Teorema de Wick

- Cada término en la expansión perturbativa de la matriz S contiene un producto temporalmente ordenado de un número de factores H_I, cada uno de los cuales está bajo ordenamiento normal.

- El proceso de ordenamiento normal implica colocar todos los operadores de aniquilación a la derecha de los operadores de creación. Pero el orden temporal, crea un problema ya que operadores en tiempos más antiguos (o tempranos) deben estar más a la derecha.

- Con esto, los operadores de creación en tiempos más tempranos deberían estar a la derecha de operadores de aniquilación que están en tiempos posteriores.

- Esto va en contravía a lo que necesitamos en ordenamiento normal. La ventaja de los productos ordenados normalmente es que sus valores esperados se desvanecen en el vacío.

- Por lo tanto, deseamos regresar de los productos ordenados temporalmente a los productos con ordenamiento normal. Para esto, necesitamos una relación entre estos dos; dicha relación la provee el teorema de Wick.

- Considere primero un ejemplo simple del producto temporal ordenado de dos factores de un campo escalar. Recuerde:

$$\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(x')\right] \equiv \Theta(t-t')\,\phi(x)\,\phi(x') + \Theta(t'-t)\,\phi(x')\,\phi(x)$$

Nuestra tarea se reduce a escribir productos simples en los términos de la derecha, en términos de productos con ordenamiento normal. Bajo este propósito escribimos:

$\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x)$, donde ϕ_+ contiene el operador de aniquilación y ϕ_- contiene el operador de creación. Es una forma abreviada de escribir: $\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \left(a(x) e^{-ipx} + a^\dagger(x) e^{ipx} \right)$

- Entonces: $\phi_+ |0\rangle = 0$, $\langle \phi | \phi_-(x) = 0$
- Ahora,

$$\phi(x)\phi(x') = \phi_+(x)\phi_+(x') + \phi_+(x)\phi_-(x') + \phi_-(x)\phi_+(x') + \phi_-(x)\phi_-(x')$$

- Si escribimos $:\phi(x)\phi(x'):$, usando la definición de $\phi(x)\phi(x')$, note que el segundo término es el único en el cual el operador de aniquilación está a la izquierda del operador de creación.

Entonces: $:\phi(x)\,\phi(x'): = \phi(x)\,\phi(x') - \phi_+(x)\,\phi_-(x) + \phi_+(x')\phi_-(x)$

$$:\phi(x)\,\phi(x'): = \phi(x)\,\phi(x') - [\phi_+(x), \phi_-(x')]_-$$

. Ahora, note que:

$$\langle 0|\,\phi(x)\,\phi(x')|0\rangle = \langle 0|\,[\phi_+(x), \phi_-(x')]_-\,|0\rangle$$

dado que el termino $\langle 0|\phi_-(x)\phi_+(x)\,|0\rangle$ se desvanece.

. Sin embargo, debido a que el conmutador que tenemos es un número, su valor esperado es un número también. Con esto:

$$\langle 0|\,\phi(x)\phi(x')\,|0\rangle = [\phi_+(x), \phi_-(x)]_-$$

entonces: $\phi(x)\,\phi(x') = :\phi(x)\,\phi(x'): + \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle$

$$\therefore\ \mathcal{T}[\phi(x)\,\phi(x')] = :\phi(x)\,\phi(x'): + \langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\phi(x')]|0\rangle$$

- El resultado anterior es posible ya que para campos escalares $:\phi(x)\,\phi(x'): \;=\; :\phi(x')\,\phi(x):$ y recordemos que $\Theta(t-t')+\Theta(t'-t)=1$.

- Ahora, note que tenemos:

$$\mathcal{T}[\phi(x)\phi(x')] = :\phi(x)\,\phi(x'): + \langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\,\phi(x')]|0\rangle$$

Para el término $\langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\,\phi(x')]|0\rangle$ usaremos una notación compacta:

$$\langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\,\phi(x')]|0\rangle \equiv \underbrace{\phi(x)\,\phi}_{}(x')$$, a esto

se le conoce como contracciones de Wick. Entonces:

$$\mathcal{T}[\phi(x)\,\phi(x')] = :\phi(x)\,\phi(x'): + \underbrace{\phi(x)\,\phi}_{}(x')$$

- De manera general, cuando dos campos aparecen en el producto y no son necesariamente el mismo campo, escribiremos:

$$\mathcal{T}[\Phi(x)\,\Phi'(x')] = :\Phi(x)\,\Phi'(x'): + \underbrace{\Phi(x)\,\Phi'}_{}(x')$$

- Debido a que la contracción es un valor esperado del vacío, se va a desvanecer a menos que el operador de la derecha cree una partícula y el otro la aniquile.

- Entonces, si los campos son diferentes, el valor esperado se desvanece. Si corresponde con el mismo campo (o un campo y su adjunto), tenemos "i" veces el propagador de Feynman respectivo:

$$\underline{\phi(x_1)\,\phi(x_2)} = i\,\Delta_F(x_1-x_2)$$

$$\overline{\phi(x_1)\,\phi^{+}(x_2)} = \overline{\phi^{+}(x_2)\,\phi(x_1)} = i\,\Delta_F(x_1-x_2)$$

$$\overline{\psi_\alpha(x_1)\,\bar{\psi}_\beta(x_2)} = -\overline{\bar{\psi}_\beta(x_2)\,\psi_\alpha(x_1)} = i\,S_{F\alpha\beta}(x_1-x_2).$$

- El teorema de Wick puede ser generalizado a cualquier número de operadores de campo, multiplicando a derecha por el campo y ordenando de tal manera que se consideran los intercambios requeridos para cambiar de un producto ordenado temporalmente a un producto ordenado normalmente.

- Finalmente, en la expansión de la matriz S, tenemos productos ordenados normalmente y temporalmente:

$$\mathcal{T}\left[\mathcal{H}_I(x_1) \ldots\ldots \mathcal{H}_I(x_n)\right] = \mathcal{T}\left[:AB \ldots (x_1): \ldots\ldots :AB \ldots (x_n):\right]$$

De expansiones de Wick a diagramas de Feynman.

- En esta parte mostraremos como usar la expansión de Wick para calcular elementos matriciales de la matriz S, relacionados con escalares y espinores.

- Como ejemplo usemos: $\mathcal{L}_{int} = -h\bar{\psi}\psi\phi$. Vamos a considerar estados iniciales y finales específicos, y en cada caso veremos que términos de la matriz

S no se desvanecen.

Interacción de Yukawa: desintegración de un escalar.

- Denotaremos el cuanto del campo ϕ por B, debido a que la partícula es un boson. El cuanto del campo fermiónico ψ serán llamados electrones.
- Denotamos con M la masa de B y la masa de los electrones con m. Suponga que $M > 2m$, tal que B pueda desintegrarse a una pareja electrón-positrón.

- $B(k) \longrightarrow e^{-}(p) + e^{+}(p')$ donde k, p y p' denotan el 4-momentum de cada partícula. Nuestro objetivo es calcular los elementos de la matriz S de estos procesos.

• Entonces: $\mathcal{H}_I = h : \overline{\psi}\psi\phi :$

Primero veremos el término lineal en $\mathcal{H}_I$ en la matriz S:

$$S^{(1)} = \mathcal{T}\left[-i \int d^4x\, \mathcal{H}_I(x) \right] = -ih \int d^4x : \overline{\psi}\psi\phi :$$

En este último termo se ha omitido el símbolo de ordenamiento temporal, debido a que en este caso sólo existe un punto en espacio-tiempo y por lo tanto sólo un tiempo.

• Usaremos para el campo ψ, ψ_+ para denotar el operador de aniquilación para el electrón y ψ_- el operador de creación para el positrón. De manera similar, $\overline{\psi}_+$ contiene el operador de aniquilación del positrón y $\overline{\psi}_-$ contiene el operador de creación para el electrón.

• El sub-indice indica el signo de E cuando el operador de energía $i\frac{\partial}{\partial t}$ actua sobre la transformada de Fourier de los campos.

$$S^{(1)} = -ih\int d^4x : (\overline{\psi}_+ + \overline{\psi}_-)(\psi_+ + \psi_-)(\phi_+ + \phi_-):$$

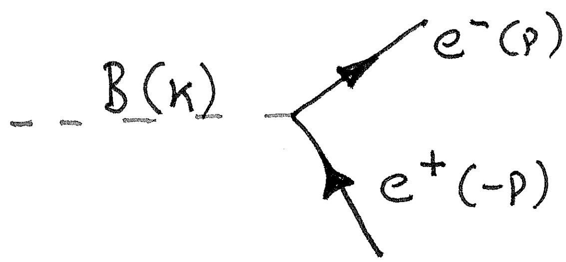
• Consideremos ahora los elementos matriciales. Si usamos los terminos que involucran $\phi_- \Rightarrow \phi_-|B\rangle$ va a crear otra partícula B en el estado inicial y esto nunca permitirá producir el estado final esperado. Así, estos terminos se desvanecen.

• De otro lado $\phi_+|B\rangle$ dará como resultado estado de vacio. De dicho estado de vacío, el operador $\overline{\psi}_-\psi_-$ puede crear un electrón y un positrón.

• Entonces, de los ocho terminos, sólo uno contribuirá para generar el el estado del proceso en estudio: $-ih\int d^4x\, \overline{\psi}_-\psi_-\,\phi_+$

- Note que los operadores ya están en un ordenamiento normal, por lo cual se ha omitido el símbolo.

- Todos los operadores pertenecen al punto x en espacio-tiempo. Así, la aniquilación de B ocurre en el mismo punto en espacio-tiempo donde la pareja electrón-positrón es creada.



- Este diagrama es un ejemplo trivial de lo que se llama diagramas de Feynman.
- Este diagrama tiene 3 líneas las cuales representan partículas del estado inicial y final; las cuales convergen en un punto llamado Vértice.

- Para distinguir el campo escalar de los campos fermionicos, se usa lineas punteadas para el campo escalar y lineas sólidas para los fermiones.

- En los diagramas que usaremos, el tiempo fluirá de izquierda a derecha.

- La flecha de un electrón siempre apuntará al futuro (derecha) y la de un positrón a la izquierda (pasado).

- Debido a que el momentum siempre va del pasado al futuro, entonces para el electrón el momentum va en dirección de la flecha y para el positrón va en sentido contrario. Entonces, en el diagrama el positrón parece ir hacia el vertex con momentum $-p$, lo cual significa que de hecho está dejando el vertex con momentum p.