23-24-2 概率与数理统计参考答案（A 卷）

一、填空题（16分，每小题2分）

1. 2/3； 2. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b=1$；

3. $P(X+Y=k)=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}, k=2,3,\cdots$；

4. 56； 5. 8 ；

6. $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$； 7. (5.3082, 6.6918)； 8. $7e^{-6}$

二、（12分）

解：任选一名学生，记 A={该学生通过了考试}，B_1={该学生的出勤率达到 80%以上}，B_2={该学生的出勤率在 50%~80%}，B_3={该学生的出勤率低于 50%}

1. 由题意知

$$P(B_1)=0.8, P(B_2)=0.15, P(B_3)=0.05,\quad P(A|B_1)=0.99, P(A|B_2)=0.7, P(A|B_3)=0.3.$$

由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times0.99+0.15\times0.7+0.05\times0.3=0.912$$

2. 根据 Bayes 公式可得所求的概率为

$$P(B_3|\bar{A})=\frac{P(B_3)P(\bar{A}|B_3)}{1-P(A)}=\frac{0.05\times0.7}{1-0.912}=\frac{35}{88}\approx0.3977$$

三、(12分)

解：1.由密度函数的归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^1 cx^2dx = \frac{c}{3} = 1$

所以 $c=3$

2. $P(X>\frac{1}{2}|X<\frac{2}{3}) = \frac{P(\frac{1}{2}<X<\frac{2}{3})}{P(X<\frac{2}{3})} = \frac{\int_{1/2}^{2/3} 3x^2dx}{\int_0^{2/3} 3x^2dx} = \frac{37}{64}$

3. X的分布函数为 $F_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \int_0^x 3t^2dt, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^3, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

4. 由 $y=x^3$知，$x=y^{1/3}$，$x'=\frac{1}{3}y^{-2/3}$，$y\in(0,1)$，Y的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f(y^{1/3})|\frac{1}{3}y^{-2/3}|, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 3(y^{1/3})^2\frac{1}{3}y^{-2/3}, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

四、(14分)

解：1. 由密度函数的归一性得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_{-2}^{2}dy\int_{0}^{+\infty} ke^{-\frac{x}{2}}dx=8k=1$$

所以 $k=\frac{1}{8}$

2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-2}^{2}\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}dy, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}dx, & -2<y<2\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -2<y<2\\ 0, & else\end{cases}$

3. 易知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 互相独立

4. $P(\max(X,Y)>1)=1-P(\max(X,Y)\le 1)=1-P(X\le 1,Y\le 1)=1-P(X\le 1)P(Y\le 1)$

$=1-\int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx\int_{-\infty}^{1} f_Y(y)dy=1-\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx\int_{-2}^{1}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}}$

五、(8分)

解：设X_i表示第i盒水果的净重，$i = 1,2,\cdots,100$，则$E(X_i) = 4$，$D(X_i) = 0.16$.

则，$\sum_{i=1}^{100} X_i$表示 100 盒此种水果的净重之和，且

$$E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 400, D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 16,$$

由独立同分布的中心极限定理可得

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 400}{\sqrt{16}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1).$$

因此

$$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 390\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 400}{\sqrt{16}} \geq \frac{390-400}{\sqrt{16}}\right\} = 1 - P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 400}{\sqrt{4}} < -2.5\right\}$$

$$\approx 1 - (1 - \Phi(2.5)) = 0.9938.$$

六、(12分)

解：1. 由题意可得

$$E(X)=E(Y)=\frac{1}{2},D(X)=D(Y)=\frac{1}{12},$$

$$E(U)=E(2X+2Y)=2E(X)+2E(Y)=2,$$

$$E(V)=E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{4}.$$

2. 由 X 与 Y 相互独立可得

$$D(U)=D(2X+2Y)=4D(X)+4D(Y)=\frac{2}{3},$$

$$E(X^2)=E(Y^2)=D(X)+E^2X=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3},$$

$$E(V^2)=E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=\frac{1}{9}$$

$$D(V)=E(V^2)-E^2(V)=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}.$$

3.

$$E(UV)=E[(2X+2Y)XY)]=2E(X^2Y)+2E(XY^2)$$

$$=2\,E(X^2)E(Y)+2\,E(X)E(Y^2)=\frac{2}{3},$$

$$Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}.$$

4. 因为 $\rho_{UV}\neq 0$ 所以 U 和 V 相关，所以不独立。

七、(14分)

解：1. $\mu_1 = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_c^{+\infty} x\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}dx = \dfrac{c\theta}{\theta-1}$

由此可得$\theta = \dfrac{\mu_1}{\mu_1 - c}$

因此θ的矩估计量 $\hat{\theta}_1 = \dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$

(2) 样本的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta c^\theta x_i^{-(\theta+1)} = (\theta c^\theta)^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{-(\theta+1)}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n(\ln\theta + \theta\ln c) - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导数并令导函数为 0，即有

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{n}{\theta} + n\ln c - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

解得θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}_2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \ln c)^{-1}$$

最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - \ln c)^{-1}$$

(3) $P(X>2c) = \int_{2c}^{+\infty} f(x)dx = \int_{2c}^{+\infty}\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}dx = 2^{-\theta}$

根据最大似然估计的不变性可知$P(X>2c)$的最大似然估计为

$$\widetilde{2^{-\theta}} = 2^{-\hat{\theta}_2} = 2^{-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - \ln c)^{-1}}$$

八、（12 分）

解：需要检验的假设为 $H_0:\sigma\le\sigma_0=0.005\qquad H_1:\sigma>0.005$

检验统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

拒绝域的形式为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge\chi_\alpha^2(n-1)$$

查表得 $\chi_{0.05}^2(8)=15.507$，计算得 $\chi^2=\dfrac{8\times0.007^2}{0.005^2}=15.68$

因为 15.68>15.507，即样本值落入拒绝域，所以拒绝 H_0，认为这批导线的不符合要求。