实验四 相位估计

一．实验目的

（1）修改 N 的长度观察相位变化

（2）修改周期 k 的值，观察非整周期的现象

（3）修改噪声误差，观察标准差的变化

（4）用 DFT 估计信号初相（整周期和非整周期）效果对比

（5）用矩估计和最小二乘法估计信号初相

二．实验内容

（1）：修改 phase_est_top.m 中的参数

N=256 时，相位的标准差为 est_std =5.0467，大约在 5 附近

N=512 时，相位的标准差为 est_std =3.6236，大约在 3.5 附近

N=1024 时，相位的标准差为 est_std = 2.6001，大约在 2.6 附近

N=4096 时，相位的标准差为 est_std =1.2545，大约在 1.25 附近

N=16384 时，相位的标准差为 est_std = 0.6535，大约在 0.65 附近

N=65536 时，相位的标准差为 est_std = 0.3214，大约在 0.32 附近

可以观察到当 N 即信号长度不断增大时，估计出来的相位标准差逐渐减小，这是因为最大似然估计的性质：渐进无偏估计。其描述如下：

无偏性

设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta}) = \theta$，就称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计，否则称为有偏估计。若 $\lim_{N\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$，就称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐近无偏估计。

当信息量趋于无穷大时，估计出来的相位的均值等于相位的确切值，该性质呈现渐进有效性，当 N 逐渐增大时，得到的 E(θ)越接近真实值，标准差也会越来越小。

（2）：修改 phase_est_top.m 中的参数

k=1 时，相位均值为 29.4018

k=1.1 时，相位均值为 25.0284

K=1.2 时，相位均值为 24.3153

K=1.3 时，相位均值为 28.3989

K=1.4 时，相位均值为 31.5320

K=1.5 时，相位均值为 29.9997

K=1.6 时，相位均值为 26.6822

K=1.7 时，相位均值为 26.0602

K=1.8 时，相位均值为 28.6658

K=1.9 时，相位均值为 31.1600

可以观察到当进行非整周期采样时，相位的均值变化幅度大约在 5 度内。

（3）修改 phase_est_top.m 中的参数

当 sigmax2=1 时，相位标准差为：5.0323，大约在 5 左右

当 sigmax2=2 时，相位标准差为： 6.9188，大约在 7 左右

当 sigmax2=3 时，相位标准差为： 8.8397，大约在 9 左右

当 sigmax2=4 时，相位标准差为： 10.3807，大约在 10 左右

可以观察到随着噪声的方差提升，相位的标准差也逐渐升高，表示所估计的相位值的有效性下降，稳定性变差。通过提高噪声的方差，使得信噪比降低，得到的估计值的准确度降低。噪声的方差增大意味着噪声变得更加不稳定，高斯白噪声服从正态分布，方差变大意味着噪声不稳定，反映到正态分布曲线上是曲线被横向拉伸，取到其他均值噪声的概率增大，使得噪声的干扰更强。

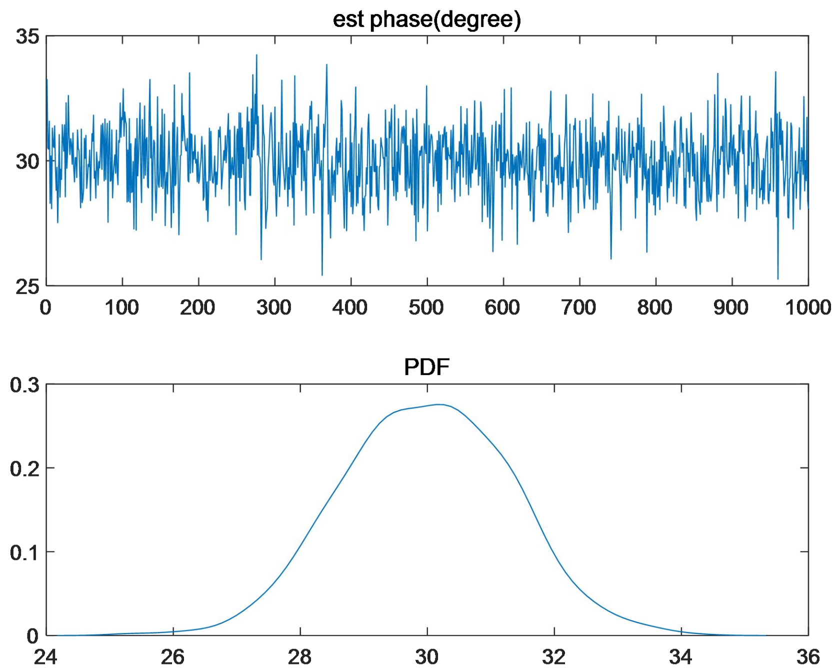
（4）利用 DFT 估计信号初相，代码如下：

DFT 思路为:对收到的 zn 进行 FFT 快速傅里叶变换，因为给定频率 f0，所以只要根据频谱中对应的 f0，求出相应的相位，即可得到一次蒙特卡洛仿真所估计的 φ 值，1000 次蒙特卡洛仿真取均值得到最后的估计值。

程序为：DFT.m

当 k 为整数时，即为整周期采样时，估计效果可行，下图为 k=1，N=256 时的估计结果，与最大似然估计估计结果相似。并也随着 N 增大，标准差减少，更稳定。

```
est_mean =

   29.9939


est_var =

   23.8265


est_std =

    4.8812
```



但当 k 不是整数时，即非整周期时，其效果较整周期差很多。仿真结果如下：

当 k=1.1 时，估计值为 45.3097

当 k=1.2 时，估计值为 61.3357

当 k=1.3 时，估计值为 80.0825

可见，当非整周期采样时，其估计结果与实际结果相差太多，而且标准差也增大，呈现不稳定的状况。原因分析如下：

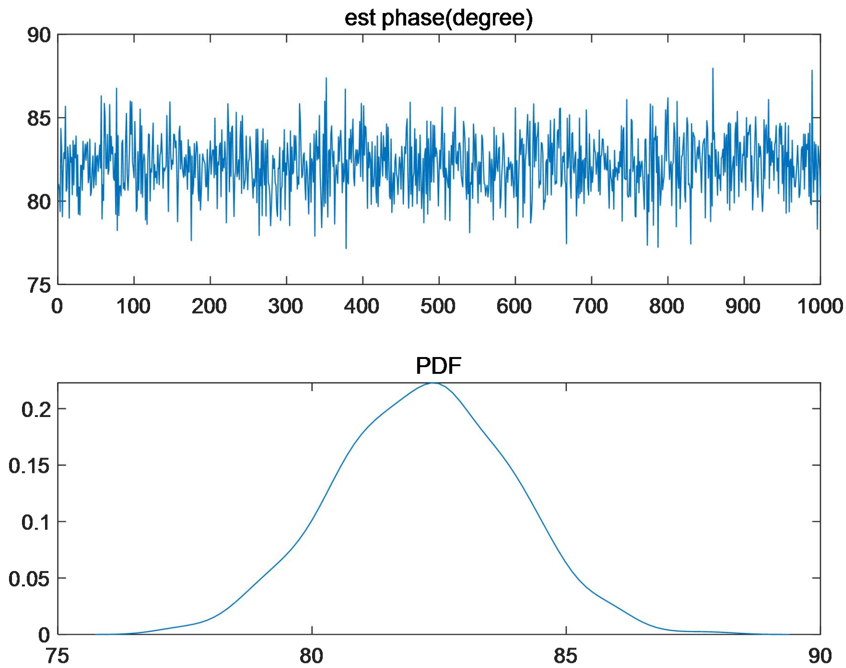
信号不再是完整的周期信号，这意味着信号在采样点上不会完美地重复其

周期。

1. 频谱泄露：非整周期信号在 DFT 中会导致频谱泄露。

2. 频率分辨率降低：k/N 与实际数字频率会存在小数部分的偏差，导致 DFT 的频率分辨率不足以准确区分相邻的频率分量。

3. 相位模糊：由于信号不是完整周期，信号的相位在 DFT 中可能不会与实际相位完全对齐，导致相位估计上发生偏移。



(5)：利用最小二乘法进行信号初相的估计：

最小二乘法设计思路：整体思路是计算观测模型与建立模型之间的误差，找到一个 φ 值使得其误差值最小。具体如下：观测模型是 Acos(2*pi*f0*n+φ)+w(n),建立模型为 Acos(2*pi*f0*n+φ)，而我们每次只能通过观测模型得到一系列数值，因此我们定义误差函数为 E(φ)= $\sum\left[z(n)-A\cos(2\pi fn+\phi)\right]^2$，找到一个 φ 值使其最小即可。在 matlab 中可以使用 fminsearch 函数找到最小值的 φ。

程序：zuixiaoercheng.m

结果分析：

最小二乘法整体的稳定性和精度都十分高效，无论是整周期还是非整周期都具有很高的预测程度。

当 k=1 时，相位预测为：30.0883

当 k=1.1 时，相位预测为：29.9274

当 k=1.2 时，相位预测为：29.8283

当 k=1.3 时，相位预测为：30.0144

当 k=1.4 时，相位预测为：30.0409

当 k=1.5 时，相位预测为：30.0789

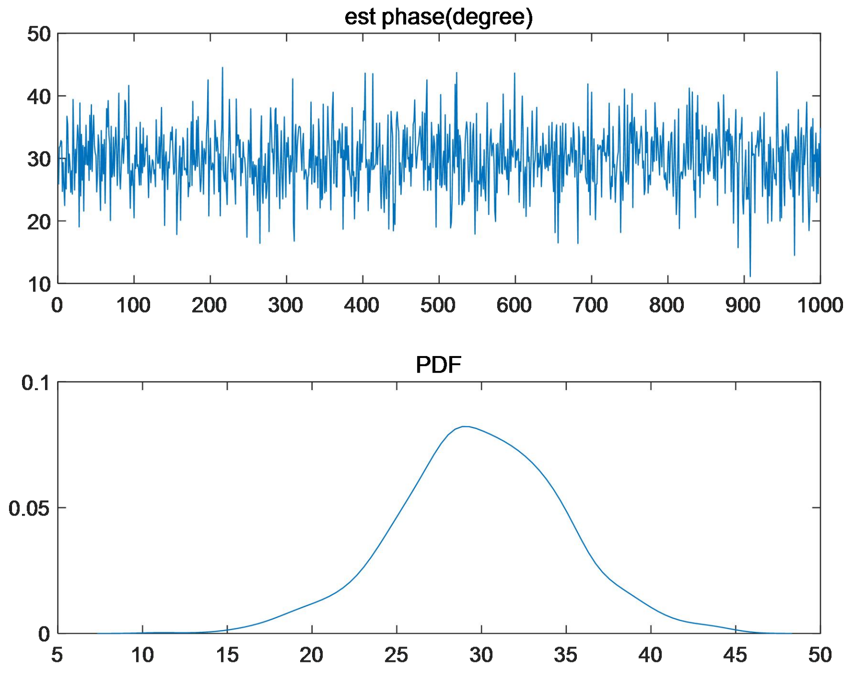
当 k=1.6 时，相位预测为：30.0009

当 k=1.7 时，相位预测为：30.1523

当 k=1.8 时，相位预测为：30.0780

当 k=1.9 时，相位预测为：29.8746

可以观察到其基本稳定在 30，预测精准。同时，其标准差，即稳定性，也随着 N 增大而减小，更加稳定。



(5)：利用矩估计估计相位：

公式推导如下：

因为只估计 φ，单变量矩估计，所以利用 zn 的一阶原点矩即可进行估计。推导如下图所示：

由于估计 ϕ 为单变量估计，所以使用一阶原点矩即可估计.

∴ 一次获取 N 个数据，且 $z(n) \sim N(A\cos(2\pi f_0 n+\phi), \sigma^2)$.

$$\therefore \left.\begin{aligned} &z(0)+w(0) \\ &z(1)+w(1) \\ &\vdots \\ &z(N-1)+w(N-1) \end{aligned}\right\} \text{为收集到数据}$$

$$\therefore E(z(n)) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z(n)$$

$$\text{而 } E(z(n)) = E(A\cos(2\pi f_0 n+\phi)) + E(w(n)) = E(A\cos(2\pi f_0 n+\phi))$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} A\cos(2\pi f_0 n+\phi).$$

$$\therefore \text{令 } \sum_{n=0}^{N-1} A\cos(2\pi f_0 n+\phi) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z(n)$$

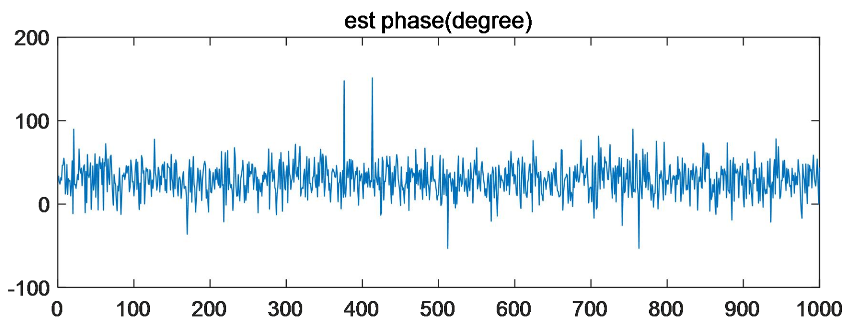
显然，等号右边为得到的数据，而等式左端只有一个 ϕ 变量，所以可以解出 ϕ.

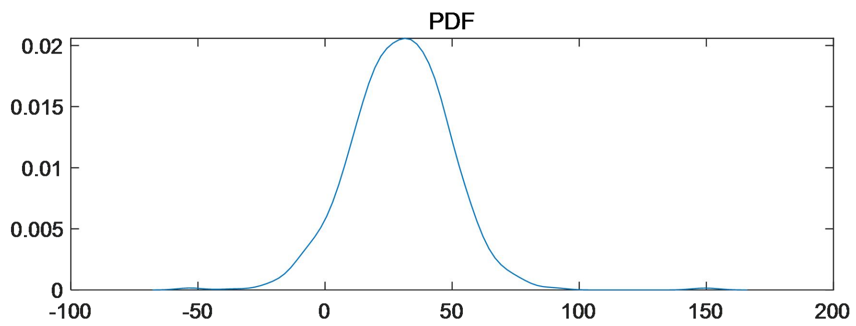
再通过1000次蒙特卡洛仿真，得到 ϕ_m 100个，取均值为其估计值.

程序为：juguji.m

结果分析：

当非整周期时，测得的结果与 30 近似相等。例如当 k=1.3 时

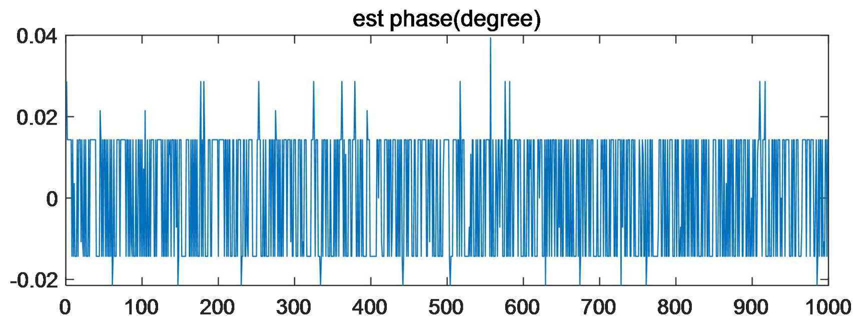


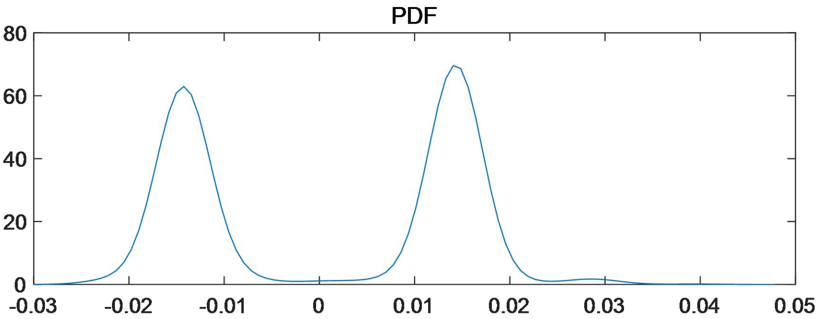


est_mean = 29.7457 est_std = 19.4670 est_var =378.9658

虽然得到的值与 30 相近，但是数据及其不稳定，标准差很大。

当整周期时，却不能有效的得到相应的值：





预测的值为 0 附近。

分析原因：我们可以将推倒的等式，做三角函数展开，得到两者之差的形式，但当整周期时，$\sum_{n=0}^{n-1}\sin(2\pi f_0 n)$恒等于 0，同理 cos 也是，所以无法求得φ的估计值。

三．实验心得

通过本次实验，我首先理解了随机过程和随机变量参数估计之间的关系，随机过程是一个随时间变化的过程，是一个横向增长的过程。但随机过程的参数，比如均值，是固定一个时间点，纵着看得到的分布。其次，对于信号的参数估计，有了深刻地理解，使用最小二乘法，DFT，矩估计，最大似然估计等方法进行相位估计，并比较它们的不同，在实验过程中，我也查阅大量资料，理解“近似”、“无偏”、“渐进有效性”等概念，对于相位估计有了自己的理解。