

2024 秋睿信书院《工科数学分析 I》期中试卷

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

一、 求解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1 设 $y = \sqrt{x} \arccos \sqrt{1-x^2}$, 求 dy .

2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x - \frac{1}{2} x \sin 2x}{x^2(e^x - 1)\ln(1+x)}$.

3 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\cos^2(xy) + \ln(x-y) = x$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

4 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $e^x + \ln(1-x) - 1$ 关于基本无穷小 x 的阶.

5 设 $y = x^2 \sin(2x)$, 求 $y^{(21)}(0)$.

二、 完成下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1 设 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t} \\ y = \arcsin \sqrt{t} \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{\pi}{\sqrt{n}})^n$.

3 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$, 求常数 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处可导.

并求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 点处的切线方程.

4 求曲线 $y = x + \frac{\ln x}{x}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线.

三、(8 分) 求证: 对任意实数 x , $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$.

四、(8 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是可导函数, 且

$g(0) = g'(0) = 0$, 试对任意实数 x , 求 $f'(x)$.

五、(8 分) 用薄铝板冲压制成圆柱形平底无盖铝锅, 当铝锅表面积为定值 A 时, 试求底半径 r 为多少时, 可使铝锅的容积最大.

六、(7 分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导函数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 试判断 $f(0)$

是否为 $f(x)$ 的极值, 是极大值还是极小值, 并说明理由.

七、(6 分) (1) 设 n 为正整数, 试证明不等式: $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$;

(2) 证明数列 $x_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) - \ln n$ 收敛.