2023 级工科数学分析（I）期终考试试题 A 卷评分标准

一.(共 7 小题，35 分)计算题

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$.

解：法一

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{4x}=-\frac{1}{4}.$$ ----------------------4 分

则 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}=e^{-\frac{1}{4}}$. ----------------------------1 分

法二

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}=\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{2x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}}$$ ---------4 分

则 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}=e^{-\frac{1}{4}}$. ----------------------------1 分

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+3x)^{\frac{1}{3}}}{2x^2}$.

解：（方法一）利用泰勒公式，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+3x)^{\frac{1}{3}}}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-\left(1+\frac{1}{3}3x+\frac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}-1)}{2!}(3x)^2+o\left(x^2\right)\right)}{2x^2}$$ ----------------4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{2x^2}=\frac{3}{4}$$ --1 分

（方法二）利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+3x)^{\frac{1}{3}}}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3}{4x}$$ ---------------------------4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{2}{9}(1+3x)^{-\frac{5}{3}}\cdot 9}{4}=\frac{3}{4}$$ --1 分

3．求不定积分$\int \frac{4x+5}{x^2+x-2}dx$.

解：$\int \frac{4x+5}{x^2+x-2}dx = \int \left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$ ------------------------------4 分

$= 3\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$ --------------------------1 分

4．求定积分$\int_0^4 \sin\sqrt{x}dx$.

解：令$u=\sqrt{x}$，$x=u^2$，$dx=2udu$，

$\int_0^4 \sin\sqrt{x}dx = \int_0^2 \sin u 2udu = -2\int_0^2 ud\cos u = -2u\cos u\big|_0^2 + 2\int_0^2 \cos udu$ ---------4 分

$= -4\cos 2 + 2\sin 2$ -------------------------------------1 分

5．求由$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 4t - t^4 \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的一阶导数$\frac{dy}{dx}$和二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4-4t^3}{2-2t} = 2(1+t+t^2)$， --------------------------2 分

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(2+2t+2t^2\right)'}{2-2t} = \frac{1+2t}{1-t}$. --------------------------3 分

6．计算反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1-t^2+t^4}dt$的值.

解： 应用广义换元积分公式，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1-t^2+t^4}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2-1+\frac{1}{t^2}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+1}$$ ---------------3 分

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=\arctan u\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$$ ------------------------2 分

7．设 $f(x)=x\cos x$，求 $f^{(5)}(0)$.

解： $f^{(5)}(x)=x\cos^{(5)}(x)+5\cos^{(4)}x$. -----------------4 分

$=x\cos(x+\frac{5}{2}\pi)+5\cos(x+\frac{4}{2}\pi)$. ----------1 分

二.（3 小题，15 分）

（1） 设函数 $f(u)$ 二阶可导，求 $y=f(\sin^2 x)$ 的一阶微分 dy 和二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\frac{dy}{dx}=f^{'}(\sin^2 x)2\sin x\cos x=\sin 2xf^{'}(\sin^2 x)$ --------------------1 分

所以

$dy=\sin 2xf^{'}(\sin^2 x)dx$. ------------------1 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cos 2xf^{'}(\sin^2 x)+\sin 2xf^{''}(\sin^2 x)(2\sin x\cos x)$ ----------2 分

所以解得 $\frac{d^2y}{dx^2}=2\cos 2xf^{'}(\sin^2 x)+\sin^2 2xf^{''}(\sin^2 x)$. ----------1 分

（2） 求微分方程 $y^{''}+y=x^2+3x$ 的通解.

解：特征方程是 $r^2+1=0$，解得 $r=\pm i$. ----------1 分

得到 $\overline{y}=A\cos x+B\sin x$. ---------1 分

设特解为 $y^*=Ax^2+Bx+C$. ---------1 分

$y^{*'}=2Ax+B$, $y^{*''}=2A$, 代入方程

$2A+Ax^2+Bx+C=x^2+3x$，

解得 $A=1, B=3, C=-2$，于是 $y^*=x^2+3x-2$. ---------1 分

通解为 $y=y^*+\overline{y}=x^2+3x-2+A\cos x+B\sin x$. ---------1 分

（3） 已知 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2$，求 $f(x)$.

解：对 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2$ 两边同时求导，可得 $g(f(x))f^{'}(x)=2x$，---------2 分

因为 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$，上式可化为

$xf^{'}(x)=2x$, ----------------2 分

因此 $f^{'}(x)=2$，积分得

$f(x)=2x+C$，由于 $f(0)=0$ 得 $C=0$，于是 $f(x)=2x$ ---------1 分

三. (12 分) 设 $F(x)=x^2 f(x)$.

(1) 若 $f(x)=e^{\frac{x}{1-x}}$，求 $F(x)$ 在 $x=0$ 的5阶泰勒展开式，并求 $F^{(5)}(0)$；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0,b]$ 二阶可导，且 $f(b)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,b)$，使得 $F''(\xi)=0$.

证：(1) 解：

$$e^{\frac{x}{1-x}}=1+\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3+o(x^3)\ (x\to 0). \text{--------2 分}$$

$$\frac{x}{1-x}=x\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)=x+x^2+x^3+o(x^3)，\text{----------2 分}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的3阶 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned}e^{\frac{x}{1-x}}&=1+\left(x+x^2+x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{2!}\left(x+x^2+x^3+o(x^3)\right)^2\\&\quad+\frac{1}{3!}\left(x+x^2+x^3+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\&=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

----------2 分

$$F(x)=x^2 f(x)=x^2\left(1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+o(x^3)\right) \qquad \text{----------1 分}$$

$$=x^2+x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{6}x^5+o(x^5).$$

则 $F^{(5)}(0)=5!\cdot\frac{13}{6}=260$. ----------1 分

(2) $F(0)=0$，$F(b)=b^2 f(b)=0$，$F(x)$ 在 $[0,b]$ 连续，在 $(0,b)$ 可导，利用 Rolle 定理，存在 $\eta\in(0,b)$，使得 $F'(\eta)=0$； ----------2 分

而 $F'(x)=x^2 f'(x)+2xf(x)$，发现 $F'(0)=0$. 再利用 Rolle 定理，存在 $\xi\in(0,b)$，使得 $F''(\xi)=0$. ----------2 分

四.（8 分）设 $x_1=2\sqrt{3}$， $x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

证：$0<x_1=2\sqrt{3}<4$. 假设 $0<x_n<4$，

$$0<x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}<\sqrt{12+4}=4.$$

根据归纳法，$0<x_n<4\ (n=1,2,\cdots)$. ----------3 分

对任意的 n，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{12+x_n}-x_n=\frac{12+x_n-x_n{}^2}{\sqrt{12+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-4)(x_n+3)}{\sqrt{12+x_n}+x_n},$$

因为 $0<x_n<4\ (n=1,2,\cdots)$，所以 $x_{n+1}-x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，即 $\left\{x_n\right\}$ 是单调递增数列. ----------3 分

单调有界数列必收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛，记 $L=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. 对 $x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$ 取极限，得到方程 $L=\sqrt{12+L}$，两边平方得到新方程 $L^2-L-12=0$，$(L-4)(L+3)=0$，

解得 $L=-3$ 或 $L=4$. 由 $L=\sqrt{12+L}$ 可知 $L\ge 0$，那么 $L=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=4$.

----------2 分

五.（6 分）构造辅助函数，利用函数单调性证明：$e^{\pi}>\pi^{e}$.

（法一）解：令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则------------------2 分

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\quad(x>e)$$ ------------------2 分

所以 $x>e$ 时，$f(x)$ 严格减少，于是 $f(e)>f(\pi)$，即：

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Leftrightarrow\pi\ln e>e\ln\pi\Leftrightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$$ ------------------2 分

（法二）令 $f(x)=x-e\ln x$，则 $f(e)=0$，$f'(x)=1-\dfrac{e}{x}>0\quad(x>e)$------4 分

于是，$f(\pi)=\pi-e\ln\pi>f(e)=0$，即 $e^{\pi}>\pi^{e}$------------------2 分

六.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases} b+\sqrt{x}arc\tan x & (x>0) \\ a & (x=0) \\ \dfrac{\sin x}{x} & (x<0) \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

（1）求常数 a,b 的值；（2）求 $f^{'}(0)$；

（3）讨论 $f^{'}(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解：（1）因为 $f(0)=a$

$f(0-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$------------------1 分

$f(0+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(b+\sqrt{x}\arctan x)=b$------------------1 分

又因为可导必连续， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $a=b=1$。----------------1 分

（2）因为

$$f_-^{'}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$$ ------------------1 分

$f_+^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\sqrt{x}\arctan x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=0$--------1 分

所以

$f^{'}(0)=f_-^{'}(0)=f_+^{'}(0)=0$--------1 分

（3）当 $x<0$ 时，有

$f^{'}(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$， $\lim\limits_{x\to 0^-}f^{'}(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x\sin x}{2x}=0$

------------------2 分

当 $x>0$ 时，有

$f^{'}(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$， $\lim\limits_{x\to 0^+}f^{'}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2\sqrt{x}}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}=0$

------------------2 分

由于 $f'(0-)=f'(0+)=f'(0)$，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

七．（8 分）计算题

（1）求 $y=-x^2+2x$ 和 $2x+y=3$ 所围成的平面图形面积。

（2）求（1）所围成的平面图形绕直线 $x=1$ 旋转一周所得的旋转体体积。

解：（1） $y=-x^2+2x$ 和 $2x+y=3$ 的交点为 $(1,1)$ 和 $(3,-3)$，---------2 分

所求平面图形的面积为：

$$S=\int_1^3\left[-x^2+2x-(3-2x)\right]dx=\frac{4}{3}$$ --------------2 分

（2）所求旋转体体积为

$$V=\int_1^3 2\pi(x-1)\cdot\left[2(2-x)-(3-2x)\right]dx=\frac{8\pi}{3}$$ --------------4 分

八．（6 分）设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0$， $f(0)=0$， $f'(0)=0$，求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ $(x\neq 0)$ 处切线在 x 轴上的截距.

解：因为 $f''(x)>0, f'(0)=0$，所以当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)\neq 0$. --------------1 分

切线方程：$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$, 横截距 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$--------------1 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}(1-\frac{f(x)}{xf'(x)})=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=1-\frac{1}{f''(0)}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=1-\frac{1}{f''(0)}\cdot f''(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ --------2 分

同时，当 $x\to 0$ 时，必有 $u\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)u^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}\cdot\frac{\frac{f(u)}{u^2}}{\frac{f(x)}{x^2}}=2\cdot\frac{\frac{1}{2}f''(0)}{\frac{1}{2}f''(0)}=2$$

----------2 分