

**Exercise 4.29:** Does the fixed-point theorem also hold without the assumption that  $f$  is monotone? If yes, give a proof; if no, give a counterexample.

**解答:**

如果函数非单调，则不动点定理不成立。

举例：定义函数  $f: L \rightarrow L$ ,  $L$  为完全格，满足以下条件：

(1) 当  $x = \top$ ,  $f(x) = \perp$ ;

(2)  $\forall x \in L: x \sqsubseteq f(x)$  且不存在  $y \in L$ ，使得  $x \sqsubseteq y \sqsubseteq f(x)$  ( $x \neq y \neq f(x)$ )。

解释： $f(x)$  永远为  $x$  的下一个循环最邻近偏序，意味着不可能存在  $k$  使得  $f^k(\perp) = f^{k+1}(\perp)$ 。