课程编号：100172203　　北京理工大学 2023-2024 学年第二学期

2023 级工科数学分析（II）期终考试试题 A 卷解答

一. (8 分) 设 $z=z(x,y)$ 在 R^2 有连续偏导数，并且

$$dz=\left[ax^2y^3+\cos(x+2y)\right]dx+\left[3x^3y^2+b\cos(x+2y)\right]dy$$

其中 a,b 是常数，求 a,b 的值和 $z=z(x,y)$ 的表达式.

解：由条件

$z_x=ax^2y^3+\cos(x+2y)$， $z_y=3x^3y^2+b\cos(x+2y)$， ----------2 分

则

$z_{xy}=3ax^2y^2-2\sin(x+2y)$， ----------1 分

$z_{yx}=9x^2y^2-b\sin(x+2y)$. ----------1 分

因为 z_{xy} 和 z_{yx} 都连续，所以 $z_{xy}=z_{yx}$， ----------1 分

$$3ax^2y^2-2\sin(x+2y)=9x^2y^2-b\sin(x+2y),$$

取 $x=\frac{\pi}{2},y=0$，解得 $b=2$，进而得出 $a=3$. ----------1 分

再由 $z_x=3x^2y^3+\cos(x+2y)$，

$$z(x,y)=x^3y^3+\sin(x+2y)+\varphi(y),$$

$$z_y=3x^3y^2+2\cos(x+2y)+\varphi'(y),$$

于是 $\varphi'(y)=0$， $\varphi(y)=C$. 故

$z(x,y)=x^3y^3+\sin(x+2y)+C$. ----------2 分

二. (21 分)

(1) 求二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{y}{x^2}dxdy$，其中 D 为由 $y=\frac{1}{x},y=2,y=x$ 所围的区域.

(2) 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} y^2\,dxdydz$，其中 Ω 由 $x=0,y=0,z=0,x+2y+z=1$ 所围成.

(3) 求第一型曲面积分 $I=\iint\limits_M (2x+5y+z)dS$，其中 M 为上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$(x^2+y^2\le R^2,\ R>0)$.

解：(1) $I=\iint\limits_{D}\frac{y}{x^2}dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{y}{x^2}dx$ ----------3 分

$=\int_1^2 y(-\frac{1}{x})\Big|_{\frac{1}{y}}^{y}dy$ ----------2 分

$=\int_1^2 y(y-\frac{1}{y})dy=\int_1^2(y^2-1)dy$

$=\frac{4}{3}$. ----------2 分

方法二. $I=\iint\limits_{D}\frac{y}{x^2}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{y}{x^2}dy+\int_1^2 dx\int_x^2\frac{y}{x^2}dy$.

(2) 设 D 为 $xy-$ 平面上由 $x=0,y=0,x+2y=1$ 所围成区域.

$I=\iiint\limits_{\Omega}y^2\ dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int_0^{1-x-2y}y^2dz$ ---------4 分

$=\iint\limits_{D}y^2(1-x-2y)dxdy$

$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\left[y^2(1-x-2y)\right]dy$ ---------3 分

$=\frac{1}{96}\int_0^1(1-x)^4dx=\frac{1}{480}$.

方法二. 对任意的 $y\in[0,\frac{1}{2}]$.

$I=\iiint\limits_{\Omega}y^2\ dxdydz=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\iint\limits_{D_y}y^2dzdx$

$=\frac{1}{480}$

(3) $z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$， $z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，

$I=\iint\limits_{M}(2x+5y+z)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(2x+5y+\sqrt{R^2-x^2-y^2})\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(2x+5y+\sqrt{R^2-x^2-y^2})\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$ ----------4 分

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}Rdxdy$ ----------3 分

$=\pi R^3$.

三. (23 分) 求下列函数的全微分或者偏导数

(1) 设 $z=\cos(e^{xy})$，求 dz.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y-z=e^z$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(3) 设 $z=yf(xy)+xg(\frac{y}{x})$，其中 f 和 g 在 R 上有连续的二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解： (1) $dz=-\sin(e^{xy})d(e^{xy})$

$$=-\sin(e^{xy})(e^{xy})d(xy)$$

$$=-e^{xy}\sin(e^{xy})(ydx+xdy).$$ ----------6 分

(2) 方程关于 x 求导，y 是常数，z 是 x 的函数，

$$1-z_x=e^z z_x,\quad z_x=\frac{1}{e^z+1}.$$ ----------3 分

$$z_{xx}=-\frac{e^z z_x}{(e^z+1)^2}=-\frac{e^z}{(e^z+1)^3}.$$ ----------3 分

方法二. $-z_{xx}=e^z z_x z_x+e^z z_{xx}$，$z_{xx}=-\frac{e^z {z_x}^2}{e^z+1}=-\frac{e^z}{(e^z+1)^3}$.

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'(xy)\cdot y+g(\frac{y}{x})+xg'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})$$ ----------4 分

$$=y^2 f'(xy)+g(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}g'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(xy)+yf'(xy)\cdot x+xg'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}$$ ----------4 分

$$=f(xy)+xyf'(xy)+g'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f'(xy)\cdot y+yf'(xy)+xyf''(xy)\cdot y+g''(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})$$ ----------3 分

$$=2yf'(xy)+xy^2 f''(xy)-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x}).$$

四. (8 分) 设 $\beta>1$，$0<a_n\le a_{n+1}$，$n=0,1,2,\cdots$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\beta}}$ 收敛.

证：由条件，$\{a_n\}$ 单调递增，则要么 $\{a_n\}$ 有上界要么 $\{a_n\}$ 趋于 $+\infty$.

----------1 分

(1) 设 $\{a_n\}$ 有上界. 则 $\{a_n\}$ 收敛，记 $A=\lim_{n\to+\infty}a_n$，显然 $A>0$.

利用极限性质，存在N_0，当$n > N_0$时，

$$a_n > \frac{A}{2}.$$ ----------1 分

则当$n > N_0 + 1$时，由条件$\beta > 1$，那么

$$0 \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\beta}} < \frac{a_n - a_{n-1}}{\frac{A}{2}(\frac{A}{2})^{\beta}} = (\frac{2}{A})^{\beta+1}(a_n - a_{n-1}).$$ ----------1 分

由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \to A - a_0, \quad n \to +\infty,$$ ----------1 分

说明$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛. 利用比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\beta}}$收敛. ----------1 分

(2) 设$\{a_n\}$无上界，即$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

利用极限性质，存在N_0，当$n > N_0$时，

$$a_n > 1.$$ ----------1 分

则当$n > N_0 + 1$时，由条件$\beta > 1$，那么

$$0 \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\beta}} \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}.$$ ----------1 分

由于

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a_0}, \quad n \to +\infty,$$

说明$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n})$收敛. 利用比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\beta}}$收敛. ----------1 分

五. (12 分) 求幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数的表达式.

解：记$u_n(x) = \frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$. 对任意的$x \ne 0$，

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \to x^2 < 1, \quad n \to +\infty,$$ ----------2 分

则得$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛区间为$(-1,1)$. ----------2 分

当$x=\pm 1$时，级数发散，所以收敛域为$(-1,1)$ ----------1 分

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}2nx^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$$

$$=2x^2\sum_{n=0}^{+\infty}n(x^2)^{n-1}+\frac{1}{1-x^2}+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$ ----------2 分

$$=2x^2S_1(x)+\frac{1}{1-x^2}+\frac{2}{x}S_2(x) \qquad (x\neq 0)$$

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(x^2)^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^2)^{n-1},$$

由于$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n)'=(\frac{1}{1-x}-1)'=\frac{1}{(1-x)^2}$

故$S_1(x)=\frac{1}{(1-x^2)^2}$ ------------------------------2 分

$S_2'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$ ------------------------------1 分

$$S_2(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt+S_2(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=2x^2\cdot\frac{1}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{1-x^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\to 3, \qquad (x\to 0)$ ----------1 分

所以，$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$ ----------1 分

六.（10 分）判别下列级数的敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5}{n!}$ （2） $\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\frac{1}{n^2}$

解：（1）记 $a_n=\frac{n^5}{n!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=(1+\frac{1}{n})^5\frac{1}{n+1}\to 0<1，\quad n\to+\infty.$$ ----------3 分

所以 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5}{n!}$ 收敛. ----------2 分

（2） $$\frac{n\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\to 1，\quad n\to+\infty.$$ ----------3 分

所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\frac{1}{n^2}$ 发散. ----------2 分

七.（10 分）设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x\le\pi\\ -x & -\pi<x\le 0\end{cases}.$$

（1）求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

（2）求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[-\pi,2\pi]$ 上的表达式；

（3）求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

解：（1）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$ ----------1 分

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx$$ ----------1 分

$$=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$ ----------1 分

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\cos nx dx$$ ----------1 分

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$ ----------1 分

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\sin nx dx$$ ----------1 分

$$= \frac{(-1)^n}{n}.$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$ ----------1 分

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$ ----------1 分

(2) $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数记为 $S(x)$.

$$S(x) = \begin{cases} -x & x \in (-\pi, 0] \\ 0 & x \in (0, \pi) \\ 2\pi - x & x \in (\pi, 2\pi] \\ \dfrac{\pi}{2} & x = -\pi, \pi \end{cases}.$$ ----------1 分

(3)取 $x = 0$， $S(0) = 0$， 则

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}.$$ ----------1 分

解得 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

八. (8 分)

(1) 求过点 $A(1,1,0)$ 和点 $B(-2,1,1)$，且与直线 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$ 平行的平面方程.

(2) 求含参积分 $I(x)=\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos\left(x\sin\theta\right)d\theta$， $x\in(-\infty,+\infty)$.

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(-3,0,1)$，直线的方向向量 $\vec{C}=(2,-3,1)$

则 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=(3,5,9)$

点法式写出所求平面方程，并化简为 $3x+5y+9z-8=0$ ----------3 分

(2) $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$$I'(x)=\int_0^{2\pi}\left\{e^{x\cos\theta}\cos\theta\cos\left(x\sin\theta\right)+e^{x\cos\theta}[-\sin\left(x\sin\theta\right)]\sin\theta\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos\left(x\sin\theta+\theta\right)d\theta.$$

$I^{(n)}(x)=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos\left(x\sin\theta+n\theta\right)d\theta$， $n=0,1,2,\cdots$. ----------1 分

$I(0)=2\pi$， $I^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots$， ----------1 分

利用泰勒公式，

$I(x)=I(0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{I^{(k)}(0)}{k!}+r_n(x)$， ----------1 分

其中 $r_n(x)=\dfrac{I^{(n+1)}(tx)}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中 $0<t<1$.

$\left|I^{(n+1)}(tx)\right|=\left|\int_0^{2\pi}e^{tx\cos\theta}\cos\left(tx\sin\theta+n\theta\right)d\theta\right|\le 2\pi e^{|x|}$, ----------1 分

$\left|r_n(x)\right|\le 2\pi e^{|x|}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$，

$r_n(x)\to 0, n\to+\infty$. ----------1 分

则 $I(x)=I(0)=2\pi$.

方法二. $\forall\alpha\in(-\infty,+\infty)$，记 $I(\alpha)=\int_0^{2\pi}e^{\alpha\cos\theta}\cos\left(\alpha\sin\theta\right)d\theta$.

$$I'(\alpha)=\int_0^{2\pi}\left\{e^{\alpha\cos\theta}\cos\theta\cos\left(\alpha\sin\theta\right)+e^{\alpha\cos\theta}[-\sin\left(\alpha\sin\theta\right)]\sin\theta\right\}d\theta.$$

----------1 分

记 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向，则

$$\int_L e^{\alpha x}\sin\alpha y dx+e^{\alpha x}\cos\alpha y dy=I'(\alpha).$$ ----------1 分

利用格林公式，

$$I'(\alpha)=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\alpha e^{\alpha x}\cos\alpha y-e^{\alpha x}\alpha\cos\alpha y\right)dxdy=0.$$ ----------1 分

$I(\alpha)=\int_0^{2\pi}e^{\alpha\cos\theta}\cos\left(\alpha\sin\theta\right)d\theta$ 是常数函数， ----------1 分

则 $I(x)=I(0)=2\pi$. ----------1 分