

## 北京学院（工科）数学分析期中测试

### 1. 叙述定义（8 分）

- (1) 用  $\varepsilon - N$  语言叙述数列  $\{x_n\}$  收敛的严格定义；
- (2) 用  $\varepsilon - \delta$  语言叙述  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f$  收敛和发散的严格定义；
- (3) 叙述  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  的严格含义；
- (4) 叙述  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  内取得最值的严格含义。

### 2. 求数列极限和函数极限（10 分）

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \sin(\pi\sqrt{4n^2 + 1})]^{4n}$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^\alpha + x^\beta}$ , 其中  $m, n, \alpha, \beta$  均为正整数  
且  $\min\{\alpha, \beta\} = 2$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{(x - \pi)^2}$ ;
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right]$ , 其中  $[x]$  表示  $x$  向下取整;
- (5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^5 + x^4)^{\frac{1}{5}} - x}{x^\alpha}$ , 其中  $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 。

3. 求下列函数的间断点 (6 分)

$$(1) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + x^{2^i});$$

$$(2) f(x) = \left( \frac{1+|x|-\cos 2x}{|x|} \right)^{\frac{2}{x}}.$$

4. 求下列函数的渐近线 (6 分)

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}};$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2}{|x|+1}.$$

5. 求下列函数在  $x = 0$  处的导数以及二阶导数 (10 分)

$$(1) y = (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \frac{x}{\sqrt{x+1}};$$

(2) 函数  $y = y(x)$  由下列参数方程确定

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t + 1 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$$

6. 判断下列数列极限是否存在, 如果存在请证明, 并求出极限; 如果不存在说明理由。(20 分)

判断下列数列最大数与最小数是否存在, 如果存在请证明, 并求出最大数与最小数; 如果不存在说明理由。(10 分)

$$(1) x_{n+1} = \sqrt{4 + x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad x_1 = 0;$$

$$(2) a_1 = 2 + \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2+a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(3) r_n = \frac{x_{n-1}}{x_n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \text{其中 } x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \quad (n =$$

$$1, 2, \dots), x_0 = 1, x_1 = 2;$$

$$(4) r_n = \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots), \text{ 其中 } x_1 = a, x_{n+1} =$$

$$\ln(1 + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(5) x_n = \frac{2}{2 + \cos \sqrt{n} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})} \quad (n = 1, 2, \dots)。$$

7. 求证下列  $f$  在  $x = 0$  点可导并求  $f(0)$  和  $f'(0)$  的值 (10 分)

(1)  $f(x)$  在  $x = 0$  点的某邻域内有定义且  $f(x)$  在  $x = 0$

$$\text{点连续, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = 1。$$

(2)  $f(x)$  在  $x = 0$  点的某邻域内有定义且  $f(x)$  在  $x = 0$

$$\text{点连续, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{x^2 \arctan x} = 4。$$

8. 证明 (20 分)

(1) 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 。求证:  $f$

在  $(-\infty, +\infty)$  内必取得最大值。(7 分)

(2) 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 。求证: 函

数  $g(x) = f(x) - 2x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内必取得最大值。(3 分)

(3) 设函数  $g$  在闭区间  $[0, 1]$  内连续,  $g(0) = 0, g(1) = 1$ ,

且  $g(x)$  不恒等于  $x$ 。求证: 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得或者  $0 <$

$g(x_0) < x_0$ , 或者  $x_0 < g(x_0) < 1$ 。(10 分)