

## 2022-2023-2 概率与数理统计参考答案 (A 卷) ↵

### 一、填空题 (16 分, 每小题 2 分) ↵

1. 0.1; 2. 1, 1 3.  $N(-1, 3)$  4.  $\frac{26}{3}$  5.  $\chi^2(4)$  6. 1 7.  $\frac{2}{n}$  8. [53.8, 64.48] ↵

### 二、(12 分) ↵

解: 设  $B=\{\text{该地区居民患高血压病}\}$ , ↵

$A_1=\{\text{肥胖者居民}\}$ ,  $A_2=\{\text{不胖不瘦居民}\}$ ,  $A_3=\{\text{瘦者居民}\}$ . ↵

则由题意知  $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.82, P(A_3)=0.08$ , ↵

$$P(B|A_1)=0.2, P(B|A_2)=0.1, P(B|A_3)=0.05 ↵$$

(1) 利用全概率公式得 ↵

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.1 \times 0.2 + 0.82 \times 0.1 + 0.08 \times 0.05 = 0.106 \end{aligned} ↵$$

(2) 利用 Bayes 公式得 ↵

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.1 \times 0.2}{0.106} = \frac{10}{53} ↵$$

### 三、(12 分) ↵

解: 1. 由于  $y=2(\theta-1)\ln x$  是  $x$  的严格单调递增函数 ↵

且反函数为  $x=e^{\frac{1}{2(\theta-1)}y}$ ,  $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2(\theta-1)}e^{\frac{1}{2(\theta-1)}y}$ , ↵

由此得到  $Y=2(\theta-1)\ln X$  的密度函数为 ↵

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} ↵$$

2. 易知  $2(\theta-1)\ln X_i \sim \chi^2(2)$ , 且相互独立, 由可加性知 ↵

$$Z = 2(\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln X_i \sim \chi^2(2n) ↵$$



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

#### 四、(12分)

解：1. 由

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} ae^{-x-y} dx = a$$

得

$$a = 1$$

2.  $X$  的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$Y$  的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3. 由于  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ ，因此  $X$  和  $Y$  相互独立。

$$4. f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_0^z e^{-z} dx, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} ze^{-z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

## 五、(8分) ↶

解：设需要车位数位  $x$ ，设  $X_i$  为第  $i$  户住户拥有的车辆数，由已知 ↶

$$EX_i = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2, \quad E(X_i^2) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.6 + 2^2 \times 0.3 = 1.8 \quad ↶$$

$$DX_i = E(X_i^2) - (EX_i)^2 = 0.36$$

由中心极限定理可知 ↶

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 1.2}{\sqrt{100 \times 0.36}} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 120}{6} \text{ 近似服从 } N(0,1) \text{ 分布,} \quad ↶$$

$$\text{因此 } P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq x\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 120}{6} \leq \frac{x - 120}{6}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - 120}{6}\right) \geq 0.95 \quad ↶$$

已知  $\Phi(1.645) = 0.95$ ，因此有 ↶

$$\frac{x - 120}{6} \geq 1.645 \quad ↶$$

解得  $x \geq 129.87$ ，即至少需要 130 个车位。 ↶

## 六、(12分) ↶

1. 解: 设每天生产的产品数为  $n$ ,  $X$  为  $n$  件产品中的合格品数,  $Y$  为企业每天的获利。 ↶

由题意可知,  $X \sim B(n, 0.96)$ , 因此  $EX = 0.96n$ 。 ↶

另一方面每天的获利  $Y = 80X - 20(n - X) = 100X - 20n$ , 因此 ↶

$$EY = E(100X - 20n) = 100EX - 20n = 100 \times 0.96n - 20n = 76n \quad ↶$$

由此可得 ↶

$$76n \geq 10000 \quad ↶$$

解得  $n > 131.6$ , 即企业每天至少生产 132 件产品。 ↶

$$2. \text{解: } E(X) = \int_0^1 dx \int_0^1 x(2-x-y) dy = \frac{5}{12}, E(Y) = \int_0^1 dy \int_0^1 y(2-x-y) dx = \frac{5}{12} \quad ↶$$

$$E(X^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 x^2(2-x-y) dy = \frac{1}{4}, E(Y^2) = \int_0^1 dy \int_0^1 y^2(2-x-y) dx = \frac{1}{4} \quad ↶$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{11}{144}, D(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{11}{144} \quad ↶$$

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(2-x-y) dy = \frac{1}{6}, Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY = -\frac{1}{144} \quad ↶$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = -\frac{1}{11} \quad ↶$$



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

七、(14分) ↶

1. 解: (1) 由于  $\mu_1 = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$  ↶

解得  $\theta = \frac{2\mu_1 - 1}{1 - \mu_1}$  ↶

用  $\bar{X}$  代替  $\mu_1$ , 得  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}$  ↶

(2) 似然函数为  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta+1)x_i^{-\theta} = (\theta+1)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\theta$  ↶

对数似然函数为  $\ln L(\theta) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$  ↶

对  $\theta$  求导并令其为零, 得  $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$  ↶

解得  $\theta$  的最大似然估计值为  $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$  ↶

最大似然估计量为  $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1$

2. (1) 证明: 易知  $ES_1^2 = DX = \sigma^2$ ,  $ES_2^2 = DY = \sigma^2$

所以  $EZ = E(aS_1^2 + bS_2^2) = aES_1^2 + bES_2^2 = (a+b)\sigma^2 = \sigma^2$

即  $Z = S_1^2 + S_2^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计

(2) 解: 由抽样分布定理知  $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$ ,  $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$

所以  $D[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}] = 2(n_1-1)$  故有  $DS_1^2 = \frac{2\sigma^4}{n_1-1}$ , 同理  $DS_2^2 = \frac{2\sigma^4}{n_2-1}$

又由  $S_1^2$  和  $S_2^2$  的独立性, 以及方差的性质知

$$DZ = D(aS_1^2 + bS_2^2) = a^2 DS_1^2 + b^2 DS_2^2 = 2\sigma^4 \left( \frac{a^2}{n_1-1} + \frac{(1-a)^2}{n_2-1} \right)$$

$$\text{令 } g(a) = \frac{a^2}{n_1-1} + \frac{(1-a)^2}{n_2-1} \quad \text{得} \quad g'(a) = \frac{2a}{n_1-1} - \frac{2(1-a)}{n_2-1} = 0$$

$$\text{解得 } a = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}, \quad b = \frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$$

即当  $a, b$  为以上两个值时, 对应的  $Z$  最有效.

## 八、(14分) ↶

1、第一类错误：原假设成立时拒绝原假设 ↶

第二类错误：原假设不成立时，接受原假设 ↶

2、解： $H_0: \mu = \mu_0 = 4.55$      $H_1: \mu \neq \mu_0 = 4.55$  ↶

检验统计量     $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} t(n-1)$  ↶

拒绝域     $|t| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$  ↶

查表得     $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$  ↶

计算得     $|t| = \left| \frac{4.46 - 4.55}{0.12 / \sqrt{3}} \right| = 2.25 < 2.306$  ↶

未落入拒绝域，不拒绝原假设，认为铁水含碳量正常。 ↶