2023 级概率论与数理统计试题（A 卷）

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页左上方填写座号、姓名、学号、班级等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(15)=2.1314$，$t_{0.025}(16)=2.1199$，$\chi^2_{0.05}(15)=24.996$，$\chi^2_{0.05}(16)=26.292$，$\chi^2_{0.95}(15)=7.261$，$\chi^2_{0.95}(16)=7.962$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.488$，$\chi^2_{0.025}(16)=28.845$，$\chi^2_{0.975}(15)=6.262$，$\chi^2_{0.975}(16)=6.908$.

一. 填空题（共 16 分，每小题 2 分）

1. 设 A，B 是两个随机事件，且 $P(A)+P(B)=0.9, P(AB)=0.2$, 则 $P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})=$_________。

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 没有实根的概率为 0.5，则 $\mu=$_________。

3. 设二维随机变量（X，Y）在 D 上服从均匀分布，其中 D 是以点（0,1），(1,0)，(−1,0）为顶点的三角形区域，则 $P(X\le Y)=$_________。

4. 设随机变量 X，Y 的方差均为 σ^2（$\sigma^2>0$），且二者的相关系数为 -0.5, 则使得 $Z=aX+(1-a)Y$ 的方差最小的 $a=$_________。

5. 设一类同型电子元件的使用寿命 X（单位：小时）服从期望为 1 的指数分布。现随机取 n 个元件进行观测，对第 i 个元件，如果超过 10 个小时还没有损坏就停止观测，否则记录真实的观测时间 X_i，这样实际观测时间 $Y_i=\min(X_i,10)$，$i=1,2,\cdots,n$，令 $\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，则 $\bar{Y}$ 依概率收敛到_________。

6. 设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布，共同的密度函数为
$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$
其中 $\theta>0$ 为常数。则由中心极限定理，当 n 较大时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 的近似分布为_________。

7. 设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则 $\frac{\sigma^4}{2}$ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为_________。

8. 一批零件的直径（单位：厘米）服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$。现从中抽出 16 个测量，$\bar{X}$ 为样本均值，其观测值为 5.2，S 为样本标准差，其观测值为 1.6，现想知道这批零件的平均直径是否是 5cm，采用 t 检验法，则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验的接受域为_________。

二.（12分）

1. 设某人在完成一道有5个选项的单项选择题，如果不会解答该题就随机猜测，已知此人会解答该题的概率为0.8。（1）求此人答对该题的概率；（2）若已知此人答对了该题，求此人不会解答该题的概率。

2. 判断如下命题是否正确，并说明理由：

设 A、B 是两个随机事件，若 $P(A)=0$，则事件 A 与 B 相互独立。

三.（12分）

1. 一袋中有 5 个大小形状相同的球，编号分别为1、2、3、4、5，在其中同时取三个，以 X 表示取出的三个球中的最大号码。求随机变量 X 的分布律。

2. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, & 1\le x\le 8\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）X 的分布函数 $F(x)$; （2）$Y=F(X)$的密度函数。

四.（12分）

设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $c>0$ 为常数。

1. 求常数 c；2. 求 X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；3. 判断 X 与 Y 是否相互独立，并给出理由；4. 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$。

五.（8分）

已知总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自总体 X 的一个样本，令 $\bar{X}_5=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X_i$。

$Y=\dfrac{4(X_6-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{5}\left(X_i-\bar{X}_5\right)^2}$。求 Y 的分布（写出具体过程）。

六.（14分）

1. 叙述切比雪夫不等式，并解决以下问题。

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^n}{n!}e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

证明：$P(0<X<2(n+1))\geq\frac{n}{n+1}$。

2.设随机变量 X 服从正态分布 $N(1，4)$，随机变量 Y 服从均匀分布 U(0，2)，且 X 和 Y 独立。令 $U=2X-3Y$，$V=X+Y$。1. 求 EU，EV，DU，DV；2. 求 $Cov(U，V)$，ρ_{UV}；3. 问 U 与 V 是否独立？给出理由。

七.（14 分）

已知总体 X 服从均匀分布 $U[0,\theta]$，$\theta>0$ 为未知参数。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本值。1. 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；2. 求参数 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；3. 判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否是 θ 的无偏估计，若不是，将其修正为无偏估计。

八.（12 分）

电工器材厂生成一批保险丝，已知其熔化时间（单位：min）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。现从该批保险丝中取 16 根进行测试，计算得平均熔化时间为 62.4，标准差为 11。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 时，是否可以认为整批保险丝的熔化时间的方差为 80？