Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
Envariabelanalys 6 hp för D, E, T och Ö
Fredagen den 16 januari 2009
Skrivtid: 9.00-13.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Härled derivatan av e^x. *(1p)*

   (b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$. *(2p)*

   (c) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-(1+x)\cos x}{e^{x^2}x-\arctan x}$. *(2p)*

2. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y''-2y'+y=2e^x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2+3}{x^2-3}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

4. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$(1+x^2)y'=x^2y^2, \quad x>0,$$

   för vilken $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} y(x)=1$. *(4p)*

5. (a) Utred konvergensen hos $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$. *(2p)*

   (b) Undersök om någon av de generaliserade integralerna

$$\text{(i)} \int_1^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx$$

   är konvergent. Beräkna vid konvergens integralens värde. *(3p)*

6. Skogsägarna Pelle och Sara har varit ute i sin skog och sågat ner en stor gran. De håller nu på med att såga till några brädor av stockarna från granen.

   (a) Då Pelle och Sara sågar läcker det ut sågspån med hastigheten 1 dm^3/min genom ett litet hål vid sågens ena ände. Sågspånen lägger sig i en konformad liten hög på marken. Spånhögen har hela tiden formen av en kon med höjden lika stor som bottenytans radie. Hur snabbt ökar spånhögens höjd vid den tidpunkt då höjden är 2 dm?
   (Volymen av en kon med bottenradien r och höjden h är $\frac{\pi r^2 h}{3}$.) *(2p)*

   (b) Pelle behöver en styv bräda och funderar på hur han ska såga stocken för att få till den styvaste brädan. Sara, som har en brädingenjörsexamen, berättar att styvheten på en bräda med rektangulärt tvärsnitt är proportionell mot tvärsnittets bredd samt mot tvärsnittets längd i kubik. Hur ska då Pelle såga för att utnyttja stocken maximalt och samtidigt få en så styv bräda som möjligt? Ange t ex svaret som förhållandet mellan tvärsnittets längd och bredd. *(3p)*

Lycka till!

Högskolan i Halmstad
IDE/MPE-lab
Mikael Hindgren

Tentamensskrivning
Envariabelanalys 6 hp för D, E, T och Ö
Fredagen den 16 januari 2009
Skrivtid: 9.00-13.00

Lösningsförslag

1. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = e^x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} \to e^x \cdot 1 = e^x \text{ då } x \to 0$$

dvs $De^x = e^x$.

(b) Substitutionen $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$, ger $dx = e^t dt$ och vi får

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{e^t(1+t)}e^t dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln 2.$$

Anm: Den uppmärksamme ser att integranden är av typen $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ och får direkt

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^e \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x}dx = [\ln|1+\ln x|]_1^e = \ln 2. \qquad *$$

(c) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($x^2 \to 0$ då $x \to 0$)

$$e^{x^2}x - \arctan x = (1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4))x - (x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)) = \frac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t om ordning 3:

$$\begin{aligned}1 + \ln(1+x) - (1+x)\cos x &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - (1+x)(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)) \\ &= \frac{5x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).\end{aligned}$$

Vi får till slut

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-(1+x)\cos x}{e^{x^2}x - \arctan x} = \frac{\frac{5x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{\frac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{\frac{5}{6} + \mathcal{O}(x)}{\frac{4}{3} + \mathcal{O}(x^2)} \to \frac{5}{8} \text{ då } x \to 0.$$

2. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$L(y) = y'' - 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$L(y) = 2e^x. \tag{1}$$

Homogen lösning: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 - 2r + 1 = (r+1)^2$ har nollställena $r_1 = r_2 = 1$ och den allmänna lösningen till $L(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^x.$$

Partikulärlösning: Eftersom $2e^x$ är en produkt av ett polynom och en exponentialfunktion inför vi en hjälpfunktion z och gör standardansatsen:

$$y_p = ze^x \Rightarrow y_p' = (z' + z)e^x \Rightarrow y_p'' = (z'' + 2z' + z)e^x.$$

Anm: Den enklare ansatsen $y_p = Ae^x$ är en lösning till den homogena ekvationen $L(y) = 0$ och fungerar därför inte i det här fallet. $*$

Insättning i $L(y) = 2e^x$ ger nu

$$y'' - 2y' + y = (z'' + 2z' + z - 2(z' + z) + z)e^x = z''e^x = 2e^x \Leftrightarrow z'' = 2. \tag{2}$$

Integrering 2 gånger ger en lösning $z = x^2$ till (2) dvs $y_p = x^2 e^x$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = y_h + y_p = (C_1 x + C_2 + x^2)e^x.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 1 \\ y'(x) &= (C_1 + 2x)e^x + (C_1 x + C_2 + x^2)e^x = (C_1 + 1 + (C_1 + 2)x + x^2)e^x \\ &\Rightarrow y'(0) = C_1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

dvs $C_1 = -1$. Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (1 - x + x^2)e^x.$$

3. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(6x^2 - 2x)(x^2 - 3) - (2x^3 - x^2 + 3)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2(x + 3)(x - 3)}{(x^2 - 3)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \pm 3. \end{aligned}$$

Sedan undersöker vi derivatans tecken:

x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll för $x = \pm\sqrt{3}$ medan täljaren är skild från noll för dessa x har $f(x)$ de lodräta asymptoterna $x = \pm\sqrt{3}$. Pga att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuella sneda asymptoter:

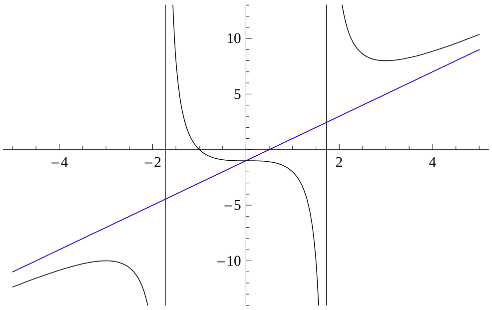
$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3} = \underbrace{2x - 1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{6x}{x^2 - 3}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = 8$, en lokal maximipunkt i $x = -3$ med värdet $f(-3) = -10$ samt en terasspunkt i $x = 0$ med värdet $f(0) = -1$. Kurvan $y = f(x)$ har de lodräta asymptoterna $x = \pm\sqrt{3}$ samt den sneda asymptoten $y = 2x - 1$ då $x \to \pm\infty$.

4. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ då } h \to 0 \end{aligned}$$

dvs $D(fg) = f'g + fg'$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3}$.

(b) Detta är en icke-linjär differentialekvation och vi ser direkt att den är separabel:

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)y' &= x^2y^2 + y \cdot 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x - \arctan x + C \\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{\arctan x - x - C}
\end{aligned}
$$

där C är en godtycklig konstant. Villkoret $y(x) \to 1$ då $x \to 0^+$ ger nu

$$
y(x) = \frac{1}{\arctan x - x - C} \to \frac{1}{\arctan 0 - 0 - C} \to -\frac{1}{C} \Leftrightarrow C = -1
$$

och den sökta lösningen är därför

$$
y(x) = \frac{1}{\arctan x - x + 1}.
$$

5. (a) Vi beräknar den generaliserade integralen för olika värden på α:

$$
\int_{\varepsilon>0}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \alpha = 1\colon\ [\ln x]_\varepsilon^1 = \ln 1 - \ln \varepsilon \to \infty \text{ då } \varepsilon \to 0^+ \\ \alpha \neq 1\colon\ \left[-\frac{1}{\alpha-1} x^{-(\alpha-1)}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \to \begin{cases} \infty & \text{då } \varepsilon \to 0^+ \text{ om } \alpha > 1. \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{då } \varepsilon \to 0^+ \text{ om } \alpha < 1. \end{cases} \end{cases}
$$

Resultatet visar att

$$
\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent omm } \alpha < 1.
$$

(b) För $x > 1$ är

$$
0 \le \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)} \le \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \text{ och } \frac{1}{2x^{3/2}} = \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{x})} \le \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}
$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ är konvergent vilket medför att också (i) är det. Däremot är $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$ och därför även (ii) divergent. Eftersom (iii) är summan av (i) och (ii) och inte båda är konvergenta är också (iii) divergent. Integralen (i) är enkel att beräkna med hjälp av substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t > 0$. Vi får $dx = 2tdt$ och

$$
\begin{aligned}
\int_1^R \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)} dx &= \int_0^{\sqrt{R}} \frac{1}{t^2(t+1)} \cdot 2tdt = 2\int_0^{R_1} \frac{1}{t(t+1)} dt = 2\int_0^{R_1} \frac{1+t-t}{t(t+1)} dt \\
&= 2\int_0^{R_1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left[\ln|t| - \ln|1+t|\right]_0^{R_1} \\
&= 2\ln\left(\frac{R_1}{1+R_1}\right) - 2\ln\left(\frac{1}{1+1}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{R_1}}\right) + 2\ln 2 \to 2\ln 2 \text{ då } R_1 \to \infty.
\end{aligned}
$$

6. (a) Eftersom spånhögens höjd $h(t)$ hela tiden är lika stor som bottenytans radie så ges spånvolymen vid tiden t av

$$V(t) = \frac{\pi h(t)^3}{3}.$$

Deriverar vi nu båda leden med avseende på t så får vi

$$V'(t) = \frac{\pi 3 h(t)^2 h'(t)}{3} = \pi h(t)^2 h'(t) \Leftrightarrow h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi h(t)^2}.$$

Om vi kallar den aktuella tidpunkten för t_1 så är $V'(t_1) = 1$ dm^3/min och $h(t_1) = 2$ dm vilket ger $h'(t_1) = \frac{1}{\pi 2^2}$. Höjden på den lilla spånhögen ökar alltså vid denna tidpunkt med $\frac{1}{4\pi}$ dm/min ≈ 0.8 cm/min.

(b) Kallar vi brädans styvhet för S så gäller enligt Sara sambandet $S = kl^3 b$ där k är en proportionalitetskonstant, l tvärsnittets längd och b dess bredd. Eftersom $b = \sqrt{D^2 - l^2}$, där D är stockens minsta diameter, så beskriver funktionen

$$S(l) = k\sqrt{D^2 - l^2}\, l^3, \ 0 \le l \le D,$$

brädans styvhet. Eftersom $S(l)$ är en kontinuerlig funktion och intervallet $I = [0, D]$ slutet och begränsat så antar $S(l)$ sitt största och minsta värde i I. Eftersom också derivatan

$$S'(l) = k\left(\frac{-2l}{2\sqrt{D^2 - l^2}} l^3 + \sqrt{D^2 - l^2}\, 3l^2\right) = k\left(\frac{-l^4 + \left(D^2 - l^2\right) 3l^2}{\sqrt{D^2 - l^2}}\right) = kl^2 \frac{3D^2 - 4l^2}{\sqrt{D^2 - l^2}}$$

existerar för alla $l \in]0, D[$ så antar $S(l)$ sitt största respektive minsta värde antingen i någon av intervallets ändpunkter eller i en inre punkt där derivatan är noll:

$$S'(l) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ eller } 3D^2 - 4l^2 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{\sqrt{3}D}{2}.$$

(Nollstället $l = -\frac{\sqrt{3}R}{2}$ ligger utanför funktionens definitionsmängd.) Vi har nu

$$S(0) = 0, \qquad S(D) = 0, \qquad S(\frac{\sqrt{3}D}{2}) = k\sqrt{D^2 - \left(\frac{\sqrt{3}D}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{3}D}{2}\right)^3 > 0.$$

Styvheten antar alltså sitt största värde för $l = \frac{\sqrt{3}D}{2}$. Förhållandet mellan tvärsnittets längd och bredd blir då

$$\frac{l}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}D}{2}}{\sqrt{D^2 - \left(\frac{\sqrt{3}D}{2}\right)^2}} = \sqrt{3}.$$

Anm: Styvhetens största värde är alltså $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}kD^4}{16}$.