参考答案

一、1. $\left[\dfrac{2f'(x)}{f(x)}+\dfrac{2x}{1+x^4}e^{\arctan(x^2)}\right]dx$ ...... 5'

2. $y=x+1$ ...... 5'

3. $\dfrac{e^t(1+t^2)}{2t}$ ...... 2'　　$\dfrac{-e^t(t-1)^2(t^2+1)}{8t^3}$. ...... 3'

4. $e^{-\frac{1}{2}}$ ...... 5'

5. $x=-1,\ x=0$（少一项不给分）. ...... 5'

二、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}$（解法一）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{\frac{1}{2}x^4}$ ...... 1'

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$ ...... 2'

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2x^2}$ ...... 2'

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$

$=\dfrac{1}{2}$ ...... 1'

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}$（解法二）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin x)}{2x^2}$ ...... 3'

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{4x(1+x\sin x)}$ ...... 1'

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-x\sin x}{4+8x\sin x+4x^2\cos x}$ ...... 1'

$=\dfrac{1}{2}$ ...... 1'

三、解：两边对x求导

$y+xy'+e^y y'=0$ ① …… 1'

再对x求导

$2y'+xy''+e^y(y')^2+e^y y''=0$ ② …… 2'

解得 $y''=-\dfrac{y'(2+e^y y')}{x+e^y}$ …… 1'

由①得 $y'=\dfrac{-y}{x+e^y}$ …… 1'

代入②得

$y''=\dfrac{y(2x+2e^y-ye^y)}{(x+e^y)^3}$ …… 2'

~~$y''(0)=0$~~ $y'(0)=0$ …… 1'

四、证明：已知 $y_1>y_2$，假设 $y_{k-1}>y_k$

则 $y_{k+1}=\sqrt{6+y_k}<\sqrt{6+y_{k-1}}=y_k$ $(k=2,3,\cdots)$

由归纳法知 $\{y_n\}$ 单调递减 …… 2'

因为 $y_n=\sqrt{6+y_{n-1}}>0$，即 $\{y_n\}$ 有下界

由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在 …… 2'

设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$．对原式两端取极限得 $A=\sqrt{6+A}$

$A=3$ 或 $A=-2$（舍） …… 2'

综上 数列 $\{y_n\}$ 有极限且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=3$ …… 1'

五、(1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}$，这是$\frac{0}{0}$型

未定式，可使用洛必达法则 …… 1'

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(g'(x)+\sin x)=g'(0)$

故当 $a=g'(0)$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续． …… 1'

(2) 当 $x\neq 0$ 时

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2} \quad \cdots 2'$$

当 $x=0$ 时

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \quad \cdots\cdots \quad 1'$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x} \quad \cdots$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2} \quad \cdots 1'$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x} \quad \cdots 1'$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[g''(0)+1] \quad \cdots 1'$$

六 (1) 设分针与12点钟方向夹角为 θ_1，时针与12点钟方向夹角为 θ_2

则 时针分针夹角为 $\alpha=\theta_2-\theta_1$，均取顺时针为正方向.

显然 $\dfrac{d\theta_2}{dt}=\dfrac{\pi}{6}\ (rad\cdot h^{-1})$

$\dfrac{d\theta_1}{dt}=2\pi\ (rad\cdot h^{-1})$

故 $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{d(\theta_2-\theta_1)}{dt}=\dfrac{d\theta_2}{dt}-\dfrac{d\theta_1}{dt}=-\dfrac{11}{6}\pi\ (rad\cdot h^{-1})$

（或 $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{11}{6}\pi$ 亦可） $\cdots 2'$

(2) 在3:00时，$\theta_1=0$，$\theta_2=\frac{\pi}{2}$，分针长 $l_1=40\,cm$，时针长 $l_2=30\,cm$.

由余弦定理得

$$l_1^2+l_2^2-L^2=2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)=2l_1l_2\cos\alpha \quad \cdots 2'$$

两侧对 t 求导 $\quad -2L\dfrac{dL}{dt}=-2l_1l_2\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{dt} \quad \cdots 2'$

在此时刻 $\quad L=\sqrt{l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\frac{\pi}{2}}=50\ (cm) \quad \cdots 1'$

代入已知条件可得 $\frac{dL}{dt} = -44\pi \ (cm \cdot h^{-1})$ …… 2'

七、证明：法一：

左侧：令 $f(x) = x - \sin x \quad (x>0)$

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$，即 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增

$\therefore f(x) > f(0) = 0$，即 $x > \sin x \quad (x>0)$ …… 3'.

右侧：令 $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = -2\sin^2\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(x + 2\sin\frac{x}{2})(x - 2\sin\frac{x}{2})$

显然 $x>0$ 时，恒有 $x + 2\sin\frac{x}{2} > 0$ …… 1'.

令 $h(x) = x - 2\sin\frac{x}{2}$，$h'(x) = 1 - \cos\frac{x}{2} \geq 0$.

从而 $h(x) > h(0) = 0$. 即 $g'(x) > 0 \quad (x>0)$ …… 2'

$\therefore g(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增 $g(x) > g(0) = 0$

即 $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ …… 1'

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ …… 2'.

法二：

右侧 令 $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$g''(x) = -\sin x + x$ 由法一可知 $x>0$ 时 $x > \sin x$ …… 1'

$\therefore g''(x) > 0$

即 $g'(x)$ 单调递增

$\therefore g'(x) > g'(0) = 0$ 即 $g(x)$ 单调递增 …… 2'

得证

左侧同上

11、

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	不可导	$-$
y''	$+$	0	$-$	不可导	$+$
y	单减下凸	拐点(0,1)	单减上凸	拐点(1,0)	单减下凸

…… 6'

（求解过程 2' 表格 4'）

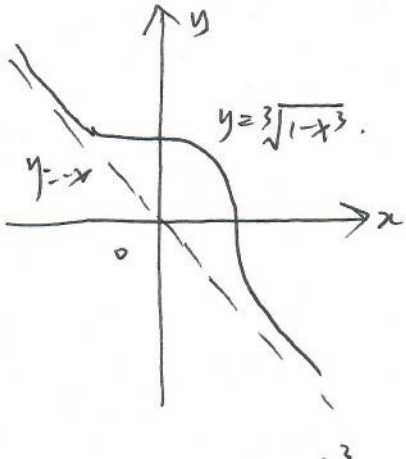
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{1-x^3}-(-x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{x^3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-\sqrt[3]{x^3(1-x^3)}+\sqrt[3]{x^6}}$$

$=0$ …… 3'

故 $y=-x$ 为斜渐近线



…… 3'

九、$\because \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ …… 2'

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$ …… 2'

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\Big[[1+f(0)]x+f'(0)x^2+$

$\left[\frac{f''(0)}{2!}-\frac{1}{6}\right]x^3+o(x^3)\Big]=\frac{1}{2}$ …… 2'

故 $1+f(0)=0$ $f'(0)=0$ $\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

即 $f(0)=-1$. $f'(0)=0$ $f''(0)=\frac{4}{3}$ (错一个不给分) …… 1'

十、(1) ∵ $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{(x+1)^2}=2$,极限存在

∴ $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0$ …… 2'

即 $f(-1)=0$, 得 $b-a=1$ …… 1'

由于 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{(x+1)^2}$ 满足 $\frac{0}{0}$ 不定型,可以使用洛必达法则

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)}{2(x+1)}$ 同理 $\lim\limits_{x\to -1}f'(-1)=0$ 得 $\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$ …1'

则 $f'[f(a)]=f'[f(-2)]=5$ … 1'

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\ln(-x+1)}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{\ln(-x+1)}}$ …… 2'

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2x}{\ln(-x+1)}}$

$=e^{-2}$ …… 2'

十一、(1) 令 $F(x)=f(x)-x$ …… 1'

则 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续

$F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$ $F(1)=-1<0$ …2'

由介值定理 $\exists\,\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $F(\eta)=0$

即 $f(\eta)=\eta$ …… 1'

(2) 令 $F(x)=f(x)e^{-x}f(x)$ …… 2'

则 $F(a)>0$ $F(\frac{a+b}{2})<0$ $F(b)>0$

由零点定理 $\exists\,\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$, $\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$ …2'

又∵ $F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理

∴ $\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=f(\xi)$ … 2'.