Aprendizaje sensitivo a costos

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

8 de noviembre de 2017

Desbalance y costos de errores no simétricos

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados
- Medida de error de hipótesis h:

$$e(h) = \mathbf{P}_{\mathcal{D}} \left[[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados
- Medida de error de hipótesis h:

$$e(h) = \mathbf{P}_{\mathcal{D}} \left[[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

- Algoritmos minimizan función de error en los datos de manera que $e(h) \ll$.

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados
- Medida de error de hipótesis h:

$$e(h) = \mathbf{P}_{\mathcal{D}} \left[[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

- Algoritmos minimizan función de error en los datos de manera que $e(h) \ll$.
- Sin embargo:

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados
- Medida de error de hipótesis h:

$$e(h) = \mathbf{P}_{\mathcal{D}} \left[[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

- Algoritmos minimizan función de error en los datos de manera que $e(h) \ll$.
- Sin embargo:
  1. En muchas aplicaciones los datos no están balanceados.

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados
- Medida de error de hipótesis h:

$$e(h) = \mathbf{P}_{\mathcal{D}} \left[[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

- Algoritmos minimizan función de error en los datos de manera que $e(h) \ll$.
- Sin embargo:
  1. En muchas aplicaciones los datos no están balanceados.
  2. El costo de cometer un error de clasificación en un dato depende de la clase a la cual éste pertenece.

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados
- Medida de error de hipótesis h:

$$e(h) = \mathbf{P}_{\mathcal{D}} \left[[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

- Algoritmos minimizan función de error en los datos de manera que $e(h) \ll$.
- Sin embargo:
  1. En muchas aplicaciones los datos no están balanceados.
  2. El costo de cometer un error de clasificación en un dato depende de la clase a la cual éste pertenece.
- En estos casos $e(h)$ no es una buena medida de la calidad de h.

Desbalance y costos de errores no simétricos

- Algoritmos estudiados asumen ∼igual proporción de datos en cada clase: datos balanceados
- Medida de error de hipótesis h:

$$e(h) = \mathbf{P}_{\mathcal{D}} \left[[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

- Algoritmos minimizan función de error en los datos de manera que $e(h) \ll$.
- Sin embargo:
  1. En muchas aplicaciones los datos no están balanceados.
  2. El costo de cometer un error de clasificación en un dato depende de la clase a la cual éste pertenece.
- En estos casos $e(h)$ no es una buena medida de la calidad de h.
- Entrenamiento debe tener en cuenta costos/datos no balanceados.

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

$$T = TN + FN + FP + TP$$

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

$$T = TN + FN + FP + TP$$

- Error de clasificación: $\frac{FP+FN}{T}$

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

$$T = TN + FN + FP + TP$$

- Error de clasificación: $\frac{FP+FN}{T}$, Accuracy: $\frac{TP+TN}{T}$

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

$$T = TN + FN + FP + TP$$

- Error de clasificación: $\frac{FP+FN}{T}$, Accuracy: $\frac{TP+TN}{T}$
- Sensitividad (recall): $S = \frac{TP}{TP+FN}$

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

$$T = TN + FN + FP + TP$$

- Error de clasificación: $\frac{FP+FN}{T}$, Accuracy: $\frac{TP+TN}{T}$
- Sensitividad (recall): $S = \frac{TP}{TP+FN}$
- Especificidad: $E = \frac{TN}{FP+TN}$

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

$$T = TN + FN + FP + TP$$

- Error de clasificación: $\frac{FP+FN}{T}$, Accuracy: $\frac{TP+TN}{T}$
- Sensitividad (recall): $S = \frac{TP}{TP+FN}$
- Especificidad: $E = \frac{TN}{FP+TN}$
- Precisión: $P = \frac{TP}{TP+FP}$

Evaluación del clasificador

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	TN	FN
	1	FP	TP

$$T = TN + FN + FP + TP$$

- Error de clasificación: $\frac{FP+FN}{T}$, Accuracy: $\frac{TP+TN}{T}$
- Sensitividad (recall): $S = \frac{TP}{TP+FN}$
- Especificidad: $E = \frac{TN}{FP+TN}$
- Precisión: $P = \frac{TP}{TP+FP}$
- F-score: $F = 2\frac{S \times P}{S+P}$

Area bajo la curva ROC (AUC)

- Clasificador retorna valor real (probabilidad) $\longrightarrow$ umbral.

Area bajo la curva ROC (AUC)

- Clasificador retorna valor real (probabilidad) $\longrightarrow$ umbral.
- Calidad del clasificador al variar el umbral.

Area bajo la curva ROC (AUC)

- Clasificador retorna valor real (probabilidad) $\longrightarrow$ umbral.
- Calidad del clasificador al variar el umbral.
- Escogencia de umbral óptimo de acuerdo al problema.

Area bajo la curva ROC (AUC)

- Clasificador retorna valor real (probabilidad) $\longrightarrow$ umbral.
- Calidad del clasificador al variar el umbral.
- Escogencia de umbral óptimo de acuerdo al problema.
- Visualización

Entrenamiento

Entrenamiento

- Algoritmo de entrenamiento debe tener en cuenta desbalance y/o costos asimétricos.

Entrenamiento

- Algoritmo de entrenamiento debe tener en cuenta desbalance y/o costos asimétricos.
- Sea $C(i, j)$ es el costo incurrido al predecir etiqueta i, cuando la etiqueta es j.

Entrenamiento

- Algoritmo de entrenamiento debe tener en cuenta desbalance y/o costos asimétricos.
- Sea $C(i, j)$ es el costo incurrido al predecir etiqueta i, cuando la etiqueta es j.
- Meta: Minimizar costo esperado de equivocarse:

$$i^* = \arg\min_i R(i|x) = \sum_j P(j|x)C(i, j)$$

Matriz de Costos (caso binario)

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	c_{00}	c_{01}
	1	c_{10}	c_{11}

Matriz de Costos (caso binario)

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	c_{00}	c_{01}
	1	c_{10}	c_{11}

- Costo de falsos positivos.

Matriz de Costos (caso binario)

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	c_{00}	c_{01}
	1	c_{10}	c_{11}

- Costo de falsos positivos.
- Costo de falsos negativos.

Matriz de Costos (caso binario)

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	c_{00}	c_{01}
	1	c_{10}	c_{11}

- Costo de falsos positivos.
- Costo de falsos negativos.
- Debemos tener $c_{10} > c_{00}$ y $c_{01} > c_{11}$

Matriz de Costos (caso binario)

		Etiqueta	
		0	1
Predicción	0	c_{00}	c_{01}
	1	c_{10}	c_{11}

- Costo de falsos positivos.
- Costo de falsos negativos.
- Debemos tener $c_{10} > c_{00}$ y $c_{01} > c_{11}$
- No debe haber fila dominante.

- Decisión óptima es predecir clase 1 si:

$$P(j=0|x)c_{10} + P(j=1|x)c_{11} \leq P(j=0|x)c_{00} + P(j=1|x)c_{01}$$

- Decisión óptima es predecir clase 1 si:

$$P(j=0|x)c_{10} + P(j=1|x)c_{11} \leq P(j=0|x)c_{00} + P(j=1|x)c_{01}$$

- Si $p = P(j=1|x)$,

$$(1-p)c_{10} + pc_{11} \leq (1-p)c_{00} + pc_{01}$$

- Decisión óptima es predecir clase 1 si:

$$P(j=0|x)c_{10} + P(j=1|x)c_{11} \leq P(j=0|x)c_{00} + P(j=1|x)c_{01}$$

- Si $p = P(j=1|x)$,

$$(1-p)c_{10} + pc_{11} \leq (1-p)c_{00} + pc_{01}$$

- Umbral óptimo: predecir clase 1 iff $p \geq p^\star$:

$$p^\star = \frac{c_{10} - c_{00}}{c_{10} - c_{00} + c_{01} - c_{11}}$$

- Note que para el caso balanceado (sin costos) $p^\star = \frac{1}{2}$.

- Note que para el caso balanceado (sin costos) $p^\star = \frac{1}{2}$.
- Cómo hacer que un algoritmo estándar clasifique de acuerdo a un $p^\star$ dado?

- Note que para el caso balanceado (sin costos) $p^\star = \frac{1}{2}$.
- Cómo hacer que un algoritmo estándar clasifique de acuerdo a un $p^\star$ dado?

Teorema

Para hacer un umbral objetivo $p^\star$ corresponder a un umbral dado p_0, el número de ejemplos negativos en el conjunto de entrenamiento debe ser multiplicado por:

$$\frac{p^\star}{1-p^\star}\frac{1-p_0}{p_0}$$

- Note que para el caso balanceado (sin costos) $p^\star = \frac{1}{2}$.
- Cómo hacer que un algoritmo estándar clasifique de acuerdo a un $p^\star$ dado?

Teorema

Para hacer un umbral objetivo $p^\star$ corresponder a un umbral dado p_0, el número de ejemplos negativos en el conjunto de entrenamiento debe ser multiplicado por:

$$\frac{p^\star}{1-p^\star}\frac{1-p_0}{p_0}$$

- Por ejemplo, si $p_0 = 0{,}5$ y $c_{00} = c_{11} = 0$, el número de ejemplos negativos debe ser multiplicado por $p^\star/(1-p^\star) = c_{10}/c_{01}$

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.
  - Muestrear con reemplazo (boostrap).

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.
  - Muestrear con reemplazo (boostrap).
  - Añadir datos sintéticos.

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.
  - Muestrear con reemplazo (boostrap).
  - Añadir datos sintéticos.
- Submuestreo de clase mayoritaria.

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.
  - Muestrear con reemplazo (boostrap).
  - Añadir datos sintéticos.
- Submuestreo de clase mayoritaria.
  - Muestreo sin reemplazo

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.
  - Muestrear con reemplazo (boostrap).
  - Añadir datos sintéticos.
- Submuestreo de clase mayoritaria.
  - Muestreo sin reemplazo
  - Eliminación selectiva (outliers, etc).

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.
  - Muestrear con reemplazo (boostrap).
  - Añadir datos sintéticos.
- Submuestreo de clase mayoritaria.
  - Muestreo sin reemplazo
  - Eliminación selectiva (outliers, etc).
- SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling TEchnique

Técnicas de remuestreo

- Sobremuestreo de clase minoritaria.
  - Muestrear con reemplazo (boostrap).
  - Añadir datos sintéticos.
- Submuestreo de clase mayoritaria.
  - Muestreo sin reemplazo
  - Eliminación selectiva (outliers, etc).
- SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling TEchnique

MetaCost

MetaCost

- Solución óptima:

$$i^* = \arg\min_i R(i|x) = \sum_j P(j|x)C(i,j)$$

MetaCost

- Solución óptima:

$$i^* = \arg\min_i R(i|x) = \sum_j P(j|x)C(i,j)$$

- Partición del espacio $\mathcal{X}$ en k regiones.

MetaCost

- Solución óptima:

$$i^* = \arg\min_i R(i|x) = \sum_j P(j|x)C(i,j)$$

- Partición del espacio $\mathcal{X}$ en k regiones.
- Si los costos cambian, partición cambia aún si probabilidades de clase no cambian.

MetaCost

- Solución óptima:

$$i^* = \arg\min_i R(i|x) = \sum_j P(j|x)C(i,j)$$

- Partición del espacio $\mathcal{X}$ en k regiones.
- Si los costos cambian, partición cambia aún si probabilidades de clase no cambian.
- Las predicciones óptimas en el *conjunto de entrenamiento* no se conocen.

MetaCost

- Solución óptima:

$$i^* = \arg\min_i R(i|x) = \sum_j P(j|x)C(i,j)$$

- Partición del espacio $\mathcal{X}$ en k regiones.
- Si los costos cambian, partición cambia aún si probabilidades de clase no cambian.
- Las predicciones óptimas en el *conjunto de entrenamiento* no se conocen.
- MetaCost estima etiquetas correctas usando Bagging, y entrena clasificador con esas etiquetas.

Algorithm 1 Bagging

for $t = 1$ to T **do**

Obtenga $\mathcal{S}_t$ de $\mathcal{S}$ muestreando con reemplazo.

$h_t \leftarrow A(\mathcal{S}_t)$

end for

Retorne $f(x) = \text{votacion}\{h_t(x)\}$

Algorithm 2 MetaCost

for $t = 1$ to T **do**

Obtenga $\mathcal{S}_t$ de $\mathcal{S}$ muestreando $m \leq n$ datos con reemplazo

$h_t \leftarrow A(\mathcal{S}_t)$

end for

for cada $x \in \mathcal{S}$ **do**

for cada clase j **do**

$$\check{P}(j|x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[\![h_t(x) = j]\!]$$

end for

$\check{y} = \arg\min_i \sum_j \check{P}(j|x)C(i,j)$

end for

Retorne $h_M(x) = A(\check{\mathcal{S}})$

Variantes

Variantes

- Reducir tamaño de muestra bootstrap ($m \ll n$).

Variantes

- Reducir tamaño de muestra bootstrap ($m \ll n$).
- Si clasificador base retorna probabilidades, usarlas en estimativo $\check{P}(j|x)$

Variantes

- Reducir tamaño de muestra bootstrap ($m \ll n$).
- Si clasificador base retorna probabilidades, usarlas en estimativo $\check{P}(j|x)$
- Incluir en estimativo de $\check{P}(j|x)$ sólo h_t entrenado en los que $x \notin \mathcal{S}_t$

Costing (Zadrozny, Langford and Abe, 2003)

Costing (Zadrozny, Langford and Abe, 2003)

- $(x, y, c) \sim \mathcal{D}$ con $x \in \mathcal{X}$, $y \in \{-1, 1\}$ y $c \in \mathbb{R}^+$.

Costing (Zadrozny, Langford and Abe, 2003)

- $(x, y, c) \sim \mathcal{D}$ con $x \in \mathcal{X}$, $y \in \{-1, 1\}$ y $c \in \mathbb{R}^+$.
- Datos de entrenamiento $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i, c_i)\}$.

Costing (Zadrozny, Langford and Abe, 2003)

- $(x, y, c) \sim \mathcal{D}$ con $x \in \mathcal{X}$, $y \in \{-1, 1\}$ y $c \in \mathbb{R}^+$.
- Datos de entrenamiento $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i, c_i)\}$.
- Meta: obtener hipótesis $h : \mathcal{X} \longrightarrow \{-1, 1\}$ que minimice

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}} \left[c[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

Costing (Zadrozny, Langford and Abe, 2003)

- $(x, y, c) \sim \mathcal{D}$ con $x \in \mathcal{X}$, $y \in \{-1, 1\}$ y $c \in \mathbb{R}^+$.
- Datos de entrenamiento $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i, c_i)\}$.
- Meta: obtener hipótesis $h : \mathcal{X} \longrightarrow \{-1, 1\}$ que minimice

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}} \left[c[\![h(x) \neq y]\!] \right]$$

- Más general que métodos que usan matriz de costos.

Teorema de traducción

Teorema

Para toda distribución $\mathcal{D}$ existe una constante $N = \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c]$ tal que para todo clasificador h:

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}[[\![h(x) \neq y]\!]] = \frac{1}{N}\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]]$$

donde $\hat{\mathcal{D}}(x,y,c) = \frac{c}{N}\mathcal{D}(x,y,c)$

Teorema de traducción

Teorema

Para toda distribución $\mathcal{D}$ existe una constante $N = \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c]$ tal que para todo clasificador h:

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}[[\![h(x) \neq y]\!]] = \frac{1}{N}\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]]$$

donde $\hat{\mathcal{D}}(x,y,c) = \frac{c}{N}\mathcal{D}(x,y,c)$

Demostración.

Teorema de traducción

Teorema

Para toda distribución $\mathcal{D}$ existe una constante $N = \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c]$ tal que para todo clasificador h:

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}[[\![h(x) \neq y]\!]] = \frac{1}{N}\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]]$$

donde $\hat{\mathcal{D}}(x,y,c) = \frac{c}{N}\mathcal{D}(x,y,c)$

Demostración.

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]] = \int c[\![h(x) \neq y]\!]d\mathcal{D}$$

Teorema de traducción

Teorema

Para toda distribución $\mathcal{D}$ existe una constante $N = \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c]$ tal que para todo clasificador h:

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}[[\![h(x) \neq y]\!]] = \frac{1}{N}\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]]$$

donde $\hat{\mathcal{D}}(x,y,c) = \frac{c}{N}\mathcal{D}(x,y,c)$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]] &= \int c[\![h(x) \neq y]\!]d\mathcal{D} \\ &= N\int [\![h(x) \neq y]\!]d\hat{\mathcal{D}}\end{aligned}$$

Teorema de traducción

Teorema

Para toda distribución $\mathcal{D}$ existe una constante $N = \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c]$ tal que para todo clasificador h:

$$\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}[[\![h(x) \neq y]\!]] = \frac{1}{N}\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]]$$

donde $\hat{\mathcal{D}}(x,y,c) = \frac{c}{N}\mathcal{D}(x,y,c)$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}[c[\![h(x) \neq y]\!]] &= \int c[\![h(x) \neq y]\!]d\mathcal{D} \\ &= N\int [\![h(x) \neq y]\!]d\hat{\mathcal{D}} \\ &= N\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}[[\![h(x) \neq y]\!]]\end{aligned}$$

- El clasificador h que minimiza el costo esperado con respecto a $\mathcal{D}$ minimiza el error esperado con respecto a $\hat{\mathcal{D}}$.

- El clasificador h que minimiza el costo esperado con respecto a $\mathcal{D}$ minimiza el error esperado con respecto a $\hat{\mathcal{D}}$.
- Para obtener clasificador que minimiza el costo esperado:

- El clasificador h que minimiza el costo esperado con respecto a $\mathcal{D}$ minimiza el error esperado con respecto a $\hat{\mathcal{D}}$.
- Para obtener clasificador que minimiza el costo esperado:
  1. Escalizar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$,

- El clasificador h que minimiza el costo esperado con respecto a $\mathcal{D}$ minimiza el error esperado con respecto a $\hat{\mathcal{D}}$.
- Para obtener clasificador que minimiza el costo esperado:
  1. Escalizar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$,
  2. Entrenar clasificador con datos modificados.

- El clasificador h que minimiza el costo esperado con respecto a $\mathcal{D}$ minimiza el error esperado con respecto a $\hat{\mathcal{D}}$.
- Para obtener clasificador que minimiza el costo esperado:
  1. Escalizar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$,
  2. Entrenar clasificador con datos modificados.
     - ★ Caja transparente.

- El clasificador h que minimiza el costo esperado con respecto a $\mathcal{D}$ minimiza el error esperado con respecto a $\hat{\mathcal{D}}$.
- Para obtener clasificador que minimiza el costo esperado:
  1. Escalizar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$,
  2. Entrenar clasificador con datos modificados.
     - ★ Caja transparente.
     - ★ Caja negra.

Caja transparente

- Conocimiento del algoritmo de clasificación específico.

Caja transparente

- Conocimiento del algoritmo de clasificación específico.
- Modificar algoritmo de clasificación de manera que tenga en cuenta los pesos c/N

Caja transparente

- Conocimiento del algoritmo de clasificación específico.
- Modificar algoritmo de clasificación de manera que tenga en cuenta los pesos c/N
- Adaboost: Pesos iniciales $D_i = \frac{c_i}{N}$

Caja transparente

- Conocimiento del algoritmo de clasificación específico.
- Modificar algoritmo de clasificación de manera que tenga en cuenta los pesos c/N
- Adaboost: Pesos iniciales $D_i = \frac{c_i}{N}$
- SVMs:

Caja transparente

- Conocimiento del algoritmo de clasificación específico.
- Modificar algoritmo de clasificación de manera que tenga en cuenta los pesos c/N
- Adaboost: Pesos iniciales $D_i = \frac{c_i}{N}$
- SVMs:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 + C\sum_{i=1}^{n} c_i\zeta_i \\ \text{sujeto a} \quad & y_i\left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i\rangle + b\right) - 1 + \zeta_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \\ & \zeta_i \geq 0 \end{aligned}$$

Caja Negra

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:
    - ★ Conjunto de entrenamiento $\ll$.

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:
    - ★ Conjunto de entrenamiento $\ll$.
    - ★ Datos resultantes No satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:
    - ★ Conjunto de entrenamiento $\ll$.
    - ★ Datos resultantes No satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
  - Muestreo con reemplazo:

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:
    - ★ Conjunto de entrenamiento $\ll$.
    - ★ Datos resultantes No satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
  - Muestreo con reemplazo:
    - ★ Datos resultantes satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.

Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:
    - ★ Conjunto de entrenamiento $\ll$.
    - ★ Datos resultantes No satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
  - Muestreo con reemplazo:
    - ★ Datos resultantes satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
    - ★ No son independientes.

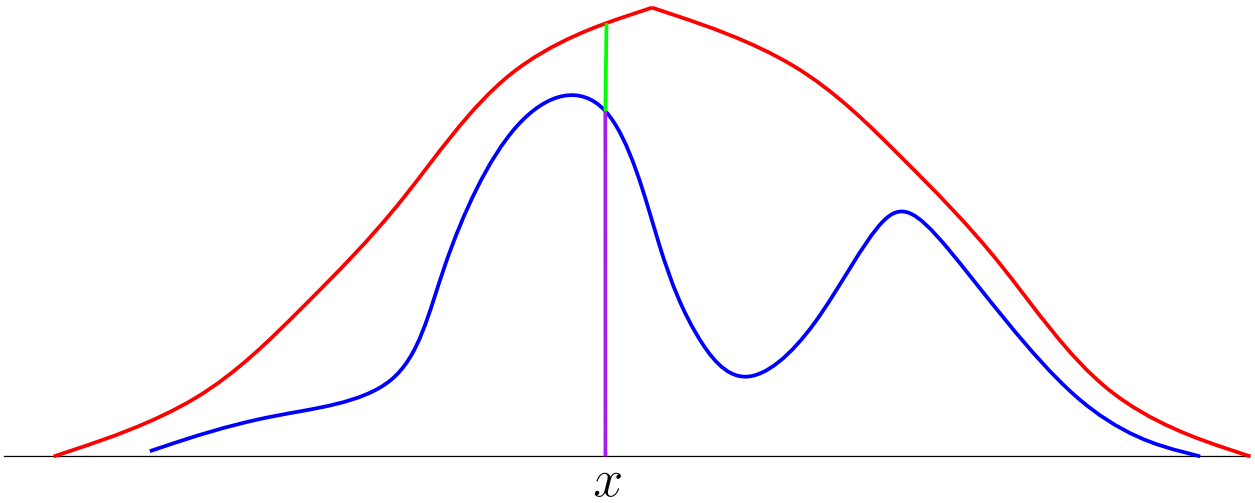
Caja Negra

- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:
    - ★ Conjunto de entrenamiento $\ll$.
    - ★ Datos resultantes No satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
  - Muestreo con reemplazo:
    - ★ Datos resultantes satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
    - ★ No son independientes.
    - ★ Overfitting.

Caja Negra

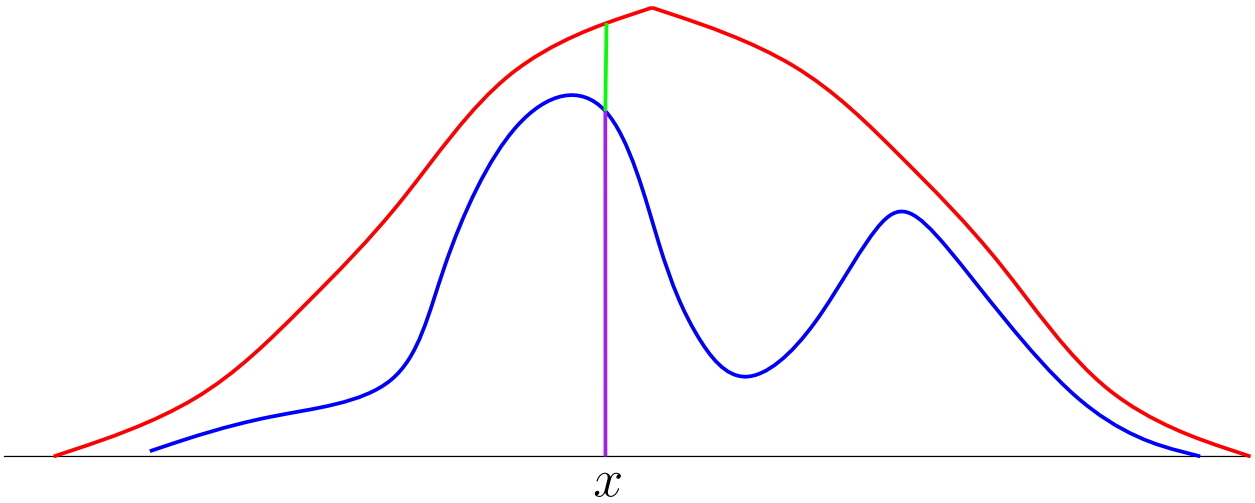
- No se tiene acceso al funcionamiento del algoritmo de clasificación.
- Filtrar distribución de manera que $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$
  - Muestreo sin reemplazo:
    - ★ Conjunto de entrenamiento $\ll$.
    - ★ Datos resultantes No satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
  - Muestreo con reemplazo:
    - ★ Datos resultantes satisfacen $(x, y) \sim \hat{\mathcal{D}}$.
    - ★ No son independientes.
    - ★ Overfitting.
  - Muestreo con rechazo.

Muestreo con rechazo



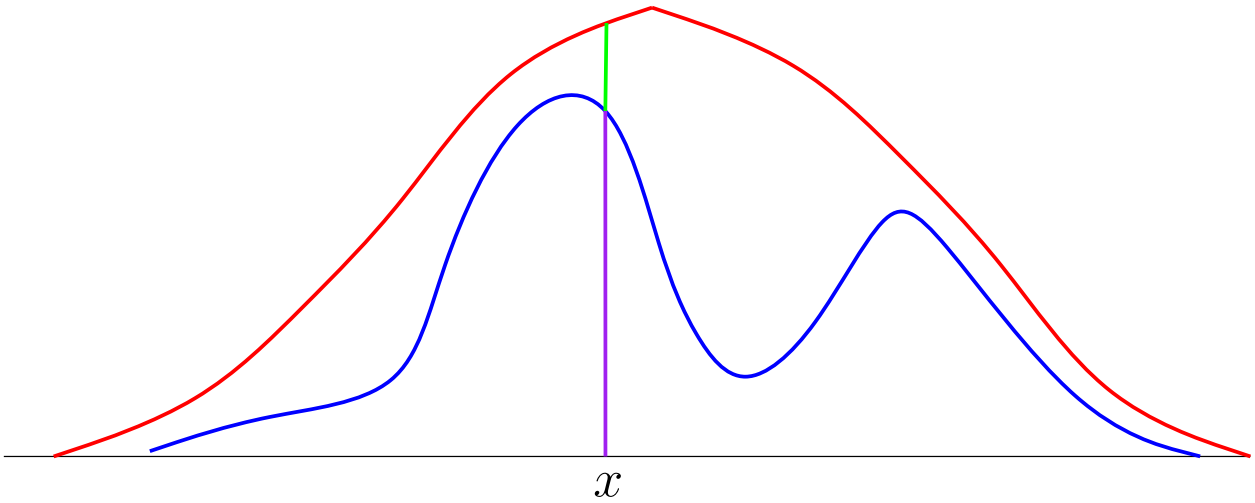
- Distribución difícil de muestrear, pero evaluable f.

Muestreo con rechazo



- Distribución difícil de muestrear, pero evaluable f.
- Muestrear de acuerdo a distribución envolvente g.

Muestreo con rechazo



- Distribución difícil de muestrear, pero evaluable f.
- Muestrear de acuerdo a distribución envolvente g.
- Aceptar con probabilidad $\propto f(x)/g(x)$

Muestreo con rechazo proporcional al costo

- En este caso:

Muestreo con rechazo proporcional al costo

- En este caso:
  1. Datos originales $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i)\} \sim \mathcal{D}$

Muestreo con rechazo proporcional al costo

- En este caso:
  1. Datos originales $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i)\} \sim \mathcal{D}$
  2. Seleccionar (x_i, y_i) aleatoriamente.

Muestreo con rechazo proporcional al costo

- En este caso:
  1. Datos originales $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i)\} \sim \mathcal{D}$
  2. Seleccionar (x_i, y_i) aleatoriamente.
  3. Aceptar con probabilidad c/Z

Muestreo con rechazo proporcional al costo

- En este caso:
  1. Datos originales $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i)\} \sim \mathcal{D}$
  2. Seleccionar (x_i, y_i) aleatoriamente.
  3. Aceptar con probabilidad c/Z
- Z es una cota superior e los costos.

Algorithm 3 Costing

for $t = 1$ to T **do**

Obtenga $\mathcal{S}_t$ de $\mathcal{S}$ muestreando con rechazo y probabilidad de aceptar c/Z.

$h_t \leftarrow A(\mathcal{S}_t)$

end for

Retorne $f(x) = \text{votacion}\{h_t(x)\}$

Propiedades

Propiedades

- $\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}\left[[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq \epsilon \Rightarrow \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}\left[c[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq N\epsilon$

Propiedades

- $\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}\left[[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq \epsilon \Rightarrow \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}\left[c[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq N\epsilon$
- Complejidad de muestra de aprendizaje con datos muestreados con rechazo es menor que complejidad de muestra sin costos (modelo PAC).

Propiedades

- $\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}\left[[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq \epsilon \Rightarrow \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}\left[c[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq N\epsilon$
- Complejidad de muestra de aprendizaje con datos muestreados con rechazo es menor que complejidad de muestra sin costos (modelo PAC).
- Promediar sobre múltiples modelos mejora generalización.

Propiedades

- $\mathbb{E}_{x,y,c\sim\hat{\mathcal{D}}}\left[[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq \epsilon \Rightarrow \mathbb{E}_{x,y,c\sim\mathcal{D}}\left[c[\![h_t(x) \neq y]\!]\right] \leq N\epsilon$
- Complejidad de muestra de aprendizaje con datos muestreados con rechazo es menor que complejidad de muestra sin costos (modelo PAC).
- Promediar sobre múltiples modelos mejora generalización.
- Tiempo de corrida de cada entrenamiento es pequeño porque típicamente $|\mathcal{S}_t| < |\mathcal{S}|$