hasta ahora, $a_{k\sigma}$ y $a_{k\sigma}^*$ han sido tratados como amplitudes clásicas. Sin embargo, podemos tratar ahora estos términos como operadores

- Ahora introducimos la cuantización. Desde ahora, designamos $a^*_{k\sigma}$ como $\hat{a}^\dagger_{k\sigma}$ e interpretamos $\hat{a}^\dagger_{k\sigma}$ como el adjunto Hermítico de $\hat{a}_{k\sigma}$.

- Requerimos que: $[\hat{a}_{k\sigma}, \hat{a}^\dagger_{k'\sigma'}] = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$

- Adicionalmente: $[\hat{a}_{k\sigma}, \hat{a}_{k'\sigma'}] = [\hat{a}^\dagger_{k\sigma}, \hat{a}^\dagger_{k\sigma}] = 0$

$$\therefore \quad \hat{H} = \sum_{k,\sigma} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\sigma}\hat{a}_{k\sigma} + \frac{1}{2}\right)$$