



北京理工大学  
Beijing Institute of Technology

# 本科生实验报告

课程名称: 高级数字信号处理  
实验名称: 现代谱估计实验

任课教师:	田黎育		实验教师:	田黎育			
实验日期:	2025 年 11 月 17 日		实验地点:				
实验类型:	<input checked="" type="checkbox"/> 原理验证		<input type="checkbox"/> 综合设计	<input type="checkbox"/> 自主创新			
学生姓名:	闫子易	班级:	13212302	学号:	1120230621		
学院:	集成电路与电子学院		专业:	电子科学与技术			
组号:		同组同学:					
成绩:							



集成电路与电子学院  
SCHOOL OF INTEGRATED CIRCUITS  
AND ELECTRONICS

## 一、实验目的

①  $f_1, f_2$  两个正弦波叠加，加噪声，SNR

$$|f_1 - f_2| = \Delta f, \text{ 例如, 长度 } 32, \Delta f < \frac{1}{32 \cdot T_s}$$

② AR 模型求解功率谱,  $P=5, 15, 25, 35, \dots$  谱有两个峰

③ SNR 变化, 看功率谱变化

④  $\Delta f$  变化, 看功率谱变化

⑤  $p$  变化, 看功率谱变化

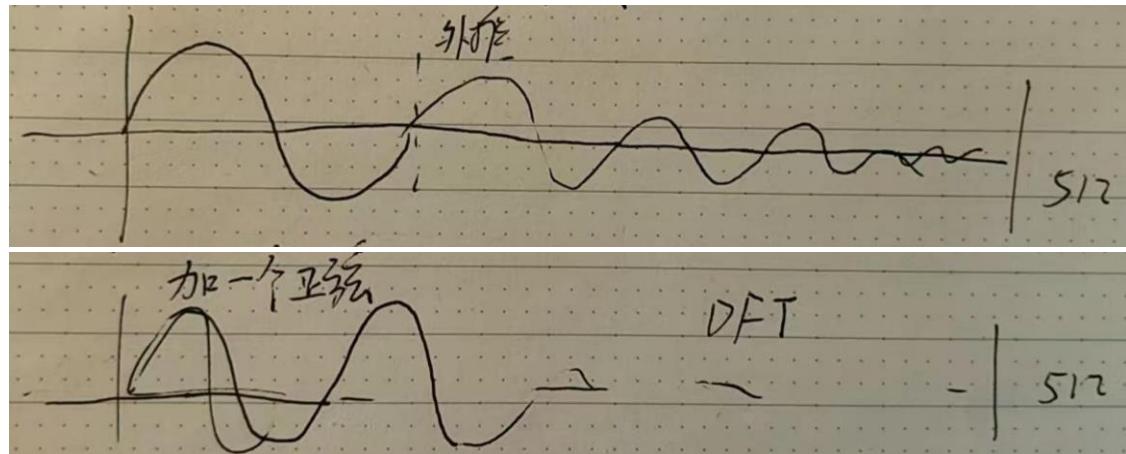
⑥ 两个正弦波幅度比变化, 看功率谱变化

⑦ 预测(外推)波形: 单个正弦波+噪声

$x[n-1] \sim x[n-p] \rightarrow x[n]$   $x[n] \sim x[n-p+1] \rightarrow x[n+1]$  外推多长, 正弦波消失 阶次  $p$  可变,  
看是否外推更长

噪声增加  $\rightarrow$  外推影响

合适的  $P, SNR$ , 加另一个正弦波, 用外推后总数据做 DFT, 是否能出现两个谱峰



$x[n] = \text{两个正弦波} + \text{噪声}$

## 二、实验原理

1、非参数法原理:

- (1) 对序列直接作 DFT 可得到其频谱，再对频谱求平方即可得到功率谱。
- (2) 由 Wiener-Khinchin 定理可知，对序列的自相关函数作 DFT，也可得到功率谱。

即  $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ 。

2、AR 模型自相关法原理:

AR 模型是一种线性模型，假设某个时间序列的当前值  $x(n)$  与过去的若干个值存在线性关系，得到差分方程

$$x(n) = - \sum_{i=1}^P a_i x(n-i) + \omega(n)$$

其中， $a_i$  是模型参数， $P$  是模型阶数， $\omega(n)$  是均值为 0，方差为  $\sigma_\omega^2$  的白噪声。通过估计这些参数，可以构建 AR 模型来拟合时间序列。而序列的自相关函数为

$$R_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)]$$

又  $x(n+m) = - \sum_{i=1}^P a_i x(n+m-i) + \omega(n+m)$ ，且  $E[x(n)\omega(n+m)] = 0$

得  $R_{xx}(m) = - \sum_{i=1}^P a_i R_{xx}(m-i) + E[x(n)\omega(n+m)]$

由于  $\omega(n)$  是均值为 0，方差为  $\sigma_\omega^2$  的白噪声，故

$$E[x(n)\omega(n+m)] = \begin{cases} \sigma_\omega^2 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

则  $R_{xx}(m) = \begin{cases} - \sum_{i=1}^P a_i R_{xx}(m-i) + \sigma_\omega^2 & m = 0 \\ - \sum_{i=1}^P a_i R_{xx}(m-i) & m > -0 \end{cases}$

得到 Yule-Walker 方程

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) & \dots & R_{xx}(-P+1) & R_{xx}(-P) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(-P+2) & R_{xx}(-P+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{xx}(P-1) & R_{xx}(P-2) & \dots & R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) \\ R_{xx}(P) & R_{xx}(P-1) & \dots & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{P-1} \\ a_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

取出该矩阵的  $2 \sim P+1$  行，再将第 1 列移至等号右侧，得到

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) & \dots & R_{xx}(-P+1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(-P+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(P-1) & R_{xx}(P-2) & \dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ \vdots \\ R_{xx}(P) \end{bmatrix}$$

利用矩阵求逆算出  $a_1 \sim a_P$ ，再代入自相关矩阵第 1 行，即可求出  $\sigma_\omega^2$ 。

而  $R_{xx}(m)$  可以通过  $x(n)$  来估计，即

$$\hat{R}_{xx}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x^*(n)x(n+m) & m = 0, \dots, N-1 \\ \hat{R}_{xx}^*(-m) \end{cases}$$

故可以利用 AR 模型通过序列的已知数据拟合后续的序列值。

而 AR 模型的功率谱可表示为

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_\omega^2 \left| \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^P a_i e^{j\omega_i}} \right|^2$$

因此，求出  $a_1 \sim a_P$  及  $\sigma_\omega^2$  后，即可根据上式得到功率谱。

### 三、运行代码及实验内容

代码的参数设计如下：

```
N = 256;
Amplitude_Ratio = 1;
delta_f = 0.005;
f1 = 0.15; % 第一个正弦波频率
A1 = 1;
f2 = f1 + delta_f; % 第二个正弦波频率
A2 = A1 * Amplitude_Ratio;
n = 0:N-1;

theta1 = 2*pi*rand();
theta2 = 2*pi*rand();
% 原始信号（无噪声）
x_clean = A1 * sin(2*pi*f1*n+theta1) + A2 * sin(2*pi*f2*n+theta2);

% 设置目标 SNR (dB)
SNR_dB = 25; % 例如 10 dB
```

包含了实验所需的长度 N, SNR,  $\Delta f$ , 阶数 p, 两个正弦波的幅度比等。

## 1. f1, f2 两个正弦波叠加，加噪声，SNR

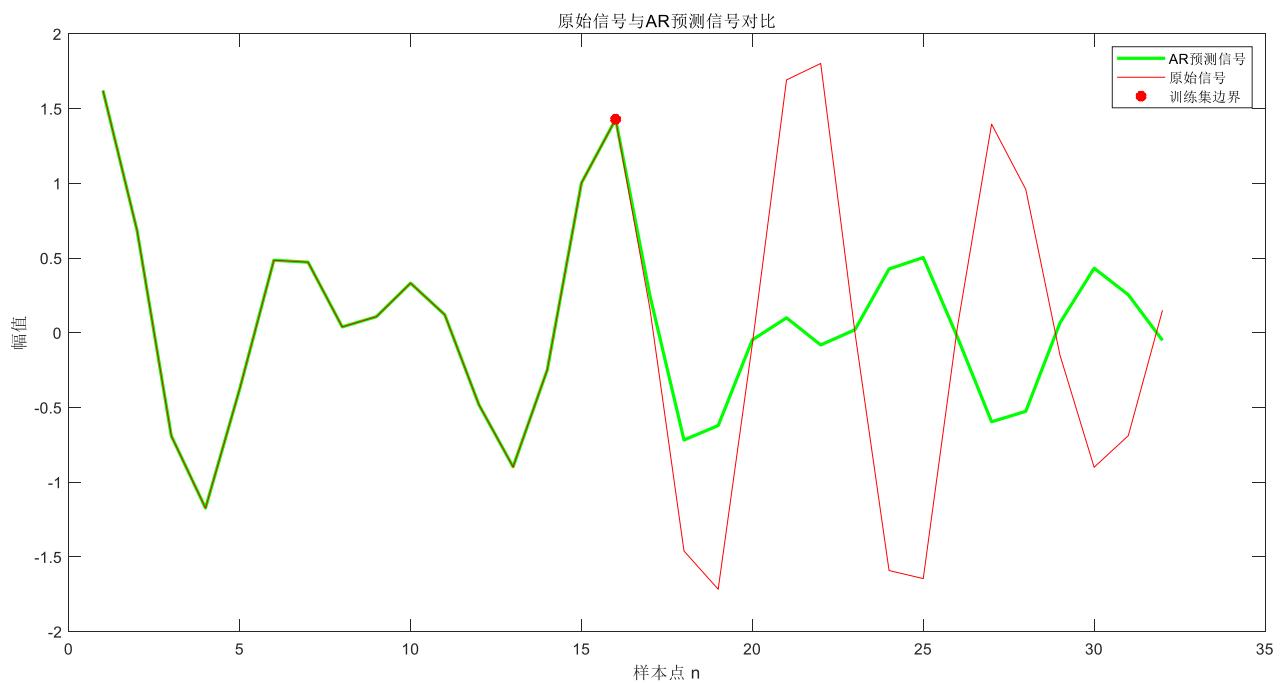
首先，我们设  $f_1 = 0.15$ ,  $f_2 = 0.19$ , 此时  $\Delta f = |f_1 - f_2| = 0.04$ , 长度为 32。两个信号的幅度都为 1, 幅度比为 1, 信噪比  $SNR = 25dB$ ,  $p=15$ , 阶数  $p$  的训练长度为  $1/2N$ 。我用红点标注出了 AR 和 DFT 频谱图中最高的 4 个点及其坐标，方便观察。

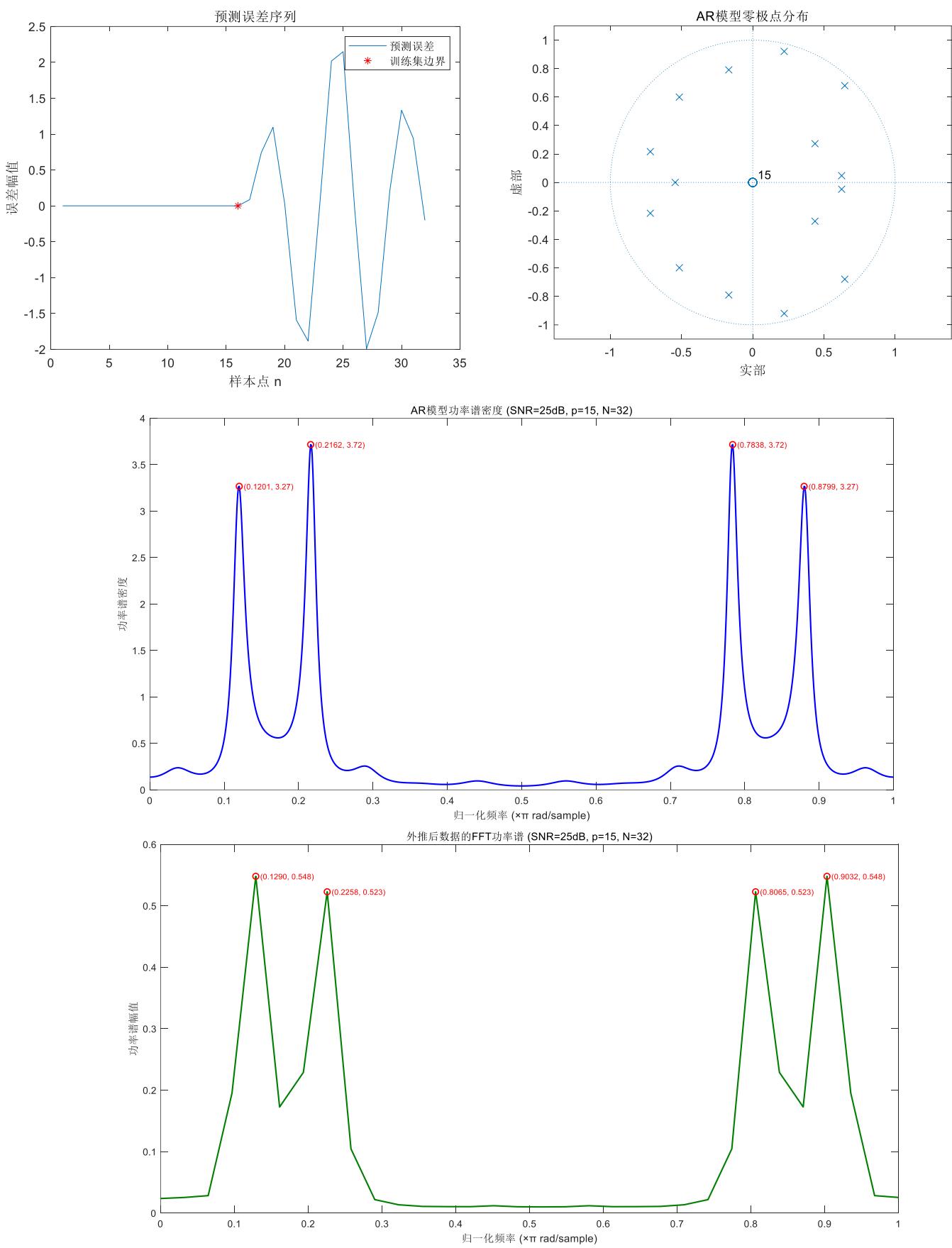
代码中默认  $f_S = 1$ , DFT 分辨率  $\Delta f_{res} = \frac{1}{N \cdot T_S}$ , 这是频谱中相邻两个频率点的间隔,

如果两个正弦波的频率差小于这个分辨率, 那么在 FFT 或常规谱估计中, 它们会“混在一起”, 无法被区分, 两个正弦波的谱峰会重叠, 看起来像一个更宽或更强的单峰, 而不是两个分开的峰, 这在之后的仿真中也会体现。

```
N = 32;
Amplitude_Ratio = 1;
delta_f = 0.04;
f1 = 0.15; % 第一个正弦波频率
A1 = 1;
f2 = f1 + delta_f; % 第二个正弦波频率
A2 = A1 * Amplitude_Ratio;

% 设置目标 SNR (dB)
SNR_dB = 25; % 例如 10 dB
p = 15;
```





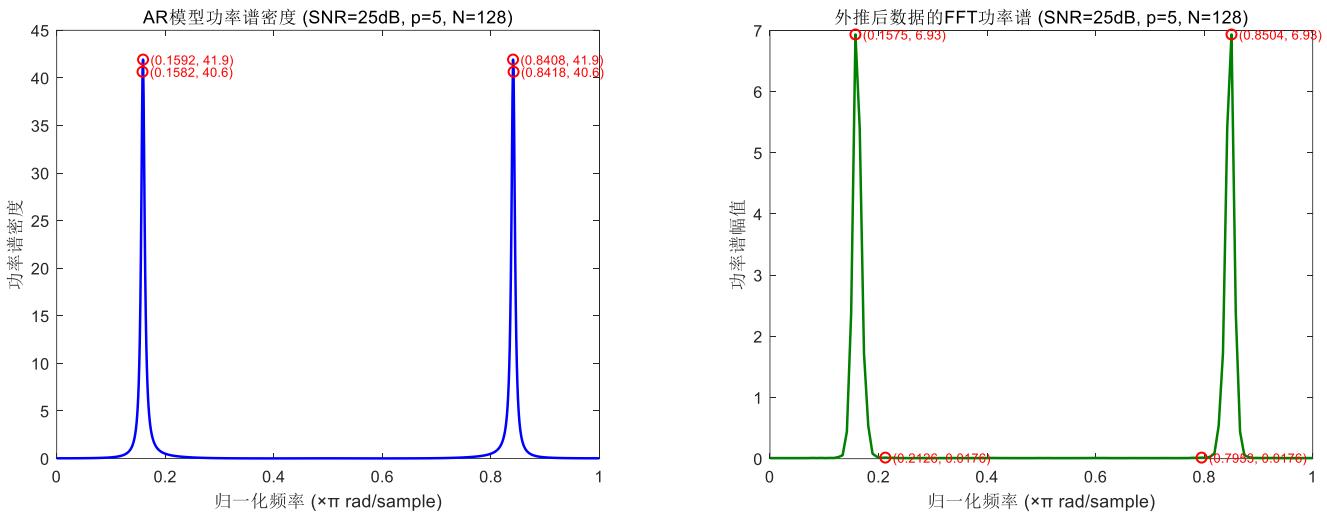
预测结果显示，AR 模型在训练集边界处能较好地延续信号趋势，但在后续样本中误差逐渐增大，说明模型在短时预测中具备一定能力，但受限于模型阶数和噪声影响，长期预测精度下降。误差序列图进一步揭示了预测误差的分布，训练集边界处误差最小，之后波动加剧。

AR 谱图中可清晰辨识出四个主峰，频率分别为 0.1201、0.2162，因为是实信号，所以关于 0.5 对称，相比真实信号还有一定的误差，单 AR 模型成功捕捉到了信号中的主要频率成分，且谱峰较尖锐，频谱幅度也比 DFT 的要大，具有良好的分辨率。相比之下，FFT 谱图虽然也能识别出相应频率，因为  $\Delta f = 0.04 > \frac{1}{N \cdot T_S} \approx 0.03125$ ，但谱峰较宽，分辨率较低，尤其在样本点数较少时更为明显。这验证了 AR 模型在小样本条件下的谱估计优势。此外，通过零极点分布图可以观察到 AR 模型的稳定性，所有极点均位于单位圆内，说明模型构建合理。

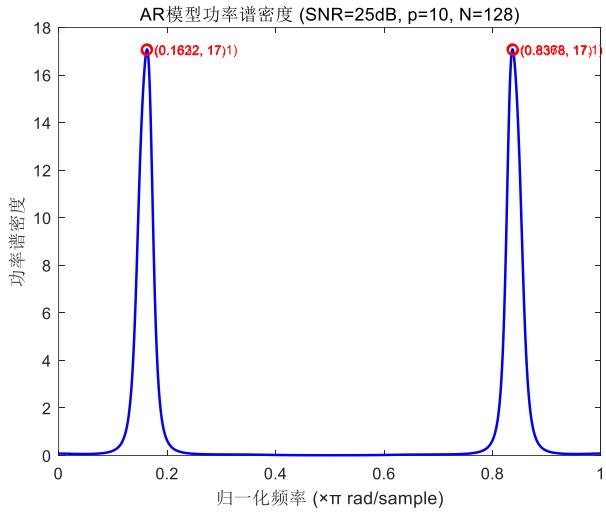
## 2. AR 模型求解功率谱， $p = 5, 15, 25, 35\dots$ 谱是否有两个峰

固定  $N=128$ ,  $\Delta f = 0.02$ ,  $f_1 = 0.15$ ,  $f_2 = 0.17$ , SNR=25dB, 逐渐增大阶数  $p$ , 看频谱的变化。

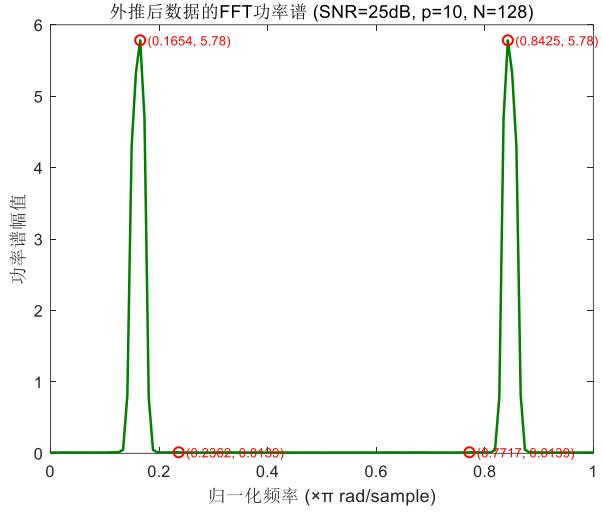
$p = 5$  时



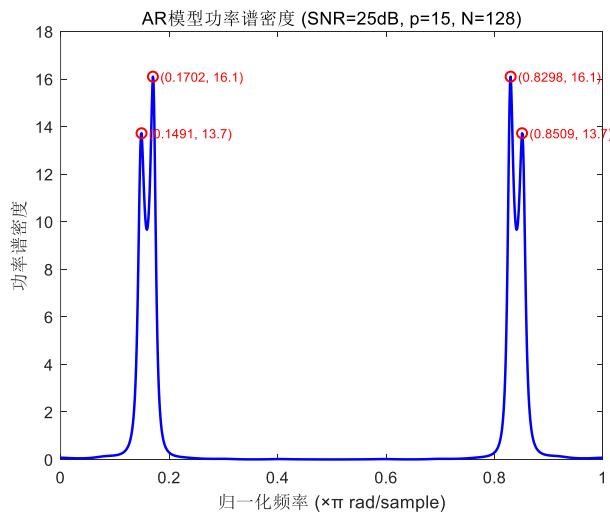
$p = 10$  时



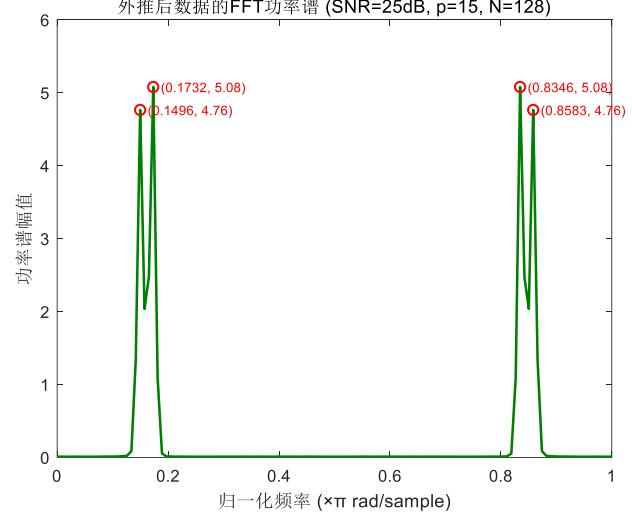
外推后数据的FFT功率谱 (SNR=25dB, p=10, N=128)



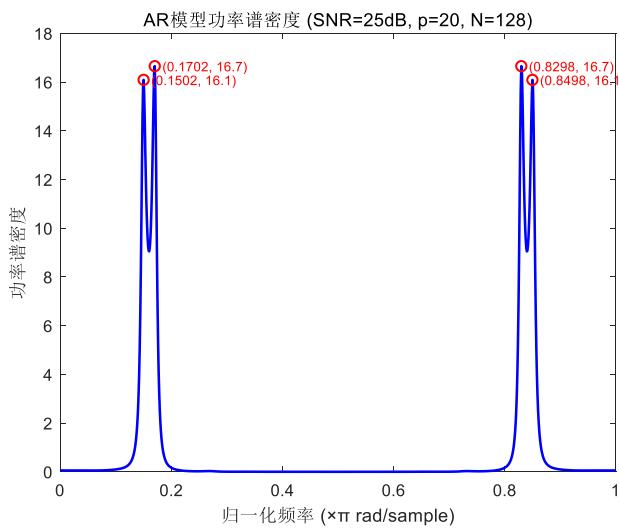
$p = 15$  时



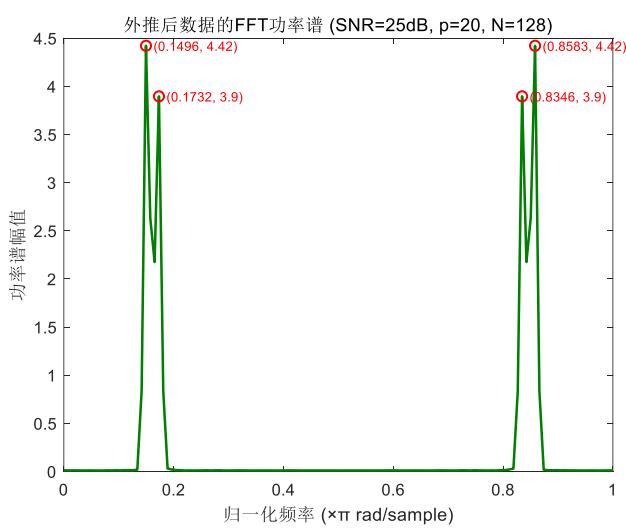
外推后数据的FFT功率谱 (SNR=25dB, p=15, N=128)



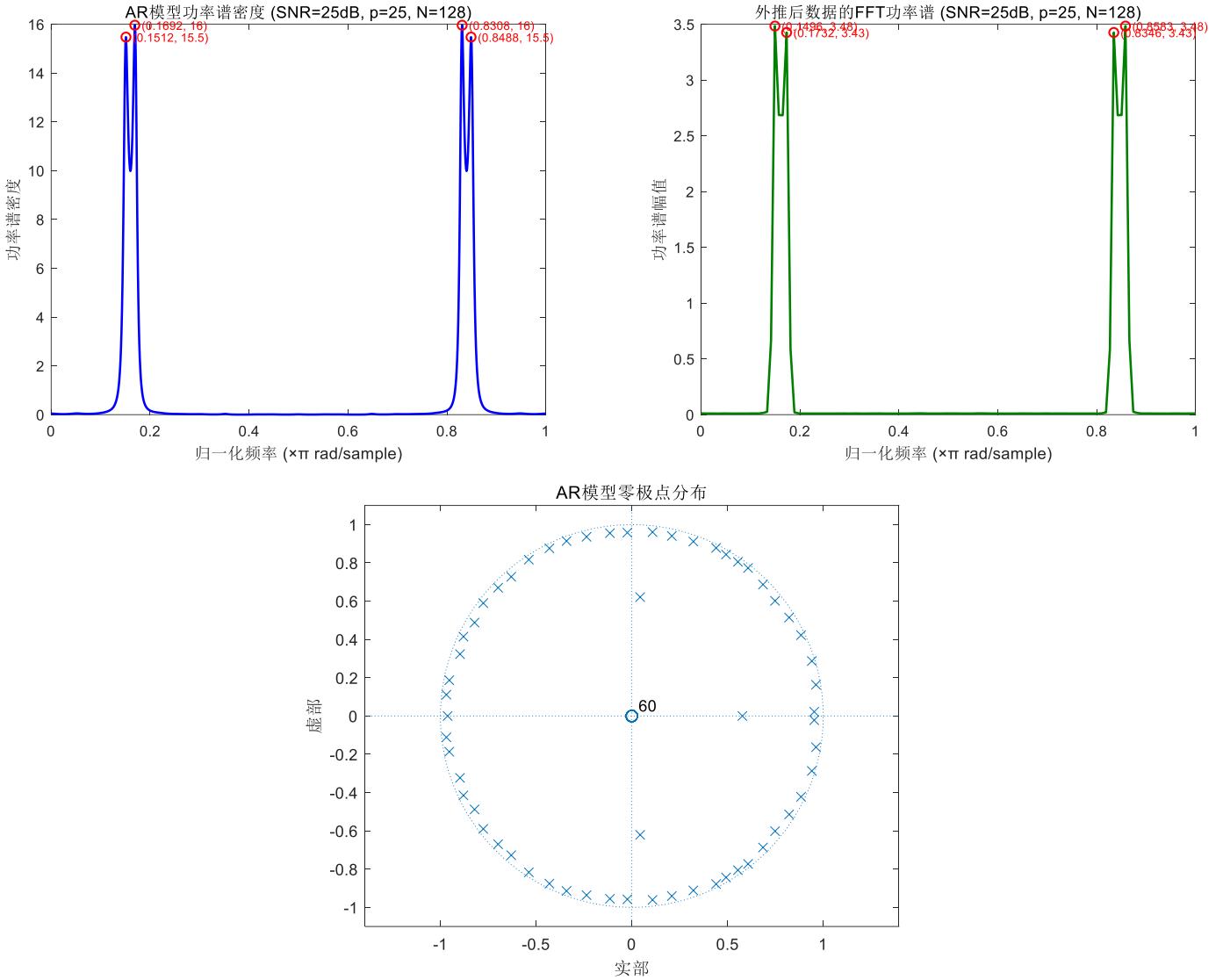
$p = 20$  时



外推后数据的FFT功率谱 (SNR=25dB, p=20, N=128)



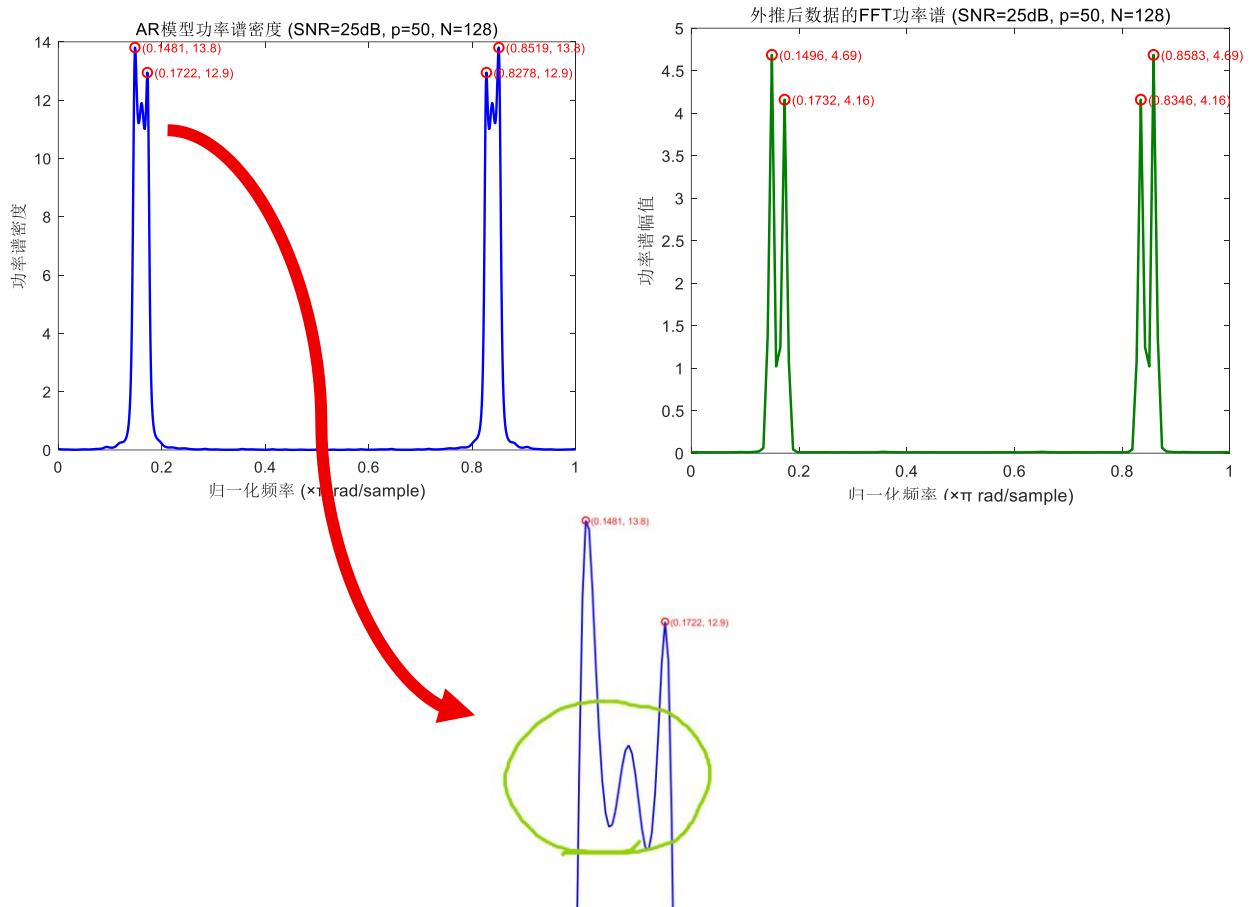
$p = 25$  时



结果显示，随着阶数的增加，AR 模型对频率的分辨能力显著提升。低阶模型（如  $p=5$ ）频谱较为平滑，两个频率成分无法清晰分离，仅表现为一个宽峰或轻微起伏；而在  $p=15$  时，频谱开始出现两个明显的尖峰，频率位置接近理论值，但仍有一定偏移。进一步提高阶数至  $p=25$ ，两个峰值的横坐标为 0.1512 和 0.1692，已经非常接近真实值 0.15 和 0.17，谱峰变得更加尖锐，幅值更高，频率定位也更准确，几乎与原始信号频率一致，说明模型对信号结构的拟合更充分，频谱估计更精细。与此同时，FFT 法对外推信号进行频谱分析，虽然也能识别两个频率成分，但谱峰较宽，分辨率不如 AR 法，尤其在频率间隔较小时，FFT 谱容易出现混叠或峰值偏移。实验还显示，AR 模型的预测误差随阶数增加而减小，零极点分布趋于稳定，进一步验证了高

阶模型在捕捉信号特征方面的优势。可见合理选择阶数  $p$  是提升估计精度的关键。

然而，过高阶数可能引入过拟合，尤其在样本数有限时，模型稳定性和泛化能力需权衡。比如当  $p$  设为 50 时，结果如下



与之前  $p=25$  的结果相比， $p=50$  的频谱虽然在分辨率上有所提升，但也引入了更多的谱峰，将噪声成分误认为信号的部分结构，导致功率谱变得过于复杂，出现了非真实频率处的峰，产生了过拟合现象。

这是高阶 AR 模型在有限样本下对噪声的敏感性增强，导致模型不仅拟合了信号的主要结构，也就是“记住”了噪声的随机波动。AR 模型的功率谱估计公式为：

$$P(f) = \sigma^2 \left| \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi f k}} \right|^2$$

其中  $a_k$  是 AR 系数， $\sigma^2$  是预测误差方差， $p$  是模型阶数。随着  $p$  增大，分母多项式的阶数提高，系统的零极点结构变得复杂，频率响应函数  $H(f)$  的分辨能力增强，

但也更容易在频率轴上形成尖锐的响应峰。

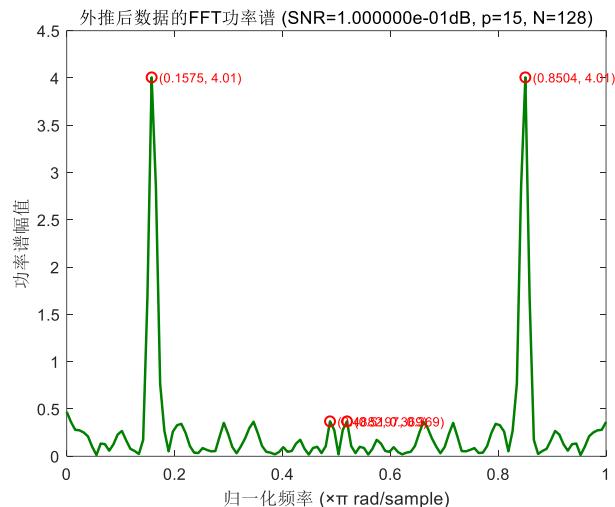
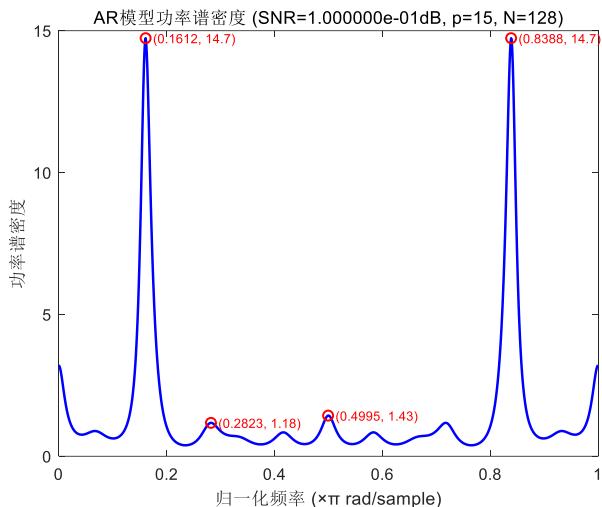
在理想情况下，这种增强有助于分辨接近的频率成分。当  $p$  较小时，分母多项式的阶数有限，零极点分布不足以刻画信号的细节→频谱较平滑，分辨率低。随着  $p$  增加，分母多项式的阶数提高，零极点可以更好地拟合信号的结构→谱峰更尖锐，频率定位更准确。

但在实际中，尤其样本数有限时，估计的自相关函数受噪声影响较大，AR 系数会尝试解释噪声中的随机波动，把它当作“信号成分”。同时，功率谱公式中的分母多项式的零极点分布过于复杂，可能在非真实频率处形成尖锐峰值。

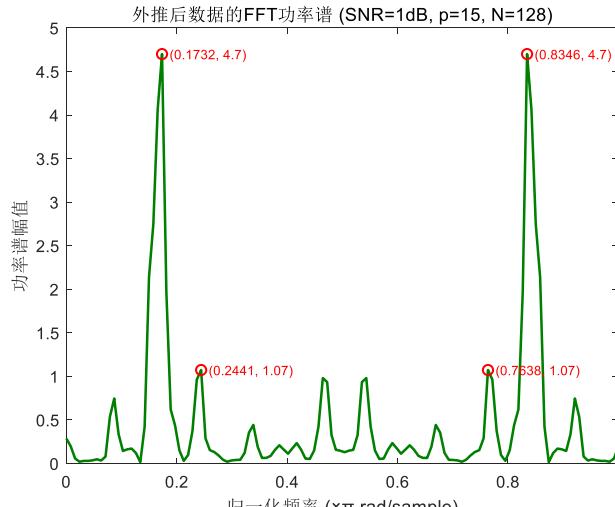
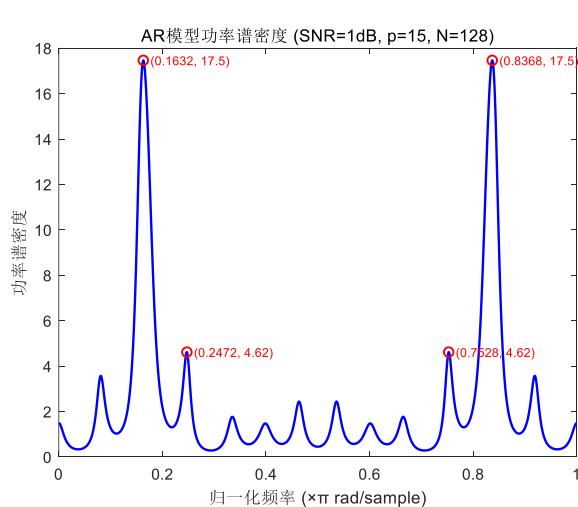
### 3. SNR 变化，看功率谱变化

固定  $N=128$ ,  $\Delta f = 0.02$ ,  $f_1 = 0.15$ ,  $f_2 = 0.17$ , 阶数  $p=15$ , 逐渐增大 SNR 从 0.1dB 到 50dB, 看频谱的变化。

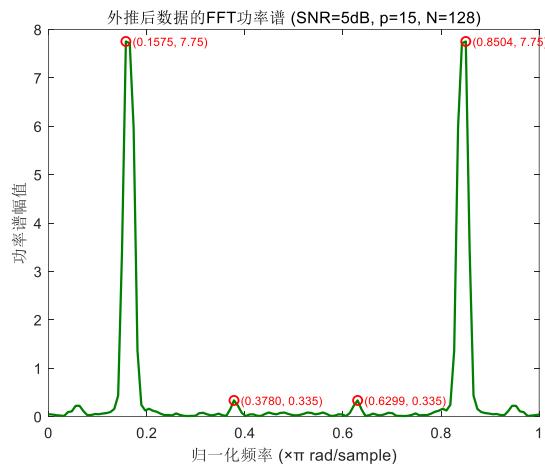
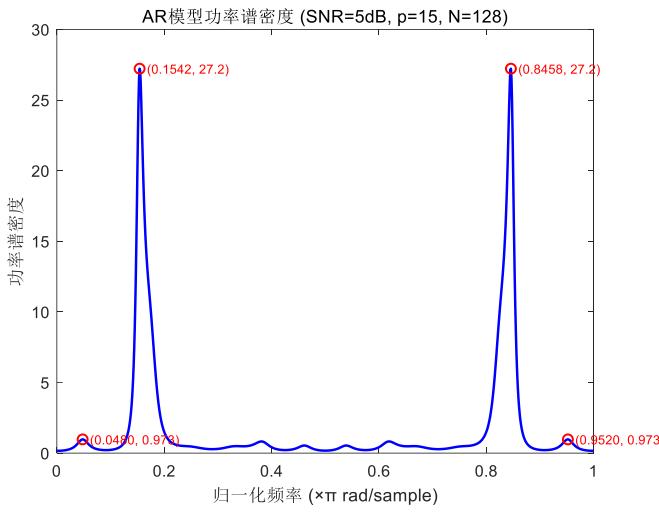
$SNR\_dB = 0.1$  时



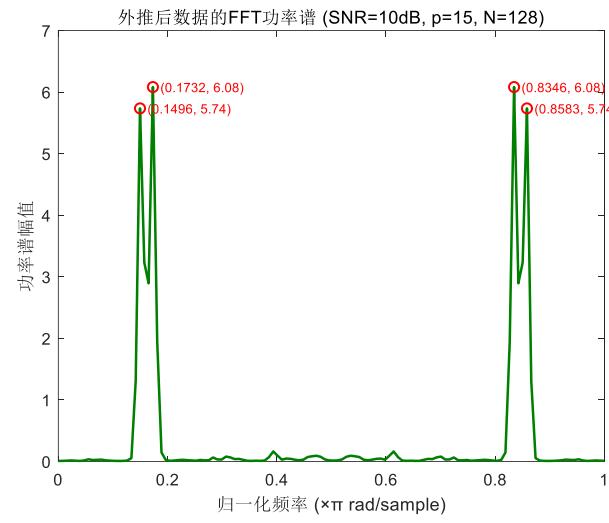
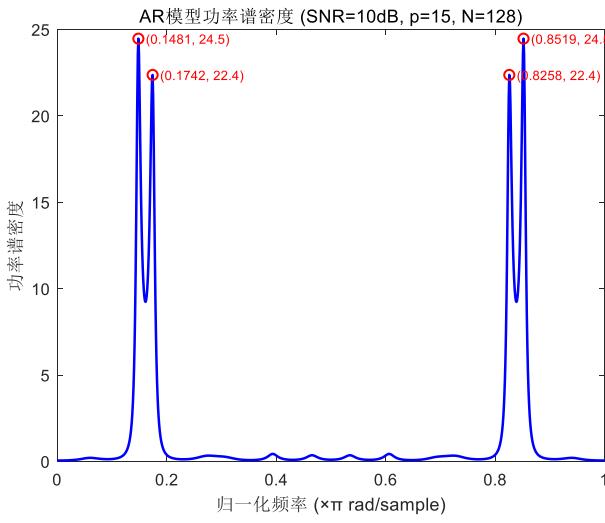
$SNR\_dB = 1$  时



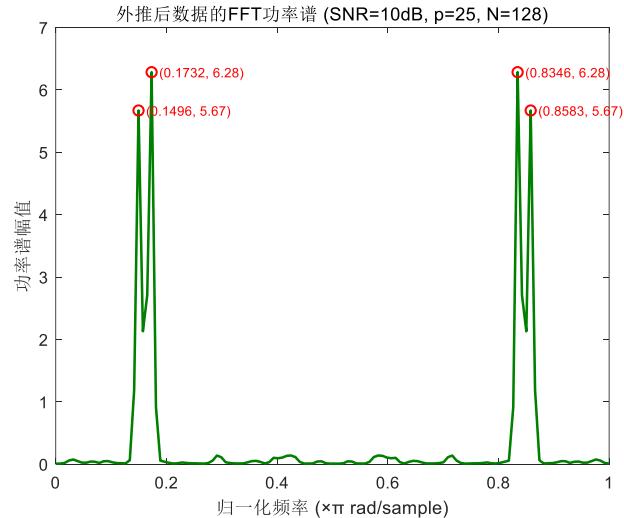
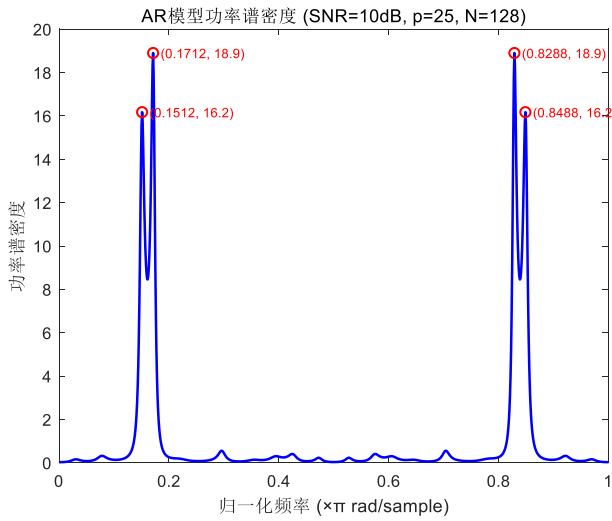
SNR\_dB = 5 时



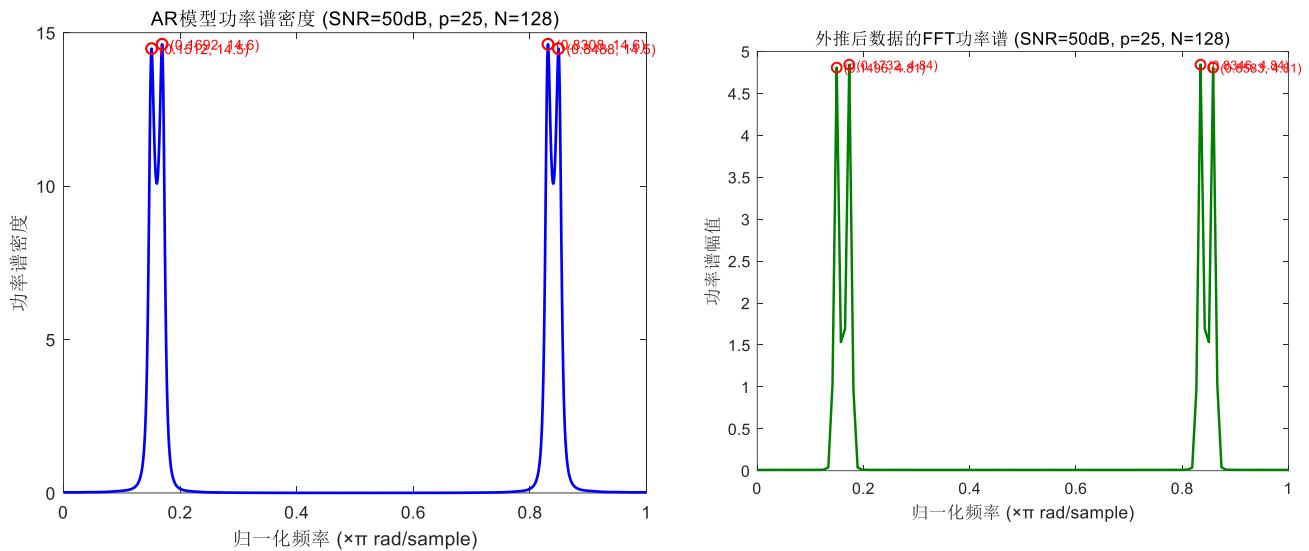
SNR\_dB = 10 时



SNR\_dB = 25 时



SNR\_dB = 50 时

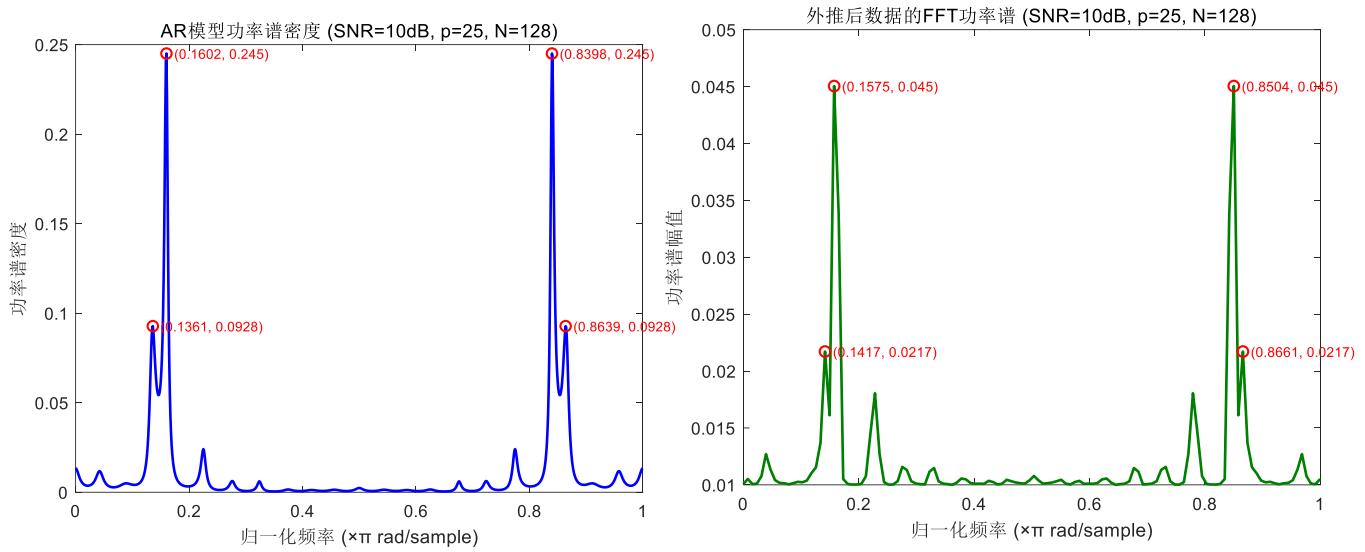


实验结果显示，在极低 SNR（如 0.1dB）时，无论是 AR 模型还是 FFT 方法，频谱图中几乎无法辨识出两个正弦波的频率成分。但随着 SNR 提升至 5dB 以上，谱图开始出现两个明显的尖锐峰，分别对应于两个正弦波的频率位置，显示出 AR 模型对频率成分的敏感性和高分辨率特性。进一步提高 SNR 至 10dB 及以上，谱峰高度迅速增加，背景噪声影响显著减弱，频率定位更加准确，两个峰值之间的间隔清晰可辨，且谱图对称性良好。在 SNR 达到 50dB 时，AR 谱几乎呈现理想状态，两个频率成分以极高的尖锐度和稳定性展现，谱峰高度远高于噪声底部。在中高 SNR 条件下表现较好。

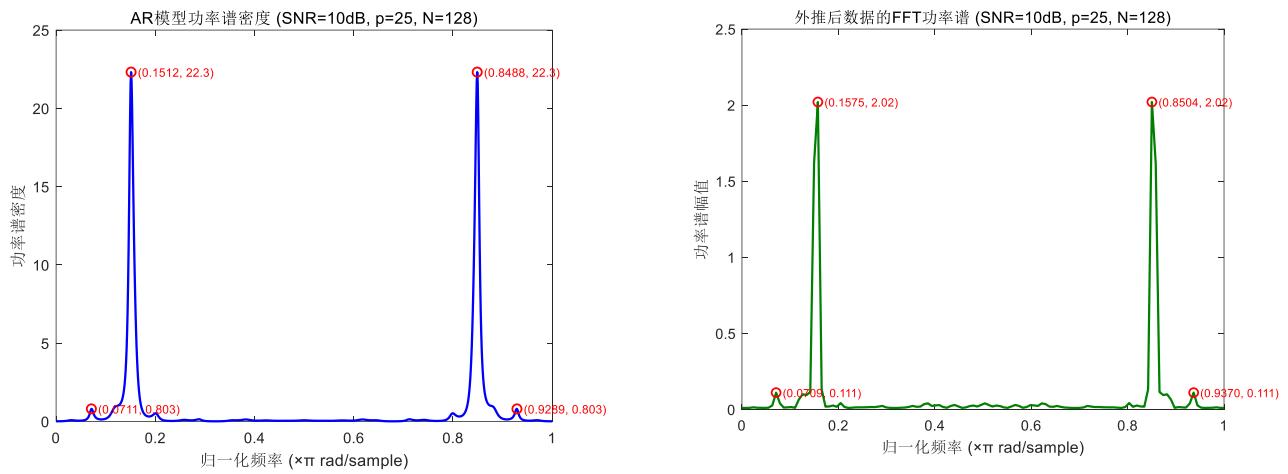
#### 4. $\Delta f$ 变化，看功率谱变化

固定  $N=128$ ,  $f_1 = 0.15$ , 阶数  $p=25$ ,  $SNR=10dB$ ,  $\Delta f$  = 从 0.001 增加到 0.02, 看频谱的变化。

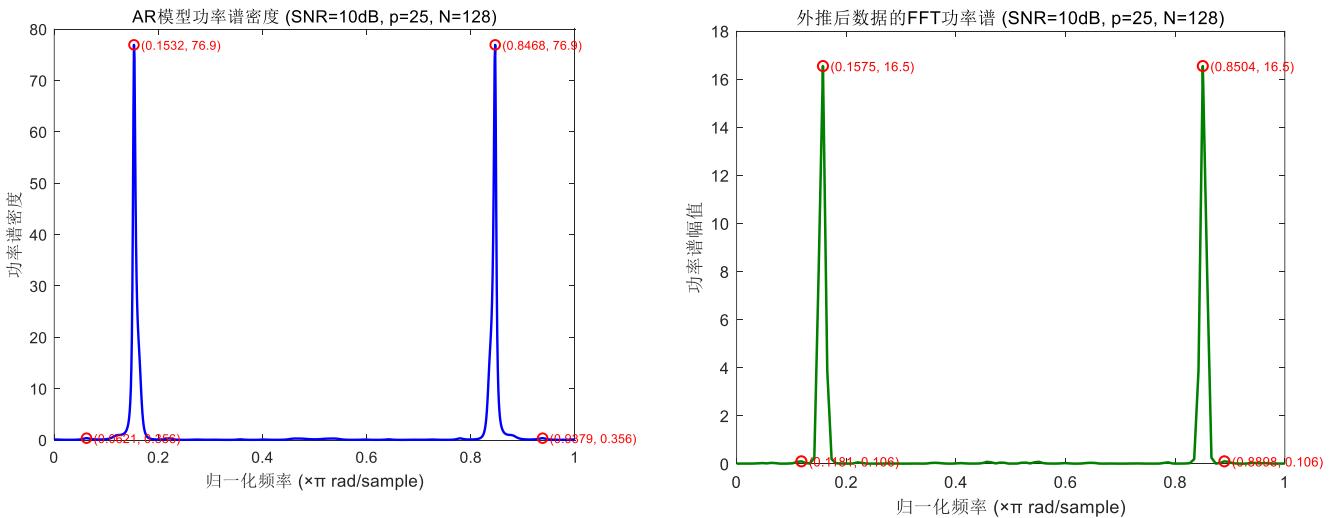
$f_1 = 0.001$  时



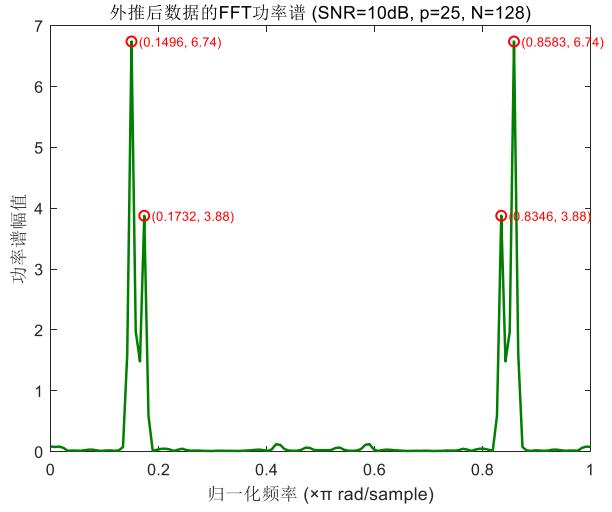
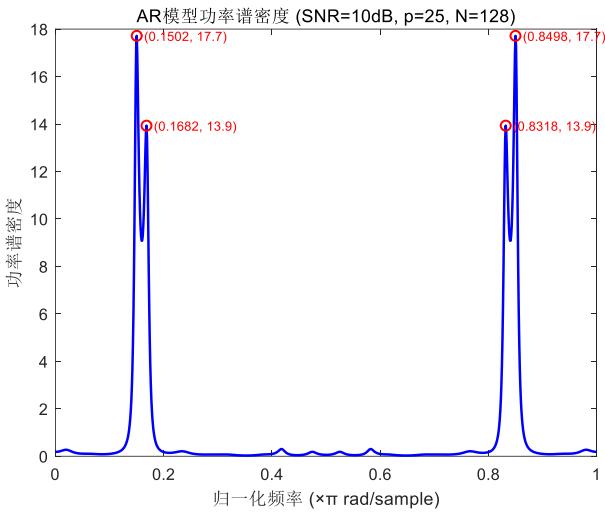
$f_1 = 0.005$  时



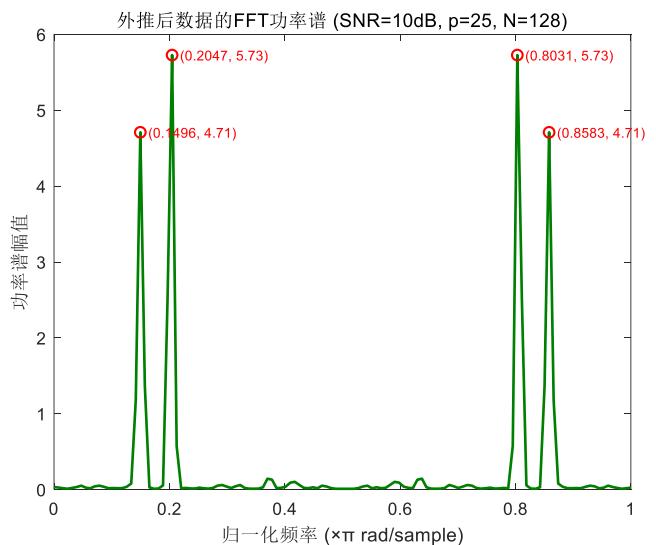
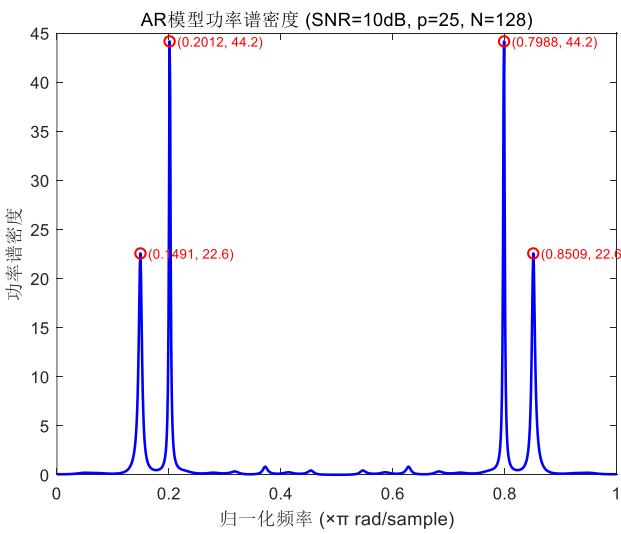
$f_1 = 0.01$  时



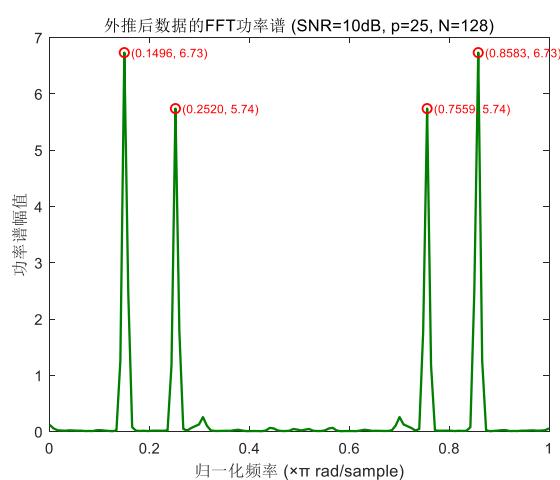
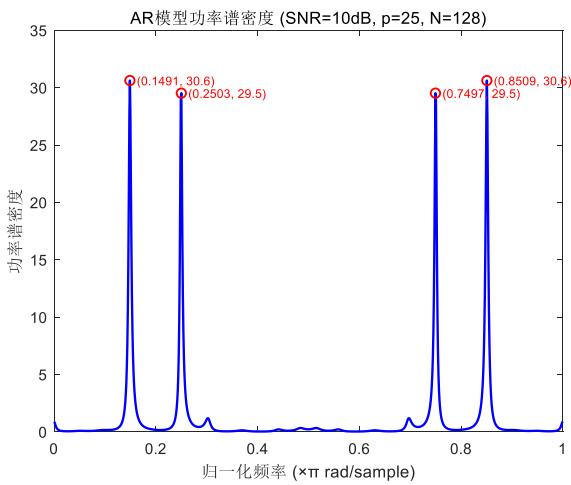
$f_1 = 0.02$  时



$f_1 = 0.05$  时



$f_1 = 0.1$  时

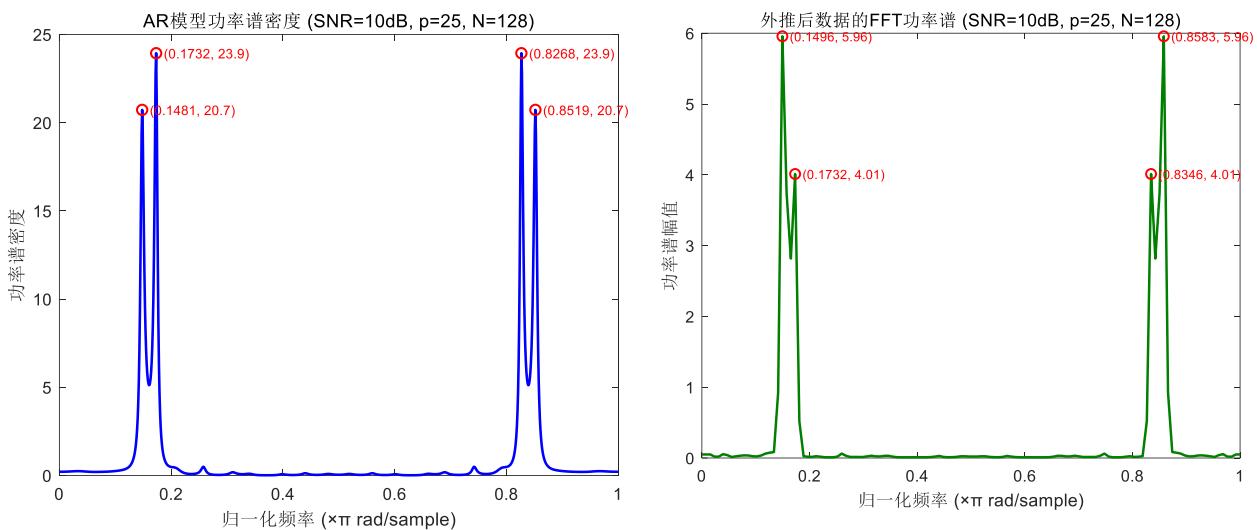


当  $\Delta f$  很小（接近 0.001）时，AR 模型的谱峰表现为一个主峰，峰顶有轻微分叉但谷底未完全打开；外推后做 FFT 的谱则更受窗与基线起伏影响，常呈现较宽的峰和不稳定的次峰，容易把近邻能量混作一体。随着  $\Delta f$  增大到接近 DFT 的基本分辨率（约  $1/N$ ），AR 谱开始出现更明确的双峰，峰间谷值下降、两峰坐标向  $f_1$  与  $f_2$  收敛，且峰值高度更对称，说明  $p=25$  在该 SNR 下提供了稳定的窄带分辨力；同时零极点图上极点更靠近对应谐振频率，体现出模型对谐波的“锁定”。继续将  $\Delta f$  增至 0.02，AR 谱的两峰完全分离，主瓣变窄、旁瓣抑制良好，峰值标注与理论频率值更加接近。

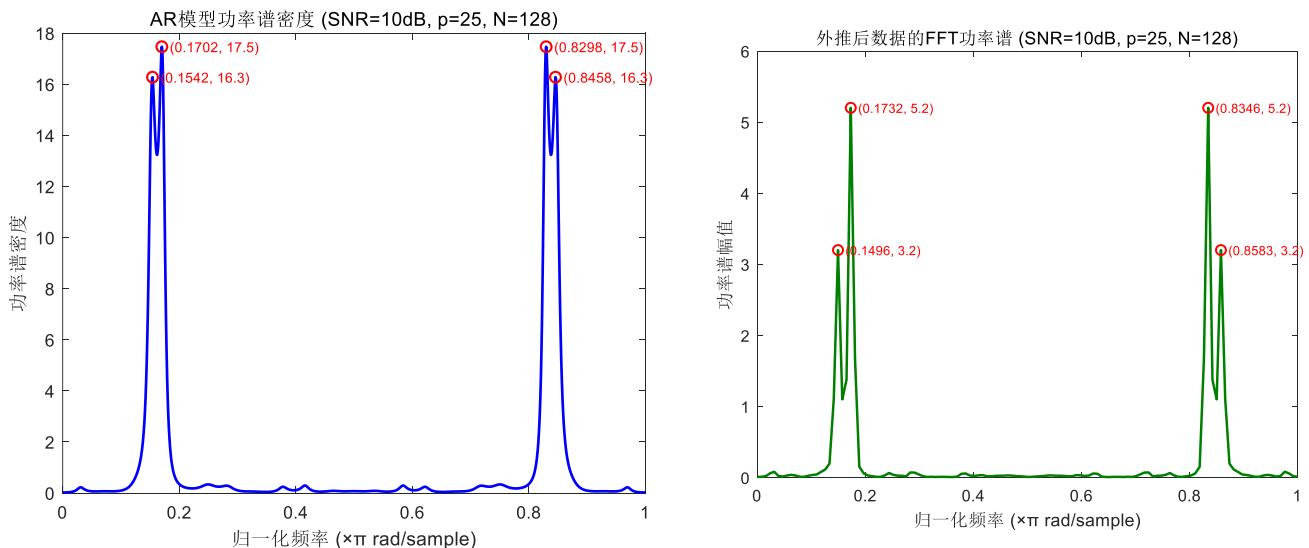
## 6. 两个正弦波幅度比变化，看功率谱变化

固定  $N=128$ ,  $\Delta f = 0.02$ ,  $f_1 = 0.15$ ,  $f_2 = 0.17$ ,  $SNR=25dB$ ,  $p=25$ , 固定  $A_1=1$ , 逐渐增大 Amplitude\_Ratio 从 1 到 10 (注意这里幅度比= $A_2/A_1$ )，看频谱的变化。

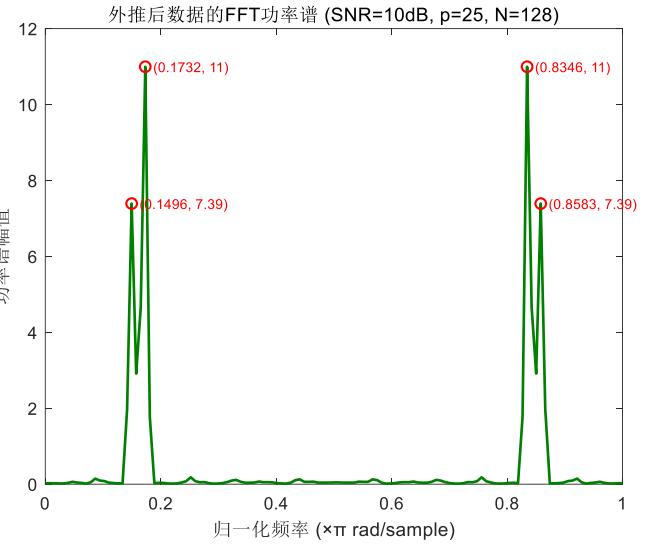
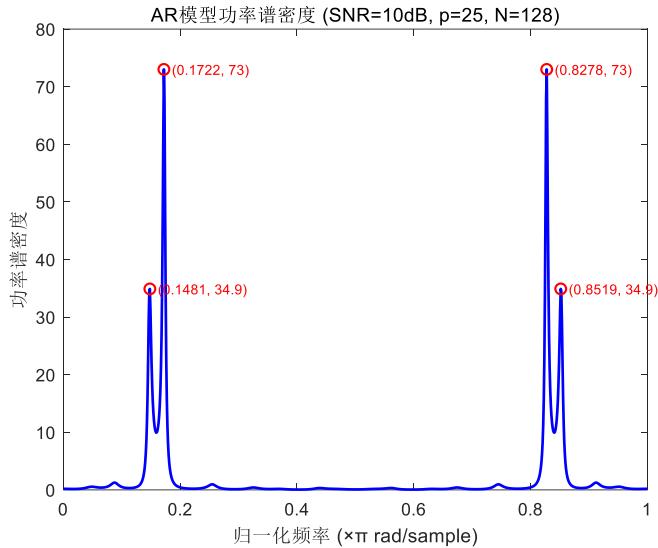
Amplitude\_Ratio = 1 时



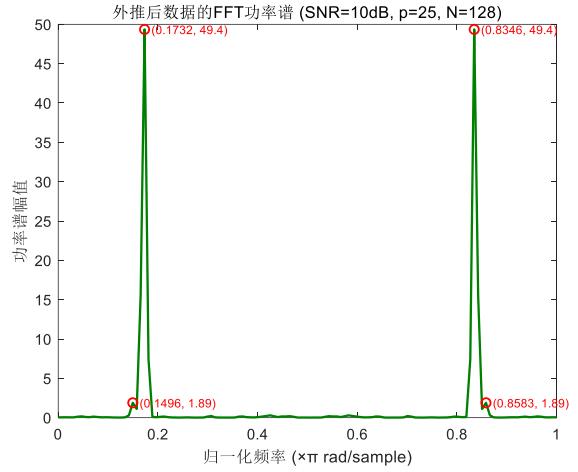
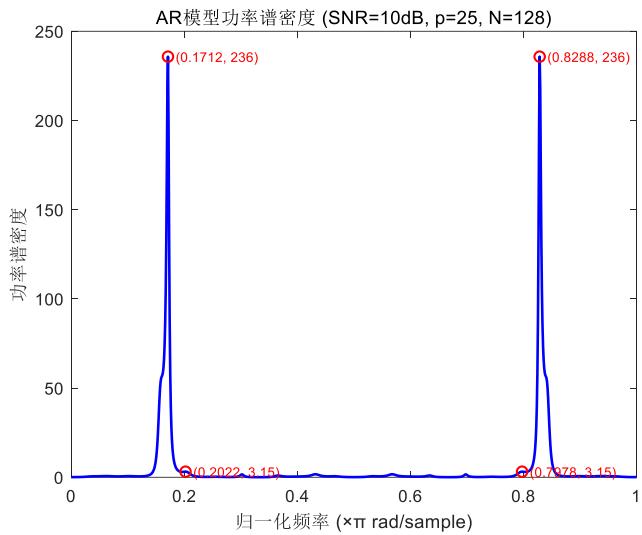
Amplitude\_Ratio = 1.2 时



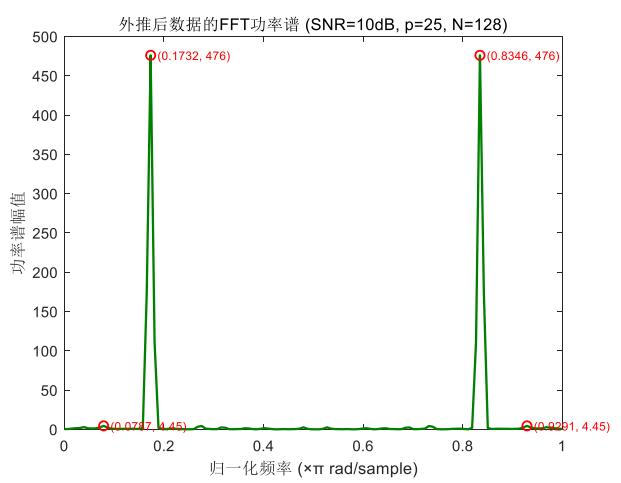
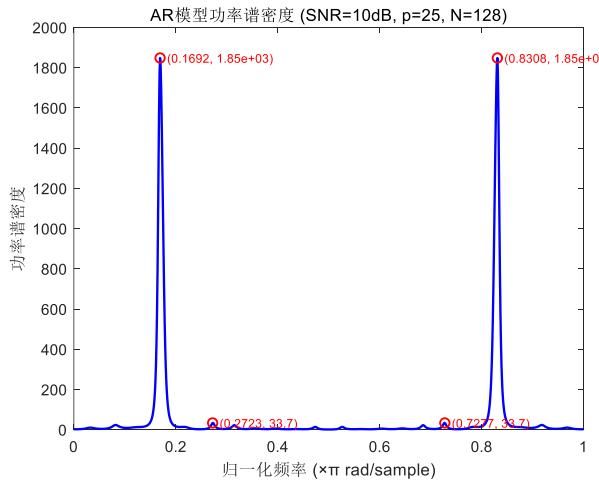
Amplitude\_Ratio = 1.5 时



Amplitude\_Ratio = 3 时



Amplitude\_Ratio = 10 时



当幅度比在 1–3 时，两峰均清晰，AR 与 FFT 给出的峰位一致，AR 的峰更窄；当幅度比增至约 5，强峰主瓣与旁瓣抬升，FFT 中弱峰更容易落到强峰肩部，分辨率下降，外差与高分辨插值能缓解；当幅度比逼近 10， $f=0.17$  的强峰主导谱能量， $f=0.15$  的弱峰在 FFT 中对比度显著降低，已经无法通过 AR 或 DFT 来分开两个谱峰。

FFT 的频率分辨率为  $\Delta f=1/N=0.0078125$ ，而两频率间隔为  $f_2-f_1=0.02$ ，略高于分辨率极限，因此在低幅度比时两峰可见。但当  $A_2 \gg A_1$  时，强分量的谱泄漏会在频域中形成宽主瓣和旁瓣，弱分量的谱峰可能落入强分量的旁瓣区，导致其功率估计值降低甚至不可见。

## 7. 两个正弦波幅度比变化，看功率谱变化

预测(外推)波形：单个正弦波+噪声

$$x[n-1] \sim x[n-p] \rightarrow x[n] \quad x[n] \sim x[n-p+1] \rightarrow x[n+1]$$

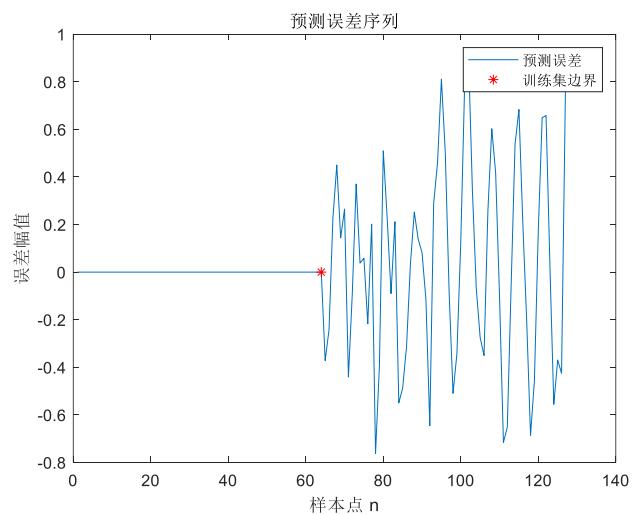
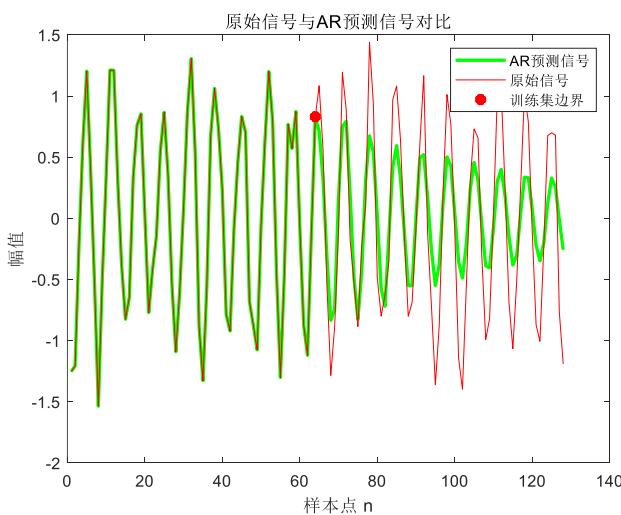
外推多长，正弦波消失 阶次  $p$  可变，看是否外推更长

噪声增加 → 外推影响

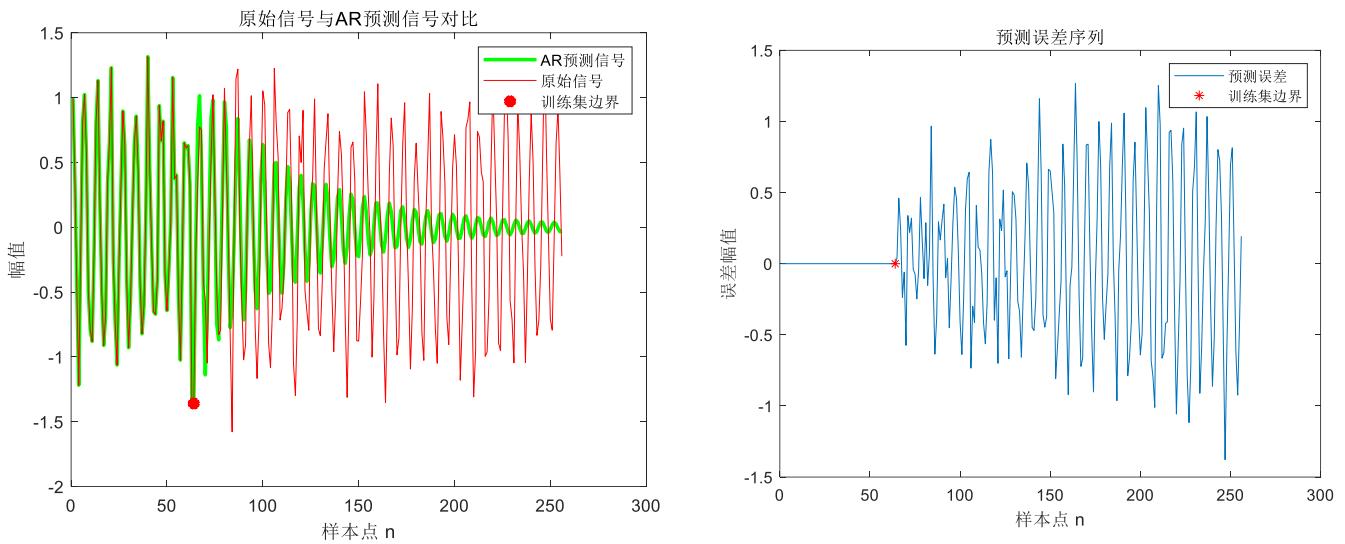
合适的  $P, SNR$ ，加另一个正弦波，用外推后总数据做 DFT，是否能出现两个谱峰

首先，固定  $\Delta f = 0.02$ ,  $f_1 = 0.15$ ,  $f_2 = 0.17$ ,  $SNR = 10dB$ ,  $p = 25$ , 固定  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$ ，也就是只有单个正弦波，固定 AR 的训练长度为 64，逐渐增大外推后总长度  $N$ ，看频谱的变化。

$N = 128$  时

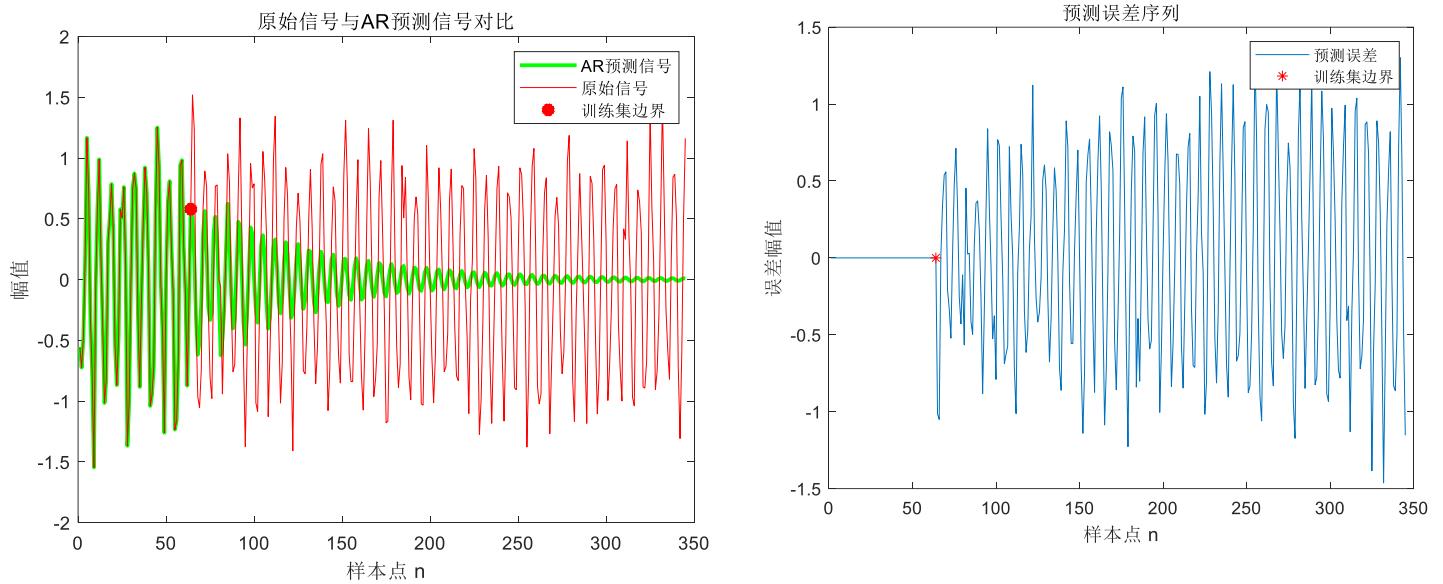


$N = 256$  时



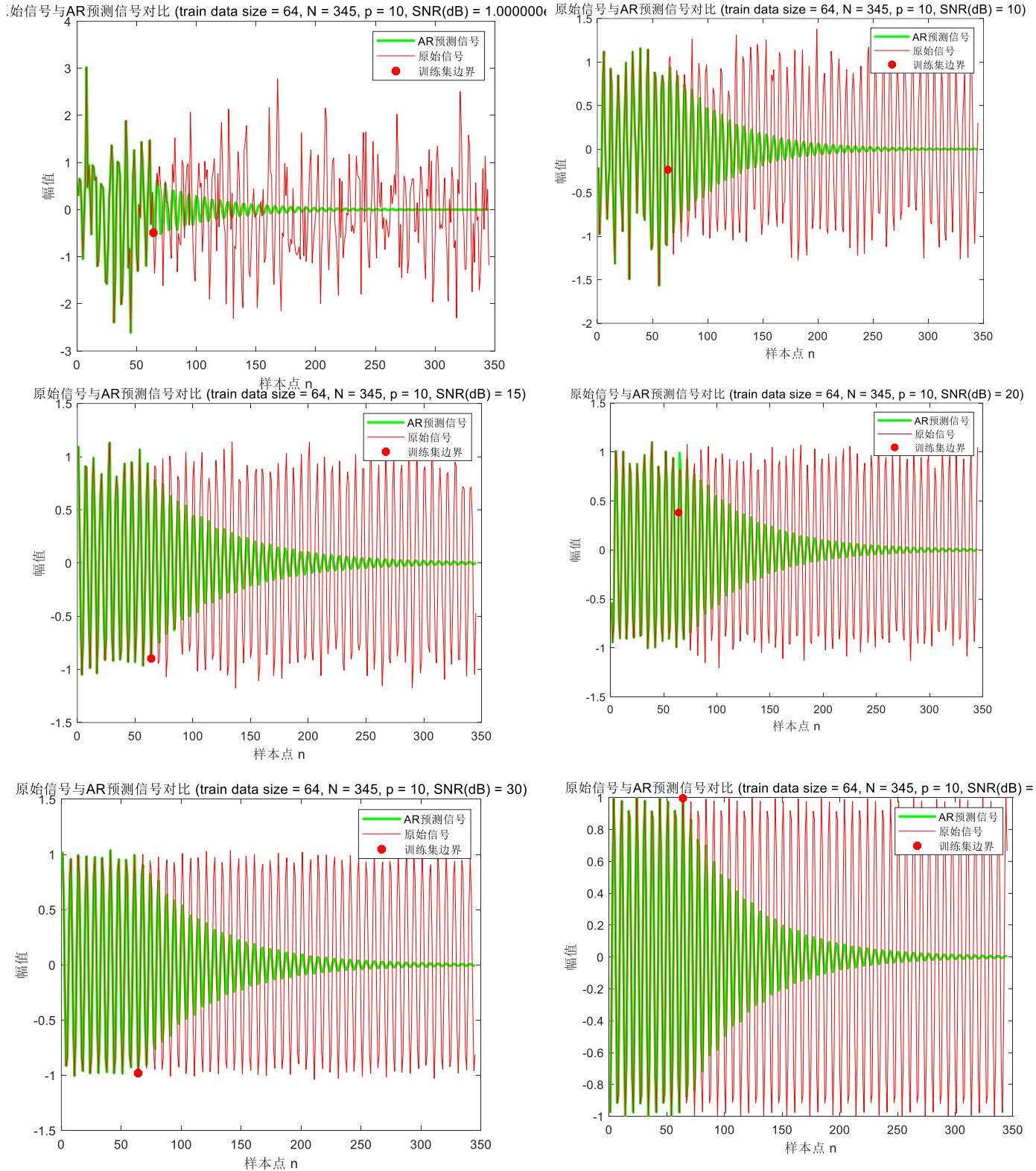
此时还能看见外推的部分有正弦波的形状，尽管幅度已经很小。

经测试， $\text{SNR}=10\text{dB}$ ,  $p=25$ ,  $N = 345$  时，外推的正弦波形状基本消失。



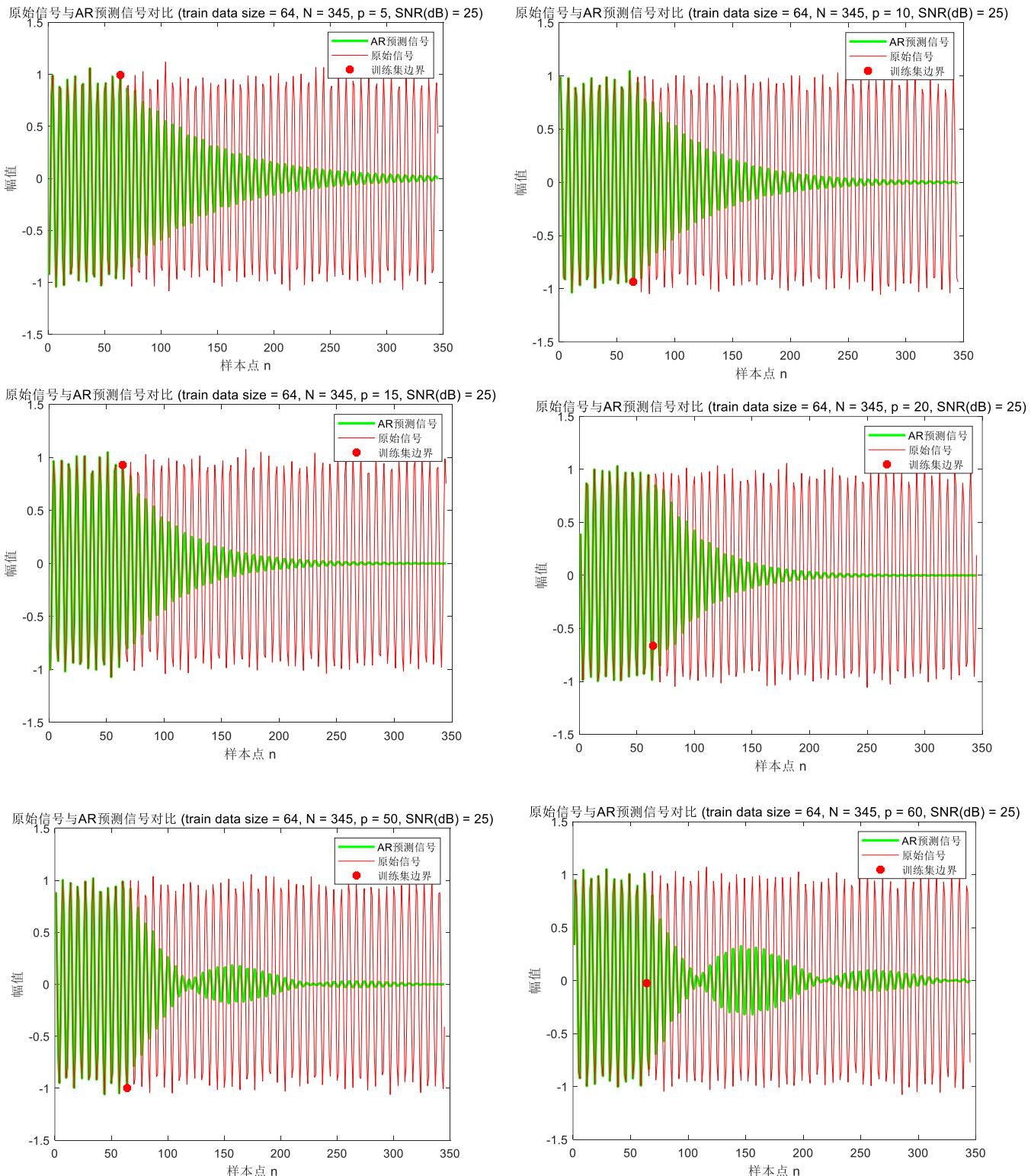
那么此时改变 SNR，外推是否会有影响呢？

我们先改变 SNR 从 0.1 到 50 来看变化



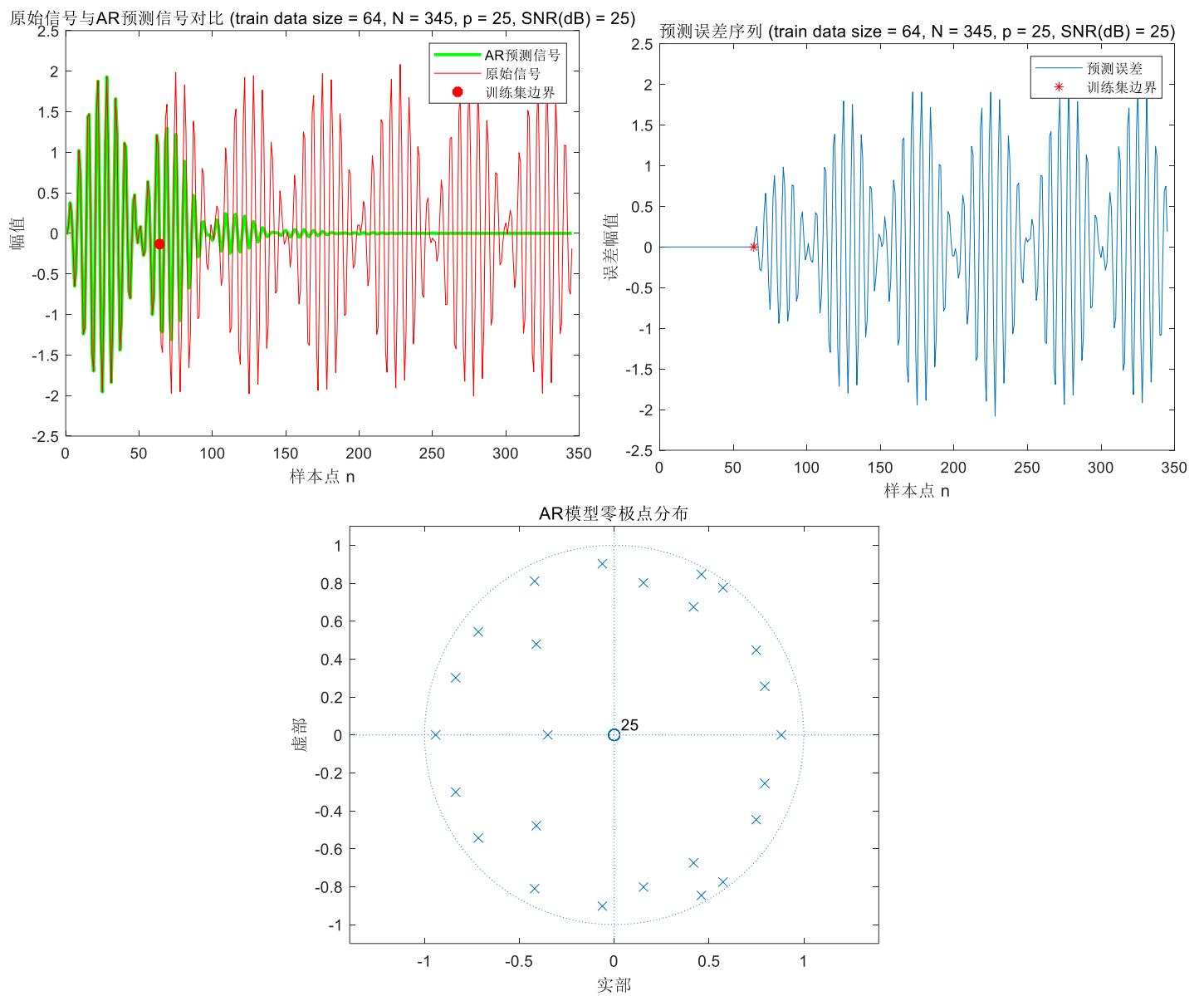
可以看到，整体上随着 SNR 的增加，噪声的减小，信号的外推长度逐渐增大，到同样的 N 值的位置，高 SNR 显然能更好地保留正弦波的形状，说明 SNR 决定系数估计的稳健性与峰值锐度，高 SNR 能显著延长外推有效区间。

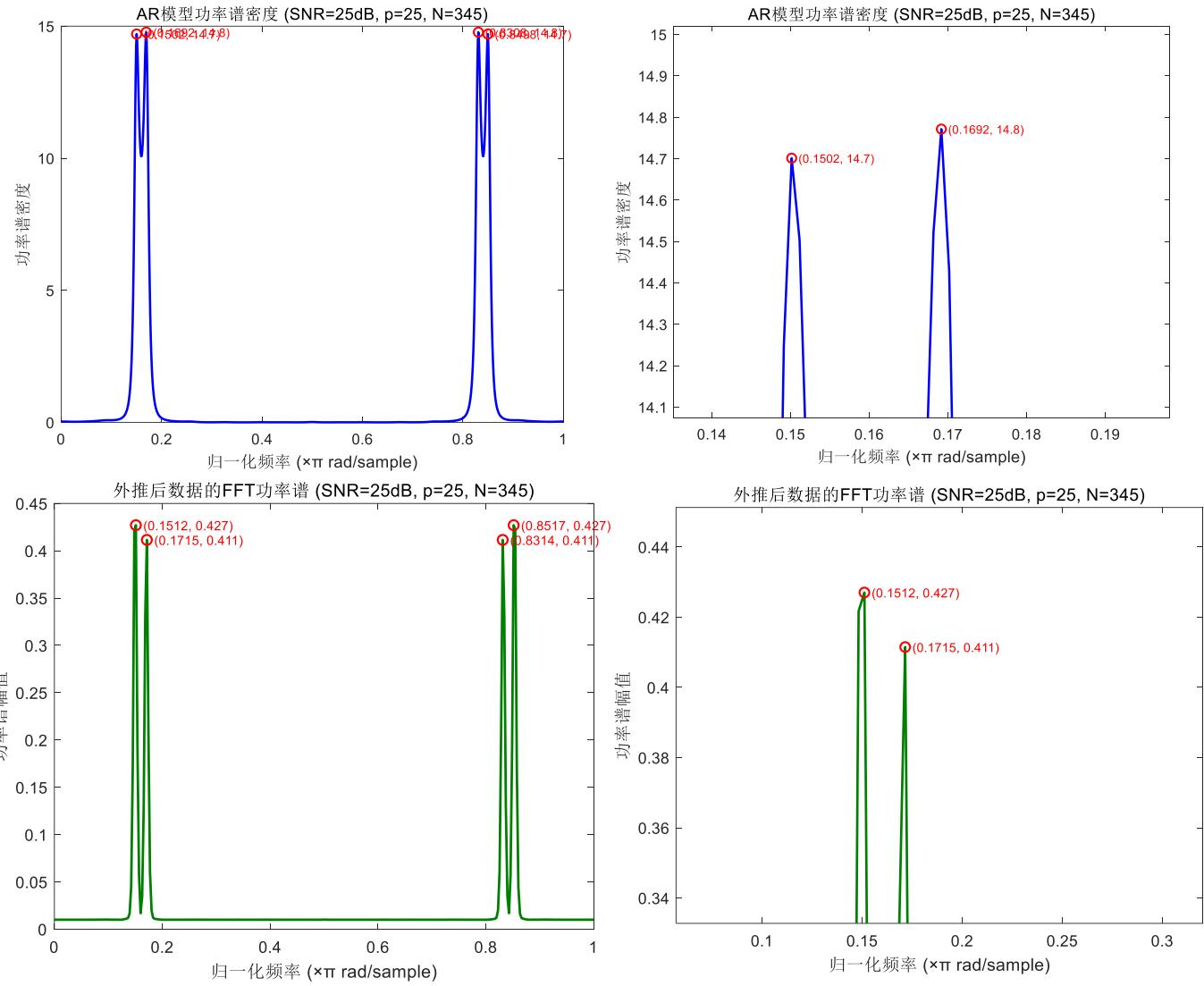
那么再固定 SNR 为 25，逐渐增大阶数 p，看对外推的影响。



可以看到,  $p$  太小 (如 5) 对单正弦的极点拟合不足, 预测能量更快衰减, “正弦消失”更早;  $p$  中等 (10–20) 时, 极点配置更充分, 外推段能维持较长的窄带振荡;  $p$  过大 (50-70) 训练下易过拟合噪声, 零极点分布趋于不稳, 外推出现轻微发散或缓慢漂移, 反而不如  $p=25$  的时候外推效果好。

于是, 我们固定  $N=345$ ,  $p=25$ ,  $\text{SNR}=25\text{dB}$ , 让  $\text{Amplitude\_Ratio} = 1$ , 也就是加入第二个正弦波, 在相同外推长度下做 DFT





首先在前 64 个样本上训练 AR 模型，随后对剩余数据进行外推，得到完整的预测信号。通过对外推后的信号进行 FFT 分析，我们观察其频谱是否能准确反映两个正弦成分。

从结果来看，AR 模型在当前设置下表现出较强的频率分辨能力。FFT 功率谱图中清晰地出现了两个主峰，分别位于 0.1512 和 0.1715 处，与原始信号中两个正弦波的频率高度吻合。这说明在 SNR 为 25dB、阶次 p 为 25 的条件下，AR 模型不仅能够稳定地外推信号，还能保留频率结构，使得后续的频谱分析能够分辨出两个相近频率的成分。值得注意的是，虽然加入了噪声，但由于 SNR 较高，噪声对外推精度的影响有限，未能掩盖信号的主要频率特征。

此外，AR 功率谱也显示出相同的两个峰值位置，进一步验证了模型对频率结构

的保持能力。极点分布图也显示出模型稳定性良好，所有极点均位于单位圆内，说明预测过程不会发散。

综上，在当前参数设置下，AR 模型能够有效地外推含两个正弦波的信号，并在频谱中准确反映其频率成分。

## 实验收获和体会

这次最让我印象深刻的是 AR 模型阶数  $p$  的选择，一开始设  $p=5$  时，频谱图只有一个宽峰，完全分不清两个正弦波的频率；慢慢把  $p$  调到 15，峰开始有了分叉，到  $p=25$  时，两个谱峰的横坐标刚好落在 0.1512 和 0.1692，几乎和理论的 0.15、0.17 一致，尖锐又清晰。但当我把  $p$  调到 50 时，频谱反而冒出了多余的小峰，原来这就是过拟合，模型连噪声的随机波动都当成了信号结构，明白了阶数不是越高越好，得在拟合精度和稳定性之间找平衡。

SNR 的影响也特别直观，当 SNR 只有 0.1dB 时，不管是 AR 还是 FFT，频谱都一片混乱，根本看不到任何峰；调到 5dB 以上，两个峰才慢慢显现；到 25dB 时，AR 谱的峰已经非常尖锐，背景噪声几乎可以忽略。这让我真切感受到，噪声对谱估计的干扰有多直接，高信噪比才能保证频率定位的准确性。还有频率差  $\Delta f$ ，当  $\Delta f$  只有 0.001 时，AR 谱只是一个峰顶略有分叉的宽峰，直到  $\Delta f$  增大到 0.02（接近 DFT 分辨率  $1/128 \approx 0.0078$ ），两个峰才完全分离，这也印证了 AR 模型在分辨近频成分上比 FFT 更有优势。

外推实验的过程也很有启发， $SNR=10dB$ 、 $p=25$  时，外推到 345 个点，正弦波的形状就基本消失了；而把 SNR 提高到 50dB，同样的阶数下，外推长度能明显延长。我还发现  $p$  太小（比如 5）时，外推的信号能量衰减得特别快， $p$  太大又会出现漂移，只有  $p$  在 20 左右时，外推的振荡才稳定。最后加入第二个正弦波，用外推后的信号做 DFT，居然清晰出现了两个对应频率的峰，这让我确信只要参数选得合适，AR 模型不仅能外推信号，还能保留关键的频率结构。