2023级概率与数理统计试题（A卷）

一、填空题

1. 0.25； 2. e^{-3}； 3. 0 N(0,3)；4. $\dfrac{k}{n}$ ； 5. $mp(1-p+mp)$； 6. $2(n-1)\sigma^4$；

7. F(3,5)； 8. [0.3, 5.92]

二、解：1. 设A={第一次及格}，B={第二次及格}。

已知 $P(A)=p,P(B\mid A)=p,P(B\mid \bar{A})=p/2$。要求的概率是$P(A\cup B)$。

解法一：由于
$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=p^2+(1-p)p/2=\frac{1}{2}(p+p^2)$$
$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=p^2$$

因此$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=p+\dfrac{1}{2}(p+p^2)-p^2=\dfrac{3}{2}p-\dfrac{1}{2}p^2$ ----+4

解法二：$P(A\cup B)=1\text{-}\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}})=1-(1-p)(1-\dfrac{p}{2})=\dfrac{3}{2}p-\dfrac{1}{2}p^2$

(2) 要求概率$P(A\mid B)$。

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{p^2}{\frac{1}{2}(p+p^2)}=\frac{2p}{1+p}$$

三、解：1. $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

2. 由于$Y=|X|$是非负取值随机变量，因此当$y<0$时，$F_Y(y)=0$。

当$y\geq 0$时，
$$F_Y(y)=P(|X|\leq y)=P(-y\leq X\leq y)=\Phi(y)-\Phi(-y)=2\Phi(y)-1.$$

因此有 $F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi(y)-1 & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

因此有 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=2\varphi(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-y^2/2} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

四、解：1. 已知D的面积为2，所以联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{2}dy, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^2 \frac{1}{2}dx, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-y), & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

3. X 与 Y 不独立，因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 并非几乎处处成立。

4. $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z/2}^{z} \frac{1}{2}dx, & 0<z<2\\ \int_{z/2}^{2} \frac{1}{2}dx, & 2\le z<4\\ 0. & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}z, & 0<z<2\\ 1-\frac{1}{4}z, & 2\le z<4\\ 0. & \text{其他}\end{cases}$

5. $P(\max(X,Y)\le 1)=P(X\le 1,Y\le 1)=\frac{1}{4}$

五、解： 令该员工在 25 天中的第 i天的服务的顾客数为X_i，那么$X_i \sim P(100)$,且相互独立。

$\bar{X}=\sum_i^{25} X_i/25$。 可知 $\mu=100$，$\sigma^2=100$ 。

于是由中心极限定理定理可知： $\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i-25\mu}{5\sigma}=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/5}$ 近似服从$N(0,1)$.

那么$P(\bar{X}>102)\approx 1-\emptyset\left(\frac{102-100}{2}\right)=1-\emptyset(1)=1-0.8413=0.1587$

六、解：$E(X_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\frac{7}{12}$,

$E(X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\frac{7}{12}$,

$E\left({X_1}^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x,y)dxdy=\frac{5}{12}$,

$E\left({X_2}^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2f(x,y)dxdy=5/12$,

$D(X_1)=E\left({X_1}^2\right)-E^2(X_1)=11/144$,

$D(X_2)=E\left({X_2}^2\right)-E^2(X_2)=\frac{11}{144}$,

$E(X_1X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{3}$,

$Cov(X_1,X_2)= E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-1/144$

(1) $E(U)=2E(X_1)-E(X_2)=7/12$,

$D(U)=4D(X_1)+D(X_2)-4\mathrm{cov}(X_1,X_2)=\frac{59}{144}$,

(2) 由 $\varepsilon \sim N\left(0，1/144\right)$，可知$E(\varepsilon)=0$，$D(\varepsilon)=1/144$.

由 $Y=1+U+\varepsilon$，可知 $E(Y)=1+E(U)+E(\varepsilon)$=19/12
又由 ε 和 U 独立，可知 $D(Y)=D(U)+D(\varepsilon)=60/144$,

(3) $Cov\ (Y,U)=D(U)$=59/144,
所以，$\rho_{YU}=\frac{Cov\ (Y,U)}{\sqrt{D(Y)D(U)}}=\sqrt{\frac{D(U)}{D(Y)}}=\sqrt{\frac{59}{60}}$.

七、1. 解：（1）由于 $\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}$

解得 $\lambda=\frac{2}{\mu_1}$ 用 $\bar{X}$ 代替 μ_1,得λ的矩估计为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\bar{X}}$

（2）似然函数为 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^2x_ie^{-\lambda x_i}=\lambda^{2n}(\prod_{i=1}^{n}x_i)e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$

对数似然函数为 $\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$

对θ求导并令其为零，得 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$

解得θ的最大似然估计为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\bar{x}}$

2. 证明：易知$ES^2=\sigma^2$，$DS^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

由切比雪夫不等式及概率的性质得

$$1\geq P(|S^2-\sigma^2|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{DS^2}{\varepsilon^2}=1-\frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2(n-1)}$$

所以有

$$P(|S^2-\sigma^2|\leq\varepsilon)\to 1$$

即S^2为σ^2相合估计。

八、解： H_0：$\mu\geq\mu_0=0.1$ H_1：$\mu<\mu_0$

检验统计量 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{\mu=\mu_0}{\sim}N(0,1)$

拒绝域 $t\geq -t_\alpha(n-1)$

查表得 $t_{0.05}(8)=1.8595$

计算得 $\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=0.097$ $s^2=\frac{1}{8}(\sum_{i=1}^{9}x_i^2-9\bar{x}^2)=0.0009$

$$t=\frac{0.097-0.1}{0.03/3}=-0.3>-1.8595$$

落入拒绝域，拒绝原假设，认为杂质含量超过了国家规定的标准