

## MECANICA CUANTICA 2

### LECTURA # 15

#### MEZCLAS ESTADISTICAS Y EL OPERADOR DENSIDAD

En la mecánica cuántica que hemos desarrollado y trabajado hasta ahora, hemos supuesto que estamos en capacidad de conocer con precisión  $|\psi(t_0)\rangle$ , y aplicar la ecuación de evolución temporal

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

para lograr esto debemos hacer una serie de mediciones correspondientes a un C.S.C.O.

Cuando tenemos esta situación nos referimos a  $|\psi(t_0)\rangle$  como un "estado puro".

En la práctica no siempre es posible llegar a conocer estados puros para un sistema.

¿Cómo podemos incorporar en el formalismo de la Mecánica Cuántica la información incompleta que poseemos sobre el estado del sistema en un instante dado de tiempo, de tal forma que el formalismo haga el mejor uso de la información?

Ejemplo: Atomas saliendo de un horno en un experimento tipo Stern-Gerlach.

Los átomos no poseen ninguna polarización ya que son resultado de un proceso térmico altamente aleatorio. No importa en qué dirección pongamos el eje del magneto de Stern-Gerlach, los resultados deben ser idénticos: dos manchas en el robo de átomos de plata.

¿Cuál es el estado de un atomo que sale del horno en  $t=0$ ,  $|\psi_0\rangle$ ?

Podríamos suponer  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z$ , pero este estado es  $|+\rangle_x$ , es decir que si colocáramos el eje del magneto a lo largo del eje  $x$ , observaríamos una sola mancha, lo cual es inconsistente con lo que habíamos mencionado anteriormente.

De hecho cualquier  $|\psi_0\rangle = a|+\rangle_z + b|-\rangle_z$   $|a|^2 + |b|^2 = 1$  lo podemos escribir como

$|\psi_0\rangle = e^{i\phi/2} \cos\theta/2 |+\rangle + e^{i\phi/2} \sin\theta/2 |-\rangle$ , que corresponde a un estado  $|+\rangle_u$  donde

$$\vec{u} = \sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{n}$$

Quiere decir que no estamos en capacidad de describir  $|\psi(t=0)\rangle$  para el experimento de Stern-Gerlach!

Ejemplo: Atomo de Hidrógeno en el nivel de energía  $n=3$ .

$$\hat{H}_0 |\psi\rangle = E_3 |\psi\rangle \implies |\psi\rangle = ?$$

En el tercer nivel  $n=3$   $g_n = n^2 = 9 \leftarrow l=0, l=1, l=2$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^9 a_i |\psi_i\rangle \rightarrow a_i = ?$$

Si esta es toda la información que poseemos, no hay forma de determinar  $a_i \implies |\psi\rangle = ?$

A este tipo de estados los denominamos como "estados impuros" o "mezclas estadísticas".

## MEZCLAS ESTADÍSTICAS DE ESTADOS

Cuando se posee información incompleta de un sistema se recurre al concepto de probabilidad.

Un sistema cuántico podría encontrarse en el estado  $|\psi_1\rangle$  (un estado puro), pero también podría encontrarse en el estado  $|\psi_2\rangle$ , o  $|\psi_3\rangle$ ,  $|\psi_4\rangle$ , ...

Lo que podemos hacer en este caso es asignarle a los posibles estados probabilidades:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &\leftarrow p_1 \\ |\psi_2\rangle &\leftarrow p_2 \\ |\psi_3\rangle &\leftarrow p_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$$

Dicimos que  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots\}$  se encuentra en una "mezcla estadística".

No confundir con  $|q\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |u_i\rangle$   $\longrightarrow |c_i|^2$ : Probabilidad de obtener  $a_i$  como resultado de medir  $\hat{A}$ .

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 Estado                    Estados propios  
 Puro.                    de un observable  
 $\hat{A}$ .

$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots$  también son estados puros. El problema está en el sistema, que no nos permite asignar un estado puro en un tiempo  $t$  dado.

Si poseyéramos toda la información necesaria para saber que el sistema se encuentra en el estado  $|\psi_1\rangle$

$$\Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 0, \dots, p_3 = 0, \dots$$

El hecho es que en muchos casos no poseemos información completa para asignar un estado puro al sistema en  $t_0$ . En algunos casos es porque es, en términos prácticos, imposible. Por ejemplo cuando tenemos  $10^{23}$  copias del sistema básico. Debemos extender la Mecánica Cuántica al caso estadístico, es decir, desarrollar una mecánica estadística cuántica.

$$\Rightarrow p_i = ?$$

¿De dónde podemos asignar valores para las probabilidades  $p_i$ ?

Necesariamente hay que recurrir a otros aspectos de la naturaleza del sistema en cuestión.

Por ejemplo  $p_i \sim e^{-E_i/kT}$   $\leftarrow$  Probabilidad asociada a la estadística de Maxwell-Boltzmann.  
 Estas probabilidades emergen de argumentos estadísticos y térmicos

Debemos hacer énfasis en que estas probabilidades no tienen "origen cuántico", proceden de nuestra ignorancia sobre el estado del sistema.

En el caso de un estado puro  $|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle$ , los  $c_k$  son amplitudes de probabilidad, no probabilidades

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \rightarrow c_k^* c_j A_{kj} \leftarrow \text{Termino de interferencia entre } |\psi_k\rangle \text{ y } |\psi_j\rangle$$

La superposición de los  $|\psi_k\rangle$  en este caso es una superposición coherente.

En el caso de Mezclas Estadísticas no debemos escribir  $|\psi\rangle = \sum_k p_k |\psi_k\rangle$

Los  $p_k$  no son amplitudes de probabilidad, son probabilidades, por tanto no hay interferencia entre ellos. La superposición es incoherente.

El otro problema al que no poseemos un formalismo para describir el "estado" de una medida estadística, ni para calcular la evolución temporal del sistema. → ¿Cómo proceder?

En el caso de estados puros tenemos  $|\psi(t)\rangle$ ,  $\hat{H}$ ,  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$

Una posibilidad es, dados  $\{\psi_n\}$  y  $\{p_k\}$ , para cada  $|\psi_n\rangle$  calculamos todo tipo de observables y después hacemos promedios estadísticos usando como factores de peso los  $p_k$ .

Si bien este método es correcto, en el caso de sistemas macroscópicos (Mecánica Estadística) nos puede llevar a cálculos supremamente complejos y poco prácticos.

Debemos buscar métodos estadísticos más poderosos.

### TRAZAS DE OPERADORES

Consideremos estados puros: Sea  $E$  el espacio de estados  $\rightarrow \{|n\rangle\}$  base de  $E$ ;  $\hat{A}$  un observable

$$\text{Tr}(\hat{A}) = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle$$

La traza de  $\hat{A}$  no depende de la base. Veamos: sea  $\{|\tilde{n}\rangle\}$  otra base de  $E$ .

$$\sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle = \sum_{n, \tilde{n}, \tilde{m}} \langle n | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | \hat{A} | \tilde{m} \rangle \langle \tilde{m} | n \rangle = \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} \langle \tilde{n} | \hat{A} | \tilde{m} \rangle \left( \sum_n \langle n | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{m} | n \rangle \right)$$

$$\sum_n \langle n | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{m} | n \rangle = \sum_n \langle \tilde{m} | n \rangle \langle n | \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{m} | \tilde{n} \rangle = \delta_{\tilde{m}, \tilde{n}} \Rightarrow \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle = \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} \langle \tilde{n} | \hat{A} | \tilde{m} \rangle \delta_{\tilde{m}, \tilde{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle = \sum_{\tilde{n}} \langle \tilde{n} | \hat{A} | \tilde{n} \rangle \quad \checkmark$$

Otra propiedad es que  $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$  sin importar si  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  commutan o no.

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \sum_n \langle n | \hat{A}\hat{B} | n \rangle = \sum_{n, m} \langle n | \hat{A} | m \rangle \langle m | \hat{B} | n \rangle = \sum_{m, n} \langle m | \hat{B} | n \rangle \langle n | \hat{A} | m \rangle = \sum_m \langle m | \hat{B}\hat{A} | m \rangle = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A}) \quad \checkmark$$

$$\text{Si } \hat{A} \equiv |\psi\rangle \langle \phi| \Rightarrow \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \phi | \hat{B} | n \rangle = \sum_n \langle \phi | \hat{B} | n \rangle \langle n | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{B} | \psi \rangle = B_{\phi\psi}$$

↑ Elemento Matricial.

$$\text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi|) = \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle = \sum_n \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad \checkmark$$

### OPERADOR DENSIDAD PARA ESTADOS PUROS

$|\psi(t)\rangle \leftarrow$  Estado puro  $\Rightarrow \hat{\rho}(t) \equiv |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \leftarrow$  "Operador densidad"

Propiedades:

$\hat{A} \leftarrow$  Observable.  $\rightarrow \{a_\alpha\} \leftarrow$  Espectro de valores propios.  $\Rightarrow P(a_\alpha)$ : Probabilidad de obtener  $a_\alpha$  como resultado de una medición de  $A$ .

$\hat{P}_\alpha = |\alpha\rangle \langle \alpha| \leftarrow$  Proyector al subespacio expandido por  $a_\alpha$  (en este caso 1D).

$$P(a_\alpha) = \| \hat{P}_\alpha |\psi\rangle \|^2 = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle$$

$$\hat{P}_\alpha |\psi\rangle = |\alpha\rangle \langle \alpha | \psi \rangle ; (\hat{P}_\alpha |\psi\rangle)^* = \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \Rightarrow \| \hat{P}_\alpha |\psi\rangle \|^2 = \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle = \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle$$

$$\text{Tr}(\hat{P}_\alpha \hat{\rho}) = \text{Tr}(|\alpha\rangle \langle \alpha | \psi \rangle \langle \psi |) = \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle = P(a_\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(a_\alpha) = \text{Tr}(\hat{P}_\alpha \hat{\rho})}$$

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho})$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho})}$$

Inmediatamente después de la medición  $\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{\hat{P}_{\alpha}|\psi\rangle}{\|\hat{P}_{\alpha}|\psi\rangle\|}$

$$\hat{\rho}' = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_{\alpha}|\psi\rangle}{\|\hat{P}_{\alpha}|\psi\rangle\|} \frac{\langle\psi|\hat{P}_{\alpha}}{\|\langle\psi|\hat{P}_{\alpha}\|}$$

$$= \frac{\hat{P}_{\alpha}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{P}_{\alpha}}{P(\alpha)} \Rightarrow \boxed{\hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_{\alpha}\hat{\rho}\hat{P}_{\alpha}}{P(\alpha)}}$$

$$\hat{H}(t) : \text{Hamiltoniano} \rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dt} \langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|\hat{H}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} (|\psi\rangle\langle\psi|) = i\hbar \left\{ \left( \frac{d}{dt} |\psi\rangle \right) \langle\psi| + |\psi\rangle \left( \frac{d}{dt} \langle\psi| \right) \right\} = \{ \hat{H}|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|\hat{H} \} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]} \leftarrow \text{Ecación de evolución temporal para } \hat{\rho}(t).$$

Podemos por tanto hacer una formulación alternativa para la mecánica cuántica de estados puros en términos del operador densidad.

### FORMULACION ALTERNATIVA DE LA MECANICA CUANTICA PARA ESTADOS PUROS

Principio 1:

Para cada sistema físico se puede asociar un espacio de Hilbert  $E$ . En cada instante de tiempo  $t$  el estado del sistema está completamente determinado por el operador  $\hat{\rho}(t)$ . Este operador satisface la condición de normalización

$$\text{Tr}(\hat{\rho}(t)) = 1.$$

Principio 2:

La probabilidad de encontrar un valor  $\alpha$  en una medición de una cantidad física  $A$  descrita por un observable  $\hat{A}$  está dada por:

$$P(\alpha) = \text{Tr}(\hat{P}_{\alpha} \hat{\rho}) \quad \text{donde } \hat{P}_{\alpha} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

Inmediatamente después de la medición el nuevo operador densidad para el sistema es:

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_{\alpha} \hat{\rho} \hat{P}_{\alpha}}{P(\alpha)}$$

Principio 3:

La evolución temporal de  $\hat{\rho}(t)$  está dada por:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

donde  $\hat{H}$  es hamiltoniano del sistema.

## EL OPERADOR DENSIDAD PARA MEZCLAS ESTADÍSTICAS

Regresemos al caso de partículas de spin  $\frac{1}{2}$  emergiendo de un horno (no polarizadas). La probabilidad de encontrar  $\pm \hbar/2$  a lo largo de cualquier eje  $\vec{u}$  es de  $\frac{1}{2}$ . No existe ningún estado puro  $|\psi\rangle$  que pueda describir esta situación.

¿Cuál es el operador densidad?  $\rightarrow \hat{\rho} = ?$

$$\langle S_{\vec{u}} \rangle = 0 \text{ para todo } \vec{u} \Rightarrow \text{Tr}(\hat{S}_{\vec{u}} \hat{\rho}) = \langle \hat{S}_{\vec{u}} \rangle = 0$$

$$\hat{S}_{\vec{u}} = a \hat{U}_x + b \hat{U}_y + c \hat{U}_z \quad ; \quad \text{Tr}(\hat{U}_i) = 0 \Rightarrow \text{Tr}(\hat{S}_{\vec{u}}) = 0 \Rightarrow \hat{\rho} \sim \hat{1}_{2 \times 2} ; \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1 \Rightarrow$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este  $\hat{\rho}$  cumple con  $\langle \hat{S}_{\vec{u}} \rangle = 0$  para todo  $\vec{u}$ .

este  $\hat{\rho}$  lo podemos escribir como

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} p_+ & 0 \\ 0 & p_- \end{pmatrix}$$

$p_{\pm}$ : probabilidad de que el atomo tenga spin a lo largo del eje  $\vec{z}$  igual a  $\pm \hbar/2$

$$p_{\pm} = \frac{1}{2} \leftarrow \text{La misma probabilidad para ambos (que tiene mucho sentido).}$$

Exploraremos otra forma de obtener  $\hat{\rho}$  para este caso.

$$\hat{\rho} = p_+ |+\rangle \langle +| + p_- |- \rangle \langle -| \quad p_+ = \frac{1}{2}, p_- = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

comparamos con el caso polarizado a lo largo del eje x

$$|\psi\rangle = |+\rangle_x \Rightarrow \hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| \Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\rangle_x + |- \rangle_x \} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\rangle + |- \rangle \}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \{ |+\rangle + |- \rangle \} \{ \langle +| + \langle -| \} = \frac{1}{2} \{ |+\rangle \langle +| + |+\rangle \langle -| + |- \rangle \langle +| + |- \rangle \langle -| \}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Polarización del spin de los átomos de Plata a lo largo del eje x.}$$

Generalización a cualquier sistema cuántico:

$$\mathcal{E} \rightarrow \{ |\psi_i\rangle \} \leftarrow \text{base de } \mathcal{E}$$

$$\hat{\rho} = \sum_i \pi_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \Rightarrow \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \pi_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \pi_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \pi_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \sum_i \pi_i = 1$$

$\pi_i$ : probabilidad estadística asociada a  $|\psi_i\rangle$

$\hat{\rho}$ : valores propios de  $\hat{\rho}$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho})$$

$$\hat{A} \hat{\rho} = \sum_i \pi_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{A} \rightarrow \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}) = \sum_i \pi_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{A}) = \sum_i \pi_i \sum_j \langle \psi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | A | \psi_j \rangle$$

$$= \sum_i \pi_i \sum_j \langle \psi_j | \hat{A} | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \sum_i \pi_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}) = \sum_i \pi_i \langle A \rangle_i$$

$$\langle A \rangle_i \equiv \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle$$

## ENSAMBLE MICROCANÓNICO

Consideremos un sistema descrito por un espacio de estados  $\mathcal{E}$  de dimensión d

$$\{|\psi_i\rangle\} \leftarrow \text{base de } \mathcal{E} \Rightarrow \pi_i = \frac{1}{d} \leftarrow \text{Postulado de probabilidades iguales a priori}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{d} \sum_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

## ENSAMBLE CANÓNICO

$$\pi_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} \quad \beta = 1/kT \quad \rightarrow \hat{\rho} = \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad |\psi_i\rangle \leftrightarrow E_i$$

$$S = -\frac{1}{\sum_j e^{-\beta E_j}} \sum_i |\psi_i\rangle e^{-\beta E_i} \langle \psi_i| = \frac{1}{\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})} e^{-\beta \hat{H}} \Rightarrow \boxed{\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})}}$$

$Z = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})$  ← Función de partición.

## SISTEMAS ENREDADOS

Supongamos un espacio de estados  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B$

$\mathcal{E}_A \rightarrow \{|\psi_n\rangle\} \leftarrow \text{base}$

$\mathcal{E}_B \rightarrow \{|\phi_m\rangle\} \leftarrow \text{base}$

Para  $\mathcal{E}$  tenemos para un estado dado un operador densidad  $\hat{\rho}$

Para  $\mathcal{E}_A$  tenemos  $\hat{\rho}_A$

Para  $\mathcal{E}_B$  tenemos  $\hat{\rho}_B$

$\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_B \leftarrow$  operadores densidad "reducidos"

$$\langle \psi_n | \hat{\rho}_A | \psi_n \rangle = \sum_m \langle \psi_n; \phi_m | \hat{\rho} | \psi_n; \phi_m \rangle$$

$$\langle \phi_m | \hat{\rho}_B | \phi_m \rangle = \sum_n \langle \psi_n; \phi_m | \hat{\rho} | \psi_n; \phi_m \rangle$$

$\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_B \leftarrow$  "Trazas Parciales" de  $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}) ; \quad \hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho})$$

Supongamos la medición de un observable  $\hat{A}$  asociado a  $\mathcal{E}_A \Rightarrow$  en  $\mathcal{E}$  tenemos  $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_B$

$$\Rightarrow \hat{P}(a_\alpha) = \text{Tr}((\hat{P}_\alpha \otimes \mathbb{1}_B) \hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{P}_\alpha \hat{\rho}_A)$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}_A)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_A = [\hat{H}_A, \hat{\rho}_A]$$

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B$$

$$\hat{H}_A \rightarrow \hat{H}_A \otimes \mathbb{1}_B$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_B = [\hat{H}_B, \hat{\rho}_B]$$

$$\hat{H}_B \rightarrow \mathbb{1}_A \otimes \hat{H}_B$$

En general siempre se puede escribir un  $\hat{S}$  como  $\hat{S} = \hat{S}_A \otimes \hat{S}_B$

Consideremos el estado singlete de dos partículas de spin  $1/2$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\downarrow\rangle - |-\uparrow\rangle \}$$

$$\begin{aligned}\hat{S} = |\Psi\rangle \langle \Psi| &= \frac{1}{2} \{ |+\downarrow\rangle - |-\uparrow\rangle \} \{ \langle +\downarrow| - \langle -\uparrow| \} \\ &= \frac{1}{2} \{ |+\downarrow\rangle \langle +\downarrow| - |+\downarrow\rangle \langle -\uparrow| - |-\uparrow\rangle \langle +\downarrow| + |-\uparrow\rangle \langle -\uparrow| \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|1\rangle &= |+\uparrow\rangle \\ |2\rangle &= |+\downarrow\rangle \\ |3\rangle &= |-\uparrow\rangle \\ |4\rangle &= |-\downarrow\rangle\end{aligned}\Rightarrow \hat{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_A = ? ; \hat{S}_B = ?$$

$$\langle + | \hat{S}_A | + \rangle = \sum_{\sigma_B} \langle +; \sigma_B | \hat{S} | +; \sigma_B \rangle = \{ \langle +; + | \hat{S} | +; + \rangle + \langle +; - | \hat{S} | +; - \rangle \} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Calculando todos los elementos tenemos:

$$\begin{aligned}\langle + | \hat{S}_A | - \rangle &= \sum_{\sigma_B} \langle +; \sigma_B | \hat{S} | -; \sigma_B \rangle = 0 \\ \langle - | \hat{S}_A | + \rangle &= \sum_{\sigma_B} \langle -; \sigma_B | \hat{S} | +; \sigma_B \rangle = 0 \\ \langle - | \hat{S}_A | - \rangle &= \sum_{\sigma_B} \langle -; \sigma_B | \hat{S} | -; \sigma_B \rangle = \frac{1}{2}\end{aligned}\Rightarrow \hat{S}_A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{De igual forma obtenemos: } \hat{S}_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_A \otimes \hat{S}_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 1 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_A \otimes \hat{S}_B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{S} \neq \hat{S}_A \otimes \hat{S}_B \leftarrow \text{Cuando hay entredamiento.}$$

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{S}$  es no diagonal como consecuencia de que representa un estado entrelazado

Cuando no hay entredamiento  $\Rightarrow$  no hay correlaciones entre  $E_A$  y  $E_B \Rightarrow \hat{S} = \hat{S}_A \otimes \hat{S}_B$  en este caso