

## 标准答案及评分标准

2020年1月8日

## 一、填空(每小题4分, 共20分)

1.  $e^{-2}$ ;      2.  $-\frac{1}{2(1+t)^4}$ ;  
 3.  $2e^2$ ;      4.  $2\ln 2 - 1$ ;      5.  $x = -y - 1 + Ce^y$  或  $y = \ln|1 + x + y| + C$

## 二、计算题(每小题5分, 共20分)

1. 解: 因  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0$ ,所以,  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0$ , ..... 1分令  $x^2 + ax + b = (x - 2)(x + k)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + k)}{(x - 2)(x - 1)} = 2 + k = 6, \quad \text{..... 3分}$$

所以,  $k = 4$ , 从而  $a = 2, b = -8$ . ..... 5分2. 解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan \sqrt{x-1} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$  ..... 3分

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( \arctan \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right). \quad \text{..... 5分}$$

3. 解:  $\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$  ..... 3分

$$= x \ln(1+x^2) - 2 \arctan x \quad \text{..... 5分}$$

4.

解: 令  $y' = p = p(x)$ , 则原方程化为

$$p' - \frac{2}{x} p = x^2 \quad \text{..... 2分}$$

利用一阶线性微分方程的求解公式得:

$$p = Cx^2 + x^3 \quad \text{..... 4分}$$

由  $y' = Cx^2 + x^3$  得原方程的通解为

$$y = C_1 x^3 + C_2 + \frac{x^4}{4} \quad \text{..... 5分}$$

三、解:  $y' = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}, y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3},$ 令  $y'' = 0$ , 得  $x = e^{\frac{3}{2}},$  ..... 3分又函数的定义域为:  $x > 0$ , 当  $x \in (0, e^{\frac{3}{2}})$  时,  $y'' < 0$ , 函数的图形为上凸的;当  $x \in (e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$  时,  $y'' > 0$ , 函数的图形为下凸的。

有拐点  $(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$ . ..... 6 分

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \frac{\ln x}{x}) = \infty$ , 所以  $x=0$  为此曲线的垂直渐近线, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{\ln x}{x^2}) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 1 = k$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 = b$$

所以此曲线有斜渐近线:  $y = x$  ..... 8 分

四、解: 对于分段点  $x=0$ , 因

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x^2 - 1} = -\sin 1,$$

故  $x=0$  是第一类跳跃型间断点; ..... 2 分

当  $x > 0$  时, 考虑  $x=1$ , 极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x^2 - 1} \text{ 不存在,}$$

故  $x=1$  是第二类震荡型间断点; ..... 4 分

当  $x < 0$  时, 函数在点列  $x_k = -k\pi - \frac{\pi}{2}, k=0, 1, 2, \dots$  处没有定义,

$$x_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ 时, 有 } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = -\frac{\pi}{2},$$

故  $x = -\frac{\pi}{2}$  是第一类可去型间断点; ..... 6 分

$$x_k = -k\pi - \frac{\pi}{2}, k=1, 2, \dots \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_k} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = \infty,$$

故  $x_k = -k\pi - \frac{\pi}{2}, k=1, 2, \dots$  是第二类无穷型间断点; ..... 8 分

五、解:  $x_1 = x_0^2 + 2x_0 = (x_0 + 1)^2 - 1$ , 因  $-1 < x_0 < 0$ , 所以  $-1 < x_1 < 0$

设  $-1 < x_n < 0$ , 由  $x_{n+1} = (x_n + 1)^2 - 1$ , 得  $-1 < x_{n+1} < 0$

故对  $\forall n$ , 有  $-1 < x_n < 0$  ..... 2 分

又由  $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$ , 及  $-1 < x_n < 0$ , 得  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = x_n + 2 > 1$

故  $x_{n+1} < x_n$ , 即  $x_n$  单调减少有下界, 所以  $\{x_n\}$  收敛 ..... 4 分

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 得  $A = A^2 + 2A$

解得  $A = -1, A = 0$  (舍去)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1. \text{ ..... 6 分}$$

六、解法一: 取  $x$  为积分变量

$$V = \int_0^1 2\pi(3-x) \cdot 2x^2 dx \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$= 4\pi \left[ \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx \right]$$

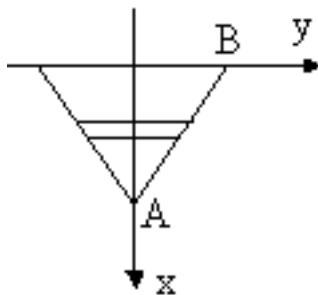
$$= 3\pi \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

解法二：取  $y$  为积分变量

$$V = \int_0^2 \pi(3 - \sqrt{y/2})^2 dy - \pi \cdot 2^2 \cdot 2. \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$= 3\pi. \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

七、解：建立如图所示坐标系，



直线 AB 的方程为：

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a - x \right). \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

取  $x$  为积分变量：  $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2} a]$ . 选取  $[x, x + dx]$ ，则压力微元为：

$$dP = \rho g x \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a - x \right) dx$$

$$\text{水压力： } P = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \rho g x \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a - x \right) dx \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\rho g}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} ax - x^2 \right) dx$$

$$= \frac{\rho g a^3}{8} \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

八、解：  $\ln(1+x)$  的麦克劳林展开式为：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\therefore \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6), \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$f(x) = x^2 \ln(1+x^2) = x^4 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^8}{3} + o(x^8) \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

由Taylor公式中系数的唯一性,有

$$a_8 = \frac{f^{(8)}(0)}{8!} = \frac{1}{3} \quad \therefore f^{(8)}(0) = \frac{8!}{3} = 13440. \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

九、(8分) 设函数  $f(x)$  连续, 且满足方程

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^x - f(x), \text{ 求 } f(x).$$

解:  $x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = xe^x - f(x)$

$$\int_0^x f(t)dt = e^x + xe^x - f'(x)$$

$$f(x) = e^x + e^x + xe^x - f''(x)$$

$$f''(x) + f(x) = (2+x)e^x \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$$

$$r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\bar{f}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

设  $f^*(x) = (Ax + B)e^x$

代入微分方程得  $A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$

$$f^*(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^x$$

通解为  $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x+1)e^x \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$

由初始条件得  $C_1 = -\frac{1}{2} \quad C_2 = 0$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}(x+1)e^x \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

十、解: (1) 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{x})}{\sin x} = 3$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,

故  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ ;  $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

(2) 令  $F(x) = f'(x)e^x$ ,

根据积分中值定理,  $\exists c \in [1, 2]$ , 使

$$f(c) = \int_1^2 f(x) dx \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

由罗尔定理,  $\exists c_1 \in (0, c)$ , 使  $f'(c_1) = 0$ ,

$$\therefore F(0) = F(c_1),$$

由罗尔定理,  $\exists \xi \in (0, c_1) \subset (0, 2)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ ,

即  $f''(\xi)e^\xi + f'(\xi)e^\xi = 0$ ,

$$f'(\xi) + f''(\xi) = 0. \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$