MECANICA CUANTICA 2

LECTURA #10

SPIN, ISOSPIN Y EL DEUTERON

La Fuerza Nuclear.

En 1932 Chadwick descubrio el neutron. A partir de ese momento se obtuvo una visión más realista sobre el nucleo atomico: un paquete muy compacto de protones y neutrones. Una fuerza de un caracter nuevo, nuclear, mantenia al nucleo junto, superando la repulsión electromagnetica de los protones. Esta fuerza no era de naturaleza electromagnetica y mucho menos gravitacional; deberia ser una interacción fundamental.

Max Plank fue la primera persona en notar que un nucleo con A nucleones (protones y neutrones) y Z protones deberia poseer una masa $m(A,Z)$ tal que:

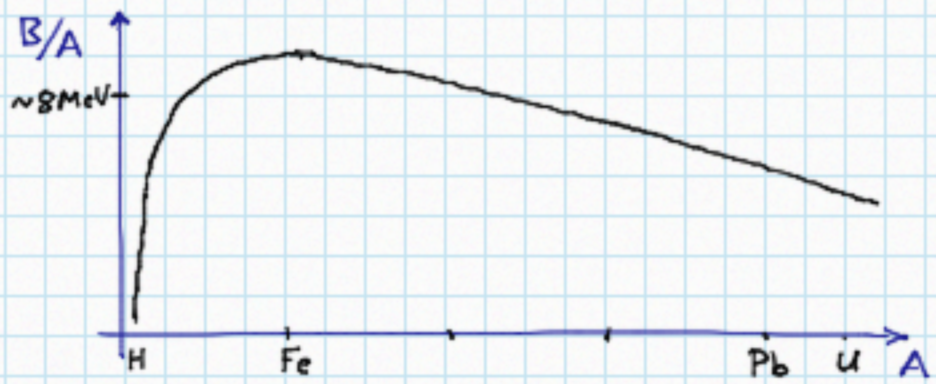
$$m(A,Z) < Z m_p + (A-Z) m_n$$

El deficit de masa se debia a la energía de ligadura nuclear $B(A,Z)$ ("Binding Energy") Dado que esta energía de ligadura es grande, debido a la intensidad de la interacción nuclear, deberia ser notoria.

$$B(A,Z) = Z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2 - m(A,Z) c^2$$

Los datos recolectados para las masas de multiples nucleos permitio una descripción empirica de la energía de ligadura $B(A,Z)$.

Si graficamos esta energía de ligadura por nucleon, es decir, $B(A,Z)/A$, obtenemos:



Weizsäcker obtuvo la primera versión de una formula empirica para reproducir la función $B(A,Z)$.

Resultados de experimentos de scattering nuclear mostraban que el volumen del nucleo era proporcional al numero de nucleones A.

$$V \sim A$$

Esto queria decir que los nucleones se comportaban como esferas duras. La fuerza nuclear era atractiva con un rango $\sim 10^{-15}$ m, pero cuando los nucleones se acercaban mucho se volvia altamente repulsiva.

Si tomamos el nucleo como una esfera con volumen $V \sim A \Rightarrow$ el radio nuclear $R \sim A^{1/3}$ y la superficie $S \sim A^{2/3}$

La energia de ligadura deberia ser proporcional al volumen nuclear, pero los nucleos en la superficie deberían estar menos ligados, reduciendo la energia de ligadura neta. De la misma forma la repulsión de Coulomb de los protones ($\sim Z^2$) debería reducir esta energía de ligadura, etc.

La formula a la que arribó Weizsäcker usando este tipo de argumentos fue algo como:

$$B(A,Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_c Z(Z-1) A^{-1/3} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

$$\delta = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & Z, N \text{ par} \\ 0 & A \text{ impar} \\ -a_p A^{-3/4} & Z, N \text{ impar} \end{cases}$$

- El primer termino es un termino de Volumen ($\sim A$)
- El segundo termino es un termino de superficie ($\sim A^{2/3} \sim R^2$)
- El tercer termino es un termino de repulsión de Coulomb ($\sim Z^2/R$)
- El cuarto termino nos indica que los nucleos tienden a tener igual numero de protones que de neutrones ($A=2Z$)
- El ultimo termino, δ, nos indica que protones tienden a aparearse, al igual que los neutrones (tipo principio de exclusión de Pauli)

$a_V = 15.8$ MeV ; $a_S = 17.8$ MeV ; $a_c = 0.714$ MeV ; $a_{sym} = 23.2$ MeV ; $a_p = 12$ MeV

Estas constantes son determinados haciendo un ajuste a los datos experimentales.

De la dependencia de los terminos y de los valores numericos de las constantes queda claro que $B(A,Z)$ es dominado por el primer termino, el termino de volumen. La corrección de superficie. En un distante tercer lugar esta el termino de Coulomb, que solo se hace comparable para nucleos muy masivos $Z \gtrsim 90$.

El Modelo de Isospin de Heisemberg.

Estos resultados fueron el punto de partida para el modelo de isospin nuclear de Heisemberg. Si la fuerza de ligadura nuclear es dominada por los dos primeros terminos, esto quiere decir que:

$B(A,Z) \simeq B(A)$ ⟵ No depende de Z !

el termino de Coulomb es un termino electromagnetico y los demas terminos estan relacionados con la estadistica de Fermi-Dirac ya que protones y neutrones son particulas de spin $1/2$ (fermiones).

A los ojos de Heisemberg, la formula de Weizsäcker indicaba que la interacción nuclear no distinge entre neutron y proton (en realidad si lo hace, pero muy poco).

Heisemberg identifico en este hecho una simetria de la interacción nuclear. Veamos:

Tenemos dos nucleones: proton y neutron $\longrightarrow \{|p\rangle, |n\rangle\}$. Esto nos define un espacio de Hilbert 2D.

Los transformaciones unitarias en este espacio son de la forma $U(\vec{\delta}) = e^{-i\vec{\delta}\cdot\vec{\sigma}}$ donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli, y $\vec{\delta} = (\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ son parametros (numeros reales).

El conjunto de todas las transformaciones unitarias $U(\vec{\delta})$ conforma un grupo, $SU(2)$. La hipotesis de Heisemberg decia que la fuerza nuclear deberia ser invariante ante transformaciones de $SU(2)_I$, donde el I quiere decir "Isospin", un nombre acuñado especialmente para describir este espacio, en analogia al "spin $1/2$".

$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⟵ "isospin up"

$|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⟵ "isospin down"

Estableciendo una analogia con spin 1/2 podemos definir $\hat{T}_i = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i$ (pero en el espacio de isospin)

Las transformaciones unitarias son de la forma $U(\vec{\varepsilon}) = e^{-i\vec{\varepsilon}\cdot\vec{T}}$, y los operadores $\hat{T}_i$ cumplen con el algebra:

$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\hat{T}_k$ ⟵ Hablamos de isospin 1/2

Podemos entonces definir $\hat{T}^2 = T^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$

$\hat{T}^2|T, T_3\rangle = T(T+1)|T, T_3\rangle$ $\quad$ $T = 1/2$ en el caso de $|p\rangle$ y $|n\rangle$

$\hat{T}_3|T, T_3\rangle = T_3|T, T_3\rangle$ $\quad$ $T_3 = -1/2, +1/2 \longrightarrow -1/2$ corresponde a $|n\rangle$ y $+1/2$ corresponde a $|p\rangle$

Los nucleones $|p\rangle$ y $|n\rangle$ conforman un doblete de isospin 1/2.

$|p\rangle = |T = 1/2, T_3 = +1/2\rangle$

$|n\rangle = |T = 1/2, T_3 = -1/2\rangle$

Mas adelante veremos un ejemplo de que quiere decir que la interacción nuclear sea invariante ante transformaciones de isospin.

El Deuteron

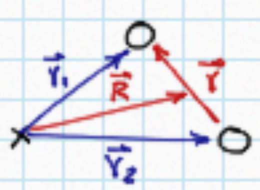
El deuteron es un estado ligado proton-neutron $\Rightarrow$ recurriendo a nuestro modelo de isospin tenemos las funciones de onda de isospin presentadas anteriormente.

p y n son particulas de spin 1/2 $\Rightarrow$ tanto para proton como neutron la parte de la función de onda correspondiente a spin es de la forma:

$|s = 1/2, m_s = +1/2\rangle = |\uparrow\rangle$

$|s = 1/2, m_s = -1/2\rangle = |\downarrow\rangle$

El sistema ligado proton-neutron se puede describir como:



Recurriendo a una coordenada de centro de masa $\vec{R}$ y una coordenada relativa $\vec{r}$, ademas de una masa reducida $\mu \simeq \frac{m_p}{2}$ podemos pasar de un Hamiltoniano

$\hat{H} = \frac{1}{2m_p}\vec{p}_p^{\,2} + \frac{1}{2m_n}\vec{p}_n + V(\vec{r})$ a un Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^{\,2} + V(\vec{r})$

en forma identica a como procedimos en el caso del atomo de Hidrogeno

$\hat{H}_{cm} = \frac{1}{2M}\vec{P}^2$ $\qquad$ $M = m_p + m_n$; $\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{p}_p + \vec{p}_n)$; $\vec{p} = \vec{p}_p - \vec{p}_n$

$\hat{H}_{rel} = \frac{1}{2\mu}\vec{p}^{\,2} + V(\vec{r})$ $\qquad$ $\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \simeq \frac{1}{2}m_p$

Si ignoramos el movimiento del centro de masa del sistema, tenemos para los grados de libertad externos la siguiente ecuación de Schrödinger:

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\right)\Psi = E\Psi \longrightarrow \Psi(\vec{r}) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Radial — Orbital

La función de onda del sistema la podemos escribir como:

$$|\Psi\rangle = |R\rangle\,|\phi\rangle\,|\chi\rangle\,|\xi\rangle$$

Radial, Orbital, Spin, isospin

$|R\rangle \rightarrow |n,l\rangle$
$|\phi\rangle \rightarrow |l,m_l\rangle$
$|\chi\rangle \rightarrow |s,m_s\rangle$
$|\xi\rangle \rightarrow |T,T_3\rangle$

$|\chi\rangle = |s,m_s\rangle$ es el resultado de la composición de dos spines $1/2 \rightarrow 1/2 \otimes 1/2$

Base desacoplada $|m_s^{(1)}; m_s^{(2)}\rangle$; Base acoplada $|s,m_s\rangle \longleftarrow$ $S=0,\ m_s=0$
$S=1,\ m_s=-1,0,1$

$S=0 \rightarrow |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\}$ $\leftarrow$ Singlete de spin 0 (antisimetrico)

$$S=1 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} |1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\} \\ |1,+1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \end{array}\right\} \longleftarrow \text{Triplete de spin 1 (simetrico)}$$

El caso de la función de onda de Isospin, la situación es completamente analoga a la de spin

$T=0,\ T_3=0 \rightarrow |T=0,T_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|pn\rangle - |np\rangle\}$ $\longleftarrow$ Singlete de Isospin (antisimetrico)

$T=1,\ T_3=-1,0,1$

$$\left.\begin{array}{l} |T=1,T_3=-1\rangle = |nn\rangle \\ |T=1,T_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|pn\rangle + |np\rangle\} \\ |T=1,T_3=+1\rangle = |pp\rangle \end{array}\right\} \longleftarrow \text{Triplete de isospin (simetrico)}$$

El Deuteron es un estado pn, por tanto la función de onda de isospin solo puede ser:

$|T=0,T_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|pn\rangle - |np\rangle\}$ $\longleftarrow$ Antisimetrica.

$|T=1,T_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|pn\rangle + |np\rangle\}$ $\longleftarrow$ Simetrica

El momentum angular total del sistema es resultado de la composición de momentum angular orbital y spin

$|l,m_l\rangle \otimes |s,m_s\rangle \longrightarrow |J,M\rangle$

$\Rightarrow |\Psi\rangle = |n,l\rangle\,|J,M\rangle\,|T,T_3\rangle$

Si ignoramos la carga electrica, como es el caso en el modelo de isospin, entonces p y n son particulas identicas de spin $1/2$, por tanto deben obedecer la estadistica de Fermi-Dirac, es decir, que la función de onda total debe ser antisimetrica ante intercambio de particulas

La parte radial dela función de onda es simetrica $\Rightarrow$ $|J,M\rangle$ y $|T,T_3\rangle$ deben tener paridades opuestas.

De acuerdo con los reglas de adisión de momentum angular $\Rightarrow$

$J: |l-s|, \ldots, (l+s)$ $\qquad$ $l=0,1,2,\ldots$; $s=0,1$

$S=0 \rightarrow J=l$

$S=1 \rightarrow J: |l-1|, \ldots, (l+1)$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow l=0 &\rightarrow J=1 \\ l=1 &\rightarrow J=0,1,2 \\ l=2 &\rightarrow J=1,2,3 \\ l=3 &\rightarrow J=2,3,4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La paridad correspondiente a momentum angular orbital es $(-1)^l$

La invarianza ante transformaciones de isospin de la interacción nuclear nos dice que entre los estados $|T=1,T_3=-1\rangle$, $|T=1,T_3=0\rangle$, $|T=1,T_3=+1\rangle$ solo hay una transformación unitaria.

$$\left.\begin{aligned} |T=1,T_3=-1\rangle &= |nn\rangle \\ |T=1,T_3=+1\rangle &= |pp\rangle \end{aligned}\right\} \text{ no suceden en la naturaleza } \Rightarrow |T=1,T_3=0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{|pn\rangle + |np\rangle\right\}$$ tampoco deberia suceder.

La invarianza de isospin de la fuerza nuclear sugiere que la función de onda de isospin del deuteron es:

$|T=0,T_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|pn\rangle - |np\rangle\right\} \leftarrow$ antisimetrica.

$\Rightarrow$ la función de onda de momentum angular total debe ser simetrica.

Si $S=0$ (antisimetrica) $\Rightarrow$ l debe ser impar $\rightarrow$ en este caso $J=l$ $\Rightarrow$ $l=1,3,5,\ldots$

El spin del deuteron es $J=1$ $\Rightarrow$ $S=0,\ l=1$ es una posibilidad.

Si $S=1$ (simetrica) $\Rightarrow$ l debe ser par $l=0,2,4,\ldots$; pero dado que $J=1$, $l=0,1,2$ $\Rightarrow$ $S=1$; $l=0,2$

$\Rightarrow$ Las posibilidades para el deuteron son $(S=0; l=1)$ y $(S=1; l=0,2)$.

La naturaleza dela fuerza nuclear es tal que el potencial $V(\vec{r})$ es repulsivo para $S=0$ y atractivo para $S=1$ $\Rightarrow$ Juntando todos estos hechos, los numeros cuanticos del deuteron son:

$l=0,2$
$S=1$; $m_s=-1,0,1$
$J=1$
$T=0$
$T_3=0$

Estos resultados estan de acuerdo con los datos experimentales.