Estado base del Hamiltoniano y orden Normal

- Definimos el estado base del Campo:

$$a(p)|0\rangle = 0 \quad \text{para todo } p.$$

Asumiremos que el estado está normalizado:

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

- Sin embargo, tenemos un problema, el cual no estaba presente en el caso del oscilador armónico lineal. Para verlo, usemos

$$H = \int d^3p\, E_p \left[a^\dagger(p)a(p) + \tfrac{1}{2}\delta^3(0)_p\right]$$

donde hemos usado $[a(p), a^\dagger(p')]_- = \delta^3(p-p')$

El sub-indice "p" en $\delta^3(0)_p$ nos recuerda que el delta es para el momentum y no para la posición.

$$\therefore \quad \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \delta^3(0)_p \int d^3p \, E_p$$

lo cual es infinito! El punto es que tenemos un oscilador para cada valor de momentum. Por lo cual, ~~ob~~ tenemos un número infinito de osciladores.

- Esto, en sí mismo, no es una catastrofe. Despues de todo, diferencias de energía son cantidads físicas, valores absolutos no lo son. Podemos entonces redefinir el cero de energía, tal que la energía del estado base se desvanece. Para hacer esto, necesitamos una prescripción tal que no tengamos problemas con otras variables. Esta prescripción es llamada orden normal.

- Expresado de manera simple, esto significa que siempre que encontramos un producto de operadores de creación y aniquilación, definimos un producto normal ordenado, moviendo todos los operadores de aniquilación a la derecha de los operadores de creación, como si los conmutadores fueran cero:

$$:H: = \int d^3p \, E_p \, a^{\dagger}(p) a(p)$$

↳ Hamiltoniano ordenado normalmente

- Esta expresión muestra inmediatamente dos cosas. Primero, para cualquier estado $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|:H:|\psi\rangle = \int d^3p \, E_p \langle\psi| a^{\dagger}(p) a(p) |\psi\rangle$$

lo cual es siempre positivo! Segundo, $\langle 0|:H:|0\rangle = 0$

Espacio de Fock.

- Hasta ahora, hemos definido sólo el estado de vacío, que es el estado sin partículas. Necesitamos otros estados, estados con un contenido específico de partículas, cuando describamos eventos físicos:

$$|p\rangle = a^{+}(p)|0\rangle$$

Este estado contiene un cuantum del campo con momentum $p^{\mu} = (E_p, \bar{p})$. Estos estados tienen norma positiva, , que:

$$\langle p|p'\rangle = \delta^{3}(p-p')$$

Similarmente, podemos definir estados de muchos partículas. Si, el estado ~~A~~ tiene N partículas con momentum diferente :.

$p_1, p_2, p_3, \ldots p_N$:

$$|p_1, p_2, p_3 \ldots p_N\rangle = a^{\dagger}(p_1)\, a^{\dagger}(p_2) \ldots a^{\dagger}(p_N)\, |0\rangle$$

$$|p(n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^{\dagger}(p)\right)^n |0\rangle$$

→ para un estado con n particulas con el mismo momentum.

- Estos estados de multi-particulas, distinguen la cuantización del campo, tambien referida como segunda cuantización, de la mecánica cuántica para una sola particula: primera cuantización.
- El vacio, junto con estados de una particula y de muchos particulas, constituye un espacio vectorial llamado espacio de Fock.

Campo Escalar Complejo

El Lagrangiano está dado por:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

donde

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\right)$$

$\therefore$

$$\mathcal{L} = \sum_{A=1} \left[\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_A)(\partial_\mu \phi_A) - \frac{1}{2} m^2 \phi_A^2\right]$$

el cual es el Lagrangiano de dos campos escalares ϕ_1 y ϕ_2. Entonces, es facil obtener:

$$[a_1(p), a_1^\dagger(p')]_- = [a_2(p), a_2^\dagger(p')]_- = \delta^3(p-p')$$

Ahora, definimos:

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1(p) + i a_2(p)\right)$$

$$\hat{a}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1(p) - i a_2(p)\right)$$

$$a^\dagger(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger(p) - i a_2^\dagger(p)\right)$$

$$\hat{a}^\dagger(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger(p) + i a_2^\dagger(p)\right)$$

Ahora, recordamos:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\left(a(p)e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(p)e^{ip\cdot x}\right)$$

Para el campo escalar complejo:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\Big(a_1(p)e^{-ip\cdot x} + a_1^\dagger(p)e^{ip\cdot x} + i a_2(p)e^{-ip\cdot x} + i a_2^\dagger(p)e^{ip\cdot x}\Big)$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\left(a(p)e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger(p)e^{ip\cdot x}\right)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 E_p}}\left(\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(p)e^{ip\cdot x}\right)$$

Tambien aplica:

$$[a(p), a^{+}(p)]_{-} = [\hat{a}(p), \hat{a}^{+}(p')]_{-} = \delta^3(p-p')$$

Debido que a_1^{+} y a_2^{+} crean cuantos del campo ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente, es claro entonces que existen dos particulas diferentes en la teoría.

Particulas y Anti-particulas

El Lagrangiano : $\mathcal{L} = (\partial^{\mu}\phi^{+})(\partial_{\mu}\phi) - m^2\phi^{+}\phi$ es invariante bajo la transformación:

$$\phi \to e^{-iq\theta}\phi \quad , \quad \phi^{+} \to e^{iq\theta}\phi^{+}$$

donde θ no depende del espacio tiempo. Podemos calcular la corriente de Noether para esta invarianza. Para un cambio infinitesimal:

$$\delta\phi = -iq\theta\phi \quad , \quad \delta\phi^{+} = iq\theta\phi$$

· Entonces

$$J^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(-iq\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^+)}(iq\phi^+)$$

$$= iq\left[(\partial^\mu \phi)\phi^+ - (\partial^\mu \phi^+)\phi\right]$$

La Carga Conservada es:

$$Q = \int d^3x\, J^0 = \int d^3x\, iq\left[(\partial^0\phi)\phi^+ - (\partial^0\phi^+)\phi\right]$$

$$= q\int d^3p\left[a^+(p)\,a(p) - \hat{a}^+(p)\,\hat{a}(p)\right]$$

Definimos $\quad N = \int d^3p\; a^+(p)\,a(p)$

$$Q = q\,(N_a - N_{\hat{a}})$$

Note el signo negativo para el segundo termino. Si q es llamado "Carga" para. Cada cuanto creado por a^+, el primer termino es la Carga total para este cuanto.

- El cuanto creado por $\hat{a}^{+}$ posee entonces una carga negativa. A estas se les conoce como las anti-partículas de las partículas creadas por a^{+}. Entonces, la ecuación $Q = q\,(N_a - N_{\hat{a}})$ nos dice que la carga total en las partículas y anti-partículas se conserva como consecuencia del teorema de Noether.

<u>Estado base del Hamiltoniano</u>

$$a(p)\,|0\rangle = \hat{a}(p)\,|0\rangle = 0, \quad \text{para todo } p.$$

- En otras palabras, el vacío es el estado que no contiene partículas ni anti-partículas.
- Ahora, el estado $|p\rangle = a^{+}(p)\,|0\rangle$, es un estado que contiene una partícula con energía E_p.

Similarmente $|\hat{p}\rangle \equiv \hat{a}^{+}(p)|0\rangle$ Construimos una anti-partícula con energía E_p. Ahora, el Hamiltoniano ordenado normalmente es:

$$:H: = \int d^3p\, E_p \left(a^{+}(p)a(p) + \hat{a}^{+}(p)\hat{a}(p)\right)$$

Propagador

- La meta de la teoría cuántica de campos es describir interacciones de partículas. Para esto, debemos entender cómo las partículas se mueven en espacio-tiempo. Para esto, usaremos funciones de Green, para definir el propagador.
- Comencemos con la ecuación de Klein-Gordon, pero incluyamos un término $J(x)$:

$$(\Box + m^2)\,\phi(x) = J(x)$$

- Debido que la ecuación de Klein-Gordon es la misma para campos escalares y complejos, la discusión en esta parte es aplicable en ambos casos.
- Para solucionar la ecuación, introducimos un propagador o función de Green, denotada por $G(x-x')$:

$$(\Box_x + m^2)\, G(x-x') = -\delta^4(x-x')$$

- El símbolo $\Box_x$ indica que las derivadas en el operador $\Box$ deben ser tomadas con respecto a las coordenadas x y no con respecto a x'. Entonces, es claro que:

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4x'\, G(x-x')\, J(x')$$

donde $\phi_0(x)$ es cualquier solución de la ecuación libre de Klein-Gordon: $(\Box^2 + m^2)\phi_0(x) = 0$

. Ahora, para solucionar el propagador, usamos la transformada de Fourier:

$$G(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-x')} G(p)$$

$$\therefore (\Box_x + m^2) G(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-x')} (-p^2+m^2) G(p)$$

Recordando que:

$$\delta^4(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-x')}$$

$\therefore$ Como $(\Box_x + m^2) G(x-x') = -\delta^4(x-x')$

entonces $G(p) = \dfrac{1}{p^2 - m^2} = \dfrac{1}{(p^0)^2 - E_p^2}$

- Sin embargo, esta expresión tiene una ambiguedad. Si colocamos esta expresión en:

$$G(x-x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p\cdot(x-x')} \frac{1}{(p^0)^2 - E_p^2}$$

la integral tiene polos en $p^0 = \pm E_p$

- Para ir al rededor de este problema, en lugar de usar la función de Green:

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2},$$

usemos:

$$\Delta F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon'} = \frac{1}{(p^0)^2 - (E_p - i\varepsilon)^2}$$

donde ε y ε' son parámetros positivos, infinetesimalmente pequeños.

Los parámetros están relacionados por $\varepsilon' = 2E_p\varepsilon$.
El truco consiste en tomar ε como cero al final del calculo.

. Ahora, al introducir este parámetro, hacemos el propagador complejo y por lo tanto intrinsecamente no clásico.

. Reescribiendo $\Delta_F(p)$:

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{2E_p}\left[\frac{1}{p^0 - (E_p - i\varepsilon)} - \frac{1}{p^0 + (E_p - i\varepsilon)}\right]$$

Podemos llegar a:

$$\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{+i\bar{p}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}}{2E_p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp^0}{2\pi}e^{ip^0(t-t')}$$

$$\times\left[\frac{1}{(p^0 - E_p) + i\varepsilon} - \frac{1}{(p^0 + E_p) - i\varepsilon}\right]$$

Para realizar la integración sobre p^0 necesitamos:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, \frac{e^{-i\xi t}}{\xi + i\varepsilon} = -2\pi i \, \Theta$$

donde $\Theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$

Ahora, podemos definir: $p^{0'} = p^0 - E_p$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^{0'}}{2\pi} \, \frac{e^{-i(p^{0'} + E_p)(t - t')}}{p^{0'} + i\varepsilon} = -i\,\Theta(t - t')\, e^{-iE_p(t-t')}$$

Para el siguiente término podemos sustituir:

$$p^{0'} = -p^0 - E_p$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^{0'}}{2\pi} \, \frac{e^{-i(p^{0'} + E_p)(t' - t)}}{-p^{0'} - i\varepsilon} = i\,\Theta(t' - t)\, e^{-iE_p(t' - t)}$$

- Entonces:

$$\Delta_F(x-x') = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\Big[\Theta(t-t')e^{-iE_p(t-t')+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + \Theta(t'-t)e^{iE_p(t-t')+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\Big]$$

$$i\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\Big[\Theta(t-t')\,e^{-ip\cdot(x-x')} + \Theta(t'-t)\,e^{ip\cdot(x-x')}\Big]$$

Esta forma de la ecuación, puede facilmente relacionarse con los campos cuantizados:

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\, a^+(p)\, e^{ip\cdot x}|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\, e^{ip\cdot x}|p\rangle$$

donde $|p\rangle$ representa el estado de una particula

Similarmente:

$$\langle 0|\phi(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{-ip'\cdot(x')} \langle p'|$$

Entonces:

$$i\Delta_F(x-x') = \Theta(t-t')\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle$$
$$+\Theta(t'-t)\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle$$

Lo cual podemos abreviar cómo:

$$i\Delta_F(x-x') = \langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\phi(x')]|0\rangle$$

donde $\mathcal{T}[\ldots]$ implica un producto ordenado temporalmente, lo cual significa que el operador de tiempo posterior, debe colocarse a la izquierda del operador de tiempo anterior

$$\therefore \quad \mathcal{T}[A(x)\,B(x')] \equiv \begin{cases} A(x)\,B(x') & \text{si } t > t' \\ B(x')\,A(x) & \text{si } t' > t \end{cases}$$