北京理工大学 2017-2018 学年第二学期《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准 2018年6月28日

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $2x-y-z-1=0$

2. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}f\left(x,y\right)dy$

4. $\dfrac{10\pi a^3}{3}$

5. $-1<a<1$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解：设所求点为 $M\left(3z-3,-2z-2,z\right)$.

于是点 M 到平面 $x+2y+2z+6=0$ 的距离为:

$$d=\frac{\left|(3z-3)+2(-2z-2)+2z+6\right|}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=2.$$ ……….. (3 分)

解得 $z_1=7, z_2=-5$.

故所求点为 $(18,-16,7)$或$(-18,8,-5)$. ……….. (5 分)

2. 解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$; ……….. (2分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+2x^3yf_{11}''-\frac{x^2}{y}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ……….. (5 分)

3. 解：平面方程变形为 $z=1-x-y$

$$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$$

在 xoy 坐标面上的投影区域 $D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 1\\0\le x\le 1-y\end{cases}$

$$I=\iint_S(2x+y+2z)dS=\iint_{D_{xy}}(2x+y+2(1-x-y))\cdot\sqrt{3}dxdy$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}(2-y)dxdy$$ …………….(3 分)

$$=\frac{5}{6}\sqrt{3}$$ …………….(5 分)

4. 解：

$$rot\vec{A}=(\frac{\partial(ze^z)}{\partial y}-\frac{\partial(xyz)}{\partial z},\frac{\partial(xe^y)}{\partial z}-\frac{\partial(ze^z)}{\partial x},\frac{\partial(xyz)}{\partial x}-\frac{\partial(xe^y)}{\partial y})=(-xy,0,yz-xe^y)$$

………….. (3分)

$$div(rot\vec{A})=div(-xy,0,yz-xe^y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(-xy)+\frac{\partial}{\partial y}(0)+\frac{\partial}{\partial z}(yz-xe^y)$$

$$=0.$$ ………….. (5 分)

三、解: $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=2z^2+(2xz+2y)\frac{\partial z}{\partial x}+(2x+2yz)\frac{\partial z}{\partial y}.$ ………….. (2 分)

由 $F(xz-y,x-yz)=0$ 得 $\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{-F_2'-zF_1'}{xF_1'-yF_2'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_1'+zF_2'}{xF_1'-yF_2'},$

故 $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=2z^2+2(1-z^2)=2,$ ………….. (6 分)

所以 $I=\iint_D(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})dxdy=2\pi.$ ………….. (8 分)

四、 解: 区域Ω为：$\begin{cases}1\le x\le 2\\ y^2+z^2\le x\end{cases}$ ………….. (2 分)

$$I_x=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$=\int_1^2dx\iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)dydz$$

$$=\int_1^2dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{x}}r^2\cdot rdr$$ ………….. (4 分)

$$=\frac{7\pi}{6}$$ ………….. (6 分)

五、解：因为 $f\left(x,y\right)$ 沿着梯度方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$f_x'\left(x,y\right)=1+y,\ f_y'\left(x,y\right)=1+x,$

故 $grad f\left(x,y\right)=\left\{1+y,1+x\right\}$，模为 $\sqrt{\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2}$，

此题目转化为对函数 $g\left(x,y\right)=\sqrt{\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2}$

在约束条件 $C: x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值. 即为条件极值问题.

…………..(2 分)

为了计算简单，可以转化为对 $d\left(x,y\right)=\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2$

在约束条件 $C: x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

构造函数：$F\left(x,y,\lambda\right)=\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2+\lambda\left(x^2+y^2+xy-3\right)$

$$\begin{cases} F_x'=2\left(1+x\right)+\lambda\left(2x+y\right)=0 \\ F_y'=2\left(1+y\right)+\lambda\left(2y+x\right)=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$$

得到 $M_1\left(1,1\right), M_2\left(-1,-1\right), M_3\left(2,-1\right), M_4\left(-1,2\right)$.　　…………..(6 分)

$d\left(M_1\right)=8, d\left(M_2\right)=0, d\left(M_3\right)=9, d\left(M_4\right)=9.$

所以最大值为 $\sqrt{9}=3$.　　…………..(8 分)

六、**法 1：** 记 $X=x^2y^3+2x^5+ky,\quad Y=xf(xy)+2y$, 由题意，有

$\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$，即　$3x^2y^2+k=f(xy)+xyf'(xy)$；　　…………..(2 分)

记 $u=xy$, 有　$f'(u)+\dfrac{1}{u}f(u)=3u+\dfrac{k}{u}$

解得：　$f(u)=u^2+k+\dfrac{C}{u}$.　　(1)　　…………..(3 分)

选择折线路径：$(0,0)\to(t,0)\to(t,-t)$, 则有

$$\int_0^t 2x^5dx+\int_0^{-t}[tf(ty)+2y]dy=2t^2$$

即：$\dfrac{t^6}{3}+\int_0^{-t^2} f(u)du=t^2$

对t求导，得$f(-t^2)=-1+t^4$， 令$u=-t^2$,得 $f(u)=u^2-1.$

与(1)式比较得： $k=-1, C=0.$ ………….. (5 分)

此时 $(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy$

$$=(x^2y^3+2x^5-y)dx+[x^3y^2-x+2y]dy$$

$$=d(\frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{3}x^6-xy+y^2)$$

故此全微分的原函数为：$u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3y^3+\dfrac{1}{3}x^6-xy+y^2+C.$

………….. (8 分)

（注：还可用曲线积分法和不定积分法求原函数。）

法 2： 选择折线路径：$(0,0)\to(0,-t)\to(t,-t)$,则有

$$\int_0^{-t}2ydy+\int_0^t(-t^3x^2+2x^5-kt)dx=2t^2，得$$

$t^2-kt^2=2t^2$， $\Rightarrow k=-1$

（其余可同上）

七、解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{(n+1)(2n+1)}x^2=0$

收敛域为 $(-\infty,+\infty)$ ……….. (2 分)

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n+1})'=(h(x))'$ ……….. (4 分)

$h(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(x^2)^n=x(e^{x^2}-1)$ ……….. (7 分)

所以 $S(x)=(x(e^{x^2}-1))'=e^{x^2}(1+2x^2)-1.x\in(-\infty,+\infty)$ ……….. (8 分)

八、解: $$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2-\frac{2}{3}\pi^2$$ ……….. (2 分)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}(n=1,2,\cdots)$$

故 $f(x)$ 的余弦级数为

$$f(x)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx(0\le x\le\pi)$$ ……….. (6 分)

令 $x=0$, 有 $f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$ ……….. (8 分)

九、解: 添加辅助面 $S: z=0, x^2+y^2\le a^2$, 取下侧， Ω 为 Σ 与 S 所围成的空间区域. ………….. (2 分)

$$I=\oiint_{\Sigma+S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy-$$

$$\iint_S(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$ ………….. (4 分)

$$=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dv+\iint_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy$$ （利用高斯公式）

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr+\int_0^{2\pi}a\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr$$ ………….. (6 分)

$$=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5$$

$$=\frac{29}{20}\pi a^5$$ ………….. (8 分)

十、解: 因

$$|a_n-a_{n-1}|=|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})|=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2})\right|$$（ξ 介于 a_{n-1} 与 a_{n-2} 之间）

………….. (3 分)

$$\le m|a_{n-1}-a_{n-2}|\le m^2|a_{n-2}-a_{n-3}|\le\cdots\le m^{n-1}|a_1-a_0|.$$

………….. (5 分)

由 $0<m<1$, 从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛. ………….. (6 分)