**Universidad de Los Andes - Departamento de Física**

**Mecánica Cuántica 2 - parcial 3 - Mayo 4 2017**

**Resuelva los siguientes problemas justificando cada uno de los pasos que sigue. El tiempo total del examen es de 80 minutos**

**1)(25 pnts)** Considere el siguiente potencial:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{si } 0 < r < a \\ +V_0, & \text{si } a < r < b \\ 0, & \text{si } b < r \end{cases} \tag{1}$$

Se desea determinar el corrimiento de fase para una onda s, efectuando los siguientes pasos:

**a)** Escriba la solución a la parte radial de la función de onda en cada región.

**b)** Escriba las condiciones de frontera que se necesitan para determinar el corrimiento de fase.

**c)** Escriba una ecuación que de manera explicita de el valor del corrimiento de fase. No necesita resolver la ecuación.

**2)(25 pnts)** Considere un átomo de Hidrógeno en su estado base. En el tiempo t=0 un campo eléctrico en la dirección z es prendido, el campo eléctrico depende del tiempo de la siguiente forma:

$$E(x,t) = E_0 exp(-(\frac{t}{\tau})^2) \tag{2}$$

Determine la probabilidad de que ocurra una transición al estado |2P> después de un tiempo $t >> \tau$.

**3)(25 pnts)** Considere un sistema cuántico con dos estados estacionarios |1> y |2>. La diferencia entre sus valores propios está dada por $E_2$-$E_1$=$\hbar w_{21}$. En el tiempo t=0, cuando el sistema está en el estado |1>, una pequeña perturbación H' es aplicada. Los siguientes elementos matriciales son obtenidos:

$$<1|H'|1>=0,\ <2|H'|1>=\hbar w_0,\ <2|H'|2> = -\hbar w_{21}.$$

Usar perturbación dependiente de t a primer orden para calcular la probabilidad de hallar el sistema al tiempo t en el estado |2> .

**4)(25 pnts)** Considere el potencial:

$$V(r) = g exp(-(\frac{r}{a})^2) \tag{3}$$

**a)** Calcule la amplitud de dispersión usando la primera aproximación de Born.

**b)** Halle la sección eficaz total y dibujela como una función de k, siendo k el número de onda de la partíucla incidente.

---

FÓRMULAS ÚTILES:

$c_n^{(1)} = (i\hbar)^{-1} \int_0^t H'_{ni} e^{iw_{ni}t'} dt'$; $w_{ni} = \frac{E_n - E_i}{\hbar}$; $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$; $\int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = n!$; $x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$;

$f(\theta) = \sum_\ell (2\ell+1) exp(i\delta_\ell) sen(2\delta_\ell) P_\ell(cos\theta)$; $f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int sen(qr') V(r') r' dr'$; $|\vec{q}| = |\vec{k}' - \vec{k}| = 2ksen(\theta/2)$

# CUÁNTICA II

## Solución Parcial 3

### Problema 1

La solución general a la ecuación radial está dada por las funciones de Bessel esféricas:

$$R_\ell(r) = A_\ell\, j_\ell(kr) + B_\ell\, \eta_\ell(kr)$$

La solución de Neuman, dado que diverge en el origen, no hace parte de la solución cuando se incluye $r=0$.

Además, sólo nos interesa el caso $\ell=0$ (onda s).

La parte radial de la función de onda sería:

$$R_{01}(r) = A_0\, j_0(k_1 r) \qquad 0 \le r \le a\,; \quad k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

$$R_{02}(r) = B_0\, j_0(k_2 r) + C_0\, \eta_0(k_2 r) \qquad a \le r \le b\,; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

$$R_{03}(r) = D_0\, j_0(k_3 r) + F_0\, \eta_0(k_3 r) \qquad r > b\,; \quad k_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

<u>Condiciones de Frontera</u>: $R(r)$ y $R'(r)$ deben ser continuas en $r=a$ y $r=b$.

① $R_{01}(r=a) = R_{02}(r=a) \Rightarrow A_0\, j_0(k_1 a) = B_0\, j_0(k_2 a) + C_0\, \eta_0(k_2 a)$

② $R_{02}(r=b) = R_{03}(r=b) \Rightarrow B_0\, j_0(k_2 b) + C_0\, \eta_0(k_2 b) = D_0\, j_0(k_3 b) + F_0\, \eta_0(k_3 b)$

③ $R'_{01}(r=a) = R'_{02}(r=a) \Rightarrow A_0 k_1\, j_0'(k_1 a) = B_0 k_2\, j_0'(k_2 a) + C_0 k_2\, \eta_0'(k_2 a)$

④ $R'_{02}(r=b) = R'_{03}(r=b) \Rightarrow B_0 k_2\, j_0'(k_2 b) + C_0 k_2\, \eta_0'(k_2 b) = D_0 k_3\, j_0'(k_3 b) + F_0 k_3\, \eta_0'(k_3 b)$

De $R_{03}(r)$ hallamos el cambio de fase $\delta_0$:

$$R_{03}(r) = \frac{D_0 \operatorname{Sen}(k_3 r)}{k_3 r} - \frac{F_0 \cos(k_3 r)}{k_3 r} = \frac{E_0 \operatorname{Sen}(k_3 r + \delta_0)}{k_3 r}$$

Comparando: $E_0 \cos\delta_0 = D_0$, $E_0 \operatorname{sen}\delta_0 = -F_0$ $\rightarrow \tan\delta_0 = -\dfrac{F_0}{D_0}$

$$\delta_0 = \tan^{-1}\left(-\frac{F_0}{D_0}\right)$$

$\dfrac{F_0}{D_0}$ se encuentra con las ecuaciones ① a ④.

Problema 2

$$C_{2p} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle 2p|H'|1s\rangle e^{i\omega_0 t}dt \quad ; \text{ donde } \omega_0 = \frac{E_{2p}-E_{1s}}{\hbar}$$

$$E(z,t) = E_0 \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right) \Rightarrow \phi(z) = -E_0 z \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right)$$

$$U = -e\Phi = eE_0 z \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right) = H'$$

$$C_{2p} = -\frac{ieE_0}{\hbar}\int_0^t \langle 2p|z|1s\rangle e^{-t^2/\tau^2} e^{i\omega_0 t}dt = -\frac{ieE_0}{\hbar}\langle 2p|z|1s\rangle \int_0^t e^{-\left(\frac{t'}{\tau}\right)^2} e^{i\omega_0 t'}dt'$$

Para resolver la integral completamos cuadrados:

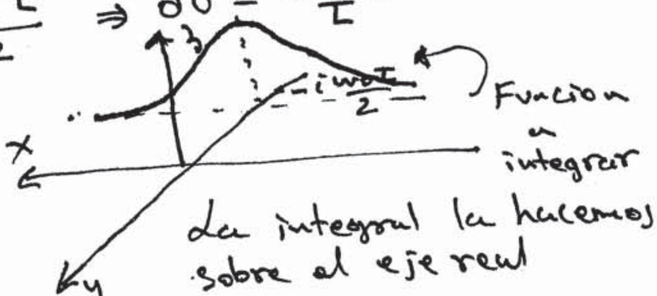
$$\left(\frac{t}{\tau}-a\right)^2 - a^2 = \frac{t^2}{\tau^2} - i\omega_0 t = \frac{t^2}{\tau^2} - \frac{2at}{\tau} \Rightarrow a = \frac{i\omega_0\tau}{2}$$

Para $t \gg \tau$ podemos asumir $t = \infty$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-(t/\tau)^2} e^{i\omega_0 t}dt = \exp\left(-\frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\left[\frac{t}{\tau} - \frac{i\omega_0\tau}{2}\right]^2\right)dt$$

Cambio de variables: $u = \frac{t}{\tau} - \frac{i\omega_0\tau}{2} \Rightarrow du = \frac{dt}{\tau}$

La integral queda: $\frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\int_{-\frac{i\omega_0\tau}{2}}^{\infty} e^{-u^2}du$




$$\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow C_{2p} = -\frac{ieE_0}{\hbar}\langle 2p|z|1s\rangle \exp\left(-\frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{para } t \gg \tau$$

Probabilidad de transición a estado 2P:

$$|C_{2p}|^2 = \frac{\pi e^2 E_0^2}{4\hbar^2}|\langle 2p|z|1s\rangle|^2 \exp\left(-\frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\right)$$

Sólo falta calcular el elemento matricial $\langle 2p|z|1s\rangle$

Por reglas de selección $\Delta m = 0$, $\Delta l = 1$ para este caso

$\Rightarrow$ solo debe haber transición $|100\rangle \longrightarrow |210\rangle$

$$\langle 210|z|100\rangle = \langle 210|r\cos\theta|100\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}}\int r^2 dr\,\text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\,(r\cos\theta)\,e^{-r/a}\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}\pi a^3} * \underbrace{2\pi}_{\text{Integral sobre }\phi} * a^4\left(\frac{2}{3}\right)^5 \int_0^\infty \left(\frac{3r}{2a}\right)^4 d\left(\frac{3r}{2a}\right) e^{-3r/2a} \underbrace{\int_0^\pi \text{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta}_{-\cos^3\theta/3\big|_0^\pi = \frac{2}{3}}$$

$$\langle 210|r\cos\theta|100\rangle = \frac{a}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^6 \underbrace{\int_0^\infty u^4 e^{-u}\,du}_{\Gamma(5)=4!}$$

$$\langle 210|r\cos\theta|100\rangle = \frac{a}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^6 \Gamma(5) = \frac{6a}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$P_{100\to 210} = \frac{\pi e^2 E_0^2}{4\hbar^2}\ \frac{2^{14}a^2}{2 * 3^{10}}\ \exp\left(-\frac{\omega_0^2\tau^2}{2}\right)$$

$$\boxed{P_{100\to 210} = \frac{\pi e^2 E_0^2 a^2}{\hbar^2}\ \frac{2^{11}}{3^{10}}\ \exp\left(-\frac{\omega_0^2\tau^2}{2}\right)}$$

Donde $\omega_0 = \dfrac{13.6\,eV\,(1-1/4)}{\hbar} = \dfrac{3 * 13.6\,eV}{4\hbar}$

---

Problema 3

$$C_2 = (i\hbar)^{-1}\int_0^t \langle 2|H'|1\rangle e^{i\omega_{21}t'}\,dt'$$

$$= (i\hbar)^{-1}\hbar\omega_0 \left.\frac{e^{i\omega_{21}t'}}{i\omega_{21}}\right|_0^t$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\hbar\omega_0 \frac{1}{i\omega_{21}}\left(e^{i\omega_{21}t} - 1\right)$$

$$= -\frac{2i\omega_0}{\omega_{21}} e^{i\omega_{21}t/2}\left(\frac{e^{i\omega_{21}t/2} - e^{-i\omega_{21}t/2}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{2i\omega_0}{\omega_{21}} e^{i\omega_{21}t/2}\,\mathrm{Sen}\left(\frac{\omega_{21}t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Probabilidad} = |C_2|^2 = \frac{4\omega_0^2}{\omega_{21}^2}\,\mathrm{Sen}^2\left(\frac{\omega_{21}t}{2}\right)}$$

Problema 4



(a) Primera aproximación de Born para potenciales radiales

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int \mathrm{sen}(qr')\,V(r')\,r'\,dr'$$

$$= -\frac{2mg}{\hbar^2 q}\,\frac{1}{2i}\left\{\int_0^\infty e^{-(r/a)^2} e^{iqr'} r'\,dr' - \int_0^\infty e^{-(r/a)^2} e^{-iqr'} r'\,dr'\right\}$$

Completamos cuadrados:

$$\frac{r^2}{a^2} - iqr = \left(\frac{r}{a} - b\right)^2 - b^2 = \frac{r^2}{a^2} - \frac{2br}{a} \Rightarrow b = \frac{iqa}{2}$$

$$f(\theta) = \frac{img}{\hbar^2 q}\left\{\int_0^\infty dr' r' \exp\left[-\left(\frac{r}{a} - \frac{iqa}{2}\right)^2\right] - \int_0^\infty r'dr' \exp\left[-\left(\frac{r}{a}+\frac{iqa}{2}\right)^2\right]\right\}\exp\left(-\frac{q^2a^2}{4}\right)$$

Necesitamos hallar la integral de la forma:

$$\int r'dr'\,e^{-u^2} \quad \text{con } u = \frac{r}{a} \pm \frac{iqa}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{a}dr$$

$$\hookrightarrow = a^2\int_{0+\frac{iqa}{2}}^{\infty+iqa/2}\left(u \pm \frac{iqa}{2}\right)du\,e^{-u^2} \Rightarrow \int_0^\infty u e^{-u^2}du = -\left.\frac{e^{-u^2}}{2}\right|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

$$= a^2\left[\frac{1}{2} \pm \frac{iqa}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]$$

$$f(\theta) = \frac{img}{\hbar^2 q}\exp\left(-\frac{q^2a^2}{4}\right)\left\{a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{iqa}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) - a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{iqa}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)\right\}$$

$$\boxed{f(\theta) = -\frac{mga^3\sqrt{\pi}}{2\hbar^2}\exp\left(-\frac{q^2a^2}{4}\right)}$$

(b) $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\pi m^2 g^2 a^6}{4\hbar^4}\exp\left(-\frac{q^2a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{\pi m^2 g^2 a^6}{4\hbar^4}\int e^{-q^2a^2/2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$q^2 = 4k^2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2) \rightarrow \sigma_T = \frac{\pi m^2 g^2 a^6}{4\hbar^2}\int \exp\left(-2k^2a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)\right)\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi$$

La integral sobre $\phi$ es $2\pi$

$$\sigma_T = \frac{\pi^2 m^2 g^2 a^6}{2\hbar^4} \int_0^{\pi} \exp\left(-2k^2a^2 \,\mathrm{sen}^2(\theta/2)\right) \mathrm{sen}\,\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi^2 m^2 g^2 a^6}{2\hbar^4} \int_0^{\pi} 2\exp\left(-2k^2a^2 \,\mathrm{sen}^2(\theta/2)\right) \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta/2)\, d\theta$$

$$= \frac{\pi^2 m^2 g^2 a^6}{2\hbar^4} \left. \frac{\exp\left(-2k^2a^2 \,\mathrm{sen}^2(\theta/2)\right)}{(-2k^2a^2)} \right|_0^{\pi}$$

$$\boxed{\sigma_T = \frac{\pi^2 m^2 g^2 a^4}{4\hbar^4 k^2}\left(1 - e^{-2k^2a^2}\right)}$$