

北京理工大学 2024-2025 学年第一学期  
2024 秋睿信书院《工科数学分析 I》期中试卷

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

一、 求解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1 设  $y = \sqrt{x} \arccos \sqrt{1-x^2}$ , 求  $dy$ .

2 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x - \frac{1}{2}x \sin 2x}{x^2(e^x - 1) \ln(1+x)}$ .

3 设函数  $y = y(x)$  由方程  $\cos^2(xy) + \ln(x-y) = x$  确定，求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ .

4 求当  $x \rightarrow 0$  时，无穷小  $e^x + \ln(1-x) - 1$  关于基本无穷小  $x$  的阶.

5 设  $y = x^2 \sin(2x)$ , 求  $y^{(21)}(0)$ .

二、 完成下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1 设  $\begin{cases} x = \sqrt{1-t} \\ y = \arcsin \sqrt{t} \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

2 求数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{\pi}{\sqrt{n}})^n$ .

3 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$ , 求常数  $a, b$  的值，使  $f(x)$  在点  $x = 1$  处可导 .

并求曲线  $y = f(x)$  在  $(1, f(1))$  点处的切线方程.

4 求曲线  $y = x + \frac{\ln x}{x}$  的凹凸区间、拐点及渐近线.

三、(8 分) 求证：对任意实数  $x$ ,  $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ .

四、(8分) 设函数  $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ , 其中  $g(x)$  是可导函数, 且  $g(0)=g'(0)=0$ , 试对任意实数  $x$ , 求  $f'(x)$ .

五、(8分) 用薄铝板冲压制成圆柱形平底无盖铝锅, 当铝锅表面积为定值  $A$  时, 试求底半径  $r$  为多少时, 可使铝锅的容积最大.

六、(7分) 设  $f(x)$  有二阶连续导函数, 且  $f'(0)=0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|}=1$ , 试判断  $f(0)$

是否为  $f(x)$  的极值, 是极大值还是极小值, 并说明理由.

七、(6分) (1) 设  $n$  为正整数, 试证明不等式:  $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ ;

(2) 证明数列  $x_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) - \ln n$  收敛.