

19 智车期中模考

姓名 _____

班级 _____

学号 _____

一、填空题

1. 已知 $f(x)$ 可导, $y = \ln[f(x)] + e^{\arctan(x^2)}$, 则 $dy =$ _____.

2. 方程 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$, 在 $(0, 1)$ 处切线方程为 _____.

3. 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = e^t \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ _____.

5. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ 间断点为 _____.

二、求极限
(6分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2}$

三、设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+e^y-1=0$ 确定, 求 y'' 和 $y'(0)$
(8分)

四、设 $y_1=10$, $y_{n+1}=\sqrt{6+y_n}$ ($n=1,2,\dots$), 证明: 数列 $\{y_n\}$ 有极限, 并
(7分) 求此极限.

五、设函数 $g(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(0)=1$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-\cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

(8分) (1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.
(2) 求 $f'(x)$.

六、北京理工大学良乡校区理科教学楼外墙有一挂钟，假设其时针长为 30 cm，分针长为 40 cm。下午 3:00，爱思考的北理工学子小王同学去上课时看到了挂钟。
请问，此时刻：

- (1) 时针与分针夹角大小对时间的变化率；
- (2) 两针针尖之间的距离对时间的变化率。

七、求证 $x > \sin x > x - \frac{x^3}{6}$ ($x > 0$) (不得使用泰勒 (Taylor) 公式)
(9分) 并写出 $\sin x$ 的六阶麦克劳林 (Maclaurin) 展开项，带皮亚诺余项 (Peano)，不必写出推导过程。

八、研究函数性态并作出函数图像 $y = (1-x^3)^{\frac{1}{3}}$
(12分)

九、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$,
(10分) 试求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 的值

十.(9分)

若 $f(x) = x^3 - ax^2 + x + b + 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^2} = -1$, 则

(1) $f'[f(a)]$

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-ax)^{\frac{1}{\ln(bx+1)}}$

十一、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$

(10分)

(1) 证明: $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使 $f(\eta) = \eta$;

(2) 推广: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 内可导 且 $f(a) \cdot f(b) > 0$,

$f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = f'(\xi)$.