北京理工大学 2016-2017 学年第二学期《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

参考答案及评分标准 　　**2017 年 6 月 29 日**

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $x+y-3z-4=0$

2. $x_0+y_0+z_0$

3. $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

4. $\frac{13}{6}$

5. 绝对

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解1： $d=\frac{\left|\{1,1,1\}\times\{2,-2,1\}\right|}{\left|\{2,-2,1\}\right|}=\frac{\left|\{3,1,-4\}\right|}{3}=\frac{\sqrt{26}}{3}$ ……………..(5分)

解 2： 过点 (1,0,2) 与已知直线垂直的平面为

$$2x-2y+z-4=0$$ …………….(1 分)

它与直线的交点为 $N(\frac{2}{9},-\frac{11}{9},\frac{10}{9})$ …………….(3 分)

$$d=MN=\sqrt{(1-\frac{2}{9})^2+(\frac{11}{9})^2+(2-\frac{10}{9})^2}=\frac{\sqrt{26}}{3}$$ …………….(5 分)

2. 解： $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y\cdot\ln(xy)+\frac{1}{x}y^x$ ……………..(2分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=y^x[(\ln y)^2\ln(xy)+\frac{2\ln y}{x}-\frac{1}{x^2}]$$ ……………..(5分)

3. 解： $dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=2dxdy$

在 xoy 坐标面上的投影区域 $D_{xy}:x^2+y^2\le 3$

$$\iint_S(x^2+y^2)dS=2\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$ …………….(3 分)

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3d\rho$$

$$=9\pi$$ …………….(5 分)

4. 解：$F'(y)=\int_y^{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\cos(xy)}{x})dx+\frac{\cos(y^2\cdot y)}{y^2}\cdot 2y-\frac{\cos(y\cdot y)}{y}\cdot 1$ ………….. (2 分)

$$=-\int_y^{y^2}\sin(xy)dx+\frac{2\cos y^3}{y}-\frac{\cos y^2}{y}$$

$$=\frac{1}{y}\cos(xy)|_y^{y^2}+\frac{2\cos y^3}{y}-\frac{\cos y^2}{y}$$ ………….. (4 分)

$$=\frac{1}{y}\cos y^3-\frac{1}{y}\cos y^2+\frac{2\cos y^3}{y}-\frac{\cos y^2}{y}$$

$$=\frac{3\cos y^3-2\cos y^2}{y}$$ ………….. (5 分)

三、 解 1： 切点 $M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$， ………….. (1 分)

微分得 $\begin{cases} dx=\cos v du-u\sin v dv \\ dy=\sin v du+u\cos v dv \\ dz=2dv \end{cases}$

$$dz=-2\frac{\sin v}{u}dx+2\frac{\cos v}{u}dy$$ ………….. (5 分)

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-2\frac{\sin v}{u},\frac{\partial z}{\partial x}|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{4}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\cos v}{u},\frac{\partial z}{\partial y}|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

曲面在 M 处的法向量：$\vec{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2)$ ………….. (7 分)

曲面在 M 处的切平面：即 $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2z-\pi=0$ ………….. (8 分)

解 2：切点 $M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$， ………….. (1 分)

$$\vec{n}_1=(x_u',y_u',z_u')|_{u=2,v=\frac{\pi}{4}}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$$

$$\vec{n}_2=(x_v',y_v',z_v')|_{u=2,v=\frac{\pi}{4}}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},2)$$ ………….. (5 分)

曲面在 M 处的法向量：$\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2)$ ………….. (7 分)

曲面在 M 处的切平面：即 $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2z-\pi=0$ ………….. (8 分)

四、解： $I_z=\iiint\limits_V \mu(x^2+y^2)dV \quad (\mu=1)$ …………(2 分)

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3 d\rho\int_\rho^{2-\rho^2}dz$ （柱坐标系） …………(4 分)

$=\dfrac{4}{15}\pi.$ …………(6

分)

五、解：设 $P(x,y,z)$为曲线Γ上任一点, P到原点的距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

为简便, 另设目标函数 $d^2=x^2+y^2+z^2$.

构造函数:

$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z^2-1)+\mu(2x-y-z-1)$

…………(2 分)

$$\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x+2\mu=0 \\ F_y'=2y+2\lambda y-\mu=0 \\ F_z'=2z-2\lambda z-\mu=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2-z^2-1=0 \\ F_\mu'=2x-y-z-1=0 \end{cases}$$ …………(5 分)

解得 $\lambda=1$（舍）, $\lambda=-1$,

得 $P_1(0,-1,0), P_2(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0)$ …………(7 分)

此两点到原点的距离 $d=1$即为所求最短距离. …………(8 分)

六、解：(1) 由$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$,

得 $\varphi'(x)(x^2+y^2)+2x\varphi(x)=\varphi(x)(2x+x^2+y^2)$

$\varphi'(x)=\varphi(x), \qquad \varphi(0)=1$ ……………..(2 分)

$\dfrac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=dx \qquad \varphi(x)=e^x$ ……………..(4 分)

(2) $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+e^x(x^2+y^2)dy+C$ ……….(6 分)

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y e^x(x^2+y^2)dy+C$$

$=e^x(x^2y+\frac{y^3}{3})+C$ …………..(8 分)

七、解: 由比值法：$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=2|x|^2$， …………..(2 分)

当 $2x^2<1$, 即：$-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,幂级数绝对收敛;

当 $2x^2>1$, 即：$x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,幂级数发散.

所 以 收 敛 域 为： $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………….(4 分)

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n-1}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}2^n\int_0^x x^{2n-2}dx$ ……………..(6 分)

$$=2x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(2x^2)^{n-1}dx=2x\int_0^x\frac{1}{1-2x^2}dx$$

$$=x\int_0^x(\frac{1}{1-\sqrt{2}x}+\frac{1}{1+\sqrt{2}x})dx=\frac{x}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}.\quad x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

……………..(8 分)

八、解: $b_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 3xdx$ ……………..(3 分)

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(-\frac{1}{3})d\cos 3x$$

$$=-\frac{2}{3\pi}(x\cos 3x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 3xdx$$

$=\frac{2}{3}$ …………….(6 分)

$S(\pi)=\frac{1}{2}(f(\pi-0)+f(-\pi+0))=0$ ……………. (8 分)

九、解：补充平面$S_1: z=1, x^2+y^2\le 1,$取下侧，则由 Gauss 公式

$$I=\iint_{S+S_1}-\iint_{S_1} =-\iiint_V (x^2+y^2+1)dxdydz+\iint_{D:x^2+y^2\le 1} dxdy \qquad \ldots\ldots.\ (4\text{ 分})$$

$$=-\int_0^1 dz\iint_{D_z:x^2+y^2\le z}(x^2+y^2+1)dxdy+\pi$$

$$=-\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}(\rho^2+1)\rho d\rho+\pi \qquad \ldots\ldots\ldots(6\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi}{3} \qquad \ldots\ldots\ldots.(8\text{ 分})$$

十、解：截面$S: y=s,(-2\le s\le 2)$，取右侧，即法向量$\vec{n}=\{0,1,0\}$

在xoz面上的投影$D_{xz}:\begin{cases}-\sqrt{4-s^2}\le x\le\sqrt{4-s^2}\\ 1-\frac{1}{4}(x^2+s^2)\le z\le 4-(x^2+s^2)\end{cases}$ $\ldots\ldots\ldots(1$ 分)

单位时间内通过截面S的流量:

$$\Phi(s)=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}^0 dS=\iint_S(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^4\cos\gamma)dS \qquad \ldots\ldots.\ (3\text{ 分})$$

$$=\iint_S y^2dzdx=\iint_{D_{zx}}s^2dzdx$$

$$=s^2\int_{-\sqrt{4-s^2}}^{\sqrt{4-s^2}}dx\int_{1-\frac{1}{4}(x^2+s^2)}^{4-(x^2+s^2)}dz=s^2(4-s^2)^{\frac{3}{2}}. \qquad \ldots\ldots.\ (5\text{ 分})$$

令 $\Phi'(s)=s(8-5s^2)(4-s^2)^{\frac{1}{2}}=0$，得 $s=\pm\sqrt{\frac{8}{5}}$，由问题的实际意义，通过 $y=\pm\sqrt{\frac{8}{5}}$ 两截面的流量最大. $\ldots\ldots.\ (6$分)