MECANICA CUANTICA 2

LECTURA #16

INVARIANZA GAUGE EN LA MECANICA CUANTICA

En mecanica Clasica la trayectoria que sigue una particula entre el punto $\vec{r}_1$, en el instante t_1 y el punto $\vec{r}_2$ en el instante t_2 es aquella que minimiza la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt \qquad \mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} m v^2 - V(\vec{r}, t)$$

La respuesta a este problema variacional se reduce a resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right)$$

Cuando tenemos multiples grados de libertad de diversa indole podemos encontrar un conjunto de variables generalizadas $\{q_i\}$ y velocidades generalizadas $\{\dot{q}_i\}$ $(i=1,2,\dots,N)$ donde N es el numero de grados de libertad del sistema.

Para sistemas conservativos la energía del sistema esta dada por: $E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$

El momentum generalizado esta dado por $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$

$\Rightarrow p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j, t) \longrightarrow$ Invirtiendo estas relaciones podemos obtener

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t)$$

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Si expresamos las $\dot{q}_i$ en función de q_i y p_i $\Rightarrow$ $E = \sum_i p_i \dot{q}_i(q_j, p_j, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i(q_j, p_j, t)) = f(q_i, p_i, t)$

Esta energía expresada en función de q_i, p_i la denominamos Hamiltoniano

A partir del Hamiltoniano podemos obtener ecuaciones de movimiento:

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $\longleftarrow$ Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Corchetes de Poisson:

Si tenemos dos funciones de las variables dinamicas q_i, p_i $f(q_i, p_i)$, $g(q_i, p_i)$ $\Rightarrow$

$$\{f, g\} = \sum_i \left\{\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right\}$$

$\Rightarrow \{f, g\} = -\{g, f\}$; $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q} = 1 \Rightarrow \{q, p\} = 1$

en general $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$\{q, f\} = \frac{\partial f}{\partial p}$; $\{p, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q}$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ ← Evolución temporal de la cantidad $f(q,p)$ en un sistema "governado" por $H(q,p,t)$.

$\dot{q} = \{q, H\}$; $\dot{p} = \{p, H\}$

Si $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{df}{dt} = \{f, H\} \Rightarrow$ si $\{f, H\} = 0 \Rightarrow f = cte$ ← Constante de movimiento.

MECANICA ANALITICA Y MECANICA CUANTICA

$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$	$\Longrightarrow$	$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$
$\{x, f(p)\} = \frac{\partial f}{\partial p}$		$[\hat{x}, F(\hat{p})] = i\hbar\, F'(\hat{p})$
$\{p, g(x)\} = \frac{\partial g}{\partial q}$		$[\hat{p}, G(\hat{x})] = -i\hbar\, G'(\hat{x})$
$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$		$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle_\psi + \left\langle\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right\rangle_\psi$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle\hat{\vec{R}}\rangle_\psi = \frac{1}{m}\langle\hat{\vec{P}}\rangle_\psi \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{\vec{P}}\rangle_\psi = -\langle\nabla V(\hat{\vec{R}})\rangle_\psi \end{cases} \longleftarrow \text{Teorema de Ehrenfest.}$$

Regla de cuantización de Dirac:

$f \to \hat{f}$

$g \to \hat{g}$

$$\{f, g\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{g}]$$

PARTICULA CARGADA EN UN CAMPO ELECTROMAGNETICO

Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\{\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\}$ (unidades naturales)

Esta fuerza esta expresada en terminos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Expresemosla en terminos de ϕ y $\vec{A}$ ← Potenciales Electromagneticos

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$; $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\vec{F} = q\{\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\} = q\{-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\}$$

que se puede escribir como:

$\vec{F} = q\{-\nabla\phi + \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{d}{dt}(\nabla_{\vec{v}}(\vec{A}\cdot\vec{v}))\}$ donde $\nabla_{\vec{v}} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial v_z}$

$\vec{F} = q\{-\nabla(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) + \frac{d}{dt}(\nabla_{\vec{v}}(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}))\}$ ← Ver Goldstain, Classical Mechanics.

Cuando en mecanica clasica una fuerza depende de $\vec{v}$ => $\vec{F} \neq -\nabla U(\vec{r})$

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\vec{v}} U\right) \qquad U = U(\vec{r},\vec{v})$$ ← Ver Goldstain.

En el caso electromagnetico => $U = q\phi - q\vec{v}\cdot\vec{A}$ ← Energia potencial asociada a una carga electrica en un campo electromagnetico.

$$\Rightarrow \mathcal{L} = K - U = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{1}{m}\{\vec{p} - q\vec{A}\}$$

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{m}\{\vec{p}-q\vec{A}\}\cdot\vec{p} - \frac{1}{2m}\{\vec{p}-q\vec{A}\}^2 + q\phi - \frac{q}{m}\{\vec{p}-q\vec{A}\}\cdot\vec{A}$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{q}{m}\vec{A}\cdot\vec{p} - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{m}\vec{p}\cdot\vec{A} - \frac{q^2}{2m}\vec{A}^2 + q\phi - \frac{q}{m}\vec{p}\cdot\vec{A} + \frac{q^2}{m}\vec{A}^2$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m}2\vec{p}\cdot\vec{A} + \frac{q^2}{2m}\vec{A}^2 + q\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m}\{\vec{p} - q\vec{A}\}^2 + q\phi}$$ ← Hamiltoniano de una particula cargada, en un campo electromagnetico.

Haciendo primera cuantización tenemos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\{\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{r}},t)\}^2 + q\phi(\hat{\vec{r}},t)$$ ← Hamiltoniano cuantizado.

INVARIANZA GAUGE DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \\ \phi &\to \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$ Transformación Gauge del electromagnetismo

$\chi = \chi(\vec{r},t)$ ← Arbitraria

$$\nabla\times\vec{A}' = \nabla\times(\vec{A}+\nabla\chi) = \nabla\times\vec{A} + \cancelto{0}{\nabla\times\nabla\chi} = \nabla\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}' = \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\vec{A} = \vec{B} \to \vec{B}' = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}' = \vec{E}$$

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B}') = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}' = \vec{F}$$

El electromagnetismo es invariante bajo la transformación gauge → $\chi(\vec{r},t)$ arbitrario.

↳ A nivel clasico.

Veamos que sucede a nivel cuantico:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\{\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{r}},t)\}^2 + q\phi(\hat{\vec{r}},t) \longrightarrow \hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \longrightarrow \{E, |\psi\rangle\}$$ ← Estados y valores propios de Energía.

Ante una transformación gauge =>

$$\hat{H} \to \hat{H}' = \frac{1}{2m}\left\{\hat{\vec{p}} - q(\vec{A}(\hat{\vec{r}},t) - \nabla\chi(\hat{\vec{r}},t))\right\}^2 + q\,\phi(\hat{\vec{r}},t) - q\,\frac{\partial\chi(\hat{\vec{r}},t)}{\partial t}$$

En general $\hat{H}'|\psi'\rangle = E'|\psi'\rangle$ es tal que $\{E', |\psi'\rangle\} \neq \{E, |\psi\rangle\}$

La invarianza gauge del electromagnetismo no es invariante bajo una transformación gauge. Esto no es aceptable ya que implica diferencias significativas entre el electromagnetismo a nivel microscopico y el electromagnetismo a nivel macroscopico.

Para reestablecer la invarianza gauge la función de onda $\psi(\vec{r},t)$ tambien debe transformarse de la mano con ϕ y $\vec{A}$.

La regla de transformación para $\psi(\vec{r},t)$ es: $\psi(\vec{r},t) \longrightarrow \psi'(\vec{r},t) = e^{iq\chi(\vec{r},t)/\hbar}\,\psi(\vec{r},t)$

$\Rightarrow \hat{H}'|\psi'\rangle = E'|\psi'\rangle \qquad E' = E$

En resumen, en mecanica cuantica la transformación gauge para el electromagnetismo es:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \\ \phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \\ \psi' = e^{iq\chi}\psi \end{array}\right\} \text{Demostrarlo.}$$

Cuando transformamos $\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$, $\alpha = cte$ (cambio de fase) $\longrightarrow$ La mecanica cuantica permane se invariante $\to$ transformación global del grupo $U(1)$.

Cuando cambiamos $\alpha \to q\chi(\vec{r},t)/\hbar$ $\chi(\vec{r},t)$ arbitrario => transformación local del grupo $U(1)$

Para que la mecanica cuantica permanesca invariante ante transformaciones locales de $U(1)$ debemos introducir el campo electromagnetico.

$\hat{\vec{p}} \to \hat{\vec{p}} - q\vec{A} \qquad \hat{\vec{p}} = i\hbar\nabla \Rightarrow i\hbar\nabla \to i\hbar\nabla - q\vec{A} \quad \Rightarrow \nabla \to \nabla + i\,{}^{q}/_{\hbar}\vec{A}$ ← Redefinición de la derivada
Derivada covariante.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \to \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi = \frac{1}{2m}\left\{\vec{p} - q\vec{A}\right\}^2\psi = \frac{1}{2m}\left\{i\hbar\nabla - q\vec{A}\right\}^2\psi$$

$$\downarrow$$

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi \to \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + i\,{}^{q}/_{\hbar}\,\phi$ ← Redefinición de la derivada
Derivada covariante.