Amplitud de Feynman

- En las expresiones que calculamos para S, se pueden identificar tres tipos de factores. Uno de los factores es la función δ para la conservación del 4-momentum en el proceso completo. Adicionalmente, encontramos un factor $(2EV)^{-1/2}$ para cada partícula en el estado inicial o final. La parte final en la expresión para S_{fi}, la cual depende de la naturaleza de la interacción, se llama la Amplitud de Feynman.

- La amplitud de Feynman será denotada por $i\mathcal{M}$

$$\therefore \; S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right) \prod_i \frac{1}{\sqrt{2E_iV}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2E_fV}} \mathcal{M}_{fi}$$

- Note el termino δ_{fi}, el cual no estuvo presente antes. Este termino era cero ya que el estado final era diferente al estado inicial

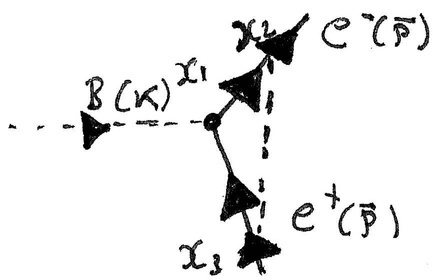
- Considere un caso donde no existan interacciones $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{fi} = 0$.

- Comencemos a ver amplitudes de Feynman para algunos casos. Para el caso $B(K) \rightarrow e^+(p') + e^-(p)$ (primer orden $S^{(1)}$):

$$i\mathcal{M}_{fi} = (-ih)\,\bar{U}_s(p)\,V_{s'}(p')$$

donde $K = p' + p$, debido a la función δ.

- Para el diagrama



$$i\mathcal{M}_{fi}^{(3)} = (-ih)^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, iD_F(q) \times \left[\bar{U}_s(p)\, iS_F(p-q)\, iS_F(p-q-K)\, V_{s'}(p')\right]$$

Reglas de Feynman

- La parte no trivial de escribir el elemento matricial S es determinar la amplitud de Feynman. En los ejemplos dados, se ha determinado usando el teorema de Wick.

- Sin embargo, podemos dibujar los diagramas de Feynman para un proceso directamente, usando el Lagrangiano de la interacción.

- Para hacer esto, primero dibujamos las partículas iniciales y finales y las unimos a través de vértices permitidos por el Lagrangiano de interacción.

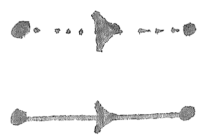
- El número de vértices es el mismo como el número del orden de la perturbación.

- Todos los vértices se identifican, tal que leyes de conservación de momentum y carga se cumplen en cada vértice. Con esto, nuestra tarea será mucho más fácil si tenemos reglas para calcular M_{fi} directamente de diagramas de Feynman.

1. Lineas Internas

- Si tenemos una linea interna escalar de momentum P, entonces tendremos un factor de $i\Delta_F(p)$ en la amplitud de Feynman.

- De manera similar, si tenemos una linea interna para un fermion, el factor apropiado será: $iS_F(p)$.



$= i\Delta_F(p)$

$= iS_F(p)$

2. Lineas Externas

- Para las lineas externas, podemos usar los resultados:

$$\phi_+(x)\,|B(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\, e^{-ikx}\,|0\rangle$$

$$\psi_+(x)\,|e^-(p,s)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}}\, U_s(p)\, e^{-ipx}\,|0\rangle$$

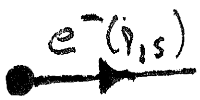
$$\overline{\psi}_+(x)\,|e^+(p',s')\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\, \overline{V}_{s'}(p')\, e^{-ip'x}\,|0\rangle$$

y sus duales.

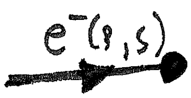
- En estas ecuaciones, los factores exponenciales a la derecha son parte del proceso para que $\mathcal{H}$ constituya la función δ.
- Los factores en la raíz cuadrada son los mismos que no son parte de la amplitud de Feynman.

- Entonces, para partículas escalares, no necesitamos colocar nada en la regla de Feynman.

- Para partículas de espín $1/2$, tenemos los siguientes factores, tenemos los siguientes factores dependiendo si es un estado inicial o un estado final:

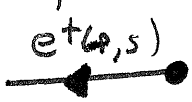


$= \bar{u}_s(\bar{p})$ → Partícula producida

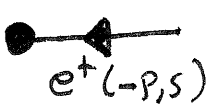


$= u_s(\bar{p})$ → Partícula aniquilada.

- Para anti-partículas:



$= \bar{v}_s(\bar{p})$ → anti-partícula en el estado inicial



$= v_s(\bar{p})$ → anti-partícula en el estado final.

3 Factores Numéricos

- Ya hemos visto que la integración sobre la coordenada de cada vértice da un factor $(2\pi)^4$ por la función δ para la conservación de momentum.

- Si el número de vértices es v, tendremos $(2\pi)^{4v}$ factores y v diferentes funciones δ.

- Sin embargo, existe otra manera en la cual tendremos factores de (2π). Cuando expresemos los propagadores en el espacio de coordenadas en términos de sus transformadas de Fourier, esto involucrará una transformación sobre el espacio de momentum: $\int d^4q/(2\pi)^4$. Entonces, si tenemos n líneas internas en el diagrama tendremos $(2\pi)^{-4n}$. Entonces, el número de 2π es $4(v-n)$.

- Cuando definimos la amplitud de Feynman de la matriz S, mantenemos $(2\pi)^4 \delta^4(\sum P_i - \sum P_f)$ afuera. Todas las otras potencias se dejan dentro de la amplitud de Feynman y por lo tanto tenemos: $(2\pi)^{4(v-n-1)}$

$$v - n - 1 = -l$$

donde l es el número de loops en el diagrama. $\therefore$ $(2\pi)^{-4l}$

4. Integraciones de Momentum

- Ahora contamos el número de integraciones de momentum. Tenemos un momentum por cada propagador de la transformada de Fourier, y tenemos n de estos.
- Sin embargo, como mencionamos anteriormente, obtenemos v diferentes funciones δ de las integrales sobre

las coordenadas en los diferentes vertices - v.

- De todos estos, una combinación puede ser interpretada como la conservación de momentum de todo el proceso. Entonces, tendremos $v-1$ funciones δ diferentes, las cuales invalucrarán el momento interno.

- Podemos integrar sobre estas funciones δ, las cuales van a determinar algunos de los momentos internos en términos de los externos. Entonces tendremos $n-v+1$ momentos, lo cual es igual al número de loops.

- Podemos resumir: para cada loop debemos caloccar

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

para el momentum circulando en el loop.

5. Anti-simetría de Fermiones

- Los fermiones anti-conmutan entre ellos. Este hecho se manifiesta de varias maneras. Para cada loop fermionico, debemos colocar un factor de -1.

6. Vertices

- Las reglas de Feynman para los vertices no pueden ser especificadas en terminos generales, ya que dependen del Lagrangiano de interacción. Se verán ejemplos más adelante.