- Ahora, veamos que otros términos no son cero, y por lo tanto contribuyen al proceso.
- Veamos términos de orden 2. En este caso tendremos dos factores en el Hamiltoniano de interacción. Estos factores, tendrán 6 términos de operadores de campo. De estos operadores, necesitamos 3 para aniquilar la partícula inicial y crear las 2 partículas finales. Eso nos deja 3 operadores adicionales. Debido a que es un número impar, los operadores sobrantes no pueden ser combinados en contracciones.
- En la expansión de Wick, tendremos términos que tienen uno, o los 3 operadores restantes fuera de la contracción. Cuando calculemos los elementos matriciales, estos términos se desvanecerán.

- Extendiendo este argumento, se puede mostrar que los elementos matriciales para este proceso se van a desvanecer para todas las potencias pares del Hamiltoniano de Interacción.

- La primera corrección no trivial a la amplitud obtenida con $S^{(1)}$ aparece para $S^{(3)}$:

$$S^{(3)} = \frac{(-ih)^3}{3!}\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3\, \mathcal{T}\left[:(\overline{\psi}\psi\phi)_{x_1}::(\overline{\psi}\psi\phi)_{x_2}::(\overline{\psi}\psi\phi)_{x_3}:\right]$$

donde se ha indicado la dependencia temporal a través del sub-índice

- Note que tendremos muchos productos. Recuerde que necesitamos el operador ϕ para aniquilar la partícula del estado inicial, y $\overline{\psi}$ y ψ para crear las partículas del estado final. Todos los otros campos deben ser contraídos, de otra manera el elemento matricial se desvanece.

- Así, en la expresión de Wick de $S^{(3)}$, los únicos términos que no se desvanecen para nuestro proceso, son los que tienen 3 pares de campos contraídos.

- La contracción de dos campos de tipos diferentes, e.g ϕ con ψ o $\bar{\psi}$, o ψ con ψ, se anula.

- Entonces:

$$T\left[:(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1}: \; :(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2}: \; :(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}:\right]^{(3)}$$

$$= \; :(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}: \; +$$

$$:(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}: \; +$$

$$:(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}: \; +$$

$$:(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}: \; +$$

$$:(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2} \quad (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}: \; +$$

- Podemos realizar una representación pictórica de todos estos términos a través de diagramas de Feynman.

- Veamos el primer término:

$$:(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1}\ (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2}\ (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}:$$

Ahora, escribimos explícitamente el punto en el espacio-tiempo, correspondiente a cada operador, y también los índices de los espinores:

$$-\underbrace{\phi(x_2)\phi(x_3)}\ \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)}\ \underbrace{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_3)}\ :\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\phi$$

- El signo menos, aparece debido al arreglo de los operadores de campo fermiónicos, dado que tenemos una permutación impar del orden original

- Podemos intercambiar el orden de dos espinores:

$$\underbrace{\phi(x_2)\phi(x_3)}\ \underbrace{\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\alpha(x_1)}\ \underbrace{\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_3)}\ :\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\phi(x_1):$$

- En el termino ordenado normalmente, el único termino que da un elemento matricial no nulo:

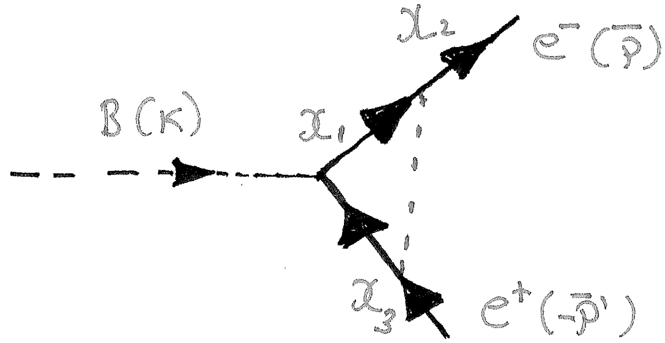
$$\overline{\Psi}_-^{\beta}(x_2)\,\Psi_-^{\gamma}(x_3)\,\phi_+(x_1)$$

- Los indices de los espinores se han puesto arriba por conveniencia y son equivalentes a los indices abajo.

- Entonces, el boson es aniquilado en el punto x_1, el electrón es creado en x_2 y el positrón en x_3.

- Adicionalmente, note que tenemos un propagador escalar entre x_1 y x_2, y dos propagadores fermionicos, uno entre x_1 y x_2 y otro entre x_1 y x_3

- Todas las contracciones van a aparecer como lineas que no representan particulas en el estado inicial o final.

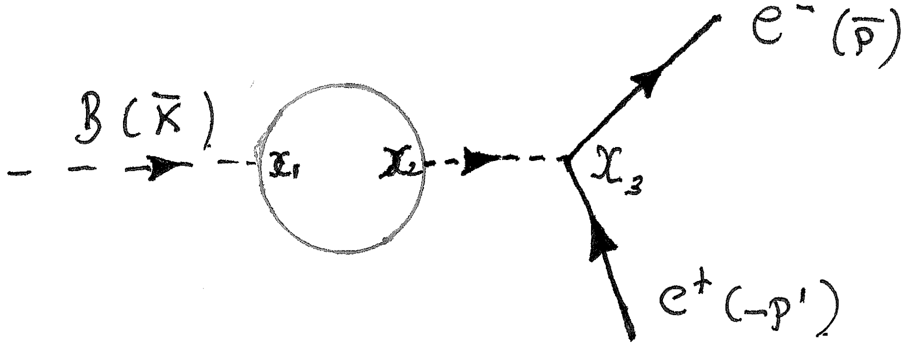


Para el primer caso.

• Ahora: $:(\bar{\psi}\psi\phi)_{x_1}\ (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_2}\ (\bar{\psi}\psi\phi)_{x_3}:$

Note que tenemos lineas de fermiones de x_1 a x_2, pero tambien de x_2 a x_1! En este caso, decimos que tenemos un loop de fermiones. Tambien tenemos el propagador de B entre x_2 y x_3

• Note que la convención de flechas es valida unicamente para particulas iniciales y finales. Particulas internas, puede que no estén ni en el futuro ni en el pasado entre ellas



Estados Normalizados

- Hasta ahora, se ha mostrado que sólo unos pocos términos contribuyen a los elementos de la matriz S, para un estado inicial y final específico. Sin embargo, no hemos calculado aún ningún elemento matricial explícitamente.
- Para realizar tal cálculo, enfrentamos un pequeño problema. Hemos definido los estados en el espacio de Fock, a través de actuar sobre el vacío con el operador de creación. Sin embargo, esta definición no es la mejor para los cálculos por dos razones: La primera, los operadores de creación

tienen una dimensión de masa de $-3/2$. Con esto, ya que $|p\rangle \equiv a^{+}(p)|0\rangle$, el estado de una partícula tiene dimensiones diferentes al estado de vacío. El segundo problema, es que la norma de cualquier estado de una partícula diverge:

$$\langle p|p'\rangle = \delta^{3}(\bar{p}-\bar{p}')$$

Si colocamos $p = p'$.

- Para evitar estos problemas, definimos estos estados en una región de volumen **V**. Podemos calcular las cantidades de interés físico usando estos estados, y luego tomar $V \to \infty$ al final de los cálculos.

- Recuerde que $\langle 0|0\rangle = 1$, lo cual asume es adimensional. Deseamos definir los otros estados adimensionales también. Definimos ahora los estados de una partícula:

$$|B(\bar{p})\rangle = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}}\, a^{\dagger}(p)\,|0\rangle$$

para el campo escalar, cuyo cuanto está dado por B. Note que el ket ahora es adimensional. Similarmente, para electrones y positrones, definimos estados de una partícula con momentum $\bar{p}$ y spin s:

$$|e^{-}(\bar{p},s)\rangle \equiv \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}}\, b_s^{\dagger}(\bar{p})\,|0\rangle$$

$$|e^{+}(\bar{p},s)\rangle \equiv \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}}\, \hat{b}_s^{\dagger}(\bar{p})\,|0\rangle$$

Entonces, usando las relaciones de conmutación:

$$[a(p), a^{\dagger}(p')]_- \equiv [\hat{a}(p), \hat{a}^{\dagger}(p')]_- = \delta^3(p-p')$$

$$\langle B(\bar{p})|B(\bar{p}')\rangle = \frac{2\pi^3}{V}\,\delta^3(p-p')$$

$$\langle e^{-}(p,s)|e^{-}(p',s')\rangle = \frac{(2\pi)^3}{V}\,\delta_{ss'}\,\delta^3(p-p')$$

$$\langle e^{+}(p,s) | e^{+}(p',s') \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta_{ss'} \delta^3(p-p')$$

Recorde que $\delta^3(p-p') = \frac{1}{2\pi^3} \int d^3x \; e^{-i(p-p')x} \delta^3(x-x')$

- Hemos solucionado el problema de la dimensión de los estados. Sin embargo, la expresión:

$$\langle B(p) | B(p) \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta^3(0)_p$$

no tiene sentido. El termino $\delta^3(0)_p$ aparece en todos los problemas relacionados con con ondas planas. La razón es que las ondas planas se dispersan sobre un volumen infinito e intervalo de tiempo. Este no es un problema de la teoria de campos sino de las ondas planas. Debemos eliminar estos infinitos cuidadosamente de la teoria. La manera de solucionar el problema, es restringir las ondas planas a una caja y luego dejar la caja tener un volumen infinito:

$$\delta^3(p) = \lim_{V \to \infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x \, e^{-i p \cdot x} \right)$$

- Antes de obtener el límite de V, obtenemos:

$$\delta^3(0)_p = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

- Con esta definición, vemos que los estados de una partícula están normalizados a la unidad, y por lo tanto, tomamos el límite de $V \to \infty$ al final del cálculo.

- Ahora, podemos escribir la acción de varios operadores de campo, sobre diferentes estados de una partícula.

$$\phi_+(x)\,|B(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\, e^{-ikx}|0\rangle$$

$$\psi_+(x)\,|e^-(p,s)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}}\, U_s(\bar{p})\, e^{-ipx}|0\rangle$$

$$\overline{\psi}_+(x)\,|e^+(p,s)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\, \overline{v_s}(\bar{p}')\, e^{-ip'x}|0\rangle$$

donde ω_k y E_p representan las energías.

- Similarmente, para los operadores adjuntos:

$$\langle B(k)|\,\phi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\, e^{ikx}\langle 0|$$

$$\langle e^-(\bar{p},s)|\,\overline{\psi}_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}}\, \overline{U_s}(\bar{p})\, e^{ipx}\langle 0|$$

$$\langle e^+(\bar{p}',s')|\,\psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\, v_{s'}(\bar{p})\, e^{ip'x}\langle 0|$$

- Ahora, procederemos a evaluar los elementos de la matriz S.

Ejemplo: Cálculo Elemento Matricial

- Entonces, para $B \to e^- + e^+$, tenemos:

$$S_{fi}^{(1)} = -ih \int d^4x \, \langle e^-(p) e^+(p') \,|\, \bar{\psi}_- \psi_- \phi_+ \,|\, B(k) \rangle$$

$$S_{fi}^{(1)} = (-ih) \, \bar{U}_s(\bar{p}) \, v_{s'}(\bar{p}') \times \int d^4x \, e^{i(p+p'-k)x} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}$$

asumiendo que el espín del electrón final es s y el del positrón es s'. Consideremos ahora la integración sobre x. En el límite de volumen infinito:

$$\int d^4x \, e^{i(p+p'-k)\cdot x} = (2\pi)^4 \delta^4(k-p-p')$$

$$S_{fi}^{(1)} = (-ih) \left[\bar{U}_s(\bar{p}) \, v_{s'}(p')\right] \left[(2\pi)^4 \delta^4(k-p-p')\right]$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\right]$$

- Este resultado asume que el espín del electrón final es "s" y el del positrón es "s'", y también que el estado de vacío está normalizado a la unidad.

- Considere ahora la integración sobre x. En el límite de volumen infinito, podemos escribir:

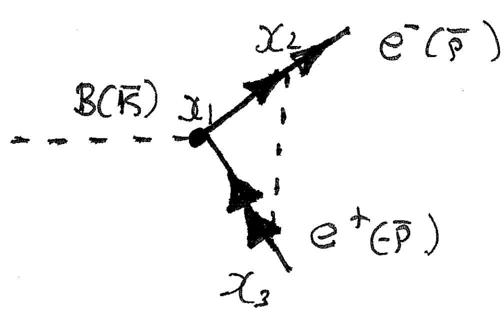
$$\int d^4x \, e^{i(p+p'-k)\cdot x} = (2\pi)^4 \delta^4(k-p-k')$$

- Con esto:

$$S^{(1)}_{fi} = (-ih)\left[\bar{U}_s(\bar{p})\, v_{s'}(p')\right]\left[(2\pi)^4 \delta^4(k-p-p')\right] \times \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\,\frac{1}{\sqrt{2E_p V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2E_{p'}V}}\right]$$

- La función-δ así obtenida, nos da la restricción para la conservación de momentum.

- Ahora, veamos un caso menos trivial



- Las contracciones para este diagrama:

$$\underbrace{\phi(x_2)\,\phi(x_3)}\;\underbrace{\psi_\beta(x_2)\,\bar\psi_\alpha(x_1)}\;\underbrace{\psi_\alpha(x_1)\,\bar\psi_\gamma(x_3)}\;:\bar\psi_\beta(x_2)\,\psi_\gamma(x_3)\,\phi(x_1):$$

- Recuerde que estas contracciones son valores esperados de productos de operadores ordenados temporalmente y se pueden expresar como propagadores:

$$\underbrace{\phi(x_2)\,\phi(x_3)} = i\,\Delta_F(x_2 - x_3)$$
$$\psi(x_1)\,\bar\psi(x_2) = i\,S_F(x_1 - x_2)$$

- Entonces:

$$S_{fi}^{(3)} = (-ih)^3 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \times i\,\Delta_F(x_2 - x_3)\; i\,S_{F\beta\alpha}(x_2 - x_1)$$
$$\times\; i\,S_{F\alpha\gamma}(x_1 - x_3) \cdot \langle e^-(p)\,e^+(p')|\,\bar\psi_-^{\beta}(x_2)\,\psi_-^{\gamma}(x_3)\,\phi_+(x_1)\,|B(\vec{k})\rangle$$

- Ahora, podemos usar la transformada de Fourier de los propagadores, y usar los elementos matriciales derivados anteriormente para escribir:

$$S_{fi}^{(3)} = (-ih)^3 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4} \times i\Delta_F(q_1) e^{-iq_1(x_2-x_3)}$$

$$\times\, iS_{F\beta\alpha}(q_2) e^{-iq_2\cdot(x_2-x_1)} \; iS_{F\alpha\gamma}(q_3) e^{-iq_3\cdot(x_1-x_2)}$$

$$\times \left[\frac{e^{-ik\cdot x_1}}{\sqrt{2\omega_k V}} \times \frac{\overline{v}_s{}^{\beta}(\overline{p}) e^{ip\cdot x_2}}{\sqrt{2E_p V}} \times \frac{v_{s'}^{\gamma}(\overline{p}') e^{ip'\cdot x_3}}{\sqrt{2E_{p'} V}} \right]$$

- Como en el caso anterior:

$$\int d^4x_1\, e^{iq_2 x_1} e^{-iq_3\cdot x_1} e^{-ik\cdot x_1} = (2\pi)^4 \delta^4(k - q_2 + q_3)$$

- de manera similar, la integración sobre x_2 da: $(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2-p)$ y sobre x_3 da $(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_3+p')$

- Si dos de las funciones δ se desvanecen: $k = p + p'$, lo cual es la condición para la conservación de momentum. Entonces:

$$\delta^4(k-q_2+q_3)\delta^4(q_1+q_2-p)\,\delta^4(q_1+q_3+p') =$$

$$\delta^4(k-q_2+q_3)\delta^4(q_1+q_2-p)\,\delta^4(k-p-p')$$

• Entonces:

$$S_{fi}^{(3)} = (-ih)^3 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} * (2\pi)^{12} \delta^4(K - q_2 + q_3)$$

$$\times \delta^4(q_1 + q_2 - p)\, \delta^4(K - p - p') \times i\Delta_F(q_1) \left[\bar{U}_s(\vec{p})\, iS_F(q_2)\, iS_F(q_3)\, U_{s'}(p')\right]$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_K V}} \times \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \times \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\right]$$

• En este punto, podemos realizar las integraciones sobre q_2 y q_3 fácilmente, y escribir q en lugar del momentum desconocido q_1.

$$S_{fi}^{(3)} = (-ih)^3 (2\pi)^4 \delta^4(K - p - p') \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times i\Delta_F(q)$$

$$\times \left[\bar{U}_s(\vec{p})\, iS_F(p - q)\, iS_F(p - q - K)\, U_{s'}(\vec{p}')\right]$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_K V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \times \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\right]$$

Esto es la expresión final. Note que esta expresión involucra la integración sobre un momentum desconocido q. Esto se debe a que el momentum de todas las líneas...