Solución de la ecuación de Dirac con Ondas Planas

- Para una interpretación de $\psi(x)$ para una sóla partícula en $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0$, podemos usar una función onda.

- Aunque el esfuerzo de Dirac estuvo en remover soluciones con energías negativas, irónicamente dichas soluciones tambien aparecen en su ecuación.

- Para ver esto, asumamos que trabajamos con ondas planas en el marco de reposo de la partícula.

- La dependencia temporal de esta solución será de la forma e^{-iEt}

- Note que el valor propio E debe satisfacer:

$$(\gamma^0 E - m)\psi(x) = 0$$

Como $(\gamma^0)^2 = 1$ y los valores propios de γ^0 pueden ser

$+1$ o -1, entonces:

$$E = \pm m$$

- Así soluciones con valores positivos y negativos ocurren también en la ecuación de Dirac para una sóla partícula.
- Ahora, para un valor general del 3-momentum $\bar{p}$, representemos las soluciones en la siguiente forma:

$$\psi(x) \sim \begin{cases} U_s(\bar{p})\, e^{-i p \cdot x} \\ \mathcal{V}_s(\bar{p})\, e^{+i p \cdot x} \end{cases}$$

- El sub-indice "s" las dos soluciones independientes para cada tipo de energía: $E+$ y $E-$. Recuerden que ψ es un objeto compuesto de 4 términos!
- U corresponde a soluciones con energía positiva para una partícula de momentum $\bar{p}$.
- $\mathcal{V}$ corresponde a soluciones con energía negativa y momentum $-\bar{p}$.

Entonces
$$(\not{p}-m)\, u_s(\bar{p}) = 0 \qquad y$$
$$(\not{p}+m)\, v_s(\bar{p}) = 0$$

- Para los espinores, la conjugación hermítica resulta ser menos útil, que lo que llamamos la conjugación de Dirac:

$$\overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^{0}$$

- Usando esta definición tenemos:

$$\overline{u}_s(\not{p}-m) = 0$$
$$\overline{v}_s(\not{p}+m) = 0$$

- La normalización de los espinores no ha sido fijada aún. Fijemos esto con las condiciones:

$$u_r^{\dagger}(\bar{p})\, u_s(\bar{p}) = v_r^{\dagger}(\bar{p})\, v_s(\bar{p}) = 2E_p\delta_{rs}$$
$$v_r^{\dagger}(\bar{p})\, u_s(-\bar{p}) = u_r^{\dagger}(\bar{p})\, v_s(-\bar{p}) = 0$$

Soluciones explícitas en la representación de Pauli - Dirac

- Recuerde que hemos hecho todo hasta ahora de una manera independiente de la representación de las matrices γ.
- Sin embargo, es útil derivar las soluciones de onda plana en una representación específica, con lo cual ganamos algo de intuición física.
- Para esto, tomamos la representación de Pauli-Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \; ; \; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Entonces:

$$\not{p} - m = \gamma^0 E_p - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m = \begin{pmatrix} E_p - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E_p - m \end{pmatrix}$$

. Asi podemos escribir los espinores v como:

$$v \equiv \begin{pmatrix} \phi_t \\ \phi_b \end{pmatrix}$$

donde ϕ_t representan las dos componentes de arriba y ϕ_b las dos componentes de abajo.

. Con esto:

$$\text{①} \quad (E_p - m)\phi_t - \bar{\sigma}\cdot\bar{p}\,\phi_b = 0$$

$$\text{②} \quad \bar{\sigma}\cdot\bar{p}\,\phi_t - (E_p + m)\phi_b = 0$$

. Con estas dos ecuacions, tenemos un sistema de 2 incognitas, el cual se puede solucionar.

. Note que de ②:

$$\phi_b = \frac{\bar{\sigma}\cdot\bar{p}}{E_p + m}\phi_t$$

. De esta manera, podemos tener dos soluciones independientes; las cuales elegimos de manera arbitraria, proporcional a: (Para ϕ_+)

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Los elementos de χ_+ y χ_- son números no matrices.

- Entonces:

$$U_\pm(\bar{p}) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \frac{\bar{\sigma}\cdot\bar{p}}{E_p+m}\chi_\pm \end{pmatrix}$$

donde el factor $\sqrt{E_p+m}$ se ha colocado para cumplir con la condición de normalización:

$$U_r^\dagger(\bar{p})\, U_s(\bar{p}) = 2E_p\,\delta_{rs}$$

- De forma similar, podemos encontrar soluciones para los espinores de energías negativas, ϑ:

$$\vartheta_\pm(\bar{p}) = \pm\sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\sigma}\cdot\bar{p}}{E_p+m}\chi_\mp \\ \chi_\mp \end{pmatrix}$$

Operadores de Proyección

- Debido que tenemos multiples soluciones, un concepto útil es el de operadores de proyección.
- Tenemos operadores de proyección para estados con energía positiva y negativa. Por ejemplo, si estamos interesados en estados de energía positiva o negativa, pero no ambos, podemos usar el operador de proyección de energía:

$$\Lambda_{\pm}(\overline{p}) = \frac{\pm \not{p} + m}{2m}$$

- Note que $\not{a}\not{b} = 2a\cdot b - \not{b}\not{a}$, usando $[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2g^{\mu\nu}$. Si $a = b$:

$$\not{a}\not{a} = a^2$$

- Con esto :

$$\Lambda_{\pm}^{2} = \Lambda_{\pm}, \quad \Lambda_{+}\Lambda_{-} = \Lambda_{-}\Lambda_{+} = 0$$

$$\Lambda_{+} + \Lambda_{-} = 1$$

∘ Note que:

$$\Lambda_+(p)\, U_s(\bar{p}) = U_s(\bar{p})$$

$$\Lambda_-(p)\, \vartheta_s(\bar{p}) = \vartheta_s(\bar{p})$$

$$\Lambda_+(\bar{p})\, \vartheta_s(\bar{p}) = \Lambda_-(\bar{p})\, U_s(\bar{p}) = 0$$

Similarmente:

$$\overline{U_s}(\bar{p})\, \Lambda_+(\bar{p}) = \overline{U_s}(\bar{p})$$

$$\overline{\vartheta_s}(\bar{p})\, \Lambda_-(\bar{p}) = \overline{\vartheta_s}(\bar{p})$$

$$\overline{\vartheta_s}\, \Lambda_+(\bar{p}) = \overline{U_s}(p)\, \Lambda_-(\bar{p}) = 0$$