**Högskolan i Halmstad**
**IDE/MPE-lab**
Mikael Hindgren

**Tentamensskrivning**
Envariabelanalys 4 p för D, E, T och Ö
Torsdagen den 20 april 2006
Skrivtid: 9.00-13.00

***Inga hjälpmedel.*** *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$. *(2p)*

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin x)-\arctan x}{\sin x - x}$. *(3p)*

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = e^{-x}\frac{x^2}{(x-8)^2}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

3. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 4xe^{-x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

4. (a) Härled derivatan av $e^x$. Standardgränsvärden får utnyttjas utan bevis. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = \frac{y^2}{x(x^2-1)}, \quad x > 1,$$

   för vilken $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$. *(4p)*

5. (a) Utred konvergensen hos $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *(2p)*

   (b) Undersök konvergensen hos

$$\text{i)} \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{och} \qquad \text{ii)} \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

   Beräkna vid konvergens integralens värde. *(3p)*

6. (a) Formulera medelvärdessatsen och förklara innebörden av den med hjälp av en figur. *(1p)*

   (b) Staketingenjören Sara vill testa den matematiska förmågan hos sin lärling Pelle. Hon har placerat ut $n$ stycken svarta staketstolpar längs en rät linje. Stolparnas inbördes avstånd kan vara olika. Pelles uppgift är att placera en vit stolpe någonstans i raden av svarta stolpar och därefter dra staketträd från varje svart stolpe direkt till den vita. Var ska Pelle placera sin vita stolpe för att minimera åtgången av tråd? *(4p)*

*Lycka till!*

**Högskolan i Halmstad**
**IDE/MPE-lab**
Mikael Hindgren

**Tentamensskrivning**
Envariabelanalys 4 p för D, E, T och Ö
Torsdagen den 20 april 2006
Skrivtid: 9.00-13.00

# Lösningsförslag

1. (a) Med hjälp av partiell integration får vi

$$\int_0^1 e^{x^2}x^3dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}2x\cdot x^2dx = \frac{1}{2}\left(\left[e^{x^2}x^2\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x^2}2xdx\right) = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}x^2 - e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(b) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren:

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x = -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t om ordning 3. Pga entydigheten hos Maclaurins formel får vi ($\sin x \to 0$ då $x \to 0$):

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) - \arctan x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) - \frac{\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right) \\ &= -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).\end{aligned}$$

Vi får till slut

$$\frac{\arctan(\sin x) - \arctan x}{\sin x - x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)} \to 1 \text{ då } x \to 0.$$

*Anmärkning:* Man kan också beräkna gränsvärdet genom att tillämpa medelvärdessatsen på den deriverbara funktionen $f(x) = \arctan x$. Enligt denna sats finns det ett tal $\xi$ mellan $x$ och $\sin x$ sådant att

$$\frac{f(\sin x) - f(x)}{\sin x - x} = \frac{\arctan(\sin x) - \arctan x}{\sin x - x} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$$

Eftersom $\sin x \to 0$ då $x \to 0$ följer det att också $\xi \to 0$ då $x \to 0$ dvs gränsvärdet är $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$. $*$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x) = \frac{e^{-x}x^2}{(x-8)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(-e^{-x}x^2 + e^{-x}2x)(x-8)^2 - e^{-x}x^2 2(x-8)}{(x-8)^4} = -\frac{e^{-x}x(x-4)^2}{(x-8)^3} \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 4.\end{aligned}$$

Sedan undersöker vi derivatans tecken och här tar vi även med punkten $x = 8$ där $f(x)$ och $f'(x)$ inte är definierade:

| $x$ | | 0 | | 4 | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | $*$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f(0)$ | $\nearrow$ | $f(4)$ | $\nearrow$ | $*$ | $\searrow$ |

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$:

*Lodräta:*

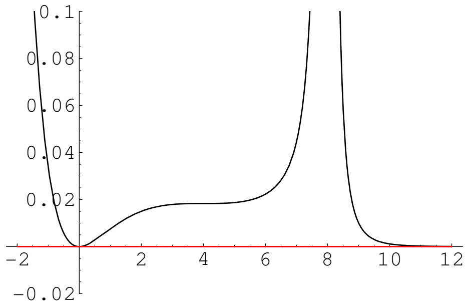
$$f(x) = \frac{e^{-x}x^2}{(x-8)^2} \to +\infty \text{ då } x \to 8^{\pm}$$

*Vågräta/sneda:*

$$f(x) = \frac{e^{-x}x^2}{(x-8)^2} \to 0 \text{ då } x \to +\infty \qquad \leftarrow \text{ vågrät asymptot}$$

$$k: \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-x}x^2}{(x-8)^2} = \frac{e^{-x}}{\left(1-\frac{8}{x}\right)^2} \to \infty \text{ då } x \to -\infty \qquad \leftarrow \text{ saknar sned asymptot}$$

*Sammanfattning:* Funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = 0$ samt en lokal terasspunkt i $x = 4$ med värdet $f(4) = e^{-4}$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 8$ och den vågräta asymptoten $y = 0$ då $x \to +\infty$ men saknar asymptot då $x \to -\infty$.




Figur 1: Kurvan $y = \frac{e^{-x}x^2}{(x-8)^2}$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där $y_h$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$L(y) = y'' + 2y' - 3y = 0$$

och $y_p$ en partikulärlösning till

$$L(y) = 4xe^{-x}. \tag{1}$$

*Homogen lösning:* Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1)$ har nollställena $r_1 = -3$ och $r_2 = 1$ och den allmänna lösningen till $L(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

*Partikulärlösning:* Eftersom $4xe^{-x}$ är en produkt av ett polynom och en exponentialfunktion så inför vi en hjälpfunktion $z$ och gör standardansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i $L(y) = 4xe^{-x}$ ger nu

$$y'' + 2y' - 3y = (z'' - 4z)e^{-x} = 4xe^{-x} \Leftrightarrow z'' - 4z = 4x. \tag{2}$$

Ekvation (2) har en lösning $z_p = ax + b$ och insättning ger:

$$0 - 4(ax + b) = 4x \Leftrightarrow a = -1,\ b = 0.$$

Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - xe^{-x}.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 - C_1 \\ y'(x) &= -3C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - e^{-x} + xe^{-x} \\ &\Rightarrow y'(0) = -3C_1 + C_2 - 1 = -3C_1 + 1 - C_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 1. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = e^x - xe^{-x}.$$

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt $x$ ges av

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = e^x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} \to e^x \cdot 1 = e^x \text{ då } x \to 0$$

dvs $De^x = e^x$.

(b) Detta är en separabel differentialekvation:

$$y' = \frac{y^2}{x(x^2-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}y' = \frac{1}{x(x^2-1)} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} = \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(x^2-1)}dx$$
$$= \int \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \ln|x| + C \underset{x>1}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \ln x + C$$
$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) - C}$$

där $C$ är en godtycklig konstant. Eftersom

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right) \to \ln 1 = 0 \text{ då } x \to \infty$$

har vi att

$$y(x) \to -\frac{1}{C} = 1 \text{ då } x \to \infty \Leftrightarrow C = -1$$

och den sökta lösningen är

$$y(x) = \frac{1}{1+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}.$$

5. (a) Vi beräknar den generaliserade integralen för olika värden på $\alpha$:

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha = 1: & [\ln x]_1^R = \ln R - \ln 1 = \ln R \to \infty \text{ då } R \to \infty \\ \alpha \neq 1: & \left[-\frac{1}{\alpha-1}x^{-(\alpha-1)}\right]_1^R = -\frac{R^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha > 1. \\ \infty & \text{då } R \to \infty \text{ om } \alpha < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Resultatet visar att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent omm } \alpha > 1.$$

(b) För $0 < x \leq 1$ är

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{x\sqrt{1+1}} < \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

och eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ är divergent är också (i) divergent. För stora $x$ är

$$0 < \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{x\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent är (ii) konvergent.
Variabelsubstitutionen $t = \sqrt{x^2+1}$, $x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{t^2-1}$, $t > 0 \Rightarrow dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$ ger

$$\int_1^R \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{R'=\sqrt{R^2+1}} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int_{\sqrt{2}}^{R'} \frac{dt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{R'} \frac{dt}{(t+1)(t-1)}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{R'} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}\left[\ln(t-1) - \ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{R'} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{R'}$$
$$= \ln\left(\frac{R'-1}{R'+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

Eftersom

$$\ln\left(\frac{R'-1}{R'+1}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{1}{R'}}{1+\frac{1}{R'}}\right) \to \ln 1 = 0 \text{ då } R' \to \infty \text{ dvs då } R \to \infty$$

får vi

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)^2 = \ln(\sqrt{2}+1).$$

(a) Se Persson & Böiers, *Analys i en varabel*, s. 202-204.

(b) Vi kan lägga in en tänkt $x$-axel så att de $n$ svarta stolparna befinner sig i punkterna $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ med $x_1$ i origo. Om Pelle placerar den vita stolpen i punkten $x$ mellan $x_k$ och $x_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, så ges den totala trådlängden av den kontinuerliga funktionen

$$\begin{aligned} l(x) &= \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| = x - x_1 + x - x_2 + \ldots + x - x_k + x_{k+1} - x + \ldots + x_n - x \\ &= kx - (n-k)x + \sum_{i=k+1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{k} x_i = (2k-n)x + C, \quad 0 \le x \le x_n, \end{aligned}$$

där $C$ är oberoende av $x$ (konstant). $l(x)$ är deriverbar överallt utom i punkterna $x_i$, $i = 1, 2, .., n$ dvs där stoplarna står. Minimum kan bestämmas med hjälp av derivatan $l'(x) = 2k-n$ som är konstant i varje delintervall $(x_k, x_{k+1})$. Vi ser direkt att för $k < n/2$ är $l' < 0$ och för $k > n/2$ är $l' > 0$.

Om $n$ är ett jämnt tal så antar $l$ sitt minsta värde då $l' = 0 \Leftrightarrow k = n/2$. Detta innebär att Pelle ska placera sin vita stolpe så att han har lika många svarta stolpar på varje sida om den vita dvs $x \in (x_{n/2}, x_{n/2+1})$. Eftersom $l' = 0$ för alla $x$ i detta intervall är $l$ konstant där och därför spelar det ingen roll var i intervallet han placerar stolpen.

Om $n$ är ett udda tal så är $n/2$ inget heltal. Sätter vi $k =$ närmaste heltal nedåt blir $l' < 0$ och använder vi närmaste heltal uppåt blir $l' > 0$. Eftersom $l(x)$ är kontinuerlig antas minsta värdet i den punkt där $l'$ ändrar tecken. Om $n$ är udda så ska Pelle alltså ta sikte på den svarta stolpe som har lika många stoplar till höger som till vänster om sig och placera sin vita stolpe så nära denna som möjligt.