

实验六 现代谱估计

第一部分 AR 谱估计

一. 实验目的

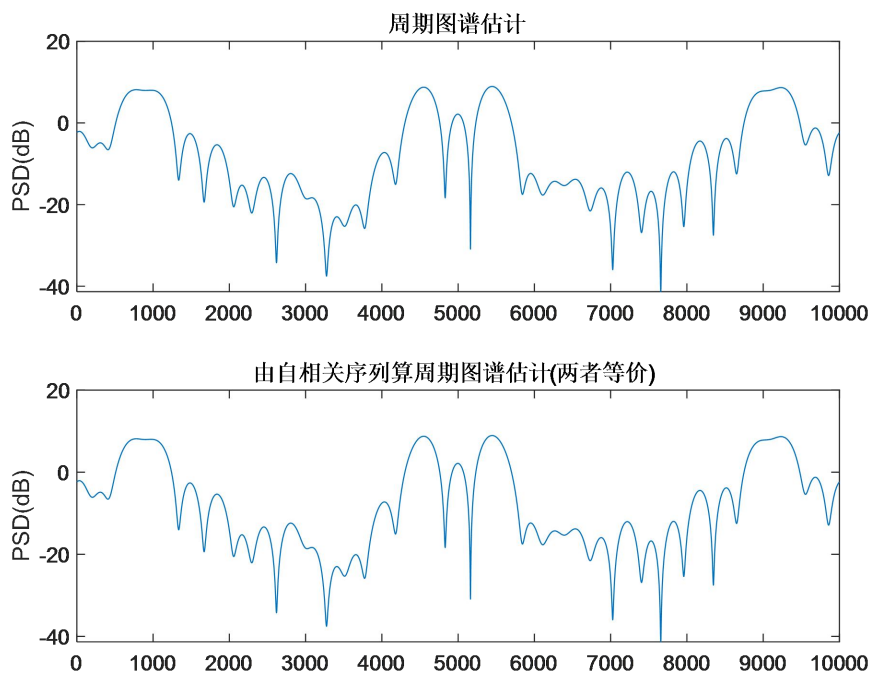
- (1) 缩小相近频率，观察对比两个谱估计是否可以分辨出来
- (2) 调节信噪比，观察二者谱估计的区别。
- (3) 调节信号幅度，观察现象
- (4) 画出阶数 p 与最小预测误差之间的图像

二. 实验内容

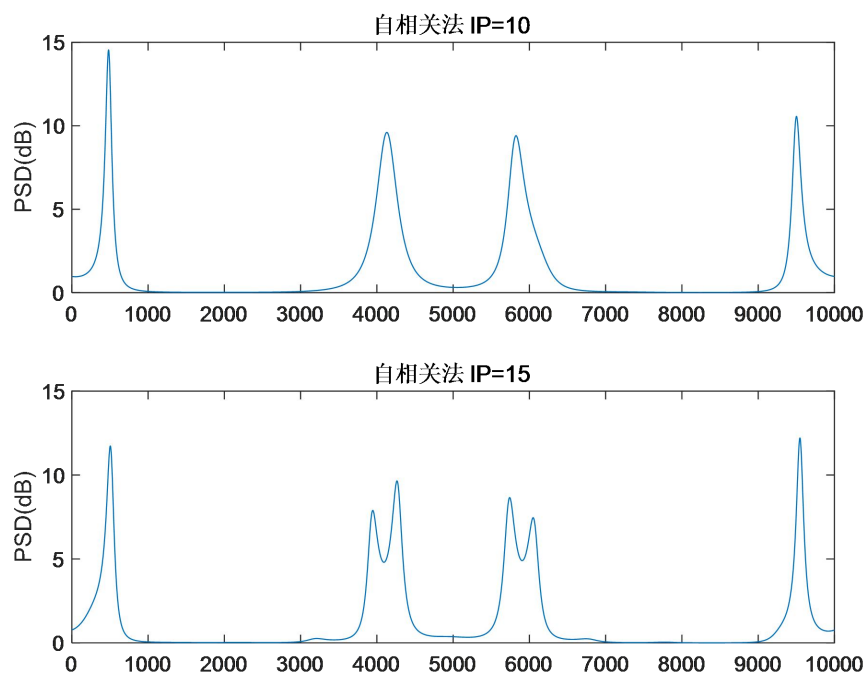
第一问：为了方便观察，我们取功率谱时，取 10000 个点，则观察 0.4 频率是要观察 4000 左右附近的图像变化：

- (1) 当信号频率为 0.40 和 0.42 时：

经典谱估计的图像：



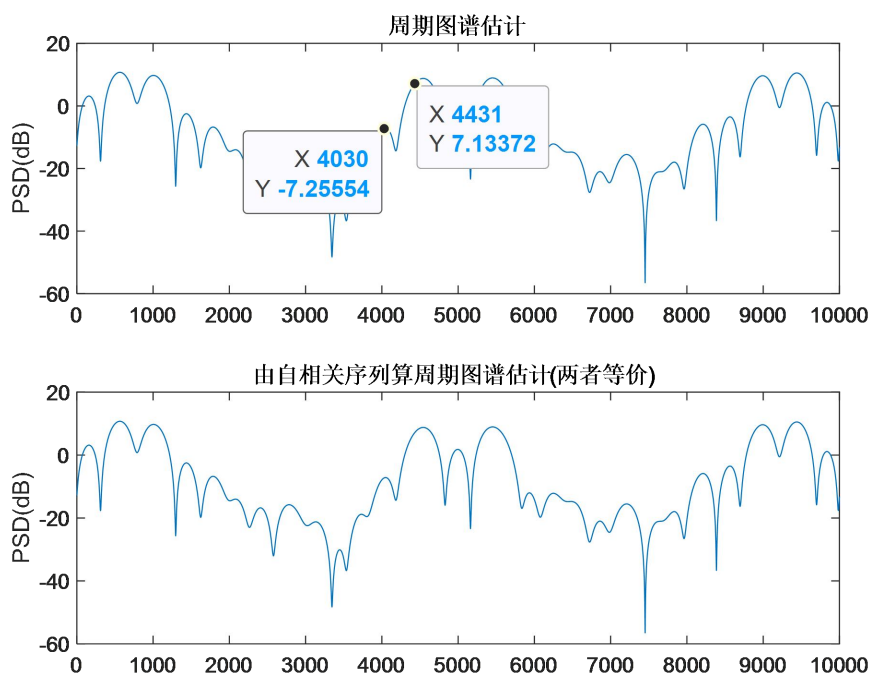
自相关谱估计图像：



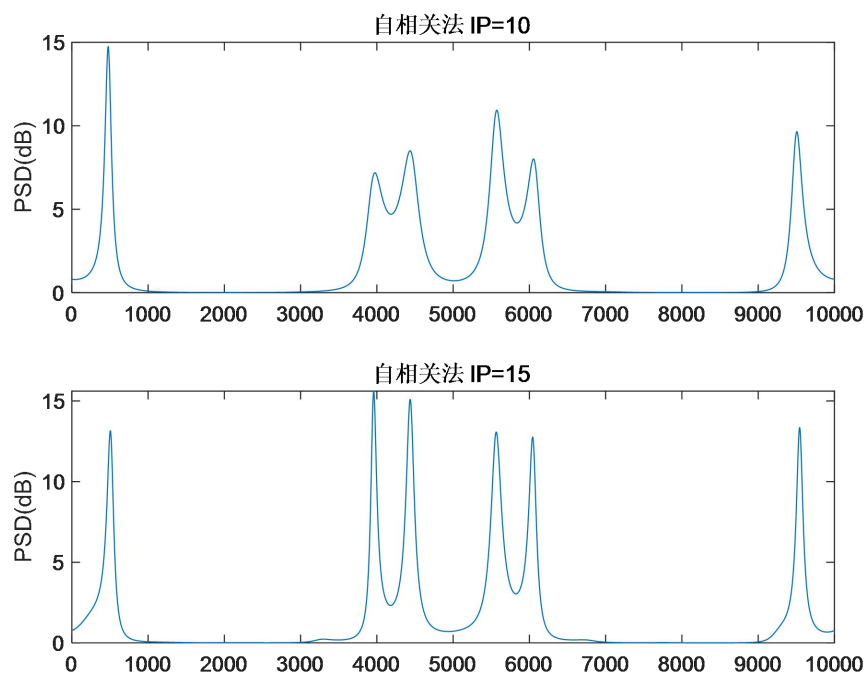
可以看出经典谱估计的图像横轴为 4000 处只有一个波峰，而自相关法 P 阶数为 15 时，在 4000 处可以明显地分辨出两个波峰。

(2) 当频率变为 0.40 和 0.44 时：

经典谱估计图像：



自相关谱估计图像：

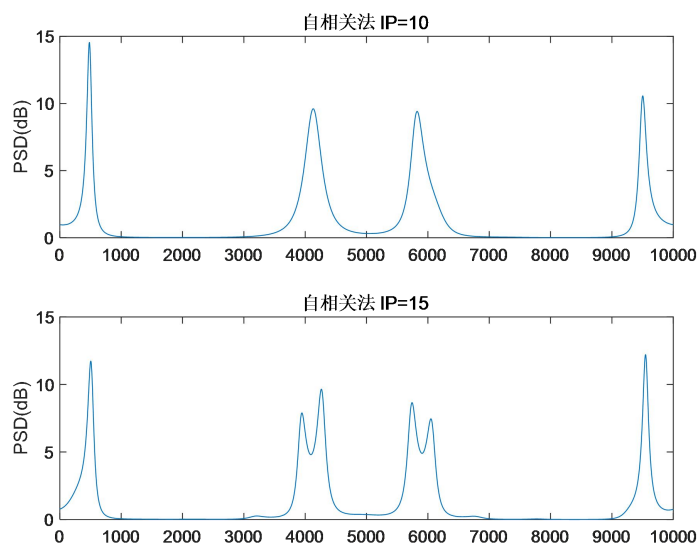


可以发现当两者的频率相差为 0.04 时, 自相关法 10 阶和 15 阶均可以将其分开, 经典谱估计上 4000 和 4400 左右也出现了两个峰值, 所以也可以将二者分开。所以当信号频率相差增大时, 自相关阶数可以减小, 也可以观察到两个不同的频率。同时, 经典谱估计也可以做到分辨。

第二问: 调节不同的 SNR, 即调节噪声幅度

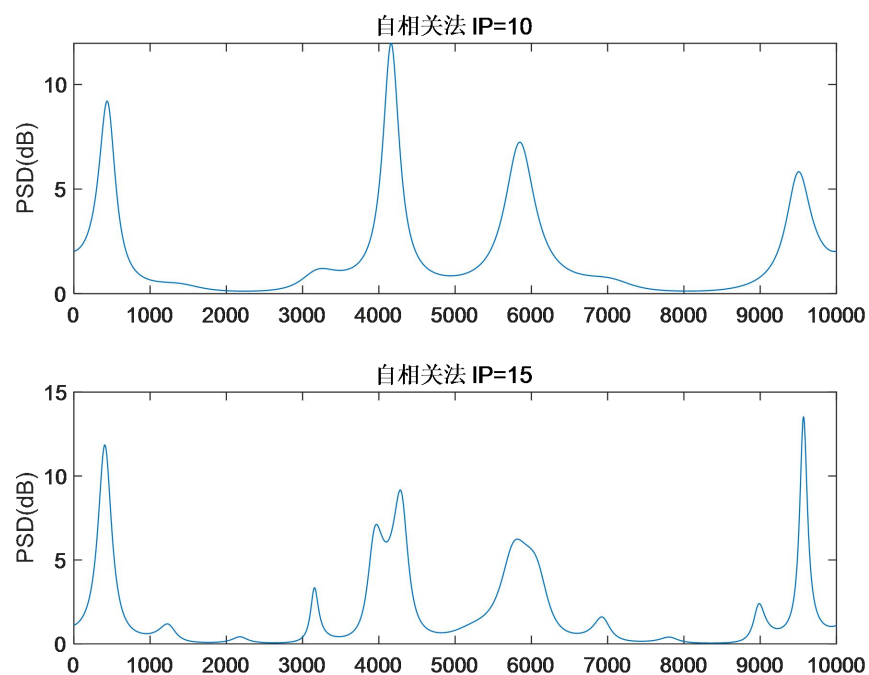
我们规定观察频率为 0.4 和 0.42

当噪声幅度为 0.1 时:



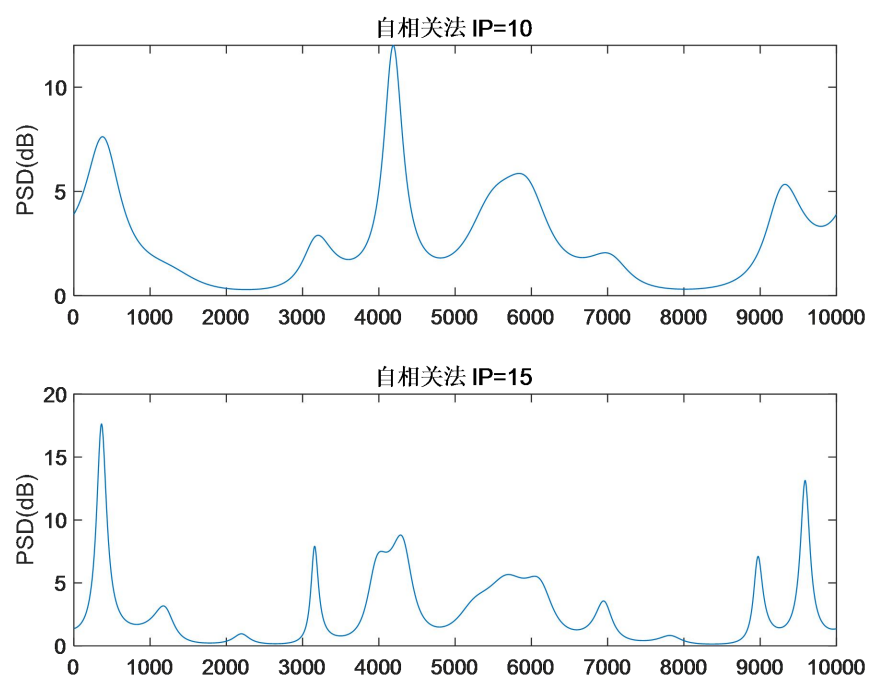
自相关法 15 阶是可以分辨出两个频率的。

当噪声幅度为 0.5 时：信噪比降低



可以看到 4000 出处仍有两处波峰，15 阶仍然可以分辨出两者。但也可以观察到：图像也出现了许多虚假的波峰，可见干扰增强。

当噪声幅度为 0.8 时：



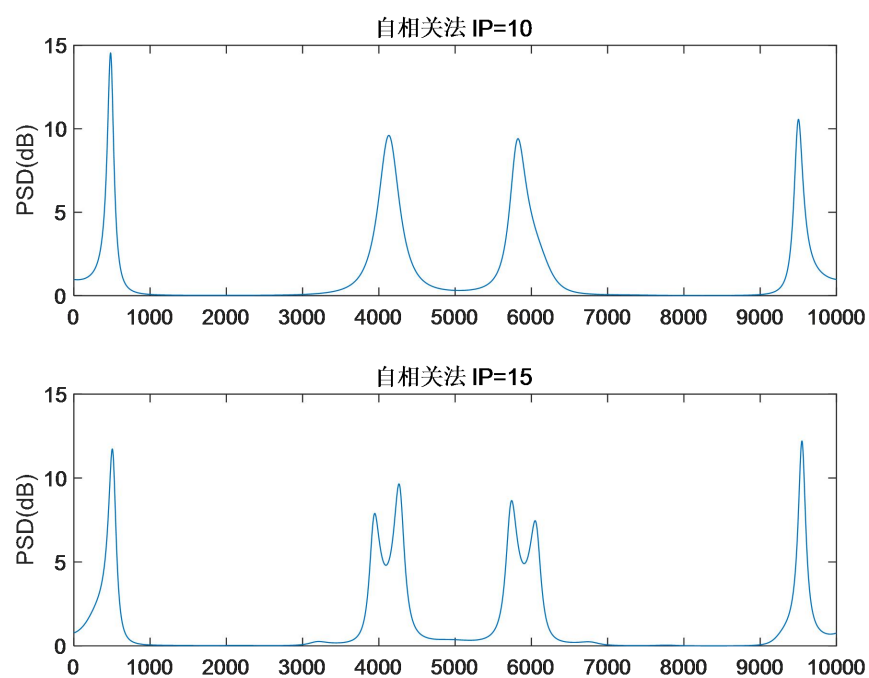
可以观察到 4000 处的两个波峰相差不是很多，分辨不出来两个频率了。

综上：当信噪比降低时，自相关法估计的分辨率也会降低，这时应该提高阶数，进行分辨。

第三问：信号幅度不同时的结果：

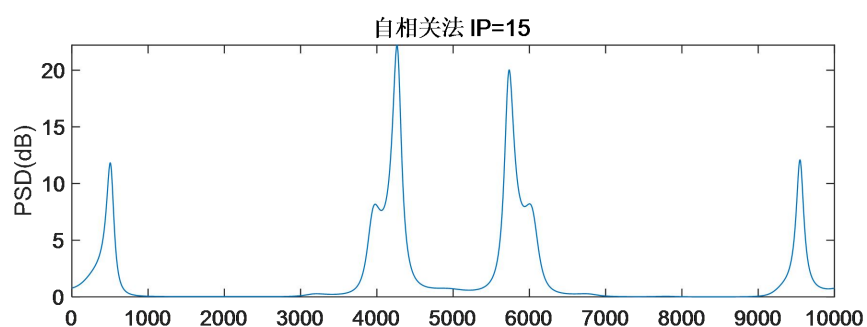
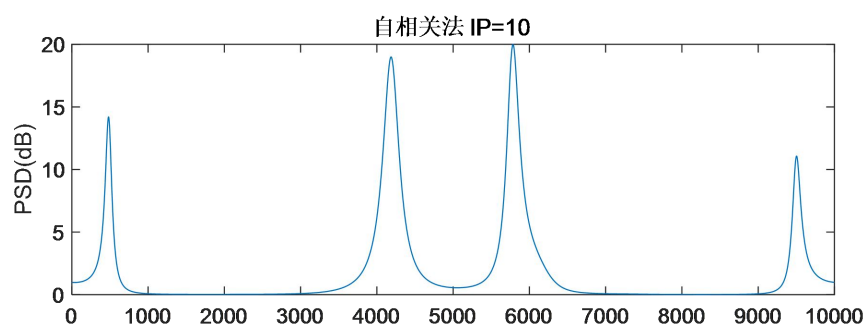
我们让频率为 0.4 的幅度为 A_1 ，0.42 的幅度为 A_2 。

当 $A_1=1$ ， $A_2=1$ 时，即二者幅度相同时：



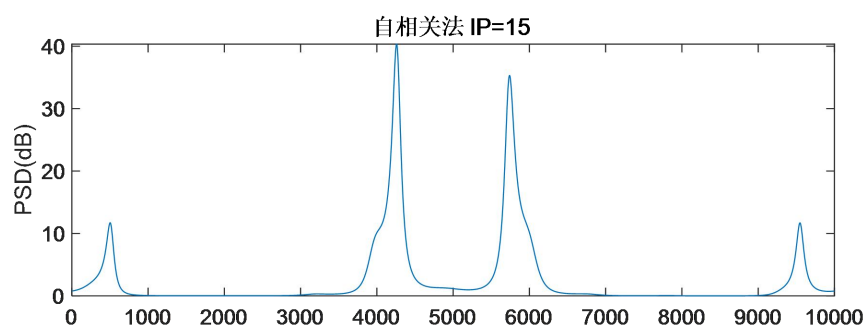
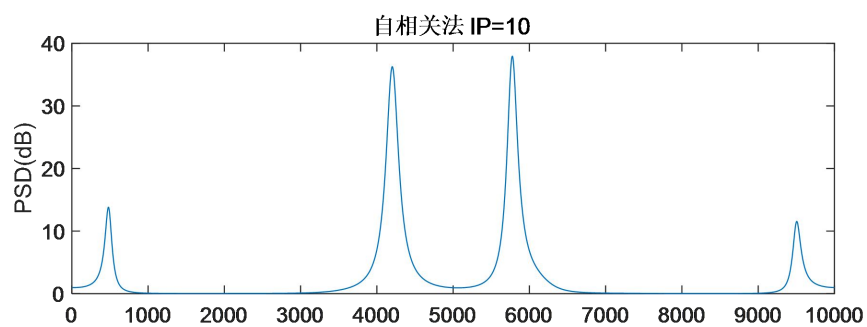
可以将二者进行分辨出来。

当 $A_1=1$ ， $A_2=1.5$ 时：



可以看到 4000 处的波峰幅度变得很小，相较于 4200 处的波峰幅度，可以推测，当二者幅度不相同，对应的功率谱的幅度会相差很多，当一个信号的幅度过大时，会将另一个信号的波峰进行掩盖，这样就分辨不出二者了。

当 $A_1=1$, $A_2=2$ 时：

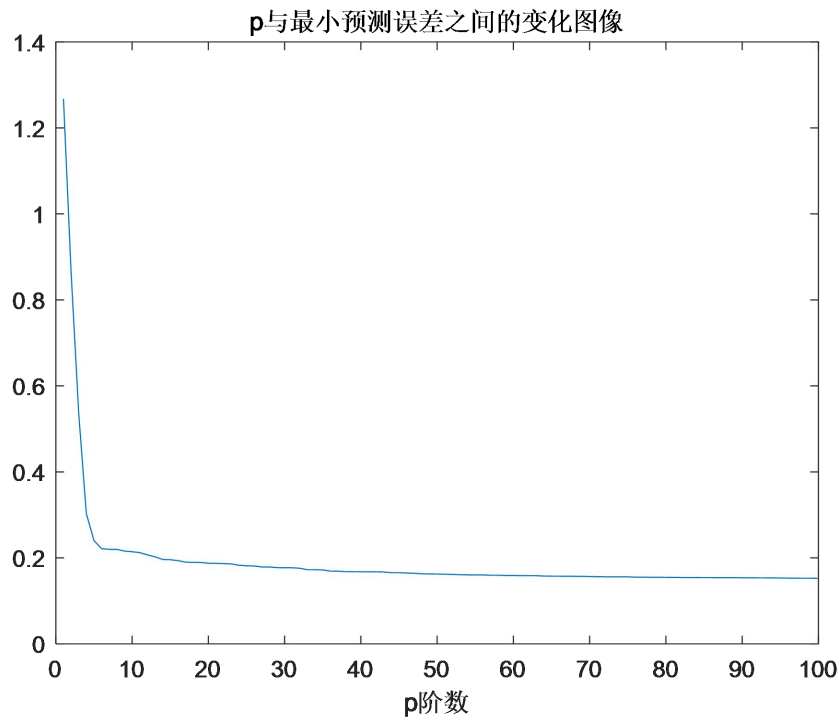


可见 4000 处可以近似看成一个波峰，4200 处的波峰将 4000 处的波峰“掩盖”

了，导致二者无法分辨出来。

第四问：

画出阶数 p 与最小预测误差之间的变化图像：



第二部分 Levinson 递推法

一. 实验目的

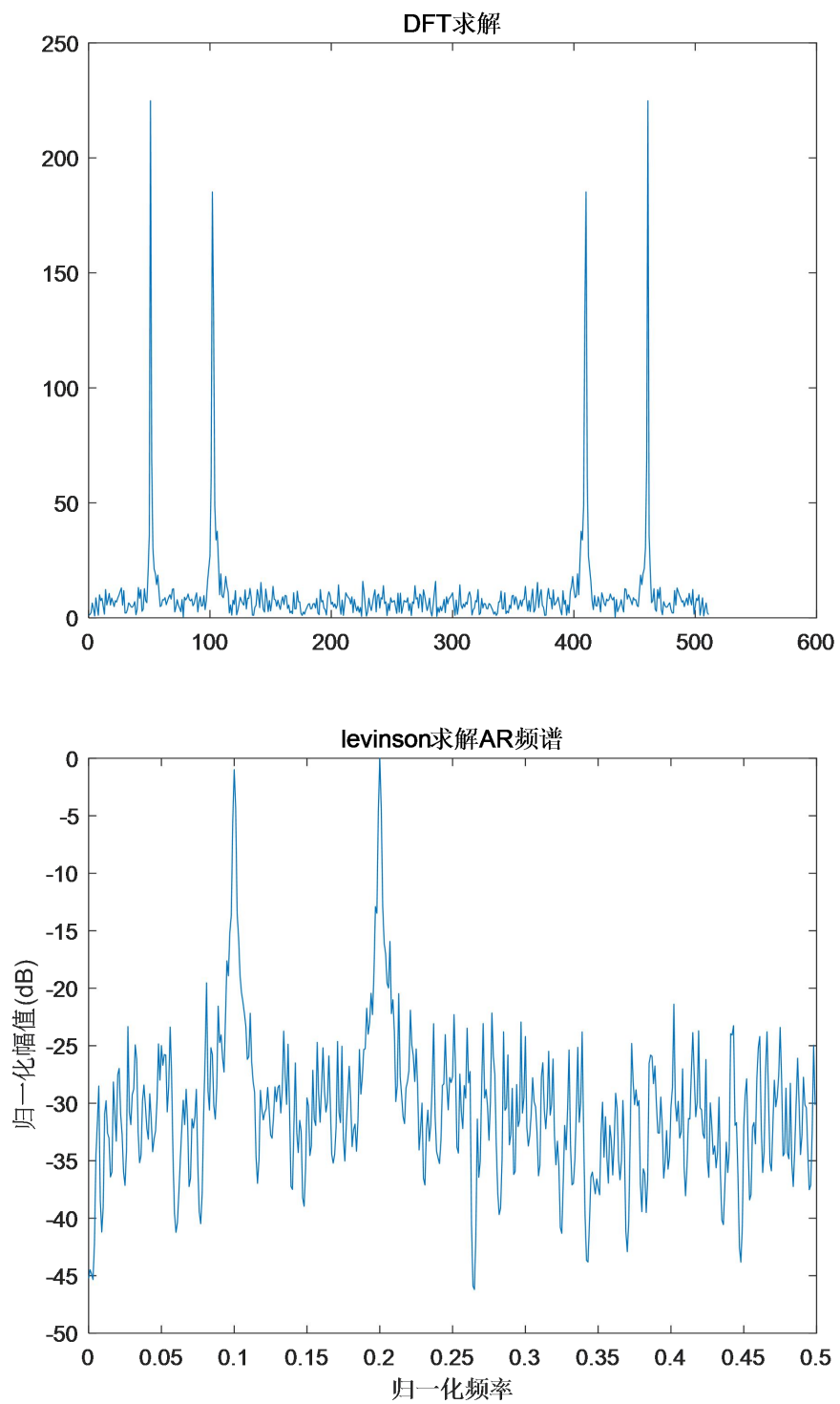
主要是理解 Levinson 递推法的工作原理，并调节参数对比使用 Levinson 递推求出的功率谱和 DFT 经典功率谱的分辨能力，观察现象。

二. 实验内容

程序为 `Levinson_top.m`

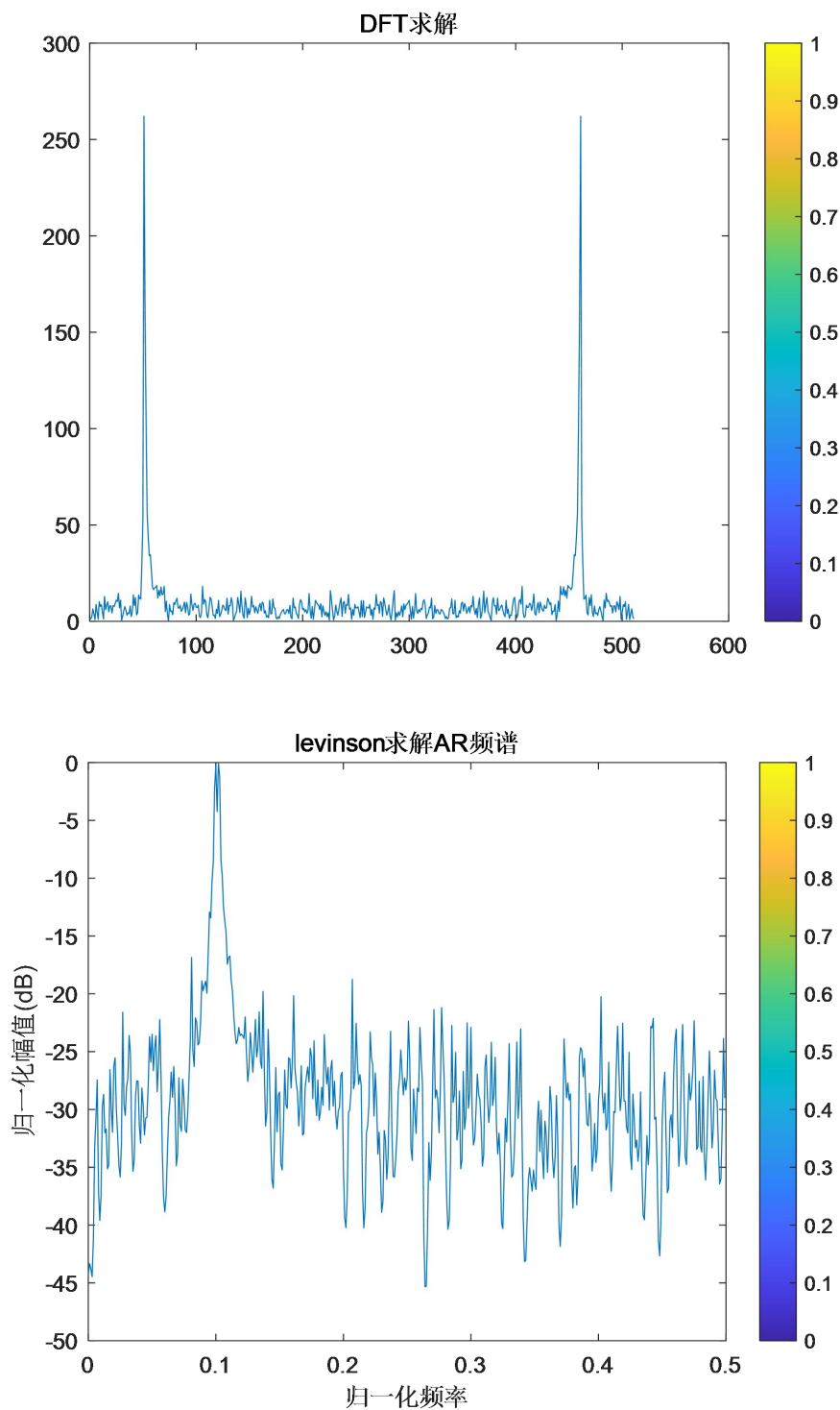
(1) 调节相近频率的值，观察二者区别：

当 $f_1=100$ $f_2=200$ 时，数字频率分别为 0.1 和 0.2：



可见二者都可以分辨出两个频率的值，都出现两个波峰。

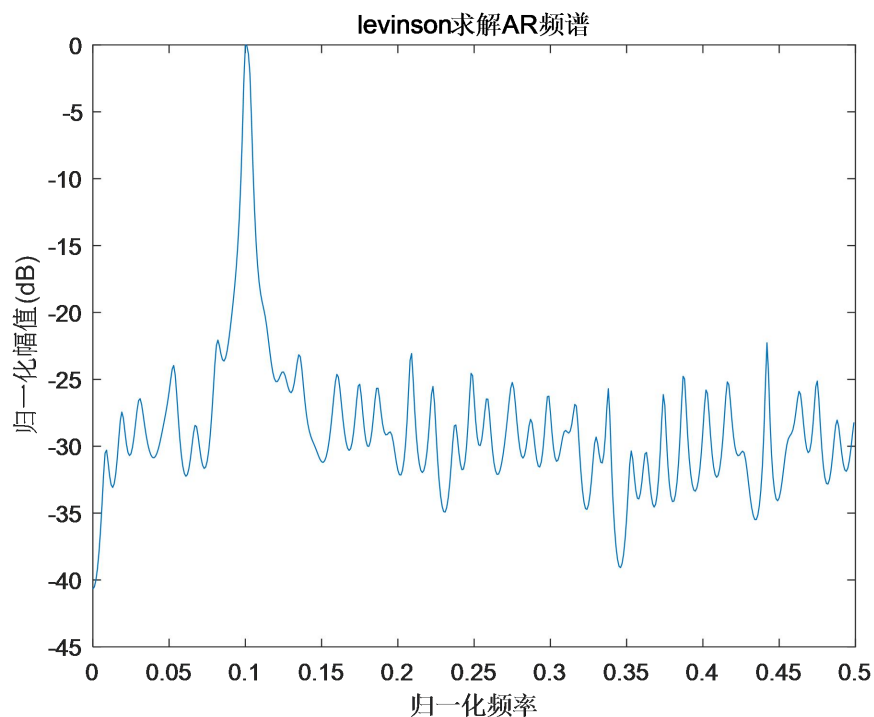
当 $f_1=100$ $f_2=102$ 时：



可以看到 DFT 计算出的频谱已经合为一条波峰，而 Levinson 递推得出的波峰可以看出有两个，可见分辨率上 Levinson 递推更强于 DFT 经典谱估计。

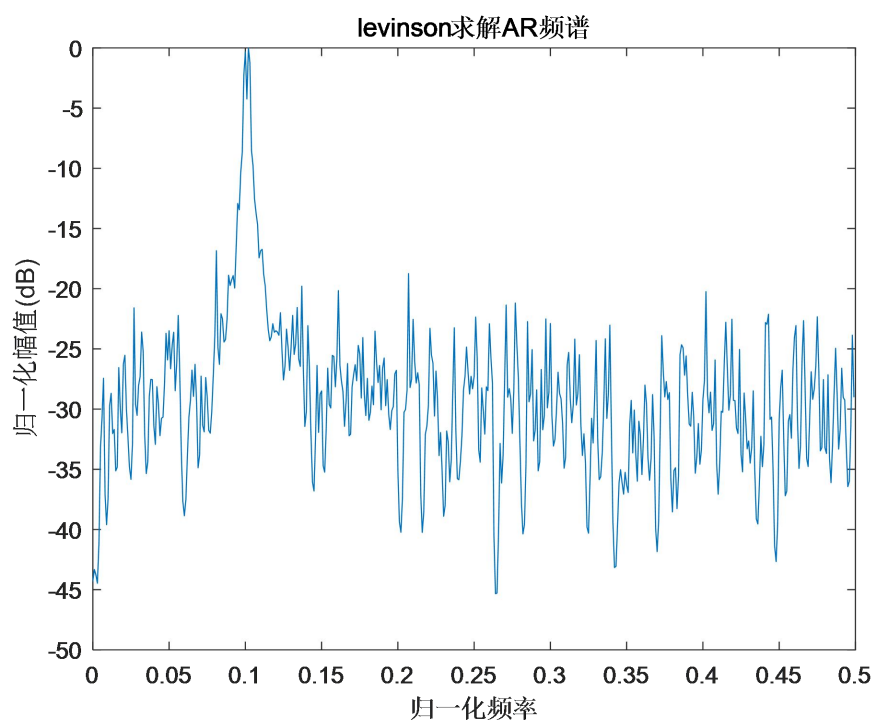
同时增大阶数 p 可以提高其分辨能力：

如下是当 $p=100$ ，分辨 $f_1=100$ $f_2=102$ 的图像：



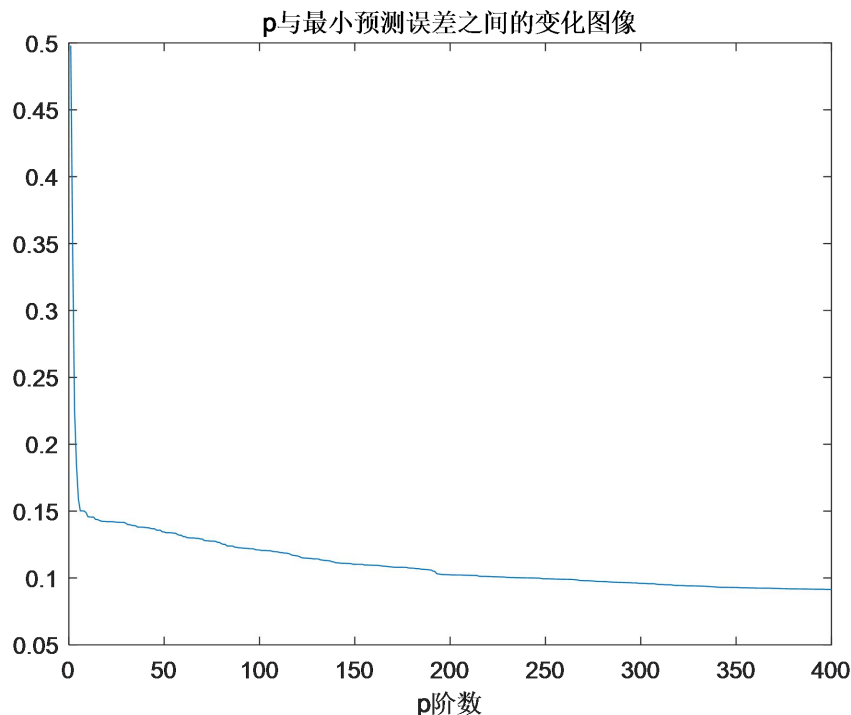
可以看出也是只有一个波峰的。

当我们设置 $p=400$ 时，出现两个波峰：



所以增大阶数 p 可以提高分辨率。

同理我们可以画出 P 阶数与最小预测误差之间关系图如下所示：



可见与 AR 谱估计的图类似，一个趋势，因为 Levinson 递推法只是 AR 谱估计的一种计算 Y-W 方程的算法。

第三部分 Burg 递推法

一. 实验目的

理解 Burg 递推法的工作原理：

Levinson 递推法：需要先从观测数据估计自相关函数，然后基于这些自相关函数来估计 AR 模型的参数。这种方法在数据长度较短时，自相关函数的估计误差可能会较大，从而影响 AR 参数的准确性。

Burg 递推法：直接从观测数据计算 AR 模型参数，不需要估计自相关函数。这种方法适合短序列参数估计，因为它避免了自相关函数估计带来的偏差。

二 实验原理

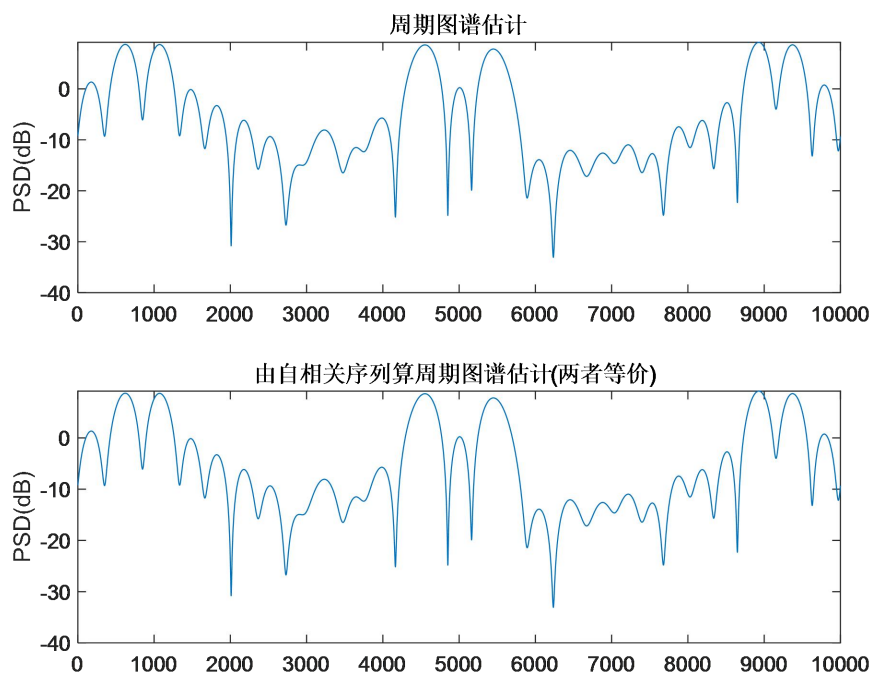
相较于 Levinson 递推法，Burg 递推法同时考虑前向预测误差和后向预测误差。Burg 方法的目标是通过最小化前向误差和后向误差来估计 AR 模型的系数。适用于数据长度较小时。二者都是基于 AR 自相关矩阵进行的计算方法预测 AR 模型系数。

三. 实验内容

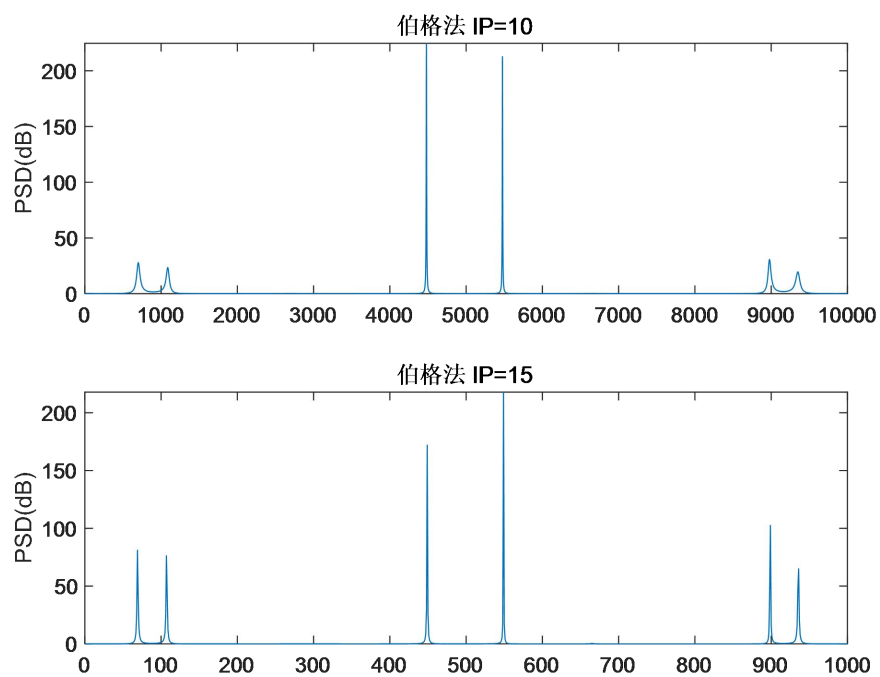
更改相近频率的大小观察经典谱估计与 burg 递推的分辨差别。

当 $f_1=0.4$ $f_2=0.43$ 时

经典谱估计：

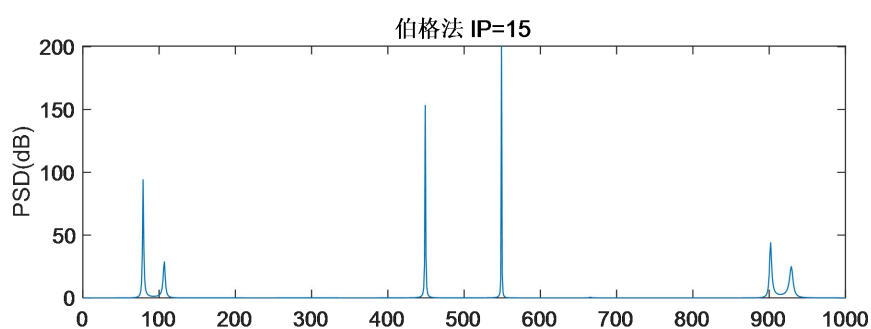
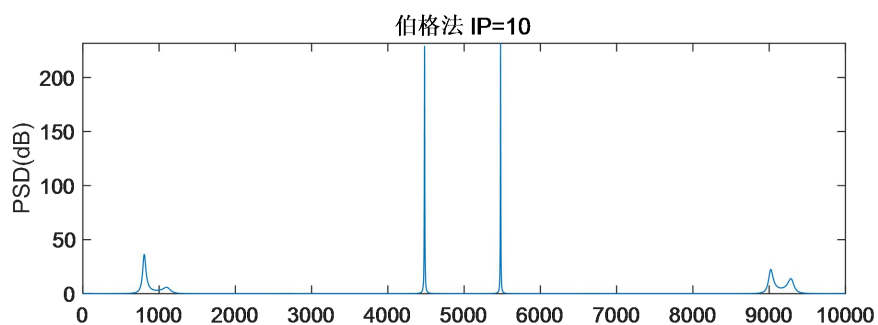
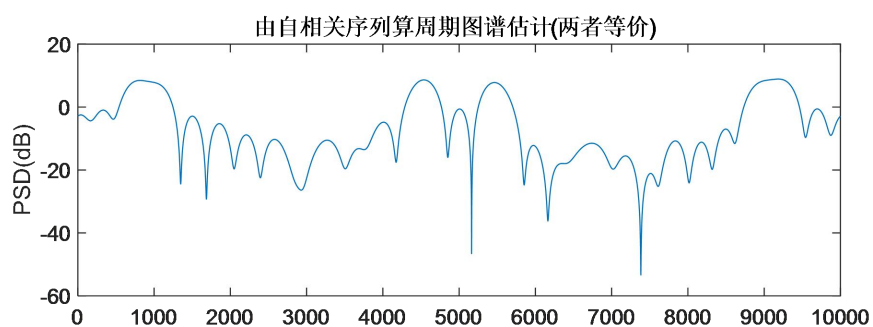
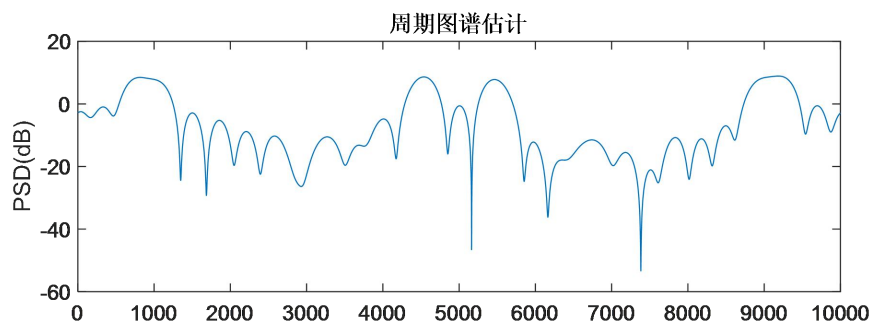


Burg 递推法：



观察对应位置，可以看出都有两个波峰出现，所以二者都可以分辨出来。

当我们设置 $f_1=0.4$ $f_2=0.42$ 时:



可见经典谱估计已经无法分辨二者频率，burg 递推两个阶数都可以分辨出来。

但可以看出阶数 10 的两个波峰已经不是很明显。

代码迭代更新部分为 Burg 递推的精髓，如下所示：

```
for k=1:ip
    sumn=0;
```

```

sumd=0;
for i=k+1:N
    sumn=sumn+efk1(i)*conj(ebk1(i-1));
    sumd=sumd+abs(efk1(i))^2+abs(ebk1(i-1))^2;
end
aa(k,k)=-2*sumn/sumd;
if k==1
    rho(k)=(1-abs(aa(k,k))^2)*rho0;
else
    rho(k)=(1-abs(aa(k,k))^2)*rho(k-1);
end

%if(ip==1)
% break; %跳出 k 循环
%end
if k>1
    for j=1:k-1
        aa(j,k)=aa(j,k-1)+aa(k,k)*conj(aa(k-j,k-1));
    end
end
for i=k+2:N
    efk(i)=efk1(i)+aa(k,k)*ebk1(i-1);%%更新前向误差
    ebk(i-1)=ebk1(i-2)+conj(aa(k,k))*efk1(i-1);%%更新后向误差
end
for i=k+2:N
    efk1(i)=efk(i);
    ebk1(i-1)=ebk(i-1);
end
end %k 循环

```

第四部分 MUSIC 算法

一. 实验目的

理解 MUSIC 算法的工作原理

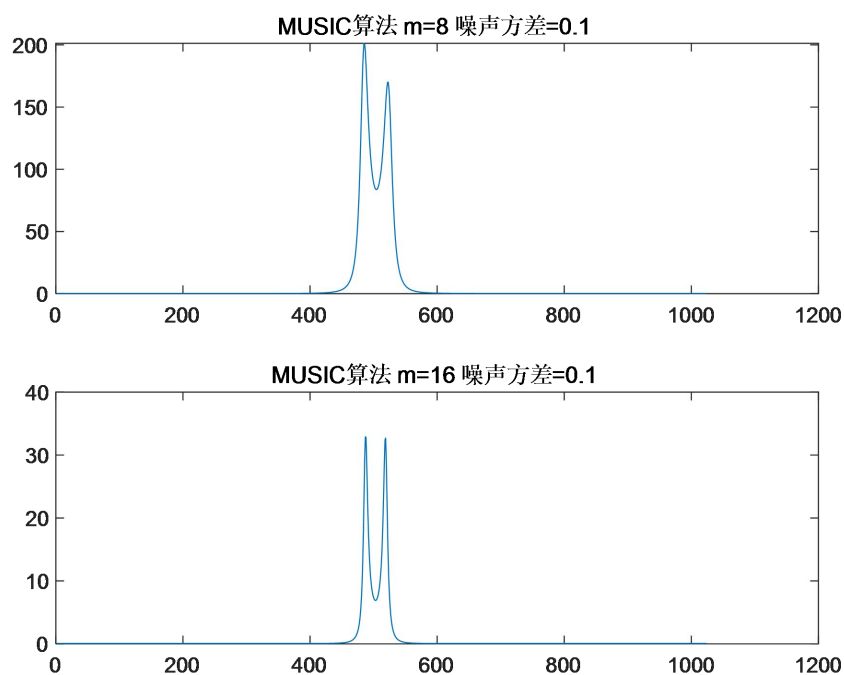
二. 实验原理

MUSIC (Multiple Signal Classification) , 多重信号分类, 是一类空间谱估计算法。其思想是利用接收数据的协方差矩阵 (R_x) 进行特征分解, 分离出信号子空间和噪声子空间, 利用信号方向向量与噪声子空间的正交性来构成空间扫描谱, 进行全域搜索谱峰, 从而实现信号的参数估计。

二. 实验内容

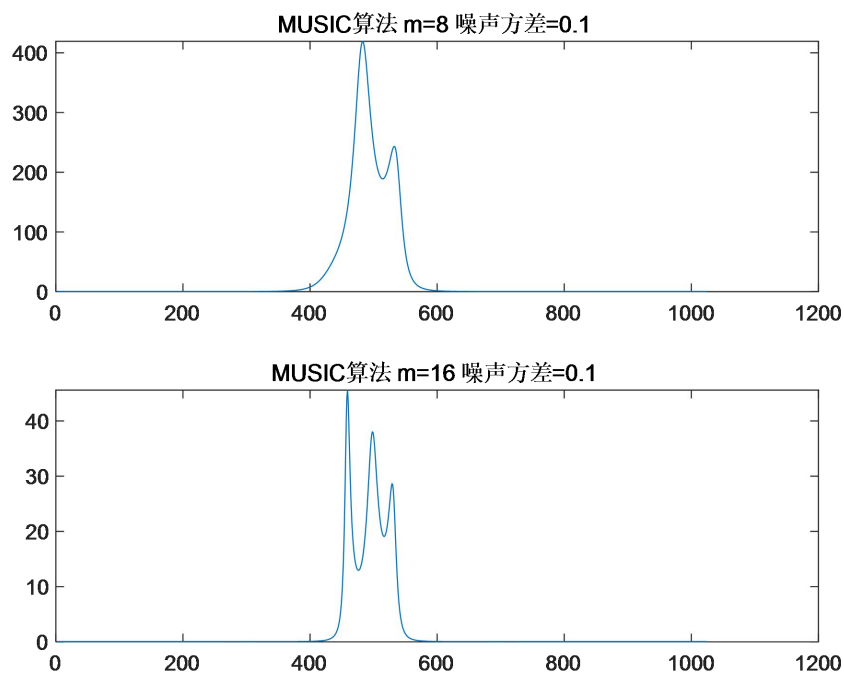
直观感受 MUSIC 算法多重信号分类：

谐波频率开始设为 0.5 0.52 并利用 MUSIC 算法进行区分：



如上所示 阶数为 8 和 16 都可以区分两个频率。

当我们设置谐波个数为 3 个，分别为 0.5 0.52 0.54 则如下所示：



可以观察到 16 阶成功分辨出三个信号，而 8 阶并没有分辨出三个信号。

个人理解：

因为 MUSIC 算法是利用子空间解的正交性，所以比 Levinson 递推和 burg 递推的预测分辨能力都要强。Levinson 递推法和 burg 递推法主要还是基于自相关矩阵估计 AR 系数，进行功率谱分辨，因为 burg 递推考虑前向和后向误差，所以比 Levinson 递推更加稳定和精确，但是序列长度不能太长。MUSIC 算法则跳出思维，直接进行特征值分解，利用矩阵解子空间与噪声子空间相互正交，从而进行功率谱的分辨，较为数学一点，更为精确和具有更高分辨能力。

第五部分 实验心得

本次实验主要是学习实践现代谱估计的几种方法：AR 谱估计，Levinson 递推法，Burg 递推法，MUSIC 算法四个部分。整体实验基于 AR 自相关矩阵，来进行功率谱分辨相近频率信号为目的，使我对于这四种方法与经典谱估计的区别和分辨能力有了直观的感受。同时，在实践期间，我对于这四种方法的工作原理有了深刻的理解，明白这些方法之间的区别和各自的局限性。AR 谱估计是最普通的方法，就是解矩阵的解（利用矩阵的逆直接求解，比较暴力）；Levinson 递推则是考虑前向预测误差，使前向预测误差最小，进而估计 AR 矩阵系数，进而求解；Burg 递推则是同时考虑前向与后向误差，使二者都最小，进而计算 AR 矩阵的系数，但这也使得其信号序列长度不能过长。MUSIC 算法则与前三种算法都不同，是解决多重信号分类问题，利用矩阵解的子空间的正交性，求解功率谱，更加数学化，更加准确，分辨率更高。