Ecuaciones de Maxwell en Notación Covariante

- Ecuaciones homogéneas: $\overline{\nabla}\cdot\overline{B}=0$, $\overline{\nabla}\times\overline{E}+\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}=0$

  Ecuaciones inhomogéneas: $\overline{\nabla}\cdot\overline{E}=\rho$, $\overline{\nabla}\times\overline{B}-\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}=\overline{J}$

- Si quitamos el término de desplazamiento eléctrico de la cuarta ecuación, tenemos

$$\overline{\nabla}\times\overline{B}=\overline{J}$$

- Tomando la divergencia en esta expresión:

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{J}=0,$$

lo cual corresponde a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\overline{\nabla}\cdot\overline{J}=0, \quad \text{para } \rho = \text{cte}.$$

también se puede obtener:

$$\overline{\nabla}\cdot(\overline{\nabla}\times\overline{B})=\overline{\nabla}\cdot\overline{J}+\overline{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\right)$$

- Las ecuaciones de Maxwell deben ser invariantes ante transformaciones gauge. Para mostrar dicha invariancia, es conveniente escribir las ecuaciones de Maxwell de forma covariante: para ello, es conveniente usar el potencial escalar eléctrico ϕ y el potencial vectorial magnético $\overline{A}$.

$$\overline{E} = -\overline{\nabla}\phi - \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}, \qquad \overline{B} = \overline{\nabla} \times \overline{A}$$

$$\therefore \quad \overline{\nabla}\times\overline{E} = -\overline{\nabla}\times\overline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}\times\overline{A}$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \quad y \quad \overline{\nabla}\cdot\overline{B} = (\overline{\nabla}\cdot)(\overline{\nabla}\times\overline{A})$$

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0$$

Ahora $$\overline{E} = -\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^0} + \frac{\partial A^0}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0}$$

$$= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

para $\mu = i, \ \nu = 0$

- Definimos $E^i = F^{i0}$

- De manera similar:

$$B^K = \epsilon_{ijK} \frac{\partial A^j}{\partial x^i}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{lmK} B^K &= \epsilon_{lmK} \epsilon_{ijK} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
&= (\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi}) \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial A^m}{\partial x^l} - \frac{\partial A^l}{\partial x^m} \\
&= -\frac{\partial A^m}{\partial x_l} + \frac{\partial A^l}{\partial x_m} = \partial^m A^l - \partial^l A^m \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \mu = m, \nu = l
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \epsilon_{lmK} B^K = F^{\mu\nu}$$

Com esto, podemos mostrar:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$