

Лабораторная работа №1

«Кратные интегралы»

Введение

Численное интегрирование функций многих переменных, в отличие от одномерного случая, несет большое число трудностей. Например:

- Произвольная форма области (против интервала);
- Потребность в большем количестве точек для более точного приближения;
- Сложность оценки погрешностей.

Для общего случая задачи, к сожалению, не решаются. Но если заранее известны некоторые условия, существуют способы неплохо приблизить интересующее нас значение. Первым и довольно очевидным способом приближением интеграла по допустимому множеству G может стать вычисление интегральных сумм для некоторого разбиения бруса $I : G \subset I$.

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mathbb{1}_G(\xi_i) \mu(I_i)$$

Остается вопрос оценки точности такого приближения. Предположим, что наша функция достаточно «хорошая» и удовлетворяет условиям теоремы о конечных приращениях. Тогда несложно вывести оценку точности для тех фрагментов разбиения, которые целиком содержатся внутри области G . Что же остается на границе, когда с точки зрения интеграла по брусу функция претерпевает скачок?

Задание

Для предложенной согласно варианту функции необходимо:

1. Обосновать возможность интегрирования функции по области G ;
2. Реализовать программу, которая будет давать оценку значения интеграла по области G ;
3. Математически обоснованно оценить ошибку;
4. На примере некоторой области G , попадающей под условия, провести исследование зависимости ошибки от мелкости разбиения.

Область G представляет из себя произвольный многоугольник – пользовательский ввод (формат выбираете вы сами). Считается, что вам известно максимальное значение функции, частных производных и прочая информация, которую можно получить из функции и её поведения в брусе, которым ограничена G . Оценка точности может быть грубой, однако ожидается, что ошибка будет идти к 0 при стремлении к 0 мелкости разбиения.

Варианты заданий

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $[-18, 17] \times [-64, 71]$
2. $f(x, y) = \frac{1}{9}ye^x$, $[4, 15] \times [0, 12]$
3. $f(x, y) = x \sin(xy)$, $[-12, 8] \times [-12, 32]$
4. $f(x, y) = y \cos(xy)$, $[-13, -5] \times [-40, 56]$
5. $f(x, y) = y$, $[0, 9] \times [-15, 44]$
6. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$, $[-17, 13] \times [10, 15]$
7. $f(x, y) = x^2$, $[-100, 100] \times [-100, 100]$
8. $f(x, y) = y^2$, $[-1, 19] \times [-4, 24]$
9. $f(x, y) = x^3 + y^3 + x$, $[-5, 21] \times [-13, 94]$
10. $f(x, y) = \arctan(x + y)$, $[-9, 31] \times [-8, 81]$
11. $f(x, y) = \sinh \frac{2x+y}{100}$, $[4, 90] \times [-51, 89]$
12. $f(x, y) = \cosh \frac{x-y}{30}$, $[-22, 22] \times [-15, 6]$
13. $f(x, y) = y \ln x$, $[31, 42] \times [-5, 9]$
14. $f(x, y) = x \ln y$, $[1, 2] \times [71, 84]$