Högskolan i Halmstad
ITE/MPE-lab
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning 6 hp
MA2047 Algebra och diskret matematik
Onsdagen den 26 oktober 2016
Skrivtid: 9.00-13.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$\ln(x) \cdot \ln(x^3) = \ln(x^6)\,.$$

   (b) Lös olikheten (*3p*)

$$\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x - 1} \leq x + 1\,.$$

2. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*2p*)

$$A:\ |x-1| < 2, \qquad B:\ x^2 < 9, \qquad C:\ x^2 < 3x, \qquad D:\ x < 3.$$

   (b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2(2^{2n+1} + 1), \\ y_0 = 1,\ y_1 = -1. \end{cases}$$

3. (a) Visa att funktionen

$$f(x) = \ln(e^x + 1),\ x \in \mathbb{R},$$

   är inverterbar och bestäm inversen. Bestäm även definitions- och värdemängd till inversen. (*2p*)

   (b) Lös ekvationen $iz^3 + 1 = 0$ och ange rötterna på rektangulär form. (*3p*)

4. (a) Hur många olika ”ord” med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

   ”MATTETENTA”

   om varje bokstav ska användas en gång och om:

   1) alla ord ska inledas med ”MATTE” ?
   2) ”TENTA” inte får ingå som en del i orden dvs ord av typen ”TA{TENTA}MTE” ska inte räknas med? (*2p*)

   (b) Sara föddes under andra halvan av 1900-talet. Om man multiplicerar hennes födelsedag med 14 och hennes födelsemånad med 22 blir summan av de resulterande två talen 336. Multiplicerar man hennes födelsedag med hennes födelsemånad blir produkten ett tvåsiffrigt tal som är lika med det år hon föddes.
   Vilka är de sex första siffrorna (ÅÅMMDD) i Saras personnummer? (*3p*)

5. (a) Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter och ett nollställe z_1 med imaginärdel skild från noll. Visa att $p(z)$ också har nollstället $\bar{z}_1$. (*2p*)

   (b) Ekvationen

$$z^6 + 2z^4 - 9z^2 - 18 = 0$$

   har roten $i\sqrt{2}$. Lös ekvationen fullständigt. (*3p*)

6. (a) Grafen G är sammanhängande, har 15 bågar och färre än 15 noder. Fem av noderna har grad 2 och tre av noderna har grad 4. Resterande noder har alla samma grad. Innehåller G en Eulercykel? (*2p*)

   (b) På sjörövaringenjören Pelle Skräcks skepp finns det tre master. Pelle har 9 olika flaggor som han kan hänga upp under varandra i masterna för att skicka signaler till sina elaka sjörövarkollegor. I varje mast finns det plats för upp till 9 flaggor. Hur många olika signaler kan Pelle skicka om 1) alla 9 flaggorna används för varje signal? 2) totalt 1 till 9 flaggor kan användas för en signal? Svaren får innehålla binomialkoefficienter och fakulteter. (*3p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi utnyttjar logaritmlagen $\ln x^p = p \ln x$ och faktoriserar:

$$\ln x \cdot \ln x^3 = \ln x^6 \Leftrightarrow \ln x \cdot 3 \ln x = 6 \ln x \Leftrightarrow 3 \ln x (\ln x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = e^2.$$

(b) Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt och faktoriserar:

$$\begin{aligned} \frac{x^3+x^2+x-1}{x-1} - (x+1) &= \frac{x^3+x^2+x-1-(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^3+x^2+x-1-(x^2-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^3+x}{x-1} = \frac{x(x^2+1)}{x-1} \leq 0. \end{aligned}$$

Faktorn $x^2+1>0$ (påverkar inte tecknet) och behöver inte tas med i teckenstudiet:

x		0		1	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x^2+1)}{x-1}$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+x^2+x-1}{x-1} \leq x+1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1.$$

2. (a) Vi har

$$\begin{aligned} &A: |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \\ &B: x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \\ &C: x^2 < 3x \Leftrightarrow x(x-3) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3 \qquad \leftarrow \text{Gör teckenstudium pss som i 1b !} \\ &D: x < 3 \end{aligned}$$

och inser att de implikationer som gäller är:

$$A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow D,\ B \Rightarrow D,\ C \Rightarrow A,\ C \Rightarrow B \text{ och } C \Rightarrow D.$$

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2(2^{2n+1}+1) \tag{1}$$

ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n) = 0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$ är $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$ vilket ger

$$y_{hn} = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom högerledet

$$2(2^{2n+1}+1) = 2 \cdot 2 \cdot 2^{2n} + 2 = 4 \cdot 4^n + 2$$

är en summa av en exponentialfunktion $(4 \cdot 4^n)$ och ett nolltegradspolynom (konstant $= 2$) och differensekvationen är linjär kan partikulärlösningen skrivas som:

$$y_{pn} = y_{p_1 n} + y_{p_2 n}$$

där $y_{p_1 n}$ är en lösning till $\mathcal{L}(y_n) = 4 \cdot 4^n$ och $y_{p_2 n}$ en lösning till $\mathcal{L}(y_n) = 2$.

- Ansats 1: $y_{p_1 n} = A4^n$ (samma typ av exponentialfunktion som i HL, ingår inte i y_{hn})
  Insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n &= A4^{n+2} - 5A4^{n+1} + 6A4^n = (16 - 20 + 6)A4^n \\ &= 2A4^n = 4 \cdot 4^n \Leftrightarrow A = 2. \end{aligned}$$

- Ansats 2: $y_{p_2n} = B$ (samma typ av polynom som i HL, ingår inte i y_{hn})
  Insättning ger:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = B - 5B + 6B = 2B = 2 \Leftrightarrow B = 1.$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{p_1n} + y_{p_2n} = C_1 2^n + C_2 3^n + 2 \cdot 4^n + 1.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned}
y_0 &= C_1 2^0 + C_2 3^0 + 2 \cdot 4^0 + 1 = C_1 + C_2 + 2 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = -C_2 - 2, \\
y_1 &= C_1 2^1 + C_2 3^1 + 2 \cdot 4^1 + 1 = 2C_1 + 3C_2 + 8 + 1 = 2(-C_2 - 2) + 3C_2 + 9 = C_2 + 5 = -1 \\
&\Leftrightarrow C_2 = -6 \text{ vilket ger } C_1 = 4.
\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y_n = 4 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n + 1.$$

3. (a) Eftersom $\ln x$ och $e^x + 1$ båda är strängt växande funktioner är också sammansättningen $f(x) = \ln(e^x + 1)$ strängt växande och därmed inverterbar. Detta ser vi också om vi sätter $y = f(x)$ och löser ut x:

$$y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1).$$

För varje $y \in V_f$ finns exakt ett $x \in D_f = \mathbb{R}$ dvs f är inverterbar. Vidare gäller det att

$$\begin{cases} f(x) \to \infty \text{ då } x \to \infty \\ f(x) \to \ln 1 = 0 \text{ då } x \to -\infty \end{cases}$$

och eftersom f är strängt växande och kontinuerlig är $V_f = \mathbb{R}^+$. Inversen ges alltså av

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1),\ D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}^+,\ V_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}.$$

(b) Vi har

$$iz^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow iz^3 = -1 \Leftrightarrow z^3 = i$$

dvs en binomisk ekvation som vi enklast löser genom att går över till polär form:

$$z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rötterna till ekvationen $z^3 = i$ ges alltså av $z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$, dvs

$$\begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \\ z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), \\ z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i. \end{cases}$$

4. (a) 1) Om alla ord ska inledas med ”MATTE” kan vi plocka bort dessa bokstäver och vi har då bara kvar bokstäverna i ”TENTA”. Om dessa fem bokstäver varit olika hade vi kunnat bilda 5! olika ord men eftersom vi har två T:n och dessa kan permuteras på 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt $\frac{5!}{2!} = 60$ olika ord.

2) Vi räknar först ut hur många ord som innehåller ”TENTA” som delord. Vi kan betrakta ordet som en bokstav $\mathcal{B}$ och söker alltså antalet ord som kan bildas med hjälp av de sex bokstäverna M,A,T,T,E och $\mathcal{B}$. Eftersom vi har två T:n som kan permuteras på 2! sätt utan att ett ord ändras får vi totalt $\frac{6!}{2!}$ olika ord. Antalet ord som *inte* innehåller delordet ”TENTA” är lika med totala antalet ord vi kan bilda med hjälp av de 10 bokstäverna i ”MATTETENTA” minus antalet ord som innehåller delordet ”TENTA”. Eftersom vi har fyra T:n, två A:n och två E:n i ”MATTETENTA”, vilka kan permuteras på 4!, 2! respektive 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi:

$$\frac{10!}{4!2!2!} - \frac{6!}{2!} = 37800 - 360 = 37440 \quad \text{olika ord.}$$

(b) Vi sätter d = Saras födelsedag och m = hennes födelsemånad och söker de positiva heltalslösningarna till den diofantiska ekvationen

$$14d + 22m = 336 \Leftrightarrow 7d + 11m = 168.$$

Eftersom $\text{sgd}(7, 11) = 1|168$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(d, m) = (168d_0 + n \cdot 11, 168m_0 - n \cdot 7), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

där (d_0, m_0) är en lösning till hjälpekvationen $7d + 11m = 1$. Eftersom $\text{sgd}(7, 11) = 1$ kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 4 - 3 = 11 - 7 - (7 - 4) = 11 - 7 - (7 - (11 - 7)) = 7 \cdot (-3) + 11 \cdot 2.$$

Vi kan alltså välja $(d_0, m_0) = (-3, 2)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(d, m) = (-504 + 11n, 336 - 7n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De positiva heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{aligned} d > 0 \Leftrightarrow -504 + 11n > 0 \Leftrightarrow n > \frac{504}{11} = 45.81\ldots \\ m > 0 \Leftrightarrow 336 - 7n > 0 \Leftrightarrow n < \frac{336}{7} = 48 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow n = 46 \text{ eller } n = 47.$$

$n = 46$ ger $(d, m) = (2, 14)$ medan $n = 47$ ger $(d, m) = (13, 7)$. I det första fallet får vi fördelseåret $d \cdot m = 28$ och i det andra $d \cdot m = 91$. Eftersom Sara föddes under andra halvan av 1900-talet (och eftersom månad 14 inte existerar) är de första sex siffrorna i hennes personnummer 910713.

5. (a) Se Månsson & Nordbeck, Endimensionell analys, s. 103.

(b) Eftersom polynomet $p(z) = z^6 + 2z^4 - 9z^2 - 18$ har reella koefficienter är även $-i\sqrt{2}$ ett nollställe till $p(z)$. Enligt faktorsatsen är därför $g(z) = (z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2}) = z^2 + 2$ en faktor i $p(z)$. Polynomdivisionen $p(z)/g(z)$ och konjugatregeln ger nu direkt

$$p(z) = (z^2+2)(z^4-9) = (z^2+2)(z^2+3)(z^2-3) = (z^2+2)(z+i\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3}).$$

Ekvationen har alltså rötterna $z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, $z_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$ samt $z_{5,6} = \pm\sqrt{3}$.

6. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av graderna på noderna lika med 2 gånger antalet bågar. Om resterande antal noder är n och samtliga av dessa har grad g får vi därför

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + n \cdot g = 2 \cdot 15 \Leftrightarrow ng = 8.$$

Antalet noder är mindre än 15 dvs

$$5 + 3 + n < 15 \Leftrightarrow n < 7$$

Eftersom $ng = 8$ och $n < 7$ är de enda möjligheterna att $(n, g) = (1, 8)$, $(n, g) = (2, 4)$ eller $(n, g) = (4, 2)$. I samtliga tre fall är graden på noderna jämn och eftersom även de övriga noderna i grafen har jämn grad (2 resp 4) kan vi utnyttja Euler-Hierholzers sats: G innehåller en Eulercykel eftersom den är sammanhängande och samtliga noder har jämn grad.

(b) Vi beräknar först på hur många sätt vi kan fördela antalet flaggor på masterna. Om vi har 3 master och r flaggor av 9 ska användas söker vi antalet icke-negativa heltalslösningar till

$$x_1 + x_2 + x_3 = r, \quad x_i = \text{ antal flaggor i mast } i,$$

vilket ges av $\binom{3+r-1}{r} = \binom{r+2}{r}$. För varje sådan konfiguration ska vi sedan placera ut r st flaggor av 9 där ordningen (flaggornas position) är av betydelse dvs vi söker antalet permutationer av r element bland 9 vilket ges av $\frac{9!}{(9-r)!}$. Om Pelle använder alla flaggorna kan han alltså skicka

$$\binom{9+2}{9} \frac{9!}{(9-9)!} = \binom{11}{9} 9! = 19958400 \text{ olika signaler.}$$

Om Pelle istället får använda $1, 2, 3, ..., 9$ flaggor har han tillgång till

$$\sum_{r=1}^{9} \binom{r+2}{r} \frac{9!}{(9-r)!} = 44881659 \text{ olika signaler.}$$

Kuriosa: Det blir ganska många olika signaler. Om Pelle sänder en signal i timmen kan han hålla på i över 5000 år utan att behöva skicka samma signal två gånger. Man kan inte låta bli att undra om Pelle förstår att han egentligen inte behöver så många flaggor...