Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
Envariabelanalys 4 p för D, E, T och Ö
Torsdagen den 11 januari 2007
Skrivtid: 9.00-13.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$. *(2p)*

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{(x+1)e^{-2x}+x-1}$. *(3p)*

2. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = (3x-1)e^{-x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x} + 4\arctan x$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

4. (a) Härled derivatan av $\ln x$. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{x^2}{x^2-1}, \quad x > 0,$$

   för vilken $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2} = 0$. *(4p)*

5. (a) Utred konvergensen hos $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$. *(2p)*

   (b) Undersök om volymen av den kropp som uppkommer då kurvan

$$y = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, \quad x \geq 1,$$

   roterar kring x-axeln har ändlig volym och beräkna i så fall denna volym. *(3p)*

6. (a) Härled formeln för partiell integration. *(1p)*

   (b) Vapeningenjören Pelle är ute och testar sin nya kanon. Han befinner sig vid foten av en lång uppförsbacke med konstant lutning $\pi/6$ rad i förhållande till en tänkt x-axel i markplanet. Pelle gör sig redo att avfyra kanonen i riktning uppför backen. Om all friktion försummas och Pelle befinner sig i origo samt avfyrar kanonen vid tiden $t = 0$ ges kanonkulans läge som funktion av tiden av

$$\begin{cases} x(t) = vt\cos\theta \\ h(t) = vt\sin\theta - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad t \geq 0,$$

   där x är läget i x-led, h höjden över markplanet, v kanonkulans utgångsfart, θ utgångsvinkeln i förhållande till markplanet och g tyngdaccelerationen. Pelle ställer in sin kanon så att kanonkulan landar så långt upp i backen som möjligt. Var i x-led landar den? *(4p)*

Lycka till!

Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
Envariabelanalys 4 p för D, E, T och Ö
Torsdagen den 11 januari 2007
Skrivtid: 9.00-13.00

Lösningsförslag

1. (a) Substitutionen $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t,\ t > 0$, ger $dx = \frac{1}{t}dt$ och vi får

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\frac{1}{t}\,dt = \int_2^3 \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int_2^3 \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln|t+1|\right]_2^3 = \frac{\ln\frac{3}{2}}{2}\ .$$

(b) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-2x \to 0$ då $x \to 0$):

$$(x+1)e^{-2x} + x - 1 = (x+1)(1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)) + x - 1 = \frac{2x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t om ordning 3.

$$\sin x - \arctan x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right) = \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Vi får till slut

$$\frac{\sin x - \arctan x}{(x+1)e^{-2x}+x-1} = \frac{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{2x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x)} \to \frac{1}{4} \text{ då } x \to 0.$$

2. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$L(y) = y'' - y' - 2y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$L(y) = (3x-1)e^{-x}. \tag{1}$$

Homogen lösning: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$ har nollställena $r_1 = -1$ och $r_2 = 2$ och den allmänna lösningen till $L(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom $(3x-1)e^{-x}$ är en produkt av ett polynom och en exponentialfunktion så inför vi en hjälpfunktion z och gör standardansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i $L(y) = (3x-1)e^{-x}$ ger nu

$$y'' - y' - 2y = (z'' - 2z' + z - (z' - z) - 2z)e^{-x} = (z'' - 3z')e^{-x} \Leftrightarrow z'' - 3z' = 3x - 1. \tag{2}$$

Ekvation (2) har en lösning $z_p = ax^2 + bx$ och insättning ger:

$$z'' - 3z = 2a - 3(2ax + b) = -6ax + 2a - 3b = 3x - 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = 0.$$

Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$
\begin{aligned}
y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 - C_1 \\
y'(x) &= -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} - xe^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x} \\
&\Rightarrow y'(0) = -C_1 + 2C_2 = -C_1 + 2(1 - C_1) = 2 - 3C_1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (1 - \frac{x^2}{2})e^{-x}.$$

3. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3 + x^2}{x} + 4\arctan x \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{2x \cdot x - (3 + x^2) \cdot 1}{x^2} + \frac{4}{1 + x^2} = \frac{(x^2 - 3)(1 + x^2) + 4x^2}{x^2(1 + x^2)} = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2(1 + x^2)} = \frac{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{x^2(1 + x^2)} \\
&= \frac{(x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)}{x^2(1 + x^2)} \\
f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.
\end{aligned}
$$

Sedan undersöker vi derivatans tecken:

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$:

Lodräta:

$$f(x) = \frac{3 + x^2}{x} + 4\arctan x \to \pm\infty \text{ då } x \to 0^{\pm}$$

Vågräta/sneda:

$$
\begin{aligned}
k:&\quad \frac{f(x)}{x} = \frac{3 + x^2}{x^2} + \frac{4\arctan x}{x} = \frac{\frac{3}{x^2} + 1}{1} + \frac{4\arctan x}{x} \to \frac{0 + 1}{1} + 0 = 1 \text{ då } x \to \pm\infty \\
m:&\quad f(x) - kx = \frac{3 + x^2}{x} + 4\arctan x - x = \frac{3}{x} + x + 4\arctan x - x = \frac{3}{x} + 4\arctan x \\
&\quad \to 0 \pm 4 \cdot \frac{\pi}{2} = \pm 2\pi \text{ då } x \to \pm\infty.
\end{aligned}
$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = 1$ med värdet $f(1) = 4 + \pi$ samt en lokal maximipunkt i $x = -1$ med värdet $f(-1) = -\pi - 4$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 0$ samt de sneda asymptoterna $y = x \pm 2\pi$ då $x \to \pm\infty$.

Anmärkning: Funktionen $f(x)$ är udda ($f(-x) = f(x)$) så vi behöver egentligen bara analysera $f(x)$ för $x \geq 0$.

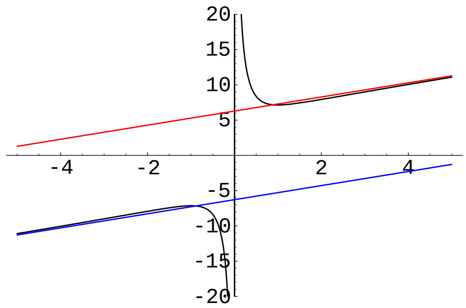
$*$

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = \ln x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} = \frac{\ln(\frac{x+h}{h})}{h} = \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1} \frac{1}{x} \to \frac{1}{x} \text{ då } \frac{h}{x} \to 0 \text{ dvs då } h \to 0.$$



Figur 1: Kurvan $y = \frac{3+x^2}{x} + 4\arctan x$.

(b) Detta är en linjär differentialekvation och börjar med att skriva om den på normalform:

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{x^2}{x^2-1} \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

Multiplication med den integrerande faktorn $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-2}} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$ ger sedan:

$$\begin{aligned} &y'\frac{1}{x^2} + y\left(-\frac{2}{x^3}\right) = D\left(y\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2-1} \\ \Leftrightarrow\ & y\frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därför

$$y(x) = \frac{x^2}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + Cx^2.$$

där C är en godtycklig konstant. Eftersom

$$\begin{aligned} \frac{y(x)}{x^2} &= \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right| + C \\ &\to \ln 1 + C = C \text{ då } x \to \infty \end{aligned}$$

så är den sökta lösningen

$$y(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

5. (a) Vi beräknar den generaliserade integralen för olika värden på α:

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha = 1: & [\ln x]_1^R = \ln R - \ln 1 = \ln R \to \infty \text{ då } R \to \infty \\ \alpha \neq 1: & \left[-\frac{1}{\alpha-1}x^{-(\alpha-1)}\right]_1^R = -\frac{R^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha > 1. \\ \infty & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Resultatet visar att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent omm } \alpha > 1.$$

(b) Rotationskroppens volym ges av

$$\pi\int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Eftersom

$$0 < \frac{\ln x}{x^2} < \frac{x^{1/2}}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

för $x > 0$ och integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ är konvergent så är volymen ändlig. Med hjälp av partiell integration får vi nu

$$\int_1^R \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^R + \int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^R$$

$$= -\frac{\ln R}{R} - \frac{1}{R} - (-\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1}) = 1 - \frac{\ln R}{R} - \frac{1}{R} \to 1 - 0 - 0 = 1 \text{ då } R \to \infty.$$

Den sökta volymen är alltså π v.e.

6. (a) Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ och $g(x)$ en deriverbar funktion så ger produktregeln:

$$D(F(x)g(x)) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) \Leftrightarrow f(x)g(x) = D(F(x)g(x)) - F(x)g'(x).$$

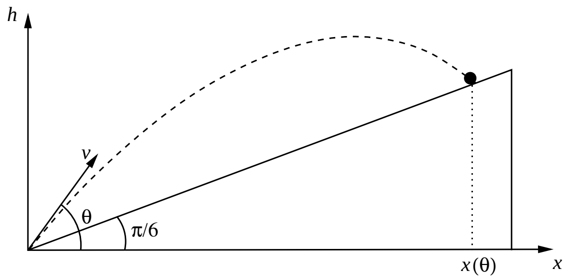
Integrering av båda leden ger nu

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

(b) Vi har

$$x = vt\cos\theta \Leftrightarrow t = \frac{x}{v\cos\theta} \Rightarrow h = vt\sin\theta - \frac{gt^2}{2} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}.$$

Kastbanan är alltså en parabel.



Backen beskrivs av en rät linje med riktningskoefficienten $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dvs ekvationen för backen är $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Den sökta x-koordinaten för skärningspunkten mellan kastparabeln och den räta linjen ges av

$$x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x\left(\tan\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{gx}{2v^2\cos^2\theta}\right) = 0$$

som har två lösningar: $x = 0$, som förstås inte är den vi söker, samt

$$x = \frac{2v^2\cos^2\theta}{g}\left(\tan\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{v^2}{g}\left(2\sin\theta\cos\theta - \frac{2\cos^2\theta}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{v^2}{g}\left(\sin 2\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{\sqrt{3}}\right) = \frac{v^2}{\sqrt{3}g}(\sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta - 1).$$

För att hitta maximum bestämmer vi de stationära punkterna till $x(\theta)$:

$$x'(\theta) = \frac{v^2}{\sqrt{3}g}(2\sqrt{3}\cos 2\theta + 2\sin 2\theta) = \frac{4v^2}{\sqrt{3}g}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

$$= \frac{4v^2}{\sqrt{3}g}(\sin(\pi/3)\cos 2\theta + \cos(\pi/3)\sin 2\theta) = \frac{4v^2}{\sqrt{3}g}\sin(2\theta + \pi/3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\theta + \frac{\pi}{3} = n\pi, \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Eftersom $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ får vi endast nollstället $\theta = \pi/3$.

Studerar vi derivatans tecken

θ	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$x(\theta)$	0	$\nearrow$	$x(\pi/3)$	$\searrow$	0

ser vi att det största värdet på x antas i $\theta = \pi/3$ dvs den optimala utgångsvinkeln ligger precis mitt i det tillgängliga skjutintervallet $[\pi/6, \pi/2]$ (vilket gäller allmänt). Det maximala skjutavståndet ges alltså av

$$x(\pi/3) = \frac{2v^2\cos^2(\pi/3)}{g}\left(\tan(\pi/3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{v^2}{2g}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{v^2}{\sqrt{3}g}.$$