

### Exercice 5 :

#### Laiterie (C. Rapine)

Une coopérative laitière produit 3 sortes de fromages : Beaufort, Abondance et Reblochon. Le lait, collecté dans les fermes de la région, diffère selon la race des vaches (abondances (a), monbéliardes (m) et tarines (t)). Le tableau suivant donne la quantité de chaque type de lait nécessaire à la fabrication d'un kilo de fromage ainsi que le temps de main d'œuvre. Ces proportions correspondent au respect du cahier des charges AOC.

	lait Abondance	lait Monbéliard	lait Tarine	main d'œuvre (minutes)	prix vente au kilo (€)
Abondance	5 l	3 l	2 l	15	20
Beaufort	5 l		5 l	30	25
Reblochon	2 l		4 l	10	15

Cette semaine la traite a fourni 5000 litres de lait *a*, 1000 litre de lait *m* et 4000 litres de lait *t*. Le nombre d'heures de travail disponible sur la semaine est de 250. La coopérative se demande quels fromages produire afin de maximiser son profit. Le lait non utilisé est revendu à 0,25 € le litre.

Question 1 – Formulez ce problème comme un programme linéaire. Préciser clairement quelles sont les variables de votre modélisation.

- Variables décision :  $x_A$ ,  $x_B$  et  $x_R$  représentant les kilo de fromages produits. Se sont des variables continues et positives.

On peut ajouter (pour être plus lisible) une variable de décision  $v$  sur la quantité de lait revendu.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 20x_A + 25x_B + 10x_R + 0,25v \\
 \text{s.t.} \quad & 5x_A + 5x_B + 2x_R \leq 5000 \quad \text{ressource lait a} \\
 & 3x_A \leq 1000 \quad \text{ressource lait m} \\
 & 2x_A + 5x_B + 4x_R \leq 4000 \quad \text{ressource lait t} \\
 & 15x_A + 30x_B + 10x_R \leq 250 \times 60 \quad \text{ressource main d'oeuvre} \\
 & v = 10000 - 10x_A - 10x_B - 6x_R \\
 & x_A, x_B, x_C, v \geq 0
 \end{aligned}$$

En fait le cahier des charges AOC est plus souple. Il stipule pour chaque fromage les types de lait autorisés et les proportions minimum à respecter. Le tableau ci-dessous donne les teneurs minimum (en %) et les quantités de lait (en litres) nécessaires par kilo de fromage.

	lait Abondance (proportion)	lait Monbéliard (proportion)	lait Tarine (proportion)	quantité lait (litres)
Abondance	$\geq 50\%$	$\geq 20\%$	$\geq 20\%$	10
Beaufort	$\geq 30\%$	$= 0\%$	$\geq 50\%$	10
Reblochon		$= 0\%$	$\geq 50\%$	6

Question 2 – Formulez le programme linéaire maximisant le profit de la coopérative dans le respect du cahier des charge AOC. Préciser les variables choisies.

- Variables décision : on doit maintenant décider la quantité utilisée de chaque lait pour chaque fromage. On a donc les variables  $q_{ij}$  pour  $i \in \{a, m, t\}$  et  $j \in \{A, B, R\}$ . On peut garder les variables précédentes pour être plus lisible.

$$\begin{array}{llll}
\max & 20x_A + 25x_B + 10x_R + 0,25v & & \\
s.t. & q_{aA} \geq 0.5(q_{aA} + q_{mA} + q_{tA}) & \text{proportion lait a dans Abondance} & \\
& q_{mA} \geq 0.2(q_{aA} + q_{mA} + q_{tA}) & \text{proportion lait m dans Abondance} & \\
& q_{tA} \geq 0.2(q_{aA} + q_{mA} + q_{tA}) & \text{proportion lait t dans Abondance} & \\
& \dots & & \\
& q_{aA} + q_{aB} + q_{aR} \leq 5000 & \text{ressource lait a} & \\
& \dots & & \\
& v = 10000 - (q_{aA} + q_{aB} + q_{aR} + q_{mA} + \dots) & \text{lait restant} & \\
& x_A = (q_{aA} + q_{mA} + q_{tA})/10 & \text{rendement Abondance} & \\
& \dots & & \\
15x_A + 30x_B + 10x_R \leq 250 \times 60 & \text{ressource main d'oeuvre} & & \\
& \text{toutes les variables} \geq 0 & & 
\end{array}$$