标准答案及评分标准

2019年1月11日

一、填空（每小题4分，共20分）

1 e^2

2． $-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

3. $a=b\neq 0$

4． $6(e^2-1)$

5. $2+Ce^{-x^2}$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ **………… 3分**

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}})$

$=-\dfrac{1}{4}$ **………… 5 分**

2. 解： 当 $x=0$ 时，得 $y=1$ **………… 1分**

方程 $2^{xy}=x+y$ 两边对 x 求导，得

$2^{xy}\ln 2(y+xy')=1+y'$ **………… 3分**

将 $x=0, y=1$ 代入上式，

得到 $y'|_{x=0}=\ln 2-1$

于是，$dy|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$． **………… 5分**

3. 解: 定义域 $(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{10}{3}\bullet\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$，一阶导数不存在的点为 $x_1=0$; $f'(x)=0$ 得驻点 $x_2=1$． **………… 1 分**

列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 −3	↗

$f(x)$ 有单调递增区间为：$(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$；

单调递减区间为：$(0,1)$；

极大值为: $f(0)=0$, 极小值为: $f(1)=-3$. …………. 5分

4. 解I: 设 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ …………. 2分

代入原方程，得：$p(y\dfrac{dp}{dy}-p)=0$

于是有 $p=0$ 或 $y\dfrac{dp}{dy}-p=0$

由后一方程分离变量法得：$p=C_1y$,

即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y$, ………….4 分

故原方程的通解为：$y=C_2e^{C_1x}$.

由 $p=0$, 即 $y'=0$, 得 $y=C$, 此式包含在通解中($C_1=0$ 的情况).

…………. 5 分

解II: 两端同乘不为零因子 $\frac{1}{y^2}(y\neq 0)$, ($y=0$ 也是解.)

则 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y'}{y})=0$, …………. 2分

故 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y$, ………….4 分

故原方程的通解为：$y=C_2e^{C_1x}$. …………. 5 分

解III: 原方程变为：$\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{y'}{y}$, …………. 2分

两边积分，得 $\ln y'=\ln y+\ln C_1$, 即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y$, ………….4 分

故原方程的通解为：$y=C_2e^{C_1x}$. …………. 5 分

三、解：$\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$ …………. 3分

$$=-\int\arctan x\,d\frac{1}{x}-\int\arctan x\,d(\arctan x)$$

$$=-\frac{1}{2}(\arctan x)^2-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$ …………. 6分

$$=-\frac{1}{2}(\arctan x)^2-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}(\arctan x)^2-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$ …………. 8分

四、解: $\lim\limits_{x\to c} y=\lim\limits_{x\to c}\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)\neq\infty,$

所以曲线没有垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)=\infty,$

所以曲线没有水平渐近线. **………… 1 分**

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2))=1$ **…………4分**

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x)=\frac{\pi}{2}$ **…………7分**

故 曲线有斜渐近线 $y=x+\frac{\pi}{2}$. **………… 8分**

五、(1)证明：由题意 $x_2=\sin x_1, 0<x_2\le 1$, 因此当 $n\ge 2$ 时，

$x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$， $\{x_n\}$单调减少；

又 $x_n>0$, $\{x_n\}$有下界，故$\{x_n\}$有极限.

$x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限得， $A=\sin A$, 故有极限 $A=0$. **………… 3 分**

(2)解： $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$, 为$1^\infty$ 型

离散型不能直接用洛必达法则

先考虑 $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}$

$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$

故， $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$ **………… 6 分**

六、解：（1）画草图，解交点 (0,0), (1,1)

$A=\int_0^1(x-x^2)dx$ **…………2 分**

$=\frac{1}{6}$ **…………4 分**

（2）$V=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2dy-\pi\int_0^1 y^2dy$ **…………6 分**

$=\frac{1}{6}\pi$ **…………8 分**

七、解：以上底作为 y 轴，两底的中垂线作为 x 轴建立直角坐标系.

在 x 轴的区间 $[0,20]$ 上任取小区间 $[x,x+dx]$，

得面积微元等于 $(10-\frac{x}{5})dx$. …………2分

（1） x 处水的压强为 μgx, 故

$$dP=\mu gx(10-\frac{x}{5})dx$$

积分得所求压力 $P=\int_0^{20}\mu gx(10-\frac{x}{5})dx=\frac{4400}{3}\mu g$; …………5 分

（2） x 处水深为 $x+2$, 故水的压强为 $\mu g(x+2)$, 于是

$$dP=\mu g(x+2)(10-\frac{x}{5})dx$$

积分得所求压力 $P=\int_0^{20}\mu g(x+2)(10-\frac{x}{5})dx=\frac{5360}{3}\mu g$. …………8 分

八、解：由 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x})=1$，可知

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}+f(x))=0$ 从而

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1.$ …………….3分

$1=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x-x}{x^2})=f'(0)+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$ …………….6分

$=f'(0)+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=f'(0)-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=f'(0)$

所以，$f'(0)=1.$ …………….8分

九、解：令 $u=x-t$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$

代入方程可得： $\int_0^x f(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1$ …………….2 分

再对 x 求导得： $f(x)=\int_0^x f(t)dt-e^{-x}$， …………….4 分

由于 $f(x)$ 连续，可知 $\int_0^x f(t)dt$ 可导，从而 $f(x)$ 也可导. 上式两边再求导得

$f'(x)=f(x)+e^{-x}$

则 $f(x)$ 满足初值问题：$\begin{cases} f'(x)=f(x)+e^{-x} \\ f(0)=-1 \end{cases}$ …………….6 分

解此微分方程可得 $f(x)=-\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}$ …………….8 分

十、证明：(1) 由于 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0,$

由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(0,1),$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1.$$ …………2 分

(2) 令 $\varphi(x)=f'(x)+f(x),$ $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，由拉格朗日定理，

存在 $\eta\in(-1,1),$ 使得

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{1-(-1)}=\varphi'(\eta).$$ …………4 分

$$\frac{f'(1)+f(1)-f'(-1)-f(-1)}{2}=\varphi'(\eta),$$

由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数，且 $f(1)=1,$ 得

$$\varphi'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$ …………6分