Solución Tercer Exámen Parcial Cuántica 1

Carlos Ávila

Noviembre 2017

1.

1.1.

El momento angular total para una partícula de spin 3/2 y momento angular orbital l=1, es de 3/2 y con componente z igual a -1/2. Si se mide L_z que posibles valores pueden ser obtenidos y con que probabilidades?

Sln: De acuerdo con el enunciado, tenemos el siguiente estado inicial en la representación de momento angular total:

$$|J = 3/2, J_z = -1/2, l = 1, s = 3/2\rangle$$

como se requiere encontar los posibles valores de la componente z del momento angular orbital, tenemos que usar la descomposición de Clebsch-Gordan para encontrar los estados en la representación de momentos individuales. Para ello, vamos a la tabla de coeficientes (recordando que para este caso se lee verticalmente), específicamente al acople $3/2 \times 1$, con ello tenemos que la expansión está dada por

$$|J = 3/2, J_z = -1/2, l = 1, s = 3/2\rangle = \sqrt{\frac{8}{15}}|s = 3/2, l = 1, m_s = 1/2, m_l = -1\rangle$$

$$-\sqrt{\frac{1}{15}}|s = 3/2, l = 1, m_s = -1/2, m_l =\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|s = 3/2, l = 1, m_s = -3/2, m_l = 1\rangle$$

De aquí tenemos que los valores de L_z y sus correspondientes son:

$$\begin{aligned} L_z =& -\hbar \rightarrow p = \frac{8}{15} \\ L_z =& 0 \rightarrow p = \frac{1}{15} \\ L_z =& \hbar \rightarrow p = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

1.2.

Si la medición de L_z da como resultado Lz = -1 y si luego se hace una medición de de J^2 que valores pudieran ser obtenidos y con que probabilidades? *Sln:*En este caso, partimos de un estado en la representación de momento angular individual, recordando que al pasar de esta representación a la de momento angular total, leemos la tabla de forma horizontal y obtenemos

$$|s=3/2,l=1,m_s=1/2,m_l=-1\rangle=\sqrt{\frac{3}{10}}|J=5/2,M=-1/2\rangle+$$
$$\sqrt{\frac{8}{15}}|J=3/2,M=-1/2\rangle+\sqrt{\frac{1}{6}}|J=1/2,M=-1/2\rangle$$

Recordando que la acción de J^2 sobre un ket $|J,M\rangle$ es $J^2|J,M\rangle = J^2(J+1)\hbar^2|J,M\rangle$ tenemos que los valores con sus correspondientes probabilidades son:

$$J^2 = \frac{35}{4}\hbar^2 \rightarrow p = \frac{3}{10}$$
$$J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2 \rightarrow p = \frac{8}{15}$$
$$J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \rightarrow p = \frac{1}{6}$$

2.

Para esta interacción tenemos que el Hamiltoniano viene dado por

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

Como el campo está fijo en dirección x, se reduce a

$$H = -\frac{\gamma B_0\hbar}{2}\sigma_x = -\frac{\gamma B_0\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Primero, diagonalizamos el Hamiltoniano. Es claro que su polinomio característico viene dado por

$$\lambda^2 - \frac{\gamma^2 B_0^2\hbar^2}{4} = 0$$

Por lo cual sus valores propios son

$$\lambda = \pm\frac{\gamma B_0\hbar}{2}$$

De forma que los vectores propios del Hamiltoniano son aquellos de σ_x:

$$|\chi_x^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$
$$|\chi_x^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Ahora, para un tiempo t el estado tiene la forma $|\chi(t)\rangle = a_1 e^{-iE_+t/\hbar}|\chi_x^+\rangle + a_2 e^{-iE_-t/\hbar}|\chi_x^-\rangle$. Tenemos la condición inicial de que para un tiempo $t = 0$ el estado corresponde a spin up $|\chi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Por lo cual

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Realizando los correspondientes brackets tenemos que las constantes a_1 y a_2 toman el mismo valor: $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Queremos hallar la probabilidad para que en un tiempo t tengamos un valor $S_y = \frac{1}{2}$.

Para ello, diagonalizamos el operador de spin en el eje y:

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos valores propios $\lambda = \pm 1$, dado esto, el vector propio correspondiente a tener $S_y = 1/2$ es

$$|\chi_y^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora el bracket para encontrar la probabilidad

$$p = |\langle \chi_y^+ | \chi(t) \rangle|^2$$

Antes, notemos que al ya conocer los valores de energía para la descomposición de $|\chi(t)\rangle$, este se reduce a

$$|\chi(t)\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\gamma B_0 t/2) \\ -i\sin(\gamma B_0 t/2) \end{bmatrix}$$

por lo cual

$$\langle \chi_y^+ | \chi(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\gamma B_0 t/2) - \sin(\gamma B_0 t/2))$$

$$p = \frac{1}{2} (\cos(\gamma B_0 t/2) - \sin(\gamma B_0 t/2))^2 = \frac{1}{2} (1 - 2\sin(\gamma B_0 t))$$

3.

Tenemos que la partícula B está en el estado

$$|\chi_x^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

Dado esto, el estado de ambas partículas puede escribirse como

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

Sabemos, usando la tabla de coeficientes que las descomposiciones en la base de momento angular total son

$$
\begin{aligned}
|\uparrow\uparrow\rangle =& |S=1, M=1\rangle \\
|\uparrow\downarrow\rangle =& \frac{1}{\sqrt{2}}|S=1, M=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S=0, M=0\rangle
\end{aligned}
$$

Por lo cual

$$
|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S=1, M=1\rangle + \frac{1}{2}(|S=1, M=0\rangle + |S=0, M=0\rangle)
$$

Finalmente, obtenemos que la probabilidad de tener una configuración de s=0 es $p = 1/4$.

4.

En este caso partimos con un átomo de tritio (isótopo del Hidrógeno) con dos neutrones, un protón y un electrón orbitando en el estado base, por lo tanto, la función de onda corresponde a

$$
\psi_{100}^{t} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_t^3}} e^{-r/a_t}
$$

donde a_t corresponde al radio de Böhr del átomo en cuestión, este puede ser hallado usando las relaciones previamente vistas

$$
a_t = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu_t e^2} \quad \mu_t = \frac{m_e}{1+\frac{m_e}{M}} = m_e \rightarrow a_t = a_0
$$

donde M es la masa del núcleo. Ahora, al producirse un decaimiento β^-, se forma un se forma un protón en lugar de un neutrón en el núcleo y de esta manera, obtenemos un ión de Helio (2 protones, un neutrón y un electrón; isótopo ${}^3He^+$ estable). Nos piden la probabilidad de que el nuevo ión sea 1S el cuál corresponde a ψ_{100}^{He}. Primero calculamos el radio de Böhr del ión de Helio usando las relaciones previamente establecidas, obteniendo $a_{He} = a_0/2$. Luego la función del estado base es

$$
\psi_{100}^{He} = \sqrt{\frac{8}{\pi a_0^3}} e^{-2r/a} \tag{1}
$$

Para calcular la probabilidad realizamos el producto interno teniendo en cuenta que en la base propia del Helio, las funciones de onda están normalizadas:

$$
\begin{aligned}
C =& \frac{\sqrt{8}}{\pi a_0^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-3r/a_0} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr && (2) \\
=& \frac{4\sqrt{8}}{a_0^3} \int_0^\infty r^2 e^{-3r/a_0} dr = \frac{4\sqrt{8}}{a_0^3} \frac{2a_0^3}{27} = \frac{8\sqrt{8}}{27} && (3)
\end{aligned}
$$

por lo cual

$$P = \frac{512}{729} = 0,702 \tag{4}$$