Högskolan i Halmstad
ITE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik
Onsdagen den 28 oktober 2015
Skrivtid: 9.00-13.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$\cos 2x + 2\sin^2 2x = 1.$$

   (b) Lös olikheten (*3p*)

$$|x+1| - |2-x| \leq x.$$

2. (a) Hur många olika "ord" med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

"MATTETENTA" ?

   Vad blir svaret om alla vokaler ska stå jämte varandra? (*2p*)

   (b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2n-1, \\ y_0 = 1, \ y_1 = -1. \end{cases}$$

3. (a) Bestäm samtliga element i $\mathbb{Z}_5$ som har multiplikativ invers. (*2p*)

   (b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

   för alla heltal $n \geq 1$. (*3p*)

4. (a) Formulera och bevisa faktorsatsen. (*2p*)

   (b) Ekvationen

$$z^6 - z^4 + 4z^2 - 4 = 0$$

   har två rötter som är lätta att gissa. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

5. (a) Grafen G har 14 bågar. 4 av noderna har grad 3 och 2 av noderna har grad 4. Vilket är det största antalet noder som kan ha grad 2? (*2p*)

   (b) Husdjursingenjören Pelle har tre sorters djur hemma i sitt hus: Ormar, katter och papegojor. Vid ett tillfälle när Pelle och hans flickvän Sara var ensamma med alla Pelles husdjur fanns det totalt 59 huvuden och 46 fötter i huset. Vilket är det största respektive minsta möjliga sammanlagda antalet katter och papegojor som då fanns i huset?
   Ledning: Alla varelser i huset hade vid det aktuella tillfället varsitt huvud. Ormarna hade inga fötter, katterna hade fyra och Pelle, Sara och papegojorna hade två. (*3p*)

6. (a) Härled formeln för beräkning av en geometrisk summa. (*2p*)

   (b) Beräkna

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}.$$

   (*3p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Ekvationen är en andragradsekvation i $\cos 2x$:

$$\begin{aligned}
&\cos 2x + 2\sin^2 2x = \cos 2x + 2(1-\cos^2 2x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} = 0\\
&\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{8}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad \cos 2x = 1.
\end{aligned}$$

Lösningarna ges nu av:

$$\begin{aligned}
&\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi\\
&\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = n\cdot 2\pi \Leftrightarrow x = n\pi.
\end{aligned}$$

(b) Vi har:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases} \qquad |2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ -(2-x), & x > 2 \end{cases}$$

och vi löser därför olikheten i tre intervall:

x	-1	2	
	$\lvert x+1\rvert - \lvert 2-x\rvert \leq x$ $\Leftrightarrow -(x+1)-(2-x) \leq x$ $\Leftrightarrow x \geq -3$	$\lvert x+1\rvert - \lvert 2-x\rvert \leq x$ $\Leftrightarrow x+1-(2-x) \leq x$ $\Leftrightarrow x \leq 1$	$\lvert x+1\rvert - \lvert 2-x\rvert \leq x$ $\Leftrightarrow x+1+2-x \leq x$ $\Leftrightarrow x \leq 3$

$$\therefore -3 \leq x \leq 1 \text{ eller } x \geq 3.$$

2. (a) Om alla 10 bokstäver i ordet ”MATTETENTA” varit olika hade vi kunnat bilda 10! olika ord men eftersom vi har 4 T:n, 2 E:n och 2 A:n, och dessa kan permuteras på 4!, 2! respektive 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt $\frac{10!}{4!2!2!} = 37800$ olika ord.

Om alla vokaler ska stå intill varandra kan de som grupp placeras ut bland de sex konsonanterna M, T, T, T, N, T på 7 olika sätt. För varje sådan placering kan konsonanterna permuteras på $\frac{6!}{4!}$ olika sätt. De fyra vokalerna A, A, E, E kan i sin tur permuteras på $\frac{4!}{2!2!}$ olika sätt och enligt multiplikationsprincipen får vi därför totalt $7\frac{6!}{4!}\frac{4!}{2!2!} = 1260$ olika ord.

(b) Vi gör ett induktionsbevis.

$$\text{Påstående: } \sum_{k=1}^{n}(2k)^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2 \text{ för alla heltal } n \geq 1.$$

i. För $n = 1$ har vi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{n=1} &= 2^3 = 8\\
\mathrm{HL}_{n=1} &= 2\cdot 1^2(1+1)^2 = 8 = \mathrm{VL}_{n=1}
\end{aligned}$$

ii. Antag att påståendet är sant för $n = p$ (induktionsantagandet (i.a.)). För $n = p+1$ får vi då

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{n=p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1}(2k)^2 = 2^3 + 4^3 + \ldots + (2p)^3 + (2(p+1))^3\\
&\overset{\text{i.a}}{=} 2p^2(p+1)^2 + (2(p+1))^3 = 2(p+1)^2(p^2+4(p+1)) = 2(p+1)^2(p+2)^2\\
&= 2(p+1)^2((p+1)+1)^2 = \mathrm{HL}_{n=p+1}
\end{aligned}$$

Sammanfattning: Påståendet är sant för $n = 1$ och om det är sant för $n = p$ så är det också sant för $n = p+1$. Enligt Induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

3. (a) Vi gör en multiplikationstabell i $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Genom att identifiera "ettorna" i tabellen ser vi att de element i $\mathbb{Z}_5$ har multiplikativ invers är $[1]_5$, $[2]_5$, $[3]_5$ och $[4]_5$. Vi har t ex $[2]_5 \cdot [3]_5 = [1]_5$ dvs $[2]_5$ är multiplikativ invers till $[3]_5$ och tvärt om.

(b) Den allmänna lösningen ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation (HL = 0) och y_{pn} *en* partikulärlösning till den givna differensekvationen.

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ är $r_1 = 2$ och $r_2 = 1$ vilket ger

$$y_{hn} = C_1 2^n + C_2 1^n = C_1 2^n + C_2.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
1 är en enkelrot till den karaktäristiska ekvationen och därför fungerar inte standardansatsen $An + B$ eftersom y_{hn} innehåller en konstantterm (C_2). Vi gör därför istället ansatsen $y_{pn} = n(An + B) = An^2 + Bn$. Insättning ger:

$$\begin{aligned}
y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= A(n+2)^2 + B(n+2) - 3(A(n+1)^2 + B(n+1)) + 2(An^2 + Bn) \\
&= A(n^2 + 4n + 4) + B(n+2) - 3(A(n^2 + 2n + 1) + B(n+1)) + 2(An^2 + Bn) \\
&= n^2(A - 3A + 2A) + n(4A + B - 6A - 3B + 2B) + 4A + 2B - 3A - 3B \\
&= n(-2A) + A - B = 2n - 1 \Leftrightarrow A = -1,\ B = 0.
\end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 2^n + C_2 - n^2.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned}
y_0 &= C_1 2^0 + C_2 - 0^2 = C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 - C_1 \\
y_1 &= C_1 2^1 + C_2 - 1^2 = 2C_1 + C_2 - 1 = 2C_1 + 1 - C_1 - 1 = C_1 = -1 \Rightarrow C_2 = 2.
\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y_n = -2^n + 2 - n^2.$$

4. (a) Se Månsson & Nordbeck s. 28.

(b) Gissning ger rötterna $z = \pm 1$. Enligt Faktorsatsen är därför $(z+1)(z-1) = z^2 - 1$ en faktor i polynomet i ekvationens vänsterled. Polynomdivision ger nu den faktoriserade ekvationen

$$z^6 - z^4 + 4z^2 - 4 = (z^2 - 1)(z^4 + 4) = 0.$$

Den binomiska ekvationen $z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4$ löser vi enklast genom att går över till polär form:

$$z^4 = (re^{i\theta})^4 = r^4 e^{i4\theta} = -4 = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rötterna till ekvationen $z^4 = -4$ ges alltså av $z_k = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$ dvs

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i, \\ z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i, \\ z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i, \\ z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1 - i. \end{cases}$$

Sammanfattningsvis har den ursprungliga ekvationen rötterna $z = \pm 1$ och $z = \pm(1 \pm i)$.

Anm: Ett alternativt sätt att lösa ekvationen är att sätta $t = z^2$ vilket ger tredjegradsekvationen $t^3 - t^2 + 4t - 4 = 0$. Gissning ger roten $t = 1$ och polynomdivision med faktorn $z - 1$ ger

$$t^3 - t^2 + 4t - 4 = (t-1)(t^2+4) = 0$$

vilket innebär att de två andra rötterna är $\pm 2i$. Ekvationerna $t = z^2 = \pm 2i$ kan nu lösas genom insättning av ansatsen $z = a + ib$.

5. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av graderna på noderna lika med 2 gånger antalet bågar. Det största antalet noder med grad 2 får vi om alla resterande noder har denna grad:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + x \cdot 2 = 2 \cdot 14$$

Eftersom ekvationen har en lösning $x = 4$ är detta maximala antalet noder med grad 2.

(b) Vi sätter o = antal ormar, k = antal katter, p = antal papegojor och söker de positiva heltalslösningarna till

$$\begin{cases} o + k + p + 2 = 59 & \text{(antal huvuden)} \quad (1) \\ 4k + 2(p+2) = 46 & \text{(antal fötter)} \quad (2) \end{cases}$$

där Saras och Pelles huvuden och fötter är inräknade. Från ekvation (1) får vi $o = 57 - k - p$. Förenkling av ekvation (2) ger den diofantiska ekvationen

$$2k + p = 21.$$

Eftersom ekvationen redan är förenklad så långt som möjligt ($\text{sgd}(2,1) = 1$) är den allmänna lösningen $(k, p) = (21k_0 - n \cdot 1, 21p_0 + n \cdot 2)$ där (k_0, p_0) är en lösning till hjälpekvationen $2k + p = 1$. Vi ser direkt att $(k_0, p_0) = (1, -1)$ löser denna och den allmänna lösningen ges därför av:

$$(k, p) = (21 - n, -21 + 2n) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De positiva heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{array}{l} k > 0 \Leftrightarrow 21 - n > 0 \Leftrightarrow n < 21 \\ p > 0 \Leftrightarrow -21 + 2n > 0 \Leftrightarrow n > \dfrac{21}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow 11 \leq n \leq 20$$

Vi har $k + p = 21 - n - 21 + 2n = n$. Ska vi maximera totalantalet katter och papegojor ska vi alltså välja största möjliga n och ska vi minimera totalantalet ska vi välja minsta möjliga n. $k + p$ får dock inte bli större än 56 eftersom $o > 0$. Vi får:

$$\begin{cases} (k+p)_{\text{max}} & = 20 \quad (\Rightarrow o = 37) \\ (k+p)_{\text{min}} & = 11 \quad (\Rightarrow o = 46) \end{cases}$$

Det största totalantalet katter och papegojor är alltså 20 vilket vi får om Pelle har 37 ormar, 1 katt och 19 papegojor. Det minsta totalantalet är 11 vilket erhålles om han har 46 ormar, 10 katter och en ensam papegoja hemma i sitt hus.

6. (a) Se Månsson & Nordbeck s. 53.

(b) Räknereglerna för potenser ger:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}} = 2^{\sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k}$$

Exponenten är en geometrisk summa:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - 2^{-n}$$

Vi får därför

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = 2^{2 - 2^{-n}}.$$