2023 级概率论与数理统计试题（A 卷）

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页左上方填写座号、姓名、学号、班级等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表

$\Phi(1.96)=0.975$ $\Phi(1.645)=0.95$ $\Phi(1)=0.8413$ $t_{0.05}(8)=1.8595$ $t_{0.05}(9)=1.8331$
$t_{0.025}(8)=2.3060$ $t_{0.025}(9)=2.2622$ $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$ $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$
$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$ $\chi^2_{0.95}(9)=3.325$ $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$ $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$
$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$ $\chi^2_{0.975}(9)=2.700$ $F_{0.025}(8,8)=4.44$ $F_{0.025}(9,9)=4.02$
$F_{0.05}(8,8)=3.44$ $F_{0.05}(9,9)=3.18$

1. 填空题（共 16 分，每小题 2 分）

1. 设 A,B 是两个随机事件，且已知$P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(B|A\cup\overline{B})=$____。
2. 某公安局在长度为 t 的时间间隔（以小时计）内收到紧急呼救的次数服从参数为 t 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关，则某天中午 12 点到下午 3 点没有收到紧急呼救的概率是 ___。
3. ___二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,2;0,1,\rho)$，若 X 与 Y 相互独立，则 $\rho=$___，此时，$X-Y$ 服从的分布为___。
4. 随机变量 $X_1,X_2,...,X_n$ 相互独立同分布，且其数学期望存在，则对任意的整数 $k(1\le k\le n)$，有 $E(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=$____。
5. 随机变量序列 $X_1,X_2,...,X_n$ 独立同分布，共同的分布为 $B(m,p)$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P}$ _____
6. 总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，则 $D\left(\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2\right)=$____。
7. 总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，则 $\frac{5\sum_{i=1}^3(X_i-\mu)^2}{3\sum_{i=4}^8(X_i-\mu)^2}$ 服从的分布为___。
8. 假设两种稻谷甲和乙的产量分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$。为研究两种稻谷的产量差异，甲稻谷和乙稻谷各种植了 9 块地，稻谷成熟后分别称量了每块地的产量，计算得它们的样本方差分别为 $s^2_{甲}=4$，$s^2_{乙}=3$，则方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 95% 的置信区间为____。

2. （12 分）

1. 一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率是 p，若第一次及格，则第二次及格的概率为 p，若第一次不及格，则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$。已知两次考试中至少有一次及格才能取得某种资格。

   (1)求该学生取得该资格的概率

   (2)若已知该生第二次考试及格，求他第一次考试及格的概率。

3. （9 分）

1. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，令 $Y=|X|$。

   (1)写出 X 的密度函数

   (2)求 Y的概率密度函数。

4. （15 分）

1. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<x<2,0<y<x\}$ 上服从均匀分布，令 $Z=X+Y$。

   (1)求 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$；

   (2)求 X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

   (3)判断 X 与 Y 是否相互独立，并给出理由；

   (4)求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$

   (5)求 $P(\max(X,Y)\leq 1)$。

5. （8 分）

某储蓄所的一位银行员工每天工作时间内服务的顾客数服从参数为 100 的泊松分布，现在随机跟踪该员工 25 天，每天记录其在工作时间内服务的顾客数，求 25 天内服务的平均顾客数超过 102 人的概率的近似值。

6. （14 分）

1. 二维随机变量 (X_1,X_2) 的密度函数为

   $$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

   令 $Y=1+2X_1-X_2+\varepsilon$，$U=2X_1-X_2$，其中 $\varepsilon\sim N(0,\frac{1}{144})$ 且与 (X_1,X_2) 独立。求：(1)EU，DU；(2)EY，DY；(3)ρ_{YU}。

7. （14 分）

1. 总体 X 的密度函数为

   $$f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

   其中 $\lambda>0$ 为未知参数。$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为相应的样本值。求：

   (1) 参数 λ 的矩估计；

   (2) 参数 λ的最大似然估计。

2. 总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，S^2 为样本方差。证明：S^2 是 σ^2相合估计。

8. （12 分）

某种药物的杂质含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，国家规定杂质含量不得超过 0.1 (mg/g)。药检局对某药厂送检的该种药品进行了 9 次检测，检测数据记为 x_i，计算得 $\sum_{i=1}^{9}x_i=0.873$，$\sum_{i=1}^{9}x_i^2=0.09181$。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，该药品杂质含量是否超过国家规定的标准？（写出检验步骤）