22-23-1

一、 1. 解：$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$

$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$

$=1-[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+0]=\frac{13}{30}$

2. 解：设 B_i 分别表示甲、乙、丙正确回答问题，i=1,2,3，A 表示该团队正确回答问题.

$P(B_1)=0.6,\ P(B_2)=0.5,\ P(B_3)=0.4,\ P(A|B_1)=\frac{1}{3},\ P(A|B_2)=\frac{1}{3},\ P(A|B_3)=\frac{1}{3}.$

（1）由全概率公式得 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{3}\times0.6+\frac{1}{3}\times0.5+\frac{1}{3}\times0.4=0.5.$

(2) 由 Bayes 公式可得 $P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.6}{\frac{1}{3}\times0.6+\frac{1}{3}\times0.5+\frac{1}{3}\times0.4}=\frac{6}{15}=0.4.$

二、 1. 解：(1)易知 X 的可能的取值为 1，3，4，则

$P(X=-1)=F(-1)-F(-1-0)=0.3$；$P(X=1)=F(1)-F(1-0)=0.5-0.3=0.2$

$P(X=4)=F(4)-F(4-0)=1-0.5=0.5$

即 X 的分布律为

X	-1	1	4
P	0.3	0.2	0.5

(2) $P(X>-1|X\neq1)=\frac{P(X>-1\cap X\neq1)}{P(X\neq1)}=\frac{P(X=4)}{P(X=-1)+P(X=4)}=\frac{5}{8}$

2. （1） $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$

（2）当$y\ge0$时，

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P((X-1)^2\le y)=P(1-\sqrt{y}\le X\le1+\sqrt{y})=F_X(1+\sqrt{y})-F_X(1-\sqrt{y})$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0.$

由$f_Y(y)=F_Y'(y)$可得Y的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(1+\sqrt{y})+f_X(1-\sqrt{y})], & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le0\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}[e^{-(1+\sqrt{y})}+e^{-(1-\sqrt{y})}], & 0<y<1\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-(1+\sqrt{y})}, & y\ge1\end{cases}$$

三、 1. 命题 A 不一定成立

不成立的例子：（X，Y）在圆域 D=$\{(x,y):x^2+y^2<1\}$上服从均匀分布，则 X 和 Y 都不服从均匀分布。

2. 解： (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ 得

$$1=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}c(x+y)e^{-(x+y)}dy=2c$$

解得 $c=\frac{1}{2}$。

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dy & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{x+1}{2}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dx & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{y+1}{2}e^{-y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（3）因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以不独立

（4）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{z}\frac{1}{2}(x+z-x)e^{-(x+z-x)}dx & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z} & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

四、 1. 解：以 y 表示进货数，易知应取 $10000\le y\le 20000$，进货 y 所得的利润记为 Y，则 Y 是随机变量，且有

$$Y=g(X)=\begin{cases}10X-4(y-X), X\le y,\\ 10y, \quad X>y\end{cases}=\begin{cases}14X-4y, X\le y\\ 10y, \quad X>y\end{cases}$$

X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10000}, & 10000<x<20000\\ 0, & 其它\end{cases},$$

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_{10000}^{y}(14x-4y)\frac{1}{10000}dx+\int_{y}^{20000}10y\frac{1}{10000}dx$$

$$=\frac{1}{10000}(-7y^2+240000y-7\times10^8)$$

由于= $\frac{d}{dy}E(Y)=\frac{1}{10000}(-14y+240000)$，令 $\frac{d}{dy}E(Y)=0$，得

$y=\frac{120000}{7}=17142$，此时获得利润的数学期望最大。

2. 解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x8xydy=\frac{4}{5}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x^2 8xydy=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y8xydy=\frac{8}{15}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y^2 8xydy=\frac{1}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x xy8xydy=\frac{4}{9}$$

且有

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{1}{3}-(\frac{8}{15})^2=\frac{11}{225}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{4}{\sqrt{66}}$$

五、

1.解： $EX_i=DX_i=5$ $EX_i^2=DX_i+(EX_i)^2=30$

即 a=30

2.解：设 X_i 组装第 i 个产品的时间，i=1,2,…,100. 则

$EX_i=10$ $DX_i=100$

令 $S=\sum_{i=1}^{100}X_i$ 表示组装 100 件产品的总时间

由中心极限定理，$\frac{S-100\times10}{\sqrt{100\times100}}=\frac{S-1000}{100}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$

因此，

$$P(15\times60<S<20\times60)\approx\Phi(\frac{1200-1000}{100})-\Phi(\frac{900-1000}{100})=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.8186$$

六、

1. 解：易知$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以$D[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}]=2(n-1)$

所以$DS^2=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

2. 由$X_1+X_2\sim N(0,2)$，得到$U=\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

由χ^2分布的定义$V=\dfrac{(X_3+X_4+X_5)^2}{3}\sim\chi^2(1)$

独立

由 t 分布的定义

$$\frac{U}{\sqrt{V/1}}=\frac{\sqrt{6}}{2}(X_1+X_2)/\sqrt{(X_3+X_4+X_5)^2}\sim t(1)$$

所以

$$c=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \text{或}\ c=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$ t 分布的对称性

七、 解: 1、由于 $\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}dx=\frac{1}{\theta+1}$

解得 $\theta=\dfrac{1}{\mu_1}-1$

用$\bar{X}$代替μ_1,得λ的矩估计为$\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{\bar{X}}-1$

2、先求θ的最大似然估计

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}x_i^{\frac{1}{\theta}-1}=\frac{1}{\theta^n}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\frac{1}{\theta}-1}$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=-n\ln\theta+(\frac{1}{\theta}-1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$

对θ求导并令其为零，得 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}-\dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得θ的最大似然估计值为 $\widehat{\theta_2}=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

最大似然估计量为 $\widehat{\theta_2}=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

2. $E(\ln X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln xf(x)dx=\int_0^1\ln x\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}dx=-\theta$

所以 $E(\widehat{\theta_2})=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)=\theta$

所以$\widehat{\theta_2}$是θ的无偏估计。

八、

1. 易知 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$，第二类错误的概率为

$$\beta = P_{\mu=3}(\overline{X} < 2.6) = \Phi(\frac{2.6-3}{1/\sqrt{n}}) = 1 - \Phi(0.4\sqrt{n}) \le 0.01$$

有 $\Phi(0.4\sqrt{n}) \ge 0.99 = \Phi(2.33)$，即 $0.4\sqrt{n} \ge 2.33$ 解得 n 至少为 34.

2. 解： H_0：$\mu = \mu_0 = 100$ H_1：$\mu \ne \mu_0 = 100$

检验统计量为 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域 $|t| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

查表得 $t_{0.025}(8) = 2.3060$，

计算得 $|t| = \left|\dfrac{100.1-100}{0.5/3}\right| = 0.6 < 2.3060$

未落入拒绝域,接收原假设。