Exercise 4.2: Prove that if $x \sqcup y$ exists then $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcup y = y$, and conversely, if $x \sqcap y$ exists then $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x$.

证明：

1.证当 $x \sqcup y$ 存在时，有 $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcup y = y$ 成立。

(1) 证充分性：

令 $X = \{x, y\}, S = \{x, y\}$，那么 $X \subseteq S$，由上界定义：如果$\forall x \in X = \{x, y\}$且 $x \sqsubseteq y$，那么称 $y \in S$ 是 $X = \{x, y\}$的一个上界，又由最小上界定义得到$\bigsqcup X = \bigsqcup\{x, y\} \sqsubseteq y$ ①;

因为 $y \in \{x, y\}$，故 $y \sqsubseteq \bigsqcup\{x, y\}$ ②。由①和②,根据偏序反对称性得$\bigsqcup\{x, y\} = y$ ③;

已知当 $x \sqcup y$ 存在的情况下，$x \sqcup y = \bigsqcup\{x, y\}$ ④，由③和④得出 $x \sqcup y = y$，充分性证明成立。

(2) 证必要性：

已知当 $x \sqcup y$ 存在的情况下，$x \sqcup y = \bigsqcup\{x, y\}$，而且 $x \sqcup y = y$，得出 $y = \bigsqcup\{x, y\}$ ①。因为 $x \in \{x, y\}$，故 $x \sqsubseteq \bigsqcup\{x, y\}$ ②, 由①和②得出 $x \sqsubseteq y$，必要性证明成立。

综上，当 $x \sqcup y$ 存在时，有 $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcup y = y$ 成立。

2.证当 $x \sqcap y$ 存在时，有 $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x$ 成立。

(1) 证充分性：

令 $X = \{x, y\}, S = \{x, y\}$，那么 $X \subseteq S$，由下界定义：如果$\forall y \in X = \{x, y\}$且 $x \sqsubseteq y$，那么称 $x \in S$ 是 $X = \{x, y\}$的一个下界，又由最大下界定义得到 $x \sqsubseteq \bigsqcap X = \bigsqcap\{x, y\}$ ①;

因为 $x \in \{x, y\}$，故$\bigsqcap\{x, y\} \sqsubseteq x$ ②。由①和②,根据偏序反对称性得 $x = \bigsqcap\{x, y\}$ ③;

已知当 $x \sqcap y$ 存在的情况下，$x \sqcap y = \bigsqcap\{x, y\}$ ④，由③和④得出 $x \sqcap y = x$，充分性证明成立。

(2) 证必要性：

已知当 $x \sqcap y$ 存在的情况下，$x \sqcap y = \bigsqcap\{x, y\}$，而且 $x \sqcap y = x$，得出 $x = \bigsqcap\{x, y\}$ ①。因为 $y \in \{x, y\}$，故$\bigsqcap\{x, y\} \sqsubseteq y$ ②, 由①和②得出 $x \sqsubseteq y$，必要性证明成立。

综上，当 $x \sqcap y$ 存在时，有 $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x$ 成立。