

El tiempo para el examen es de 120 minutos. Explique claramente sus respuestas.

1) Una partícula de masa m en un potencial $V(x)$ está en un estado de energía definida:

$$E = -\frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

Con una función de onda:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a^3}} x e^{-x/2a} \quad \text{para } x \geq 0 \quad ; \psi(x) = 0 \quad \text{para } x < 0$$

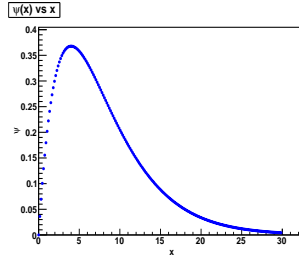
Donde a es una constante real positiva.

a) Dibuje la función de onda y explique si esta función de onda corresponde al estado base o al primer estado excitado de la partícula.

b) Halle y dibuje el potencial $V(x)$ al que corresponde esta función de onda.

SOLUCIÓN

a) Evaluamos los límites de la función en $x = 0$ y en $x = \infty$, en ambos límites la función tiende a cero. Dado esto evaluamos si la función tiene máximos o mínimos $d\psi/dx = 0$, encontramos que la función tiene un máximo en $x = 2a$. Como la función sólo tiene un máximo necesariamente debe corresponder al estado base, las funciones de onda de los estados excitados presentan más oscilaciones. La forma general de la función de onda es mostrada en la siguiente figura:



b) Para hallar el potencial que corresponde a la energía y función de onda dadas, usamos la ecuación de Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{2a^3}} x e^{-x/2a} = \frac{1}{a} \frac{e^{-x/2a}}{\sqrt{2a^3}} \left[\frac{x}{4a} - 1 \right]$$

reemplazando ψ , $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ y el valor de E en la ecuación de Schrodinger se obtiene para $V(x)$:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2ma} \frac{1}{x}$$

Note que esta forma del potencial solo es válida para $x > 0$. Dado que la función de onda es cero para $x \leq 0$ entonces el potencial tiene el valor de $V(x) = \infty$ para $x \leq 0$. La gráfica correspondiente es de una función con amplitud negativa que diverge en $x = 0$ y tiende a cero a medida que x incrementa.

2) Un átomo de Hidrógeno es sometido a un campo magnético externo $\vec{B} = B_0 \hat{k}$.

a) Escriba los niveles de energía para los estados $n=1$ y $n=2$ del átomo de Hidrogeno en presencia del campo magnético (ignorando el spin del protón) y determine el degeneramiento de los niveles.

b) Dar argumentos de porque podemos despreciar el spin del protón para analizar los niveles de energía de manera aproximada.

SOLUCIÓN

a) El hamiltoniano para el átomo de hidrógeno en presencia de un campo magnético es:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \vec{\mu}_\ell \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}$$

Tomamos la dirección del campo \vec{B} como el eje z: $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. Adicionalmente tenemos:

$$\vec{\mu}_\ell = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad ; \quad \vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

La ecuación de valores propios y vectores propios de \hat{H} es:

$$\hat{H}|n, l, m_\ell, s, m_s\rangle = \left(\frac{E_0}{n^2} - \frac{eB_0}{2m} m_\ell \hbar - \frac{eB_0}{m} m_s \hbar\right) |n, l, m_\ell, s, m_s\rangle$$

Donde $E_0 = -13.6$ eV. En presencia del campo magnético algunos de los niveles de energía del átomo de hidrógeno se desdoblan, rompiendo parte del degeneramiento que se tenía cuando no había campo. Se necesitan cuatro indices para denotar los niveles de energía: E_{n, ℓ, m_ℓ, m_s} .

Para el estado base, $n=1$ $\ell = 0$, entonces $m_\ell = 0$, por lo que tenemos:

$$E_{n=1, \ell=0, m_\ell=0, m_s=\pm 1/2} = E_0 - \frac{eB_0 \hbar}{m} m_s \quad ; \quad E_{n=1, \ell=0, m_\ell=0, m_s=1/2} = E_0 - \frac{eB_0 \hbar}{2m} \quad ; \quad E_{n=1, \ell=0, m_\ell=0, m_s=-1/2} = E_0 + \frac{eB_0 \hbar}{2m}$$

Cada uno de los niveles del estado base tienen un degeneramiento de 1.

Para el primer estado excitado, $n=2$ $\ell = 0, 1$, entonces $m_\ell = 0, 1, -1$, por lo que tenemos las siguientes posibles energías:

$$E_{n=2, \ell=0, m_\ell=0, m_s=1/2} = E_{n=2, \ell=1, m_\ell=0, m_s=1/2} = E_0/4 - \frac{eB_0 \hbar}{2m} \quad \text{degeneram.} = 2$$

$$E_{n=2, \ell=0, m_\ell=0, m_s=-1/2} = E_{n=2, \ell=1, m_\ell=0, m_s=-1/2} = E_0/4 + \frac{eB_0 \hbar}{2m} \quad \text{degeneram.} = 2$$

$$E_{n=2, \ell=1, m_\ell=1, m_s=-1/2} = E_{n=2, \ell=1, m_\ell=-1, m_s=1/2} = E_0/4 \quad \text{degeneram.} = 2$$

$$E_{n=2, \ell=1, m_\ell=1, m_s=1/2} = E_0/4 - \frac{eB_0 \hbar}{m} \quad ; \quad E_{n=2, \ell=1, m_\ell=-1, m_s=-1/2} = E_0/4 + \frac{eB_0 \hbar}{m}, \text{ degeneram.} = 1$$

b) Dado que $\mu_{\text{proton}} = -\frac{e}{m_{\text{proton}}} \vec{S}$, su contribución es mucho más pequeña que el caso del electrón dado que la masa del protón va en el denominador y es mucho mayor que la del electrón.

3) Considere un sistema cuántico de dos estados. Sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ los vectores propios del hamiltoniano del sistema con valores propios $E_\alpha = \hbar\omega$ y $E_\beta = -\hbar\omega$, respectivamente. La acción de un operador \hat{A} en esta base está dada por:

$$\hat{A}|\alpha\rangle = 2ia_0|\beta\rangle \quad \text{y} \quad \hat{A}|\beta\rangle = -2ia_0|\alpha\rangle - 3a_0|\beta\rangle$$

Donde a_0 es una constante real positiva. Suponga que se efectúa una medición de A en el tiempo $t=0$ sobre un estado arbitrario y el valor más alto de A es obtenido. Determine la probabilidad que una segunda medición de A, hecha en un tiempo $t>0$, arroje el mismo valor que se midió en $t=0$ (Notar que esta probabilidad no necesariamente es uno, porque el estado evoluciona en el tiempo sobre una base que no es la base propia del operador A, entonces la probabilidad puede depender del tiempo. Su respuesta la puede dejar indicada como el módulo de un número complejo).

SOLUCIÓN

Cuando se hace la medición de A, la función de onda queda colapsada a la función propia asociada al valor propio de A que se obtiene, debemos hallar esa función propia y luego mirar como evoluciona en el tiempo. Para la evolución en el tiempo debemos expandir esa función en funciones propias del hamiltoniano. Empezamos por encontrar las funciones propias y valores propios del operador A, para esto miramos su representación matricial en la base de estados propios del hamiltoniano:

$$\begin{bmatrix} \langle \alpha | A | \alpha \rangle & \langle \alpha | A | \beta \rangle \\ \langle \beta | A | \alpha \rangle & \langle \beta | A | \beta \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2ia_0 \\ 2ia_0 & -3a_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -2ia_0 \\ 2ia_0 & -3a_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3a_0\lambda - 4a_0^2 = 0$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = a_0$; $\lambda_2 = -4a_0$. Hallamos ahora la función propia asociada con el valor propio más alto:

$$\begin{bmatrix} -a_0 & -2ia_0 \\ 2ia_0 & -4a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Expandiendo en vectores propios del hamiltoniano:

$$|\phi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|\alpha\rangle - \frac{2i}{\sqrt{5}}|\beta\rangle$$

La evolución en el tiempo de $|\phi_1\rangle$ es:

$$|\phi_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|\alpha\rangle e^{-i\omega t} - \frac{2i}{\sqrt{5}}|\beta\rangle e^{i\omega t}$$

Como se va a hacer una nueva medición de A, a $|\phi_1(t)\rangle$ toca expandirla en estados propios de A:

$$|\phi_1(t)\rangle = C_1|\phi_1(0)\rangle + C_2|\phi_2(0)\rangle$$

La probabilidad de que con la segunda medición de A se vuelva a obtener su valor propio más alto es:

$$|C_1|^2 = |\langle \phi_1(0) | \phi_1(t) \rangle|^2 = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \langle \alpha | + \frac{2i}{\sqrt{5}} \langle \beta | \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} |\alpha\rangle e^{-i\omega t} - \frac{2i}{\sqrt{5}} |\beta\rangle e^{i\omega t} \right) \right|^2$$

Como $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son estados ortonormales:

$$|C_1|^2 = \left| \frac{1}{5} e^{-i\omega t} - \frac{4}{5} e^{i\omega t} \right|^2 = \frac{1}{25} |1 + 4e^{2i\omega t}|^2 = \frac{1}{25} [(1 + 4\cos(2\omega t))^2 + 16\sin^2(\omega t)]$$

$$|C_1|^2 = \frac{1}{25} (17 + 8\cos(\omega t))$$

4) Un electrón en un potencial V(r) (esféricamente simétrico) está descrito por la función de onda normalizada:

$$\psi(\vec{r}) = C \left(1 + \frac{x}{r} \right) f(r)$$

Donde f(r) cumple con: $\int_0^\infty r^2 |f(r)|^2 dr = 1$.

a) Calcule el valor esperado del cuadrado del momento angular del electrón $\langle L^2 \rangle$.

b) Mediciones simultáneas de las componentes z del momento angular orbital y de spin del electrón dan como resultados: $+\hbar$ y $-\hbar/2$, respectivamente. Si una medición del momento angular total del electrón es efectuada, Cuál es la probabilidad de obtener un valor de $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$?

SOLUCIÓN

a) Note que el potencial se puede escribir como:

$$\psi(\vec{r}) = C(1 + \sin\theta\cos\phi)f(r)$$

La parte angular se puede expresar en términos de armónicos esféricos, que son las funciones propias para la parte angular:

$$\sin\theta\cos\phi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^{-1} - Y_1^1) \quad ; \quad 1 = \sqrt{4\pi}Y_0^0$$

Entonces:

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{4\pi}C(Y_0^0 - \frac{1}{\sqrt{6}}Y_1^1 + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_1^{-1})f(r) = g(\theta, \phi)f(r)$$

Como la parte radial ya está normalizada, solo nos queda normalizar la parte angular:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi g^*(\theta, \phi)g(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi = 1 = 16\pi C^2/3 \quad \Rightarrow C = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}$$

Entonces:

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{3}{4}}(Y_0^0 - \frac{1}{\sqrt{6}}Y_1^1 + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_1^{-1})f(r) = g(\theta, \phi)f(r)$$

Con esta expansión queda más fácil calcular el valor esperado de \widehat{L}^2 :

$$\langle \psi | \widehat{L}^2 | \psi \rangle = \frac{3}{4} \langle \ell = 0, m_\ell = 0 | \widehat{L}^2 | \ell = 0, m_\ell = 0 \rangle + \frac{3}{24} \langle 1, 1 | L^2 | 1, 1 \rangle + \frac{3}{24} \langle 1, -1 | L^2 | 1, -1 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}$$

b) Como el electrón tiene componente z de momento angular orbital igual a \hbar , y dada la función de onda anterior, entonces $\ell = 1$. Como conocemos el estado del electron en la base de componentes individuales de momento angular: $|\ell = 1, m_\ell = 1, s = 1/2, m_s = -1/2 \rangle$, usamos la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan para el caso $1 \times 1/2$ y obtenemos:

$$|\ell = 1, m_\ell = 1, s = 1/2, m_s = -1/2 \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|j = 3/2, m_j = 1/2 \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|j = 1/2, m_j = 1/2 \rangle$$

Dado que

$$\widehat{J}|j, m_j \rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)}|j, m_j \rangle \quad \Rightarrow \widehat{J}|3/2, 1/2 \rangle = \hbar\frac{\sqrt{15}}{2}|3/2, 1/2 \rangle \quad y \quad \widehat{J}|1/2, 1/2 \rangle = \hbar\frac{\sqrt{3}}{2}|1/2, 1/2 \rangle$$

Entonces la probabilidad de medir L^2 y obtener $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ es $2/3$.

FÓRMULAS ÚTILES

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \quad \vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m} \vec{L}; \quad \vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}; \quad U = \vec{\mu} \cdot \vec{B}; \quad \psi_n(x) = \left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

$$\xi = \left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{1/2} x; |n\rangle = \Psi(x, t) = \sum c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar);$$

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_1^0(\theta, \phi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta,$$

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta \exp(\pm i\phi);$$

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S|s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)}|s, m\rangle; \quad S_z|sm\rangle = m\hbar|s, m\rangle;$$

$$S_{\pm}|s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle; \quad [S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k;$$

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y; \quad |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle; \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle); \quad |1, 0\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle; \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$