Principio de Mínima Acción

- El principio de mínima acción establece, una vez fijado el espacio de coordenadas generalizadas sobre el espacio de configuración, que de todas las trayectorias posibles que transcurren entre t_1 y t_2, el sistema escogerá aquella que minimice la acción S:

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\, dt$$

donde $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es la función Lagrangiana del sistema.

- Puede probarse mediante principios variacionales, que de todas las trayectorias posibles, que la trayectoria que hace estacionaria la anterior expresión, es la que satisface la siguiente condición:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Esto es conocido como la ecuación de Euler-Lagrange. Veamos como ejemplo la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a$$

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\therefore \quad -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = m \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right)\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)\right)\right]$$

donde $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(V(x)\right) = 0$

Definimos $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$, entonces

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

- El Hamiltoniano del sistema se obtiene definiendo la variable canónica conjugada de x:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Recordemos que H se obtiene a través de la transformada de Legendre:

$$H = p\dot{x} - L = T + V$$

Teoría Cuántica de Campos.

- Los principios de la teoría cuántica de Campos, QFT, son debidos a un problema filosófico.
- La mecánica cuántica comenzó con una descripción de la luz en terminos de fotones, pero la descripción clásica de la luz era en terminos de campos electromagnéticos que se propagaban en el espacio

- Por lo tanto, la teoría de fotones requería una prescripción sobre cómo cuantizar campos, lo cual era un enlace que faltaba en las dos descripciones.

- Otro problema de la mecánica cuántica (MC) de partículas, es que es válida en el régimen no relativista por definición.

- La MC no sólo usa Hamiltonianos no-relativistas, involucra el concepto de potenciales y por ende de transmisión instantánea de información.
- El espacio y el tiempo son tratados de manera diferente en mecánica cuántica no relativista.
- Las coordenadas espaciales son operadores, mientras que el tiempo es un parámetro. Generalmente,

Se estudia la evolución de operadores en el tiempo.

- En una teoría relativista, el espacio y el tiempo deben mezclarse cómo espacio-tiempo.
- Existe un problema adicional. En la naturaleza existen procesos en los cuales nuevas partículas son creadas y/o otras partículas se aniquilan:

$$n \longrightarrow p + e^- + \hat{\nu}_e$$

- La MCNR trabaja sólo con partículas estables y su dinámica en diversos potenciales.
- En la teoría cuántica de campos la creación y aniquilación de partículas es una característica escencial. Adicionalmente, cuando vamos al regimen relativista, encontramos que se

Poder crear nuevas partículas a partir de energía!.

Ecuaciones de Euler-Lagrange en Teoría de Campos.

- Consideremos nuestro sistema como un campo o un conjunto de campos.
- Un campo es escencialmente un conjunto de números en cada punto del espacio tiempo.
- Deseamos encontrar la acción "S" de este sistema. Deseamos incorporar la información de cada punto en el espacio.
- Podemos hacer esto, escribiendo el Lagrangiano como una integral espacial; de alguna función de los campos.
- Esto tiene la ventaja de poder colocar el tiempo

y el espacio al mismo nivel en la integral.

- Con esto, el integrando tiene entonces dimensiones de densidad Lagrangiana.
- Denotamos $\mathcal{L}$ como la densidad lagrangiana.
- El Lagrangiano debe depender de los campos, los cuales denotamos como

Φ^A o Φ^B o Φ_B o ϕ_A o ϕ_B

dependiendo del texto.

- Diferentes valores de "A" o "B" pueden denotar campos completamente diferentes, o miembros diferentes de un conjunto de campos, relacionados por alguna simetría.
- Los campos ahora toman el papel de coordenadas q_r. Las velocidades $\dot{q}_r$ son

reemplazadas ahora por las derivadas de los campos: $\partial_\mu \Phi^A$, $\partial_\mu \Phi^A$

- Debido a que tenemos diferentes tipos de campos, nos concentraremos en este curso en campos fundamentales. Por lo tanto, no debemos esperar ninguna fuente o sumidero de energía o momentum del sistema.
- Entonces, el Lagrangiano no debe depender explícitamente de las coordenadas de espacio-tiempo.
- Con esto, definimos la acción:

$$S = \int_\Omega d^4x \, \mathcal{L}\left(\Phi^A(x), \partial \Phi^A(x)\right)$$

donde Ω representa la región del espacio que nos interesa. Usualmente, Ω se toma como todo el espacio-tiempo por conveniencia.

Debemos mencionar algunas cosas importantes:

- La acción debe ser un invariante de Poincaré, en una teoría covariante, lo cual significa que debe ser invariante ante transformaciones de Lorentz, igual que ante traslaciones espacio-tiempo.
- Debido que el elemento de volumen d^4x es un invariante de Poincaré, el Lagrangiano de la acción debe ser también invariante.
- El Lagrangiano $\mathcal{L}$ es una función de x a través de su dependencia de los campos Φ^A y sus derivadas.

Ecuaciones de Euler Lagrange

- Dado el Lagrangiano, las ecuaciones clásicas de movimiento pueden ser derivadas del principio de mínima acción.

- Asumimos que S es estacionaria para pequeñas variaciones de los campos Φ^A, los cuales se desvanecen en la frontera de Ω

- Consideremos las variaciones:

$$\Phi^A(x) \longrightarrow \Phi^A(x) + \delta\Phi^A(x)$$

$$\partial_\mu \Phi^A(x) \longrightarrow \partial_\mu \Phi^A(x) + \partial_\mu \delta\Phi^A(x)$$

tal que $\delta\Phi^A$ se desvanece en la frontera, lo cual denotamos como $\partial\Omega$

$$\therefore \quad \delta S = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} \delta \Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^A)} \partial_\mu \delta \Phi^A \right]$$

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} \delta \Phi^A - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^A)} \right) \right] \delta \Phi^A + \int_\Omega d^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^A)} \delta \Phi^A \right]$$

- Ahora, usemos el Teorema de Gauss:

$$\int_\Omega d^4x \, \partial_\mu F^\mu = \int_{\partial\Omega} dS_\mu F^\mu \quad , \text{ donde } F^\mu$$

es cualquier campo vectorial bien definido.

- Como $\delta \Phi^A$ se desvanece en la frontera:

$$\int_\Omega d^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^A)} \delta \Phi^A \right] = 0$$

$$\therefore \quad \delta S = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^A)} \right) \right] \delta \Phi^A$$

- Note que podemos minimizar la acción si:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^A)} \right)$$

$\hookrightarrow$ Ecuaciones de Euler Lagrange!

Formalismo Hamiltoniano

- El momento canonico de los campos Φ^A es definido en analogia con los sistemas con número finito de grados de libertad:

$$\Pi_A \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}_A}$$

donde $\dot{\Phi}^A$ es la derivada temporal de Φ^A.

- L es un funcional. Por esta razón usamos "δ" en lugar de "∂" para recordar este hecho.

- Recordemos de la mecánica: $\partial \dot{q}_i / \partial \dot{q}_j = \delta_{ij}$, mientras que $\partial q_i / \partial \dot{q}_j = 0$.

$$\therefore \quad \frac{\delta}{\delta \dot{\Phi}^A(t,x)} \dot{\Phi}^B(t,y) = \delta_A^B \delta^3(x-y)$$

- Las derivadas funcionales de los campos y sus derivadas espaciales con respecto a $\dot{\Phi}^A$ se desvanecen.

• Ahora, introducimos el Hamiltoniano del sistema, el cual debe ser entendido como densidad Hamiltoniana: $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}\left(\Phi^A, \nabla\Phi^A, \Pi_A\right) = \Pi_A \dot{\Phi}^A - \mathcal{L}\left(\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A\right)$$

$\left(\text{Recuerde de mecánica: } H = \sum_j p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t)\right)$

• El corchete de Poisson de cualesquiera dos funcionales, F_1 y F_2, puede ser definido como:

$$[F_1, F_2]_P = \int d^3x \left(\frac{\delta F_1}{\delta \Phi^A(t,x)} \frac{\delta F_2}{\delta \Pi_A(x,t)} - \frac{\delta F_1}{\delta \Pi_A(t,x)} \frac{\delta F_2}{\delta \Phi^A(x,t)} \right)$$

Recordando que: $\dfrac{\delta}{\delta \Phi^A(t,x)} \Phi^B(t,y) = \delta_A^B \delta^3(x-y)$ y

$$\frac{\delta}{\delta \Pi_A(t,x)} \Pi_B(t,y) = \delta_A^B \delta^3(x-y),$$

mientras que las derivadas funcionales de los campos con respecto al momento, y viceversa, se desvanecen:

$$[\Phi^A(t,x), \Pi_B(t,y)]_P = \delta_B^A \delta^3(x-y)$$