О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма

А.КИРИЛЛОВ

Пролог

ЗАДАЧИ на геометрические построения - одни из самых популярных в школьной математике Почти в каждом математическом кружке разбираются такие задачи. Это, конечно, не случайно. История геометрических построений насчитывает несколько тысяч лет, и уже древние греки достигли здесь большого искусства. В качестве примера можно привести задачу Аполлония: *построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.*

Многим, вероятно, известны три знаменитые задачи древности, оказавшиеся неразрешимыми: *о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба.*

Но, пожалуй, самой красивой является задача о построении правильных многоугольников. Собственно говоря, это не одна задача, а целая серия задач: *для каждого натурального числа $n \geq 3$ требуется с помощью циркуля и линейки построить правильный n-угольник.*

Для некоторых значений n эта задача совсем простая (например, для n = = 3, 4, 6, 8, 12); для других – посложнее (n = 5, 10, 15; ниже мы расскажем, как построить десятиугольник и пятиугольник); для третьих - очень сложная (n = 17 или 257). Наконец, существуют такие значения n, для которых эта задача вообще неразрешима (например, n = 7, 9, 11).

Выпишем подряд несколько натуральных чисел, начиная с n = 3, и Отметим красным цветом те числа n, для которых можно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой:
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

Есть ли какая-нибудь закономерность распределении «красных» и «черных» чисел? Оказывается, есть; но найти её довольно трудно. Эта закономерность имеет арифметическую природу, чтобы ее описать, нам придется временно оставить геометрию и заняться элементами теории чисел - высшего раздела арифметики.

Функция Эйлера

Важной арифметической характеристикой числа n является количество чисел, меньших n и взаимно простых с n. Одним из первых это заметил знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер. Он предложил для этого количества обозначение $\varphi(n)$, и с тех пор функция $n \to \varphi(n)$ известна под именем *«функции Эйлера»*. Например, для n = 10 имеется четыре числа, меньших десяти и взаимно простых с ним: 1, 3, 7 и 9; так что $\varphi(10) = 4$.

Функция φ обладает многими интересными свойствами. Одно из них было открыто ещё самим Эйлером: для любых двух взаимно простых чисел m и n справедливо равенство:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n). \qquad (1)$$

Кроме того, легко проверить, что *если p - простое число, то* $\varphi(p) = p - 1, \varphi(p^2) = p^2 - p$, *и вообще*

$$\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1). \qquad (2)$$

Эти свойства позволяют легко вычислять функцию Эйлера для небольших значений n. Например,

$$\varphi(10) = \varphi(2)\cdot\varphi(5) = 1\cdot 4 = 4,$$

$$\varphi(100) = \varphi(4)\cdot\varphi(25) = 2\cdot 20 = 40.$$

Мы приводим здесь значения функции Эйлера для n от 1 до 42 (см. таблицы 1, *а* и *б*).

Сравните эти таблицы с приведенным выше рядом «красных» и «черных» чисел. Не правда ли, связь между «цветом» чисел n и значением $\varphi(n)$ уже легко угадывается? Мы видим, что если правильный n-уголь- ник можно построить с помощью циркуля и линейки, то соответствую- щее значение функции ф(n) является степенью двойки. Оказывается, это условие является необходимым и достаточным для возможности пос- троения правильного n-угольника. В настоящей статье мы не сможем строго доказать это. Однако мы при- ведем достаточно простые и убеди- тельные соображения в пользу этого факта. Аналогичные соображения применимы и ко многим другим зада- чам на построение - например, к задаче о трисекции угла.

Что значит «построить»?

Вопрос о точной постановке задач на построение циркулем и линейкой уже обсуждался на страницах «Кванта». Мы не будем здесь еще раз предостерегать читателей от неправильного употребления математических инструментов. Скажем лишь, что окончательное решение задачи на построение должно быть (хотя бы в принципе) записываемо в виде цепочки элементарных операций, напоминающей систему команд, отдаваемых электрон- ной вычислительной машине.

Таблица 1, а

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Таблица 1, б

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\varphi(n)$	12	10	22	8	20	12	24	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16	40	12

Эта статья впервые была опубликована в "Кванте"№ 7 за 1977 год.

Натример, задача о построении середины отрезка AB решается следующей программой» (рис.1):

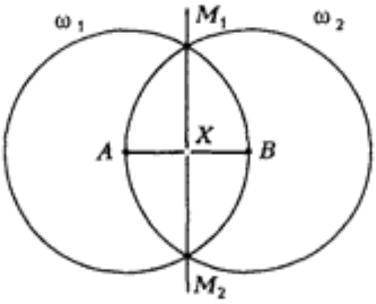

Рис. 1

1. *Циркулем построить окружность ω_1 с центром A и радиусом AB.*
2. *Циркулем построить окружность ω_2 с центром B и радиусом BA.*
3. *Отметить точки пересечения M_1, и M_2 окружностей ω_1 и ω_2.*
4. *По линейке провести прямую M_1M_2.*
5. *Отметить точку X пересечения прямых M_1M_2, и AB.*

Еще один пример: построение биссектрисы заданного угла лов (рис.2). Соответствующая система команд имеет вид:

имеет с прямыми OA и OB по две точки пересечения, и неясно, какие из этих точек нужно обозначить через A, и B,. Вы можете возразить, что речь идет о лучах OA и OB, которые пересекаются с окружностью в единственной точке, но понятие «луч» выходит за рамки понимания нашей «математической машины» , Ей доступно только понятие «прямая».

Посмотрим, что получится, если понимать выражение «точка пересечения» как «какая-нибудь точка пересечения». Тогда нашей программе будет соответствовать рисунок 3: вмес-

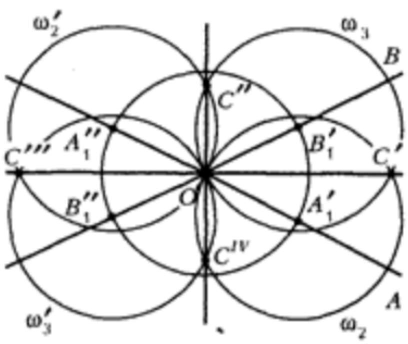

Рис. 3

выполнение этой операции приводит к двум реализациям (как в разобранном выше примере). Вообще, если в программе есть k двузначных операций, то эту программу можно реализовать 2^k способами.

Мы видели, что некоторые неопределенности могут в конце концов «сокращаться» и не влиять на окончательный ответ. Оказывается (это можно строго доказать, но не в этом цель настоящей статьи), такие сокращения всегда происходят согласованным образом, так что неопределенность в окончательном ответе всегда имеет вид $2^l (l \leq k)$. Этот факт имеет не геометрическую, а алгебраическую природу (соответствующая часть алгебры называется теорией Галуа).

Вернемся к задаче о построении биссектрисы. Наша программа, кро- ме биссектрисы угла AOB, дает такжеибиссектрису внешнего угла AOB, (см. рис.3). Это решение не надо рассматривать как «постороннее». С точки зрения циркуля и линейки, «понимающих» угол только как пару пересекающихся прямых, этот угол ничем не хуже исходного угла AOB. Попробовав определить понятие биссектрисы в терминах, «доступных» циркулю и линейке, мы увидим, что