Universidad de Los Andes - Departamento de Física

Mecánica Cuántica 1 - parcial 3 - Nov. 15 -2016

profesor: Carlos Ávila

El tiempo para el examen es de 80 minutos. Explique claramente sus respuestas.

1) Un electrón en un átomo de hidrógeno está en un estado l=2, l_z=1, S_z=1/2. Una medición del cuadrado del momento angular total es efectuada. Que valores son posibles y con que probabilidades se pueden encontrar?

SOLUCIÓN

Usamos la tabla de Clecbsch-Gordan 2x1/2 para mirar la expansión del estado de momento angular en su base individual a la base total:

$$|l_z = 1, s_z = 1/2 >= \sqrt{\frac{4}{5}}|J = 5/2, M_J = 3/2 > -\sqrt{\frac{1}{5}}|J = 3/2, M_J = 3/2 >$$

La ecuación de valores propios del operador J^2 es:

$$J^2|J, M_J >= \hbar^2 J(J+1)|J, M_J >$$

Si se mide J^2, los posibles valores que se pueden obtener son: $\frac{35}{4}\hbar^2$ con probabilidad 4/5, y $\frac{15}{4}\hbar^2$ con probabilidad 1/5.

2)Un día que usted está en un ascensor, una persona misteriosa le entrega el siguiente espinor:

$$\chi = \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \end{pmatrix}$$

a) Calcule $<\sigma_x>$, $<\sigma_y>$,$<\sigma_z>$

b) Si usted mide el spin en la dirección x cuales son los posibles resultados y sus probabilidades?

SOLUCIÓN

a) Primero normalizamos el spinor:

$$\chi = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4i \end{pmatrix}$$

Luego calculamos los valores esperados que se preguntan:

$$< \sigma_x >= \frac{1}{25}[3 \quad -4i]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4i \end{bmatrix} = 0$$

$$< \sigma_y >= \frac{1}{25}[3 \quad -4i]\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4i \end{bmatrix} = \frac{24}{25}$$

$$< \sigma_z >= \frac{1}{25}[3 \quad -4i]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4i \end{bmatrix} = \frac{-7}{25}$$

b) Siempre que hacemos una medición expandimos en vectores propios del operador asociado a la variable que medimos:

$$|\chi >= a|\uparrow_x> +b|\downarrow_x>$$

Podemos diagonalizar $s_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ para encontrar sus vectores propios, de este proceso de diagonalizacion obtenemos:

$$|\uparrow_x>= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ; |\downarrow_x>= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes a, b los obtenemos a partir de los productos internos:

$$a = <\uparrow_x|\chi> = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3+4i); \quad \Rightarrow |a|^2 = \frac{1}{2}$$

La medición del spin sobre el eje x arrojaría como resultados $\pm\hbar/2$ con probabilidades de $1/2$ cada una.

3)El hamiltoniano para un sistema de dos partículas diferentes cuyos spines interactuan puede ser escrito como: H=A+B$\overrightarrow{S}_1.\overrightarrow{S}_2$, Donde S_1 y S_2 son los spines para partículas de spin 1 y A,B son constantes. Hallar los niveles de energía y el degeneramiento de cada nivel.

SOLUCIÓN

Note que el término:$\overrightarrow{S}_1.\overrightarrow{S}_2 = S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}$ no es diagonal en la base ed spines individuales, porque las matrices σ_x,σ_y no son diagonales. Afortunadamente, este término es diagonal en la bse de spines totales, esto se puede verificar fácilmente si escribimos:

$$\overrightarrow{S}_1.\overrightarrow{S}_2 = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2)^2 - \overrightarrow{S}_1^2 - \overrightarrow{S}_2^2\right]$$

En la base de spint total $|S, M, S_1, S_2>$ tenemos:

$$\frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2)^2 - \overrightarrow{S}_1^2 - \overrightarrow{S}_2^2\right]|S, M, S_1, S_2> = \frac{1}{2}\hbar^2\left[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)\right]$$

Donde $S_1 = 1$ y $S_2 = 1$, por ser partículas de spin 1, mientras que S puede tomr los valores de S=2, S=1, S=0. Un estado de spin total tiene estados M dados por M=-S, -S+1,...,S. Dado esto, la energía del nivel S=2 es: $E_2 = A + B\hbar^2$, con cinco estados degenerados:|S=2,M=2>, |s=2,M=1>,|S=2,M=0>,|S=2,M=-1>, |S=2,M=-2>. La energía del estado S=1 es: $E_1 = A - B\hbar^2$ con degeneramiento 3 y la energía para el estado S=0 es: $E_0 = A - 2B\hbar^2$ con degeneramiento 1.

4) En el tiempo t=0 una partícula está descrita por la función de onda:

$$\Psi(r,0) = r\sin\theta\cos\phi e^{-r}/\sqrt{\pi}$$

a) Si L^2 y L_z son medidos, cuales valores son posibles y cuales son las probabilidades de hallar estos valores?

b)$\Psi(r,0)$ es un estado propio de un hamiltoniano H_0 con valor propio E_0. En el tiempo t=0 se prende un campo magnético constante B y el hamiltoniano se vuelve: H= H_0 + $\mu_0 B L_z$. Hallar $\Psi(r,t)$.

SOLUCIÓN

a) Expandimos la función de onda dada en términos de funciones propias de los operadores que se van a medir, L^2 y L_z:

$$\psi(r,0) = R(r)\chi(l,m)$$

Donde $\chi(l,m)$ corrresponde a la función de onda que depende de la parte angular y debe estar correctamente normalizada:

$$\chi(l,m) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^{-1} - Y_1^1)$$

Ambas funciones corresponden al estado l=1. Por lo que si se mide L^2 se obtendrá $2\hbar^2$ con probabilidad de 1. Si se mide L_z se obtendrá $\pm\hbar$ con probabilidad de $1/2$ cada una.
b) La evlocuión en el tiempo de $\psi(r,t)$ se escribe como:

$$\psi(r,t) = \sum_{\ell,m} C_{\ell,m} R(r) Y_l^m e^{-iE_{\ell,m}t/\hbar}$$

Como $\psi(r,0) = R(r)\chi(l,m)$ ya está expandida en funciones propias de L^2 y L_z, obtenemos:

$$\psi(r,t) = R(r)\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^{-1}e^{-i(E_0/hbar - \mu_0 B)t/hbar} - Y_1^1 e^{-i(E_0/\hbar + \mu_0 B)t})$$

———

FÓRMULAS ÚTILES:

$|n>=\Psi(x,t)=\sum c_n\psi_n(x)\exp(-iE_n t/\hbar)$; $Y_0^0(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$; $Y_1^0(\theta,\phi)=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta$,

$Y_1^{\pm1}(\theta,\phi)=\mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\exp(\pm i\phi)$;

$\sigma_x=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$; $\sigma_z=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $S|s,m>=\hbar\sqrt{s(s+1)}|s,m>$; $S_z|sm>=m\hbar|s,m>$;
$S_\pm|s,m>=\hbar\sqrt{s(s+1)-m(m\pm1)}|s,m\pm1>$; $[S_i,S_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$;

$S_\pm=S_x\pm iS_y$; $|1,1>=|\uparrow\uparrow>$; $|1,0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> + |\downarrow\uparrow>)$;$|1,0>=|\downarrow\downarrow>$;$|0,0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow>-|\downarrow\uparrow>)$

36. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			
.	.			

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

1/2×1/2

		1
		+1
+1/2	+1/2	1

		1	0
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		1
		−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

		3/2
		+3/2
+1	+1/2	1

		3/2	1/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

		3/2	1/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

		3/2
		−3/2
−1	−1/2	1

2×1/2

		5/2
		+5/2
+2	+1/2	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

		5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

		5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

		5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

		2
		+2
+3/2	+1/2	1

		2	1
		+1	+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

		2	1
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		2	1
		−1	−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

		2
		−2
−3/2	−1/2	1

2×1

		3
		+3
+2	+1	1

		3	2
		+2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

		3	2	1
		+1	+1	+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

		3	2	1
		0	0	0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1
		−1	−1	−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

		3	2
		−2	−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

		3
		−3
−2	−1	1

1×1

		2
		+2
+1	+1	1

		2	1
		+1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

		2	1	0
		0	0	0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

		2	1
		−1	−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

		2
		−2
−1	−1	1

3/2×1

		5/2
		+5/2
+3/2	+1	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

		5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

		5/2
		−5/2
−3/2	−1	1

3/2×3/2

		3
		+3
+3/2	+3/2	1

		3	2
		+2	+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

		3	2	1
		+1	+1	+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1	0
		0	0	0	0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

		3	2	1
		−1	−1	−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2
		−2	−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

		3
		−3
−3/2	−3/2	1

2×3/2

		7/2
		+7/2
+2	+3/2	1

		7/2	5/2
		+5/2	+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

		7/2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

		7/2	5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2	+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

		7/2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

		7/2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2	−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

		7/2	5/2
		−5/2	−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

		7/2
		−7/2
−2	−3/2	1

2×2

		4
		+4
+2	+2	1

		4	3
		+3	+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

		4	3	2
		+2	+2	+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

		4	3	2	1
		+1	+1	+1	+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2	1	0
		0	0	0	0	0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

		4	3	2	1
		−1	−1	−1	−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2
		−2	−2	−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

		4	3
		−3	−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

		4
		−4
−2	−2	1

$$d^{\,0}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,2}_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{\,2}_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 36.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).