

北京学院（工科）数学分析期中测试

1. 叙述定义 (8 分)

- (1) 用 $\varepsilon - N$ 语言叙述数列 $\{x_n\}$ 收敛的严格定义;
- (2) 用 $\varepsilon - \delta$ 语言叙述 $x \rightarrow x_0$ 时函数 f 收敛和发散的严格定义;
- (3) 叙述 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 的严格含义;
- (4) 叙述 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 内取得最值的严格含义。

2. 求数列极限和函数极限 (10 分)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \sin(\pi\sqrt{4n^2 + 1})]^{4n}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^\alpha + x^\beta}$, 其中 m, n, α, β 均为正整数
且 $\min\{\alpha, \beta\} = 2$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{(x - \pi)^2}$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]$, 其中 $[x]$ 表示 x 向下取整;
- (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^5 + x^4)^{\frac{1}{5}} - x}{x^\alpha}$, 其中 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 。

3. 求下列函数的间断点 (6 分)

$$(1) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + x^{2^i});$$

$$(2) f(x) = \left(\frac{1+|x| - \cos 2x}{|x|} \right)^{\frac{2}{x}}.$$

4. 求下列函数的渐近线 (6 分)

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}};$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2}{|x|+1}.$$

5. 求下列函数在 $x = 0$ 处的导数以及二阶导数 (10 分)

$$(1) y = (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \frac{x}{\sqrt{x+1}};$$

(2) 函数 $y = y(x)$ 由下列参数方程确定

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t + 1 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$$

6. 判断下列数列极限是否存在, 如果存在请证明, 并求出极限; 如果不存在说明理由。(20 分)

判断下列数列最大数与最小数是否存在, 如果存在请证明, 并求出最大数与最小数; 如果不存在说明理由。(10 分)

$$(1) x_{n+1} = \sqrt{4+x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad x_1 = 0;$$

$$(2) a_1 = 2 + \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2+a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(3) r_n = \frac{x_{n-1}}{x_n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \text{其中 } x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \quad (n =$$

$1, 2, \dots), x_0 = 1, x_1 = 2;$

(4) $r_n = \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$ ($n = 1, 2, \dots$), 其中 $x_1 = a, x_{n+1} =$

$\ln(1 + x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$);

(5) $x_n = \frac{2}{2 + \cos \sqrt{n} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})}$ ($n = 1, 2, \dots$)。

7. 求证下列 f 在 $x = 0$ 点可导并求 $f(0)$ 和 $f'(0)$ 的值 (10 分)

(1) $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的某邻域内有定义且 $f(x)$ 在 $x = 0$

点连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = 1$ 。

(2) $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的某邻域内有定义且 $f(x)$ 在 $x = 0$

点连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{x^2 \arctan x} = 4$ 。

8. 证明 (20 分)

(1) 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 。求证: f

在 $(-\infty, +\infty)$ 内必取得最大值。(7 分)

(2) 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 。求证: 函

数 $g(x) = f(x) - 2x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内必取得最大值。(3 分)

(3) 设函数 g 在闭区间 $[0, 1]$ 内连续, $g(0) = 0, g(1) = 1$,

且 $g(x)$ 不恒等于 x 。求证: 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得或者 $0 <$

$g(x_0) < x_0$, 或者 $x_0 < g(x_0) < 1$ 。(10 分)