Exercise 4.16: A function $f: L \to L$ where L is a lattice is *extensive* when $\forall x \in L: x \sqsubseteq f(x)$. Assume L is the powerset lattice $2^{\{0,1,2,3,4\}}$ Give examples of different functions $L \to L$ that are, respectively,

(a) extensive and monotone,

(b) extensive but not monotone,

(c) not extensive but monotone, and

(d) not extensive and not monotone.

解答：

(a) extensive and monotone：

定义 f_1：L → L，L 是格，满足条件：∀x∈L，$f_1(x) = x$。

证明：

(1) 取∀x∈L，$f_1(x) = x$,则由自反性 $x \sqsubseteq f_1(x)$;

(2) 取∀x , y∈L 且 $x \sqsubseteq y$，有 $f_1(x) = x \sqsubseteq y = f_1(y)$。

综上，f_1 满足 a 条件。

(b) extensive but not monotone：

定义 f_2：L → L，L 是格，满足条件：∀x∈L，$x \sqsubseteq f_2(x)$,其中包含：f({1}) = {0,1,2,3,4}且 f({0,1}) = {0,1,2,3}。

证明：发现其中{1} ⊑ {0,1}，但 f({0,1}) = {0,1,2,3} ⊑ f({1}) = {0,1,2,3,4}，故 f_2 不符合 monotone。

(c) not extensive but monotone：

定义 f_3：L → L，L 是格，满足条件：∀x , y∈L 且 $x \sqsubseteq y$：$f_3(x) \sqsubseteq f_3(y)$，card(x) = card($f_3$(x)) 且 card(y) = card($f_3$(y))。

证明：发现当 card(x) = card(f_3(x))且 card(y) = card(f_3(y))，$f_3(x)$与 $f_3(y)$无偏序关系，故 f_3 不符合 extensive。

(d) not extensive and not monotone：

定义 f_4：L → L，L 是格，∀x∈L,满足条件：

(1) 当 card(x)%2 = 0,f(x) = {};

(2) 当 card(x)%2 = 1,f(x) = {0,1,2,3,4}

证明：发现可能出现如下情况：f({0,1}) = {},f({0}) = {0,1,2,3,4},那么 f_4 extensive 和 monotone 都不符合。