

Exercise 4.6: Prove that $\bigsqcup S$ and $\bigsqcap S$ are the unique largest element and the unique smallest element, respectively, in S . In other words, we have $\top = \bigsqcup S$ and $\perp = \bigsqcap S$.

证明:

假定 l_1 和 l_2 均为偏序集 S 的 lub, 即为 $\bigsqcup S$ 。根据 lub 的定义有: $(l_1 = \bigsqcup S) \sqsubseteq l_2$ 且 $(l_2 = \bigsqcup S) \sqsubseteq l_1$, 由偏序的反对称性得: $l_1 = l_2 = \bigsqcup S$;

同理, 假定 g_1 和 g_2 均为偏序集 S 的 glb, 即为 $\bigsqcap S$ 。根据 glb 的定义有: $g_1 \sqsubseteq (g_2 = \bigsqcap S)$ 且 $g_2 \sqsubseteq (g_1 = \bigsqcap S)$, 由偏序的反对称性得: $g_1 = g_2 = \bigsqcap S$ 。

综上得出 $\bigsqcup S$ 和 $\bigsqcap S$ 唯一, 也即 $\top = \bigsqcup S$ 且 $\perp = \bigsqcap S$ 。