Solución Tarea 9 Mecánica Cuántica 1

Carlos Ávila

Noviembre 2017

1.

El hamiltoniano del sistema está dado por la energía cinética T y potencial del electrón V , más la interacción de este con el campo magnético H_{int}:

$$H = T + V + H_{int}$$

Como el electrón se encuentra en reposo tenemos que el valor de energía cinética y del momento magnético es cero. Adicionalmente tenemos que el electrón no se encuentra en presencia de algún potenticial por lo cual

$$H = H_{int} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}$$

donde $\vec{\mu}_s = \gamma \vec{S}$ y $\gamma = -ge/2m$ es el coeficiente giromagnético del electrón. De esta forma tenemos que

$$H = H_{int} = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B} = -\gamma B_0 \cos(\omega t) S_z$$

En clase vimos que la representación matricial del operador S_z está determinado por la matriz de Pauli σ_3:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

De esta forma el Hamiltoniano adquiere la representación

$$H = \frac{-\gamma \hbar B_0}{2}\cos(\omega t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Conocemos el estado inicial del electrón, este corresponde al spinor $\chi(0) = \chi_+$, es decir, spin up$|\uparrow\rangle = |S = 1/2, , m = 1/2\rangle$ en dirección al eje x. Como el campo magnético es oscilatorio y el spin del electrón depende de este, es necesario resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para conocer la evolución temporal del estado. Partimos con el hecho de que en un tiempo t el electrón se encuentra en un estado de la forma

$$|\chi(t)\rangle = a|\chi_+\rangle + b|\chi_-\rangle$$

pero la condición inicial nos establece $b = 0$. Tenemos que el estado en el tiempo t debe descomponerse como una combinación lineal de los estados de spin up y spin down

$$\chi(t) = a_1|\uparrow\rangle + a_2|\downarrow\rangle$$

Resolvemos la ecuación de Schrödinger por componentes:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}(a_1|\uparrow\rangle) &= -\gamma B_0\cos(\omega t)\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}a_1|\uparrow\rangle \\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}a_1\\ 0\end{bmatrix} &= \frac{i\gamma B_0\cos(\omega t)}{2}\begin{bmatrix}a_1\\ 0\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Denominamos $|a_1\rangle = \begin{bmatrix}a_1\\ 0\end{bmatrix}$ por lo cual

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d|a_1\rangle}{|a_1\rangle} &= \int_0^t \gamma B_0\cos(\omega t)\frac{i}{2}dt \\ \ln\left(\frac{|a_1(t)\rangle}{|a_1(0)\rangle}\right) &= \frac{i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Notemos que $|a_1(0)\rangle = a_1|\uparrow\rangle$, sacamos exponencial a ambos lados y obtenemos

$$|a_1(t)\rangle = a_1(0)e^{\frac{i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)}|\uparrow\rangle$$

Para la otra componente obtenemos

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}(a_2|\downarrow\rangle) &= -\gamma B_0\cos(\omega t)\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}a_2|\downarrow\rangle \\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}0\\ a_2\end{bmatrix} &= -\gamma B_0\cos(\omega t)\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0\\ a_2\end{bmatrix} \end{aligned}$$

denotamos $|a_2\rangle = \begin{bmatrix}0\\ a_2\end{bmatrix}$, realizando el mismo procedimiento que para a_1 obtenemos que

$$|a_2\rangle = a_2(0)|\downarrow\rangle e^{e^{\frac{-i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)}}$$

Por lo cual

$$\chi(t) = a_1(0)e^{\frac{i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)}|\uparrow\rangle + a_2 e^{\frac{-i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)}|\downarrow\rangle \tag{2}$$

Aplicando que $\chi(0) = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, entonces $a_1(0) = a_2(0) = 1/\sqrt{2}$. Finalmente obtenemos que

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}e^{\frac{i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)}\\ e^{\frac{-i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)}\end{bmatrix} \tag{3}$$

Si hacemos una medición de S_x, la función del spinor colapsará de acuerdo a las funciones propias del operador $S_x\chi = a_+\chi_+ + a_-\chi_-$. Entonces podemos expandir:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{\frac{i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)} \\ e^{\frac{-i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)} \end{bmatrix} = \frac{a_+}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a_-}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo que obtenemos dos ecuaciones:

$$e^{\frac{i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)} = a_+ + a_-$$
$$e^{\frac{-i\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)} = a_+ - a_-$$

Resolvemos para cada coeficiente y obtenemos

$$a_+ = \cos\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$$
$$a_- = i\sin\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$$

Ahora, como el vector propio correspondiente al valor propio $-\hbar/2$ de S_x es χ_+, la probabilidad es

$$|a_-|^2 = \sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right) \tag{4}$$

Finalmente, queremos calcular el valor mínimo de B_0 para el cual ocurra un cambio de spin, es decir, obtengamos χ_-. Como la probabilidad de obtener spin down es $|a_-|^2$ debemos exigir $|a_-|^2 = 1$. Asumimos que $\sin(\omega t) = 1$ para el instante de tiempo donde sucede el cambio de dirección en el spin, entonces necesitamos que

$$\sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\right) = 1 \rightarrow \frac{\gamma B_0}{2\omega} = \frac{n\pi}{2}$$

Exigimos que sea el mínimo valor de campo por lo cual $n = 1$ y

$$B_0 = \frac{\omega\pi}{\gamma} \tag{5}$$

2.

2.1.

En este caso tenemos la partícula 1 con spin $S_1 = 1$ y la partícula 2 con spin $S_2 = 2$. Como están en reposo, la contribución del momento angular orbital es cero por lo cual el momento angular total J corresponderá al spin total S.

Ahora, se nos da que $S = 3$ y $M = 1$ por lo cual tenemos el estado (notación $|J, M, j_1, j_2\rangle$:

$$|3, 1, 1, 2\rangle$$

La partícula 1, por su spin, puede terner valores de $m = -1, 0, 1$; mientras la partícula 2, puede tener valores de $m = -2, -1, 0, 1, 2$. Sin embargo como $M = m_1 + m_2$ solo los siguientes estados son posibles (notación $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$):

$$|1, 2, -1, 2\rangle$$
$$|1, 2, 0, 1\rangle$$
$$|1, 2, 1, 0\rangle$$

Por lo tanto si usamos la tabla de Clebsch-Gordan obtenemos que los valores de m_2 con sus respectivas probabilidades

$$2\hbar \to P = \frac{1}{15}$$
$$\hbar \to P = \frac{8}{15}$$
$$0\hbar \to P = 615$$

2.2.

Tenemos que el electrón se encuentra en un estado correspondiente a ψ_{510}. Así mismo, se nos informa que este tiene spin down, $s = 1/2, m_s = -1/2$. Ahora, queremos medir el cuadrado del momento angular total del sistema sin tener en cuenta el spin del proton.

Sabemos que estamos haciendo un acople de tipo $1 \times 1/2$, dado esto podemos buscar en la tabla de Clebsch-Gordan los valores de J para un $M = m_1 + m_2 = -1/2$, obteniendo los valores de $J = 3/2, 1/2$ con probabilidades de 2/3 y 1/3 respectivamente. Entonces tenemos los kets(Notación $|J, M, j_1, j_2\rangle$)

$$|3/2, -1/2, 1, 1/2\rangle$$
$$|1/2, -1/2, 1, 1/2\rangle$$

por lo cual los posibles valores y sus probabilidades son

$$\frac{15}{4}\hbar^2 \to P = \frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{4}\hbar^2 \to P = \frac{1}{3}$$

3.

3.1.

Tenemos dos electrones en el estado $|1, -1, 1, 1\rangle$, por tanto, podemos expandir en la base de momento angular individual. Para el orbital p, la única forma que $m = m_1 + m_2 = -1$ es entonces $m_1 = -1, m_2 = 0$ ó $m_1 = 0, m_2 = -1$. Entonces, si buscamos en la tabla de Clebsch-Gordan obtenemos la descomposición (Notación a izquierda J, M, j_1, j_2, notación a derecha j_1, m_1, j_2, m_2):

$$|1, -1, 1, 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|1, -1, 1, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 0, 1, -1\rangle$$

Si medimos L_{1z} obtenemos entonces los valores $-\hbar, 0$ con probabilidades de $1/2$ cada una.

3.2.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el inciso anterior, observamos que para $l_1 = l_2 = 1$, la única posibilidad de que $m_1 + m_2 = m = -2$ es $m_1 = m_2 = -1$. Por tanto, si buscamos en la tabla de Clebsch-Gordan tenemos que la única descomposición posible es (Notación a izquierda J, M, j_1, j_2, notación a derecha j_1, m_1, j_2, m_2):

$$|2, -2, 1, 1\rangle = |1, -1, 1, -1\rangle$$

Por ello, es sencillo ver que la única medición posible de L_{1z} es

$$L_{1z} = L_{2z} = -\hbar$$

con probabilidad de 1.

4.

4.1.

Tenemos que los operadores f, J^2 y J_z pueden ser medidos de forma simultanea si cada par de ellos conmuta. En clase vimos que el operador de momento angular al cuadrado J^2 conmuta con el operador de proyección en el eje z J_z, de esta forma debemos calcular los conmutadores de f con cada operador. Tenemos que el operador de momento al cuadrado para este caso viene dado por

$$J^2 = \frac{\hbar}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \cdot \sigma_2)$$

que puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot \sigma_2 =& \frac{2}{\hbar}J^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\ =& \frac{2}{\hbar}J^2 - 3 \end{aligned}$$

De esta forma

$$[J^2, f] = b[J^2, \sigma_1\sigma_2] = b[J^2, 2J^2/\hbar^2 - 3] = 0$$

y también

$$[J_z, f] = [J_z, a] + b[J_z, 2J^2/\hbar^2 - 3] = 0$$

Como ambos conmutadores son sero podemos afirmar que los operadores f, J^2 y J_z son simultaneamente medibles.

4.2.

En la base de momento angular total $|J, M, j_1, j_2\rangle$ la acción de f viene dada por

$$\begin{aligned}\langle J, M, j_1, j_2|f|J', M', j_1, j_2\rangle =& a\delta_{JJ'}\delta_{MM'} + b\langle J, M, j_1, j_2|\sigma_1\sigma_2|J', M', j_1, j_2\rangle \\ =& a\delta_{JJ'}\delta_{MM'} + b\Big[2J'(J'+1) - 3\Big]\delta_{JJ'}\delta MM'\end{aligned}$$

4.3.

Denotesmos el estado de $J = 0$ como χ_0 y el estado de $J = 1, M$ como χ_{1M}. Como tenemos que los momentos individuales son iguales $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ podemos reducir el ket asociado al momento individual como $|m_1, m_2\rangle$. Usando la tabla de Clebsch-Gordan tenemos que la descomposición de los estados de momento angular total es

$$\begin{aligned}\chi_0 =& \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2, 1/2\rangle \\ \chi_{10} =& \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2, 1/2\rangle \\ \chi_{1\pm1} =& |\pm 1/2, \pm 1/2\rangle\end{aligned}$$

por lo cual la matriz de representación del operador toma la forma

$$f_{ind} = \begin{bmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{bmatrix} \tag{6}$$

5.

Hallar los coeficientes de Clebsch-Gordan para:

5.1. $\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$

Para el estado $|3/2, 3/2\rangle$ el único posible estado que puede colaborar es $|1/2, 1/2, 1, 1\rangle$, luego:

$$|3/2, 3/2\rangle = |1/2, 1/2, 1, 1\rangle \tag{7}$$

Aplicando $J_- = J_{1_-} + J_{1_+}$ obtenemos

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\right)}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right\rangle$$
$$+\sqrt{\left(1\left(1+1\right)-1\left(1-1\right)\right)}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right\rangle$$
$$\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right\rangle + \sqrt{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right\rangle$$

Luego:

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right\rangle \tag{8}$$

Seguimos aplicando J_- y obtenemos los otros dos estados correspondientes a 3/2.

$$|3/2,-1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1/2,-1/2,1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1/2,1/2,1,-1\rangle$$
$$|3/2,-3/2\rangle = |1/2,-1/2,1,-1\rangle$$

Para los correspondientes a $j = 1/2$, tenemos que $|1/2,1/2\rangle$ solo puede ser una combinación lineal de $|1/2,1/2,1,0\rangle\,,|1/2,-1/2,1,1\rangle$. Luego:

$$|1/2,1/2\rangle = \alpha\,|1/2,1/2,1,0\rangle + \beta\,|1/2,-1/2,1,1\rangle \tag{9}$$

Para que sea ortogonal, se debe tener que $|3/2,1/2\rangle$ se debe cumplir que $\alpha\sqrt{2}+\beta = 0$, podemos escoger entonces $\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \alpha = -1/\sqrt{3}$, tenemos que:

$$|1/2,1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1/2,-1/2,1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1/2,1/2,1,0\rangle \tag{10}$$

Y aplicando J_- obtenemos el estado faltante.

$$|1/2,-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1/2,-1/2,1,0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1/2,1/2,1,-1\rangle \tag{11}$$

5.2. $1\otimes 1 = 2\oplus 1\oplus 0$

Tenemos que $|2,2\rangle = |1,1,1,1\rangle$ Aplicamos el operador J_- de manera sucesiva para obtener los estados de la forma $|2,m\rangle$:

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0,1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1,1,0\rangle \tag{12}$$
$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,-1,1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,1,1,-1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}\,|1,0,1,0\rangle \tag{13}$$
$$|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0,1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1,1,0\rangle \tag{14}$$
$$|2,-2\rangle = |1,-1,1,-1\rangle \tag{15}$$

El estado $|1,1\rangle$ debe ser una combinación lineal de $|1,1,1,0\rangle, |1,0,1,1\rangle$, luego escribimos:

$$|1,1\rangle = \alpha\,|1,1,1,0\rangle + \beta\,|1,0,1,1\rangle \tag{16}$$

Para que sea ortogonal con $|2,1\rangle$ se debe cumplir que: $\alpha + \beta = 1$, podemos escoger $\alpha = 1/\sqrt{2}, \beta = -1/\sqrt{2}$. Luego:

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1,1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0,1,1\rangle \tag{17}$$

Aplicando J_- de manera sucesiva hallamos:

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1,1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1,1,1\rangle \tag{18}$$

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0,1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1,1,0\rangle \tag{19}$$

El estado $|0,0\rangle$ debe ser una combinación lineal de $|1,0,1,0\rangle, |1,1,1,-1\rangle, |1,-1,1,1\rangle$. Luego escribimos:

$$|0,0\rangle = \alpha\,|1,0,1,0\rangle + \beta\,|1,1,1,-1\rangle + \gamma\,|1,-1,1,1\rangle \tag{20}$$

Ortogonalidad con $|1,0\rangle$ nos dice que $\beta - \gamma = 0$ y ortogonalidad con $|2,0\rangle$ nos dice que $2\alpha + \beta + \gamma = 0$, Luego podemos tomar $\alpha = -1/\sqrt{3}, \beta = \gamma = 1/\sqrt{3}$. Con lo que obtenemos el último estado:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\,|1,0,1,0\rangle + |1,1,1,-1\rangle + |1,-1,1,1\rangle\right) \tag{21}$$