MECANICA CUANTICA 2

LECTURA # 12

CORRELACION ENTRE DOS PARTICULAS DE SPIN 1/2

Supongamos dos particulas de spin $1/2$ que se encuentran en un estado singlete $(J=0, M=0)$

$$|J=0, M=0\rangle \equiv |\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+;-\rangle - |-;+\rangle\}$$

A la primera particula la denominaremos "a" y a la segunda "b"

Supongamos mediciones de spin para cada particula con respecto a un eje

Para la particula a medimos su spin con respecto a un eje

$$\vec{u}_a = \operatorname{Sen}\theta_a \operatorname{Cos}\varphi_a \hat{\imath} + \operatorname{Sen}\theta_a \operatorname{Sen}\varphi_a \hat{\jmath} + \operatorname{Cos}\theta_a \hat{k}$$

En el caso de la particula b, medimos su spin con respecto al eje

$$\vec{u}_b = \operatorname{Sen}\theta_b \operatorname{Cos}\varphi_b \hat{\imath} + \operatorname{Sen}\theta_b \operatorname{Sen}\varphi_b \hat{\jmath} + \operatorname{Cos}\theta_b \hat{k}$$

La base que hemos escogido, y en la cual hemos escrito $|\Psi_s\rangle$ es $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$, solo que hemos omitido el subindice z.

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\{\sigma_x \hat{\imath} + \sigma_y \hat{\jmath} + \sigma_z \hat{k}\}$$

Si $\vec{u} = \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Cos}\varphi \hat{\imath} + \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Sen}\varphi \hat{\jmath} + \operatorname{Cos}\theta \hat{k} \Rightarrow \hat{S}_{\vec{u}} = \vec{S}\cdot\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\{\operatorname{Sen}\theta \operatorname{Cos}\varphi \hat{\sigma}_x + \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Sen}\varphi \hat{\sigma}_y + \operatorname{Cos}\theta \hat{\sigma}_z\}$

$$\hat{S}_{\vec{u}} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \operatorname{Cos}\theta & \operatorname{Sen}\theta(\operatorname{Cos}\varphi - i\operatorname{Sen}\varphi) \\ \operatorname{Sen}\theta(\operatorname{Cos}\varphi + i\operatorname{Sen}\varphi) & -\operatorname{Cos}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Cos}\theta & \operatorname{Sen}\theta e^{-i\varphi} \\ \operatorname{Sen}\theta e^{i\varphi} & -\operatorname{Cos}\theta \end{bmatrix}$$

El espacio de Hilbert de nuestras dos particulas es de la forma: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{sa} \otimes \mathcal{E}_{sb}$

$\Rightarrow$ los operadores $\hat{S}_{\vec{u}_a}$ y $\hat{S}_{\vec{u}_b}$ conmutan, ya que actuan sobre espacios diferentes.

- Los valores propios de $\hat{S}_{\vec{u}_a}$ son $\pm\frac{\hbar}{2}$
- Los valores propios de $\hat{S}_{\vec{u}_b}$ son $\pm\frac{\hbar}{2}$

Dado que en el estado inicial $|\Psi_s\rangle$ las particulas a y b conforman una configuración singlete, deberia existir una correlación entre los resultados de la medición del spin de a a lo largo del eje $\vec{u}_a$ y la medición del spin de la particula b a lo largo del eje $\vec{u}_b$. ¿A que es igual esta correlación?

<u>Experimentalmente</u>: $E(\vec{u}_a, \vec{u}_b) = \frac{4}{\hbar^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N} S^{(i)}_{\vec{u}_a} S^{(i)}_{\vec{u}_b}$ donde: realizamos N experimentos identicos

$S^{(i)}_{\vec{u}_a}$: resultado de la medición del spin de a en el experimento i-esimo.

$S^{(i)}_{\vec{u}_b}$: resultado de la medición del spin de b en el experimento i-esimo.

<u>Teoricamente</u>: $E(\vec{u}_a, \vec{u}_b) = \frac{4}{\hbar^2}\langle\Psi_s|\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|\Psi_s\rangle$

El factor $\frac{4}{\hbar^2}$ se a colocado para hacer que E sea una cantidad adimensional

Debemos calcular explicitamente la función $E(\vec{u}_a, \vec{u}_b)$

$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+;-\rangle - |-;+\rangle\}$

$E(\vec{u}_a,\vec{u}_b) = \frac{4}{\hbar^2}\langle\Psi_s|\hat{S}_{\vec{u}_a} S_{\vec{u}_b}|\Psi_s\rangle$

$\hat{S}_{\vec{u}_a} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta_a & \operatorname{Sen}\theta_a e^{-i\varphi_a} \\ \operatorname{Sen}\theta_a e^{i\varphi_a} & -\cos\theta_a \end{bmatrix}$ $\quad |+_a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{S}_{\vec{u}_a}|+_a\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta_a \\ \operatorname{Sen}\theta_a e^{i\varphi_a} \end{bmatrix}$

$\hat{S}_{\vec{u}_a}|-_a\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \operatorname{Sen}\theta_a e^{-i\varphi_a} \\ -\cos\theta_a \end{bmatrix}$

$\hat{S}_{\vec{u}_b}|+_b\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta_b \\ \operatorname{Sen}\theta_b e^{i\varphi_b} \end{bmatrix}$

$\hat{S}_{\vec{u}_b}|-_b\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \operatorname{Sen}\theta_b e^{-i\varphi_b} \\ -\cos\theta_b \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|+;-\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\{\cos\theta_a|+_a\rangle + \operatorname{Sen}\theta_a e^{i\varphi_a}|-_a\rangle\}\otimes\{\operatorname{Sen}\theta_b e^{-i\varphi_b}|+_b\rangle - \cos\theta_b|-_b\rangle\}$

$= \frac{\hbar^2}{4}\{\cos\theta_a \operatorname{Sen}\theta_b e^{-i\varphi_b}|+;+\rangle - \cos\theta_a\cos\theta_b|+;-\rangle + \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i(\varphi_a-\varphi_b)}|-;+\rangle - \operatorname{Sen}\theta_a\cos\theta_b e^{i\varphi_a}|-;-\rangle\}$

Calculando de forma idéntica obtenemos:

$\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|-;+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\{\operatorname{Sen}\theta_a\cos\theta_b e^{-i\varphi_a}|+;+\rangle + \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i(\varphi_b-\varphi_a)}|+;-\rangle - \cos\theta_a\cos\theta_b|-;+\rangle - \cos\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b|-;-\rangle\}$

$\Rightarrow$

$\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|\Psi_s\rangle = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}}\{(\cos\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{-i\varphi_b} - \operatorname{Sen}\theta_a\cos\theta_b e^{-i\varphi_b})|+;+\rangle$

$+(-\cos\theta_a\cos\theta_b - \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i(\varphi_b-\varphi_a)})|+;-\rangle$

$+(\operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i(\varphi_a-\varphi_b)} + \cos\theta_a\cos\theta_b)|-;+\rangle$

$+(-\operatorname{Sen}\theta_a\cos\theta_b e^{i\varphi_a} + \cos\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i\varphi_b})|-;-\rangle\}$

Actuando con $\langle\Psi_s| = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\langle+;-| - \langle-;+|\}$ obtenemos:

$\langle\Psi_s|\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|\Psi_s\rangle = \frac{\hbar^2}{8}\{(-\cos\theta_a\cos\theta_b - \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i(\varphi_b-\varphi_a)}) - (\operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i(\varphi_a-\varphi_b)} + \cos\theta_a\cos\theta_b)\}$

$= -\frac{\hbar^2}{8}\{\cos\theta_a\cos\theta_b + \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{-i(\varphi_a-\varphi_b)} + \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b e^{i(\varphi_a-\varphi_b)} + \cos\theta_a\cos\theta_b\}$

$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$

$\Rightarrow \langle\Psi_s|\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|\Psi_s\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\{\cos\theta_a\cos\theta_b + \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b\cos(\varphi_a-\varphi_b)\}$

$\cos(\varphi_a-\varphi_b) = \cos\varphi_a\cos\varphi_b + \operatorname{Sen}\varphi_a\operatorname{Sen}\varphi_b \quad \Rightarrow$

$\langle\Psi_s|\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|\Psi_s\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\{\operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b\cos\varphi_a\cos\varphi_b + \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\theta_b\operatorname{Sen}\varphi_a\operatorname{Sen}\varphi_b + \cos\theta_a\cos\theta_b\}$

que se puede escribir como:

$\langle\Psi_s|\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|\Psi_s\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\{(\operatorname{Sen}\theta_a\cos\varphi_a\hat{\imath} + \operatorname{Sen}\theta_a\operatorname{Sen}\varphi_a\hat{\jmath} + \cos\theta_a\hat{k})\cdot(\operatorname{Sen}\theta_b\cos\varphi_b\hat{\imath} + \operatorname{Sen}\theta_b\operatorname{Sen}\varphi_b\hat{\jmath} + \cos\theta_b\hat{k})\}$

$= -\frac{\hbar^2}{4}\vec{u}_a\cdot\vec{u}_b$

$$E(\vec{u}_a,\vec{u}_b) = \frac{4}{\hbar^2}\langle\psi_s|\hat{S}_{\vec{u}_a}\hat{S}_{\vec{u}_b}|\psi_s\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{E(\vec{u}_a,\vec{u}_b) = -\vec{u}_a\cdot\vec{u}_b}$$

Entendamos el resultado:

- si $\vec{u}_a=\vec{u}_b \Rightarrow E(\vec{u}_a,\vec{u}_b)=-1$

  Esto quiere decir que si para a obtengo como resultado de la medición $+\hbar/2$ ($+1$ adimensionalmente) entonces para b debo obtener -1 y viceversa.

  Si $\vec{u}_a=-\vec{u}_b \Rightarrow E(\vec{u}_a,\vec{u}_b)=+1 \Rightarrow$ Si para a obtengo $+1$ $\Rightarrow$ para b debo obtener el mismo resultado

  Si $\vec{u}_a \neq \pm\vec{u}_b \Rightarrow$ la correlacion no es tan directa, pero al calcularlo el resutado es $E(\vec{u}_a,\vec{u}_b)=-\vec{u}_a\cdot\vec{u}_b$

$$\boxed{|E(\vec{u}_a,\vec{u}_b)|\leq 1}$$

Como veremos enseguida, el calculo aqui realizado jugará un papel fundamental en la resolución de la paradoja EPR, en descartar teorias de variables ocultas y en reafirmar el caracter no local de la mecanica cuantica.