

## 工科数学分析(上) 期末试题(A 卷)

座号 \_\_\_\_\_ 班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

(试卷共 6 页, 十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

得分	
----	--

一、填空 (每小题4分, 共20分)

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-2x+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 设  $y = y(x)$  由  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$  确定, 则  $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 曲线  $y = (ax - b)^3$  在点  $(1, (a-b)^3)$  处有拐点, 则  $a, b$  应满足  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

4.  $\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $y' + 2xy = 4x$ , 则  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

得分	
----	--

二、计算题 (每小题5分, 共20分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$ .

2. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $2^{xy} = x + y$  所确定, 求  $dy|_{x=0}$ .

3. 求函数  $f(x) = (2x - 5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$  的单调区间与极值.

4. 求方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解.

得分	
----	--

三、(8分) 计算不定积分  $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$ .

得分	
----	--

四、(8分) 已知曲线  $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ , 求该曲线的渐近线.

得分	
----	--

五、(6分) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1,2,\dots)$ .

(1) 证明数列  $\{x_n\}$  有极限, 并求出极限值;

(2) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ .

得分	
----	--

六、(8分) 设曲线  $y=x^2$  与直线  $y=x$  围成一平面图形  $D$ .

(1) 求平面图形  $D$  的面积;

(2) 求平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积.

得分	
----	--

七、(8分)某物体的一个侧面为等腰梯形,上底长10m,下底长6m,高为20m,铅直立于水中,在下列条件下分别计算这个侧面所受到的水压力.

- (1) 上底与水面相齐;
- (2) 上底位于水深2m处.(重力加速度 $g(m/s^2)$ ,水的密度 $\mu(kg/m^3)$ ).

得分	
----	--

八、(8分)已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x} + \frac{\sin x}{x^2} \right) = 1$ ,

试求 $f'(0)$ .

得分	
----	--

九、(8分) 设函数  $f(x)$  连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1, \text{ 求 } f(x) \text{ 的表达式.}$$

得分	
----	--

十、(6分) 设奇函数  $f(x)$  在  $[-1,1]$  上具有 2 阶导数, 且  $f(0)=1$ .

证明:

- (1) 存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi)=1$ ;
- (2) 存在  $\eta \in (-1,1)$ , 使得  $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ .