Modélisation Géométrique

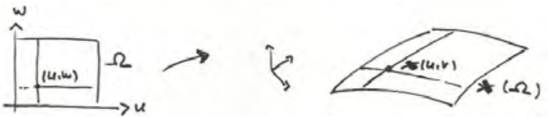
Notions de Géométrie Différentielle II

Stefanie Hahmann

Ensimag - Laboratoire LJK - Inria/Imagine

— version 2014 —

Sommaire



Surface paramétrique

Un morceau de surface paramétrique régulière, dite **surface**, de classe C^r $(r > 1)$ est une application de classe C^r

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{X} : \Omega \;\; \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,w) \mapsto \mathbf{X}(u,w) = \begin{bmatrix} x(u,w) \\ y(u,w) \\ z(u,w) \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

qui est de rang 2 dans Ω.
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine de paramètre.

$$\left. \begin{array}{l} u \mapsto \mathbf{X}(u,w), w = const. \\ w \mapsto \mathbf{X}(u,w), u = const. \end{array} \right\}$$ lignes de paramètre

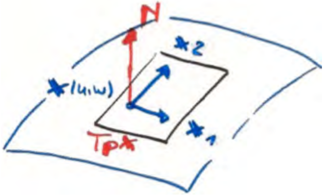
$\mathbf{X}$ de rang 2 $\Rightarrow [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w] \neq 0$ $\quad (\mathbf{X}_u := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}, \mathbf{X}_w := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial w}$ dérivées partielles.)

Plan tangent en $p = (u, w)$

$$T_p\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(u,w) + \lambda\mathbf{X}_u(u,w) + \nu\mathbf{X}_w(u,w) \mid (\lambda,\nu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Normale de la surface

$$\mathbf{N}(u,w) := \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_w}{\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_w\|}$$



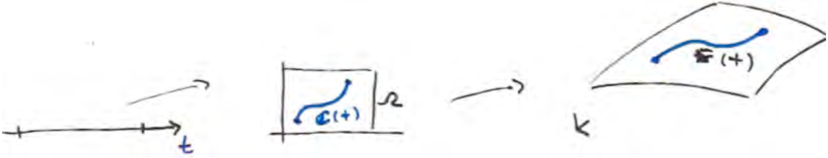
$\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w, \mathbf{N}\}$ repère orienté positivement $\Rightarrow$ système de coordonnées local.

- Changement de paramètre $\Phi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$
- Relation d'équivalence $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \circ \Phi^{-1}$
- Invariants géométriques: plan tangent, image de $\mathbf{X}(\Omega)$, direction de $\mathbf{N}$.

Courbe sur la surface

Soit $C : I \rightarrow \Omega,\ c(t) \mapsto \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ une courbe paramétrique de classe C^1:

$$\left(\begin{array}{c} \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \circ C : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto C(t) \mapsto \overline{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(u(t), w(t)) \end{array} \right)$$



Première forme fondamentale I_p

forme matricielle dans la base canonique $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w\}$ de $T_p\mathbf{X}$ en $p = (u, w)$

$$G = (g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{bmatrix} < \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u > & < \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w > \\ < \mathbf{X}_w, \mathbf{X}_u > & < \mathbf{X}_w, \mathbf{X}_w > \end{bmatrix}$$

Forme bilinéaire symétrique I_p

$$\left(\begin{array}{r} I_p : T_p\mathbf{X} \times T_p\mathbf{X} \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto < A, B > \end{array} \right)$$

Elle est issue de la restriction du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ au pan tangent à la surface $\mathbf{X}(u, w)$.

La première forme fondamentale I_p et ainsi G, est un invariant géométrique. Les g_{ij} ne le sont pas.

Elles est positive définie en tous les points réguliers de la surface.

Deuxième forme fondamentale II_p

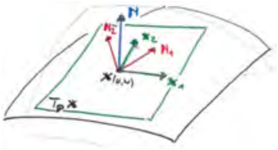
forme matricielle

$$H = (h_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{bmatrix} < \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{N} > & < \mathbf{X}_{uw}, \mathbf{N} > \\ < \mathbf{X}_{wu}, \mathbf{N} > & < \mathbf{X}_{ww}, \mathbf{N} > \end{bmatrix}$$

Forme bilinéaire symétrique II_p

$$\begin{pmatrix} II_p : T_p\mathbf{X} \times T_p\mathbf{X} \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto < L_p(A), B > \end{pmatrix}$$

avec $L_p(A) = -d\mathbf{N} \circ d\mathbf{X}^{-1}(A)$ l'application de Weingarten ($T_p\mathbf{X} \to T_p\mathbf{X}$).



$\mathbf{L} = \mathbf{HG}^{-1}$ est symétrique et réelle.
Elle admet valeur propres réelles κ_{min} et κ_{max} avec des vecteurs propres orthogonales λ_{min} et λ_{max}.

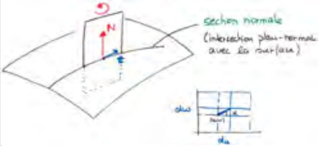
Courbure normale

La courbure normales de **X** en un point (u, w)

$$\kappa_n(\lambda) = \frac{h_{11} + 2h_{12}\lambda + h_{22}\lambda^2}{g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2}, \quad \lambda = dw/du = \tan\alpha$$

est une fonction quadratique rationelle. Les valeurs extrêmes κ_{min} et κ_{max} correspondent aux racines λ_1, λ_2 de

$$det \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$



Courbures principales

κ_{min} et κ_{max} s'appellent les courbures principales de **X** en (u, w).
$\lambda_1 = \lambda_{min}, \lambda_2 = \lambda_{max}$ sont les directions principales.

Comme vecteurs propres de l'application de Weingarten L les directions principales sont orthogonales.

Lignes de courbures

Réseau de lignes orthogonales dont le tangentes sont égales aux directions principales.

Courbure de Gauß

$K = \kappa_{min} \cdot \kappa_{max}$

$$K = \frac{\det H}{\det G} = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

Courbure moyenne

$M = \frac{1}{2}(\kappa_{min} + \kappa_{max})$

$$M = \frac{h_{11} g_{22} - 2h_{12} g_{12} + h_{22} g_{11}}{2 \det G}$$

Inversement:

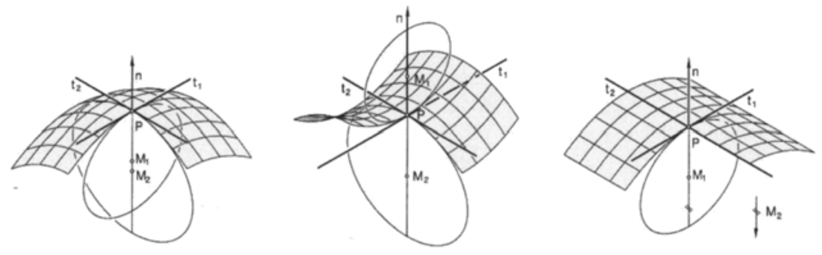
$$\kappa_{min,max} = M \pm \sqrt{M^2 - K}$$

Remarque: Les formes fondamentales I_p, II_p et les courbure principales sont des invariants géométriques.

Remarque: sur une sphère: $\kappa_{min} = \kappa_{max} = const$ en tout point.

Caractérisation des points de la surface

en fonction du signe de la courbure de Gauß (resp. des courbures principales)



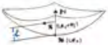
$K > 0$ $K < 0$ $K = 0$

point elliptique point hyperbolique point parabolique

Représentation locale de la surface

$\mathbf{x} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ surface paramétrique, $\mathbf{u}_0 = (u_0, w_0) \in \Omega$

$d(\eta^1, \eta^2)$ distance du point $\mathbf{x}(u_0+\eta^1, w_0+\eta^2)$ du plan tangent en $\mathbf{u}_0$



Signification de 2ème FF!

$$\mathbf{x}(u_0+\eta^1, w_0+\eta^2) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{x}_i(\mathbf{u}_0)\eta^i + \tfrac{1}{2}\mathbf{x}_{ij}(\mathbf{u}_0)\eta^i\eta^j + O(\|\eta\|^3)$$

$$d(\eta^1, \eta^2) = \langle \mathbf{x}(\mathbf{u}_0+\eta) - \mathbf{x}(\mathbf{u}_0), \mathbf{N} \rangle = \tfrac{1}{2} h_{ij}\eta^i\eta^j + O(\|\eta\|^3)$$

On définit le paraboloïd osculateur

$$P(\eta^1, \eta^2) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{x}_i(\mathbf{u}_0)\eta^i + \tfrac{1}{2} h_{ij}(\mathbf{u}_0)\eta^i\eta^j\, \mathbf{N}(\mathbf{u}_0)$$

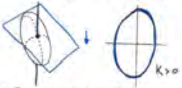
qui se comporte qualitativement à l'ordre 2 comme la surface en $\mathbf{u}_0$.

On distingue 4 cas pour caractériser $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$:

(1) POINT ELLIPTIQUE

$h_{ij}(\mathbf{u}_0)\eta^i\eta^j$ défini positive $\Leftrightarrow$ $\boxed{K(\mathbf{u}_0) > 0}$

P est un paraboloïd elliptique



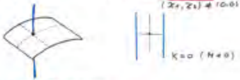
(2) POINT HYPERBOLIQUE

$h_{ij}(\mathbf{u}_0)\eta^i\eta^j$ est défini négative $\Leftrightarrow$ $\boxed{K(\mathbf{u}_0) < 0}$

(3) POINT PARABOLIQUE

$h_{ij}(\mathbf{u}_0)\eta^i\eta^j$ non défini $\Leftrightarrow$ $\boxed{K(\mathbf{u}_0) = 0}$

$(\kappa_1, \kappa_2) \neq (0,0)$



(4) POINT PLANAIRE

$h_{ij}(\mathbf{u}_0) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\kappa_1 = \kappa_2 = 0}$ en $\mathbf{u}_0$

UMBILIC

point singulier, pas de directions principales

$\Rightarrow$ Caractérisation locale de la surface par la courbure de Gauss K.

Sommaire

Surface réglée

$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est appleé surface réglée, si il existe une paramétrisation t.q.

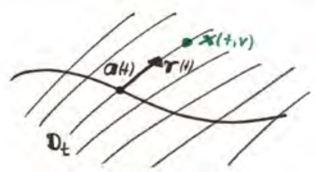
$$\mathbf{X}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v \cdot \mathbf{r}(t), \qquad t \in I, v \in \mathbb{R}$$

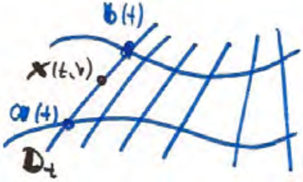
point $\mathbf{a}(t)$, vecteur $\mathbf{r}(t) \neq 0$, $\|\mathbf{r}\| = 1$.

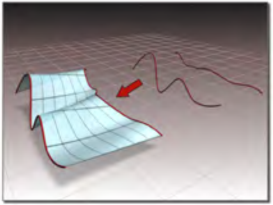
La droite D_t engendré par $\mathbf{r}(t)$ s'appelle génératrice.

La courbe $\mathbf{a}(t)$ s'appelle directrice.

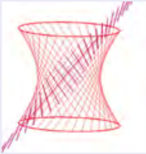
autre définition: $\mathbf{r}(t) := \mathbf{b}(t) - \mathbf{a}(t)$, où 2 $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$ sont 2 courbes gauches.







Exemples de surface réglées



- hyperboloïde de révolution $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$\mathbf{x}(t, v) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

- paraboloïde hyperbolique $z = kxy,\ k \neq 0$

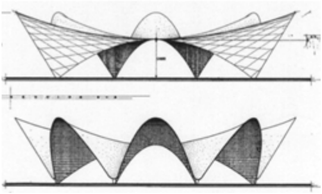
$$\mathbf{x}(t, v) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -0 \\ 1/k \\ t \end{pmatrix}$$

- hélicoïde réglée

Théorème

Pour une surface réglée la courbure de Gauß est $K \leq 0$ en tout point régulier.

t

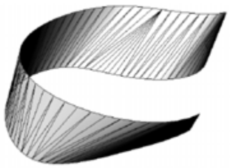


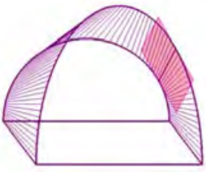
Restaurant Los Manantiales à Mexico

Sommaire

Surface développable

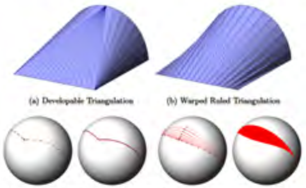
Une surface C^1 est appelée développable si chaque point a un voisinage qui peut être développé de fao̧n isométrique au plan, tel que la longueur d'arc est préservée.





propriétés

- Une surface développable peut être déroulée (développée) sur un plan sans étirements ni compressions (préservation des longueurs).
- Une surface est dévelopable ssi sa courbure de Gauß $K = 0$ en tout point régulier.
- Le vecteur normal **n** est constant lelong de la génératrice D_t.

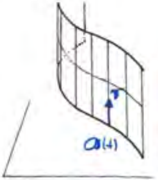


(a) Developable Triangulation (b) Warped Ruled Triangulation
(c) Gauss map of 2.5(a) and of limit surface (d) Gauss map of 2.5(b) and of limit surface

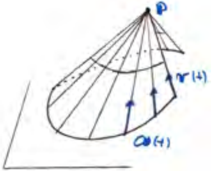
propriétés (suite)

- La Gauß map d'une surface développable est une courbe.
- Les surfaces suivantes sont développables:
  $\mathbf{X}(t,v) = \mathbf{a}(t) + v \cdot \mathbf{r}$ surface cylindrique,
  $\mathbf{X}(t,v) = v \cdot \mathbf{r}(t)$ surface conique
  $\mathbf{X}(u,v) = \mathbf{a}(t) + v \cdot \mathbf{a}'(t)$ développée tangentielle
  le plan.

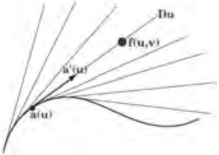
Cylindre généralisée
$\mathbf{a}(t) \in$ plan,
$\mathbf{r}(t)$ tous parallel



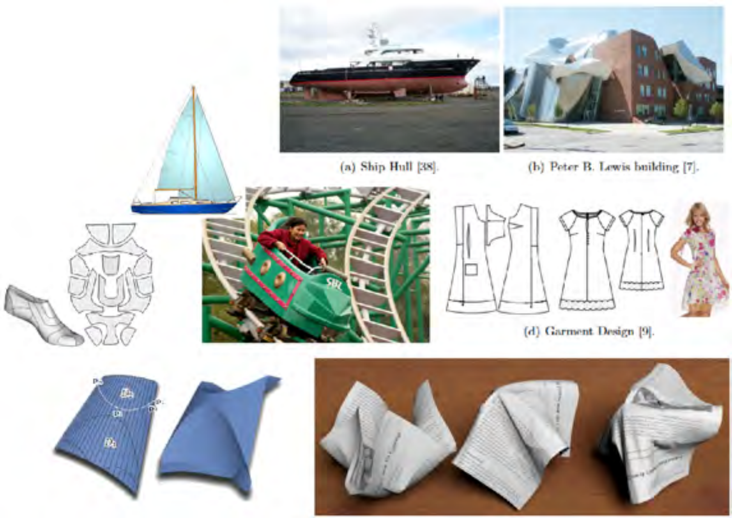
Cône généralisée
D_t passent toutes par un même point $\mathbf{p}$



Développée tangentielle



Applications



Applications (Batiments réalisés à partir de surf. dév.)

L'opéra de Ténérife par l'architecte Santiago Calatrava

Le musée Guggenheim de Bilbao par l'architecte Frank Gehry.

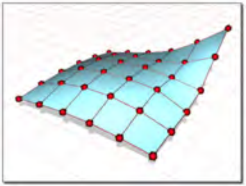
Applications (suite)

Figure 1: *The Morphosense ribbon alone and laying on a physical surface.*

Figure 2: *Plateforme de contrôle*

Sommaire

Surface par interpolation



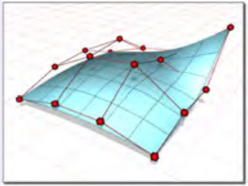
Lagrange interpolation

$$\mathbf{X}(u,w) = \sum\sum \mathbf{P}_{ij} L_i(u) L_j(w)$$

Hermite interpolation

$$\mathbf{X}(u,w) = \sum \mathbf{P}_{ij} H_i H_j + \sum \mathbf{P}'_{ij} \overline{H}_i \overline{H}_j$$

Surface spline



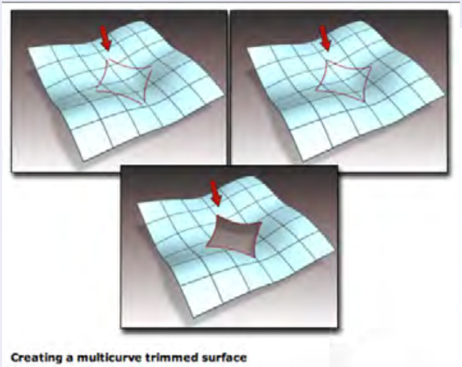
Bézier surface

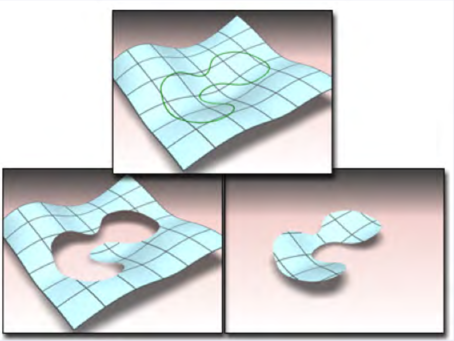
$$\mathbf{X}(u,w) = \sum\sum \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

B-spline surface

$$\mathbf{X}(u,w) = \sum\sum \mathbf{d}_{ij} N_{i,n}(u) N_{j,m}(v)$$

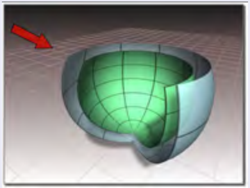
Surface trimmée





[images 3DSmax]

Surface offset

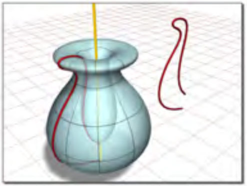


$$\mathbf{S}(u, w) = \mathbf{X}(u, w) + k \cdot \mathbf{N}(u, w), \quad k \in \mathbb{R}$$

Attention aux auto-intersections quand $k > 1/\kappa_{max}$ (rayon courbure minimal)

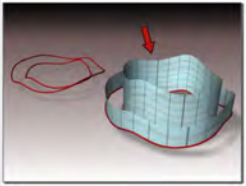
Surface de révolution

Surface paramétrique de $\mathbb{R}^3$, balayée par rotation d'une courbe plane, appelée méridienne.



Surface d'extrusion

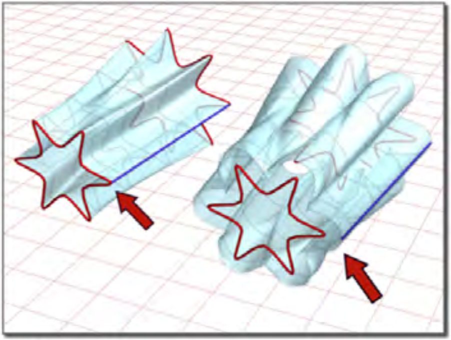
Extrusion d'un profil le long une direction (droite).



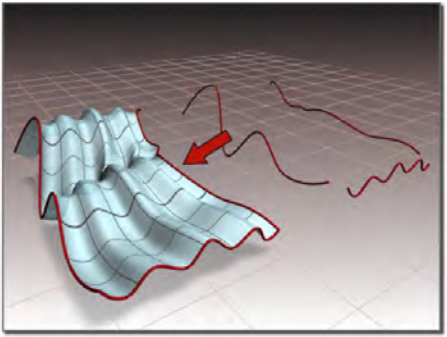
[images 3DSmax]

Surface par balayage (sweep)

Balayage d'un profil lelong d'une trajectoire courbe.



1-rail sweep surface
Changing the position of the rail can change the shape of the surface.

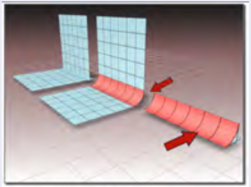


Sweep surface created with two rails

[images 3DSmax]

Surface fillet / congé

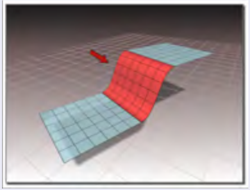
Congé de raccord de continuité C^1 ou C^2 entre 2 surfaces (pas nécessairement planes).



Fillet surface created from two parent surfaces

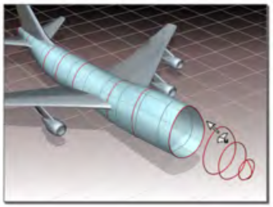
Surface blending

raccord de continuité C^1 ou C^2



Surface loft

Interpolation de courbes contour.



Freeform surface modeling software

source: wikipedia

CATIA
Solidworks
ICEM Surf
ProEngineer ISDX
NX (Unigraphics -> Siemens PLM)
ProEngineer
Autodesk Inventor
Geomagic
Alias StudioTools (Autodesk)
Blender
Rhinoceros 3D
VSR Virtual Shape (Autodesk)
SolidThinking Evolve, Inspire

SpaceClaim Engineer, Cobalt (Ashlar-Vellum), form-Z, PowerSHAPE, GenesisIOD, OmniCAD (Siemens), Thinkdesign, MicroStation (Bentley Systems Inc), Shark FX (Punch!), Moi3D Moment of Inspiration 3D modeling for designers and artists.