ESTUDIANTES

Samy Felipe Cuestas Merchán
Camilo Hernández Guerrero
Juan Camilo Mendieta Hernández
Carlos Eduardo Escobar Triana

Análisis Numérico
Taller 2

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
BOGOTÁ, D.C.
SEPTIEMBRE 14
2021

2.a. No es diagonalmente dominante porque el valor absoluto de los elementos de las diagonales son menores a la suma en valor absoluto de los que componen su fila:

|4| > |3|+|0| Verdadero
|4| > |3| + |-1| Falso
|4| > |0| + |-1| Verdadero

Aún así esta converge con Gauss-Seidel.

b. El procedimiento para hallar el radio espectral de la matriz para el método de Gauss Seidel es:

$T = -(L+D)^{-1} U$

L:

0	0	0
3	0	0
0	-1	0

D:

4	0	0
0	4	0
0	0	4

U:

0	3	0
0	0	-1
0	0	0

T =

0	-3/4	0
0	-1	-1/4
0	0	-1

det(T-ƛI)

-ƛ	-3/4	0
0	-1-ƛ	-1/4
0	0	-1-ƛ

Igualamos a 0 y obtenemos que

$$-x(-x-1)^2=0 \quad : \quad x=0, x=-1$$

p(M) = max|ƛ| = 1 = RADIO ESPECTRAL

c. Tras usar el método de Gauss-Seidel implementado en Python se obtuvo la siguiente salida:

```
iteracion:  73
respuesta X:
[  0.4989999999999997 ,  -0.5806666666666664 ,  0.5993333333333335 ]
iteracion:  74
respuesta X:
[  0.4989999999999998 ,  -0.5806666666666664 ,  0.5993333333333335 ]
iteracion:  75
respuesta X:
[  0.4989999999999998 ,  -0.5806666666666664 ,  0.5993333333333335 ]
A no es diagonalmente dominante
verificar A.X=B:
[[ 0.254]
 [-1.425]
 [ 2.978]]
```

Solución aproximada:

0.4989999999999998	-0.5806666666666664	0.5993333333333335

Iteraciones: 75

d. Al cambiar el valor del coeficiente a -2, la matriz continúa siendo NO diagonalmente dominante, la solución cambia y aún converge, incluso más rápidamente que la solución anterior y el radio espectral es el mismo.

```
iteracion:  58
respuesta X:
[  1.0983333333333332 ,  -1.0601333333333331 ,  0.4794666666666668 ]
A no es diagonalmente dominante
verificar A.X=B:
[[ 0.254]
 [-1.425]
 [ 2.978]]
```

e. El método SOR es una mejora del método anterior (Gauss - Seidel). Aquí w es una constante en el rango $0 < w < 2$, el proceso diverge cuando $w > 2$. Se puede decir que para este método a mayor valor de w dentro del intervalo mayor convergencia o menor número de iteraciones, sin embargo el valor óptimo se obtiene a prueba y error. A continuación se prueba con 10 valores de w:

W = 0.1

```
iteracion:  492
[ 0.49899209 -0.58065842  0.59933591]
Resultado: [  0.49899 ,  -0.58066 ,  0.59934 ]
```

w= 0.2

```
iteracion:  233
[ 0.49899221 -0.58065865  0.59933581]
Resultado: [  0.49899 ,  -0.58066 ,  0.59934 ]
```

w= 0.3

```
iteracion:  146
[ 0.49899203 -0.58065857  0.5993358 ]
Resultado: [  0.49899 ,  -0.58066 ,  0.59934 ]
```

w= 0.4

```
iteracion:  103
[ 0.49899232 -0.58065899  0.59933564]
Resultado: [  0.49899 ,  -0.58066 ,  0.59934 ]
```

W = 0.5

```
iteracion:  77
[ 0.49899254 -0.58065934  0.59933549]
Resultado: [  0.49899 ,  -0.58066 ,  0.59934 ]
```

W = 1

```
iteracion:  24
[ 0.49899572 -0.5806631   0.59933423]
Resultado: [  0.49900 ,  -0.58066 ,  0.59933 ]
```

w= 2

NO CONVERGE

```
iteracion:  2476
[ 1.36876282 -1.31521714 -0.2013543 ]
```

W = 1.5

```
iteracion:  19
[ 0.49900095 -0.58066784  0.59933445]
Resultado: [  0.49900 ,  -0.58067 ,  0.59933 ]
```

W = 1.6

```
iteracion:  25
[ 0.498997   -0.58066466  0.59933562]
Resultado: [  0.49900 ,  -0.58066 ,  0.59934 ]
```

W = 1.3

El más óptimo

```
iteracion:  11
[ 0.49899931 -0.58066745  0.59933432]
Resultado: [  0.49900 ,  -0.58067 ,  0.59933 ]
```

6.

a. Para asegurar la convergencia de la matriz dada dándole valores a α y β se debe mirar si la matriz es diagonalmente dominante al asignarle los valores a las variables que fueron dadas, se sabe que es diagonalmente dominante si el valor absoluto del elemento de la diagonal principal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de los elementos restantes del mismo renglón, siguiendo esta definición α debe ser un número mayor que dos y β debe tener un valor entre el intervalo $-1<\beta<1$.

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ \beta & 2 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{matrix}$$

b. Tras realizar la implementación del método de Jacobi, se realizaron las respectivas iteraciones que se pedían en el punto.

```
iteracion  0 : [1, 2, 3]
iteracion  1 : [2.0, 2.5, 0.0]
iteracion  2 : [0.5, 1.0, 0.16666666666666674]
iteracion  3 : [0.5833333333333334, 1.0833333333333335, 0.16666666666666669]
iteracion  4 : [0.5833333333333334, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  5 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666674]
iteracion  6 : [0.5833333333333334, 1.0833333333333335, 0.16666666666666663]
iteracion  7 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  8 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  9 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  10 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
```

Además se realizó una verificación con la implementación propia de la biblioteca Scipy de Python para resolver estos sistemas de ecuaciones, finalmente se puede observar que el error es mínimo comparado con el método implementado.

```
Respuesta usando implementacion de jacobi
iteracion  0 : [1, 2, 3]
iteracion  1 : [2.0, 2.5, 0.0]
iteracion  2 : [0.5, 1.0, 0.16666666666666674]
iteracion  3 : [0.5833333333333334, 1.0833333333333335, 0.16666666666666669]
iteracion  4 : [0.5833333333333334, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  5 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666674]
iteracion  6 : [0.5833333333333334, 1.0833333333333335, 0.16666666666666663]
iteracion  7 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  8 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  9 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
iteracion  10 : [0.5833333333333333, 1.0833333333333333, 0.16666666666666663]
Respuesta usando biblioteca  scipy
[0.58333333 1.08333333 0.16666667]
```

7.

7.1. Factorización LU

i. $u - 8v - 2w = 1$
$u + v + 5w = 4$
$3u - v + w = -2$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -0.17391304 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7.66666667 & -2.33333333 \\ 0 & 0 & 4.26086957 \end{vmatrix}$$

Utilizando la matriz L tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&|1a && 0b && 0c| = 1\\
&|\tfrac{1}{3}a && 1b && 0c| = 4\\
&|\tfrac{1}{3}a && -0.17391304b && 1c| = -2
\end{aligned}
$$

Entonces, resolviendo el sistema de ecuaciones de la matriz L tenemos que:

$$a = 1$$

$$b = -\frac{1}{3}a + 4 = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$c = -\frac{1}{3}a + 0.17391304b - 2 = 0.17391304\left(\frac{11}{3}\right) - \frac{1}{3} - 2 = 0.63768115 - \frac{1}{3} - 2 = -1.69565218$$

Utilizando estos resultados y lo que utilizando la matriz U, el sistema de ecuaciones a resolver se transforma a este sistema:

$$3u - v + w = 1$$

$$-7.66666667v - 2.33333333w = \frac{11}{3}$$

$$4.26086957w = -1.69565218$$

Finalmente, resolvemos este sistema de ecuaciones para dar fin al ejercicio:

$$w = \frac{-1.69565218}{4.26086957}$$

$$w = -0.39795918$$

$$-7.66666667v = \frac{11}{3} + 2.33333333(-0.39795918)$$

$$v = \frac{2.73809524}{-7.66666667}$$

$$v = -0.35714286$$

$$3u - (-0.35714286) + (-0.39795918) = 1$$

$$3u - 0.04081632 = 1$$

$$u = \frac{1.04081632}{3}$$

$$u = 0.34693877$$

ii. $u + 4v = 5$

$v + w = 2$

$2u + 3w = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.375 \end{vmatrix}$$

Utilizando la matriz L tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1a & 0b & 0c \end{vmatrix} = 5$$
$$\begin{vmatrix} 0.5a & 1b & 0c \end{vmatrix} = 2$$
$$\begin{vmatrix} 0a & 0.25b & 1c \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, resolviendo el sistema de ecuaciones de la matriz L tenemos que:

$a = 5$
$b = 2 - 0.5(5) = -0.5$
$c = -0.25(-0.5) = 0.125$

Utilizando estos resultados y lo que utilizando la matriz U, el sistema de ecuaciones a resolver se transforma a este sistema:

$2u + 3w = 5$
$4v - 1.5w = -0.5$
$1.375w = 0.125$

Finalmente, resolvemos este sistema de ecuaciones para dar fin al ejercicio:

$$w = \frac{0.125}{1.375}$$

$$w = \frac{1}{11}$$

$$4v = 1.5(\frac{1}{11}) - 0.5$$

$$v = \frac{-0.36363636}{4}$$

$$v = -\frac{1}{11}$$

$$2u = 5 - 3(\frac{1}{11})$$

$$u = \frac{4.72727273}{2}$$

$$u = 2.36363636$$

iii.

$$u + 3v - w = 18$$
$$4u - v + w = 27.34$$
$$u + v + 7w = 16.2$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.38461538 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3.25 & -1.25 \\ 0 & 0 & 7.23076923 \end{vmatrix}$$

Utilizando la matriz L tenemos que:

$$|\ 1a \quad 0b \quad 0c| = 18$$

$|0.25a \quad 1b \quad 0c| = 27.34$
$|0.25a \quad 0.38461538b \quad 1c| = 16.2$

Entonces, resolviendo el sistema de ecuaciones de la matriz L tenemos que:

$a = 18$
$b = -0.25(18) + 27.34 = 22.84$
$c = -0.25(18) - 0.38461538(22.84) + 16.2 = 2.91538472$

Utilizando estos resultados y lo que utilizando la matriz U, el sistema de ecuaciones a resolver se transforma a este sistema:

$4u - v - w = 18$
$3.25v - 1.25w = 22.84$
$7.23076923w = 2.91538472$

Finalmente, resolvemos este sistema de ecuaciones para dar fin al ejercicio:

$w = \frac{2.91538472}{7.23076923}$
$w = 0.40319150$

$3.25v = 1.25(0.40319150) + 22.84$
$v = \frac{23.34398938}{3.25}$
$v = 7.18276596$

$4u = 7.18276596 + 0.40319150 + 18$
$u = \frac{25.58595746}{4}$
$u = 6.39648937$

Si la máquina admitiera solo cuatro dígitos significativos los resultados variarán aún más en sus décimas a comparación de las respuestas que fueron dadas en ocho cifras significativas, ya que si realizáramos los reemplazos para comprobar nuestras respuestas en el sistema de ecuaciones, estas varían en sus últimas décimas significativas.

7.2. Cholesky

Para que se pueda factorizar la matriz mediante el método de Cholesky se deben validar ciertas condiciones:

- La condición de simetría de la matriz: Es decir que la matriz A cumple la condición $A = A^t$.
- La matriz debe ser positiva definida, es decir que el determinante de todas sus submatrices debe ser positivo.

i. $u - 8v - 2w = 1$
$u + v + 5w = 4$
$3u - v + w = -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Podemos verificar que esta matriz no cumple con los requisitos para ser factorizada mediante el método de Cholesky.

No cumple con la condición de simetría. $A \,!= A^t$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -8 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Por otro lado podemos comprobar que la matriz no es positiva ya que una o más de sus submatrices no posee un determinante positivo. Los determinantes de la diagonal principal no son positivos.

Sub matriz 1X1:

$$A1 = |\ 1\ |$$

Como esta matriz se compone de un único elemento su determinante va a ser este elemento.

$det\ A1\ =\ 1$

Sub matriz 2X2:

$$A2 = \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$det\ A2 = (1 * 1) - (1 * \ -8)$
$det\ A2\ =\ 9$

Sub matriz 3X3:

$$A3 = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A3 = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$det\ A3 = ((1 * 1 * 1) + (1 * \ -1 * -2) + (3 * \ -8 * 5)) - ((1 * \ -8 * 1) + (1 * \ -1 * 5) + (3 * 1 * \ -2))$
$det\ A3 = ((1) + (2) + (-120)) - ((-8) + (-5) + (-6))$
$det\ A3 = (-117) - (-19)$
$det\ A3 = -98$

Entonces
$det\ A1\ =\ 1$
$det\ A2\ =\ 9$
$det\ A3 = -98$

Podemos observar que el determinante de una de las submatrices no es positivo por lo que A no es una matriz positiva y no puede ser factorizada mediante el método de Cholesky.

ii. $u + 4v = 5$

$v + w = 2$

$2u + 3w = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Podemos verificar que esta matriz no cumple con los requisitos para ser factorizada mediante el método de Cholesky.

No cumple con la condición de simetría. $A \,!= A^t$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A^t = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sub matriz 1X1:

$A1 = | \ 1 \ |$

Como esta matriz se compone de un único elemento su determinante va a ser este elemento.

$det\, A1 = 1$

Sub matriz 2X2:

$$A2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$det\, A2 =$ (1*1)-(0*4)

$det\, A2 = 1$

Sub matriz 3X3:

$$A3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$det\ A3 = ((1 * 1 * 3) + (2 * 4 * 1)) - (0)$
$det\ A3 =$ (3+8)
$det\ A3 =$ 11

Entonces
$det\ A1 =$ 1
$det\ A2 =$ 1
$det\ A3 =$ 11

Podemos ver que en este caso si se cumple la condición de que la matriz debe ser positiva ya que los determinantes de todas las submatrices cuadradas son positivos, sin embargo debido a que la matriz A no es simétrica no es posible factorizar mediante método de Cholesky.

iii. $u + 3v - w = 18$
$4u - v + w = 27.34$
$u + v + 7w = 16.2$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Podemos verificar que esta matriz no cumple con los requisitos para ser factorizada mediante el método de Cholesky.

No cumple con la condición de simetría. $A\ != A^t$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A^t = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Sub matriz 1X1:

$$A1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

Como esta matriz se compone de un único elemento su determinante va a ser este elemento.

$det\, A1 = 1$

Sub matriz 2X2:

$$A2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$det\, A2 = (1 * -1) - (3 * 4)$
$det\, A2 = -13$

Sub matriz 3X3:

$$A3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$det\, A3 = ((1 * -1 * 7) + (4 * 1 * -1) + (3)) - ((7 * 3 * 4) + (1) + (1))$
$det\, A3 = \underline{((-7)+(-4)+(3))-((84)+1+1)}$

$det\ A3\ =\ \underline{-94}$

Entonces
$det\ A1\ =\ 1$
$det\ A2\ =\ -\ 13$
$det\ A3\ =\ -\ 94$

Se puede observar que en este caso no se cumple ninguna de las dos condiciones necesarias para poder descomponer la matriz mediante el método de Cholesky.

----

10. Para la solución de este punto se realizó la implementación del método de Newton Multivariado el cual consiste en utilizar el Jacobiano que es la matriz de derivadas parciales del sistema de ecuaciones dado para después de esto agregar el vector de las funciones evaluadas en los puntos que se dan para la aproximación. Después de realizar esto, se debe evaluar la matriz con las derivadas parciales del sistema de ecuaciones y evaluarlo con los puntos que se dan para hacer la aproximación, hecho esto se resuelve el sistema de ecuaciones y ya por último los pasos anteriores se deben volver a repetir usando como datos de entrada la solución al sistema de ecuaciones de la anterior iteración, esto hasta que se cumpla el número de iteraciones que se deben hacer o que se cumpla la condición de la tolerancia.

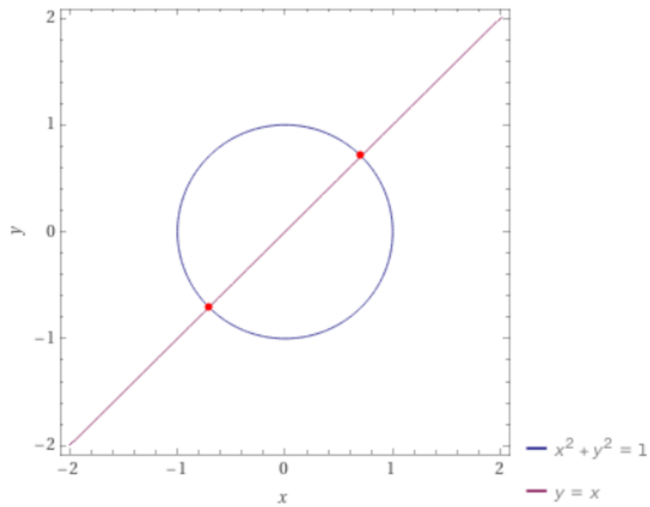
```
iteracion  0 : [1, 1]
iteracion  1 : (0.75, 0.75)
iteracion  2 : (0.7083333333333334, 0.7083333333333334)
iteracion  3 : (0.7071078431372549, 0.7071078431372549)
iteracion  4 : (0.7071067811873449, 0.7071067811873449)
iteracion  5 : (0.7071067811865476, 0.7071067811865476)
iteracion  6 : (0.7071067811865475, 0.7071067811865475)
iteracion  7 : (0.7071067811865476, 0.7071067811865476)
iteracion  8 : (0.7071067811865475, 0.7071067811865475)
iteracion  9 : (0.7071067811865476, 0.7071067811865476)
iteracion  10 : (0.7071067811865475, 0.7071067811865475)
```

Usando diez iteraciones observamos que desde la tercera iteración se encuentra una aproximación muy parecida a la herramienta usada para verificar esta respuesta, WolframAlpha.

Input

$\{x^2 + y^2 = 1, y = x\}$

Plot of solution set



Solutions

Exact forms

More digits

$x \approx -0.707107$, $y \approx -0.707107$

$x \approx 0.707107$, $y \approx 0.707107$

Link para ver la verificación realizada
https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E2+%2B+y%5E2%3D1+and+y%3Dx