Fermiones

* Representaciones de grupos

Considere el grupo de rotaciones de dos ejes reales $SO(2)$. Una representación matricial correspondiente al grupo de matrices 2×2 ortogonales de determinante $\underline{1}$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

+ Para generar esta matriz, podemos usar la matriz de traza nula y hermitica (n entero):

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\tau^{2n} = \tau\cdot\tau$, $\tau^{2n+1} = \tau^{2n}\cdot\tau$

Entonces: $R(\theta) = e^{(i\theta\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta\tau)^n}{n!}$

$$\therefore\ R(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{(\theta\tau)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n+1} \frac{(\theta\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Este grupo es Abeliano, ya que:

$$R(\theta_1)\,R(\theta_2) = R(\theta_2)\,R(\theta_1)$$

- De otro lado el grupo $U(1)$ corresponde a las rotaciones de un eje complejo y tiene elementos $U(\theta) = e^{i\theta Y}$, donde Y es el generador de los elementos del grupo y su representación es un número real.

- Ahora, consideremos un grupo de rotaciones en 3 dimensiones: $\overline{J} = \overline{r} \times \overline{p} = \overline{r} \times (-i\overline{\nabla})$

en componentes: $J^K = [\overline{X} \times (-i\overline{\nabla})]^K = -i \sum_j \varepsilon_{ijk} x^i \partial_j$

$$\therefore \quad J^k = i\, \epsilon_{ijk}\, x^i \partial^j$$

Recordemos de la Mecánica Cuántica, las relaciones de conmutación: $[J^i, J^j] = i\, \epsilon_{ijk} J^k$

. Una representación matricial de esta algebra se puede obtener con la llamada representación adjunta del grupo de rotaciones en 3 dimensiones, $SO(3)$, definidas a partir de las constantes de estructura: ϵ_{ijk}

$$(L^i)_{jk} = -i\, \epsilon_{ijk}$$

donde:

$$L^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix};\ L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix};\ L^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estos generan los elementos de $SO(3)$

$$\therefore \quad R(\theta) = e^{(i\theta_j L^j)} = e^{(i\theta_1 L_1 + i\theta_2 L_2 + i\theta_3 L_3)}$$

$$= R(\theta_1)\, R(\theta_2)\, R(\theta_3)$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente, el grupo SO(3) es no Abeliano:

$$R(\theta_1)\, R(\theta_2) \neq R(\theta_2)\, R(\theta_1)$$

. Ahora, las matrices de Pauli son un conjunto de matrices que satisfacen las mismas condiciones de conmutación:

$$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\frac{\tau^k}{2}$$

donde $\tau^i \Rightarrow \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

divididos por 2 corresponden a los generadores del grupo, las constantes de estructura del grupo corresponden a ϵ_{ijk}. Cómo los generadores no conmutan, $SU(2)$ es un grupo de Lie no Abeliano.

- Definiendo los generadores de $SU(2)$ como:

$$T^i = \frac{\tau^i}{2}$$

- Las matrices de Pauli y por consiguente T_i satisfacen:

$$T_i^\dagger = T_i$$
$$Tr(T_i) = 0$$

Además:
- $\det(T_i) = -1$
- $\{T_i, T_j\} = 2\delta_{ij} I \Rightarrow T_i^2 = I$
- $Tr(T^i T^j) = 2\delta^{ij}$
- $T_i T^j = i\epsilon_{ijk} + \delta_{ij}$

- Un elemento del grupo puede escribirse como

$$U(\theta) = e^{iT_i\theta_i} \approx 1 + iT_i\theta_i = 1 + i\frac{T^i}{2}\theta_i$$

Como antes, θ_i son los parámetros de transformación.

• De esta manera T_i genera el grupo de matrices 2×2 unitarias y de determinante 1: $SU(2)$.

Grupos $SU(N)$

En general, si N^2-1 generadores Λ_i, satisfacen el álgebra: $[\Lambda_a, \Lambda_b] = f_{abc}\Lambda_c$, con

$$\Lambda^\dagger = \Lambda, \qquad Tr(\Lambda) = 0,$$

• Entonces las matrices $N\times N$:

$$U(\theta) = e^{(i\Lambda_a \theta_a)}$$

son unitarias y de determinante 1, y constituyen la representación fundamental de $SU(N)$.