Cuantización de Campos escalares.

* Ecuación de Movimiento.

Para partículas libres de masa m:

$$p^\mu p_\mu - m^2 = 0$$

Recordemos que $p_\mu = i\partial_\mu$, es un operador que actúa sobre funciones de onda. De esta manera, si representamos las partículas por una función de onda $\phi(x)$:

$$(\Box + m^2)\,\phi(x) = 0$$

- Esta es conocida como la ecuación de Klein-Gordon. Esta ecuación es simple, pero tiene un problema. Los valores propios de energía satisfacen:

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Notese que la energía puede ser negativa, y su magnitud puede ser arbitrariamente grande, debido a que la magnitud de p no está acotada. De esta manera, el sistema no tiene estado base. Por lo tanto, una interpretación de la ecuación de Klein-Gordon con una función de onda no es posible. Este problema se puede evitar si interpretamos $\phi(x)$ como un campo cuántico.

El Campo y su Cuantización Canonica

- Si interpretamos $\phi(x)$, la ecuación de movimiento de este campo:

$$(\Box + m^2)\,\phi(x) = 0$$

puede ser derivada del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\therefore \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(g_{\mu\nu}\,\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\,\partial^\nu \phi\right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\,\delta_{\mu\nu}\,\partial^\mu \phi \; - \cancelto{0}{\tfrac{1}{2} m^2 \phi^2}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - m^2 \phi \quad \Rightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\,\phi(x) = 0$$

- Ahora, recordemos que en mecánica cuántica:

$$[x, p]_- \equiv xp - px = i\hbar$$

$\hookrightarrow$ Conmutador

- Por otro lado, el Corchete de Poisson:

$$[\Phi^A(t,x), \Pi_B(t,y)]_P = \delta_B^A \delta^3(x-y)$$

- Entonces, podemos demostrar:

$$[\phi(t,x), \pi(t,y)]_- = i\delta^3(x-y)$$

- $$[f_1, f_2]_P \longrightarrow -i[f_1, f_2]_-$$

- La relación $[\phi(t,x), \pi(t,y)]_-$ es llamada la relación canónica de conmutación. Esto implica que $\phi(t,x)$ y $\pi(t,y)$ no pueden ser considerados más como campos clásicos

- Ahora, Π y ϕ deben ser tratados cómo operadores

Descomposición del Campo en Fourier

- Un Campo clásico, siendo una función de las coordenadas espacio-tiempo, puede ser descompuesto a través de una transformada de Fourier:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 p\, \delta(p^2 - m^2) A(p)\, e^{-ip\cdot x}$$

El factor $\delta(p^2 - m^2)$ aparece para asegurarnos que ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

$$\therefore \; (\Box + m^2)\,\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4p\,(-p^2 + m^2)\,\delta(p^2 - m^2)\, A(p)\, e^{-ip\cdot x}$$

$$= 0$$

- Asumimos que $\phi(x)$ es un operador hermítico: Clasicamente, el valor del campo en cualquier punto es un número real:

$$\phi(x) = \phi^{+}(x)$$

Esto implica:

$$A(-p) = A^{+}(p)$$

- Introducimos ahora la función escalón Θ:

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

- Entonces: $\Theta(p^0) + \Theta(-p^0) = 1$.

$\therefore$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0) \left(A(p) e^{-ip\cdot x} + A^\dagger(p) e^{ip\cdot x} \right)$$

- Esta forma de la ecuación incluye sólo los estados con energía positiva.

- Podemos simplificar la ecuación si eliminamos p^0:

$$\delta(f(z)) = \sum_n \frac{\delta(z - z_n)}{|df/dz|_{z=z_n}|}$$

asumiendo que las derivadas no se desvanecen en los puntos z_n:

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta((p^0)^2 - E_p^2)$$
$$= \frac{1}{2|p^0|} \left[\delta(p^0 - E_p) + \delta(p^0 + E_p) \right]$$

Donde reservamos desde ahora. E_p para energía positiva:

$$E_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$$

La segunda función δ no contribuye a la integral debido a que es cero para todo $\Theta(p^0) \neq 0$.

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \left(a(p) e^{-ip\cdot x} + a^{\dagger}(p) e^{ip\cdot x} \right)$$

donde $p^{\mu} = (E_p, \bar{p})$ y $a(p) = \frac{A(p)}{\sqrt{2E_p}}$

$$\Pi(x) = \dot{\phi}(x) = \int d^3 p\, i \sqrt{\frac{E_p}{2(2\pi)^3}} \left(a(p) e^{-ip\cdot x} + a^{\dagger}(p) e^{ip\cdot x} \right)$$

- Usando las transformadas de Fourier para expresar $a(p)$ y $a^{\dagger}(p)$ en términos de $\phi(x)$ y $\pi(x)$, y el hecho que

$$[\phi(t,x), \pi(t,y)]_{-} = i\delta^3(x-y):$$

$$[a(p), a^{\dagger}(p')]_{-} = \delta^3(p-p')$$

$$[a(p), a(p')]_{-} = 0,$$

$$[a^{\dagger}(p), a^{\dagger}(p')]_{-} = 0$$

Tarea: 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

Podemos derivar el Hamiltoniano total del sistema:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right)$$

$$\int d^3x\, \Pi^2(x) = \int d^3p\, \frac{E_p}{2}\Big[-a(p)a(-p)\,e^{-2iE_pt} + a(p)a^\dagger(p) + a^\dagger(p)a(p) - a^\dagger(p)a^\dagger(-p)\,e^{2iE_pt}\Big]$$

$$\int d^3x\, (\nabla\phi(x)) = \int d^3p\, \frac{p^2}{2E_p}\Big[a(p)a(-p)\,e^{-2iE_pt} + a(p)a^\dagger(p) + a^\dagger(p)a(p) + a^\dagger(p)a^\dagger(-p)\,e^{2iE_pt}\Big]$$

$$m^2\int d^3x\, \phi^2(x) = \int d^3p\, \frac{m^2}{2E_p}\Big[a(p)a(-p)\,e^{-2iE_pt} + a(p)a^\dagger(p) + a^\dagger(p)a(p) + a^\dagger a^\dagger(-p)\,e^{2iE_pt}\Big]$$

lo cual nos da:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3p\, E_p\left[a^\dagger(p)a(p) + a(p)a^\dagger(p)\right]$$

$$[H, a(p')]_- = -E_{p'}\,a(p')$$

$$[H, a^\dagger(p')]_- = E_{p'}\,a^\dagger(p)$$