北京理工大学 2017-2018 学年第一学期《工科数学分析》（上）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准

2018年1月12日

一、填空（每小题4分，共20分）

1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{x^2}{1-x^4}$

3. ∞($+\infty$，不收敛)

4 . $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

5. $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+ce^{-x}$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}x^3(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^3}} \qquad 令t=\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin(2t)}{t^3}$$ 2分

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$$ 4分

$$\therefore\lim_{n\to\infty}n^3(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{n})=\frac{1}{2}$$ 5分

注：此题也可以用泰勒公式。

2. 解：$\frac{dy}{dx}=(e^{\sin x\ln x})'+2\sin x\cos x$ 2分

$$=e^{\sin x\ln x}\cdot(\sin x\ln x)'+\sin 2x$$

$$=x^{\sin x}\cdot(\cos x\ln x+\tfrac{\sin x}{x})+\sin 2x$$ 4分

因此，$dy=(x^{\sin x}\cdot(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})+\sin 2x)dx$. 5分

3. 解： 原式$=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$$ 2分

$$=4\int_0^1 \frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=4-\pi$$ …………. 5分

4．解：令 $u=x+y$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ …………. 2分

代入原方程，得：$\dfrac{du}{dx}=1+\cos u=2\cos^2\dfrac{u}{2}$

分离变量法得：$\tan\dfrac{u}{2}=x+c$ …………. 4 分

将 $u=x+y$ 代入上式，

得通解为：$\tan\dfrac{x+y}{2}=x+c$. …………. 5 分

三、解：由条件知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=0$ 得

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$ …………. 4 分

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$$ …………. 6 分

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right)=-\frac{1}{2}$$ …………. 8分

四、解：$b_n=\dfrac{1}{2}(b_{n-1}+\dfrac{b}{b_{n-1}})\ge\sqrt{b_{n-1}\cdot\dfrac{b}{b_{n-1}}}=\sqrt{b},$ …………. 2分

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{b}{b_n^2})\le\frac{1}{2}(1+\frac{b}{b})=1.$$

所以数列 $\{b_n\}$ 单调递减有下界，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在. …………. 4分

设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$, 则有 $a=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{b}{a})$, 得 $a=\sqrt{b}$, $a=-\sqrt{b}$.（舍去）

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sqrt{b}.$ …………. 6 分

五、解:定义域 $x \neq 0$

$y' = -\dfrac{4(x+2)}{x^3}$， $y' = 0$ 得 $x_1 = -2$； $y'' = \dfrac{8(x+3)}{x^4}$ ， $y'' = 0$ 得 $x_2 = -3$. ………… **2 分**

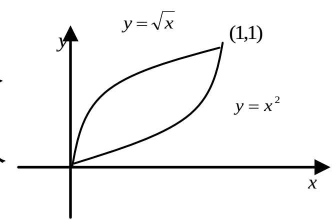
列表：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$		$+$
y		拐点		极小值		间断点	
		$(-3,-\frac{26}{9})$		$(-2,-3)$			

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{4(x+1)}{x^2} - 2) = -2$， 有水平渐近线： $y = -2.$

$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{4(x+1)}{x^2} - 2) = +\infty$， 有垂直渐近线： $x = 0.$ ………… **8分**

六、解：（1）画草图，解交点 $(0,0)$, $(1,1)$



$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$ …………**2 分**

$= \dfrac{1}{3}$ …………**4 分**

（2）$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy - \pi\int_0^1 y^4 dy$ …………**6 分**

$= \dfrac{3}{10}\pi$ …………**8 分**

七、解: 建立坐标系，使细杆位于区间 $[0,l]$ 上，质点位于 $l+a$ 处.

(1) $dF = G\dfrac{m\mu dx}{(a+l-x)^2}$ …………**2 分**

$F = \int_0^l \dfrac{Gm\mu}{(a+l-x)^2}dx = Gm\mu(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+l}) = \dfrac{Gm\mu l}{a(a+l)}.$ …………**4 分**

(2) 当质点向右移至距杆端 $x(x \geq a)$ 处时，细杆与质点间的引力为

$$F(x) = \frac{Gm\mu l}{x(x+l)}$$

将质点由 a 处移到 b 处与无穷远处时克服引力所做的功分别记作 W_b 和 W_∞.

$$dW = F(x)dx = \frac{Gm\mu l dx}{x(x+l)}dx,$$ …………**6 分**

积分得

$$W_b = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \frac{Gm\mu l}{x(x+l)}dx = Gm\mu\int_a^b (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l})dx = Gm\mu\ln\frac{b(a+l)}{a(b+l)},$$

$$W_\infty = \lim_{b\to+\infty} W_b = \lim_{b\to+\infty} Gm\mu\ln\frac{b(a+l)}{a(b+l)} = Gmu\ln\frac{a+l}{a}.$$ …………**8 分**

八、解：由麦克劳林公式，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(\eta)}{3!}x^3$，…………….**2 分**

其中 η 在 0 与 x 之间，从而 $0=f(-1)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2!}-\dfrac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!},-1<\xi_1<0,$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!},0<\xi_2<1,$$

两式相减，得 $f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)=6.$ …………….**5 分**

$f^{(3)}(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$ 上连续，所以 $f^{(3)}(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上必有最小值 m 和最大值 M，

从而 $m\le\dfrac{f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)}{2}\le M,$ …………….**7分**

由介值定理，至少存在一点 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$，使得

$$f^{(3)}(\xi)=\frac{f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)}{2}=3.$$ …………….**8分**

九、解：$f(x)=xe^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt=xe^x+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

上式两端对 x 求导，得：$f'(x)=(x+1)e^x+\int_0^x f(t)dt$ …………….**2 分**

再对 x 求导得：$f''(x)=(x+2)e^x+f(x)$，

则 $f(x)$ 满足初值问题：$\begin{cases}f''(x)-f(x)=(x+2)e^x\\ f(0)=0,\quad f'(0)=1\end{cases}$ …………….**4 分**

对应齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$

设非齐次方程的特解为：$y^*=x(ax+b)e^x$，代入原方程，得：$4ax+2a+2b=x+2$

解得：$a=\dfrac{1}{4},\quad b=\dfrac{3}{4},\quad y^*=\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x.$ …………….**6 分**

通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x$

由初始条件，得：$C_1=\dfrac{1}{8},\quad C_2=-\dfrac{1}{8}.$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{8}e^x-\dfrac{1}{8}e^{-x}+\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x.$ …………….**8 分**

十、证明: 构造辅助函数 $F(x)=e^x(f(x)-2x)$ **……………. 2 分**

有 $F(1)=e(f(1)-2)=3e>0,\qquad F(5)=e^5(f(5)-10)=-9e^5<0.$

$F(x)$ 在 $[1,5]$ 上连续,由零点定理可知,至少存在一点 $\eta\in(1,5)$,

使得 $F(\eta)=0.$ **……………. 4 分**

又因为 $F(x)$ 在 $[\eta,6]$ 上连续, 在 $(\eta,6)$ 内可导, 且

$$F(6)=e^6(f(6)-12)=0=F(\eta),$$

由罗尔定理可知, 存在 $\xi\in(\eta,6)\subset(1,6)$， 使 $F'(\xi)=0$，即

$f'(\xi)+f(\xi)-2\xi=2$ **……………. 6 分**