

## MECANICA CUANTICA 2

### LECTURA #11

#### LA INVARIANZA DE ISOSPIN Y LA INTERACCION FUERTE

Bajo la suposición de la simetría de la interacción fuerte ante transformaciones de isospin, podemos afirmar que si consideramos el Hamiltoniano para la interacción fuerte  $\Rightarrow$

$$[\hat{H}_{\text{str}}, \hat{T}] = 0 \rightarrow [\hat{H}_{\text{str}}, \hat{U}_I(\vec{\epsilon})] = 0 \quad \hat{U}_I(\vec{\epsilon}) \in \text{SU}(2)_I$$

$$\hat{U}_I(\vec{\epsilon}) = e^{-i\vec{\epsilon} \cdot \hat{T}}$$

$$\hat{T}_i = \frac{1}{2} \gamma_i \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Matrices de Pauli}$$

$$\gamma_i^2 = \mathbb{1} \quad \gamma_i^3 = \gamma_i, \quad \gamma_i^4 = \mathbb{1}, \dots$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta/2} \gamma_i &= \mathbb{1} + (-i\theta/2) \gamma_i + \frac{1}{2!} (-i\theta/2 \gamma_i)^2 + \frac{1}{3!} (-i\theta/2 \gamma_i)^3 + \dots \\ &= \mathbb{1} - i(\theta/2) \gamma_i - \frac{1}{2!} (\theta/2)^2 \mathbb{1} + i \frac{1}{3!} (\theta/2)^3 \gamma_i + \frac{1}{4!} (\theta/2)^4 \mathbb{1} - \dots \\ &= \mathbb{1} \cos(\theta/2) - i \gamma_i \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

$$\vec{\epsilon} = \epsilon \hat{n} \quad \hat{n} = \frac{\vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|} = \frac{\vec{\epsilon}}{\epsilon} \quad e^{-i\vec{\epsilon} \cdot \hat{T}} = e^{-i\frac{\vec{\epsilon}}{\epsilon} \cdot \hat{\gamma}} = \mathbb{1} \cos(\epsilon/2) - i \hat{n} \cdot \hat{\gamma} \sin(\epsilon/2) \leftarrow \text{Demostrarlo.}$$

$$\text{Veamos el caso de } U(\pi \hat{j}) = e^{-i\pi \hat{T}_z} = e^{-i\pi/2 \hat{\gamma}_z} = \mathbb{1} \cos(\pi/2) - i \hat{\gamma}_z \sin(\pi/2) = -i \hat{\gamma}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-i\pi \hat{T}_z} |p\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |n\rangle$$

$$e^{-i\pi \hat{T}_z} |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -|p\rangle$$

Entre proton y neutrón media una transformación unitaria perteneciente a  $\text{SU}(2)_I$

Dado que por hipótesis  $\hat{H}_{\text{str}}$  commuta con cualquier  $U(\vec{\epsilon}) \in \text{SU}(2)_I \Rightarrow \hat{H}_{\text{str}}$  no distingue entre  $|p\rangle$  y  $|n\rangle$ .

Si ponemos la misma frase al revés diríamos que: dado que la interacción fuerte no distingue entre  $|p\rangle$  y  $|n\rangle \Rightarrow \hat{H}_{\text{str}}$  debe commutar con  $U_I(\vec{\epsilon}) \in \text{SU}(2)_I$

La masa de las partículas que participan en la interacción fuerte, los hadrones, deberían reflejar este hecho.

En el caso de  $p$  y  $n$ , deberían tener la misma masa, dado que desde el punto de vista del modelo de isospin nuclear son "el mismo estado", un nucleón  $|N\rangle$ .

$$\left. \begin{array}{l} m_p = 938.213 \text{ MeV} \\ m_n = 939.507 \text{ MeV} \end{array} \right\} \text{La diferencia de masa es del } 0.1\%$$

La pequeña diferencia en masa entre proton y neutrón se puede achacar, en su gran mayoría, a la interacción electromagnética. Desde el punto de vista de la masa de los nucleones, la hipótesis de simetría de isospin funciona bastante bien.

Después de los protones y los neutrones, los siguientes hadrones son los piones, descubiertos hacia 1950 en experimentos de rayos cósmicos.

Partícula	Masa [MeV]	Carga eléctrica	$\tau$ [s]	Spin
$\pi^+$	139.59	$e$	$2.55 \times 10^{-8}$	0
$\pi^0$	135.0	0	$0.83 \times 10^{-16}$	0
$\pi^-$	139.59	$-e$	$2.55 \times 10^{-8}$	0

En este caso la diferencia en masa entre la partícula neutra y las partículas cargadas es mayor, pero aun se puede interpretar, en su gran mayoría, como resultado de la interacción electromagnética.

Dentro del modelo de isospin nuclear podemos clasificar los piones como un triplete de isospin 1.

$$|T=1, T_3=-1\rangle = |\pi^-\rangle$$

$$|T=1, T_3=0\rangle = |\pi^0\rangle$$

$$|T=1, T_3=+1\rangle = -|\pi^+\rangle$$

Los hadrones más ligeros se pueden ordenar en multipletos de isospin

Los nucleones:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow |1/2, +1/2\rangle \\ n &\rightarrow |1/2, -1/2\rangle \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{Doblete de isospin } 1/2 \text{ (} S=1/2 \text{)}$$

Los piones:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow |1,+1\rangle \\ \pi^0 &\rightarrow |1,0\rangle \\ \pi^- &\rightarrow |1,-1\rangle \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{Triplete de isospin 1 (} S=0 \text{)}$$

Las resonancias bávaricas  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta^{++} &\rightarrow |3/2, +3/2\rangle \\ \Delta^+ &\rightarrow |3/2, +1/2\rangle \\ \Delta^0 &\rightarrow |3/2, -1/2\rangle \\ \Delta^- &\rightarrow |3/2, -3/2\rangle \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{Cuadruplete de isospin } 3/2 \text{ (} S=0 \text{)}$$

Mesones vectoriales:

$$\begin{aligned} \text{S}^+ &\rightarrow |1,+1\rangle \\ \text{S}^0 &\rightarrow |1,0\rangle \\ \text{S}^- &\rightarrow |1,-1\rangle \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{Triplete de isospin 1 (} S=1 \text{)}$$

De igual forma podemos clasificar los nucleos más ligeros:

$$d \rightarrow |0,0\rangle$$

$$\begin{aligned} {}^3\text{He} &\rightarrow |1/2, +1/2\rangle \\ {}^3\text{H} &\rightarrow |1/2, -1/2\rangle \end{aligned}$$

$${}^4\text{He} \rightarrow |0,0\rangle$$

⋮

Las reacciones entre estos partículas proceden vía la interacción fuerte, y por tanto deberían respetar la conservación de isospin. Veamos:

### Producción de piones:

$$(a) \rho + \rho \rightarrow d + \pi^+$$

$$(b) \rho + n \rightarrow d + \pi^0$$

$$(c) n + n \rightarrow d + \pi^-$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p;n\rangle - |n;p\rangle)$$

$$|1,-1\rangle = |n;n\rangle$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p;n\rangle + |n;p\rangle) \Rightarrow$$

$$|1,+1\rangle = |p;p\rangle$$

$$|p;\rho\rangle = |1,+1\rangle$$

$$|n;n\rangle = |1,-1\rangle$$

$$|p;n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,0\rangle)$$

$$\xrightarrow{\quad} \rho + \rho$$

$$\xrightarrow{\quad} n + n$$

$$\xrightarrow{\quad} \rho + n$$

↑ Estados iniciales

Estados finales:  $|d\rangle = |0,0\rangle$

$$|\pi^+\rangle = |1,+1\rangle$$

$$|\pi^0\rangle = |1,0\rangle$$

$$|\pi^-\rangle = |1,-1\rangle$$

Isospin del estado final:  $T_d=0, T_\pi=1 \Rightarrow T_{\text{tot}}=1$

El isospin del estado inicial debería ser 1  $\Rightarrow$  en el caso  $|p;n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,0\rangle)$  solo el primer término participa  $\Rightarrow$

$$|p;n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

↑ Clebsch-Gordan

Compararemos las reacciones (a) y (b)

$$(a) |\rho,\rho\rangle \rightarrow |d\rangle + |\pi^+\rangle$$

$$|1,+1\rangle$$

$$|0,0\rangle + |1,+1\rangle \rightarrow |1,+1\rangle$$

← conservación de isospin ←

La sección transversal total (probabilidad de que suceda la reacción)  $\sigma_{(a)} \sim |\langle \rho,\rho | d, \pi^+ \rangle|^2$

$$= |\langle 1,+1 | 1,+1 \rangle|^2 = 1$$

$$(b) \rho + n \rightarrow d + \pi^0$$

$$|\rho,n\rangle \rightarrow |d\rangle + |\pi^0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

$$|0,0\rangle + |1,0\rangle \rightarrow |1,0\rangle$$

← Conservación de isospin

$$\text{La sección transversal total } \sigma_{(b)} \sim |\langle \rho,n | d, \pi^0 \rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0 | 1,0 \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{(b)} = \frac{1}{2}\sigma_{(a)} \quad \leftarrow \text{En concordancia con las mediciones experimentales!}$$

↑ Factor de isospin, resultado de  $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \leftarrow$  Coeficiente de Clebsch-Gordan.

Ahora compararemos las reacciones:



$$\text{Estado inicial: } |1/2, +1/2\rangle + |0, 0\rangle \rightarrow |1/2, +1/2\rangle \leftarrow \rho + d$$

$$\text{Estados finales: } |2, 0\rangle + |1/2, +1/2\rangle \leftarrow \pi^0 + {}^3\text{He} \quad (a)$$

$$|2, +1\rangle + |1/2, -1/2\rangle \leftarrow \pi^+ + {}^3\text{H} \quad (b)$$

En el caso (a) la composición  $1 \otimes 1/2$  nos debe dar  $1/2 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} T^{(1)} = 1; T_3^{(1)} = 0 \\ T^{(2)} = 1/2; T_3^{(2)} = +1/2 \\ T = 1/2; T_3 = +1/2 \end{array} \right\}$$

El coeficiente de Clebsch-Gordan que acopla el estado inicial con el estado final es:

$$1 \otimes 1/2 \left[ \begin{array}{c} 1/2, +1/2 \\ 0, +1/2 \end{array} \right] = +1/\sqrt{3} \quad (\text{de las tablas})$$

En el caso (b) la composición  $1 \otimes 1/2$  nos debe dar  $1/2 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} T^{(1)} = 1; T_3^{(1)} = +1 \\ T^{(2)} = 1/2; T_3^{(2)} = -1/2 \\ T = 1/2; T_3 = +1/2 \end{array} \right\}$$

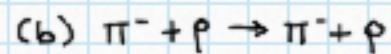
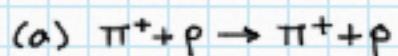
El coeficiente de Clebsch-Gordan que acopla el estado inicial con el estado final es:

$$1 \otimes 1/2 \left[ \begin{array}{c} 1/2, +1/2 \\ 1, +1/2 \end{array} \right] = +\sqrt{2/3} \quad (\text{de las tablas})$$

$$\Rightarrow \sigma_{(a)} \sim 1/3; \sigma_{(b)} \sim 2/3 \Rightarrow \frac{\sigma_{(b)}}{\sigma_{(a)}} = 2 \quad \leftarrow \text{Que se confirma experimentalmente.}$$

### Scattering pion-nucleon:

Compararemos los siguientes procesos



$$\rho \rightarrow |1/2, +1/2\rangle; \pi^+ \rightarrow |1, +1\rangle; \pi^- \rightarrow |1, -1\rangle$$

Tenemos  $1 \otimes 1/2 \Rightarrow$  debemos ver cuales coeficientes de Clebsch-Gordan

$$1 \otimes 1/2 \left[ \begin{array}{c} T, T_3 \\ +1/2, +1 \end{array} \right] \neq 0$$

$$T = ?; T_3 = ?$$

↑ caso (a)

Consultando las tablas tenemos que solo  $T = 3/2; T_3 = +3/2$  y  $1 \otimes 1/2 \left[ \begin{array}{c} 3/2, +3/2 \\ +1/2, +1 \end{array} \right] = 1$

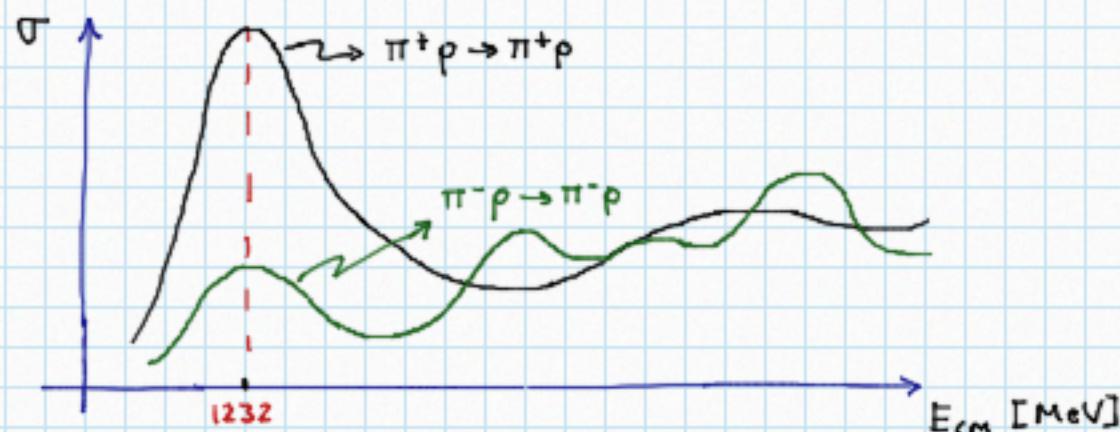
$$|\pi^+, \rho\rangle = |3/2, +3/2\rangle$$

En el caso del proceso (b)  $1 \otimes 1/2 \left[ \begin{array}{c} T, T_3 \\ +1/2, -1 \end{array} \right] \neq 0$

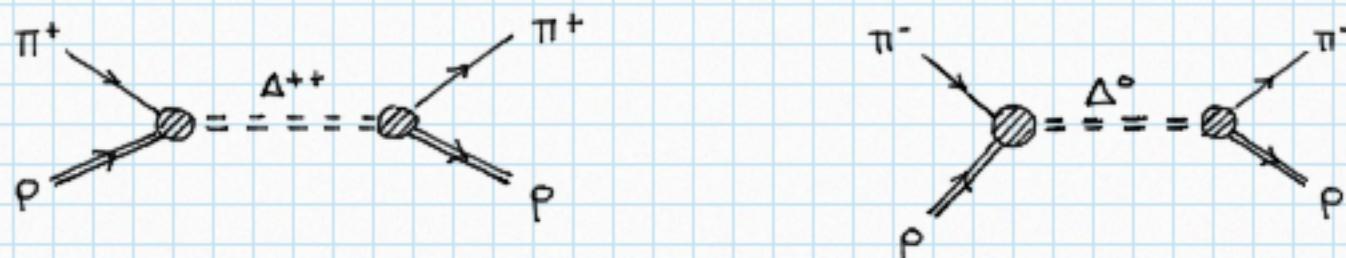
$$T = 3/2, T_3 = -1/2 \rightarrow C = +1/\sqrt{3}$$

$$T = 1/2, T_3 = -1/2 \rightarrow C = -\sqrt{2/3} \Rightarrow |\pi^-, \rho\rangle = 1/\sqrt{3} |3/2, -3/2\rangle - \sqrt{2/3} |1/2, -1/2\rangle$$

La dispersión elástica  $\pi^+ p$  posee un enorme pico a una energía de C.M. de 1232 MeV  
 La dispersión elástica  $\pi^- p$  presenta el mismo pico, pero es más bajo en un factor de  $1/3$ .



La forma de las secciones transversales (pico con un ancho) indica que alrededor de  $M=1232$  MeV hay una resonancia báronica  $\rightarrow \Delta(1232)$



La resonancia intermedia debe ser de isospin  $T=3/2$ , a juzgar por el caso  $\rho\pi^+, \rightarrow |3/2, +3/2\rangle$   
 $\Rightarrow \pi^- p \rightarrow 1/\sqrt{3} |3/2, -1/2\rangle$

$$\sigma_{\pi^- p} = \frac{1}{3} \sigma_{\pi^+ p} \leftarrow E_{cm} \approx 1232 \text{ MeV}$$

Además:  $\Delta^{++} \rightarrow |3/2, +3/2\rangle$ ;  $\Delta^0 \rightarrow |3/2, -1/2\rangle$

De ahí podemos asignar  $\Delta^+ \rightarrow |3/2, +1/2\rangle$  y  $\Delta^- \rightarrow |3/2, -3/2\rangle$

↳ cuádruplete de isospin  $3/2$ .

El éxito del modelo de isospin y el ordenamiento que energía de esta hipótesis apuntaba a la existencia de estructura interna de los hadrones.

El surgimiento en los años 1950's de unas extrañas partículas que no encajaban en el esquema de isospin ( $\mu^\pm, N^0, \bar{N}^0, \Lambda, \Sigma^\pm, \bar{\Sigma}^0, \dots$ ), en experimentos de aceleradores de partículas y en rayos cósmicos, llevaron a Murray Gell-Mann a buscar una simetría más amplia  $\rightarrow SU(3)$  sabor, que eventualmente llevaría a la hipótesis de los quarks.