Operador de Evolución

- Si podemos encontrar todos los estados cuánticos de un sistema dado, seremos capaces de predecir exactamente el comportamiento del sistema a partir de sus condiciones iniciales:

  $|i\rangle \longrightarrow |f\rangle$

- Desafortunadamente, no es posible encontrar los estados propios de un Hamiltoniano, si los campos en este interactúan entre ellos.

- Por lo tanto, en una teoría dada, separamos el Hamiltoniano en una parte que podemos solucionar exactamente y otra que no podemos tener solución exacta:

$$H = H_0 + H_I$$

- H_0 incluye todas las partes de H cuyos estados propios conocemos. H_0 es el Hamiltoniano libre, el cual puede ser escrito en terminos de operadores de creación y aniquilación, como se mostró anteriormente.

- H_I, contiene todas las interacciones. Deseamos encontrar una manera de escribir las interacciones en terminos de los campos libres.

- Un estado que evoluciona bajo el Hamiltoniano $H = H_0 + H_I$ obedece:

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + H_I) |\Psi(t)\rangle$$

- Para la parte libre: $i \frac{d}{dt} |\Psi_0(t)\rangle = H_0 |\Psi_0(t)\rangle$

- Definimos ahora dos tipos diferentes de operadores de evolución: $U_0(t)$ y $U(t)$, tal que:

$$|\psi_0(t)\rangle = U_0(t)|\psi_0(-\infty)\rangle \equiv U_0(t)|i\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = U_0(t)U(t)U_0^{+}(t)|\psi_0(t)\rangle$$

- Si los estados en ambos lados se asumen normalizados, los operadores $U_0(t)$ y $U(t)$ son unitarios para cualquier t. El estado inicial $|i\rangle$ es parte de algún espacio de Fock:

$$|\psi(t)\rangle = U_0(t)U(t)|i\rangle$$

- Entonces: $i\dfrac{d}{dt}U_0(t)|i\rangle = H_0 U_0(t)|i\rangle$

- Considerando un conjunto completo de estados en $t=-\infty$, podemos convertir esto en un operador:

$$i \frac{d}{dt} U_0(t) = H_0 U_0(t)$$

$\therefore \quad U_0(t) = e^{-iH_0 t}$, asumiendo que H_0 no depende explícitamente del tiempo.

- Consideremos ahora un sistema que evoluciona bajo el Hamiltoniano completo. La ecuación de Schrödinger para este sistema es:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H_I) |\psi(t)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} \left(U_0(t) U(t) \right) |i\rangle$$

$$= \Big(\underbrace{i \frac{dU_0(t)}{dt}}_{H_0 U_0(t)} U(t) + U_0(t)\, i \frac{dU(t)}{dt} \Big) |i\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left(H_0 U_0(t) U(t) + U_0(t)\, i \frac{dU(t)}{dt} \right) |i\rangle$$

Para el lado derecho: $(H_0 + H_I)|\psi(t)\rangle = (H_0 + H_I) U_0(t) U(t) |i\rangle$

• Podemos igualar los dos estados, y yendo a un conjunto completo de estados iniciales para $t=-\infty$, podemos escribir la ecuación como una ecuación de operadores:

$$\cancel{H_0 U_0(t)} U(t) + U_0(t)\, i\frac{dU(t)}{dt} = \cancel{H_0 U_0(t)} U(t) + H_I U_0(t) U(t)$$

$$i\frac{dU(t)}{dt} = U_0^{+}(t) H_I U_0(t) U(t)$$
$$= H_I U_0(t) U(t)$$

• Entendamos el significado de $H_I(t)$. El espacio de Hilbert en el cual esta ecuación actua, es el conjunto de estados por $|i\rangle$. Ahora, denotaremos los vectores de la base por $|\beta\rangle$. Estos son los estados libres independientes del tiempo, de números cuánticos definidos

• Si ahora buscamos por los elementos matriciales de $H_I(t)$ entre estas bases, encontramos que:

$$\langle \beta | H_I(t) | \beta' \rangle = \langle \beta | U_0^{\dagger} H_I U_0 | \beta' \rangle$$
$$= \langle \beta, t | H_I | \beta', t \rangle$$

Entonces, H_I es escrito en terminos de campos libres en un tiempo t.

• Ahora, $i \dfrac{dU(t)}{dt} = H_I(t) U(t)$, se soluciona con la ecuacion:

$$U(t) = U(t_0) - i \int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1) U(t_1).$$

• Asumamos que los estados $|\beta\rangle$ son un conjunto completo de estados propios del

Hamiltoniano Completo H, conforme $t \to -\infty$. En otras palabras, $H_I \to 0$ conforme $t \to \infty$. Podemos pensar en esto como en que todos los campos, son campos libres en el pasado remoto, y las interacciones son lentamente prendidas.

- Entonces, para $t_0 = -\infty$, $U(t_0) \to 1$:

$$U(t) = 1 - i\int_{-\infty}^{t} dt_1\, H_I(t_1)\, U(t_1)$$

- Esta es una ecuación exacta que obedece $U(t)$, pero es inutil en esta forma debido a la presencia de $U(t_1)$
- La solución de la ecuación es iterativa:

$$U(t) = 1 - i\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I(t_1)\left(1 - i\int_{-\infty}^{t_1} dt_2\, H_I(t_2)\, U(t_2)\right)$$

de manera indefinida:

$$U(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n$$

$$H_I(t_1)\, H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)$$

· Esto se puede escribir de mejor manera, si usamos los productos ordenados de operadores. Por ejemplo, para $n=2$:

$$\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2\, \mathcal{T}\left[H_I(t_1) H_I(t_2)\right] = \frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_2} dt_2\, H_I(t_1)\, H_I(t_2)$$

$$+ \frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{t} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1\, H_I(t_2)\, H_I(t_1)$$

El primer termino se obtiene para $t_1 > t_2$ y el segundo para $t_2 > t_1$. Ahora, intercambiando la variables "dummy" t_1 y t_2 en la segunda integral, se reduce a:

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \, H_I(t_1) H_I(t_2)$$

- De manera similar, para terminos de orden superior:

$$U(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t} dt_n \, \mathcal{T}\left[H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\right]$$

- El orden de n-operadores implica que cualquier operador aparece a la derecha de todos los otros operadores en tiempos posteriores. $U(t)$ se puede escribir de manera compacta:

$$U(t) = \mathcal{T}\left[\exp\left(-i \int_{-\infty}^{t} dt' H_I(t')\right)\right]$$

- Matriz S

- La matriz S está definida como el límite:

$$S = \lim_{t\to\infty} U(t) = \mathcal{T}\left[\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_I(t)\right)\right]$$

Debido que $H_I(t) = \int d^3x\, \mathcal{H}_I(x)$

$$\therefore\quad S = \mathcal{T}\left[\exp\left(-i\int d^4x\, \mathcal{H}_I(x)\right)\right]$$

Recuerde que $U(t)$ es unitaria para todo t. Entonces la matriz S es unitaria:

$$SS^{\dagger} = S^{\dagger}S = 1$$

¿Porqué es útil la matriz S? Las interacciones de partículas usualmente ocurren en pequeños intervalos de tiempo. Mucho antes de este tiempo, podemos considerar las partículas como escencialmente libres. Similarmente, mucho después de las interacciones, las partículas nuevamente son esencialmente libres. Un problema típico puede ser reducido a encontrar si un estado dado de partículas libres, a través de interacciones, puede evolucionar a otro estado dado de partículas, mucho después que las interacciones han cesado:

- Considere un estado a $t=-\infty$. Denotamos el estado inicial como $|i\rangle$, donde $H_I=0$. Ahora, prendamos la interacción, dejamos el estado evolucionar bajo el Hamiltoniano completo H y luego apagamos lentamente la interacción.
- Despues de un largo tiempo, el sistema deberá nuevamente ser libre y podemos describirlo

Con una superposición de estados de la forma $U_0(t)|\beta\rangle$, donde $|\beta\rangle$ es nuestra base independiente del tiempo para partículas libres: partículas libres con estados propios de H_0, com números definidos.

- La amplitud de transición de $|i\rangle$ a otro estado específico $|f\rangle$, $|f\rangle \in \{|\beta\rangle\}$ en $t \to \infty$ es:

$$\lim_{t\to\infty} \langle f | U_0^{+} U_0 U(t) | i \rangle = \lim_{t\to\infty} \langle f | U | i \rangle$$
$$= \langle f | S | i \rangle$$

lo cual es sólo un elemento matricial del operador S, en el espacio vectorial de estados libres.

Una derivación alternativa, involucra definir estados "in" y "out", $|\Psi_{in}(\alpha)\rangle$ y $|\Psi_{out}(\alpha)\rangle$, los cuales son estados propios, independientes del tiempo, del Hamiltoniano. Estos sistemas, consisten de partículas demasiado separadas para interactuar, en $t \to -\infty$ y $t \to \infty$, respectivamente.

- Los estados "in" y "out" se toman separadamente como orthonormales y completos. Entonces:

$$S_{\beta\alpha} = \langle \Psi_{out}(\beta) | \Psi_{in}(\alpha) \rangle$$

donde β y α denotan los números cuánticos característicos de cada estado.

- Ahora, definimos

$$|\Psi_{in}(\beta)\rangle = \Omega(-\infty)|\beta\rangle, \quad |\Psi_{out}(\beta)\rangle = \Omega(\infty)|\beta\rangle$$

donde $\Omega(t)$ está relacionado con el operador de evolución $U(t) \equiv \Omega^{\dagger}(t)\,\Omega(-\infty)$. Entonces, los elementos matriciales son:

$$\langle \Psi_{out}(\beta) | \Psi_{in}(\beta) \rangle = \lim_{t \to \infty} \langle \beta | \Omega^{\dagger}(t)\,\Omega(-\infty) | \alpha \rangle$$

$$= \lim_{t \to \infty} \langle \beta | U(t) | \alpha \rangle.$$