

2023 级工科数学分析 (I) 期终考试试题 A 卷

座号_____班级_____学号_____姓名_____成绩_____

(试卷共 8 页, 八大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一. 计算题 (共 7 小题, 35 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + 3x)^{\frac{1}{3}}}{2x^2}$.

3. 求不定积分 $\int \frac{4x+5}{x^2+x-2} dx$.

4. 求定积分 $\int_0^4 \sin \sqrt{x} dx$.

5. 求由 $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 4t - t^4 \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1-t^2+t^4} dt$ 的值.

7. 设 $f(x) = x \cos x$, 求 $f^{(5)}(0)$.

二. (共 3 小题, 15 分)

(1) 设函数 $f(u)$ 二阶可导, 求 $y = f(\sin^2 x)$ 的一阶微分 dy 和二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

(2) 求微分方程 $y'' + y = x^2 + 3x$ 的通解.

(3) 已知 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且其反函数为 $g(x)$, 若

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2, \text{ 求 } f(x).$$

三. (12 分) 设 $F(x) = x^2 f(x)$.

(1) 若 $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$, 求 $F(x)$ 在 $x=0$ 的 5 阶泰勒展开式, 并求 $F^{(5)}(0)$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, b]$ 二阶可导, 且 $f(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, b)$, 使得

$$F''(\xi) = 0.$$

四. (8 分) 设 $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

五. (6 分) 构造辅助函数, 利用函数单调性证明: $e^\pi > \pi^e$.

六. (10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} b + \sqrt{x} \arctan x & (x > 0) \\ a & (x = 0) \\ \frac{\sin x}{x} & (x < 0) \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导.

(1) 求常数 a, b 的值;

(2) 求 $f'(0)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性.

七. (8 分) 计算题

(1) 求 $y = -x^2 + 2x$ 和 $2x + y = 3$ 所围成的平面图形面积。

(2) 求 (1) 所围成的平面图形绕直线 $x = 1$ 旋转一周所得的旋转体体积。

八. (6 分) 设函数 $y = f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}, \text{ 其中 } u \text{ 是曲线 } y = f(x) \text{ 上点 } P(x, f(x)) \text{ } (x \neq 0) \text{ 处切线在 } x$$

轴上的截距.