Campo Escalar

- El campo escalar está definido por sus propiedades bajo transformaciones de Lorentz.

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu ,$$

Por lo general (por definición) el campo escalar no cambia bajo la transformación de Lorentz, es decir su forma funcional queda inalterada.

- Por consiguiente el campo escalar debe satisfacer que: $\quad \phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \phi'(x)$

- La prima en ϕ representa el cambio intrínseco en el campo ϕ como consecuencia de la transformación.
- Definimos un cambio en el campo como:

$$\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x)$$

- Una trasformación de Lorentz infinitesimal, puede parametrizarse sin pérdida de generalidad como:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

- Para visualizar más fácilmente la situación para un campo escalar, supongamos de momento que δx^μ corresponde a una traslación espacio-temporal

$$\phi'(x') = \phi'(x + \delta x)$$
$$\simeq \phi'(x) + \frac{\partial \phi'}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

$$\therefore \quad \phi'(x') = [\phi(x) + \delta\phi(x)] + \frac{\partial}{\partial x^\mu}[\phi(x) + \delta\phi(x)]\, \delta x^\mu$$
$$\simeq \phi(x) + \delta\phi(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

- Por simplicidad asumiremos que ϕ es un campo real. Entonces:

$$\Delta \phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \delta\phi(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

- Para una traslación: $\Delta \phi(x) = 0$,

$$\delta \phi(x) = -(\partial_\mu \phi)\, \delta x^\mu$$

- Ahora, recordemos que $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$

Como $\phi'(x') = \phi(x) \Rightarrow \phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}x')$

- Esto es, el campo transformado, evaluado en el punto trasformado, da el mismo valor que el campo evaluado en el punto antes de la transformación.

- Por consiguiente, para un campo, un punto arbitrario en el espacio-tiempo, tenemos que el campo escalar trasforma como:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

- Para comprobar la invarianza de Lorentz de la acción para el campo escalar, necesitamos las propiedades de transformación para ∂_{μ}.
- Recordemos $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$. Si invertimos esta ecuación: $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha} x'^{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\alpha}{}_{\nu} x^{\nu}$

$$\therefore \quad (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\, x^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} = x^{\mu}$$

$$\frac{1}{x'^{\nu}} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}\, \frac{1}{\partial x^{\mu}} \quad e$$

$$\frac{1}{\partial x'^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, \frac{1}{x^{\nu}}$$

de modo que la transformada de Lorentz para $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$, es:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \therefore \quad \partial'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, \partial_{\nu}$$

** Demuestre que la Acción para el Lagrangiano

$$\mathcal{L}\,(\partial_\mu \phi, \phi) = \frac{1}{2}\, \partial'_{\mu} \phi(x) \partial'^{\mu} \phi'(x) - V(\phi')$$

es invariante ante transformaciones de Lorentz.

Solucion:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\left\{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\,\partial_\nu\right\}\phi'(x)\, g^{\mu\rho}\,\partial'_\rho\,\phi'(x) - V(\phi')$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\left\{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\,\partial_\nu\right\}\phi'(x)\, g^{\mu\rho}\left\{(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\rho}\,\partial_\sigma\right\}\phi'(x) - V(\phi)$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\,(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, g^{\mu\rho}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\rho}\,\partial_\nu\phi'(x)\,\partial_\sigma\phi'(x) - V(\phi')$$

Como $\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$

$$\therefore\ \mathcal{L}' = \frac{1}{2}\underbrace{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, g^{\mu\rho}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\rho}}\,\partial_\nu\phi(\Lambda^{-1}x)\,\partial_\sigma\phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x))$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\, g^{\nu\sigma}\,\partial_\nu\phi(\Lambda^{-1}x)\,\partial_\sigma\phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x))$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\,\partial_\nu\phi(\Lambda^{-1}x)\,\partial^\nu\phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x))$$

$$= \mathcal{L}\left(\phi(\Lambda^{-1}x),\, \partial_\mu\phi(\Lambda^{-1}x)\right)$$

Debido a que la accion implica la integracion de la densidad Lagrangiana sobre todos los puntos, permanece invariante ante transformaciones de Lorentz:

$$S \rightarrow S' = \int d^4x \mathcal{L}$$

Con lo cual se demuestra lo postulado en el enunciado.

Campo Escalar Complejo.

Universidad de los Andes

Universidad de los Andes | Vigilada Mineducación
Reconocimiento como Universidad: Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964.
Reconocimiento personería jurídica: Resolución 28 del 23 de febrero de 1949 Minjusticia.

Taller Relatividad Especial

Física de Partículas

Profesor: Andrés Florez

- Si una partícula cargada se desplaza en una órbita circular con velocidad fija v en presencia de un campo magnético constante, use la forma relativista de la segunda ley de Newton para demostrar que la frecuencia de movimiento orbital es:

$$f = \frac{qB}{2\pi m}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \tag{1}$$

- **Variables de Mandelstam**: En un evento de dispersión $A + B \rightarrow C + D$ Encontrar la energía de A en términos de $s = (p_A + p_B)^2/c^2$ (p_i es el cuadri-momento) en el sistema de referencia de laboratorio. B está inicialmente en reposo.
Rpta: $E_A^{lab} = (s - m_A^2 - m_B^2)c^2/2m_B$

- Calcule la masa invariante de un sistema de dos jets (m_{j_1,j_2}) usando el sistema de coordenadas propio de un detector cilíndrico, donde $\vec{p}$ está descrito como: $\vec{p}(p_T, \eta, \phi)$; ver sistema coordenado CMS 1. Dado que existen algoritmos de reconstrucción de la energía y momento, un Jet se puede entender como un conjunto de partículas bien definida en el espacio que puede tomarse como un solo cuerpo. *Hint:* Parámetrizar el momentum como $p^2 - p_T^2 = p_z^2$ donde $p_z = p_T \sinh\eta$ y $E = E_T \cosh\eta$
Rpta: $m_{j_1,j_2} \approx \sqrt{2p_T^1 p_T^2(\cosh(\eta_1 - \eta_2))}$

Las funciones de transformación:

- $p_T^2 = p_x^2 + p_y^2$, por tanto: $p^2 = p_T^2 + p_z^2$
- $\eta = -ln(\tan\theta/2)$
- $\tan\phi = p_y/p_x$

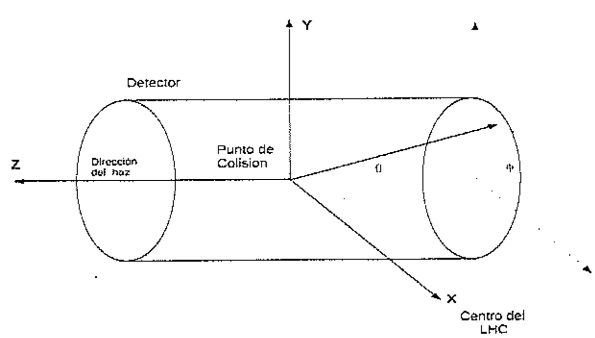

Figura 1: Coordenadas para un detector cilíndrico

Universidad de los Andes

Universidad de los Andes | Vigilada Mineducación
Reconocimiento como Universidad: Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964.
Reconocimiento personería jurídica: Resolución 28 del 23 de febrero de 1949 Minjusticia.

Taller Relatividad Especial

Física de Partículas

Profesor: Andrés Florez

- Si una partícula cargada se desplaza en una órbita circular con velocidad fija v en presencia de un campo magnético constante, use la forma relativista de la segunda ley de Newton para demostrar que la frecuencia de movimiento orbital es:

$$f = \frac{qB}{2\pi m}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \tag{1}$$

- **Variables de Mandelstam**: En un evento de dispersión $A + B \to C + D$ Encontrar la energía de A en términos de $s = (p_A + p_B)^2/c^2$ (p_i es el cuadri-momento) en el sistema de referencia de laboratorio. B está inicialmente en reposo.
Rpta: $E_A^{lab} = (s - m_A^2 - m_B^2)c^2/2m_B$

- Calcule la masa invariante de un sistema de dos jets (m_{j_1,j_2}) usando el sistema de coordenadas propio de un detector cilíndrico, donde $\vec{p}$ está descrito como: $\vec{p}(p_T, \eta, \phi)$; ver sistema coordenado CMS 1. Dado que existen algoritmos de reconstrucción de la energía y momento, un Jet se puede entender como un conjunto de partículas bien definida en el espacio que puede tomarse como un solo cuerpo. *Hint:* Parámetrizar el momentum como $p^2 - p_T^2 = p_z^2$ donde $p_z = p_T \sinh\eta$ y $E = E_T \cosh\eta$
Rpta: $m_{j_1,j_2} \approx \sqrt{2p_T^1 p_T^2(\cosh(\eta_1 - \eta_2))}$

Las funciones de transformación:

- $p_T^2 = p_x^2 + p_y^2$, por tanto: $p^2 = p_T^2 + p_z^2$
- $\eta = -ln(\tan\theta/2)$
- $\tan\phi = p_y/p_x$

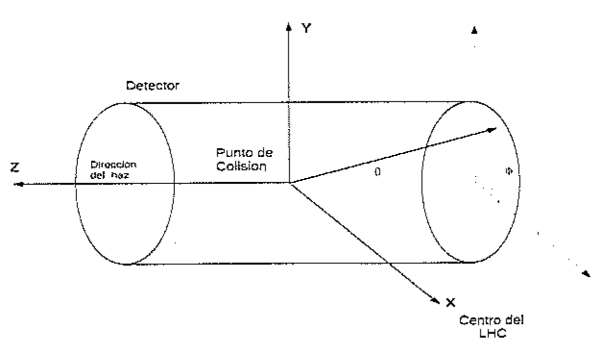

Figura 1: Coordenadas para un detector cilíndrico