Lagrangiano Electromagnético

Recordamos: $\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$; $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$

- $\bar{E}$ y $\bar{B}$ son invariantes bajo las siguientes transformaciones: $\bar{A} \to \bar{A}' = \bar{A} + \bar{\nabla}\chi$ y

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Note: $\bar{E} \to \bar{E}' = -\bar{\nabla}\phi' - \frac{\partial \bar{A}'}{\partial t}$

$$\therefore \bar{E}' = -\bar{\nabla}\phi + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}}\chi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}}\chi$$

$$\bar{E}' = -\bar{\nabla}\phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = E$$

- Esto implica que diferentes observadores en diferentes puntos del espacio, usando diferentes calibraciones para sus medidas, obtienen los mismos campos.

- Las ecuaciones de transformación, corresponden a transformaciones gauge locales:

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = \left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \bar{A} + \bar{\nabla}\chi\right)$$

$$= \left(\phi - \partial^0\chi, A^i - \partial^i\chi\right)$$

$$= \left(\phi, A^i\right) - \left(\partial^0\chi, \partial^i\chi\right)$$

$$\therefore \quad A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

Ahora. Sea U un elemento del grupo de transformaciones $U(1)$:

$$U = e^{i\theta(x)} \in U(1)$$

. El grupo está definido por el conjunto de elementos $U_i = e^{i\theta(x_i)}$. Entonces:

- Producto de grupo:

$$U_1 \cdot U_2 = e^{i[\theta(x_1)+\theta(x_2)]} = e^{i\theta(x_3)} \in U(1)$$

- Identidad: $\theta(x) = 0$ tal que $U_I = 1$.
- Inverso: $\theta(-x) = -\theta(x)$ tal que

$$U^{-1} = e^{-i\theta(x)}$$

- Ahora, para ilustrar la relación entre la conservación local de la carga eléctrica y la transformación gauge, considere las ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Recuerdo, $\partial_i F^{i0} = J^0 = \rho \therefore F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i$

$$\partial_i \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \rho$$

• Entonces, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ incluye la conservación de la carga, expresada a través de la ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Además, las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes bajo transformaciones gauge:

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

Entonces, la invarianza gauge está relacionada de alguna manera a la conservación de la carga.

Lagrangiano para el Campo Vectorial

• Ya estamos en capacidad de responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es el Lagrangiano más general posible para el campo de cuatro componentes $A^\mu(x)$, compatible con la invarianza de Lorentz y la invarianza bajo transformaciones gauge?

. Recordemos que las transformaciones son:

Lorentz $$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$$

Gauge $$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x)$$

. Proponemos: $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

con esto: $$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} - J^\mu A'_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu$$

Para $$F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = (\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu)$$

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \cancel{\partial^\mu \partial^\nu \chi} - \partial^\nu A^\mu + \cancel{\partial^\nu \partial^\mu \chi}$$

$\therefore$ $F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$; Con esto

$$\delta\mathcal{L} = -J^\mu A'_\mu + J^\mu A_\mu = -J^\mu A_\mu + J^\mu \partial_\mu \chi(x) + J^\mu A_\mu$$

$$\delta\mathcal{L} = J^\mu \partial_\mu \chi(x);$$ pero $$\partial_\mu(J^\mu \chi(x)) = (\partial_\mu J^\mu)\chi(x) + J^\mu \partial_\mu \chi(x) \Rightarrow J^\mu \partial_\mu \chi(x) = \partial_\mu(J^\mu \chi) - (\partial_\mu J^\mu)\chi$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(J^\mu \chi(x)) - (\partial_\mu J^\mu)\chi(x)$$

$\therefore$ Para la acción: $\delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu (J^\mu \chi) - (\partial_\mu J^\mu)\chi(x)\right]$

$$\therefore \quad \delta S = - \int d^4x \, (\partial_\mu J^\mu)\, \chi(x)$$

$$= - \int d^3x \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \underbrace{(\partial_\mu J^\mu)}_{0} \, \chi(x) = 0$$

Note que la densidad Lagrangiana es localmente gauge invariante. Sin embargo, la acción, y por lo tanto la teoría es invariante ante transformaciones gauge. Por lo tanto, el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

es el más general que da lugar a una acción invariante de Lorentz e invariante gauge local.

Ecuaciones de Proca

- Consideremos ahora el efecto de adicionar un término de masa a la teoría de Maxwell.
- Los campos vectoriales masivos juegan un papel importante en la física. Campos como W^μ, Z^μ que median las interacciones débiles son ejemplos de campos de este tipo.
- Veamos: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$-\frac{1}{4}\partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu}\left(\frac{1}{2} m^2 A^\rho A_\rho - J^\rho A_\rho\right) = 0$$

$$\therefore \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu$$

- Tomando la cuadri-divergencia a ambos lados de la ecuación, y recordando que $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$

$$\Rightarrow \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu$$

$$\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu$$

$$\cancel{\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu} - \cancel{\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu$$

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu$$

De este modo, en ausencia de corrientes, las ecuaciones de Proca dan lugar a la condición de Lorentz. De otro modo, si asumimos que la corriente se conserva la condición de Lorentz tambien aparece.

- Por consiguiente, si la masa de campo vectorial es diferente de cero, la condición de Lorentz emerge como una restricción adicional que debe ser siempre tomada en cuenta.
- De este modo, la libertad gauge de las ecuaciones de Maxwell se pierde completamente con las ecuaciones de Proca, que sin perdida

de generalidad se pueden reescribir, usando la condición: $\partial_\mu A^\mu = 0$

- Adicionalmente, tenemos $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu$

$$\Rightarrow \quad (\Box + m^2) A^\nu = J^\nu$$

- En ausencia de corrientes, cada una de las componentes del campo vectorial satisface entonces la ecuación de Klein-Gordon. Por consiguiente, m corresponde a la masa del campo vectorial A^μ.

- Aplicando la condición de Lorentz a la ecuación $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu - J^\mu A_\mu$, obtenemos el Lagrangiano de la ecuación de Proca:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu - J^\nu A_\nu$$

- El primer término, $-\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu$, es llamado término cinético. El término cuadrático en los campos corresponde al término de masa, y el último corresponde a una interacción del campo con una corriente.
- Cuando un Lagrangiano contiene sólo términos cinéticos y de masa diremos que el campo que da lugar al Lagrangiano es libre de interacciones. Las otras partes del Lagrangiano serán llamadas Lagrangiano de interacción:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{libre} + \mathcal{L}_{int}.$$

- Aunque hemos hecho el análisis de la ecuación de Proca permitiendo un término de masa para el fotón, las implicaciones experimentales de una teoría de este tipo dan lugar a restricciones muy fuertes sobre la masa del fotón: $m < 6 \times 10^{-17}$ GeV. Debido al principio gauge local, desde el punto de vista teórico se espera que la masa sea exactamente cero.