

## 2010-2011-第一学期 工科数学分析期末试题解答（信二学习部整理）

一. 1.  $\frac{1}{3}$

2.  $y''' + y'' - y' - y = 0$

3.  $\frac{1}{2}f'(2)$

4.  $\frac{\pi}{4}$

5.  $-\frac{1+x}{x^3 e^{2x}}$

二.  $a + b = 3$  .....(1 分)

$y' = 3ax^2 + 2bx$  .....(3 分)

$y'' = 6ax + 2b$  .....(5 分)

$6a + 2b = 0$  .....(6 分)

解得  $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$  .....(8 分)

三. 由题意  $\int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C_1$  .....(2 分)

$f(x) = (\frac{\sin x}{x} + C_1)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$  .....(4 分)

$\int xf'(x)dx = \int xdf(x)$  .....(5 分)

$= xf(x) - \int f(x)dx$  .....(7 分)

$= \frac{x \cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + C$  .....(8 分)

四.  $1 - \frac{dy}{dx} - \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$  .....(3 分)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin y}$  .....(4 分)

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\cos y \cdot \frac{dy}{dx}}{(1 + \sin y)^2}$  .....(6 分)

$$= \frac{-\cos y \cdot \frac{1}{1+\sin y}}{(1+\sin y)^2} = \frac{-\cos y}{(1+\sin y)^3} \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

五.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan x dx = -\int_1^{+\infty} \arctan x d\frac{1}{x} \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$= \frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \Big|_1^{+\infty} \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

六. 方程化为  $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 1 \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} (C + \int e^{\int \frac{2}{x} dx} dx) \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= x^2 (C + \int \frac{1}{x^2} dx)$$

$$= x^2 (C - \frac{1}{x}) = Cx^2 - x \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$V(C) = \int_0^1 \pi (Cx^2 - x)^2 dx \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$= \pi \left( \frac{1}{5} C^2 - \frac{1}{2} C + \frac{1}{3} \right) \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

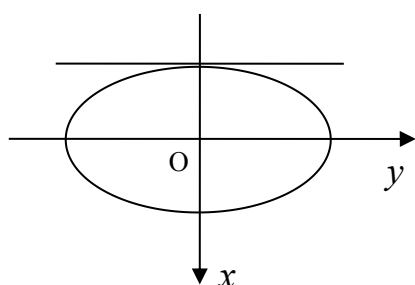
$$V'(C) = \pi \left( \frac{2}{5} C - \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

令  $V'(C) = 0$ , 得  $C = \frac{5}{4} \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$

由于  $V''(C) = \frac{2}{5}\pi > 0$ , 故  $C = \frac{5}{4}$  是极小值点也是最小值点,

所求解为  $y = \frac{5}{4}x^2 - x \dots\dots\dots(11 \text{ 分})$

七.



$$dP = \mu g(1+x)2ydx \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= 4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2} dx \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$P = \int_{-1}^1 4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2} dx \dots (5 \text{ 分})$$

$$= 8\mu g \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$= 2\mu g \pi = 2000\pi g (N) \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

八.  $r^2 + r - 2 = 0$  .....(1 分)

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -2 \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

设  $y^* = x(Ax + B)e^x$  .....(7 分)

$$y^{*'} = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x$$

$$y^{*''} = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B)e^x$$

代入方程得  $6A = 1, \quad 2A + 3B = -1$  .....(9 分)

解得  $A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{4}{9}$  .....(10 分)

$$y^* = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{4}{9}x\right)e^x$$

通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{4}{9}x\right)e^x$  .....(11 分)

信息与电子二学部学生会

学习部

九.  $f = ma$  .....(1 分)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

得  $v \frac{dv}{dx} = -\sin x$  .....(4 分)

$$v|_{x=0} = 2 \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$v dv = -\sin x dx \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \cos x + C \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

由初值得  $C = 1$

$$v^2 = 2(\cos x + 1) \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

十. 设  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^1 e^{x^2} dx \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = e \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$

$f(x)$  在  $(0, e)$  和  $(e, +\infty)$  单调  $\dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$f(e) = \int_0^1 e^{x^2} dx > 0 \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

故  $f(x)$  在  $(0, e)$  和  $(e, +\infty)$  内各有一不同实根,

所以方程在  $(0, +\infty)$  内有两个不同实根。  $\dots\dots\dots(9 \text{ 分})$

十一. 令  $x - t = u$ , 得

$$F(x) = \int_0^x (x - 2u)f(u)du \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

$$= x \int_0^x f(u)du - 2 \int_0^x uf(u)du \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$F'(x) = \int_0^x f(u)du - xf(x) \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= \int_0^x (f(u) - f(x))du$$

因为  $f(x)$  单调增加, 故  $F'(x) < 0$ , 所以  $F(x)$  单调减少  $\dots\dots(6 \text{ 分})$

$$F(-x) = \int_0^{-x} (-x - 2u)f(u)du \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

令  $t = -u$ , 得

$$F(-x) = -\int_0^x (-x + 2t)f(-t)dt \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

$$= -\int_0^x (x-2t)f(t)dt$$

$$= -\int_0^x (x-2u)f(u)du = -F(x)$$

故  $F(x)$  是奇函数 .....(10 分)



信息与电子二学部学生会  
学习部