Universidad de Los Andes - Departamento de Física

Mecánica Cuántica 2

Solución tarea 7

1) Un átomo de hidrógeno es situado en un campo eléctrico estático. Este campo es repentinamente apagado en el tiempo $t = 0$. Calcular la probabilidad de que el átomo, después de apagar la perturbación, emitá un fotón con una longitud de onda del primer miembro de la serie de Lymann ($n_1 \rightarrow n_2$).

$$H'(x) = \begin{cases} eEz, & \text{si } t < 0 \\ 0, & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Probabilidad de emisión=Probabilidad de absorción.
$\Longrightarrow$Calculamos la probabilidad de absorción ya que es más directo:
<u>Para $t<0$</u> el estado base es:

$$|psi\rangle_{t<0} = |100> + \sum_{n\neq 1} \frac{\langle n|H'|100>}{E_1 - E_n}|n> \tag{2}$$

Para $t>0$ los estados propios son las funciones de onda para el átomo de Hidrógeno:

$$|\psi>_{t>0}= \sum_n c_n|n\rangle \tag{3}$$

Donde los c_n los obtenemos de la propiedad de ortonormalidad en t=0:

$$|\psi(t=0)\rangle = |100> + \sum_{n\neq 1} \frac{\langle n|H'|100\rangle}{E_1 - E_n}|n\rangle = \sum_n c_n|n\rangle \tag{4}$$

$\Longrightarrow$Probabilidad de transición del estado $|1\rangle$ al $|2\rangle = |c_2|^2$

$$|c_2|^2 = \left|\frac{\langle 2|H'|100\rangle}{E_1 - E_2}\right|^2 = \left|\frac{\langle n=2,l,m|eEz}{}\right|^2 = \left|\frac{\langle n=2,l,m|z|100\rangle}{E_1 - E_2}\right|^2 \tag{5}$$

Reglas de selección para $\langle nlm|z|100\rangle$ requieren $l = 1$, $m = 0$ $\Rightarrow$solo el elemento matricial $\langle 210|z|100\rangle \neq 0$

$$l_{1\rightarrow 2} = \frac{e^2E^2}{(E_1 - E_2)^2}\,|\langle 210| < |100\langle|^2 \quad \text{Este elemento matricial se puede calcular rápidamente.} \tag{6}$$

$$\langle 210|z|100\rangle = \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ donde } a = \text{radio de Bohr.} \tag{7}$$

Los niveles de energía para el átomo de Hidrógeno es $E_n = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

$$p_{1\rightarrow 2} = \frac{e^2E^2}{\left(\frac{\hbar^2}{2ma^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(-1 + \frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{2^16a^2}{3^10 \cdot 2} = \frac{e^2E^2m^22^2a^4}{\hbar^4}\frac{2^4 \cdot 2^15a^2}{3^2 \cdot 3^10} \tag{8}$$

$$p_{1\rightarrow 2} = \frac{m^2e^2E^2a^6}{\hbar^4} \cdot \frac{2^21}{3^12} \tag{9}$$

2) Un átomo de hidrógeno en su estado base es ubicado entre las placas de un condensador. Un pulso de voltaje es aplicado al condensador para producir un campo eléctrico homogeneo que tienela siguiente dependencia en el tiempo (λ real positiva):

$$E = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ E_0 e^{\lambda t}, & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{10}$$

a) Hallar la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado 3s ($|300\rangle$) en la dirección z después de un tiempo muy largo. ($t \to \infty$)
b) Ahora, cuál es la probabilidad de que pase a un estado $|3p\rangle$?

a)Tenemos entonces un Átomo de hidrógeno dentro de un condensador de placas paralelas.

$$E = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ E = E_0 \exp(-\lambda t), & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{11}$$

Probabilidad de que el átomo de hidrógeno está en el estado $3S^1(300)$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|\psi_n^{(0)}(t)\rangle,\ t > 0 \tag{12}$$

Como inicialmente está en el estado base:

$$|100\rangle = \sum_n a_n(t)|\psi_n^{(0)}(t)\rangle \tag{13}$$

Probabilidad $(|100\rangle \to |300\rangle) = |a_{300}(t)|^2$.
Perturbación a primer orden:

$$a_{300}^{(1)}(t) = (i\hbar)^{-1} \int_0^t e^{iw_{31}t'} H'_{31} dt',\ \text{donde } w_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar} \tag{14}$$

$$H'_{31} = \langle 300|eE_0 \exp(-\lambda t) z|100\rangle = eE_0 \exp(-\lambda t)\langle 300|z|100\rangle \tag{15}$$

Por las reglas de selección para transiciones dipolares $\Delta l = \pm 1$:

$$\Rightarrow \langle 300|z|100\rangle = 0 \tag{16}$$

Tenemos que ir hasta la perturbación de 2º orden: $a_{300}(t) = a_{300}^{(0)}(t) + a_{300}^{(1)}(t) + a_{300}^{(2)}(t)$

$$a_{300}^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum \int_0^t dt' H'_{3k}(t') e^{iw_{3k}t'} \int_0^{t'} dt'' H'_{k'}(t'') e^{iwk_1 t''} \tag{17}$$

$$= \frac{e^2 E_0^2}{(i\hbar)^2} \sum \int_0^t dt' \langle 300|z|klm\rangle e^{-\lambda t'} e^{iw_{ek}t'} \int_0^{t'} dt'' \langle klm|z|100\rangle e^{-\lambda t''} e^{iwk_1 t''} \tag{18}$$

$$\begin{matrix} \langle 300|z|klm\rangle \neq 0 & \text{para } m = 0, l = 1 \\ \langle klm|z|100\rangle \neq 0 & \text{para } m = 0, l = 1 \end{matrix} \tag{19}$$

Entonces:

$$a_{300}^{(2)}(t) = \frac{e^2 E_0^2}{(i\hbar)^2} \sum_n \int_0^t dt' \langle 300|z|n10\rangle e^{-\lambda t'} e^{iw_{3n}t'} \int_0^{t'} dt'' \langle klm|z|100\rangle e^{-\lambda t''} e^{iwk_1 t''} \tag{20}$$

$$a_{300}^{(2)}(t) = \frac{e^2 E_0^2}{(i\hbar)^2} \sum_n \langle 300|z|n10\rangle\langle n10|z|100\rangle \int_0^t dt' \exp[(-\lambda + iw_{3n})t'] \left[\frac{\exp(\lambda t'' + iw_{n1}t'' + iw_{n1}t'')}{-\lambda t i w_{n1}}\right]_0^{t'} \tag{21}$$

$$a_{300}^{(2)}(t) = \frac{e^2 E_0^2}{(i\hbar)^2} \sum_n \langle 300|z|n10\rangle\langle n10|z|100\rangle \left\{ \int_0^t dt' \frac{e^{-2\lambda t' + i(w_{3n} + w_{n1})t'}}{iw_{n1} - \lambda} - \int_0^t \frac{e^{-\lambda t' + iw_3 n t'}}{iw_{n1} - \lambda} dt' \right\} \tag{22}$$

$$= \frac{e^2 E_0^2}{(i\hbar)^2} \sum_n \langle 300|z|n10\rangle\langle n10|z|100\rangle \left\{ \frac{e^{-2\lambda t + i(w_{3n} + w_{n1})t} - 1}{(iw_{n1} - \lambda)(-2\lambda + i(w_{3n} + w_{n1}))} + \frac{1 - e^{-2\lambda t + iw_{3n}t}}{(iw_{n1} - \lambda)(-\lambda + iw_{3n})} \right\} \tag{23}$$

Para $t \to \infty 0 \Rightarrow e^{-\lambda t} \to 0$

$$\Rightarrow a_{300}^{(2)}(t) \approx \frac{e^2 E_0^2}{(i\hbar)^2} \sum_n \langle 300|z|n10\rangle\langle n10|z|100\rangle \left\{ \frac{-1}{(iw_{n1}-\lambda)(-2\lambda+i(w_{3n}+w_{n1}))} + \frac{1}{(iw_{n1}-\lambda)(-\lambda+iw_{3n})} \right\} \tag{24}$$

En conclusión, a primer orden la probabilidad de ($|100\rangle \to |300\rangle$) es 0.

b) Para los estados 3p:
A primer orden:

$$P(|100\rangle \to |31m\rangle) = \frac{e^2 E_0^2}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{iw_{31}t'} e^{-\lambda t'} \langle 100|z|31m\rangle dt' \right|^2 \tag{25}$$

Pero $\langle 100|z|31m\rangle \neq 0$ sólo si $m = 0$ entonces $P(|100\rangle \to |31m\rangle) = 0$ si $m \neq 0$.

$$P(|100\rangle \to |310\rangle) = \frac{e^2 E_0^2}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{iw_{13}t'} e^{-\lambda t'} dt' \right|^2 |\langle 100|z|310\rangle|^2 = \frac{e^2 E_0^2}{\hbar^2} |\langle 100|z|310\rangle|^2 \frac{1}{\lambda^2 + w_{13}^2} \tag{26}$$

El producto punto es:

$$\langle 100|r\cos\theta|310\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot a^{-3/2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{31\sqrt{\pi}} \cdot a^{-3/2} \int \frac{r^4}{a}\left(6 - \frac{r}{a}\right) e - r/ae^{-r/3a} \cos^2\theta \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{27}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}a}{81} \int_0^\infty \left(\frac{r}{<}\right)^4 \left(6 - \frac{r}{a}\right) e^{-r/a} e^{-r/3a} d\left(\frac{r}{a}\right) \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \tag{28}$$

Como la integral angular es $\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}$, y definiendo la variable $v = \frac{4r}{3a}$ tenemos:

$$= \frac{2\sqrt{2}a}{81} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left\{ 6\int_0^\infty v^4 e^- 4dv - \left(\frac{3}{4}\right) \int_0^\infty v^5 e^{-v} dv \right\} = \frac{2\sqrt{2}a}{4^4} \left\{ 6\Gamma(5) - \frac{3}{4} \cdot \Gamma(6) \right\} \tag{29}$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{4^4} \cdot \{6\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1\} = \frac{\sqrt{2}a}{4^4}(144-90) = \frac{54a\sqrt{2}}{4^4} = \frac{3^3 a}{2^{13/2}} \tag{30}$$

$$\Rightarrow P(|100\rangle \to |310\rangle) = \frac{e^2 E_0^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + \frac{E_1 - E_3}{\hbar^2}} \cdot \frac{3^6 a^2}{2^{13}} \tag{31}$$

Por otro lado la diferencia de energías es $E_1 - E_3 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2^2\hbar^2}{ma^2 3^2}$, lo que significa:

$$P(|100\rangle \to |310\rangle) = \frac{e^2 E_0^2}{\lambda^2\hbar^2 + \frac{2^4\hbar^4}{m^2a^4 3^6}} \cdot \frac{3^6 a^2}{2^{13}} = \frac{3^6 e^2 E_0^2 m^2 a^6}{2^{12}\hbar^2(3^6\lambda^2 m^2 a^4 + 2^4\hbar^2)} \tag{32}$$

3) El Hamiltoniano de un rotador rígido en un campo magnñetico es de la forma: $A\hat{L}^2 + B\hat{L}_z$. obtener valores y vectores propios para este Hamiltoniano.
La perturbación de la forma $C\exp(-\lambda t)\hat{L}_x$ es aplicada al rotador en el tiempo $t = 0$ (λ es un parámetro real positivo). Hallar las probabilidades de todas las transiciones permitidas (a promer orden) después de un tiempo demasiado largo.

$$H_0 = AL^2 + BL_z \tag{33}$$

$$H' = Ce^{-\lambda t}L_x, \text{ aplicado en } t = 0 \tag{34}$$

Probabilidad de todas las transiciones de primer orden permitidas para $t \to \infty$.
Valores propios y funciones propios exactos:

$$H_0|lm\rangle = (AL^2 + BL_z)|lm\rangle = [A\hbar^2 l(l+1) + B\hbar m]|lm\rangle \tag{35}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Valores propios} \Rightarrow & E_{lm} = A\hbar^2 l(l+1) + B\hbar m \\ \text{Funciones propias} \Rightarrow & |lm\rangle \end{array} \tag{36}$$

Después de la perturbación la función de onda para el sistema es:

$$|psi(t)\rangle = \sum a_n(t)|\psi_n^{(0)}(t)\rangle = \sum_{l,m} a_{lm}(t)|lm\rangle \tag{37}$$

Entonces:

$$a_{lm}(t) =_{l\neq m} \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{iwt'}\langle l'm'|H'|lm\rangle dt',\ w = \frac{E_{l'm'} - E_{lm}}{\hbar} \tag{38}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \langle l'm'|CL_x|lm\rangle e^{iwt'}e^{-\lambda t'}dt' = \frac{C}{i\hbar}\langle l'm'|L_x|lm\rangle \int_0^t \exp((-\lambda + iw)t')dt' \tag{39}$$

$$\langle l'm'|L_x|lm\rangle = \left\langle l'm' \left| \frac{L_+ + L_-}{2} \right| lm \right\rangle \tag{40}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left\{\delta_{l',l}\delta_{m',m+1}\sqrt{(l-m)(l+m+1)} + \delta_{l',l}\delta_{m',m-1}\sqrt{(l-m)(l-m+1)}\right\} \tag{41}$$

$$m \neq m \pm 1 \Rightarrow \langle l'm'|L_x|lm\rangle = 0 \tag{42}$$

De aquí, tenemos:

$$P(m \to m\pm 1) = \frac{C^2}{4}\cdot\frac{(l\pm m)(l\pm m+1)}{\lambda^2 + w_{m,m\pm 1}^2},\ \text{donde}\ w_{m,m\pm 1} = \frac{E_m - E_{m\pm 1}}{\hbar} \tag{43}$$

Calculando w:

$$w_{m,m\pm 1} = \frac{1}{\hbar}[A\hbar^2(l+1)l + B\hbar m - A\hbar^2(l+1)l - B\hbar(m\pm 1)] = \pm B \tag{44}$$

$$P(|lm\rangle \to |l, m\pm 1\rangle) = \frac{C^2(l\pm m)(l\pm m+1)}{4(\lambda^2 + B^2)} \tag{45}$$

4) Resuelva la Ecuación de Schrödinger para una partícula confinada en una caja cuadrada cuyos lados tienen longitud L y están orientados a lo largo de los ejes X y Y, con una esquina ubicada en el origen. La perturbación $V(x,y) = Cxy$ es aplicada durante un tiempo T.
Calcule la probabilidad de que la partícula pase del estado base al primer estado exitado, después de que la perturbación es apagada.

Se aplica H' por un tiempo T, y escogemos $t=0$ tal que coincida con la aparición del potencial.

$$H' = Cxy \tag{46}$$

Si la partícula estaba inicialmente en el estado base, calcular la probabilidad de encontrarla en una de los primeros estados exitados después de apagar H'.

$$\psi(x,y) = \tfrac{2}{L}\sin\left(\tfrac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\tfrac{m\pi}{L}y\right);\quad E_{nm} = \tfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n^2+m^2) \tag{47}$$

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) \tag{48}$$

$$|\psi_{fn}\rangle = \begin{cases} \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) \\ \frac{2}{L}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}y\right) \end{cases} \tag{49}$$

Como las funciones propias forman una base:

$$\psi(x,y) = \sum_{nm} c_{nm}(t)\psi_{nm}(t<0) \tag{50}$$

$$c_{mn}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^T e^{iw_{11,mn}t'}\langle nm|Cxy|11\rangle dt' \tag{51}$$

Probabilidad de ir del estado base al primer estado exitado:

$$P(|11\rangle \to |21\rangle, |12\rangle) = |c_{21}|^2 + |c_{12}|^2, \text{ pero como } c_{21} = c_{12} \text{ entonces } = 2|c_{21}|^2 \tag{52}$$

$$c_{21}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^T \exp\left(it'\left(\frac{5\hbar\pi^2}{2mL^2} - \frac{2\hbar\pi^2}{2mL^2}\right)\right)\langle 21|Cxy|\rangle dt' \tag{53}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\cdot\frac{2mL^2}{3\hbar\pi^2}\left(e^{3\pi^2 i\hbar T/2mL^2} - 1\right)\langle 21|Cxy|11\rangle \tag{54}$$

Pero, el producto punto es:

$$\langle 21|Cxy|11\rangle = \frac{4C}{L^2}\int_0^L\int_0^L xy\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)dxdy \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L y\sin^2\left(\tfrac{2\pi}{L}y\right)dy = \left(\tfrac{L}{2\pi}\right)^2\pi^2 = \tfrac{L^2}{4}\\ \int_0^L x\sin\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{L}x\right)dx = \left(\tfrac{L}{\pi}\right)^2\left(\tfrac{4}{9}-\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{8L^2}{9\pi^2}\end{aligned} \tag{56}$$

De modo que:

$$\langle 21|Cxy|11\rangle = \frac{4C}{L^2}\left(\frac{L^2}{4}\right)\left(-\frac{8L^2}{9\pi^2}\right) = -\frac{8CL^2}{9\pi^2} \tag{57}$$

$$P(|11\rangle \to |1^{\text{o}}\text{ estado exitado}\rangle) = \frac{2}{\hbar^4}\cdot\frac{4m^2L^4}{9\pi^4}\cdot\frac{64C^2L^4}{81\pi^4}\left|\exp\left\{3i\hbar\pi^2T/2mL^2\right\} - 1\right|^2 \tag{58}$$

Finalmente obtenemos:

$$P(|11\rangle \to |1^{\text{o}}\text{ estado exitado}\rangle) = \frac{32m^2L^4}{9\pi^4\hbar^4}\cdot\frac{64C^2L^4}{81\pi^4}\sin^2\left(\frac{3\pi^2\hbar}{4mL^2}T\right) \tag{59}$$

5) Una partícula de masa m y de carga e se mueve en una dimensión. La partícula es atada a un resorte de constante k y está inicialmente en el estado base ($n = 0$) del oscilador armónico. un campo eléctrico E es prendido durante el tiempo $0 < t < T$, con $T = cte$.
a) Cuál es la probabilidad de que la partícula termine en el estado $n = 1$?
b) Cuál es a probabilidad de la transición del estado $|1\rangle$ al $|2\rangle$?

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}mwx^2 + eEx \tag{60}$$

Donde:

$$\hat{H}_0 = \tfrac{\hat{P}^2}{2m} + \tfrac{1}{2}mwx^2 \quad \hat{H}' = eEx \tag{61}$$

$$c_n^{(1)} = (i\hbar)^{-1}H'_{n0}\int_0^T e^{iw_{n0}t'}dt' \tag{62}$$

En donde:

$$H'_{n0} = \langle n|eEx|0\rangle$$

$$w_{n0} = \tfrac{E_n - E_0}{\hbar} \tag{63}$$

$$w_{10} = w$$

$$H'_{n0} = eE\langle n|x|0\rangle,\ x = \frac{\sqrt{2m}}{2inw}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-) = \frac{i}{\sqrt{2mw}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-) \tag{64}$$

$$H'_{n0} = eE\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\delta_1^n \tag{65}$$

$$c_1^{(1)} = (i\hbar)^{-1}eE\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\cdot\frac{1}{iw_{10}}\left(e^{iw_{10}T} - 1\right) = (i\hbar)^{-1}eE\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\cdot\frac{2}{iw_{10}}\left(\frac{e^{iw_{10}T} - e^{iw_{10}T}}{2i}\right) \tag{66}$$

Finalmente llegamos a:

$$P_{0\to 1} = \left|c_1^{(1)}\right|^2 = \frac{2e^2E^2}{mw^3\hbar}\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right) \tag{67}$$

$$P_{0\to 2} = 0 \tag{68}$$

A primer orden no es posible, tocaría incluir la pertubación a segundo orden.

6) Una lámpara de mercurio emite radiación de longitud de onda $254nm$ con una dispersión fraccional: $|\frac{\delta w}{w}| = 10^{-5}$. Si el flujo de salida es de 1 kW/m^2, estime el cociente de la rata de emisión estimulada a rata de emisión espontanea de la lámpara

$$\tag{69}$$

Tenemos entonces:

$$\lambda = 254nm \quad \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} = 10^{-15} \quad \text{Flujo} = 1kw/m^2 \tag{70}$$

$$\frac{\text{Emisión Estimulada}}{\text{Emisión Espontánea}} = \frac{R_{b\to a}}{A} = \frac{\frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|P|^2\rho(w_0)}{\frac{w^3|P|^2}{e\pi t_0\hbar c^3}} = \frac{\pi^2c^3}{\hbar w^3}\rho(w_0) \tag{71}$$

Miramos el flujo de energía a travez de una esfera de radio r y grosor δr:

$$\frac{\Delta E/\Delta t}{4\pi r^2} \tag{72}$$

Y la densidad de energía:

$$u = \frac{\Delta E}{\Delta Vol} = \frac{\Delta E}{4\pi r^2\Delta r} \tag{73}$$

Pero $\Delta r = c\Delta t$, entonces la densidad de energía:

$$u = \frac{\Delta E/\Delta t}{4\pi r^2 c} \tag{74}$$

Y el flujo:

$$\text{Flujo} = \frac{\Delta E/\Delta t}{4\pi r^2} \tag{75}$$

www

Recordando que Flujo$=u\cdot c$, y que $u = \rho(w)\Delta w$

$$\text{Flujo} = \rho(w)\cdot c\cdot\Delta w \tag{76}$$

Vamos a calcular la relación entre λ y w:

$$\begin{aligned} \lambda f = c \Rightarrow \quad & \lambda w = 2\pi c \Rightarrow w = \tfrac{2\pi c}{\lambda} \\ \Rightarrow \quad & dw = \tfrac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda \\ \Rightarrow \quad & dw = -w\tfrac{d\lambda}{\lambda} \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dw}{w} = -\tfrac{d\lambda}{\lambda} \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dw}{w} = -10^{-5} \end{aligned} \tag{77}$$

Pero, como el signo menos no es relavante al hablar de flujo, hay:

$$\text{Flujo} = \rho(w)\cdot c\cdot(10^{-5}) \tag{78}$$

$$\text{Flujo} = \rho(w)\cdot\frac{2\pi c^2}{\lambda}\cdot 10^{-5} \tag{79}$$

$$\rho(w) = \frac{\text{Flujo}\cdot 10^5\cdot 254\cdot 10^{-9}}{2\pi c^2} \tag{80}$$

Y por tanto:

$$\frac{R_{b\to a}}{A} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar w^3} \cdot \lambda \cdot \frac{\text{Flujo}}{2\pi c^2} \cdot 10^5 \tag{81}$$

$$\frac{R_{b\to a}}{A} = \frac{\lambda^4}{16\pi^2 c^2 \hbar} \cdot \text{Flujo} \cdot \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right) \tag{82}$$

Reemplazamos ahora las variables y constantes por números:

$$\frac{R_{b\to a}}{A} = \frac{(254 \cdot 10^{-9})^4}{16\pi^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \frac{6.625 \cdot 10^{-34}}{2\pi}} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^5 \tag{83}$$

$$\frac{R_{b\to a}}{A} = 2.78 \times 10^{-4} \tag{84}$$

De esto podemos concluir que la emisión espontánea es mucho más frecuente.