

工科数学分析(上) 期末试题(A 卷)

座号 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(试卷共 6 页, 十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、填空(每小题4分, 共20分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx} = \frac{1}{e}$, 则 $k =$ _____.

2. 已知 $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

3. $\int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{(1-xe^x)^2} dx =$ _____.

4. $\int x^2 \sin x dx =$ _____.

5. 设 $y' + y = \cos x$, 则 $y =$ _____.

二、计算题(每小题5分, 共20分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{n} \right)$.

2. 设 $y = x^{\sin x} + \sin^2 x$, 求 dy .

3. 计算 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx$.

4. 求 $\frac{dy}{dx} = \cos(x + y)$ 的通解.

三、(8分) 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$, 试确定常数 a 和 b 的值.

四、(6分) 已知 $b > 0, b_1 > 0, b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{b}{b_n}) (n = 1, 2, \dots)$. 证明: 数列 $\{b_n\}$ 极限存在; 并求此极限.

五、(8分) 求函数 $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的单调区间和极值, 凹凸区间和拐点, 渐近线.

六、(8分) 设曲线 $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ 围成一平面图形 D .

- (1) 求平面图形 D 的面积;
- (2) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

七、(8分) 设一长为 l 的均匀细杆, 线密度为 μ , 在杆的一端的延长线上有一质量为 m 的质点, 质点与该端的距离为 a .

(1) 求细杆与质点间的引力;

(2) 分别求如果将质点由距离杆端 a 处移到 b 处($b > a$)与无穷远处时克服引力所做的功.

八、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$,

证明在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f^{(3)}(\xi)=3$.

九、(8分) 设 $f(x) = xe^x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 连续, 求 $f(x)$ 的表达式.

十、(6分) 已知 $f(x)$ 在闭区间 $[1,6]$ 上连续, 在开区间 $(1,6)$ 内可导, 且

$$f(1) = 5, \quad f(5) = 1, \quad f(6) = 12.$$

证明: 存在 $\xi \in (1,6)$, 使 $f'(\xi) + f(\xi) - 2\xi = 2$ 成立.