- Primer punto.

- Recuerde $s = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2$ $\quad P_1^\mu \to$ haz, $P_2^\mu =$ blanco-fijo.

$\overline{P_2} = 0 \quad \therefore \quad s = (P_1^\mu)^2 + (P_2^\mu)^2 + 2 P_1^\mu P_2^\mu$

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \cancel{\overline{P_1} \cdot \overline{P_2}}^{\,0}) = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2$$

Como $\overline{P_2} = 0 \Rightarrow E_2 = m_2$. Adicionalmente

$E_1 \gg m_1$, $E_1 \gg m_2 \quad \therefore \quad s = \sqrt{2E_1 m_2}$

Como $m_2 \approx 1\,\text{GeV} \Rightarrow s \approx \sqrt{4000}\,\text{GeV} \approx 20.0\,\text{GeV}$

- Ahora, para el LHC

$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \overline{P_1} \cdot \overline{P_2})$, pero $\overline{P_2} = -\overline{P_1}$

y $E_1 = E_2$. Adicionalmente $E_i \gg m_i$, entonces

$s = 4E^2 \therefore s = 2E$. Para alcanzar

$s = 20.0\,\text{GeV} \Rightarrow E \simeq 10\,\text{GeV}$. En conclusión

se necesita 20 veces menos energía en el haz, que en el caso de blanco fijo!

Punto 2: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$

Sabemos que $\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0$

$$0 = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \right] - \frac{\partial(j_\mu A^\mu)}{\partial A^\nu}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \left[g_{\nu\rho} \partial_\mu A^\rho - g_{\mu\alpha} \partial_\nu A^\alpha \right] = g_{\nu\rho} \delta^\rho_\nu - g_{\mu\alpha} \delta^\nu_\mu \delta^\alpha_\nu$$

$$= g_{\nu\rho} \delta^\rho_\nu - g_{\mu\alpha} \delta^\alpha_\mu$$

Ahora $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}$; veamos $F^{\beta\gamma} = g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} F_{\mu\nu}$ entonces:

$$\therefore \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} \left(g_{\nu\rho} \delta^\rho_\nu - g_{\mu\alpha} \delta^\alpha_\mu \right)$$

$$= g^{\beta\mu} \left(\delta^\gamma_\rho \delta^\rho_\nu - \delta^\gamma_\mu \delta^\nu_\alpha \delta^\alpha_\mu \right)$$

$$= g^{\beta\mu} \delta^\gamma_\nu - g^{\beta\mu} \delta^\gamma_\mu \delta^\nu_\mu$$

$$= g^{\beta\mu} \delta^\gamma_\nu - g^{\beta\nu} \delta^\gamma_\mu$$

Con esto tenemos

$$0 = -\frac{1}{4} \partial_\mu \left[\left(g_{\nu\rho} \delta^\rho_\nu - g_{\mu\alpha} \delta^\alpha_\mu \right) F^{\mu\nu} + \left(g^{\beta\mu} \delta^\gamma_\nu - g^{\beta\nu} \delta^\gamma_\mu \right) F_{\mu\nu} \right] - \frac{\partial(j_\mu A^\mu)}{\partial A^\nu}$$

$$0 = -\frac{1}{4}\partial_\mu\left[F^\mu{}_\nu - F_\mu{}^\nu + F^\mu{}_\nu - F_\mu{}^\nu \right] - \frac{\partial (j_\mu A^\mu)}{\partial A^\nu}$$

$$F^\mu{}_\nu = -F_\mu{}^\nu$$

$$0 = -\frac{1}{4}\partial_\mu\left[4 F^\mu{}_\nu \right] - j_\mu \quad \therefore \quad j_\mu = \partial_\mu F^\mu{}_\nu$$

$$\therefore \quad j_\mu = g_{\nu\alpha}\,\partial_\mu F^{\mu\alpha}$$

$$g_{e\nu}\, j^\nu = g_{\nu\alpha}\,\partial_\mu F^{\mu\alpha}$$

$$\boxed{j^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu}}$$

para $\nu = 0$ y $\mu = i$, $i = 1, 2, 3$

$$j^0 = \rho = \partial_i\left(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i \right)$$

$$\rho = \overline{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\overline{\nabla}\phi - \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} \right)}_{\overline{E}}$$

$$\rho = \overline{\nabla}\cdot\overline{E}$$

Similarmente se puede obtener las otras ecuaciones.

• Punto 1

Recordemos el primer teorema de Noether:

$$\sum_i \int d^4x \, \varepsilon_i \, \delta\phi_i = \sum_i \int d^4x \, \partial_\mu B_i^\mu$$

Resulta que en esta parte trabajamos simetrías internas: $\delta x^\mu = 0$. Ahora, $B_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i$

Como vimos, $\delta\phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\nu \phi_i)\, \theta(x) + b_i^\nu(\phi_i, \partial_\nu \phi_i)\, \partial_\nu \theta(x)$

Entonces: (1) $\sum_i \int d^4x \, \varepsilon_i (a_i \theta(x) + b_i^\nu \partial_\nu \theta(x)) = \sum_i \int d^4x \, \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu$

Note que la expresión que buscamos es:

$$\sum_i \varepsilon_i \, a_{\alpha i} = \sum_i \partial_\mu (\varepsilon_i \, b_{\alpha i}^\mu)$$

Entonces, para llevar la expresión a algo similar, sumamos y restamos $\sum_i \partial_\mu (\varepsilon_i b_i^\mu)\theta$. Note que es necesario incluir θ, ya que aparece en el primer termino en la ecuación (1). Con esto:

$$\sum_i \int d^4x \, \varepsilon_i \theta - \sum_i \int d^4x \left[\partial_\mu (\varepsilon_i b_i^\mu)\right] \theta = \sum_i \int d^4x \, \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) - \varepsilon_i b_i^\mu \partial_\mu$$

• Usando el teorema de Gauss, la integral de la derecha se convierte en una integral de superficie y los terminos θ, $\partial_\nu \theta$, $\partial_\sigma \theta$ se desvanecen.

Con esto llegamos a

$$\sum_i \varepsilon_i a_{\alpha i} = \sum_i \partial_\sigma (\varepsilon_i b^\sigma_{\alpha i})$$

Recuerde que los α se relacionan con los parámetros θ de transformación y nos recuerdan los terminos θ que se cancelan en la derivación.