Para el campo fermionico:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(f_s(p)\, U_s(p) e^{-ipx} + \hat{f}_s^{\dagger}(p)\, U_s^{v}(p)\, e^{ip\cdot x} \right)$$

∴ El Hamiltoniano total:

$$H = \int d^3x \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_\alpha(x)} \dot{\psi}_\alpha(x) - L$$

$$= \int d^3x\, \overline{\psi} \left(-i\gamma \cdot \overline{\nabla} + m \right) \psi$$

Con esto llegamos a:

$$H = \int d^3p\, E_p \sum_{s=1,2} \left[f_s^{\dagger}(p) f_s(p) - \hat{f}_s(p) \hat{f}_s^{\dagger}(p) \right]$$

- Este Hamiltoniano puede dar valores de energía negativos, lo cual es un problema serio. Esto no desaparece con ordenamiento normal. La forma de solucionar esto es considerar que los operadores de aniquilación y creación obedecen leyes de anti-conmutación:

$$[f_s(\overline{p}), f_{s'}^{\dagger}(\overline{p}')]_+ = [\hat{f}_s(\overline{p}), \hat{f}_{s'}^{\dagger}(\overline{p}')]_+ = \delta_{ss'} \delta^3(\overline{p} - \overline{p}')$$

mientras que todas las otras anti-conmutadores son cero.

- Definimos el orden normal como:

$$:H: = \int d^3p\, E_p \sum_{s=1,2} \left[f_s^\dagger(\bar{p}) f_s(\bar{p}) + \hat{f}_s^\dagger(\bar{p}) \hat{f}_s(\bar{p}) \right]$$

donde se hace el cambio de los operadores como si los anti-conmutadores fueran cero.

- Podemos definir el espacio de Fock para fermiones, comenzando con la definición de vacío:

$$f_s(\bar{p})\,|0\rangle = 0, \quad \hat{f}_s(\bar{p})\,|0\rangle = 0$$

- Los estados que contienen partículas y anti-partículas, pueden ser construidos usando $f^\dagger$ y $\hat{f}^\dagger$ sobre el vacío.

- Ahora, encontramos las siguientes relaciones

$$[H, f_r^\dagger(K)]_- = E_K f^\dagger(K) \; ; \; [H, \hat{f}^\dagger(K)]_- = E_K \hat{f}^\dagger(K)$$

- Esto implica que $f_r^\dagger(K)$ y $\hat{f}_r^\dagger(K)$ crean estados de energía positiva, para una partícula en el primer caso y una anti-partícula en el segundo.

Propagador para Fermiones

- Estámos interesados en entender como estados fermionicos se mueven en el espacio-tiempo.

Procedemos como se hizo para el campo escalar y escribimos la ecuación de Dirac a coplada a un fuente:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = J(x),$$

e introducimos el propagador de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)\, S(x-x') = \delta^4(x-x')$$

- Entonces la solución de la ecuación de Dirac está dada por:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^4x'\, S(x-x')\, J(x')$$

donde $\psi_0(x)$ es la solución a la ecuación homogenea

- La tecnica para solucionar esto, es la misma que usamos para los campos escalares:

$$S(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} S(p)$$

Entonces, la transformada de Fourier, $S(p)$, satisface la ecuación:

$$(\not{p} - m) S(p) = 1 \,, \quad \text{Recuerde:}$$

$$\delta(x-\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(x-\alpha)} dp$$

Multiplicando ambos lados por $\not{p} + m$:

$(p^2 - m^2) S(p) = \not{p} + m$: esta es una ecuación matricial, $S(p)$ es una matriz. Sin embargo, $p^2 - m^2$ es un número, por lo cual podemos usarlo en el denominador.

- Note que tenemos polos en $p^0 = \pm E_p$.

Entonces usamos el propagador de Feynman:

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

frecuentemente escrito como:

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}$$

De manera similar al caso del campo escalar, encontramos:

$$i\, S_{F_{\alpha\beta}}(x - x') = \langle 0 | \mathcal{T}[\psi_\alpha(x)\, \overline{\psi}_\beta(x')] | 0 \rangle$$

donde el producto temporal-ordenado para fermiones es:

$$\mathcal{T}[\psi_\alpha(x)\, \overline{\psi}_\beta(x')] \equiv \begin{cases} \psi_\alpha(x)\, \overline{\psi}_\beta(x') & \text{si } t > t' \\ -\overline{\psi}_\beta(x')\, \psi_\alpha(x) & \text{si } t' > t \end{cases}$$

Como en el caso del campo escalar complejo, el propagador describe una partícula iendo de $(t', \overline{x}')$ a $(t, \overline{x})$ o una anti-partícula iendo de $(t, \overline{x})$ a $(t', \overline{x}')$

Matriz S

Hasta ahora hemos trabajado con campos libres unicamente. Aunque hermos considerado un termino fuente para la derivación del propagador, la fuente fue considerada no-dinámica para este proposito: la fuente como tal no tiene un propagador.

- Un verdadero campo libre no tiene consecuencias experimentales, debido este no interactuará con los equipos de detección.
- Por supuesto, los campos en el mundo real no son libres. Los campos interactuan entre ellos, lo cual da como resultado los fenomenos que podemos observar. Para describir tal fenomena debemos crear una estructura para describir dichas interacciones.

- En terminos de los operadores de creación y aniquilación, los cuales usamos para describir los campos libres, en cualquier punto del espacio tiempo el Hamiltoniano libre puede aniquilar una partícula y crear la misma. Así, en efecto, la misma partícula es la que continua viajando.
- Ahora, es posible tener terminos bi-lineales en dos campos los cuales van a aniquilar una partícula de un tipo y crear una partícula de otro tipo.
- Entonces, para describir cualquier otro tipo de interacción, necesitamos algun termino en el Lagrangiano que tenga tres o más operadores de campo.
- Sin embargo, el termino tiene que ser un invariante de Poicaré dado que la densidad

Lagrangiano lo es: Simetría ante traslaciones y rotaciones.

Ejemplos de Interacciones.

- Las posibilidades de interacción dependen del tipo de campos en una teoría. Por ejemplo, suponga que sólo tenemos un campo escalar real ϕ en nuestra teoría. Entonces, en adición al Lagrangiano libre, podemos tener los siguientes términos de interacción:

$$\mathcal{L}_{int} = -\mu\phi^3 - \lambda\phi^4 - \sum_{n\geq 5}\lambda(n)\phi^n$$

donde μ, λ etc, son constantes las cuales se llaman constantes de acoplamiento; sus valores determinan cuan fuertes las interacciones relevantes son.

- Si tenemos un campo escalar complejo, los términos de interacción en $\mathcal{L}_{int}$ pueden estar presentes. Adicionalmente, podemos tener términos donde ϕ puede ser reemplazado por $\phi^\dagger$.

- El Lagrangiano debe ser hermítico ante los terminos de interacción.

- Ahora el Lagrangiano libre de un campo escalar complejo es invariante ante cambios de fase del campo. Si por alguna razón deseamos tener esta simetría para los terminos de interacción, entonces la forma más general de las interacciones será:

$$\mathcal{L}int = -\sum_{n\geq 2} \lambda_{(2n)} (\phi^{+}\phi)^{n}$$

- Si tenemos solo campos espinoriales en una teoria, nuestras elecciones son mucho más restringidas. Esto se debe a que los espinores transforman no-trivialmente bajo transformaciones de Lorentz.
- Un producto de espinores impar, no es un invariante de Lorentz. Así, la primera combinación no-trivial tendra cuatro campos fermionicos. Podemos tener mas de 4 si lo deseamos.

. Pueden existir muchos tipos de interacciones de 4 fermiones. Por ejemplo:

$$\mathcal{L}_{int} = G \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi$$

o

$$\mathcal{L}_{int} = G \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$$

o

$$\mathcal{L}_{int} = G \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi$$

y así sucesivamente. Una combinación que jugó un rol importante en el desarrollo de la interacción débil es:

$$\mathcal{L}_{int} = G \bar{\psi} \gamma^{\mu} (1-\gamma^5) \psi \bar{\psi} \gamma_{\mu} (1-\gamma_5) \psi$$

los campos ψ en esta ecuación no se refieren necesariamente al mismo campo fermiónico: Suponga que por ejemplo queremos describir el proceso de desintegración beta en el cual un neutrón se desintegra a un protón, un electrón y un electrón antineutrino.

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{(e)} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_{(\nu_e)} \bar{\psi}_{(p)} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi_{(n)} + h.c$$

El factor de $\sqrt{2}$ en la constante de acoplamiento es puramente por convención. G_β es llamada la constante de decaimiento β.

- Note que se ha añadido el término "h.c". Esto se debe a que $\mathcal{L}_{int}$ no es hermítico. Entonces como $\mathcal{L}_{int}$ debe ser hermítico, esto implica que el conjugado hermítico debe ser incluido.

- Consideremos ahora un caso en el cual existe un campo escalar real ϕ y un campo espinorial ψ. En este caso, podemos tener términos de interacción de la forma:

$$\mathcal{L}_{int} = -h \bar{\psi} \psi \phi$$

- En el modelo estandar, esta clase de interacciones se presentan en el mecanismos de Higgs.

- Similarmente, podemos tener:

$$\mathcal{L}int = -h' \overline{\psi} \gamma_5 \psi \phi$$

- Al escribir todas estas interacciones, hemos ignorado los terminos libres en el Lagrangiano, debido a que ya los conocemos.

- Es la naturaleza de la interacción la que define una teoria en especifico, y las teorias son llamadas acorde con sus terminos de Interacción.

- Para la interación $\mathcal{L}int = -h' \overline{\psi} \gamma_5 \psi \phi$, los terminos fueron propuestos por el fisico Yukawa. Por lo tanto, cualquier teoria con un escalar y un fermion con este tipo de interación es llamada una interacción de Yukawa.

$p(uud)$
$n(udd)$