2023-2024-1 概率与数理统计参考答案（A 卷）

一、填空题

1. 0.5

2. 1.5，2.5

3.

X_2 \ X_1	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

4. $\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$ ；

5. σ^2 ； 6. 0.9876; 7. 16 ; 8. 0.25

二、（12分）

解：设 A_1 表示甲地区的人，A_2 表示乙地区的人，A_3 表示丙地区的人，

B 表示某人感染此种流行病，由题意可知

$P(A_1)=0.2, P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.3,$

$P(B|A_1)=0.06, P(B|A_2)=0.05, P(B|A_3)=0.03.$

（1）利用全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$$
$$=0.2\times 0.06+0.5\times 0.05+0.3\times 0.03=0.046.$$

（2）利用 Bayes 公式得

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.05}{0.046}=\frac{25}{46}\approx 0.5435$$

三、(12分)

解 (1) X的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$$

(2) 当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$时，$y=\tan x$为严格单调增函数，$-\infty<y<+\infty$,

且$x=h(y)=\arctan y$, $h'(y)=\frac{1}{1+y^2}$.

于是$f_Y(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$

(3) 由题意可知

$$P\{Y>1|X>0\}=\frac{P\{Y>1,X>0\}}{P\{X>0\}}=\frac{P\left\{X>\frac{\pi}{4},X>0\right\}}{P\{X>0\}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

四、(14分)

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}dy=2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}dx=e^{-y}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases},$$

(2) $P\{X+Y<2\}=\iint\limits_{x+y<2} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x+y<2\\ x>0,y>0}} 2e^{-(2x+y)}dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} 2e^{-(2x+y)}dy$

$$=1+e^{-4}-2e^{-2}=(1-e^{-2})^2$$

(3) $P\{X<2|Y<1\}=\dfrac{P\{X<2,Y<1\}}{P\{Y<1\}}=\dfrac{\int_0^2 dx\int_0^1 2e^{-(2x+y)}dy}{\int_0^1 e^{-y}dy}=1-e^{-4}$

(4) 根据题意，$D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$为联合密度函数的非零区域，

由分布函数的定义可知

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X+Y}{2}\le z\right)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$$

积分区域$D_1=\left\{(x,y):\dfrac{x+y}{2}\le z\right\}$（其中$z$为常数），则

$$F_X(z)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\begin{cases}\int_0^{2z}dx\int_0^{2z-x}2e^{-(2x+y)}dy, & z>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-4z}(e^{2z}-1)^2, & z>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad=\begin{cases}e^{-4z}-2e^{-2z}+1, & z>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则Z的概率密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}4e^{-2z}-4e^{-4z}, & z>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

五、(8分)

解：因为 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，

所以 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$.

因为 $X_3+X_4\sim N(2,2\sigma^2)$，

所以 $\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

于是 $\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim \chi^2(1)$.

由 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 和 $\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}$ 相互独立，得

$$\frac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}\sim t(1),$$

即 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3-X_4-2|}\sim t(1)$.

六、(15分)

1. 解：(1) 易知 $EX=1, EY=0, DX=9, DY=4$

$$E(Z_1) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1$$

$$E(Z_2) = E(X-2Y) = E(X) - 2E(Y) = 1$$

$$Cov(X,Y) = \rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = -\frac{1}{2}\times 3\times 2 = -3$$

$$D(Z_1) = D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y)$$

$$= 9 + 4 + 2\times(-3) = 7$$

$$D(Z_2) = D(X-2Y) = D(X) + 4D(Y) - 4Cov(X,Y)$$

$$= 9 + 16 + 4\times 3 = 37$$

(2) $Cov(Z_1, Z_2) = Cov(X+Y, X-2Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) - Cov(Y,2Y)$

$$= D(X) - Cov(X,Y) - 2D(Y) = 9 + 3 - 2\times 4 = 4$$

$$\rho_{Z_1,Z_2} = \frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}} = \frac{4}{\sqrt{259}}$$

(3) 因为 $\rho_{Z_1,Z_2} \neq 0$ 所以Z_1与Z_2相关，所以不独立。

2. 解：设商店存储x千克该产品，则x应满足

$$P(X_1 + X_2 \le x) \ge 0.99$$

由于$X_1 \sim N(200,35)$，$X_2 \sim N(260,65)$，X_1, X_2相互独立，

$$X_1 + X_2 \sim N(460,100)。$$

因此 $P(X_1+X_2 \le x) = P(\frac{X_1+X_2-460}{\sqrt{100}} \le \frac{x-460}{\sqrt{100}}) = \Phi(\frac{x-460}{10}) \ge 0.99$

已知$\Phi(2.33) = 0.99$，只需$\frac{x-460}{10} \ge 2.33$，即$x \ge 483.3$。

商店应至少存储483.3千克该产品。

七、(12分)

解：1. 由 $EX=0, DX=\sigma^2$ 得 $\mu_2=EX^2=DX+(EX)^2=\sigma^2$

以 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 代替 μ_2 得 σ^2 的矩估计为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

2. 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$$

似然函数为 $$L(\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$$

对数似然函数为 $$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

对 σ^2 求导并令其为零，得 $$\frac{d\ln L}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

解得 σ^2 的最大似然估计为 $$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

3. 由于 $P(X\le 1)=P\left(\frac{X}{\sigma}\le\frac{1}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$

因此 $P(X\le 1)$ 的最大似然估计为 $\Phi\left(\frac{1}{\hat{\sigma}}\right)=\Phi\left(1\Big/\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)$

八、(11分)

解：$H_0: \mu \geq \mu_0 = 1000 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0 = 1000$

构造检验统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0}{\sim} t(n-1)$

拒绝域为 $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$

查t分布表可得：$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(25-1) = 1.7109$，

计算得 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} == -1.538 > -1.7109$

即不拒绝原假设H_0，认为这批元件是合格的