Рекуренты-1

Санду Р.А.

15 октября 2017 г.

$$T\left(n\right) = T\left(\frac{n}{2k+1}\right) + T\left(n\frac{3k+1}{4k+2}\right) + f\left(n\right), \quad f\left(n\right) = \Theta\left(n\right)$$

Докажем индукцией по n, что $T\left(n\right) = \mathcal{O}\left(n\right)$, т.е.

$$\exists C.\ \exists n_0.\ \forall n > n_0.\ T(n) \leq Cn$$

Возьмём

$$C := \max_{i=1..42} \frac{T(i)}{i}$$

$$n_0 := 1$$

Тогда базой индукции будет $n = 1..42$, ведь

$$T(n) \leq Cn$$

$$\frac{T(n)}{n} \leq C$$

По определению C. Переход. Пусть

$$\forall n_0 < n < n'.\ T(n) \leq Cn$$

Тогда

$$T\left(\frac{n'}{2k+1}\right) \leq C\frac{n'}{2k+1}$$

$$T\left(n'\frac{3k+1}{4k+2}\right) \leq Cn'\frac{3k+1}{4k+2}$$

Сложим, и прибавим $f(n) \leq An$

$$T(n') = T\left(\frac{n'}{2k+1}\right) + T\left(n'\frac{3k+1}{4k+2}\right) + f(n') \leq n'\left(C\frac{3k+3}{4k+2} + A\right)$$

$$T(n') \leq n'\left(C\frac{3k+3}{4k+2} + A\right) \leq n'C$$

И по индукции утверждение доказанно. Но последний переход можно сделать тогда и только тогда, когда

$$C\frac{3k+3}{4k+2} + A \leq C$$

Решив неравенство относительно k получаем, что указанное рассуждение справедливо для

$$k > 1 + \frac{6A}{C-4A} \geq 1$$

(последний переход верен, так как выбранная $C > 4A$)

Таким образом, алгоритм имеет асимптотику $\mathcal{O}(n)$ при

$$k > 1$$

Покажем, что при $k = 1$ оценка не верна. Докажем по индукции, что

$$\forall C.\ \forall n_0.\ \exists n > n_0.\ T(n) \geq Cn$$

За базу индукции возьмём

$$C := 1$$

Очевидно, что нерекурсивный член $T(n)$ уже гарантирует нам верность утверждения для любых n.

Предположим, что утверждение верно для всех $C < C'$. Тогда

$$T\left(\frac{n}{3}\right) \geq (C'-1)\frac{n}{3}$$

$$T\left(\frac{2n}{3}\right) \geq (C'-1)\frac{2n}{3}$$

Сложим эти два неравенства:

$$T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) \geq (C'-1)n$$

Прибавим к обоим частям $f(n) \geq An$

$$T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + f(n) \geq C'n + (A-1)n$$

А так как f обязана как минимум сделать $\frac{2}{3}n$ сравнений для проверки отсортированности столбцов, а также отсортировать $\frac{1}{3}n$ элементов по пивоту, коэффициент A > 1, и следовательно

$$T\left(n\right) \geq C'n$$

По принципу индукции, утверждение доказанно.