

---

# 实验报告——估计单音正弦信号的初相位

---

Zhe Zhao

School of Integrated Circuits and Electronics, Beijing Institute of Technology  
1120222262

## 1 实验目的

理解信号估计的基本思想，运用最大似然法估计正弦信号的初相位；更换不同的估计方法，例如利用 DFT、最小二乘法和矩估计完成实信号和复信号初相位的估计，并比较估计子的性能。

- 进行整周期取样情形下正弦波相位最大似然估计的推导与仿真。修改数据长度，测试估计子的性能
- 更改  $k$  的值为非整周期采样，观察仿真结果的变化
- 更改噪声幅度，观察仿真结果的变化
- 用 DFT、矩估计、最小二乘法完成相同的任务
- 试推导非整周期取样条件下的估计方法

## 2 实验内容

### 2.1 最大似然法

假设我们目前接收到了一束单音正弦信号，它被加性高斯白噪声污染，该正弦信号的频率已知，要求基于最大似然法设计算法来估计该正弦波的初相位。

首先进行基于最大似然法的估计子的推导。

假设我们接受到的正弦波为：

$$z(n) = \cos(2\pi fn + \phi) + w(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

其中， $z(n)$  代表我们接受到的序列， $\phi$  是待检测的初相位， $w(n)$  是加性高斯白噪声，服从均值为 0，方差为  $\sigma^2$  的高斯分布。

这样，由于  $\cos(2\pi fn + \phi)$  这一序列可以看作一确知信号，所以  $z(n)$  可以看作随机过程，对于每一个  $n$ ，服从均值为  $\cos(2\pi fn + \phi)$ ，方差为  $\sigma^2$  的高斯分布，也就是说：

$$z(n) \sim N(\cos(2\pi fn + \phi), \sigma^2) \quad (2)$$

那么可以写出每个  $z(n)$  的概率密度函数：

$$f(z(n)) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[z(n) - A\cos(2\pi fn + \phi)]^2\right\} \quad (3)$$

对于  $z(n) \quad n = 0, 1 \dots N-1$ ，我们收到了  $n$  个值，可以写出这一个序列的  $n$  重联合概率密度分布。因为所有的采样都认为是相互独立的，所以联合概率密度函数就是每个  $n$  的概率密度直接相乘，而似然函数就是把参数  $\phi$  视作自变量的联合概率密度函数，所以这就是我们所需要的似然函数：

$$f(z; \phi) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[z(n) - A\cos(2\pi fn + \phi)]^2\right\} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [z(n) - A\cos(2\pi fn + \phi)]^2\right\} \quad (5)$$

取其对数，得到对数似然函数：

$$\ln f(z; \phi) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [z(n) - A\cos(2\pi fn + \phi)]^2 \quad (6)$$

似然函数的极值对应于概率密度取最大的参数值，也就是我们采到的  $z(n)$  最可能的参数值。所以，对参数  $\phi$  求偏导并令其为 0 就能求出极值，我们把此时解出的  $\phi_{ML}$  称作参数  $\phi$  的最大似然估计。

对  $\phi$  求偏导并令其为 0：

$$\frac{\partial \ln f(z; \phi)}{\partial \phi} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [z(n) - A\cos(2\pi fn + \phi)] A \sin(2\pi fn + \phi) \quad (7)$$

可以计算出：

$$\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi fn + \phi_{ML}) = A \cos(2\pi fn + \phi_{ML}) \sin(2\pi fn + \phi_{ML}) \quad (8)$$

当频率  $f$  不在 0 或  $\frac{1}{2}$  附近时，可以认为等式右边近似为 0。这样近似的原因是：正弦函数和余弦函数是正交的，即二者乘积之后按整周期求和或按整周期积分的结果为 0。

对于非整周期求和的情形，如果序列经过的周期数很多，则整周期的部分远远多于非整周期的部分，所以也可以近似为 0；但是若  $f$  很小，接近 0，那么非整周期的部分可能和整周期的部分接近，就不能近似为 0。对于  $f$  接近  $\frac{1}{2}$  的情形，由于数字频率的周期性，这一频率会被折叠到 0 频率附近，所以上面的论述可以等价应用到  $f = \frac{1}{2}$  的情形。

这样，我们有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n + \phi_{ML}) = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n) \cos(\phi_{ML}) = - \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n) \sin(\phi_{ML}) \quad (10)$$

$$\cos(\phi_{ML}) \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n) = - \sin(\phi_{ML}) \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n) \quad (11)$$

$$\tan(\phi_{ML}) = - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n)}{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n)} \quad (12)$$

$$\phi_{ML} = - \arctan \frac{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n)}{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n)} \quad (13)$$

至此我们推导出了初相位的最大似然估计。可以看到，等式右边的  $z(n)$  已知， $\sin$  和  $\cos$  序列也可以很方便地算出。算法只涉及序列之间的对应项相乘和求和，时间复杂度为  $O(n)$ ，所以我们可以较低的在时间内计算出最大似然估计  $\phi_{ML}$ 。

接下来在 Matlab 环境中进行仿真。我们固定序列的周期数为 1，初相位为  $27.5^\circ$ ，改变序列采样点数和噪声幅度，进行蒙特卡洛仿真，每一次仿真添加不同的高斯噪声，将一次仿真信号的波形绘制如下：

计算估计子的均值和方差，结果如下：

表 1: 均值的变化

	512	1024	2048
1	27.5118	27.2667	27.5667
1.5	27.7702	27.0747	27.5702
2	27.5356	27.6787	27.5703

表 2: 方差的变化

	512	1024	2048
1	13.6917	6.2851	3.3917
1.5	19.5901	9.2831	5.0757
2	26.7887	13.1442	6.4883

分析：均值稳定在 27.5 上下，可以认为该估计在整周期情形下是无偏的。估计的方差随信号长度  $N$  的增大而减小，随噪声幅度的增大而增大。

如果把周期数改为 1.25，即非整周期采样，再次进行仿真，分别设置初相位为 27.5 和 60 度，仿真的均值变成了 22.7114 和 64.1464，说明算法变成了有偏的。此时估计方法不再适用，需要进行改进。

## 2.2 基于 DFT 的估计

利用离散傅里叶变换，可以计算出信号的频谱。离散傅里叶变换及其逆变换的表达式如下：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (14)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (15)$$

该方法的理论基础是，正弦信号相位的最大似然估计式<sup>13</sup>可以等价表述为

$$\phi_{ML} = \arctan \frac{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n)}{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n)} \quad (16)$$

$$= \arctan \frac{\mathbf{Im}\{z(n) \exp(j2\pi f n)\}}{\mathbf{Re}\{z(n) \exp(j2\pi f n)\}} \quad (17)$$

$$= \arctan \frac{\mathbf{Im}\{\mathbf{DFT}\{z(n)\}\}}{\mathbf{Re}\{\mathbf{DFT}\{z(n)\}\}} \Big|_{k=f \cdot N} \quad (18)$$

$$= \text{angle}\{\mathbf{DFT}\{z(n)\}\} \Big|_{k=f \cdot N} \quad (19)$$

所以，DFT 在信号频率对应项的复数辐角就是相位的最大似然估计。为了推导方便，我们用信号在采样时间内经过的周期数代替数字频率，即

$$f = \frac{F}{N} \quad (20)$$

其中， $F$  是信号在采样周期内经过的周期数，那么原来 DFT 取值条件  $k = f \cdot N$  就变成了  $k = F$ 。如果信号是整周期采样，即  $F$  是整数，那么 DFT 的指标  $k$  就能取到  $F$ ，DFT 估计初相位的方法就等价于第一节中推导的最大似然估计。基于 DFT 估计整周期采样的最大初相位的算法流程是：

- 计算原信号  $z(n)$  的 DFT。
- 如果原信号的频率（或等价地，周期数）精确已知，那么就找到对应的离散频谱值。如果信号频率并未精确已知，就拿 DFT 的频谱的模值的峰值当作频率的估计。

- 计算对应频率的频率值的辐角，这就是我们所需的初相位。

下面，计算了整数周期采样下 DFT 算法的初相位估计结果，并与最大似然估计法进行对比。可以看出，二者在整周期条件下确实是等价的。所以这里不再对基于 DFT 的估计算法的性能进行单独分析。

而对于非整周期呢？DFT 估计算法就失效了。这里说算法失效，是指算法变成有偏估计了。对于非整周期情形的分析和算法改进方法写在第四节中。

### 2.3 最小二乘法

最小二乘法是一种拟合目标函数的准则，当我们设定好了参数未知的函数来拟合采集到的数据点，如果我们确定参数的准则是准确值和预测值的误差平方和最小，就称作最小二乘法。也即：从参数未知的函数中确定参数的值，从而使该函数与准确值之间的总误差控制在最小。

求解最小二乘解常见的方法有梯度下降法、正规方程法等。我们这里为了规避正规方程的矩阵求逆带来的复杂度，我们在这里直接求解出了最小二乘解的闭式解。

对于我们确定正弦波初相位的问题，可以做如下变形：

$$\hat{z}(n) = A \cos(2\pi f n + \phi) \quad (21)$$

$$= A \cos(\phi) \cos(2\pi f n) - A \sin(\phi) \sin(2\pi f n) \quad (22)$$

记  $A \cos(\phi)$  为  $a_1$ ， $-A \sin(\phi)$  为  $a_2$ ，那么原式为：

$$\hat{z}(n) = a_1 \cos(2\pi f n) + a_2 \sin(2\pi f n) \quad (23)$$

这个问题就等价于一个二元线性回归，然后我们用最小二乘法确定满足均方误差最小的系数即可。线性拟合具有封装好的算法可以使用，但是这里为了与最大似然估计得出的表达式进行比较，我们对最小二乘法系数和初相位的闭式解进行推导。

首先写出均方误差函数：

$$L(a_1, a_2) = MSE = \sum_{n=0}^{N-1} |z(n) - \hat{z}(n)|^2 \quad (24)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |z(n) - a_1 \cos(2\pi f n) + a_2 \sin(2\pi f n)|^2 \quad (25)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} [z(n) - a_1 \cos(2\pi f n) + a_2 \sin(2\pi f n)]^2 \quad (26)$$

接下来求  $L(a_1, a_2)$  的最小值，即令均方误差最小。可以证明，这个函数是凸函数，所以局部极小值等价于全局最优值。所以我们只需求解其偏导数为 0 的解即可。

$$\frac{\partial L(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 2 \sum_{n=0}^{N-1} [z(n) - a_1 \cos(2\pi f n) + a_2 \sin(2\pi f n)] \cos(2\pi f n) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial L(a_1, a_2)}{\partial a_2} = 2 \sum_{n=0}^{N-1} [z(n) - a_1 \cos(2\pi f n) + a_2 \sin(2\pi f n)] \sin(2\pi f n) = 0 \quad (28)$$

略去常数项系数，分别进行化简：

$$a_1 \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f n) \cos(2\pi f n) + a_2 \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f n) \cos(2\pi f n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n) \quad (29)$$

$$a_1 \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f n) \sin(2\pi f n) + a_2 \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f n) \sin(2\pi f n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n) \quad (30)$$

这是一个未知数为  $a_1, a_2$  的二元一次方程组，我们可以运用克拉默法则唯一地确定它的解。令：

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n) & \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f n) \cos(2\pi f n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n) & \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f n) \sin(2\pi f n) \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f n) \cos(2\pi f n) & \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos(2\pi f n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f n) \sin(2\pi f n) & \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin(2\pi f n) \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f n) \cos(2\pi f n) & \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f n) \cos(2\pi f n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f n) \sin(2\pi f n) & \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f n) \sin(2\pi f n) \end{pmatrix} \quad (33)$$

那么有：

$$a_1 = \frac{|\mathbf{D}_1|}{|\mathbf{D}|} \quad (34)$$

$$a_2 = \frac{|\mathbf{D}_2|}{|\mathbf{D}|} \quad (35)$$

所以初相的最小二乘估计为：

$$\hat{\phi} = -\arctan \frac{a_2}{a_1} = -\arctan \frac{|\mathbf{D}_2|}{|\mathbf{D}_1|} \quad (36)$$

在推导最小二乘估计的过程中，我们全程没有假设信号是整周期取样，也没有进行近似，所以最小二乘法同样也适用于非整周期正弦信号的估计。如果添加整周

期取样的假设, 则有  $\sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi fn) \cos(2\pi fn) = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi fn) \sin(2\pi fn)$  和  $\sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi fn) \sin(2\pi fn) = 0$ , 此时可以发现最小二乘法的结果与最大似然法推导出的结果相同。所以我们实际上证明了在整周期取样的假设下, 初相估计的最小二乘法等价于最大似然法。

为了验证整周期情形下而这等价, 我们输出了相同条件下二者每次蒙特卡洛仿真的结果。

下面对于初相位是 27.5 度的情形, 分别对周期数为 1、1.2、1.4、1.6、1.8、2 时进行了仿真, 估计的均值如下:

表 3: 两种方法均值对比

	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
最大似然	27.5854	21.3143	28.9956	24.0972	26.2748	27.5191
最小二乘	27.5854	27.5340	27.7125	27.4169	27.8068	27.5191

结果分析: 最小二乘法的均值在 27.5 附近, 说明它在非整周期情形下是无偏的。相比之下, 非整周期的最大似然估计出现了较大的偏差。

## 2.4 最大似然法与 DFT 法在非整周期情形下的改进

因为在第二节中证明了整周期条件下最大似然法和 DFT 等价, 所以在非整周期情形下, 引起误差的因素也相同。所以以下给出的解决方法可以同时看作 DFT 和最大似然估计的改进。

### 2.4.1 改进方式 1: 直接用最小二乘解代替最大似然解

本改进方法是基于最大似然法推导中的近似进行修正。

前面已经在第二节中证明了, 最大似然估计和 DFT 法在整周期条件下是等价的, 第三节中也证明了整周期条件下最小二乘法和二者也等价。在非整周期条件下, 只有最小二乘法保持有效。所以我们需要分析另外两种方法失效的原因。

我们首先把目光聚焦于最大似然法, 在推导过程8中我们做了一个近似, 假设信号整周期就可以令等号右边为 0。如果采样是非整周期的, 尤其是当采样甚至不足一个整周期时, 上述假设就失效了, 会为估计子引入有偏性, 导致估计不准。

如果不做这个假设, 似然函数偏导为 0 的方程及其难解, 至少我是解了半天没解出来, 所以我们需要退一步想方法。

对数似然函数如下:

$$\ln f(z; \phi) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [z(n) - A \cos(2\pi fn + \phi)]^2 \quad (37)$$

容易发现，求它的最大值，其实就是求这部分  $[z(n) - A \cos(2\pi fn + \phi)]^2$  取到最小值。这和最小二乘法的出发点是完全相同的。这也从另一种角度说明了为什么最小二乘法与最大似然法在整周期条件下等价。

所以，要想使得最大似然法在非整周期下成立，可以不求解偏导数为 0 的方程，而是从似然函数的定义出发，求解最大值。而求最大值就是求后半部分的最小值，所以我们完全可以用最小二乘法来求解后半部分的最小值。从这种角度下，非整周期情形下的最小二乘解 (36) 就是可以在非整周期情形下进行推广的最大似然解。

#### 2.4.2 改进方式 2：校正法

本节分析了 DFT 法中的误差来源，然后提出了一种改进的方法。

前面提到，非整周期采样的情形下，DFT 的相位估计就失效了。下面分析它的误差来源。在第二节提到了 DFT 估计法的理论基础。非整周期情形下，理论基础还成立不成立呢？如果不成立，是哪个环节出了问题呢？

是式 (17) 到式 (18) 出了问题。

对于一个单音正弦信号：

$$x(n) = \cos(2\pi fn + \psi) \quad (38)$$

$$= \cos(2\pi \frac{F}{N} n + \psi) \quad (39)$$

$$= \frac{1}{2} [\exp(j\psi) \exp(j \frac{2\pi}{N} F n) + \exp(-j\psi) \exp(-j \frac{2\pi}{N} F n)] \quad (40)$$

计算其 DFT：

$$X(k) = \frac{1}{2} e^{j\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} F n} e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} + \frac{1}{2} e^{-j\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} F n} e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} \quad (41)$$

把上面这个 DFT 结果分为第一项和第二项分开计算。第一项：

$$\frac{1}{2} e^{j\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} F n} e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} = \frac{1}{2} e^{j\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (F-k) n} \quad (42)$$

这部分代表正频率。我们在 DFT 的结果中取到对应的频率值是，有  $F = k$ 。非整周期情形下  $F$  不是整数，此时可以通过对时域中的补零序列进行 DFT 以等价于令  $k$  可以取到小数，从而使得  $F = k$  保持成立。这样，求和号后面的值就全为 1。第一项在  $F$  处的计算结果为  $\frac{1}{2} e^{j\psi} N$ 。

再来计算一下  $F = K$  处 DFT 的第二项：

$$\frac{1}{2}e^{-j\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}Fn} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (43)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(F+k)n} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{4\pi}{N}Fn} \quad (45)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\psi} \frac{1 - e^{-j4\pi F}}{1 - e^{-j\frac{4\pi}{N}F}} \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\psi} \frac{e^{-j2\pi F}}{e^{-j\frac{2\pi}{N}F}} \frac{e^{j2\pi F} - e^{-j2\pi F}}{e^{j\frac{2\pi}{N}F} - e^{-j\frac{2\pi}{N}F}} \quad (47)$$

$$= \frac{1}{2}e^{j(-\psi+2\pi(\frac{1}{N}-1)F)} \frac{\sin(2\pi F)}{\sin(\frac{2\pi}{N}F)} \quad (48)$$

这样我们便把第一项和第二项都计算出了其指数表示。这两项之和便是 DFT 的结果。而 DFT 最后的结果的模和相位是我们可以直接观察到的结果，也是 DFT 算法计算的依据。我们把 DFT 结果计算出的模和频谱记作  $R_{obs}$  和  $\phi_{obs}$ ，于是我们有如下的关系：

$$\frac{1}{2}e^{j\psi}N + \frac{1}{2}e^{j(-\psi+2\pi(\frac{1}{N}-1)F)} \frac{\sin(2\pi F)}{\sin(\frac{2\pi}{N}F)} = R_{obs}e^{j\phi_{obs}} \quad (49)$$

**这个方程是分析 DFT 方法的误差的核心。**我们接下来解读一下这个方程。第一项是正频率成分，第二项是负频率成分。如果  $F$  是个整数，可以看出，第二项为 0，此处的频谱只有正频率成分，我们在 DFT 结果中观测到的  $\phi_{obs}$  就是信号初相位  $\psi$ 。而非整周期的情形下， $F$  不是整数，第二项不为 0，并且既有模特性也有相位特性，就是这一项导致  $\phi_{obs}$  与  $\psi$  产生了差异，这部分差异就是有偏性的来源。

一句话，负频率成分对正频率成分产生了频谱泄露，从而使得正频率成分的相位受到了影响。

如果想要消除频谱泄露带来的相位偏移，只要解出以  $\psi$  为自变量的方程 (49)，就能完全恢复出频谱泄露之前的相位。所以我们接下来尝试解这个方程。

记  $M = \frac{\sin(2\pi F)}{\sin(\frac{2\pi}{N}F)}$ ，计算方程左边的复数求和。分别计算其实部和虚部：

$$\mathbf{ImPart} = N \sin(\psi) + M \sin(-\psi + 2\pi(\frac{1}{N} - 1)F) \quad (50)$$

$$\mathbf{RePart} = N \cos(\psi) + M \cos(-\psi + 2\pi(\frac{1}{N} - 1)F) \quad (51)$$

左边的复数求和后的辐角就是  $\phi_{obs}$ 。所以我们有：

$$\phi_{obs} = \arctan \frac{N \sin(\psi) + M \sin(-\psi + 2\pi(\frac{1}{N} - 1)F)}{N \cos(\psi) + M \cos(-\psi + 2\pi(\frac{1}{N} - 1)F)} \quad (52)$$

上式给出了  $\phi_{obs}$  和  $\psi$  的函数关系。该函数关系的反函数就是方程 (49) 的解。这个反函数及其难求。但是，如果函数是单调函数，其反函数也是单调函数。就算我们无法求出其反函数，我们也可以利用其一映射关系，通过函数关系建立查找表，用查表的方式通过已知的  $\phi_{obs}$  来求解未知的信号初相位  $\psi$ 。

建立查找表的过程依赖于式 (52)。可以选取一定的  $\psi$  的步长当作输入，计算该式的结果，建立  $\phi_{obs}$  和  $\psi$  的一一映射关系。在实际检测到一束信号是，当我们从频谱中计算出了辐角  $\phi_{obs}$ ，就可以通过查表反过来找出  $\psi$ 。如果表中没有对应的  $\phi_{obs}$  值，则可以找到离他最近的两个值，只要我们分的步长足够小，以至于步长的空隙间可以认为是直线，就通过线性插值的方式找到对应的初相位  $\psi$ 。此外，建立查找表的过程只需要两个参数  $N$  和  $F$ ，与回波信号完全无关，而这两个量完全已知，所以这张表可以提前建立好，而检测本身只包含查表过程，所以在检测过程中，建表本身不会造成任何计算开销。它的存储开销决定于建表时为  $\phi_{obs}$  选取的步长。

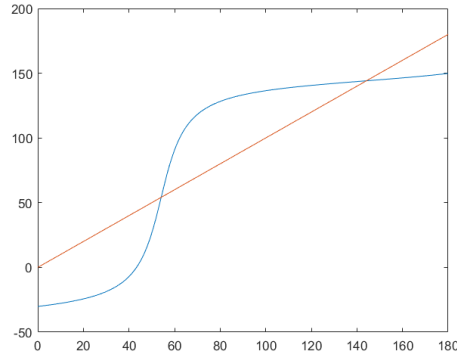


图 1: 校正前后相位对比

查表这个过程，就相当于通过校正，把受到频谱泄露影响的相位  $\phi_{obs}$  校正回未受影响的初相位  $\psi$ ，把有偏的部分给校正掉。

下面给出 DFT 校正法的算法流程：

- 准备工作：通过式 (52) 和已知的  $F$  和  $N$  来建立查找表。
- 当收到待检测信号时，计算其补 0 后的 DFT。补 0 的点数可以由  $F$  的值计算得出。具体来说，若  $F$  不是整数，则将其写成  $F = \frac{F_1}{F_2}$ ，分子和分母都是整数， $F_2$  就是补零的倍数。
- 找到频谱中对应频率处的值，即索引为  $F_1 + 1$  处的值，计算出其相角  $\phi_{obs}$ 。或者，这一步和上一步可以等价地更换为利用第一节最大似然法给出的公式直接求解  $\phi_{obs}$ 。
- 通过查表，找到  $\psi$ 。如果表里没有对应的  $\psi$ ，则通过线性插值找到  $\psi$ 。 $\psi$  就是我们需要的初相位。

### 2.4.3 改进方式 3: 加窗

上面通过方程 (49) 分析出了, 有偏性的来源是负频率成分泄露到了正频率成分处。减小误差的另一种思路是从减小频谱泄露入手, 即加窗。这里使用对旁瓣削减作用比较明显的汉明窗:

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (53)$$

在时域补零之前加汉明窗, 就可以明显地衰减频谱泄露, 从而减小对相位计算结果的干扰, 这样直接 DFT 得到的相位就会更接近真正的初相位。但是, 这样只是减少了频谱泄露的影响, 即让估计子的偏差小了一些, 而并没有从根本上消除频谱泄露带来的有偏性。

下面对三种改进方法的性能进行对比。

蒙特卡洛仿真的三者结果对比如图, 如图2所示。

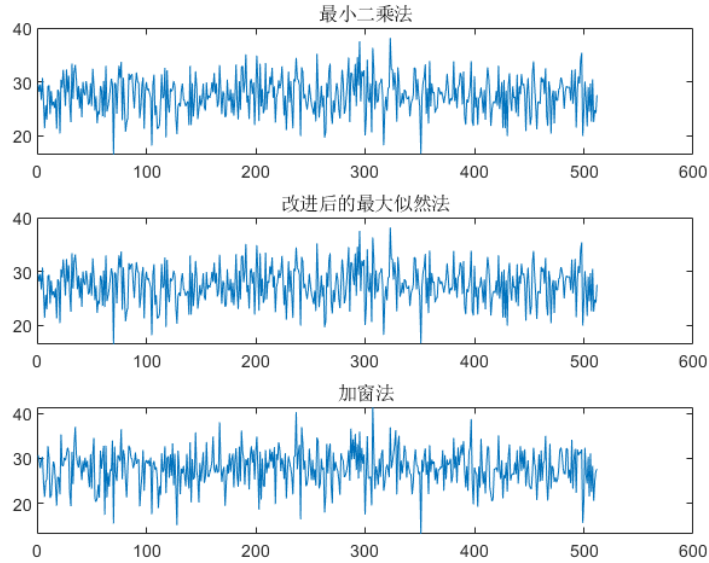


图 2: 三种方法结果对比图

可以看出前两种方法的仿真结果是相同的, 说明最大似然法经过改进后可以有效地估计相位。加窗法虽然也是无偏的, 但是方差会更大。我们输出了这三种方法在不同频率下估计的均值和方差如表所示。

表 4: 三种方法均值对比

周期数	0.25	1.25	1.45	1.75
最大似然法	-9.6935	22.9320	28.7110	24.1258
最小二乘法	27.2738	27.6181	27.5441	27.4280
校正后的最大似然法	27.2723	27.6180	27.5442	27.4279
DFT 加窗法	-26.9775	27.6414	27.6725	27.1101

表 5: 三种方法方差对比

周期数	0.25	1.25	1.45	1.75
最大似然法	27.8378	17.3984	13.7664	15.4001
最小二乘法	10.3871	11.7668	12.3619	11.6309
校正后的最大似然法	10.3865	11.7669	12.3619	11.6310
DFT 加窗法	16.4385	17.8324	16.1545	16.2148

结果分析：无论是无偏性和有效性，在非整周期情形下校正过后的最大似然法都能达到至少和最小二乘法一样好的效果。相较于最原始的最大似然估计，DFT 加窗可以降低偏差，但没有降低方差。而校正后的最大似然法既可以降低偏差，也可以降低方差，说明这确实是一种好的估计方法。

该结果也说明了，最初最大似然法的推导中，近似为 0 的一项本质上是由频谱泄露引起的。

我们还试验了周期数仅为 0.25 时的测试结果，此时因为频谱分辨率不足，正负周期的峰值交叠在一起，而且加窗会降低分辨率，所以可以看到，DFT 加窗法已经失效了，而此时校正后的最大似然法仍能保持和最小二乘法一样的精度，说明我们的改进方法同样适用于 DFT 已经失效的低频率信号的初相估计。

### 3 结论

对于频率已知信号的相位估计问题，推导了整周期情形下的最大似然估计和 DFT 估计方法，推导了任意情形下最小二乘法的闭式解，分析了前两者在非整周期下的误差来源，并给出了校正的方法。实验表明，校正后的最大似然法可以达到和最小二乘法一样好的效果，优于 DFT 加窗法。