

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

GAL Projekt  
Artikulační body a mosty

13. prosince 2024

Jiří Šotola (xsotol02),  
Marek Dančo (xdanco00)

# **Obsah**

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Artikulační body a mosty</b>	<b>2</b>
2.1	Artikulační body . . . . .	2
2.2	Mosty . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Návrh</b>	<b>5</b>
3.1	Uživatelské rozhraní . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Implementace</b>	<b>6</b>
4.1	Technologie . . . . .	6
4.2	Implementace návrhu . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Demonstrace použití</b>	<b>9</b>
5.1	Spuštění aplikace . . . . .	9
5.2	Úpravy uzelů a hran . . . . .	9
5.3	Pohybování se na ploše s uzly a hranami . . . . .	9
5.4	Nahrávání a ukládání grafů . . . . .	9
5.5	Ovládání algoritmů . . . . .	9
5.6	Příklady použití algoritmů . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>14</b>

# 1 Úvod

Algoritmy jsou důležitou součástí jak v informatice, tak i v matematice, kde hrají zásadní roli při řešení problémů v teorii grafů. Algoritmus lze definovat jako systematický postup, který pomocí konečného počtu kroků vyřeší zadáný problém. V teorii grafů se tyto postupy používají k analýze vrcholů a hran, které modelují širokou škálu reálných situací, například počítačové sítě, dopravní infrastrukturu nebo sociální sítě.

V kontextu analýzy sítí jsou důležité pojmy artikulační body a mosty, které pomáhají určit zranitelné části grafu. Artikulační bod je takový vrchol, který při odstranění způsobí, že graf přestane být souvislý. Podobně most je hrana, která při odstranění rozdělí graf na více komponent. Tyto prvky jsou klíčové pro zajištění stability sítí, protože označují kritické části, které při selhání poruší integritu a můžou poškodit i celkovou funkčnost [2].

Využití těchto dvou konceptů je široké a používá se od návrhu odolných počítačových sítí přes analýzu spolehlivosti dopravních systémů až po detekci klíčových aktérů v sociálních sítích. Například v počítačových sítích mohou být mosty identifikovány jako kritické spoje, které by u výpadku rozdělil síť na nekomunikující části. V dopravě mohou artikulační body představovat klíčové uzly, u kterých by jejich uzavření by narušilo propojení mezi regiony. Tímto způsobem pomáhají algoritmy nejen analyzovat stávající systémy, ale také navrhovat odolnější struktury [7] [5].

## 2 Artikulační body a mosty

Artikulační body a mosty jsou důležité, protože označují prvky, které jsou nejvíce zranitelné. Při jejich odstranění se graf rozdělí na více souvislých komponent. Nalezení těchto prvků není však jisté, protože se v grafu nemusí vyskytnout. Grafy, které tyto body nemají, jsou tzv. 2-souvislé (obsahují 2-souvislé komponenty) [1]. Pro nalezení artikulačních bodů a mostů je důležité použít efektivní algoritmus, který má dobrou časovou složitost. Všechny tyto algoritmy se zabývají neorientovanými grafy.

V následující části jsou vyobrazeny algoritmy pro hledání těchto prvků. Zobrazeny jsou jejich popis, efektivní algoritmus a jeho složitost. Algoritmus pro artikulační body je možné najít v sekci 2.1 a algoritmus pro mosty v sekci 2.2.

### 2.1 Artikulační body

Artikulační body (*articulation points*) jsou vrcholy v neorientovaném grafu, které při odstranění způsobí, že graf přestane být souvislý. Jinými slovy, artikulační bod je kritický uzel v grafu, který je nezbytný pro propojení jeho částí. Pokud graf obsahuje více souvislých komponent, může být odstraněním artikulačního bodu jedna z těchto částí oddělena od ostatních [2].

Algoritmus pro nalezení artikulačních bodů se nazývá Tarjanův algoritmus pro hledání artikulačních bodů (*Tarjan's Algorithm for Articulation Points*). Tento algoritmus je pojmenován po Robertu Tarjanovi, který ho vyvinul v roce 1972. Algoritmus je založen na prohledávání do hloubky (DFS). Algoritmus identifikuje artikulační body pomocí konceptů doby objevení a minimálního dosažitelného času. Následující odstavec zobrazuje jeho pseudokód [8] [9].

```
AP(V, Adj) :  
for u in V do:  
    color[u] = WHITE  
    p[u] = null  
    ap[u] = false  
time = 0  
for u in V do:  
    if color[u] == WHITE then:  
        AP-Visit(u)
```

```

AP-Visit(u) :
color[u] = GRAY
children = 0
d[u] = low[u] = time = time + 1
for v in Adj[u] do:
    if color[v] == WHITE then:
        children = children + 1
        p[v] = u
        AP-Visit(v)
        low[u] = Min(low[u], low[v])
        if p[u] == null && children > 1 then:
            ap[u] = true
        if p[u] != null && low[v] >= d[u] then:
            ap[u] = true
        else if p[u] != v then:
            low[u] = Min(low[u], d[v])
color[u] = BLACK

```

Význam jednotlivých proměnných:

- $d[u]$ : Čas první návštěvy uzlu  $u$ .
- $low[u]$ : Nejmenší čas dosažitelný z uzlu  $u$ .
- $ap[u]$ : Boolean hodnota označující, zda je uzel  $u$  artikulačním bodem.
- $p[u]$ : Pole rodičů uzlů.
- $color[u]$ : Stav uzlu (WHITE, GRAY, BLACK).

Algoritmus se skládá ze dvou hlavních částí: inicializační fáze AP a průchodu grafem pomocí DFS AP-Visit.

Inicializační fáze AP začíná inicializací, během kterého je každému vrcholu WHITE (nenavštíven). Pole rodičů ( $p[u]$ ) je nastaveno na null (nemá předchůdce), a pole  $ap[u]$  je inicializováno na false. Globální proměnná time je nastavena na nulu (čas průchodu). Následně algoritmus iteruje přes všechny vrcholy a spustí funkci AP-Visit( $u$ ) pro každý nenavštívený vrchol.

Funkce AP-Visit( $u$ ) označí vrchol  $u$  jako GRAY (právě zpracovávaný). Inicializuje počet dětí children na nulu a nastaví první návštěvu  $d[u]$  i nejnižší dosažitelnou hodnotu  $low[u]$  na aktuální hodnotu time, kterou následně inkrementuje. Poté algoritmus iteruje přes všechny sousedy  $v$  vrcholu  $u$ .

Pokud soused  $v$  nebyl dosud navštíven (WHITE), algoritmus zvýší počet dětí vrcholu  $u$ , nastaví  $p[v] = u$ , aby  $u$  bylo rodičem vrcholu  $v$ , a rekurzivně zavolá AP-Visit( $v$ ). Po návratu z rekurze aktualizuje hodnotu  $low[u]$  podle hodnoty  $low[v]$ . Následně se rozhodne, zda je vrchol  $u$  artikulačním bodem. Pokud  $u$  je kořen DFS stromu ( $p[u] = \text{null}$ ) a má více než jedno dítě ( $children > 1$ ), pak je  $u$  artikulačním bodem. Pokud  $u$  není kořen ( $p[u] \neq \text{null}$ ) a  $low[v] \geq d[u]$ , pak  $u$  rovněž představuje artikulační bod, protože potomci  $v$  nejsou schopni dosáhnout žádného předka  $u$  mimo  $u$  samotného.

Pokud soused  $v$  byl již navštíven (GRAY) a není rodičem  $u$ , algoritmus aktualizuje  $low[u]$  podle první návštěvy  $d[v]$ . Po zpracování všech sousedů označí vrchol  $u$  jako BLACK (plně zpracován).

Casová složitost tohoto algoritmu je  $O(V + E)$ , protože používá DFS a každý vrchol i hranu prochází jednou. Prostorová složitost je také  $O(V + E)$ , protože graf je obvykle reprezentován seznamem sousedů, a pomocné proměnné jako color,  $p$ ,  $d$ ,  $low$  a  $ap$  vyžadují prostor  $O(V)$  [4].

## 2.2 Mosty

Mosty (*bridges*) v grafu jsou hrany, které při odstranění způsobí, že graf přestane být souvislý tzn. rozdělí graf na více komponent. Tyto hrany jsou kritické pro propojení částí grafu, a proto jejich identifikace může pomoci při analýze stability grafu [2].

Algoritmus pro nalezení mostů je také Tarjanův algoritmus, který byl vyvinut v roce 1972. Tento algoritmus je založen na prohledávání do hloubky (DFS). Je velmi podobný předchozímu s podmínky uspění. Následující odstavec zobrazuje jeho pseudokód [8] [5] [9].

```
Bridges(V, Adj):
    for u in V do:
        color[u] = WHITE
        p[u] = null
    time = 0
    for u in V do:
        if color[u] == WHITE then:
            Bridge-Visit(u)

Bridge-Visit(u):
    color[u] = GRAY
    d[u] = low[u] = time = time + 1
    for v in Adj[u] do:
        if color[v] == WHITE then:
            p[v] = u
            Bridge-Visit(v)
            low[u] = Min(low[u], low[v])
            if low[v] > d[u] then:
                bridges.add((u,v))
        else if p[u] != v then:
            low[u] = Min(low[u], d[v])
    color[u] = BLACK
```

Význam jednotlivých proměnných:

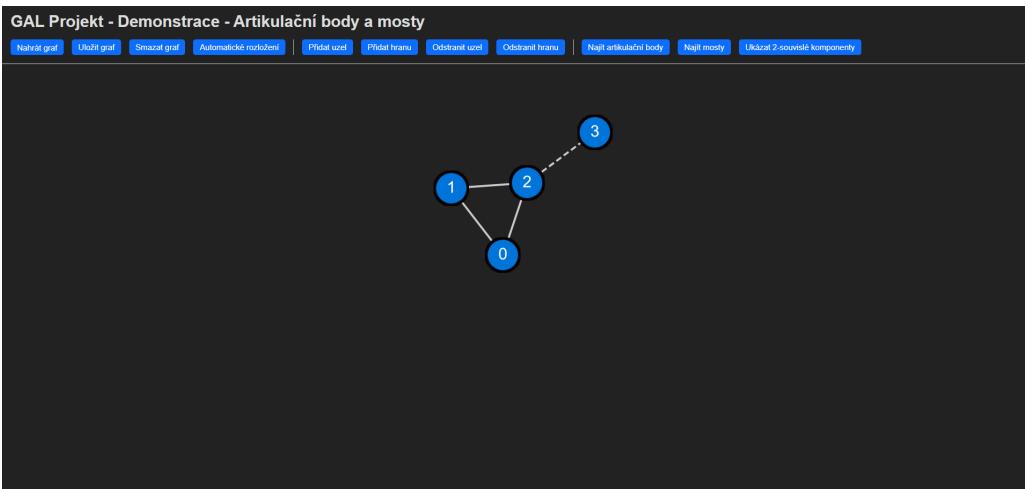
- $d[u]$ : Čas první návštěvy uzlu  $u$ .
- $low[u]$ : Nejmenší čas dosažitelný z  $u$ .
- $p[u]$ : Pole rodičů uzlů.
- $color[u]$ : Stav uzlu (WHITE, GRAY, BLACK).

Algoritmus pro hledání mostů začíná tím, že inicializuje všechny vrcholy grafu. Každý vrchol  $u$  je nastaven na WHITE (nenavštíven) a rodiče všech vrcholů jsou inicializováni na null (nemá předchůdce). Dále je nastaven časový údaj time, který bude sledovat časové značky během prohledávání grafu.

Algoritmus následně provádí iteraci přes všechny vrcholy. Pokud je vrchol  $u$  stále WHITE, spustí funkci Bridge-Visit( $u$ ).

Funkce Bridge-Visit( $u$ ) provádí prohledávání do hloubky (DFS) z vrcholu  $u$ . Nejprve označí vrchol  $u$  jako GRAY. Nastaví první návštěvu  $d[u]$  a hodnotu  $low[u]$  na aktuální hodnotu time, kterou následně inkrementuje.

Pro každý sousední vrchol  $v$  v vrcholu  $u$  algoritmus vykoná následující kroky:



Obrázek 1: Vzhled 1. obrazovky.

- Pokud je vrchol  $v$  stále WHITE (nenavštíven), algoritmus nastaví  $p[v] = u$  (rodič vrcholu  $v$ ), zavolá rekurzivně Bridge-Visit ( $v$ ) a po návratu aktualizuje hodnotu  $\text{low}[u]$  podle  $\text{low}[v]$ . Pokud je  $\text{low}[v] > d[u]$ , znamená to, že hrana  $(u, v)$  je most a algoritmus ji přidá do seznamu mostů.
- Pokud je  $v$  již navštíven (GRAY) a není rodičem  $u$  ( $p[u] \neq v$ ), algoritmus aktualizuje hodnotu  $\text{low}[u]$  podle hodnoty  $d[v]$ .

Po zpracování všech sousedů vrcholu  $u$  je tento vrchol označen jako BLACK (plně zpracován).

Časová složitost tohoto algoritmu je  $O(V + E)$ , protože každý vrchol a každá hrana jsou zpracovány právě jednou. Prostorová složitost je také  $O(V + E)$ , protože graf je reprezentován seznamem sousedů a pomocné struktury (color,  $p$ ,  $d$ ,  $\text{low}$ ) vyžadují prostor  $O(V)$  [4] [6].

### 3 Návrh

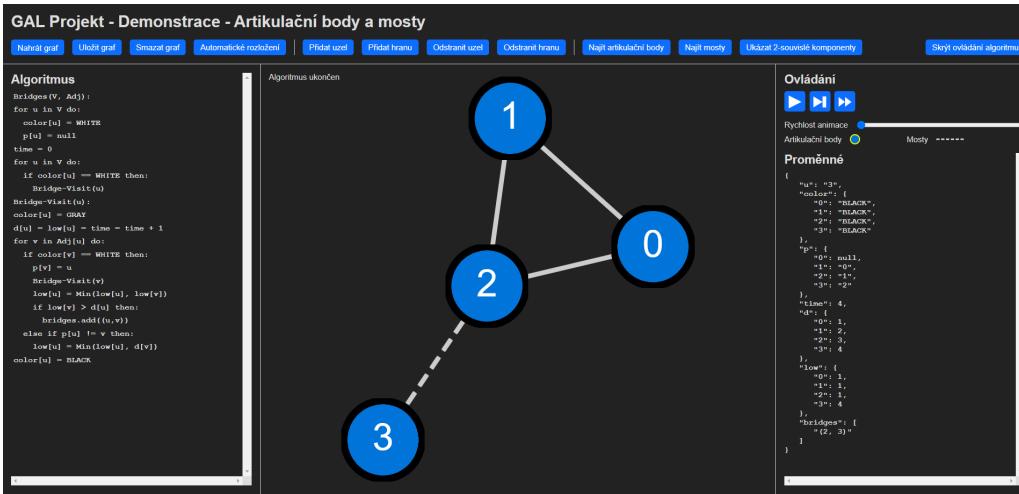
Vyvinutá aplikace se má soustředit na demonstraci algoritmů pro nalezení artikulačních bodů a mostů. K tomu se musí přizpůsobit vzhled a funkčnost aplikace, aby nejen zobrazovala hezký výstup, ale také poskytovala funkční prostředí se základními ovládacími prvky.

Návrh se soustředí na vzhled aplikace a její funkčnost na frontendu. Prvně je představen vzhled a rozložení v sekci Uživatelské rozhraní 3.1 a poté je popsána funkčnost jednotlivých tlačítek a kláves.

#### 3.1 Uživatelské rozhraní

V této části je primárně představen vzhled aplikace a změny obrazovek podle jejího stavu. Aplikace má primárně dva stav, které mezi sebou přechází. První obrazovka se stará o nahrávání a ukládání grafů, jednoduché úpravy grafu a spouštění algoritmů. Druhá obrazovka se věnuje obsluze algoritmů, kde je zobrazen algoritmus a jeho stav, proměnné a jejich hodnoty, ovládání a nakonec legenda.

Výsledný vzhled první obrazovky vypadá podle obrázku 1. Tato obrazovka je výchozí a po kaženém spuštění se uživateli vždy zobrazí prázdná. Obrazovka je na nejvyšší úrovni rozdělena do dvou částí. První část obsahuje nadpis a pod ním jsou sekce s úpravami, které lze provést se grafem. První sekce se zaměřuje na ukládání a nahrávání grafů. Dále obsahuje globální úpravy jako smazání celého grafu a automatické rozložení, které přizpůsobí graf obrazovce. Druhá sekce se týká jednoduchých úprav, které přidávají nebo odstraňují uzly či hrany. Poslední sekce je na spouštění algoritmů pro artikulační body a mosty. Dále tam je zobrazené 2-souvislé komponenty pro snadnější reprezentaci a zpřehlednění výsledků algoritmu.



Obrázek 2: Vzhled 2. obrazovky.

Po všech sekcích je zobrazena druhá část, kde je volná plocha na kreslení grafů. Tato plocha je interaktivní, takže pokud se na ni klikne, tak se může posunout a nebo pokud se posune kolečkem, tak se zvětší nebo zmenší. Pro přesunutí uzlu ho stačí vzít a posunou myší. V této oblasti se také zobrazuje výstup nebo návoděna z tlačítek vlevo nahoře. Například po kliknutí na tlačítko "Přidat uzel", na výstupu se zobrazí "Klikněte pro přidání uzlu".

Druhá obrazovka je zobrazena na obrázku 2. Tato obrazovka má k dispozici stejné funkce jako první, ale pouze za určitých podmínek. Přepnutí do této obrazovky je možné po spuštění jednoho ze dvou algoritmů. Spuštěný algoritmus se zastaví na prvním kroku. Na levé části obrazovky je zobrazen algoritmus, přičemž krok je zvýrazněn ve žlutém okně, které má žlutý rámeček a pozadí. Na pravé části obrazovky, od spodního okraje, jsou zobrazeny hodnoty proměnných ve formátu JSOU. Jsou zde takto ze dvou důvodů. První je z důvodu přehlednosti. Pokud by byly hodnoty zobrazeny v tabulce, při větším počtu proměnných by se nevešly na obrazovku a bylo by nutné je posouvat. Takže to je nutné mít v vertikálním formátu. Druhým důvodem je možnost uložit stav proměnných do externího souboru pro kontrolu chyb nebo pozdější zpracování. Nad tímto se vykypuje malá legenda, kde proužkované hrany jsou mosty a artikulační body jsou uzly se žlutém okrajem. Jako poslední sekce je ovládání. Prvním tlačítkem lze spustit pomalou reprezentaci kroků s ovladatelnou rychlosťí. Druhý znak přeskočí jeden krok a poslední vykoná celý algoritmus najednou. Algoritmus nastavuje různé barvy uzlů, které jsou reprezentované v přehledu proměnných nebo v samotném grafu. Například pokud je uzel WHITE, tak jeho okraj je bílý.

Jak jsem zmínil na začátku předchozího odstavce, tlačítka z předchozí obrazovky lze používat, ale za určitých podmínek. Tyto podmínky jsou splněné pouze, pokud je algoritmus dodělaný. Existují však výjimky pro tlačítka spuštění jiných algoritmů nebo skrytí algoritmu.

## 4 Implementace

Z návrhu je nyní definována aplikace, jak má vypadat a jaké má funkce. Tyto údaje je nutné implementovat ve správném prostředí se správnými funkcemi. Tímto se zabývá sekce Technologie 4.1. Dále je samotná implementace návrhu, kde jsou popisuje různé funkce, zachycené události a hlavně celý backend, které jsou podrobně popsány v sekci Implementace návrhu 4.2.

### 4.1 Technologie

Pro aplikaci bylo zvoleno prostředí JavaScript pro vytvoření webového rozhraní. Je to z důvodu, snadného spuštění (stačí pouze webový prohlížeč), lehké přenosnosti mezi systémy a obsahu podpůrných knihoven.

Jelikož se tento projekt zaměřuje na demonstraci algoritmů, tak toto řešení má nejlepší vlastnosti z dostupných prostředí.

Celá aplikace je postavena na knihovně Cytoscape. Cytoscape je open-source software navržený pro vizualizaci, analýzu a interpretaci sítí, které jsou modelovány jako grafy s uzly a hranami. Hlavní předností Cytoscape je schopnost zpracovávat komplexní sítě a zobrazovat je pomocí pokročilých vizualizačních nástrojů. Uživatelé mohou upravovat vzhled grafů, měnit barvy, velikosti a tvary uzlů, stejně jako styly hran, což umožňuje lepší přehlednost a srozumitelnost dat [3].

Cytoscape podporuje většinu moderních prohlížečů, které implementují standardy HTML5 a mají funkční JavaScriptové API s podporou ECMAScript 5 a vyšší. Podporované prohlížeče jsou například Google Chrome, Mozilla Firefox, Microsoft Edge, Safari a jejich ekvivalenty. Starší verze Internet Explorera nejsou podporovány. Jelikož cytoscape běží přímo v webovém prohlížeči, může mít vyšší nároky na paměť, zejména při práci s většími projekty [3].

## 4.2 Implementace návrhu

Aplikace je rozdělená do tří souborů. První je `index.html`, který má uložený přibližné rozložení plocha tlačítek. Druhý je soubor `style.css`, který obsahuje styly jak vypadá naformátovaný první soubor. Poslední je `app.js`, který se stará o události, backend tlačítek a definuje proměnné.

Soubor `app.js` obsahuje globální proměnné a inicializace, konfiguraci Cytoscape.js, manipulaci s grafem, algoritmy pro grafy a události aplikace.

### Glomanipulace s grafem, algoritmy pro grafy, události aplikacebální proměnné

Proměnné pro ovládání 1. obrazovky:

- `statusLine, newNodeId, selectedNode, graphChanged`: Sledují aktuální stav aplikace (např. přidávání uzlu/hrany, změna grafu apod.). Obecně sledují vše, co nelze udělat jedním krokem nebo potřebují v mezikuoru uživatele.
- `currentBccs, nodeBccs`: Proměnné uchovávající informace o 2-souvislých komponentách grafu (Biconnected Components, BCC).
- `biconnectedOn`: Příznak, který určuje, zda jsou 2-souvislé komponenty aktuálně zobrazeny.
- `downloadLink, fileUpload`: HTML prvky, které slouží k možnosti stahování a nahrávání grafy.
- `currentAlgo`: Odkaz na aktuálně běžící algoritmus, nebo `null`, pokud žádný neběží. Slouží také jako detekci aktuální obrazovky.

Proměnné pro ovládání 2. obrazovky s algoritmy:

- `algoStepTime`: Doba (v milisekundách) mezi jednotlivými automatickými kroky algoritmu.
- `algoVars`: Veřejné proměnné algoritmu (například uzly, které se zpracovávají).
- `algoVarsInternal`: Interní proměnné algoritmu, nepřístupné pro uživatele.
- `algoStep`: Indikuje aktuální krok algoritmu (`index` v poli `currentAlgo`).
- `algoInterval`: Intervalová proměnná pro automatické kroky algoritmu (`setInterval`).
- `algoStepsContent`: HTML element zobrazující kroky algoritmu (např. pseudokód).
- `algoVarsContent`: HTML element zobrazující hodnoty proměnných algoritmu (např. `low, disc`).
- `animSpeed`: Ovládací prvek pro nastavení rychlosti animace.
- `playToggle`: Tlačítko pro spuštění/pozastavení algoritmu.

## Inicializace událostí, cytoscape.js konfigurace a ovládání

V úvodu programu se provádí konfigurace `cytoscape.js`, kde element `cy` definuje styl uzlů a hran, stejně jako rozložení grafu pomocí algoritmu 'cose'.

Události grafu jsou definovány na základě aktuálního stavu aplikace, reprezentovaného proměnnou `Status`. Tyto události řídí interakce uživatele s plochou grafu. Například pokud je aplikace v režimu `addingNode` a uživatel klikne na plochu grafu (událost 'tap'), vytvoří se nový uzel na dané pozici.

Mezi základní funkce patří akce jako uložení nebo odstranění uzlu a hrany, které byly detailně popsány v sekci Uživatelské rozhraní 3.1. Tyto funkce jsou implementovány prostřednictvím událostí grafu a stavů proměnné `Status`.

### Funkce pro tlačítka 1. obrazovky

Níže jsou popsány funkce implementované pro práci s tlačítky, které mají názvy v angličtině anglickém ekvivalentu. Všechny tyto funkce prvně zkонтroluje obrazovka, a až pak se spustí. První je stahování a nahrávání, kde je podporován formát GraphML. Při nahrávání se nejprve ověří správnost vstupních dat. Poté se všechny hrany a uzly vloží do grafu pomocí seznamu uzlů a hran. Následně nastaví vlastnosti a rozložení. Při stahování se iteruje přes všechny prvky grafu, které se následně uloží do formátu GraphML a stáhnou jako soubor.

Druhé jsou funkce pro tlačítka na odstranění všech prvků, změnu rozložení, spuštění uložení / odstranění uzlu a hrany a spuštění algoritmů. Jednostavové funkce přímo provádějí požadovanou akci přímo pomocí Cytoscape a ukončí se. Naproti tomu vícestavové funkce nastavují proměnnou `Status`, kterou dále zpracovávají události grafu. Základní události byly popsány o dva odstavce výše. Poslední zbylo spuštění algoritmů, které nastavil obrazovku s algoritmem a status.

Poslední funkcí je ovládání zobrazení a skrytí 2-souvislých komponent. Tato funkce identifikuje a vizuálně zvýrazňuje 2-souvislé komponenty grafu. Algoritmus je podobný tomu, který se používá pro detekci artikulačních bodů a mostů, avšak místo těchto prvků sleduje a zaznamenává množiny uzlů před nalezením artikulačního bodu nebo mostu.

### Funkce pro 2. obrazovku

Následující funkce slouží k ovládání animace, zobrazení proměnných a řízení stavu algoritmu. Funkce `setAlgoStep` zajišťuje zvýraznění aktuálního řádku pseudokódu algoritmu a také tento řádek vykoná. Funkce `rerenderAlgoVars` aktualizuje zobrazení hodnot proměnných používaných algoritmem. Funkce `changeAnimSpeed` nastaví novou rychlosť animace. Funkce `setCurrentAlgo` slouží k nastavení algoritmu pro hledání bodů nebo mostů a provede počáteční inicializaci. Následují funkce `toggleAlgoControls` je ke skrytí nebo zobrazení ovládacích prvků algoritmu.

Další funkce se zaměřují na ovládání algoritmu. Funkce `toggleAlgoPlay` slouží ke spuštění nebo pozastavení animace algoritmu. Funkce `algoFinish` umožňuje dokončení algoritmu po jednotlivých krocích. Funkce `execAlgoStep` vykoná jeden krok algoritmu – aktualizuje zobrazené proměnné a posune algoritmus na další krok. Na závěr jsou dvě proměnné `articulationPoints` a `bridges`, které obsahují algoritmy ve formě textového popisu (pseudokód) a jejich implementace (To, co má vykonat řádek pseudokódu).

### Nastavení událostí a klávesových zkratek

Nakonec jsou nastaveny události pro příslušná tlačítka a klávesové zkrateky pomocí předem naefinovaných funkcí popsaných v předchozích dvou podsekčích. Každé tlačítko má přiřazenou klávesovou zkrateku, která se zobrazí po najetí kurzorem na příslušný prvek. Všechny informace o událostech a klávesových zkratekách jsou uloženy ve struktuře `eventConfigs`.

## 5 Demonstrace použití

Tato sekce se zaměřuje na spuštění jednotlivých příkladů, začínající vytvořením nových uzlů až po ovládání algoritmů. Tyto příklady slouží jenom pro demonstraci všech funkcí a zdokumentování správného použití.

Pro upřesnění jsou všechna kliknutí popsaná v této sekci prováděna levým tlačítkem myši.

### 5.1 Spuštění aplikace

Prvním krokem pro práci s aplikací je její spuštění. Protože se jedná o webovou aplikaci, stačí otevřít soubor index.html v libovolném moderním webovém prohlížeči. Po tomto kroku by se mělo zobrazit tmavé okno, zobrazené na obrázku 1.

### 5.2 Úpravy uzlů a hran

Nejdůležitější na začátku je si vytvořit uzly pomocí tlačítka "Přidat uzel". Kliknutím na toto tlačítko se spustí proces vkládání uzlů. Kliknutím na prázdnou plochu grafu se poté vytvoří uzel v místě ukazatele myši. Klávesovou zkratkou pro přidání nového uzlu je písmeno "n".

Proces přidání hrany je obdobný. Nejprve klikněte na tlačítko "Přidat hranu". Poté se klikne na dva různé uzly a následně se vytvoří hrana mezi vybranými uzly. Klávesová zkratka pro novou hranu je písmeno "e".

Některé uzly nebo hrany překážejí a jsou nutné občas odstranit. Tuto funkčnost zajišťují tlačítka "Odstranit uzel" nebo "Odstranit hranu". Po kliknutí na chtěné tlačítko se poté klikne na hranu nebo uzel pro odstranění a hrana nebo uzel se všemi navazujícími hranami zmizí. Pokud je potřeba odstranit celý graf, použijte tlačítko "Smazat graf".

### 5.3 Pohybování se na ploše s uzly a hranami

Pro úpravu, posunování a škálování plochy se používá myš. Pro posunutí celé plochy včetně všech uzlů klikněte do volného místa, podržte tlačítko myši a posuňte ji požadovaným směrem.

Velikost uzlů a plochy lze měnit otáčením kolečka myši směrem nahoru nebo dolů.

Jednotlivý uzel lze přesunout kliknutím, podržením tlačítka myši a tažením na požadované místo.

Aplikace má funkci automatického rozložení, která přeusporelá všechny uzly tak, aby byly rovnoměrně rozložené na obrazovce. Funkci aktivujete kliknutím na tlačítko "Automatické rozložení".

### 5.4 Nahrávání a ukládání grafů

Aplikace podporuje nahrávání a ukládání grafů ve formátu GraphML. Tato soubory končí s příponou .graphml.

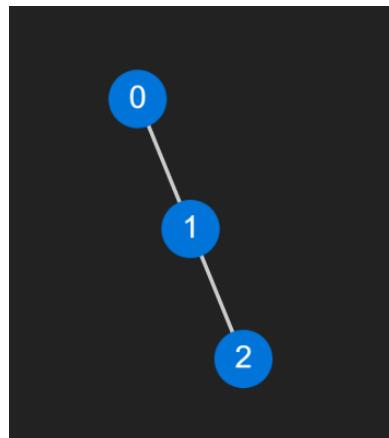
Pro nahrání grafu klikněte na tlačítko "Nahrát graf". Poté se zobrazí dialogové okno pro výběr souboru. Vyberte požadovaný soubor a potvrďte výběr kliknutím na "Otevřít". Následně se vše na ploše smaže a přidá se graf ze souboru. V případě chyby při nahrávání grafu se zobrazí upozornění s informací o problému.

Stahování probíhá po kliknutí na tlačítko "Stáhnout graf". Soubor se uloží do výchozího umístění pro stahování, které je ve většině prohlížečů nastaveno na složku Stažené soubory.

### 5.5 Ovládání algoritmů

Pokud je na ploše graf, lze spustit algoritmus pro nalehnutí artikulačních bodů nebo mostů, kliknutím na tlačítka "Najít artikulační body" nebo "Najít mosty".

Tímto krokem se zobrazí příslušný algoritmus v levé části obrazovky. Ve střední části se automaticky rozloží graf, který se bude vyvíjet podle stavů algoritmu. V pravé části se zobrazí ovládací prvky, kde první spustí animaci algoritmu, druhý udělá jeden krok při kliknutí a poslední okamžitě vykoná celý algoritmus. Pod těmito prvky je ještě posuvník, který nastavuje rychlosť animace. Pod ovládacími prvky se nachází legenda, která



Obrázek 3: Příklad 1. grafu.

zobrazuje význam barev a symbolů: artikulační body jsou označeny žlutým okrajem, mosty přerušovanou čárou. Jako poslední jsou zobrazené proměnné a jejich hodnoty použité v algoritmu.

Pro zobrazení 2-souvislých komponent slouží tlačítko "2-souvislé komponenty", které vypočítá a zobrazí 2-souvislé komponenty. Jejich odlišnost lze poznat barevným odlišením. Poté stejným tlačítkem se mohou i skrýt.

Tlačítko "Skrýt ovládání algoritmu" skryje ovládací panel během algoritmu a při ukončení ho vypne. Pokud je skryté, tak se opět může zobrazit tlačítkem "Zobrazení ovládání algoritmu".

## 5.6 Příklady použití algoritmů

Pro demonstraci použití jsou vytvořeny tři grafy, které předvedou použití algoritmů.

### 1. graf

Jako první graf byl zvolen graf o třech uzlech a dvou hranách, který ze zobrazen na obrázku 3. Průběh algoritmu vypadá následně:

#### Inicializace:

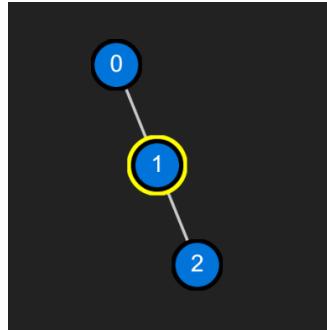
- Pro každý vrchol  $u \in \{0, 1, 2\}$  nastavíme:
  - $\text{color}[u] = \text{WHITE}$  (neprozkoumaný vrchol),
  - $\text{p}[u] = \text{null}$  (vrchol nemá rodiče),
  - $\text{ap}[u] = \text{false}$  (počátečně žádný vrchol není artikulační bod),
  - $\text{time} = 0$ .

**Průchod grafem (DFS):** Algoritmus začíná prohledávat graf od vrcholu 0, protože je stále WHITE.

- Začínáme od vrcholu 0:

- $\text{color}[0] = \text{GRAY}$  (vrchol 0 je nyní prozkoumáván),
- $\text{d}[0] = \text{low}[0] = 1$ , čas se zvyšuje,
- Prohlížíme sousedy vrcholu 0, což je vrchol 1.

- Pokračujeme na vrchol 1:



Obrázek 4: Výsledek 1. příkladu

- $\text{color}[1] = \text{GRAY}$ ,
- $d[1] = \text{low}[1] = 2$ , čas se zvyšuje,
- Prohlížíme sousedy vrcholu 1, což je vrchol 2.

- **Pokračujeme na vrchol 2:**

- $\text{color}[2] = \text{GRAY}$ ,
- $d[2] = \text{low}[2] = 3$ , čas se zvyšuje,
- Vrchol 2 nemá žádné další sousedy, proto se označí jako **BLACK**.

**Návrat na vrchol 1:**

- Po návratu na vrchol 1, aktualizujeme  $\text{low}[1] = \min(\text{low}[1], \text{low}[2]) = 2$ ,
- Zkontrolujeme podmínky pro artikulační bod:
  - Vrchol 1 není kořen (má rodiče),
  - $\text{low}[2] \geq d[1]$ , což znamená, že vrchol 1 je artikulační bod, protože odstranění vrcholu 1 by rozdělilo graf na dvě komponenty.

**Návrat na vrchol 0:**

- Po návratu na vrchol 0, aktualizujeme  $\text{low}[0] = \min(\text{low}[0], \text{low}[1]) = 1$ ,
- Vrchol 0 nemá žádné další sousedy a označí se jako **BLACK**.

V tomto grafu je **vrchol 1** artikulačním bodem, protože jeho odstraněním by graf byl rozdělen na dvě části (jednu obsahující vrchol 0 a druhou obsahující vrchol 2). Vrcholy 0 a 2 nejsou artikulačními body, protože jejich odstranění by nezpůsobilo rozdělení grafu na více komponent. Výsledek je vidět na obrázku 4.

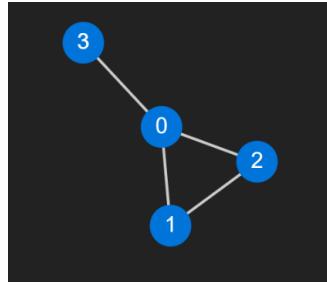
## 2. graf

Mějme graf na obrázku 5 se 4 vrcholy  $V = \{0, 1, 2, 3\}$  a následujícími hranami:

$$\text{Hrany: } \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)\}.$$

Použijeme algoritmus pro nalezení mostů (Bridges) pomocí DFS.

1. Inicializujeme všechny vrcholy jako nenavštívené ( $\text{color}[u] = \text{WHITE}$ ) a nastavíme rodiče vrcholů ( $p[u] = \text{null}$ ).



Obrázek 5: Příklad 2. grafu

2. Každý vrchol  $u$ , který ještě nebyl navštíven, procházíme pomocí funkce `Bridge-Visit ( $u$ )`.

3. Sledujeme:

- $d[u]$ : čas objevení vrcholu  $u$ ,
- $low[u]$ : nejmenší dosažitelný čas z  $u$ .

#### **DFS z vrcholu 0:**

- Nastavíme  $color[0] = GRAY$ ,  $d[0] = low[0] = 1$ ,  $time = 1$ .
- Zpracujeme hranu  $(0, 1)$ : protože  $color[1] = WHITE$ , voláme `Bridge-Visit (1)`.

#### **DFS z vrcholu 1:**

- Nastavíme  $color[1] = GRAY$ ,  $d[1] = low[1] = 2$ ,  $time = 2$ .
- Zpracujeme hranu  $(1, 2)$ : protože  $color[2] = WHITE$ , voláme `Bridge-Visit (2)`.

#### **DFS z vrcholu 2:**

- Nastavíme  $color[2] = GRAY$ ,  $d[2] = low[2] = 3$ ,  $time = 3$ .
- Hrana  $(2, 0)$ : zpětná hrana k předkovi, nastavíme  $low[2] = \min(low[2], d[0]) = 1$ .
- Hrana  $(1, 2)$ : zpětná hrana k předkovi, ignoruje se.

Po návratu do vrcholu 1 nastavíme:

$$low[1] = \min(low[1], low[2]) = 1.$$

Po návratu do vrcholu 0, zpracujeme hranu  $(0, 3)$ :

- $color[3] = WHITE$ , voláme `Bridge-Visit (3)`.

#### **DFS z vrcholu 3:**

- Nastavíme  $color[3] = GRAY$ ,  $d[3] = low[3] = 4$ ,  $time = 4$ .
- Žádné další sousedy. Návrat zpět.

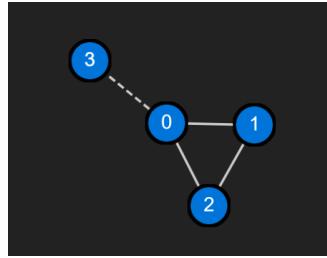
Po návratu do vrcholu 0:

$$low[3] < d[0] \implies \text{hrana } (0, 3) \text{ je most.}$$

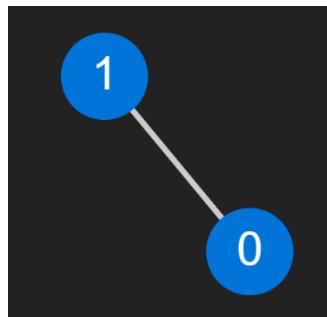
Mosty v grafu jsou:

$$(0, 3)$$

, které jsou vidět na obrázku 6.



Obrázek 6: Výsledek 2. příkladu



Obrázek 7: Příklad 3. grafu

### 3. graf

Mějme graf na obrázku 7 se dvěma vrcholy  $V = \{0, 1\}$  a jedinou hranou:

$$\text{Hrany: } \{(0, 1)\}.$$

Použije se algoritmus pro nalezení artikulačních bodů pomocí DFS.

#### Inicializace:

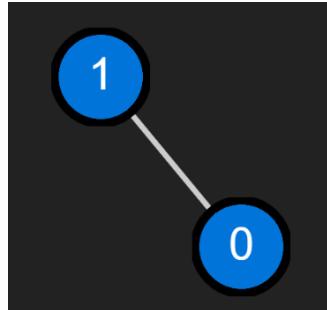
- Všechny vrcholy nastavíme jako nenavštívené ( $\text{color}[u] = \text{WHITE}$ ).
- Nastavíme  $p[u] = \text{null}$  a  $\text{ap}[u] = \text{false}$ .
- Spustíme DFS od vrcholu 0.

#### DFS z vrcholu 0:

- Nastavíme  $\text{color}[0] = \text{GRAY}$ ,  $d[0] = \text{low}[0] = 1$ .
- Zpracujeme souseda  $v = 1$ : voláme AP-Visit(1).

#### DFS z vrcholu 1:

- Nastavíme  $\text{color}[1] = \text{GRAY}$ ,  $d[1] = \text{low}[1] = 2$ .
- Vrchol 1 má souseda  $v = 0$ , což je jeho předek, takže  $\text{low}[1] = \min(\text{low}[1], d[0]) = 1$ .
- Barvíme  $\text{color}[1] = \text{BLACK}$  a vracíme se zpět do vrcholu 0.



Obrázek 8: Výsledek 3. příkladu

#### Návrat do vrcholu 0:

- Po návratu nastavíme  $\text{low}[0] = \min(\text{low}[0], \text{low}[1]) = 1$ .
- Vrchol 0 má  $\text{children} = 1$ , a protože  $\text{children} \leq 1$ , není artikulačním bodem.

#### Kontrola vrcholu 1:

- Vrchol 1 nemá žádné děti a nesplňuje podmínky pro artikulační bod.

V tomto grafu neexistují klíčové vrcholy. Odstranění žádného vrcholu nerozdělí graf na více komponent jak je vidět na obrázku 8.

## 6 Závěr

V tomto projektu jsme měli vytvořit aplikaci pro demonstraci nalezení artikulačních bodů a mostů, což se podařilo implementovat pomocí Tarjanova algoritmu. Tento algoritmus má lineární složitost a tudíž je dobře použitelný ve širém množství případů. Tento algoritmus byl implementován s využitím knihovny Cytoscape.js v programovacím prostředí JavaScript pro jeho jednoduchou použitelnost a přenositelnost. Kromě samotného algoritmu bylo přidáno základní ovládání grafu i algoritmu, čímž se zjednodušila práce s aplikací.

Ve výsledku se může zhodnotit, že aplikace nalezne důležité prvky a jejich reprezentaci zobrazí poměrně dobře. Avšak ovládání by mohlo být interaktivnější, například přidáním možnosti určení výchozího bodu algoritmu, tlačítek pro krokování nebo funkce 'Zpět' pro vrácení změn. Obecně lze říct, že je možnost nějakého rozvoje, který může dodat předešlé ovládání nebo jít novým směrem jako ve vzhledu nebo přidání různých dalších algoritmů.

## Reference

- [1] Blažej, V.: An Overview of Graph Theory. 2020, navštíveno: 3.12.2024. Dostupné z: [https://vaclavblazej.github.io/post/2020/graph\\_theory/](https://vaclavblazej.github.io/post/2020/graph_theory/)
- [2] Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; aj.: *Introduction to Algorithms*. MIT Press, třetí vydání, 2009, 748–759 s.
- [3] Cytoscape Consortium: Cytoscape: An Open Source Platform for Complex Network Analysis and Visualization. 2024, navštíveno: 8.12.2024. Dostupné z: <https://cytoscape.org/index.html>
- [4] Farina, G.: The Impact of Linear Time Algorithms on the Computational Complexity of Problems in Graph Theory. 2015, navštíveno: 3.12.2024. Dostupné z: [https://www.mit.edu/~gfarina/2016/impact-linear-icalp-yr-2015/impact\\_linear\\_icalp\\_yr\\_2015.pdf](https://www.mit.edu/~gfarina/2016/impact-linear-icalp-yr-2015/impact_linear_icalp_yr_2015.pdf)
- [5] GeeksforGeeks: Articulation Points (or Cut Vertices) in a Graph. 2024, navštíveno: 1.12.2024. Dostupné z: <https://www.geeksforgeeks.org/articulation-points-or-cut-vertices-in-a-graph/>
- [6] GeeksforGeeks: Bridge in a Graph. 2024, navštíveno: 8.12.2024. Dostupné z: <https://www.geeksforgeeks.org/bridge-in-a-graph/>
- [7] GeeksforGeeks: Introduction to Graphs - Data Structure and Algorithm Tutorials. 2024, navštíveno: 1.12.2024. Dostupné z: <https://www.geeksforgeeks.org/introduction-to-graphs-data-structure-and-algorithm-tutorials/?ref=lbp>
- [8] Tarjan, R.: Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, ročník 1, č. 2, 1972: s. 146–160, doi:10.1137/S0097539700000526.
- [9] ČVUT FEL: Articulation Points and Bridges in Graphs. 2022, navštíveno: 8.12.2024. Dostupné z: [https://cw.fel.cvut.cz/b221/\\_media/courses/la2022/20220913\\_articulation\\_bridges.pdf](https://cw.fel.cvut.cz/b221/_media/courses/la2022/20220913_articulation_bridges.pdf)