北京理工大学 2019-2020 学年第二学期《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准　　2020年8月20日

一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1. $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$

2. $\dfrac{98}{13}$

3. $\int_0^1 dy\int_0^{\arccos y} f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\arccos y}^{\pi} f(x,y)dx$

4. $2R^2$

5. $3<p\le 4$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解：过 $P(1,2-1)$ 点且垂直于平面 $\pi:2x-y+z=5$ 的直线 L 的参数方程为

$$x=1+2t;y=2-t;z=-1+t;$$ …………（2 分）

代入平面 π 的方程，得

$$2+4t-2+t-1+t=5$$

解得 $t=1$, 故 P 在平面 π 上投影点的坐标为（3，1，0）. …………（5 分）

2. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(1+\varphi') \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-\varphi')+f_2'$$ ………… (3 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f_{11}''\cdot(-\varphi')+f_{12}''](1+\varphi')-f_1'\cdot\varphi''$$ …………(5 分)

3. 解：

$$I=\iiint_V(x+y+z)dxdydz$$

$$=\int_0^1dx\int_0^x dy\int_0^{xy}(x+y+z)dz$$ ………… (3 分)

$$=\int_0^1dx\int_0^x[(x+y)xy+\frac{1}{2}x^2y^2]dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{6}x^5]dx=\frac{7}{36}.$$ ………… (5 分)

4. 解： $gradu=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=(2x,z,y)$ ………… (2分)

$$div(gradu)=div(2x,z,y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(z)+\frac{\partial}{\partial z}(y)$$

$=2.$ …………(5 分)

三、解： 记 $\int_0^t uf(u^2+t^2)du=g(t),\quad F(x)=\int_0^x g(t)dt,$

故 $F'(x)=g(x)=\int_0^x uf(u^2+x^2)du$ …………(3 分)

令 $y=u^2+x^2$，则 $F'(x)=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{2x^2} f(y)dy,$ …………(6 分)

得 $F''(x)=2xf(2x^2)-xf(x^2).$ …………(8 分)

四、解：所求转动惯量 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$ …………（1 分）

做球面坐标变换 $\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}$ $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho\varphi,\theta)}=\rho^2\sin\varphi$

Ω 边界曲面的球坐标方程分别为 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 和 $\rho=2\cos\varphi$

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int_0^{2\cos\phi}\rho^2\sin^2\phi\rho^2\sin\phi d\rho$ …………（4 分）

$$=2\pi\cdot\frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi d\varphi$$

$$=\frac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi(\cos^2\varphi-1)d\cos\varphi$$

$=\frac{64\pi}{5}(\frac{u^8}{8}-\frac{u^6}{6})\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{11\pi}{30}$ …………（6 分）

（注：柱坐标计算同样可得，评分标准参考以上球坐标的方法）

五、解： $f'_x=ay^2+3cx^2z^2\qquad f'_y=2axy+bz\qquad f'_z=by+2cx^3z$

$grad f(M)=\{4a+3c,4a-b,2b-2c\}$ …………(3 分)

$4a+3c=0\qquad 4a-b=0\qquad 2b-2c=64$ …………(6 分)

解得 $a=6\qquad b=24\qquad c=-8$ …………(8 分)

六、解：1). $P(x,y)=(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda}, Q(x,y)=(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda}$ …………(1 分)

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-(x^2+y^2)^{\lambda}+2y\lambda(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(x^2+y^2)^{\lambda}+2x\lambda(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$$ …………(3 分)

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}}=\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}}\Rightarrow 2(\lambda+1)(x^2+y^2)^{\lambda}=0\Rightarrow\lambda=-1$$ …………(4 分)

2). $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$$df(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$ …………(5 分)

$$f(1,\sqrt{3})-f(2,0)=\int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$ …………(6 分)

$$=\int_0^{\sqrt{3}}Q(1,y)dy+\int_2^1 P(x,0)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1+y}{1+y^2}dy+\int_2^1\frac{x}{x^2}dx$$

$$=\arctan y\Big|_0^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_0^{\sqrt{3}}-\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{3}$$ …………(8 分)

七、解：
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}=1$$

$R=1$, 收敛区间 $-1<x<1$ ………… (2 分)

设 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$ ………… (4 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2}$$ ………… (6 分)

$$S'(x)=2\arctan x$$

$$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$ ………… (8 分)

八、 解： $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ …………(2 分)

$$=\frac{1}{x-1+2}-\frac{1}{x-1+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)(x-1)^{n-1}$$ …………(5 分)

收敛区间 $(-1,3)$ …………(6 分)

$f^{(5)}(1)=-5!\left(\dfrac{1}{2^6}-\dfrac{1}{3^6}\right)$ …………(8 分)

九、解： 记 $S_1: z=R, x^2+y^2\le R^2$，取上侧； $S_2: z=-R, x^2+y^2\le R^2$，取下侧；

S_3： S 的侧面（即圆柱面部分）；

$S_{3前}: x=\sqrt{R^2-y^2}, -R\le y\le R, -R\le z\le R$，取前侧；

$S_{3后}: x=-\sqrt{R^2-y^2}, -R\le y\le R, -R\le z\le R$，取后侧；

$$\iint_S \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{S_3}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint_{S_{3前}}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{S_{3后}}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$$ …………. (2 分)

$$=\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}-\iint_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}$$

$$=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\int_{-R}^{R}\frac{dz}{R^2+z^2}=\frac{\pi^2 R}{2}$$

其中 $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,-R\le y\le R, -R\le z\le R\}$. …………. (5 分)

$$\iint_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy=\iint_{S_1}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy+\iint_{S_2}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy+\iint_{S_3}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy$$

$$=\iint_{S_1}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy+\iint_{S_2}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(-R)^2}{x^2+y^2+R^2}dxdy$$

$$=0$$ …………..(7 分)

所以，原式 $I=\dfrac{\pi^2 R}{2}.$ …………..(8 分)

十、解：1). $F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^t\rho^2 f(\rho^2)\sin\phi d\rho$ …………(1 分)

$$=4\pi\int_0^t\rho^2 f(\rho^2)d\rho$$

$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$ …………(3 分)

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}F'(\frac{1}{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}4\pi\frac{1}{n^{1+\lambda}}f(\frac{1}{n^2})$ …………(4 分)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\pi}{n^{1+\lambda}}f(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^{1+\lambda}}}=4\pi f(0)$$

$\lambda>0$ 时收敛，$\lambda\le 0$时发散。 …………(6 分)