2023 级概率与数理统计试题（A 卷）

一、填空题

1. 0.5； 2. 4； 3. 0.75；4. 0.5； 5. $1-e^{-10}$； 6. $N(-\frac{1}{\theta},\frac{1}{n\theta^2})$；

7. $\left[\frac{1}{2}(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)})^2,\frac{1}{2}(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})^2\right]$； 8. $\left|\frac{\bar{x}-5}{s/4}\right|<2.1314$

二、1. 解：设 B_1=表示此人会解答此题，B_2 表示此人不会解答此题，A 表示此人答对此题.

（1）利用全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=0.8\times1+0.2\times0.2=0.84$$

（2）利用 Bayes 公式得

$$P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2)P(A\mid B_2)}{P(A)}=\frac{0.2\times0.2}{0.84}=\frac{1}{21}$$

2. 正确

因为

$$0\le P(AB)\le P(A)=0,$$

故

$$P(AB)=0,$$

于是

$$P(AB)=0=P(A)P(B)$$

A 与 B 相互独立.

三、1. 解：易知 X 可能的取值为 3，4，5，且

$$P(X=3)=\frac{1\times C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}，\quad P(X=4)=\frac{1\times C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}，\quad P(X=5)=\frac{1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$$

即 X 的分布律为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

2. 解：(1) X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<1\\ x^{\frac{1}{3}}-1, & 1\le x<8\\ 1, & x\ge 8\end{cases}$$

(2) 设随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\} = 0$

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le (y+1)^3\} = y$

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1$

因此 $Y=F(X)$ 的密度函数。

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1 \ , & 0<y<1 \\ 0 \ , & \text{其他} \end{cases}$$

四、解：1. 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ 得

$$1=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}c(x+y)e^{-(x+y)}dy=2c$$

解得 $c=\frac{1}{2}$

2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dy & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{x+1}{2}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dx & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{y+1}{2}e^{-y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

3. X 与 Y 不独立，因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 并非几乎处处成立。 +3

4. 解法一：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\begin{cases}\int_0^{z}\frac{1}{2}(z-y+y)e^{-(z-y+y)}dy, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解法二：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{z}\frac{1}{2}(x+z-x)e^{-(x+z-x)}dx, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

五、 解：先考虑样本 $X_1,X_2,\cdots,X_5$，$\bar{X}_5=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X_i$，$S^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X}_5)^2$ 分别为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 的样本均值和样本方差，所以

$$Y_1=\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X}_5)^2=4S^2\sim\chi^2(4)$$

再考虑样本 X_6，易知

$$Y_2=(X_6-\mu)^2\sim\chi^2(1)$$

注意到 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 和 X_6 独立，所以 Y_1,Y_2 独立，根据 F 分布的定义，得到

$$\frac{Y_2}{Y_1/4}=\frac{4(X_6-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X}_5)^2}\sim F(1,4)$$

六、1. 切比雪夫不等式为：

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$和方差 $D(X)$都存在, 则对任意的$\varepsilon>0$, 均有

$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$或者 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

证明：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-x}dx=n+1$

$E(X^2)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}e^{-x}dx=(n+1)(n+2)\int_0^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}e^{-x}dx=(n+1)(n+2)$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n+1.$

由切比雪夫不等式得到

$P(0<X<2(n+1))=P\{|X-(n+1)|<n+1\}=P\{|X-E(X)|<n+1\}\geq 1-\frac{D(X)}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}.$

2. （1）E(U)=E(2X-3Y)=2EX-3EY=−1， E(V)=EX+EY=2.

易知 DX=4, DY=1/3. 因此，由 X 和 Y 独立，

D(U) =4DX+9DY=16+3=19,

D(V) =DX+DY=13/3.

（2） cov(U, V) =cov(2X-3Y, X+Y)=2DX-3DY=8−1=7.

$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{247}}$

（3） 因为 $\rho_{UV}\neq 0$ 所以 U 和 V 相关，所以不独立。

七、解：1. $\mu_1=EX=\frac{\theta}{2}$

由此可得$\theta=2\mu_1$

用 $\bar{X}$ 代替 μ_1,得θ的矩估计量为$\hat{\theta}_1=2\bar{X}$

(2) 样本的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & 0\leq x_i\leq\theta, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

令 $x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，则

$$\theta\geq x_i, i=1,2,\cdots,n\Leftrightarrow\theta\geq x_{(n)}$$

所以似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & \theta\geq x_{(n)}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

易知 $L(\theta)$ 关于 θ 为单调减函数，所以当 $\theta \ge x_{(n)}$ 时，$L(\theta) \le L(x_{(n)})$

所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}_2 = x_{(n)}$$

最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$$

(3) 因为 $E\hat{\theta}_1 = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = \theta$，即 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计。

易知 $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$ 的密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_2}(u) = \begin{cases} \dfrac{nu^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le u \le \theta \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

所以 $E\hat{\theta}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{\hat{\theta}_2}(u) du = \int_0^{\theta} u \dfrac{nu^{n-1}}{\theta^n} du = \dfrac{n}{n+1}\theta$

即 $\hat{\theta}_2$ 不是 θ 的无偏估计。

又因为 $E(\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_2) = \theta$，　所以 $\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计。

八、解：设　　$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 80$　　$H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2$

检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

拒绝域为

$$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$

查表得 $\chi^2_{0.025}(15) = 27.488$，$\chi^2_{0.975}(15) = 6.262$，计算得 $\chi^2 = \dfrac{15 \times 11^2}{80} = 22.6875$

因为 6.262<22.6875<27.488,，即样本值不在拒绝域，所以不拒绝 H_0，即认为整批保险丝的熔化时间的方差等于 80。