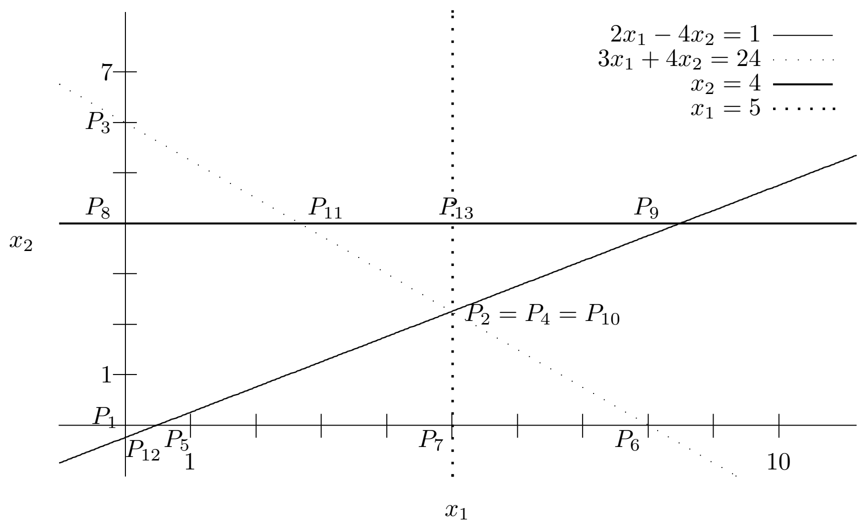
Exercice 5 :

Bases (J.-F. Hêche)

On considère le programme linéaire canonique

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 2x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{s.c.} & 2x_1 & - & 4x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Question 1 – Représenter son domaine admissible.



Question 2 – Pour chacune des bases qui suivent, identifier dans votre dessin le point correspondant à sa solution de base.

$B1 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $B2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ $B3 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$ $B4 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$

Remarque. Les variables x_3, x_4, x_5 et x_6 correspondent aux variables d'écart introduites lors de la mise sous forme standard.

> Cf dessin

Question 3 – En vous aidant de votre dessin, donner le nombre de bases du P.L., son nombre de bases admissibles ainsi que le nombre de points extrêmes du domaine admissible.

> $B_1 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}, B_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, B_3 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}, B_4 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$,
> $B_5 = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}, B_6 = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}, B_7 = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}, B_8 = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$,
> $B_9 = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}, B_{10} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, B_{11} = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}, B_{12} = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$,
> $B_{13} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
> On a 13 bases (sur 15 maximales théoriques), 7 admissibles, 5 points extrêmes.

Question 4 – Donner toutes les bases optimales du programme linéaire ainsi que toutes les solutions optimales (et leur valeur).

> L'optimum est atteint en $P_{11} = (\frac{8}{3}, 4, \frac{35}{3}, 0, 0, \frac{7}{3})$, valeur $\frac{76}{3}$.