

# 19智车期中摸考

姓名 \_\_\_\_\_

班级 \_\_\_\_\_

学号 \_\_\_\_\_

## 一、填空题

1. 已知  $f(x)$  可导,  $y = \ln[f(x)] + e^{\arctan(x^2)}$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

2. 方程  $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ , 在  $(0,1)$  处切线方程为 \_\_\_\_\_.

3. 已知  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = e^t \end{cases}$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_,  $\frac{d^2y}{dx^2} =$  \_\_\_\_\_.

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(4\pi x)}} =$  \_\_\_\_\_.

5. 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$  间断点为 \_\_\_\_\_.

## 二、求极限

(6分)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2}$

三、设  $y=y(x)$  由方程  $xy+e^y-1=0$  确定, 求  $y''$  和  $y'(0)$   
(8分)

四、设  $y_1=10$ ,  $y_{n+1}=\sqrt{6+y_n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 证明: 数列  $\{y_n\}$  有极限, 并  
(7分) 求此极限.

五、设函数  $g(x)$  具有二阶连续导数, 且  $g(0)=1$ ,  $f(x)=\begin{cases} \frac{g(x)-\cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$   
(1) 确定  $a$  的值, 使  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.  
(2) 求  $f'(0)$ .

六、北京理工大学良乡校区理科教学楼外墙有一挂钟，假设其时针长为30 cm，分针长为40 cm。下午3:00，爱思考的北理工学子小王同学去上课时看到3挂钟。

请问，此时刻：

(1) 时针与分针夹角大小对时间的变化率；

(2) 两针针尖之间的距离对时间的变化率。

七、求证  $x > \sin x > x - \frac{x^3}{6}$  ( $x > 0$ ) (不得使用泰勒(Taylor)公式)

(9分) 并写出  $\sin x$  的六阶麦克劳林(MacLaurin)展开项，带皮亚诺余项(Peano)，不必写出推导过程。

八、研究函数性质并作出函数图像  $y = (1-x^3)^{\frac{1}{3}}$   
(2分)

九、设  $f(x)$  在  $x=0$  的某个邻域内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$ ,  
(1分) 试求  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  的值

十.(9分)

若  $f(x) = x^3 - ax^2 + x + b + 1$ , 且  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^2} = -1$ , 则

(1)  $f'[f(a)]$

(2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-ax)^{\frac{1}{\ln(bx+1)}}$

十一、设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  连续,  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f'(1/2) = 1$

(1) 证明:  $\exists y \in (\frac{1}{2}, 1)$  使  $f(y) = y$ ;

(2) 拓展: 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续,  $(a, b)$  内可导 且  $f(a) \cdot f(b) > 0$ ,

$f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$ , 证明:  $\exists c \in (a, b)$ , 使  $f(c) = f(\bar{c})$ .