Рекуренты-3

Санду Р.А.

15 декабря 2017 г.

$$T\left(n\right) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n\log_2 n \tag{1}$$

Легко заметить, что ответ — $\Theta\left(n\log_2^2 n\right)$

Докажем это по индукции. Верхняя оценка:

$$T\left(n\right) \leq Cn\log_2^2 n \tag{2}$$

Переход:

$$T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \leq C\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log_2^2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \tag{3}$$

Целую часть оценим сверху самим числом:

$$2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \leq Cn\left(\log_2 n - 1\right)^2 \tag{4}$$

$$2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \leq Cn\log_2^2 n - 2Cn\log_2 n + nC \tag{5}$$

Так как для достаточно больших n имеем $n - n\log_2 n < 0$, ослабим оценку:

$$2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \leq Cn\log_2^2 n - Cn\log_2 n \tag{6}$$

$$2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + Cn\log_2 n \leq Cn\log_2^2 n \tag{7}$$

Но тогда для достаточно больших C получаем

$$T\left(n\right) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n\log_2 n \leq 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + Cn\log_2 n \leq Cn\log_2^2 n \tag{8}$$

$$T\left(n\right) \leq Cn\log_2^2 n \tag{9}$$

Что и требовалось доказать. За базу возьмём $n = 2$ и $n = 3$, для них очевидно выполняется, константа подбирается. Тогда переход индукции доказывает утверждение для всех бóльших n.

Нижняя оценка:

$$T\left(n\right) \geq cn\log_2^2 n \tag{10}$$

Переход:

$$T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \geq c\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\log_2^2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \tag{11}$$

Оценим целую часть снизу:

$$T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \geq c\frac{n-1}{2}\log_2^2\frac{n}{4} \tag{12}$$

Преобразуем:

$$2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \geq c\left(n-1\right)\left(\log_2 n - 2\right)^2 \tag{13}$$

$$2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \geq c\left(n-1\right)\left(\log_2^2 n - 4\log_2 n + 4\right) \tag{14}$$

$$2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \geq cn\log_2^2 n - 4cn\log_2 n + \left(4cn - c\log_2^2 n + 4c\log_2 n - 4c\right) \tag{15}$$

Для достаточно больших n можно ослабить:

$$2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \geq cn\log_2^2 n - 4cn\log_2 n \tag{16}$$

$$2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + n\log_2 n \geq cn\log_2^2 n + n\log_2 n - 4cn\log_2 n \tag{17}$$

Для достаточно малых c:

$$2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + n\log_2 n \geq cn\log_2^2 n \tag{18}$$

$$T\left(n\right) \geq cn\log_2^2 n \tag{19}$$

Что и требовалось. База берётся аналогично.
Таким образом, действительно, $T(n) = \Theta(n\log_2^2 n)$.