课程编号：HO172103　　北京理工大学 2016-2017 学年第一学期

2016 级工科数学分析（上）期末试题(A 卷)

班级________________　　学号__________________　　姓名___________________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一、填空（每小题4分，共20分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 $a=$______________.

2. 已知 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________________________.

3. $\int_1^e x^2\ln x dx=$__________________________________.

4. $\int\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}dx=$____________________________.

5. 设 $y'-\dfrac{1}{x}y=x^2$，则 $y=$____.

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3\cos x}$。

2. 设 $xe^y+ye^x=6$，求 dy。

3. 计算$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$。

4. 求$\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$通解。

三、（6分）已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x^2-x}{x+1}-ax-b)=0$，试确定常数$a$和$b$的值。

四、（6分）（1）证明：当$x>0$时，$x>\sin x$；（2）设$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n (n=1.2.\cdots)$

证明：$\{x_n\}$极限存在，并求此极限。

五、（6分）求函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的单调区间和极值，凹凸区间和拐点，渐近线。

六、（6分）求心形线 $\rho=2(1+\cos\theta)$ 的全长及所围成图形的面积。

七、（8分）设星形线方程为：$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$

（1）求星形线所围图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积；

（2）求当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，对应星形线上的点的曲率。

八、（8分）设一容器是由曲线 $y=x^3(0\le x\le 1)$ 绕 y 轴旋转一周形成， y 轴垂直地面

（1）以每秒3的速度向容器中注水，求容器中水高为 $h(0<h<1)$ 时，水面上升速度。

（2）容器中注满水后，全部把水抽出至少需要做多少功。

九、（8分）设 $f(x)$ 在R 上连续，二阶可导，且对任意 x 有：$f(x)+\int_0^x tf(x-t)dt+\sin x=0$

（1）求证：对任意 x 有：$\int_0^x tf(x-t)dt = x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$；

（2）试求出 $f(x)$ 的表达式。

十、（6分）已知 $f(x)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$。

（1）求 $f'(1)$；　　（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\frac{\sin x}{x})}{\ln(1+x^2)}$

十一、（6分）已知 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-f(1)=1$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$ 成立。

草纸