Operadores de Proyección de Helicidad

- El espín de un fermión de Dirac, cuando se mide a lo largo de cualquier dirección, puede ser $+\frac{1}{2}\hbar$ o $-\frac{1}{2}\hbar$, o múltiplos de esta unidad.
- Una dirección especial es la dirección de movimiento del fermión (excepto en su marco de reposo).
- Definimos la helicidad como el espín medido a lo largo la dirección de movimiento.
- Los operadores de proyección de Helicidad, proyectan los estados de helicidad positiva y negativa.
- Recuerde que $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$ es el operador de espín para fermiones. Definimos entonces un 3-vector

$$\overline{\Sigma} \equiv (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$$

- Ahora, proyectamos este operador a lo largo de la dirección de movimiento del fermión:

$$\Sigma_p = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{p}$$; esto tiene valores propios $+\mathbb{1}$ y $-\mathbb{1}$

- Podemos definir ahora los operadores de proyección de helicidad:

$$\Pi_{\pm}(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} \pm \Sigma_p\right)$$

- Estos operadores satisfacen las relaciones esperadas:

$$\Pi_{\pm}^2 = \Pi^{\pm}, \quad \Pi_+ \Pi_- = \Pi_- \Pi_+ = 0, \quad \Pi_+ + \Pi_- = \mathbb{1}$$

- Es posible mostrar que los operadores de proyección de helicidad conmutan con los operadores de proyección de energía:

$$[\Lambda_+(p), \Pi_{\pm}(p)]_- = [\Lambda_-(p), \Pi_{\pm}(p)]_- = 0$$

- Estas relaciones son independientes de la representación que elijamos. El hecho que $\Lambda_{\pm}(p)$ conmute con $\Pi_{\pm}(p)$ muestra que podemos elegir estados propios comunes como la base de nuestra representación.

Quiralidad

- En general, cualquier operador que al elevarse al cuadrado de la identidad, puede ser usado como un operador de proyección.

- Si $Q^2 = \mathbb{1}$, podemos definir dos operadores:

$$P_+ = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + Q) \quad y \quad P_- = \frac{1}{2}(1 - Q)$$

- Si estos operadores obedecen $P_\pm^2 = P_\pm$, $P_+ + P_- = \mathbb{1}$ y $P_+ P_- = 0$, entonces son operadores de proyección, proyectando en sub-espacios ortogonales.

- γ^5 cumple $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$. Entonces podemos definir:

$$L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

- A L y R se les conoce como operadores de Quiralidad. Estos operadores resultan cercanamente relacionados

Con los operadores de proyección de helicidad, dado que para $m \to 0$, los operadores de helicidad son iguales a los operadores de quiralidad.

Operadores de Proyección de Espín

- Como se mencionó anteriormente, los operadores de proyección de helicidad, definen las proyecciones del espín a lo largo de la dirección del 3-momentum de una partícula. Por lo tanto, no sirven para nada en el caso de una partícula en reposo.

- Para este caso, necesitamos operadores de proyección distintos.
- Suponga que queremos proyectar los estados de espín para una cierta dirección espacial denotada por un vector unitario $\hat{s}$.

- Para esto, definimos primero el 4-vector n^μ cuyas componentes están dadas por:

$$\eta^0 = \frac{\bar{p}\cdot\hat{s}}{m}$$

$$\bar{\eta} = \hat{s} + \frac{(\bar{p}\cdot\hat{s})\bar{p}}{m(E+m)}$$

Donde $(E,\bar{p})$ denota el 4-momentum de una partícula de masa m. Note que η^μ satisface las condiciones:

$$p^\mu \eta_\mu = 0 \quad , \quad \eta^\mu \eta_\mu = -1$$

$$\eta_\mu = \left(\frac{\bar{p}\cdot\hat{s}}{m}, -\hat{s} - \frac{(\bar{p}\cdot\hat{s})\bar{p}}{m(E+m)} \right)$$

$$\therefore \quad p^\mu \eta_\mu = \frac{E}{m}\,\bar{p}\cdot\hat{s} - \bar{p}\cdot\hat{s} - (\bar{p})^2\frac{(\bar{p}\cdot\hat{s})}{m(E+m)}$$

$$p^\mu \eta_\mu = \frac{\bar{p}\cdot\hat{s}}{m}\left(E - m - \frac{p^2}{E+m} \right)$$

$$p^\mu \eta_\mu = \frac{\bar{p}\cdot\hat{s}}{m}\cdot\frac{1}{E+m}\Big((E-m)(E+m) - p^2 \Big) = \frac{\bar{p}\cdot\hat{s}}{m}\,\frac{1}{E+m}\Big(\underbrace{E^2 - m^2}_{p^2} - p^2 \Big)$$

$$\therefore \quad p^\mu \eta_\mu = 0$$

- De manera similar, es fácil probar $\eta^\mu \eta_\mu = -1$.
- Ahora, dado que $\eta^\mu \eta_\mu = -1$, es fácil ver que

$\gamma_5 \not{n}$ al cuadrado es igual a la unidad.

Entonces, podemos construir operadores de proyección:

$$P_{\uparrow} = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma_5 \not{n}\right), \quad P_{\downarrow} = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma_5 \not{n}\right)$$

- Para entender el significado de estos operadores, consideremos $\hat{s}$ en la dirección x, $\hat{s} = (1,0,0)$. En el marco de reposo de la partícula, $n^{\mu} = (0, \hat{s})$ tal que $\not{n} = \gamma^1$. entonces: $\gamma_5 \not{n} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1$

Como $[\gamma^i, \gamma^j]_+ = -2\delta^{ij}$ $\therefore$ $\gamma_5 \not{n} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$\gamma_5 \not{n} = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^3$ Como $\sigma^{23} = \frac{i}{2}[\gamma^2, \gamma^3]_-$

Como $[\gamma^2, \gamma^3]_+ = 0$ $\therefore$ $\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^3\gamma^2$

$$\gamma_5 \not{n} = \gamma^0 \sigma^{23} = \gamma^0 \Sigma^1$$

- Esto conmuta con el operador de espín en dirección

x. En otras palabras, para esta elección de $\vec{S}$, los auto-estados de $\gamma_5\chi$ tienen una componente de espín bien definida a lo largo de la dirección x de la partícula.

Lagrangiano Para un Campo de Dirac

- El problema con la interpretación para una sóla partícula de las soluciones de la ecuación de Dirac, es el mismo que con con el campo escalar: contiene estados de energía negativa.
- Queremos entonces ir sobre una interpretación teórica del campo. El primer paso es construir un Lagrangiano.
- La ecuación de Dirac puede ser derivada del Lagrangiano: $\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi$

- Si colocamos los indices para los espinores explicitamente:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_\alpha \left(i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta$$

- De aquí, podemos derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange.
- Ahora, consideramos el caso donde ψ es un campo complejo. Debido que las componentes de $\overline{\psi}$ son combinaciones lineales de las componentes $\psi^\dagger$, podemos tratar ψ y $\overline{\psi}$ como independientes.
- Así, la ecuación de Euler-Lagrange para $\overline{\psi}$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi}_\alpha)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}_\alpha}$$

Note que $\partial_\mu \left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi}_\alpha)} \right) = 0$ ya que $\mathcal{L}$ no tiene terminos que tengan $\partial_\mu \overline{\psi}_\alpha$ ...

Con esto obtenemos : $(i\not\partial - m)\psi = 0$

- Ahora, note que esperaríamos que $\mathcal{L}$ fuera hermítico, pero para el caso de Dirac no lo es.

- Veamos el primer término :

$$(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = (\partial_\mu\psi)^\dagger(i\bar{\psi}\gamma^\mu)^\dagger$$

$$= -i(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\bar{\psi}^\dagger$$

$$= -i(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\psi$$

Recuerde que $\gamma^\mu\gamma^0$ debe ser hermítico:

$$(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = -i(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi$$

$$= -i(\partial_\mu\psi)^\dagger(\gamma^0\gamma^\mu)^\dagger\psi$$

$$= -i(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi$$

$$= -i(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^\mu\psi$$

$$(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = -i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi$$

- Si queremos un Lagrangiano hermítico debemos descartar el Lagrangiano anterior y usar en lugar:

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi$$

- Sin embargo, no es absolutamente escencial que usemos la forma hermítica del Lagrangiano. La razón es que:

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = \partial_\mu\left(\frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right),$$ lo cual es una divergencia total y por lo tanto el cambio en la acción es cero, por lo cual $\mathcal{L}'$ es un Lagrangiano equivalente a $\mathcal{L}$.

- El Lagrangiano de Dirac es invariante ante transformaciones: $\psi \rightarrow e^{-iq\theta}\psi$, para las cuales la corriente de Noether es: $j^{\mu} = q\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

. La carga conservada es:

$$Q = q\int d^3x\,\overline{\psi}\gamma^0\psi = q\int d^3x\,\psi^{\dagger}\psi\,.$$