Лабораторная работа №2
«Кратные интегралы»

Введение

Для избежания трудностей с вычислениями «всех» точек области при численном интегрировании, можно обратиться не только к детерменированным подходам, но и к статистическим методам. Одним из таких методов является наивный метод Монте-Карло:

1. Возьмём интеграл по области $I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$;
2. Вычислим площадь области $S = \iint\limits_G 1dxdy$;
3. Соберем выборку $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ из N точек, равномерно распределенных в G;
4. Произведем оценку интеграла $\boxed{\mathrm{I}_N = \frac{S}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)}$. В силу закона больших чисел, можно утверждать, что $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty} I_N = I}$;
5. Оценить ошибку напрямую тут нельзя, но можно говорить об оценке стандартным отклонением:
$$|I - I_N| \approx \sqrt{\mathbb{D}(I_N)} = \sqrt{\frac{S^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{D}(f)} = \boxed{\frac{S}{\sqrt{N}}\sqrt{\mathbb{D}(f)}}$$
Дисперсия f нам заранее неизвестна, хоть и может быть оценена как $\frac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(f(x_i, y_i) - \sum\limits_{j=1}^{N}\frac{f(x_j, y_j)}{N}\right)$, поэтому извлечем из формулы оценки важный вывод - ошибка должа сходиться со скоростью корня из N.

Задание

Для предложенной согласно варианту функции из лабораторной работы №1:

1. Реализовать интегрирование методом Монте-Карло;
2. Для выбранной вами области с учетом ограничений вручную проинтегрировать и получить результат;
3. Построить график зависимости ошибки от N.

Совет: вместо области G всё ещё верно будет брать брус, её содержащий, добавив в интеграл индикаторную фукнцию. Это скажется лишь на скорости сходимости (т.к. изменит дисперсию f).