MECANICA CUANTICA 2

LECTURA #19

SISTEMAS FERMIONICOS Y BOSONICOS A BAJAS TEMPERATURAS

Exploremos el estado base para sistemas bosonicos y fermionicos

$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hat{h}^{(i)} \longrightarrow$ $\hat{h}$: hamiltoniano generico para una particula

$\hat{h}|n_l\rangle = \varepsilon_l |n_l\rangle \longrightarrow \{\varepsilon_l\} \quad l = 1, 2, 3, \ldots$

$\hookrightarrow$ Conjunto de posibles energias para cada particula.

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \cdots$

Para un sistema bosonico la energía del estado base es $E_0 = N\varepsilon_1$

Para un sistema fermionico con spin $S = 1/2$ $\quad E_0 = \sum_{i=1}^{N/2S+1} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{N/2} \varepsilon_i = E_F \leftarrow$ Energia de Fermi.

Evaluemos la energia de Fermi.

Consideremos N fermiones de spin S confinados en un volumen cubico de lado L. $\rightarrow V = L^3$

$\phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \qquad \vec{K} = \frac{2\pi}{L}\vec{n} \qquad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \qquad \begin{matrix} n_x = 0, 1, 2, \ldots \\ n_y = 0, 1, 2, \ldots \\ n_z = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix}$

$\vec{p}_n = \vec{K}_n \hbar \implies \vec{p}_n = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n}$

$\phi_{\vec{n}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{p}_n\cdot\vec{r}/\hbar} \leftarrow$ Para cada una de estas funciones tenemos $2S+1$ estados de spin diferentes.
$g = 2S+1$

p_F : Momentum de Fermi. Valor maximo de momentum para el estado base de un sistema de N fermiones.

$$N = \sum_{\substack{n_x, n_y, n_z \\ (p < p_F)}} (2S+1) \longleftarrow \text{Esta expresión define el momentum de Fermi}$$

Dado que $\vec{p}_n = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n} \implies \vec{n} = \frac{L}{2\pi\hbar}\vec{p}_n$

En un cubo de lado n hay n^3 puntos. $\implies n^3 = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 p^3 \longrightarrow d^3N = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d^3p$

$$N = (2S+1)\int d^3N = (2S+1)\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}\int_{p<p_F} d^3p = \frac{(2S+1)L^3}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{(2S+1)L^3}{(2\pi\hbar)^3}\frac{4}{3}\pi p_F^3$$

$$\implies N = \frac{(2S+1)L^3}{6\pi^2\hbar^3} p_F^3 \longrightarrow p_F^3 = \frac{6\pi^2\hbar^3 N}{(2S+1)\,L^3} \qquad \frac{N}{L^3} = \rho \leftarrow \text{Densidad de particulos}$$

$$p_F^3 = \frac{6\pi^2\hbar^3}{(2S+1)}\rho$$

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad E_F = \left(\frac{6\pi^2\hbar^3}{2S+1}\,\rho\right)^{2/3} \frac{1}{2m}$$

$$\boxed{E_F = \left(\frac{6\pi^2 \rho}{2S+1}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}}$$

La diferencia entre el estado base para un sistema fermionico y un sistema bosonico induce comportamientos radicalmente diferentes para estos tipos de sistemas a bajas temperatura.

Por ejemplo:

El gas de electrones cuasi-libres en un metal posee una energia de Fermi $E_F \sim 3\,eV$. A temperatura ambiente la energia cinetica promedio de estos electrones es $\sim kT \sim 0{,}025\,eV$. Por tanto las energias de estos electrones estan bastante por debajo de E_F y el sistema se encuentra muy cerca de su estado base. El comportamiento de este gas de electrones esta gobernado por la estadistica de Fermi-Dirac.

En consecuencia, dado que todos los niveles de energia estan llenos hasta $\sim E_F$, las interacciones termicas entre electrones estan suprimidas debido al principio de exclusión de Pauli. Esto explica la alta conductividad electrica y termica de los metales.

Condensacion de Bose-Einstein

En el caso de sistemas bosonicos a bajas temperaturas, si la densidad de particulas se hace menor que cierto valor critico, al igual que la temperatura, que tambien llege debajo de un valor critico $\Rightarrow$ cantidades macroscopicas de bosones se acumulan en el estado base del sistema, produciendo un "condensado de Bose". Estos sistemas poseen cualidades muy especiales como superfluidez, superconductividad, etc.

Emision Estimulada y el Efecto Laser

Supongamos un sistema de bosones a los cuales sometemos a un potencial $\hat{V}$. Este potencial va ha inducir transiciones entre los diferentes estados propios de energia del sistema.

Tomemos una de las particulas en el estado $|\phi_k\rangle$ y una posible transición al estado $|\phi_1\rangle$ mediada por $\hat{V}$.
La probabilidad de la transición es:

$$|\langle\phi_k|\hat{V}|\phi_1\rangle|^2 = V_{k1}$$

Supongamos que el estado $|\phi_1\rangle$ es ocupado inicialmente por N particulas mientras que el estado $|\phi_k\rangle$ esta ocupado unicamente por nuestra particula.

El estado inicial del sistema de N+1 particulas es:

$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\left\{(|\phi_k\rangle|\phi_1\rangle\cdots|\phi_1\rangle) + (|\phi_1\rangle|\phi_k\rangle\cdots|\phi_1\rangle) + \cdots + (|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle\cdots|\phi_k\rangle\cdots|\phi_1\rangle) + \cdots + (|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle\cdots|\phi_k\rangle)\right\}$$

El estado final es:

$$|\Psi_f\rangle = |\phi_1\rangle|\phi_1\rangle\cdots|\phi_1\rangle$$

La probabilidad de transición es: $|\langle\Psi_i|\hat{V}|\Psi_f\rangle|^2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{N+1}}(N+1)\,V_{k1}\right\}^2 = (N+1)\,|V_{k1}|^2$

$\Rightarrow$ Los bosones tienden a agruparse con mayor numero de particulas.

Este fenomeno sucede con fotones, que son bosones. Un atomo excitado va ha preferir hacer transicion a un estado tal que el foton emitido tenga numeros cuanticos iguales a los de los fotones que ya ocupan la cavidad.