Сортировка камней.

Санду Р.А.

9 сентября 2017 г.

Утверждается, что ассимптотически оптимальным является следующий алгоритм.

Для сортировки будем использовать кучу. Добавим первые k элементов в кучу. Мы могли бы продолжить и добавить следующий элемент, но из условия мы уже знаем, что этот k-й элемент не мог стоять на нулевой позиции, как и все последующие элементы. Значит, элемент, стоявший на нулевой позиции, находится в куче и является в ней минимальным. Извлечём его из кучи за $\log k$ и поставим на нулевую позицию, и только теперь добавим k-й элемент в кучу. Таким образом, повторяя этот процесс по аналогии и дальше, размер кучи никогда не превысит k, а следовательно каждый из n элементов будет вставлен и извлечён за $\log k$, и ассимптотика этого алгоритма будет $O(n \log k)$

Теперь дадим нижнюю оценку этой задаче. Рассмотрим перестановки, удовлетворяющих условию. Назовём их "хорошими"и обозначим их число за m. Любой алгоритм сортировки эквивалентен дереву сравнений. Пусть высота дерева сравнений равна h. Тогда всего возможных исходов у алгоритма столько же, сколько и листьев у этого дерева, т.е. 2^h. Для каждой хорошей перестановки должен существовать исход алгоритма, сортирующий её. Иными словами, из мн-ва исходов должна существовать суръекция на мн-во хороших перестановок, т.е. кол-во исходов должно быть не меньше кол-ва хороших перестановок.

$$2^h \geq m$$

$$h \geq \log_2 m$$

Дадим нижнюю оценку для m. Рассмотрим более узкий класс перестановок: такие перестановки, в которых массив разбит на $\frac{n}{k}$ идущих подряд непересекающихся подотрезков, элементы в каждом из которых переставлены друг с другом. Таких объектов будет ровно $k!^{\frac{n}{k}}$, а так как любая такая перестановка является хорошей, $m \geq k!^{\frac{n}{k}}$.

Соединив эти два рассуждения,

$$h \geq \log_2 k!^{\frac{n}{k}}$$

$$h \geq \frac{n}{k} \log_2 k!$$

Следующий переход был дан без доказательства на лекции.

$$h \geq \frac{n}{k} k \log_2 k$$

$$h \geq n \log_2 k$$

А так как время работы алгоритма пропорционально высоте дерева сравнений h, получаем нижнюю оценку $\Omega(n \log k)$