课程编号：MTH17003　　北京理工大学 2021-2022 学年第一学期

工科数学分析 I 期中试题

班级________________　学号__________________　姓名____________________

（本试卷共 6 页，十个大题．试卷不得拆散.）

（班级请按照 睿信 21XX 格式填写.）

题号	一 20	二 20	三 8	四 8	五 6	六 8	七 8	八 8	九 8	十 6	总分
得分											

一、填空（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}h(x)(f(x)-g(x))$ 存在并且不等于 0 ，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$，补充条件____________________________，使得 $\lim\limits_{x\to0}h(x)(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to0}h(x)(1-g(x))$.

2. $\lim\limits_{x\to0}(3\cos^2x-2)^{\frac{1}{x^2}}=$ ________________.

3. 已知函数 $f(x)=\frac{a^2}{x}+x,(x>0)$ 在 $\mathrm{x}=8$ 处取得极值，则 $\mathrm{a}=$ ____________.

4. 隐函数 $\mathrm{y}=\mathrm{y}(\mathrm{x})$ 由方程 $3^{\mathrm{xy}}=y+\frac{1}{2}\sin(\mathrm{x})$ 确定，则 $dy|_{x=0}=$ ______________.

5. 已知曲线 $\mathrm{y}=\ln(3\mathrm{x})$ 的一条切线为 $\mathrm{y}=\mathrm{ax}$，则 $\mathrm{a}=$ ____________.

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

2. 设 $y=\sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)$，其中 $x>1$，求 $\frac{dy}{dx}$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b}{x^3-5x^2+8x-4}=6$，求实数 a 和 b 的值。

4. 设当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-4x}-\sqrt[3]{1-6x}$ 与 ax^n 是等价无穷小，求 a 和 n 的值。

三、（8 分）当 $n \geq 2$ 为正整数，并且 $x \geq 1$ 时，

（1）证明不等式 $x^n > \frac{(x-1)^2}{4} n^2$ 成立；

（2）证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$；

（3）求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2+3+\ldots+n}$.

四、（8 分）写出函数 $\ln\cos(x)$ 的六阶麦克劳林公式。

五、（6 分）利用导数的定义求解函数 $y = \sqrt{x} + x^2$ 的导函数。

六、（8 分）求当 $a > 0$ 求函数 $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ 的渐进线，并给出当 $x > a$ 时函数的极值，同时画出 $a = 1$ 时的函数图像和渐近线图像。

七、（8 分）设 $\begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$ ，求 $\left.\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ ，$\left.\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right|_{t=\pi}$ ，$\left.\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

八、（8 分）设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-e^x}{x}, x \neq 0 \\ a \quad\quad , x = 0 \end{cases}$,其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0) = 1$.

（1）确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $\mathrm{x} = 0$ 处连续；

（2）求 $f^{'}(x)$;

（3）讨论 $f^{'}(x)$ 在 $\mathrm{x} = 0$ 处的连续性。

九、（8 分）设 f 为 $[a,b]$ 上的二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$ ，并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)<0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f''(\xi)>0$.

十、（6 分）设 $a>b>0$，令 $a_1=\frac{a+b}{2}$ 为等差中项，$b_1=\sqrt{ab}$ 为等比中项。若数 a_n 及 b_n 已知，则 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ 分别为等差中项和等比中项，证明：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.