Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
Envariabelanalys 6 hp för D, E, T och Ö
Fredagen den 15 januari 2010
Skrivtid: 9.00-13.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}+2(1+x)\sin x}{e^x+\ln(1-x)-1}$. *(2p)*

   (b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx$. *(3p)*

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

3. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y''+2y'+y = 4xe^x, \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy' - 2y = \frac{x}{1+x}\ , \quad x > 0,$$

   för vilken $\lim_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x^2} = 0$. *(4p)*

5. (a) Härled derivatan av $\ln x$. *(1p)*

   (b) Härled formeln för partiell integration. *(1p)*

   (c) Beräkna den generaliserade integralen *(3p)*

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx\ .$$

6. I värmeingenjören Pelles välisolerade hus är inomhustemperaturen normalt 20°C. Om temperaturen utomhus är 0°C och Pelle stänger av värmen i huset sjunker temperaturen inomhus ner till 10°C på 15 timmar.

   En vinterdag när det är −20°C utomhus stänger Pelle av värmen i sitt hus. Hur lång tid tar det innan temperaturen inomhus sjunkit ner till den kritiska nivån 0°C ?

   Då Pelle stänger av värmen i sitt hus följer inomhustemperaturen Newtons avsvalningslag dvs vid varje tidpunkt förändras inomhustemperaturen med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan inomhus- och utomhustemperaturen vid denna tidpunkt. *(5p)*

Lycka till!

Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
Envariabelanalys 6 hp för D, E, T och ö
Fredagen den 15 januari 2010
Skrivtid: 9.00-13.00

Lösningsförslag

1. (a) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$)

$$\begin{aligned} e^x + \ln(1-x) - 1 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) + (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - 1 \\ &= -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t om ordning 3. Entydigheten ger även här

$$\begin{aligned} 1 - e^{2x} + 2(1+x)\sin x &= 1 - (1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)) + 2(1+x)(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)) \\ &= -\frac{5x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

Vi får till slut

$$\frac{1 - e^{2x} + 2(1+x)\sin x}{e^x + \ln(1-x) - 1} = \frac{-\frac{5x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{-\frac{5}{3} + \mathcal{O}(x)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)} \to 10 \text{ då } x \to 0.$$

(b) Substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0$, ger $dx = 2tdt$ och vi får

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx &= \int_1^2 \frac{1}{t^2(1+t)}2tdt = 2\int_1^2 \frac{1}{t(1+t)}dt = 2\int_1^2 \frac{1+t-t}{t(1+t)}dt \\ &= 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left[\ln|t| - \ln|1+t|\right]_1^2 = 2\ln\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 - 1) - (x^3 + x^2 - 1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

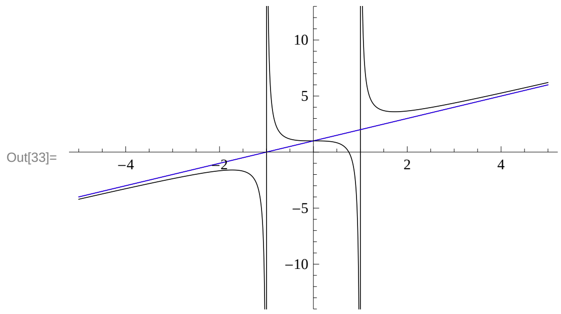
Sedan undersöker vi derivatans tecken:

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll för $x = \pm 1$ medan täljaren är skild från noll för dessa x har $f(x)$ de lodräta asymptoterna $x = \pm 1$. Pga att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuella sneda asymptoter:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \underbrace{x+1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{x}{x^2-1}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = \sqrt{3}$ med värdet $f(\sqrt{3}) = \frac{2+3\sqrt{3}}{2}$, en lokal maximipunkt i $x = -\sqrt{3}$ med värdet $f(-\sqrt{3}) = \frac{2-3\sqrt{3}}{2}$ samt en terasspunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = 1$. Kurvan $y = f(x)$ har de lodräta asymptoterna $x = \pm 1$ samt den sneda asymptoten $y = x + 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$L(y) = y'' + 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$L(y) = 4xe^x. \tag{1}$$

Homogen lösning: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ har nollställena $r_1 = r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $L(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom $4xe^x$ är en produkt av ett polynom och en exponentialfunktion inför vi en hjälpfunktion z och gör standardansatsen:

$$y_p = ze^x \Rightarrow y_p' = (z' + z)e^x \Rightarrow y_p'' = (z'' + 2z' + z)e^x.$$

Insättning i $L(y) = 4xe^x$ ger nu

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y = (z'' + 2z' + z + 2(z' + z) + z)e^x &= (z'' + 4z' + 4z)e^x = 4xe^x \\ \Leftrightarrow z'' + 4z' + 4z &= 4x \end{aligned} \tag{2}$$

Vi kan hitta en lösning till (2) genom ansatsen $z_p = ax + b \Rightarrow z_p' = a \Rightarrow z_p'' = 0$. Insättning i (2) ger

$$z'' + 4z' + 4z = 0 + 4a + 4(ax + b) = 4x \Leftrightarrow a = 1,\ b = -1.$$

och vi får $y_p = (x-1)e^x$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)e^{-x} + (x-1)e^x.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 - 1 = -1 \Leftrightarrow C_2 = 0 \\ y'(x) &= C_1 e^{-x} + (C_1 x + C_2)(-e^{-x}) + e^x + (x-1)e^x = C_1(1-x)e^{-x} + xe^x \\ &\Rightarrow y'(0) = C_1 = 1 \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = xe^{-x} + (x-1)e^x.$$

4. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ då } h \to 0 \end{aligned}$$

dvs $D(fg) = f'g + fg'$.

(b) Detta är en linjär differentialekvation:

$$xy' - 2y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{1+x} \ .$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$ ger:

$$y'\frac{1}{x^2} + y(-\frac{2}{x^3}) = D\left(y\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2(1+x)} \Leftrightarrow y\frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x^2(1+x)}dx.$$

Partialbråksuppdelning av integranden ger

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} = ... = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

och vi får

$$y\frac{1}{x^2} = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}\right)dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|1+x| + C = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{x} + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - x + Cx^2$$

där C är en godtycklig konstant. Villkoret $\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x^2} = 0$ då $x \to \infty$ ger nu

$$\frac{y(x)}{x^2} = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{x} + C = \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{1}\right) - \frac{1}{x} + C \to \ln 1 - 0 + C = C \Leftrightarrow C = 0$$

och den sökta lösningen är därför

$$y(x) = x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - x.$$

5. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = \ln x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x}$$

$$= \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x}}_{\to 1} \to 1\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ då } x \to 0$$

dvs $D\ln x = \frac{1}{x}$.

(b) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$D(Fg) = F'g + fg' = fg + fg' \Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg'$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

(c) Substitutionen $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$, ger $dx = \frac{1}{t}dt$ och vi får (med $R_1 = \ln R$)

$$\int_0^R \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx = \int_1^{\ln R}\frac{\ln(1+t)}{t}\frac{1}{t}dt = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t)\right]_1^{R_1} + \int_1^{R_1}\frac{1}{t(1+t)}dt$$

$$= \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t)\right]_1^{R_1} + \int_1^{R_1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t) + \ln|t| - \ln|1+t|\right]_1^{R_1}$$

$$= \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t) + \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^{R_1} = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{t}+1}\right)\right]_1^{R_1}$$

$$= -\frac{\ln(1+R_1)}{R_1} + \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{R_1}+1}\right) + \ln 2 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \to -0 + 0 + \ln 2 - (-\ln 2)$$

$$= 2\ln 2 \text{ då } R_1 \to \infty \text{ dvs då } R \to \infty.$$

6. Husets temperatur följer Newtons avsvalningslag dvs om $T(t)$ är husets inomhustemperatur vid tiden t har vi

$$T'(t) = k(T(t) - T_{\mathrm{u}}) \Leftrightarrow T'(t) - kT(t) = -kT_{\mathrm{u}}$$

där T_{u} är utomhustemperaturen och k en konstant. Detta är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som kan lösas på vanligt sätt genom multiplikation med den integrerande faktorn e^{-kt}:

$$T'(t)e^{-kt} + T(t)e^{-kt}(-k) = D(T(t)e^{-kt}) = -kT_{\mathrm{u}}e^{-kt} \Leftrightarrow T(t)e^{-kt} = -\int kT_{\mathrm{u}}e^{-kt}dt = T_{\mathrm{u}}e^{-kt} + C$$
$$\Leftrightarrow T(t) = Ce^{kt} + T_{\mathrm{u}}$$

där C är en konstant. Om begynnelsetemperaturen (dvs temperaturen då värmen stängs av i huset) är T_0 har vi:

$$T(0) = C + T_{\mathrm{u}} = T_0 \Leftrightarrow C = T_0 - T_{\mathrm{u}}$$

och vi får

$$T(t) = (T_0 - T_{\mathrm{u}})e^{kt} + T_{\mathrm{u}}.$$

Eftersom inomhustemperaturen sjunker från 20°C till 10°C på 15 timmar vid utomhustemperaturen 0°C får vi

$$T(15) = (20 - 0)e^{k \cdot 15} + 0 = 10 \Leftrightarrow k = -\frac{\ln 2}{15}.$$

Vid utomhustemperaturen −20°C kan vi nu bestämma tiden t_1 det tar innan inomhustemperaturen sjunkit från behagliga 20°C till 0°C:

$$T(t_1) = (20 - (-20))e^{-\frac{\ln 2}{15}t_1} - 20 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 15 \text{ timmar.}$$