

حوزه های عصبی

تمرین درس یادگیری عمیق

بسمه تعالی

سری اول

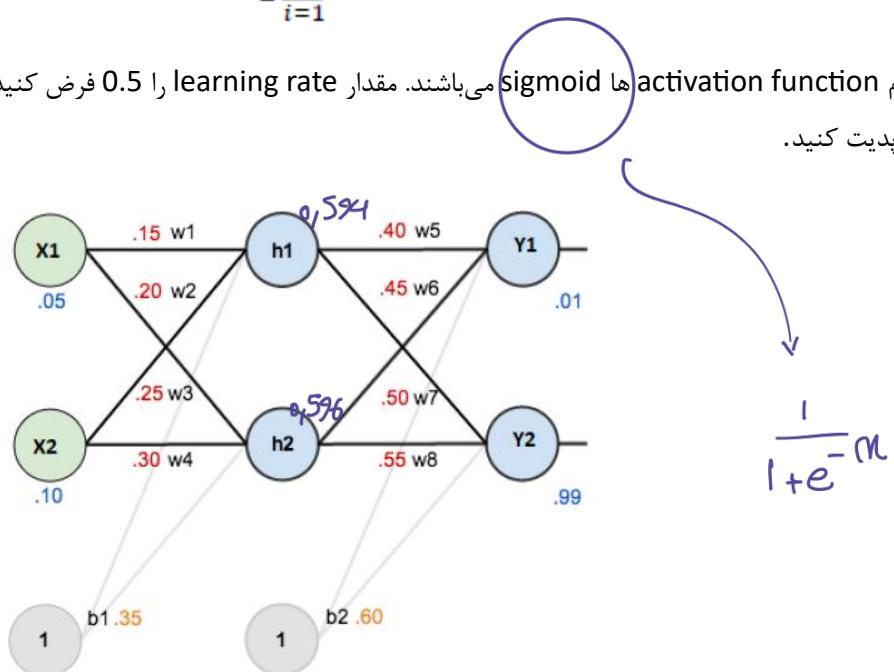
۱۴۰۴۱۷۶

سوال ۱) شبکه عصبی زیر را در نظر بگیرید. این شبکه دو خروجی Y_1 و Y_2 دارد که بعد از train مقدار آنها باید به ترتیب ۰.۰۱ و ۰.۹۹ باشد.

تابع loss را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Loss = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

b) مقدار learning rate را ۰.۵ فرض کنید. برای یک تکرار، مقادیر w و b می‌باشند. مقدار Y_1 را 0.594 و Y_2 را 0.596 آپدیت کنید.



$$net_{h1} = (0.05 * 0.15) + (0.1 * 0.25) + (0.35) = 0.3825 \rightarrow \frac{1}{1 + e^{-0.3825}} = 0.594$$

$$net_{h2} = (0.05 * 0.20) + (0.1 * 0.30) + (0.35) = 0.39 \rightarrow \frac{1}{1 + e^{-0.39}} = 0.596$$

$$net_{Y1} = (0.594 * 0.40) + (0.596 * 0.45) + 0.35 = 1.3356 \rightarrow 0.791$$

$$net_{Y2} = (0.594 * 0.45) + (0.596 * 0.50) + 0.35 = 1.3951 \rightarrow 0.802$$

$$net_{Y1} = (w5 * out_{h1}) + (w7 * out_{h2}) + b2$$

$$net_{Y2} = (w6 * out_{h1}) + (w8 * out_{h2}) + b2$$

$$\text{loss} = \frac{1}{2}(y_1 - \hat{y}_1)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - \hat{y}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} (0,01 - 0,791)^2 + \frac{1}{2} (0,02 - 0,802)^2 = 0,61075$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial w_5} = \frac{\partial h}{\partial y_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial \text{net}y_1}}_{\text{Sigmoid}} \cdot \frac{\partial \text{net}y_1}{\partial w_5} = -0,0766$$

$$\frac{1}{2}(y_1 - \hat{y}_1)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - \hat{y}_2)^2 = \hat{y}_1 - y_1$$

$$\hat{y}_1(1 - \hat{y}_1)$$

$\text{net } y_1 = (h_1 \cdot w_5) + (h_2 \cdot w_7) + b_2 \rightarrow h_1$ (h1 obj.)

Sigmoid w.

$(y_1 - \hat{y}_1) \quad (\hat{y}_1(1 - \hat{y}_1))$ out h_1

$$(0,01 \cdot 0,791) (0,791(1 - 0,791)) \cdot 0,594 = -0,0766$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_7} = (y_1 - \hat{y}_1) (\hat{y}_1 (1 - \hat{y}_1)) \text{ out h2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_7} = 0,0769$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_6} = (y_2 - \hat{y}_2) (\hat{y}_2 (1 - \hat{y}_2)) \text{ out h1} = -0,074$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_8} = (y_2 - \hat{y}_2) (\hat{y}_2 (1 - \hat{y}_2)) \text{ out h2} = -0,0742$$

$$\frac{\partial h}{\partial b_2} = ((y_1 - \hat{y}_1) (\hat{y}_1 (1 - \hat{y}_1))) + (w_2 \hat{y}_2) (\hat{y}_2 (1 - \hat{y}_2))$$

$$= -0,2535$$

$$w_{7 \text{ new}} = w_{7 \text{ old}} - \alpha \Delta w_{7 \text{ old}}$$

جمله نسبتی
 مقداری
 اوردن

$$w_{7 \text{ new}} = 0,4 - 0,5 (-0,0769) = 0,4383$$

$$w_6 \text{ new} = 0,5 - 0,5 (-0,074) = 0,538$$

$$w_8 \text{ new} = 0,55 - 0,5 (-0,0742) = 0,4870$$

$$w_9 \text{ new} = 0,55 - 0,5 (-0,0742) = 0,5871$$

$$b_2 \text{ new} = 0,8 - 0,5(-0,2535) = 0,9267$$

$$\text{net h}_1 = (\lambda_1 w_1) + (\lambda_2 w_2) + b_1$$

$$\Delta w_1 = \frac{\partial h}{\partial \hat{y}_1} \cdot \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial \text{net h}_1}$$

$$\frac{\partial \text{net h}_1}{\partial \text{out h}_1} \cdot \frac{\partial \text{out h}_1}{\partial \text{net h}_1}$$

w₅ Sigmoid

$$\frac{\partial \text{net h}_1}{\partial w_1}$$

مُنْسَخَةٌ مُعَادٌ حَسَابٌ
جَمِيلٌ بِكَوْلَاهَيْسَرَه

$$\text{out h}_1(1-\text{out h}_1)$$

$$(y_1 - \hat{y}_1)(\hat{y}_1(1-\hat{y}_1)) * w_5 * \text{out h}_1(1-\text{out h}_1)$$

$$w_6 \text{ لـ } w_5 \text{ لـ } \dots \text{ وجـ دارـ 2، } \lambda_1 \text{ جـلـوتـ بـعـدـ لـ } w_1 \text{ بـعـدـ لـ } \lambda_2$$

$$(y_2 - \hat{y}_2)(\hat{y}_2(1-\hat{y}_2)) * w_6 * \text{out h}_1(1-\text{out h}_1)$$

جـ بـعـدـ لـ

$$(\delta_{h_1} * w_5) + (\delta_{h_2} * w_6) * \text{out h}_1(1-\text{out h}_1) = \delta_{h_1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_1} = \delta_{h_1} * \lambda_1 = -0,001295$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_3} = \delta_{h_1} * \lambda_2 = -0,00259$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_2} = \cancel{f_{h_{22}} * w_1} = -0,001605$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_4} = \cancel{f_{h_{22}} * w_2} = -0,00321$$

$$f_{h_{22}} = \left((f_{h_1} * w_7) + (f_{h_2} * w_8) \right) (\text{outh}_2(1 - \text{outh}_2))$$

مُنْظَرٌ عَرْضٌ مُعَدِّلٌ مُعَدِّلٌ

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = f_{h_{11}} + f_{h_{44}} = -0,0580$$

$$w_1, \text{new} = 0,15 - (0,5 * -0,001295) = 0,15$$

$$w_4, \text{new} = 0,25 - (0,5 * -0,00259) = 0,25$$

$$w_7, \text{new} = 0,20 (0,5 * -0,001605) = 0,20$$

$$w_8, \text{new} = 0,30 (0,5 * -0,00321) = 0,30$$

$$b_1, \text{new} = 0,35 - (0,5 * 0,0580) = 0,37$$

... Cards NL b7, Wd-WB

سوال 2 شبکه سه لایه زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$f = w_1^{[3]} a_1^{[2]} + w_2^{[3]} a_2^{[2]}$$

مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$\delta_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial Z^{[2]}} \quad (\omega)$$

$$\delta_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial z_1^{[2]}} \quad (\text{الف})$$

$$\delta_4 = \frac{\partial f(x)}{\partial w_1^{[1]}} \quad (\omega)$$

$$\delta_3 = \frac{\partial f(x)}{\partial Z^{[1]}} \quad (\zeta)$$

$$(ا) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial z_i^{[2]}} = \frac{\partial f(x)}{\partial a_i^{[2]}} * \frac{\partial a_i^{[2]}}{\partial z_i^{[2]}}$$

$$a_i^{[2]} = \sigma(z_i^{[2]})$$

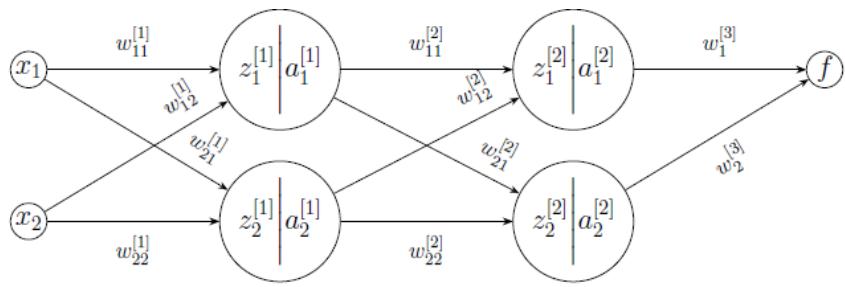
$$= w_1^{[2]} * \frac{\partial \sigma(z_1^{[2]})}{\partial (z_1^{[2]})}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \sigma(z_1^{[2]})}{\partial (z_1^{[2]})}$$

$$w_1^{[2]} * a_1^{[2]} (1-a_1^{[2]})$$

$$\rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial z_1^{[2]}} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f(x)}{\partial z_1^{[2]}} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial z_2^{[2]}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} w_1^{[2]} * a_1^{[2]} (1-a_1^{[2]}) \\ w_2^{[2]} * a_2^{[2]} (1-a_2^{[2]}) \end{array} \right)$$

$$(z) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial z_1^{[1]}} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f(x)}{\partial z_1^{[1]}} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial z_2^{[1]}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} w_1^{[1]} * a_1^{[1]} (1-a_1^{[1]}) * w_1^{[2]} + w_2^{[1]} * a_1^{[1]} (1-a_1^{[1]}) \\ w_2^{[1]} * a_2^{[1]} (1-a_2^{[1]}) * w_1^{[2]} + w_2^{[2]} * a_2^{[1]} (1-a_2^{[1]}) \end{array} \right)$$



$$Z^{[1]} = \begin{bmatrix} z_1^{[1]} \\ z_2^{[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^{[1]} & w_{12}^{[1]} \\ w_{21}^{[1]} & w_{22}^{[1]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A^{[1]} = \begin{bmatrix} a_1^{[1]} \\ a_2^{[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(z_1^{[1]}) \\ \sigma(z_2^{[1]}) \end{bmatrix}$$

$$Z^{[2]} = \begin{bmatrix} z_1^{[2]} \\ z_2^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^{[2]} & w_{12}^{[2]} \\ w_{21}^{[2]} & w_{22}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{[1]} \\ a_2^{[1]} \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} a_1^{[2]} \\ a_2^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(z_1^{[2]}) \\ \sigma(z_2^{[2]}) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f(m)}{\partial w_{11}^{[1]}} = \frac{\partial f(m)}{\partial z_1^{[1]}} \cdot \frac{\partial z_1^{[1]}}{\partial w_{11}^{[1]}}$

$\frac{\partial f(m)}{\partial a_1^{[1]}} \cdot \frac{\partial a_1^{[1]}}{\partial z_1^{[1]}} \rightarrow \frac{\partial g(z_1^{[1]})}{\partial z_1^{[1]}} = g'(z_1^{[1]})$

$\frac{\partial \sigma(z_1^{[1]})}{\partial z_1^{[1]}} \downarrow$

$\left(\frac{\partial f(m)}{\partial w_1^{[2]}} * w_{11}^{[2]} \right) + \left(\frac{\partial f(m)}{\partial z_2^{[1]}} w_{21}^{[2]} \right)$

$$>) \alpha_1 \cdot g'(\bar{x}_1^{[2]}) \cdot \left(\left(\frac{\delta f^{(m)}}{\bar{x}_1^{[2]}} * w_{11}^{[2]} \right) + \left(\frac{\delta f^{(m)}}{\bar{x}_2^{[2]}} * w_{21}^{[2]} \right) \right)$$

سوال (3) یک مسئله‌ی طبقه‌بندی دودویی (Binary Classification) را می‌توان با دو رویکرد زیر حل کرد:

◆ رویکرد ۱: رگرسیون لجستیک ساده (یک نورون)

خروجی شما به صورت زیر است:

$$\hat{y} = \sigma(W_l x + b_l)$$

اگر $\hat{y} \leq 0.5$

باشد، به عنوان ۰ طبقه‌بندی می‌شود، و در غیر این صورت به عنوان ۱.

◆ رویکرد ۲: رگرسیون Softmax ساده (دو نورون)

خروجی شما به صورت زیر است:

$$\hat{y} = softmax(W_s x + b_s) = [\hat{y}_1 \hat{y}_2]$$

اگر $\hat{y}_1 \geq \hat{y}_2$

باشد، به عنوان ۰ طبقه‌بندی می‌شود، و در غیر این صورت به عنوان ۱.

رویکرد ۲ دو برابر تعداد پارامترهای رویکرد ۱ را دارد.

سؤال: آیا رویکرد ۲ می‌تواند مدل‌های پیچیده‌تری نسبت به رویکرد ۱ یاد بگیرد؟

اگر بله، پارامترهای (W_s, b_s) تابعی را ارائه دهید که بتوان آن را با رویکرد ۲ مدل کرد ولی با رویکرد ۱ نه.

اگر نه، نشان دهید که (W_s, b_s) را می‌توان همیشه بر حسب (W_l, b_l) نوشت.

دقیق کنید که این رابطه $(\hat{y}_1 \geq \hat{y}_2)$ را باید بر مبنای تابع softmax و چهار وزن منتهی به آن بنویسید و سپس آنرا ساده کنید.

النوع الثاني من التعلم الآلي هو التعلم الآلي المترافق (Concurrent Learning)، حيث يتم تعلم المدخلات الجديدة والكلمات الجديدة في نفس الوقت.

$$ws = \begin{bmatrix} ws_1 \\ ws_r \end{bmatrix}$$

$$bs = \begin{bmatrix} bs_1 \\ bs_r \end{bmatrix}$$

$$z_1 = ws_1 M + bs_1$$

$$z_p = ws_p M + bs_p$$

$$\hat{y}_1 = \frac{e^{z_1}}{e^{z_1} + e^{z_p}}$$

$$\hat{y}_p = \frac{e^{z_p}}{e^{z_1} + e^{z_p}}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_1} + e^{z_p}} > \frac{e^{z_p}}{e^{z_1} + e^{z_p}}$$

$$\hat{y}_1 > \hat{y}_p$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{e^{z_1} + e^{z_p}} > \frac{z_p}{e^{z_1} + e^{z_p}}$$

$$\log \rightarrow \ln(e^{z_1}) > \ln(e^{z_p}) \Rightarrow z_1 > z_p$$

$$w_{S_1} \alpha + b_{S_1} \geq w_{S_2} \alpha + b_{S_2}$$

$$(w_{S_1} - w_{S_2}) \alpha + (b_{S_1} - b_{S_2}) \geq 0$$



$$\hat{y} = G(w_I \alpha + b_I)$$

$$G(w_I \alpha + b_I) \geq 0,5$$

$\hat{y} = G(z) \text{ where } z = w_I \alpha + b_I$

$G(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$

$w_I \alpha + b_I \geq 0$

$$w_I = (w_{S_1} - w_{S_2})$$

$$b_I = (b_{S_1} - b_{S_2})$$