课程编号：100172203　　北京理工大学 2023-2024 学年第二学期

2023 级工科数学分析（II）期终考试试题 A 卷

座号______班级____________学号_____________姓名__________成绩_____

（试卷共 7 页, 八个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一. (8 分) 设 $z=z(x,y)$ 在 R^2 有连续偏导数，并且

$$dz=\left[ax^2y^3+\cos(x+2y)\right]dx+\left[3x^3y^2+b\cos(x+2y)\right]dy$$

其中 a,b 是常数，求 a,b 的值和 $z=z(x,y)$ 的表达式.

二. (21 分)

(1) 求二重积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{y}{x^2}dxdy$，其中 D 为由 $y=\frac{1}{x}, y=2, y=x$ 所围的区域.

(2) 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}y^2\ dxdydz$，其中 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 所围成.

(3) 求第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{M}(2x+5y+z)dS$，其中 M 为上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le R^2\ (R>0)$.

三. (23 分) 求下列函数的全微分或者偏导数

(1) 设 $z=\cos(e^{xy})$，求 dz.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y-z=e^{z}$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(3) 设 $z=yf(xy)+xg(\frac{y}{x})$，其中 f 和 g 在 R 上有连续的二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

四.（8 分）设 $\beta > 1$， $0 < a_n \le a_{n+1}$， $n = 0,1,2,\cdots$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\beta}}$ 收敛.

五. (12 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数的表达式.

六. (10 分) 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5}{n!}$ (2) $\sum_{n=1}^{+\infty}n\sin\frac{1}{n^2}$

七. (10 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} 0 & 0<x\le\pi \\ -x & -\pi<x\le 0 \end{cases}.$$

(1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[-\pi,2\pi]$ 上的表达式；

(3) 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

八.（8 分）

(1) 求过点 $A(1,1,0)$ 和点 $B(-2,1,1)$，且与直线 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$ 平行的平面方程.

(2) 求含参积分 $I(x)=\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos\left(x\sin\theta\right)d\theta$， $x\in(-\infty,+\infty)$.