Modelos de velocidad y aceleración para la propulsión de cohetes.

Isidro A. Abelló García, Kelen Alfaro García, Carlos M. Alfonso Basabe,
Adriana Boué García, Carlos A. Mazorra Matos

Figure 1: Despegue de un cohete.

Tema II:
Resumen teórico y resolución de problemas correspondientes al epígrafe 2.3 del libro "Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling, 4th Edition", de C. Henry Edwards y David E. Penney.

1 Cohetes en ascenso

Generalmente es necesario conocer la altura y y velocidad v del cohete que despega en línea recta desde la superficie terrestre en función de un tiempo t determinado.

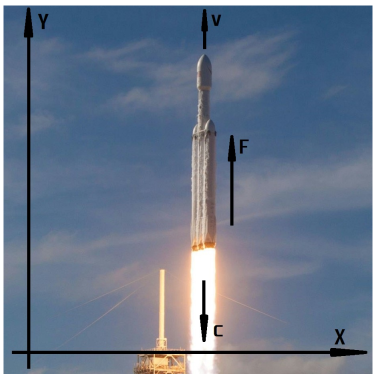

Figure 2: Diagrama de fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Para elaborar un modelo que nos permita manejar el problema debemos tener en cuenta:

- El tiempo inicial de despegue será $t_0 = 0$.
- El cohete es impulsado por la expulsión de gases a una velocidad constante c.
- Debido a la quema de combustible la masa del cohete $m = m(t)$.
- Partir de la Segunda Ley de Newton: $\frac{dP}{dt} = F$. (1)

Donde el momento $P = mv$ relaciona la masa variable y la velocidad, y F representa las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo (como pueden ser la gravedad y resistencia del aire). Luego, supongamos que m cambia a $m + \Delta m$ y v a $v + \Delta v$ en un intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$. Además el sistema debe tener en cuenta los gases expulsados en dicho intervalo de tiempo:

$$\Delta P \approx (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv + (-\Delta m)(v - c) = m\Delta v + c\Delta m + \Delta m\Delta v$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta v + c\Delta m + \Delta m\Delta v}{\Delta t}$$

Realizando la sustitución en (1) obtenemos: $F = m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt}$ (2)
donde $F = F_g + F_r = -mg - kv$ con las constantes g, k gravitatoria y de rozamiento respectivamente. Sustituyendo en (2) obtenemos:

$$m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt} = -mg - kv \tag{3}$$

2 Empuje constante

Supongamos ahora que el combustible del cohete se consume de forma constante a una tasa de quemado β en el intervalo de tiempo $[0, t_1]$, en el cual la masa del cohete decrece desde m_0 a m_1 tal que:

$$\begin{aligned} m(0) &= m_0, \qquad & m(t_1) &= m_1 \\ m(t) &= m_0 - \beta t, \qquad & \frac{dm}{dt} &= -\beta \quad \text{para } t \le t_1 \end{aligned} \tag{4}$$

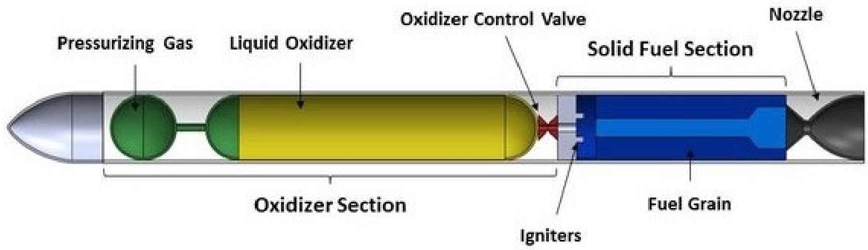

Figure 3: Sistemas de combustible en un cohete.

Al sustituir las expresiones de (4) en (3) obtenemos:

$(m_0-\beta t)\frac{dv}{dt}+kv = \beta c-(m_0-\beta t)g$ donde al resolver la ecuación obtenemos:

$$v(t) = v_0 M^{\frac{k}{\beta}} - \frac{g\beta t}{\beta - k} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{g m_0}{\beta - k})(1 - M^{\frac{k}{\beta}}), \quad (6)$$

donde $v_0 = v(0)$ y $M = \frac{m(t)}{m_0} = \frac{m_0 - \beta t}{m_0}$, podemos analizar que M representa la **masa fraccional**, que es la relación entre la masa del combustible restante y la masa total del cohete en el tiempo t.

Figure 4: Cohete a grandes alturas.

3 Ausencia de resistencia

A grandes alturas la densidad atmosférica decrece significativamente por lo que se puede despreciar la resistencia del aire. Es necesario entonces considerar este caso, en el cual establecemos $k = 0$, obteniendo la solución:

$$v(t) = v_0 - gt + c \ln \tfrac{m_0}{m_0 - \beta t}. \tag{7}$$

Luego, al integrar en (7) podemos obtener:

$$y(t) = (v_0 + c)t - \tfrac{gt^2}{2} - \tfrac{c}{\beta}(m_0 - \beta t) \ln \tfrac{m_0}{m_0 - \beta t} \tag{8}$$

Luego por (4) y (8), cuando se termine el combustible la altitud del cohete será:

$$y_1 = y(t_1) = (v_0 + c)t_1 - \tfrac{gt_1^2}{2} - \tfrac{cm_1}{\beta} \ln \tfrac{m_0}{m_1} \tag{9}$$

4 En el espacio libre

Figure 5: Cohete en el espacio exterior.

Por último, procederemos al análisis del caso en el que nuestro cohete sobrepasa el umbral donde no es afectado por la fuerza gravitatoria de la Tierra (o cualquier otro cuerpo planetario donde se encuentre), modelaremos el problema de tal manera que $g = k = 0$, sustituyendo en (7) obtenemos:

$$\Delta v = v_1 - v_0 = c \ln \tfrac{m_0}{m_1}$$

5 Un problema para integrar conocimientos

El cohete V-2 utilizado para atacar Londres en la Segunda Guerra Mundial tenía una masa inicial de $12\,850\,\mathrm{kg}$, de los cuales $68.5\,\%$ era combustible. Éste se quemó uniformemente durante $70\,\mathrm{s}$, con una velocidad de empuje de $2\,\mathrm{km/s}$. Asumiendo que hubo resistencia del aire de $1.45\,\mathrm{N}$ por $\mathrm{m/s}$ de velocidad, encontrar la velocidad y la altitud del V-2 cuando se terminó el combustible, bajo la consideración de que fue lanzado verticalmente hacia arriba desde la posición de reposo en el piso.

Figure 6: Sitio de lanzamiento de cohetes V-2 en la Holanda ocupada por Alemania c.1944.

En este problema se debe analizar la velocidad y altitud de un cohete lanzado verticalmente, con quema uniforme de combustible y empuje constante, considerando la gravedad y resistencia del aire. Con estas características podemos resolver nuestro problema mediante el modelo de aceleración propuesto en este resumen.

Datos:

- masa inicial: $m_0 = 12\,850\,\mathrm{kg}$
- porcentaje de masa combustible: $68.5\,\%$
- gravedad: $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$
- tiempo en que concluye la quema: $t_1 = 70\,\mathrm{s}$
- velocidad de empuje: $c = 2000\,\mathrm{m/s}$
- resistencia del aire: $k = 1.45\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}}$
- velocidad inicial $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$

Sea β la taza de quemado en el intervalo de tiempo $[0, t_1]$ y sea m_1 la masa del cohete después de la quema:

$\Delta m = m_0 - m_1 = \frac{68.5}{100} \cdot 12\,850\,\mathrm{kg} = 8802.25\,\mathrm{kg}$

$\beta = \frac{\Delta m}{70\,\mathrm{s}} \approx 125.75\,\mathrm{kg/s}$

Por el modelo de aceleración sabemos que:

$m = m_0 - \beta t$ $\quad \frac{dm}{dt} = -\beta$ $\quad \beta, g, c, k$ son contantes, $\quad m(t) > 0$

$m\frac{dv}{dt} + kv = \beta c - mg$

Aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad (TEU), tenemos que:

$\frac{dv}{dt} = \frac{\beta c}{m} - g - \frac{kv}{m} = f(t, v)$, como $m(t) > 0$ entonces $f(t, v)$ es continua.

$fv = -\frac{k}{m}$ continua.

Entonces por el TEU tenemos que para un valor inicial existe una única solución, ahora procedamos a resolver la ecuación diferencial.

Lo llevamos a una ecuación lineal:

$$v' + \frac{k}{m}v = \frac{\beta c}{m} - g \qquad \text{(I)}$$

Hallemos el factor integrante:

$\int \frac{k}{m}dt = \int \frac{k}{m}\frac{-dm}{\beta} = \frac{-k}{\beta}\int \frac{dm}{m} = -\frac{k}{\beta}\ln m + C$

Entonces podemos tomar el factor integrante: $e^{-\frac{k}{\beta}\ln m} = m^{-\frac{k}{\beta}}$ y se cumple que:

$(vm^{-\frac{k}{\beta}})' = m^{-\frac{k}{\beta}}v' + m^{-\frac{k}{\beta}}\frac{k}{m}v$

Tomamos (I) y multiplicamos por $m^{-\frac{k}{\beta}}$:

$m^{-\frac{k}{\beta}}v' + m^{-\frac{k}{\beta}}\frac{k}{m}v = \beta c m^{-\frac{k}{\beta}-1} - gm^{-\frac{k}{\beta}}$

$\Rightarrow (vm^{-\frac{k}{\beta}})' = \beta c m^{-\frac{k}{\beta}-1} - g m^{-\frac{k}{\beta}}$

$\Rightarrow vm^{-\frac{k}{\beta}} = \int \beta c m^{-\frac{k}{\beta}-1} dt - \int g m^{-\frac{k}{\beta}} dt$

$\int \beta c m^{-\frac{k}{\beta}-1} dt = -c \int m^{-\frac{k}{\beta}-1} dm = \frac{-cm^{-\frac{k}{\beta}}}{-\frac{k}{\beta}} + C = \frac{\beta c}{k} m^{-\frac{k}{\beta}} + C$

$\int g m^{-\frac{k}{\beta}} = -\frac{g}{\beta} \int m^{-\frac{k}{\beta}} dm = -\frac{g}{\beta} \frac{m^{-\frac{k}{\beta}+1}}{-\frac{k}{\beta}+1} + C = \frac{-gm^{-\frac{k}{\beta}+1}}{\beta(-\frac{k}{\beta}+1)} + C$

$= \frac{-gm^{-\frac{k}{\beta}+1}}{\beta - k} + C$

$\Rightarrow vm^{-\frac{k}{\beta}} = \frac{\beta c}{k} m^{-\frac{k}{\beta}} + \frac{gm^{-\frac{k}{\beta}+1}}{\beta - k} + C_1$

$\Rightarrow v = \frac{\beta c}{k} + \frac{gm}{\beta - k} + m^{\frac{k}{\beta}} C_1$

Evaluación en $t = 0$ para obtener C_1:

$v_0 = \frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta - k} + m_0^{\frac{k}{\beta}} C_1$

$\Rightarrow C_1 = (v_0 - \frac{\beta c}{k} - \frac{gm_0}{\beta - k}) m_0^{-\frac{k}{\beta}}$

Sea M la masa fraccional del cohete con respecto a la masa inicial:

$M(t) = \frac{m(t)}{m_0}$

$$\Rightarrow v = \frac{\beta c}{k} + \frac{gm}{\beta - k} + M^{\frac{k}{\beta}} (v_0 - \frac{\beta c}{k} - \frac{gm_0}{\beta - k}) \tag{II}$$

$= v_0 M^{\frac{k}{\beta}} + \frac{\beta c}{k} - \frac{\beta c}{k} M^{\frac{k}{\beta}} + \frac{g(m_0 - \beta t)}{\beta - k} - \frac{gm_0}{\beta - k} M^{\frac{k}{\beta}}$

$= v_0 M^{\frac{k}{\beta}} + \frac{\beta c}{k}(1 - M^{\frac{k}{\beta}}) + \frac{gm_0}{\beta - k}(1 - M^{\frac{k}{\beta}}) - \frac{g\beta t}{\beta - k}$

$= v_0 M^{\frac{k}{\beta}} - \frac{g\beta t}{\beta - k} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta - k})(1 - M^{\frac{k}{\beta}})$

Sustituyendo los parámetros del problema:

$M(70) = \frac{m(70)}{m_0} = \frac{31.5}{100} = 0.315$

$v(70) = -\frac{g\beta t}{\beta - k} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta - k})(1 - M(70)^{\frac{k}{\beta}})$

Calculando obtenemos: $v(70) \approx 1613.75\,\mathrm{m/s}$

Ahora busquemos la altitud y del cohete en el momento que concluye la quema de combustible, tenemos:

$v = -\frac{g\beta t}{\beta-k} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})(1 - M^{\frac{k}{\beta}})$

$\Rightarrow y' = -\frac{g\beta t}{\beta-k} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})(1 - (\frac{m}{m_0})^{\frac{k}{\beta}})$

$\Rightarrow y = \int \frac{-g\beta t}{\beta-k}dt + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k}) \int (1 - (\frac{m}{m_0})^{\frac{k}{\beta}})dt$

$\int \frac{-g\beta t}{\beta-k}dt = -\frac{g\beta}{\beta-k} \int tdt = -\frac{g\beta}{\beta-k}\frac{t^2}{2} + C$

$\int (1 - (\frac{m}{m_0})^{\frac{k}{\beta}})dt = \int dt - \int (\frac{m}{m_0})^{\frac{k}{\beta}}dt = t - m_0^{-\frac{k}{\beta}} \int m^{\frac{k}{\beta}}dt = t + \frac{m_0^{-\frac{k}{\beta}}}{\beta} \int m^{\frac{k}{\beta}}dm$

$= t + \frac{m_0^{-\frac{k}{\beta}}}{\beta}\frac{m^{\frac{k}{\beta}+1}}{\frac{k}{\beta}+1} + C = t + \frac{mM^{\frac{k}{\beta}}}{k+\beta} + C$

$$\Rightarrow y = -\frac{g\beta t^2}{2(\beta-k)} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})(t + \frac{mM^{\frac{k}{\beta}}}{k+\beta}) + C_2 \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo en $t = 0$:

$y(0) = 0$

$\Rightarrow 0 = (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})\frac{m_0}{k+\beta} + C_2$

$\Rightarrow C_2 = -(\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})\frac{m_0}{k+\beta}$

Sustituyendo en (III):

$y = -\frac{g\beta t^2}{2(\beta-k)} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})(t + \frac{mM^{\frac{k}{\beta}}}{k+\beta}) - (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})\frac{m_0}{k+\beta}$

$\Rightarrow y = -\frac{g\beta t^2}{2(\beta-k)} + (\frac{\beta c}{k} + \frac{gm_0}{\beta-k})(t + \frac{mM^{\frac{k}{\beta}} - m_0}{k+\beta})$

Sustituyendo en $t = 70$ obtenemos:

$y(70) \approx 41\,781.53\,\mathrm{m}$