# Teoría Clásica de Campos

- Mostraremos la conexión entre la teoría clásica de campos y la relatividad especial. Se hará un repaso de las nociones de relatividad especial, para mostrar como se transforman los campos escalares y vectoriales bajo transformaciones de Lorentz.

* Unidades Naturales

- Las unidades naturales son unidades físicas de medida, definidas en términos de constantes físicas universales.

- Veamos el primer conjunto de unidades naturales: Unidades de planck!

• Las unidades de Planck:

$$G_N = 1 \ , \quad \hbar = 1 \ , \quad c = 1 \ , \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1 \ , \quad \kappa = 1$$

• Estas unidades son Naturales debido a que el origen de su definición proviene solo de propiedades de la naturaleza y no de una definición humana.

• Ahora, teniendo en cuenta que:

$$1\ GeV = 1.602\ 176565(35) \times 10^{-10} J$$

La masa del protón se puede escribir:

$$m_p c^2 = 1.672621777(74) \times 10^{-27} Kg \times \left(299\,792\,458 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$= 938.272046\ (21)\ MeV \approx 1\ GeV.$$

Tal que $1\ Kg = 5.60958912\ (42) \times 10^{26}\ GeV.$

- Adicionalmente, podemos obtener otras equivalencias importantes:

$$\hbar c = 1.973\,269\,631\,(49) \times 10^{-16}\ GeV\,m$$
$$= 0.1973\,269\,631\,(49)\ GeV\,fm$$

- El propósito de las unidades naturales es simplificar las expresiones algebraicas que aparecen en las leyes físicas.

- Dimensiones de Planck.

- La relación entre masa y energía se puede obtener a partir de:

$$G_N = 6.67428\,(67) \times 10^{-11}\ m^3\,Kg^{-1}\,s^{-2}$$
$$= 6.70881\,(65) \times 10^{-39}\ \hbar c \left(\frac{GeV}{c^2}\right)^{-2}$$

Entonces, podemos definir la "masa" de Planck:

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 1.2209 \times 10^{19}\ \frac{GeV}{c^2} = 2.1765 \times 10^{-8}\ kg$$

- La energía de Planck es entonces $M_p c^2$
- De manera similar, podemos definir la longitud de Planck:

$$L_p = \frac{\hbar}{c M_p} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \simeq 1.6163 \times 10^{-35} m$$

- Este análisis dimensional muestra que la longitud de Planck corresponde a una escala a la cual los efectos gravitacionales llegan a ser importantes, es decir, la intensidad del potencial gravitacional es del orden de la masa de la partícula que lo genera:

$$V_{gravity} = G_N \frac{M_p^2}{L_p} = M_p c^2$$

- Ahora, el tiempo de Planck es:

$$t_P \equiv \frac{L_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} \approx 5.3912 \times 10^{-44} s,$$

la temperatura de Planck:

$$T_P \equiv \frac{M_P c^2}{k} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N k^2}} = 1.4168 \times 10^{32} K$$

## Notación Relativista

- Las transformaciones de Lorentz se definen como las transformaciones que dejan invariante el producto escalar en el espacio de Minkowski, definido como:

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv x_\nu x^\nu = x^{0^2} - x^i x^i = a^{0^2} - \overline{x} \cdot \overline{x}$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ y se asume suma sobre índices repetidos.

Además: $x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu$ , $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$

- Finalmente, la métrica usada se define como:

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\{g_{\mu\nu}\}$ denota la forma matricial del tensor $g_{\mu\nu}$.

- El producto de dos cuadrivectores se define en forma similar como:

$$x_\nu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \bar{x}\cdot\bar{y}$$

- El inverso de la métrica es:

$$\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\}$$

tal que $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$

- Bajo la transformación de Lorentz:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

- La invarianza del producto escalar:

$$x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned} x'^\mu y'_\mu &= g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta y^\beta \\ &= \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha y^\beta \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que el producto escalar en el espacio de Minkowski definido por la métrica $g_{\mu\nu}$ sea invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

- Reorganizando los índices mudos:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\beta}{}_{\nu}$$

- En notación matricial:

$$\{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\}^{T} \{g_{\alpha\beta}\} \{\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\}$$

$$g = \Lambda^{T} g \Lambda$$

- Ahora:

$$g^{\rho\mu} g_{\mu\nu} = g^{\rho\mu} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, g_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}$$

$$\therefore \quad \delta_{\nu}{}^{\rho} = \Lambda_{\beta}{}^{\rho} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \qquad \text{o}$$

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda_{\alpha}{}^{\mu} \Lambda^{\alpha}{}_{\nu}.$$

$$\hookrightarrow (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}{}^{\mu} \quad \text{inversa de } \Lambda$$

Para la métrica contravariante:

$$g^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}{}^{\mu}\, g^{\alpha\beta}\, \Lambda_{\beta}{}^{\nu}$$

- Como un ejemplo de Transformación de Lorentz, considere un desplazamiento a lo largo del eje $x$:

$$\{x^\mu\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t + vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{x + vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \cosh \xi & \operatorname{Senh} \xi & 0 & 0 \\ \operatorname{Senh} \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{\Lambda^\mu{}_\nu\}\{x^\nu\}$$

## Ejemplos de Cuadrivectores

- Definimos $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \bar{x})$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, P_x, P_y, P_z) = (E, \bar{P})$$

- De la relatividad especial tenemos que:

$$E = \gamma m$$
$$\bar{P} = \gamma m \bar{v}$$

$$\therefore \qquad v^2 = |\overline{V}|^2$$

$$E^2 - \overline{p}^2 = \gamma^2 m^2 (1 - v^2) = m^2$$

- El invariante de Lorentz asociado a $p^\mu$ corresponde a:

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 = E^2 - \overline{p}^2$$

- En el límite norelativista: Para $\overline{p} = 0$

$$E = m \qquad \text{con} \quad c^2 = 1.$$

- En el límite relativista: Para $\overline{p}^2 \gg m^2$

$$\therefore \qquad E = |\overline{p}|$$

- Ahora, para el electromagnetismo tenemos:

$$J^\mu = (J^0, \overline{J}) = (\rho, \overline{J})$$

$$A^\mu = (A^0, \overline{A}) = (\phi, \overline{A})$$