标准答案及评分标准

一、填空（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-g(x)}{f(x)-g(x)}=1$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{1-g(x)}=1$ 两者都可以；

2. e^{-3}；　　3. ± 8；　　4. $\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right)dx$；　　5. $\frac{3}{e}$

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \quad \text{............3分}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4} \quad \text{............5 分}$$

2. 解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)+\sqrt{x}\frac{1}{1+\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{............4 分}$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)+\frac{1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-1}} \quad \text{............5 分}$$

3. 解：由 $2^3+(a-2)\cdot 2^2+(b-2a)\cdot 2-2b=0$ 和 $2^3-5\cdot 2^2+8\cdot 2-4=0$ 可知，极限为 $\frac{0}{0}$ 型。 ....1 分

因此可以应用洛必达，得

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2(a-2)x+(b-2a)}{3x^2-10x+8}, \quad \text{............2 分}$$

又因为 $3\cdot 2^2-10\cdot 2+8=0$，

所以有 $3\cdot 2^2+2(a-2)\cdot 2+(b-2a)=0$. （1） ....3 分

再一次应用洛必达，得

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2(a-2)x+(b-2a)}{3x^2-10x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{6x+2(a-2)}{6x-10} \quad \text{............4 分}$$

所以有 $6\cdot 2+2(a-2)=12$. (2)

联立（1）（2）解得 $a=2, b=-8$. .... 5 分

4. 解：由泰勒展开式 $(1+x)^b=1+bx+\frac{b(b-1)}{2}x^2+\cdots$ 可知 .... 1 分

$$\sqrt{1-4x}=1-2x-2x^2+\cdots;\ \sqrt[3]{1-6x}=1-2x-4x^2+\cdots; \quad \text{............ 3 分}$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt[3]{1-6x}}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+o(x^2)}{2x^2}=1. \quad \text{............ 4 分}$$

解得 $a=2, b=2$. .... 5 分

三、

（1） 证明：设 $f(x)=x^n-\frac{(x-1)^2}{4}n^2$,

则 $f'(\mathrm{x})=nx^{n-1}-\frac{x-1}{2}n^2$;

$f''(\mathrm{x})=n(n-1)x^{n-2}-\frac{1}{2}n^2=n\left(\frac{1}{2}n-1\right)\geq 0$; ·············· 2 分

所以 $f'(\mathrm{x})\geq f'(1)=n>0$;

因此有 $f(\mathrm{x})\geq f(1)=1>0$ 得证。 ·············· 3 分

（2）证明：令 $\mathrm{x}=\sqrt[n]{n}$ 代入（1）中不等式，有

$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$

应用夹逼准则，两边取极限可得 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 得证。·············· 6 分

（3）解：

由 $1\leq\sqrt[n]{1+2+3+\cdots+n}\leq\sqrt[n]{n^2}$,

应用夹逼准则，两边取极限可得 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\sqrt[n]{1+2+3+\cdots+n}=1$. ·············· 8 分

四、

解：

$\cos(x)-1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+o(x^6)$, ·············· 3 分

因此

$$\begin{aligned}\ln cos\,(x)&=\ln(1+(\cos(x)-1))\\&=(\cos(x)-1)-\frac{1}{2}(\cos(x)-1)^2+\frac{1}{3}(\cos(x)-1)^3+o(x^6)\\&=\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right)+o(x^6)\end{aligned}$$ ········ 6 分

化简后有，

$\ln cos\,(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)$. ········ 8 分

五、

解：由导数定义，$\mathrm{y}'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}+(x+\Delta x)^2-(\sqrt{x}+x^2)}{\Delta x}$. ········ 1 分

所以 $\mathrm{y}'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$. ········ 2 分

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; ········ 3 分

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\mathrm{x}\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x$. ········ 4 分

因此 $\mathrm{y}'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x$. ········ 6 分

六、

解：当 $\mathrm{x}>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}=1$,

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{1-\frac{a}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}\right)}\right)=\frac{a}{2}$. ……………2 分

同理，当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}=-1$,

并且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-a}{\sqrt{1-\frac{a}{-x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{a}{-x}}\right)}\right)=-\frac{a}{2}$. ……………4 分

当 $x\to a+$ 时，$y\to+\infty$.

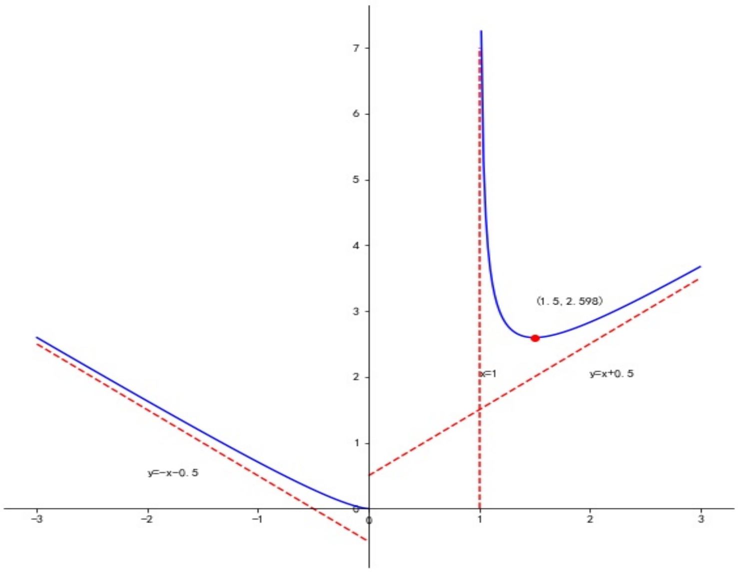
综上所述，有三条渐近线，分别为 $x=1; y=x+\frac{a}{2}; y=-x-\frac{a}{2}$; ……………5 分

对 y 求导数有

$y'=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(2x-3a)}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$. ………………… 6 分

所以当 $x=\frac{3a}{2}$ 时取得极值。 ………………… 7 分

当 $a=1$ 时函数图像绘制如下:



………………………………………………………… 8 分

七、解: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}$, ……………2 分

因此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}=0$; ……………4 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{-a(1-\cos(t))^2}$, ……………6 分

因此 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{a}$.　　　　　　　　　　……………8 分

八、

（1）解:

由 $g(0)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-e^x}{x}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型 ……………1 分

又 $g(x)$ 具有二阶连续导数，可以应用洛必达，有

$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(g'(x)-e^x)=g'(0)-1$ ……………2 分

（2）解：当 $x\neq0$ 时，

$f'(x)=\frac{x(g'(x)-e^x)-(g(x)-e^x)}{x^2}$ ……………3 分

当 $x=0$ 时，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-e^x}{x}-g'(0)+1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-e^x-xg'(0)+x}{x^2}$, ……………4 分

同样为 $\frac{0}{0}$ 型，可以应用洛必达法则，有 ……………5 分

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g'(x)-e^x-g'(0)+1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g''(x)-e^x}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$, ……………6 分

（3）解：由于

$\operatorname{Lim}\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(g'(x)-e^x)-(g(x)-e^x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(g'(x)-e^x)+x(g''(x)-e^x)-(g'(x)-e^x)}{2x}=\frac{g''(0)-1}{2}$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 ……………8 分

九、

证明：在区间 $[a,c]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$ 使得，

$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}<0$, ……………4 分

同样，在区间 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_2\in(c,b)$ 使得，

$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$, ……………6 分

最后在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得，

$f'(\xi)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0$. 得证。 ……………8 分

十、步骤一：用归纳证明 $0<b<\cdots<b_n<b_{n+1}<\cdots<a_{n+1}<a_n<\cdots<a$. ……………2 分

步骤二：b_n 单调递增有上界，所以有极限，a_n 单调递减有下界，所以有极限。

记 $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$；$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ……………4 分

步骤三：在等式 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ 左右两边分别取极限，有

$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. ……………6 分