2024 秋睿信书院《工科数学分析 I》期中试题

参考答案及评分标准　　　　2024.11.23

一、1 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arccos\sqrt{1-x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ ……………………….5 分

$dy=y'dx=[\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arccos\sqrt{1-x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}]dx$ …………………….7 分

2 原式=$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x\sin x\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ ………….3 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$ ………………..7 分

3 当 $x=0$ 时，由方程得：$y=-e^{-1}$， ………………..2 分

$-2\cos(xy)\sin(xy)(y+xy')+\dfrac{1-y'}{x-y}=1$ …………………….5 分

将 $x=0,y=-e^{-1}$ 代入上式，得 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=1-e^{-1}.$ …………………7 分

4 当 $x\to0$ 时，$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$

又因为 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ …………………….2 分

所以 $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+o((-x)^3)$ ……………….4 分

$e^x+\ln(1-x)-1=(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{3})x^3+o(x^3)=-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$ ………….6 分

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2+\ln(1-x)-1}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$

所以当 $x\to0$ 时，$e^x+\ln(1-x)-1$ 是 3 阶无穷小. ………………..7 分

(注：此题也可用洛必达法则)

5　由莱布尼茨公式，得

$$y^{(21)}(x)=[\sin(2x)]^{21}x^2+21[\sin(2x)]^{(20)}\cdot 2x+\frac{21\times 20}{2}[\sin(2x)]^{(19)}\times 2+0$$

……………………4 分

$$y^{(21)}(0)=\frac{21\times 20}{2}[\sin(2x)]^{(19)}\times 2|_{x=0}=-420\times 2^{19}$$ ……………………7 分

（注：也可用泰勒公式）

二、1　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}=-\frac{1}{\sqrt{t}}$， …………………………4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}}{-1/2\sqrt{1-t}}=-t^{-3/2}\sqrt{1-t}$$ …………………………..7 分

2　原式= $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}-1)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}-1}\cdot(\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}-1)n}$ ………………………….3 分

$$=\lim_{n\to\infty}e^{(\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}-1)n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{\sqrt{n}})^2 n}=e^{-\frac{\pi^2}{2}}$$ ……………………………7 分

（注：也可以先转化为函数的极限再用洛必达法则）

3　由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导知， $f(x)$ 在 $x=1$ 处必连续，从而有

$f(1+)=f(1-)=f(1)$， $f'_+(1)=f'_-(1)$

$f(1)=2,\quad f(1+)=a+b,\quad f(1-)=2$，$\Rightarrow a+b=2$ …………….2 分

$f'_+(1)=a,\quad f'_-(1)=2,\quad \Rightarrow a=2$，$\Rightarrow b=0$

所以　$a=2,b=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且　$f'(1)=2$。 ……………5 分

切线方程为：　$y=2x.$ …………………..7 分

4　$y'=1+\frac{1-\ln x}{x^2}$, $y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}$,

令　$y''=0$,　得　$x=e^{\frac{3}{2}}$, …………………………2 分

又函数的定义域为：$x>0$，当 $x\in(0,e^{\frac{3}{2}})$ 时，$y''<0$，函数的图形为上凸的；

当 $x\in(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 时，$y''>0$，函数的图形为上凹的。

有拐点 $(e^{\frac{3}{2}},e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$. ……………………5 分

$\lim\limits_{x\to 0+} y=\lim\limits_{x\to 0+}(x+\frac{\ln x}{x})=\infty$，所以 $x=0$ 为此曲线的垂直渐近线，又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\ln x}{x^2})=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=1=k$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0=b$$

所以此曲线有斜渐近线： $y=x$ ……………………………………7 分

三、证明：设 $\boldsymbol{f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)}$，则 $f(0)=0$

$f'(x)=2\arctan x$， ……………………………………2 分

当 $x>0$ 时，有 $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单增，有 $f(x)>0$， ……4 分

当 $x<0$ 时，有 $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 严格单减，有 $f(x)>0$， …….6 分

所以对任意实数 x， $f(x)\geq 0$，结论成立。 ……………………………………8 分

（后半部分也可利用偶函数的性质证明）.

四、当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=g'(x)\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}g(x)\cos\frac{1}{x}$. ……………………3 分

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\sin\frac{1}{x}$

由已知条件知：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$，所以

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0.$ ……………………………..7 分

$$f'(x)=\begin{cases} g'(x)\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}g(x)\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$ ……………………….8 分

五、$A=\pi r^2+2\pi rh$，则 $h=\dfrac{A-\pi r^2}{2\pi r}$，

$V=\pi r^2 h=\dfrac{1}{2}[Ar-\pi r^3]$ ……………………………..3 分

$\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{1}{2}[A-3\pi r^2]$, 令 $\dfrac{dV}{dr}=0$，得唯一驻点 $r=\sqrt{\dfrac{A}{3\pi}}$， ………………5 分

又 $\dfrac{d^2V}{dr^2}=-3\pi r<0$，知唯一驻点为极大值点，且为最大值点，

（或由问题的实际意义知）当 $r=\sqrt{\dfrac{A}{3\pi}}$ 时，可使铝锅的容积最大。 …………8 分

六、解：由 $f'(0)=0$ 知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的驻点，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$，

由极限的保号性知：在 $x=0$ 点的某去心邻域中有 $\dfrac{f''(x)}{|x|}>0$， ………….2 分

推出在此去心邻域中有 $f''(x)>0,$ 所以 $f'(x)$ 在此去心邻域中单调增加，又

$f'(0)=0$，所以有

当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)$ 单增，有 $f(x)>f(0);$ ……..4 分

当 $x<0$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$，$f(x)$ 单减，有 $f(x)>f(0).$ ………6 分

这样此去心邻域中就有 $f(x)>f(0).$

由极值的定义知 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。 ……………………..7 分

七、(1) 证明：设 $f(x)=\ln x,$ 对于正整数 n，显然有 $f(x)$ 在区间 $[n,n+1]$ 上满足拉氏中值定理，所以至少存在一点 $\xi\in(n,n+1)$，使得

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{1}=f'(\xi)$$

即 $\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}$

又 $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$ 从而 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立。…………..3 分

（2）$x_{n+1}-x_n=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})-\ln(n+1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+\ln n$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0.$$

所以数列为单减数列。又 ………………………………………5 分

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$x_{n+1}=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1$$

$$>(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1})+\cdots+(\frac{1}{2}-1)+1$$

$$=\frac{1}{n+1}>0$$

所以此数列有下界，由单调有界准则知此数列收敛。 ……………………..6 分