Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren
0708-147198

Tentamensskrivning
MA2047 Algebra och diskret matematik
Torsdagen den 30 oktober 2014
Skrivtid: 15.00-19.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$2\cos^2 x + \sin x = 2 \ .$$

(b) Lös olikheten (*3p*)

$$|2+x| > |1-2x| + 2x \ .$$

2. (a) Utsagorna $A : x^2 > 4$, $B : x < -1$, $C : x \leq 2$ och $D : x < -2$.
Bestäm sanningsvärdet i följande utsagor: (*2p*)

$$\text{i. } A \Leftrightarrow \neg C \vee D, \qquad \text{ii. } (A \wedge B) \Rightarrow D.$$

(b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

för alla heltal $n \geq 1$. (*3p*)

3. (a) Hur många ”ord” med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i ordet

”MATTETENTA”

om varje bokstav ska användas en gång? Vad blir svaret om vi kräver att alla T:n ska stå intill varandra? (*2p*)

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^{n+1}, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 2. \end{cases}$$

4. Pokeringenjören Pelle är på casino i Las Vegas och spelar ihop lite pengar. Han vinner 50 mynt bestående av pennies (\$0.01), dimes (\$0.1) och quarters (\$0.25). Pelle hävdar att han har totalt \$3.00 medan casinoingenjören Sara menar att han bara har \$2.00. Är någon av totalsummorna möjlig? Bestäm i så fall också hur många mynt av varje sort han kan ha vunnit. (*5p*)

5. (a) Lös ekvationen

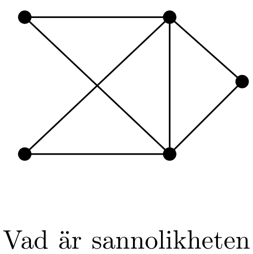
$$z^8 + 8z^4 + 16 = 0 \ .$$

Ange rötterna på rektangulär form. (*3p*)

(b) Relationen $\mathcal{R}$ på $A = \{2, 3, 4, 9, 18, 36\}$ definieras genom $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}$ är ett heltal.

Verifiera att $\mathcal{R}$ är en partiell ordningsrelation samt rita relationsgraf och Hassediagram. Bestäm även alla maximala, minimala, största och minsta element. (*2p*)

6. (a) Bestäm det kromatiska polynomet och det kromatiska talet till grafen G nedan. Innehåller G någon Eulercykel?



(*2p*)

(b) En vanlig tärning kastas 7 gånger. Vad är sannolikheten för att minst en sexa kommer upp? Vad är sannolikheten för att alla sex sidorna kommer upp? (*3p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Ekvationen är en andragradsekvation i $\sin x$:

$$2\cos^2 x + \sin x = 2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 2$$
$$\Leftrightarrow \sin x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ eller } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Lösningarna ges nu av:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi,$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi.$$

(b) Vi har:

$$|2+x| = \begin{cases} 2+x, & x \geq -2 \\ -(2+x), & x < -2 \end{cases} \qquad |1-2x| = \begin{cases} 1-2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ -(1-2x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

och vi löser därför olikheten i tre intervall:

x	-2	$\frac{1}{2}$	
	$\lvert 2+x\rvert > \lvert 1-2x\rvert + 2x$	$\lvert 2+x\rvert > \lvert 1-2x\rvert + 2x$	$\lvert 2+x\rvert > \lvert 1-2x\rvert + 2x$
	$\Leftrightarrow -(2+x) > 1-2x+2x$	$\Leftrightarrow 2+x > 1-2x+2x$	$\Leftrightarrow 2+x > -(1-2x)+2x$
	$\Leftrightarrow x < -3$	$\Leftrightarrow x > -1$	$\Leftrightarrow x < 1$

dvs

$$|2+x| > |1-2x| + 2x \Leftrightarrow x < -3 \text{ eller } -1 < x < 1.$$

2. (a) Vi har $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$ vilket är precis vad (i) säger och den är därför sann. Om $x^2 > 4$ och $x < -1$ så måste $x < -2$ dvs även (ii) är sann.

(b) Vi gör ett induktionsbevis.

$$\text{Påstående: } \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ för alla heltal } n \geq 1.$$

i. För $n = 1$ har vi:

$$\text{VL}_{n=1} = 1$$
$$\text{HL}_{n=1} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = \text{VL}_{n=1}$$

ii. Antag att påståendet är sant för $n = p$ (induktionsantagandet (i.a.)). För $n = p+1$ får vi då

$$\begin{aligned}\text{VL}_{n=p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 \\ &\overset{\text{i.a}}{=} \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2 + 4(p+1)^3}{4} = \frac{(p+1)^2(p^2+4(p+1))}{4} \\ &= \frac{(p+1)^2(p^2+4p+4))}{4} = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} = \frac{(p+1)^2((p+1)+1)^2}{4} \\ &= \text{HL}_{n=p+1}\end{aligned}$$

Sammanfattning: Påståendet är sant för $n = 1$ och om det är sant för $n = p$ så är det också sant för $n = p+1$. Enligt Induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

3. (a) Om alla 10 bokstäver varit olika hade vi kunna bilda 10! olika ord men eftersom vi har 4 T:n, 2 E:n och 2 A:n, och dessa kan permuteras på 4!, 2! respektive 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt $\frac{10!}{4!2!2!} = 37800$ olika ord.

Om alla T:n måste stå intill varandra kan vi betrakta dem som en enhet: $\mathcal{T}$ = TTTT och vi får då totalt 7 bokstäver ($\mathcal{T}$,A,A,E,E,M,N) vilket ger $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ olika ord.

(b) Den allmänna lösningen ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation (HL $= 0$) och y_{pn} *en* partikulärlösning till den givna differensekvationen.

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$ är $r_1 = 3$ och $r_2 = 2$ vilket ger

$$y_{hn} = C_1 3^n + C_2 2^n.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
2 är en enkelrot till den karaktäristiska ekvationen och därför fungerar inte standardansatsen $A2^n$ eftersom den är en del av y_{hn}. Vi gör därför istället ansatsen $y_{pn} = An2^n$. Insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n &= A(n+2)2^{n+2} - 5A(n+1)2^{n+1} + 6An2^n \\ &= A((4 - 5\cdot 2 + 6)n + 8 - 5\cdot 2)2^n = -2A2^n = 2^{n+1} \Leftrightarrow A = -1. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 3^n + C_2 2^n - n2^n.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} &y_0 = C_1 3^0 + C_2 2^0 - 0\cdot 2^0 = C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 - C_1 \\ &y_1 = C_1 3^1 + C_2 2^1 - 1\cdot 2^1 = 3C_1 + 2C_2 - 2 = 3C_1 + 2(1 - C_1) - 2 = C_1 = 2 \Rightarrow C_2 = -1 \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y_n = 2\cdot 3^n - 2^n(n+1).$$

4. Vi sätter $p =$ antal pennies, $d =$ antal dimes och $q =$ antal quarters och söker de icke-negativa heltalslösningarna till

$$\begin{cases} p + 10d + 25q = s \\ p + d + q = 50 \end{cases}$$

där $s = 300$ eller $s = 200$. Subtraherar vi den andra ekvationen från den första får vi den Diofantiska ekvationen $9d + 24q = s - 50$. Eftersom $\text{sgd}(9, 24) = 3$ har ekvationen heltalslösning omm $3|(s-50)$ vilket är sant om $s = 200$ men inte sant om $s = 300$. Pelle kan alltså inte ha spelat ihop \$3.00.

Vi behöver därför endast betrakta fallet då $s = 200$ och dividerar ekvationen med $\text{sgd}(9, 24) = 3$ för att få en enklare ekvation:

$$3d + 8q = 50. \tag{1}$$

Den allmänna lösningen till (1) ges av $(d, q) = (50d_0 - n\cdot 8, 50q_0 + n\cdot 3)$ där (d_0, q_0) är en lösning till hjälpekvationen $3d + 8q = 1$ och om vi inte ser den enkla lösningen direkt kan vi hitta den med hjälp av Euklides algoritm:

$$\left.\begin{aligned} 8 = 2\cdot 3 + 2 \\ 3 = 1\cdot 2 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 2\cdot 3) = 3\cdot(3) + 8\cdot(-1)$$

Vi kan alltså välja $(d_0, q_0) = (3, -1)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(d, q) = (150 - 8n, -50 + 3n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De icke-negativa heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{aligned} d \geq 0 \Leftrightarrow 150 - 8n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{150}{8} = 18.75 \\ q \geq 0 \Leftrightarrow -50 + 3n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{50}{3} = 16.666\ldots \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow n = 18 \text{ eller } n = 17$$

$n = 18$ ger $(d, q) = (6, 4)$ medan $n = 17$ ger $(d, q) = (14, 1)$. I det första fallet får vi $p = 50 - d - q = 40$ och i det andra $p = 35$ dvs båda varianterna är möjliga. Pelle har alltså spelat ihop 40 pennies, 6 dimes och 4 quarters eller 35 pennies, 14 dimes och 1 quarter.

5. (a) Ekvationen är en andragradsekvation i z^4 och 1:a kvadreringsregeln ger direkt:

$$z^8 + 8z^4 + 16 = (z^4 + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4$$

Den binomiska ekvationen $z^4 = -4$ löser vi enklast genom att går över till polär form:

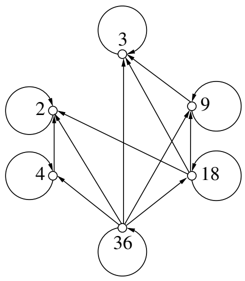
$$z^4 = (re^{i\theta})^4 = r^4 e^{i4\theta} = -4 = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

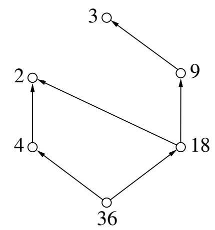
Lösningarna till ekvationen ges alltså av $z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$ dvs

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} = 1 + i, \\ z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} = -1 + i, \\ z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}} = -1 - i, \\ z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}} = 1 - i. \end{cases}$$

(b)
- $\dfrac{x}{x} = 1$ (heltal) för alla $x \in A$ dvs $\mathcal{R}$ är reflexiv.
- $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$ där minustecknet utgår eftersom $x, y \in A \subset \mathbb{Z}^+$ dvs $x = y$ och $\mathcal{R}$ är därför antisymmetrisk.
- $\dfrac{x}{y} = m$ och $\dfrac{y}{z} = n$, där m och n är positiva heltal, ger $\dfrac{x}{z} = \dfrac{x}{\frac{y}{n}} = n\dfrac{x}{y} = nm$ som också är ett heltal dvs $\mathcal{R}$ är transitiv.

Relationen $\mathcal{R}$ är alltså en partiell ordningsrelation. Nedan visas relationsgrafen och Hassediagrammet.





- 2 och 3 är inte relaterade till några element dvs de är maximala element.
- 36 är relaterat till alla element och är det enda minimala elementet.
- Det finns inget element som alla andra element är relaterade till dvs största element saknas.
- Inget element är relaterat till 36 dvs det är minsta element.

6. (a) Det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ = antalet sätt att färga G med λ färger. Man inser direkt att för att optimera detta antal ska vi börja färga en av de två noderna i mitten som är förbundna med en vertikal båge. Låt oss börja med den övre av dessa. Har vi λ färger kan noden färgas på λ olika sätt. Den undre noden kan då färgas på $\lambda - 1$ olika sätt och de resterande tre noderna på vardera $\lambda - 2$ olika sätt. Multiplikationsprincipen ger nu

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3.$$

Eftersom $P_G(0) = P_G(1) = P_G(2) = 0$ och $P_G(3) = 6 \neq 0$ är 3 det minsta antalet färger som krävs för att färga G dvs det kromatiska talet $\chi(G) = 3$.

Grafen G är sammanhängande och alla noder har jämn grad. Enligt Euler-Hierholzers sats har därför G en Eulercykel.

(b) Enligt multiplikationsprincipen finns totalt 6^7 olika utfall när vi kastar en tärning 7 gånger. Antalet utfall med minst en 6:a = totala antalet utfall − antalet utfall utan en 6:a = $6^7 - 5^7$. Sannolikheten för att vi får minst en 6:a ges alltså av

$$\frac{6^7 - 5^7}{6^7} \approx 0.72$$

Att alla sidorna kommer upp någon gång är ekvivalent med att en av sidorna att kommer upp två gånger. Det finns 7! olika sätt att permutera 7 olika objekt men här är 2 objekt lika dvs antalet olika sätt att få upp alla sidorna och t ex 1:an två gånger är $7!/2!$. Samma sak gäller om $2, 3, ..., 6$ kommer upp två gånger. Vi får alltså $6 \cdot 7!/2!$ gynnsamma utfall och sannolikheten för att alla sidor kommer upp är därför

$$\frac{6 \cdot \frac{7!}{2!}}{6^7} \approx 0.054$$