Aplicación a la Mecánica Cuántica

* Haciendo $\hbar = 1$, el Lagrangiano que da lugar a la ecuación de Schrödinger es:

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*; \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) = -\frac{1}{2m}\psi^* \nabla^2 \psi - \frac{i}{2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right)$$
$$+ \psi^* V \psi$$

$$\therefore \mathcal{L} = +\frac{1}{2m}\partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2}\left(\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi\right) + \psi^* V \psi$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para la función de onda ψ^* obtenemos la ecuación de Schrödinger:

$$0 = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)}\right] + \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} = +\frac{i}{2}\psi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -\frac{i}{2}\partial_0 \psi + V\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} = +\frac{1}{2m}\partial_i \psi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = -\frac{i}{2}\psi^* \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{i}{2}\partial_0 \psi^* + \psi^* V$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} = \frac{1}{2}\partial_i \psi^*$$

$$\therefore \quad 0 = \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0\left(\frac{i}{2}\psi\right) + \partial_i\left(\frac{+1}{2m}\partial_i \psi\right)$$
$$- \left(-\frac{i}{2}\partial_0 \psi + V\psi\right)$$

que puede escribirse como:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\partial_i\partial_i \psi + V\psi$$

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi$$

- Por lo tanto, como sabemos, este Lagrangiano y por consiguiente la acción, es invariante ante una transformación de fase:

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta}\psi$$

Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Noether, debe existir una cantidad conservada.

- Ahora, para los campos ψ y ψ^* tenemos:

$$\delta\psi = \psi' - \psi = \left(e^{i\theta} - 1\right)\psi \simeq i\theta\psi$$
$$y \quad \delta\psi^* = -i\theta\psi$$

Recordemos que $j^{\mu}_{\alpha} = \sum_i B_i^{\mu}$

donde $B_i^{\mu} = \mathcal{L}\,\delta x^{\mu} + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)}\delta\phi_i$

$\therefore$ para el caso de simetría interna, $\delta x^{\mu} = 0$, tenemos:

$$J^0 = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}\right]\delta\psi + \delta\psi^*\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)}\right]$$

$$= \Theta\,\psi^*\psi$$

y $$J^i = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi)}\right]\delta\psi + \delta\psi^*\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi^*)}\right]$$

$$= \frac{i\Theta}{2m}\left(\partial_i\psi^*\psi - \psi^*\partial_i\psi\right)$$

Normalizando apropiadamente la corriente, escogiendo $\Theta = 1$, tenemos:

$$J^0 = \psi^*\psi \quad \text{y} \quad \overline{J} = \frac{i}{2m}\left(\psi\overline{\nabla}\psi^* - \psi^*\overline{\nabla}\psi\right)$$

Veamos que la cantidad conservada corresponde a la probabilidad de la función de onda:

$$Q_e = \int_V \psi^* \psi \, d^3x = 1.$$

Conservación del momentum

- Usando la definición del tensor Energía-momentum, podemos encontrar:

$$T^0_{\ i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}(\partial_i \psi) + (\partial_i \psi^*)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)}$$

$$\therefore \quad \overline{T}^0 = \frac{i}{2}\left(\psi \overline{\nabla} \psi^* - \psi^* \overline{\nabla} \psi\right)$$

Usando $\overline{\nabla}(\psi^* \psi) = \overline{\nabla}\psi^* \psi + \psi^* \overline{\nabla} \psi$

$$\overline{T}^0 = \frac{i}{2}\left(\left[\overline{\nabla}(\psi^* \psi) - \psi^* \overline{\nabla} \psi\right] - \psi^* \overline{\nabla} \psi\right)$$

$$= -i \psi^* \overline{\nabla} \psi + \frac{i}{2} \overline{\nabla}(\psi^* \psi)$$

Integrando en el volumen:

$$\int_V \overline{T}^0 d^3x = -i \int_V \psi^* \overline{\nabla} \psi + \frac{i}{2} \overline{\nabla} \underbrace{\int_V \psi^* \psi \, d^3x}_{1}$$

Entonces $$\int_V T^0\, d^3x = -i\int_V \psi^* \nabla \psi\, d^3x$$
$$= \underbrace{\int_V \psi^* \hat{p}\, \psi\, d^3x}_{\langle \hat{p} \rangle}$$

De modo que $\langle \hat{p} \rangle$ son las cargas conservadas asociadas al valor esperado del operador momentum. De manera análoga, se puede demostrar la conservación de la energía (recomiendo que lo hagan).

Invarianza de fase local del Lagrangiano de Schrödinger.

- Cuando se habla de la función $\psi(x)$, x representa el punto del espacio-tiempo en el cual deseamos conocer el valor de la función de onda.
- Sabemos que las cantidades complejas se representan con un punto en un espacio de dos dimensiones

- Ahora, además de la longitud de la flecha apuntando al número complejo, también necesitamos un ángulo para especificar exactamente como dibujar la flecha apuntando al número complejo.

- El número complejo $\psi(x)$ en la ecuación de Schrödinger es justo el número cuyo cuadrado es la probabilidad relativa de encontrar el objeto en ese punto.

- Ahora, supongamos que usted decide hacer un cambio de fase de la función de onda de forma arbitraria, en cada punto del espacio, osea el ángulo θ que el número ψ hace con respecto al eje real. Si el cambio de fase es global, dicho cambio no destruirá el balance entre la energía cinética y la energía potencial en la ecuación de Schrödinger.

- Sin embargo, desde el punto de vista de la relatividad especial de Einstein, la necesidad de requerir que el sistema sólo quede inalterado ante cambios globales de fase, parece poco natural.

- Ahora, un cambio de fase que dependa del espacio-tiempo, $\theta(x)$, sería similar a lo que pasa en la teoría electromagnética cuando es expresada en términos de potenciales escalares y vectoriales. Ellos se pueden cambiar por derivadas de funciones arbitrarias, de una forma tal que los campos eléctricos y magnéticos medidos permanezcan invariantes.

• Desde un punto de vista más cuantitativo,

$$\psi(x) \propto e^{ipx} = e^{(Et - \bar{p}\cdot\bar{x})}$$

$$\therefore \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi$$

este cambio de fase, como veremos, cambia la energía y cantidad de movimiento de la partícula. ¿Que hacemos?

• Comenzamos con el Lagrangiano de Schrödinger para una partícula libre, es decir el potencial de interacción es cero $\Rightarrow \psi^* V \psi = 0$:

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) = \mathcal{L}_{libre} = \frac{1}{2m}\sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2}\left(\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi\right)$$

Este Lagrangiano, no es invariante bajo transformacias de fase locales!

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \psi' = \partial_\mu\left(e^{i\theta(x)}\psi\right) = e^{i\theta(x)}\left(\left(i\partial_\mu \theta(x)\right)\psi + \partial_\mu \psi\right)$$
$$= e^{i\theta(x)}\left(i\partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu\right)\psi$$

. Para tener un nuevo Lagrangiano invariante bajo transformaciones de fase locales, llamadas simplemente transformaciones gauge, necesitamos introducir un nuevo termino para compensar el termino proveniente de la derivada de $e^{i\theta(x)}$.

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = (\partial_\mu + X'_\mu)(e^{i\theta(x)}\psi)$$
$$= e^{i\theta(x)}\left[i\partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu + X'_\mu\right]\psi$$

donde $X'_\mu = X_\mu - i\partial_\mu \theta(x)$

de manera que: $D'_\mu \psi' = e^{i\theta(x)}(D_\mu \psi)$

Note que $D_\mu \psi$ transforma igual que el campo ψ y debido a esto es llamada derivada covariante de ψ. De forma similar

$$(D_\mu \psi)'^{*} = (D_\mu \psi)^{*} e^{-i\theta(x)}$$

• Es conveniente redefinir $X_\mu = iqA_\mu$, tal que

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$\therefore \; iqA_\mu \longrightarrow iqA'_\mu = iqA_\mu - i\partial_\mu\theta(x)$$

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x)$$

• Para obtener las propiedades de transformación de la derivada covariante, podemos definir de manera general:

$$D_\mu\psi \longrightarrow (D_\mu\psi)' = U(D_\mu\psi)$$

donde $U(x) = e^{i\theta(x)}$

• Es importante enfatizar que el conjunto de transformaciones $U_3(x) = U_1(x)U_2(x)$ también aplica.

Este conjunto de transformaciones se incluyen o conforman un grupo. Dicho grupo contiene la identidad: $U_I = e^0$, el inverso $U_j^{-1}(x) = U_j^*(x)$

y finalmente la propiedad asociativa bajo la operación del grupo: $(U_1(x)U_2(x))U_3(x) = U_1(x)(U_2(x)U_3(x))$. Adicionalmente, como $U_1(x)U_2(x) = U_2(x)U_1(x)$, el grupo se denomina abeliano.

- Este grupo abeliano de números complejos de modulo **1** es llamado $U(1)$.

- Recordemos de la mecánica cuántica: $\hat{A}' = U\hat{A}U^{-1}$

$$\therefore \quad D'_\mu = U D_\mu U^{-1}$$