Secciones eficaces y tasas de desintegración

- En el caso en el cual una partícula, estudiamos generalmente su desintegración a un número de partículas "n" en el estado final. En este caso, la cantidad de interes experimental es la tasa de desintegración.

- En el caso de dos partículas en el estado inicial, estudiamos su "scattering". El estado final en este caso puede contener las mismas dos partículas; en tal caso se dice que el "scattering" (dispersión) es elástico. En caso contrario, se dice que el scattering es inelástico.

- En cualquier caso, la cantidad física de interes es la sección eficaz de scattering.

Tasa de desintegración

- Suponga que alguna partícula se desintegra en un número de partículas en el estado final. El estado inicial y final no son el mismo entonces.

- Con esto:

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4\left(p_i - \sum_f p_f\right) \frac{1}{\sqrt{2E_iV}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2E_fV}} \mathcal{M}_{fi}$$

- La probabilidad de transición del estado ~~final~~ inicial al final está dada por $|S_{fi}|^2$.

- Tenemos un problema, ya que debemos elevar al cuadrado la función δ. ¿Cuál es el significado de esto?

- Recordemos:

$$\delta^4(p) f(p) = \delta^4(p) f(0)$$

bajo un signo de integración. Si la función $f(p)$ es otra función δ, escribimos:

$$[\delta^4(p)]^2 = \delta^4(p)\,\delta^4(0)_p$$

- Debemos ahora encontrar el significado de $\delta(0)_p$. Esto se puede hacer si realizamos nuestros calculos en un gran volumen V y un tiempo muy largo T.

$\therefore$ Recordamos $\delta^3(0)_p = \frac{V}{(2\pi)^4} \Rightarrow \delta^4(0)_p = \frac{VT}{(2\pi)^4}$

Con esto:

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - \sum_f p_f) VT \frac{1}{2E_f V} \prod_f \frac{1}{2E_f V} |M_{fi}|^2$$

- Ahora, la probabilidad de transición por unidad de tiempo está dada por:

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - \sum_f p_f) \frac{1}{2E_i} \prod_f \frac{1}{2E_f V} |M_{fi}|^2$$

Esto representa la probabilidad por unidad de tiempo de obtener un estado final específico, con momento determinado.

- Cuando vamos al límite de volumen infinito, los valores de momentum son continuos, y por lo tanto no buscamos valores de momento específicos.

- Si por ejemplo estamos interesados si el momento final de alguna partícula está en la región d^3p en el espacio de momentum, debemos entonces multiplicar por el número de estados en esa región. Este número es discretizado a través de partir el espacio de fase en celdas de volumen $(2\pi\hbar)^3$ y colocando cada estado en una celda.

- Entonces, el número de estados de una partícula:

$$\frac{V\,d^3p}{(2\pi)^3}$$

donde $\hbar = 1$ en unidades naturales.

- Entonces, definimos la tasa de desintegración:

$$\Gamma = \frac{1}{2E_i} \int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} (2\pi)^4 \delta^4 (p_i - \sum_f p_f) |M_{fi}|^2$$

- El tiempo de vida de una partícula es el inverso de su tasa de desintegración.

Desintegración de un escalar en una pareja fermion anti-fermion

- Para el caso $B(k) \to e^-(p) + e^+(p')$

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^4 (k - p - p') |M_{fi}|^2$$

Note que hemos usado $E_i \to M$, dado que consideremos la partícula escalar desintegrandose en el marco de reposo.

• Para el orden más bajo:

$$\Gamma = \frac{h^2}{2M}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}(2\pi)^4\delta^4(k-p-p')\left|\overline{U}_s(\bar{p})\,\mathcal{V}_{s'}(\bar{p}')\right|^2$$

Esta será la tasa de desintegración si buscamos valores específicos de espín s para el electrón y s' para el positrón. Sin embargo, debemos sumar sobre todos los posibles valores de espín.

$$\Gamma = \frac{h^2}{2M}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}(2\pi)^4\delta^4(k-p'-p)\sum_{s,s'}\left|\overline{U}_s(\bar{p})\,\mathcal{V}_{s'}(\bar{p})\right|^2$$

Suma de espines

• Reescribimos la suma de espines como:

$$\sum_{spin} = \sum_{s,s'}\left|\overline{U}_s(\bar{p})\,\mathcal{V}_{s'}(\bar{p}')\right|^2$$

$$= \sum_{s,s'}\left[\overline{U}_s(\bar{p})\,\mathcal{V}_{s'}(\bar{p}')\right]\left[\overline{U}_s(\bar{p})\,\mathcal{V}_{s'}(\bar{p}')\right]^*$$

Debido que las cantidades en los paréntesis son números, podemos reemplazar el complejo conjugado por el conjugado hermítico:

$$\left[\bar{U}_s(p)\, v_{s'}(p')\right]^* = \left[\bar{U}_s(\bar{p})\, v_{s'}(\bar{p}')\right]^\dagger = \left[U_s^\dagger(p)\,\gamma^0 v_{s'}(p')\right]^\dagger$$

$$= \left[v_{s'}^\dagger(\bar{p}')\,\gamma^0 U_s(\bar{p})\right] = \left[\bar{v}_{s'}(p')\, U_s(\bar{p})\right]$$

$$\therefore \quad \sum_{spin} = \sum_{s,s'} \left[(\bar{U}_s(\bar{p}))_\alpha\, (v_{s'}(p'))_\alpha\right]\left[(\bar{v}_{s'}(\bar{p}'))_\beta\, (U_s(\bar{p}))_\beta\right]$$

$$= \underbrace{\left[\sum_s U_s(\bar{p})\bar{U}_s(\bar{p})\right]_{\beta\alpha}}_{[\not{p}+m]_{\beta\alpha}} \underbrace{\left[\sum_{s'} v_{s'}(\bar{p})\, \bar{v}_{s'}(p')\right]_{\alpha\beta}}_{[\not{p}'-m]_{\alpha\beta}}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[(\not{p}+m)(\not{p}'-m)\right]$$

$$\sum_{spin} = \mathrm{Tr}\left[\not{p}\not{p}' - m\not{p} + m\not{p}' - m^2\right]$$

El último término es m^2 por la traza de la matriz identidad (4×4)

Esto da $4m^2$. El segundo termino es:

$$m p^\mu \, Tr(\gamma_\mu) = 0$$

De igual manera, el tercer termino tambien se desvanece. Para el primer termino:

$$p^\mu p'^\nu \, Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = p^\mu p'^\nu \, Tr(\gamma_\nu \gamma_\mu)$$

Recordemos $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2 g_{\mu\nu}$.

$$\therefore \quad p^\mu p'^\nu \, Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \frac{1}{2} p^\mu p'^\nu \, Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

$$= \frac{1}{2} p^\mu p'^\nu \, Tr(2 g_{\mu\nu}) = p^\mu p'^\nu \, Tr(g_{\mu\nu})$$

En relación con los indices espinoriales $g_{\mu\nu}$ es un sólo un número por una matriz unitaria. Entonces

$$p^\mu p'^\nu \, Tr(g_{\mu\nu}) = 4 \, p \cdot p' \,;$$ Con esto:

$$Tr[(\not{p} + m)(\not{p}' - m)] = 4(p \cdot p' - m^2)$$

Ahora: $\Gamma = \frac{h^2}{2M} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^4(K - p - p') \, 4(p\cdot p' - m^2)$

debido a la función $\delta \Rightarrow K = p + p'$ $\therefore$

$K^2 = p^2 + p'^2 + 2p\cdot p' \Rightarrow M^2 = 2m^2 + 2p\cdot p'$

$2p\cdot p' = M^2 - 2m^2$. Con esto:

$$4(p\cdot p' - m^2) = 4\left(\frac{M^2}{2} - m^2 - m^2\right) = 2(M^2 - 4m^2)$$

Con esto:

$$\Gamma = \frac{h^2(M^2 - 4m^2)}{M}\,\rho \quad ; \text{ donde}$$

$$\rho = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^4(K - p - p')$$

ρ es llamado factor de espacio de fase. Este contiene todos los factores cinemáticos, e incluye la función δ para la conservación del momentum.

Sección Eficaz de Scattering

- Esfera de radio a : área πa^2
- A : Área del blanco.
- P_s : probabilidad de scattering:

$$P_s = \frac{\pi a^2}{A} \Rightarrow \pi a^2 = P_s A.$$

Todos los objetos no son esferas:

$$\sigma = P_s A$$

Ahora, suponga que tenemos un haz paralelo con densidad ρ y velocidad v hacia el blanco. En un tiempo t, este haz llena un volumen $\rho v t A$. Eligiendo t tal que el volumen llena - contiene sólo una partícula:

$$1 = \rho v t A \quad \therefore \quad A = \frac{1}{\rho v t}.$$

$$\sigma = P_s \cdot \frac{1}{\rho v t} = \frac{P_s}{t} \cdot \frac{1}{\rho v}$$

- La cantidad $\frac{P_s}{t}$ se llama tasa de transición: probabilidad de scattering por unidad de tiempo.

- La cantidad ρv es el flujo de partículas

- Esto se escribió para partículas clásicas.

- En el caso cuántico P_s significa la probabilidad de transición.

- La probabilidad de transición es $\frac{|S_{fi}|^2}{T}$

$$\frac{|S_{fi}|}{T} = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i P_i - \sum_f P_f\right) V \prod_i \frac{1}{2E_i V} \prod_f \frac{1}{2E_f V} |M_{fi}|^2$$

Esta es la probabilidad de transición a un momentum final específico. Para un rango de momentos debemos integrar esto, incluyendo un factor:

$\frac{V\, d^3 p}{(2\pi)^3}$ para todos los estados de momentum:

$$\sigma = \frac{1}{\rho v V} \frac{1}{4E_1 E_2} \int \left(\prod_f \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3 2E_f}\right) (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i P_i - \sum_f P_f\right) |M_{fi}|^2$$