

2022-2023-2 概率与数理统计参考答案 (A 卷)

一、填空题 (16 分, 每小题 2 分)

1. 0.1; 2. 1, 1 3. $N(-1, 3)$ 4. $\frac{26}{3}$ 5. $\chi^2(4)$ 6. 1 7. $\frac{2}{n}$ 8. $[53.8, 64.48]$

二、(12 分)

解: 设 $B = \{\text{该地区居民患高血压病}\}$,

$A_1 = \{\text{肥胖者居民}\}$, $A_2 = \{\text{不胖不瘦居民}\}$, $A_3 = \{\text{瘦者居民}\}$.

则由题意知 $P(A_1) = 0.1, P(A_2) = 0.82, P(A_3) = 0.08$,

$$P(B|A_1) = 0.2, P(B|A_2) = 0.1, P(B|A_3) = 0.05$$

(1) 利用全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.1 \times 0.2 + 0.82 \times 0.1 + 0.08 \times 0.05 = 0.106 \end{aligned}$$

(2) 利用 Bayes 公式得

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.1 \times 0.2}{0.106} = \frac{10}{53}$$

三、(12 分)

解: 1. 由于 $y = 2(\theta - 1)\ln x$ 是 x 的严格单调递增函数

$$\text{且反函数为 } x = e^{\frac{1}{2(\theta-1)}y}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(\theta-1)} e^{\frac{1}{2(\theta-1)}y},$$

由此得到 $Y = 2(\theta - 1)\ln X$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

2. 易知 $2(\theta - 1)\ln X_i \sim \chi^2(2)$, 且相互独立, 由可加性知

$$Z = 2(\theta - 1)\sum_{i=1}^n \ln X_i \sim \chi^2(2n)$$



四、(12分)

解: 1. 由

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} a e^{-x-y} dx = a$$

得

$$a = 1$$

2. X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3. 由于 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 因此 X 和 Y 相互独立.

$$4. f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_0^z e^{-z} dx, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} z e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



五、(8分)

解：设需要车位数位 x ，设 X_i 为第 i 户住户拥有的车辆数，由已知

$$EX_i = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2, \quad E(X_i^2) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.6 + 2^2 \times 0.3 = 1.8$$

$$DX_i = E(X_i^2) - (EX_i)^2 = 0.36$$

由中心极限定理可知

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 1.2}{\sqrt{100 \times 0.36}} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 120}{6} \text{ 近似服从 } N(0,1) \text{ 分布,}$$

$$\text{因此 } P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq x\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 120}{6} \leq \frac{x-120}{6}\right) \approx \Phi\left(\frac{x-120}{6}\right) \geq 0.95$$

已知 $\Phi(1.645) = 0.95$ ，因此有

$$\frac{x-120}{6} \geq 1.645$$

解得 $x \geq 129.87$ ，即至少需要 130 个车位。



六、(12分)

1. 解: 设每天生产的产品数为 n , X 为 n 件产品中的合格品数, Y 为企业每天的获利。

由题意可知, $X \sim B(n, 0.96)$, 因此 $EX = 0.96n$ 。

另一方面每天的获利 $Y = 80X - 20(n - X) = 100X - 20n$, 因此

$$EY = E(100X - 20n) = 100EX - 20n = 100 \times 0.96 \times n - 20n = 76n$$

由此可得

$$76n \geq 10000$$

解得 $n > 131.6$, 即企业每天至少生产 132 件产品。

$$2. \text{ 解: } E(X) = \int_0^1 dx \int_0^1 x(2-x-y)dy = \frac{5}{12}, E(Y) = \int_0^1 dy \int_0^1 y(2-x-y)dx = \frac{5}{12}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 x^2(2-x-y)dy = \frac{1}{4}, E(Y^2) = \int_0^1 dy \int_0^1 y^2(2-x-y)dx = \frac{1}{4}$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{11}{144}, D(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{11}{144}$$

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(2-x-y)dy = \frac{1}{6}, \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = -\frac{1}{144}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = -\frac{1}{11}$$



七、(14分) ◀

1. 解: (1) 由于 $\mu_1 = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$ ◀

解得 $\theta = \frac{2\mu_1-1}{1-\mu_1}$ ◀

用 \bar{X} 代替 μ_1 , 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ ◀

(2) 似然函数为 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta+1)x_i^{-\theta} = (\theta+1)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\theta$ ◀

对数似然函数为 $\ln L(\theta) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$ ◀

对 θ 求导并令其为零, 得 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$ ◀

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$ ◀



最大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1$.

2. (1) 证明: 易知 $ES_1^2 = DX = \sigma^2$, $ES_2^2 = DY = \sigma^2$

所以 $EZ = E(aS_1^2 + bS_2^2) = aES_1^2 + bES_2^2 = (a+b)\sigma^2 = \sigma^2$

即 $Z = S_1^2 + S_2^2$ 是 σ^2 的无偏估计

(2) 解: 由抽样分布定理知 $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$

所以 $D[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}] = 2(n_1-1)$ 故有 $DS_1^2 = \frac{2\sigma^4}{n_1-1}$, 同理 $DS_2^2 = \frac{2\sigma^4}{n_2-1}$

又由 S_1^2 和 S_2^2 的独立性, 以及方差的性质知

$$DZ = D(aS_1^2 + bS_2^2) = a^2 DS_1^2 + b^2 DS_2^2 = 2\sigma^4 \left(\frac{a^2}{n_1-1} + \frac{(1-a)^2}{n_2-1} \right)$$

$$\text{令 } g(a) = \frac{a^2}{n_1-1} + \frac{(1-a)^2}{n_2-1} \quad \text{得} \quad g'(a) = \frac{2a}{n_1-1} - \frac{2(1-a)}{n_2-1} = 0$$

$$\text{解得 } a = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}, \quad b = \frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$$

即当 a, b 为以上两个值时, 对应的 Z 最有效.



八、(14分) ↵

1、第一类错误：原假设成立时拒绝原假设 ↵

第二类错误：原假设不成立时，接受原假设 ↵

2、解： $H_0: \mu = \mu_0 = 4.55$ $H_1: \mu \neq \mu_0 = 4.55$ ↵

检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ ↵

拒绝域 $|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ ↵

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$ ↵

计算得 $|t| = \left| \frac{4.46 - 4.55}{0.12 / 3} \right| = 2.25 < 2.306$ ↵

未落入拒绝域，不拒绝原假设，认为铁水含碳量正常。 ↵

