Lois de Probabilités

Cours de Bio-Statistiques

Medouer Nawel
n.meddouer@univ-batna2.dz

Table des matières

1 Lois Discrètes

1.1 Loi de Bernoulli

Définition :
Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type :

— "succès ou échec"
— "vrai ou faux"
— "marche ou arrêt"
— "pile ou face"

Un succès est représenté par l'évènement $\{X = 1\}$ tandis que $\{X = 0\}$ correspond à un échec.

$$X(\Omega) = \{0; 1\}$$

Puisque $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$, la loi de X ne dépend que d'un paramètre (la probabilité de succès).

La loi de Bernoulli de paramètre p est caractérisée par :

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

1.2 Loi Binomiale

Une somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p est une variable aléatoire discrète qui suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

Notation : Une variable suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) est notée :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Si $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli.

Conditions de validité :

- La répétition (n épreuves)
- L'alternance (p probabilité de succès et $q = 1 - p$ probabilité d'échec)
- L'indépendance des épreuves

La loi binomiale donne la probabilité d'observer exactement k succès parmi n épreuves :
Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$P(X = k)$	$P(X = k)$	p^k	q^{n-k}
Probabilité d'obtenir k succès et $n - k$ échecs	*Nombre de combinaisons de k succès parmi les n épreuves*	*Probabilité d'obtenir k succès*	*Probabilité d'obtenir $(n - k)$ échecs*

Loi de probabilité :

k	0	1	...	n
$P(X = k)$	q^n	npq^{n-1}	...	p^n

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$$

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq$$

Exemple : Si un vaccin provoque un effet indésirable chez 15% des sujets, quelle est la probabilité d'observer au moins 4 cas d'effets indésirables parmi 10 sujets vaccinés ?

Les paramètres sont :

- $n = 10$
- $p = 0,15$
- $q = 0,85$

La probabilité cherchée est :

$$P(X \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} (0,15)^k (0,85)^{10-k}$$

Théorème : Si on considère deux variables aléatoires indépendantes $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, alors la somme $X + Y$ suit une loi binomiale :

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

1.3 Loi de Poisson

Définition : La loi de Poisson modélise des événements rares, comme le nombre d'appels reçus dans un standard téléphonique, ou le nombre de voyageurs à un guichet.

La loi de Poisson est définie par un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurrences pendant la durée donnée.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Propriétés :
— Loi discrète infinie
— Dépend d'un seul paramètre λ
— Modélise les phénomènes rares
— Varie dans une unité de temps ou d'espace

Loi de probabilité : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

k	0	1	...	n	...
$P(X = k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	...

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

Théorème : Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ et $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ sont indépendantes, alors :

$$X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Exemple : Un hôpital observe en moyenne 3 cas d'infections nosocomiales par semaine. On veut connaître la probabilité d'observer exactement 5 cas au cours d'une semaine donnée.

La loi de Poisson est applicable car :
— Les infections sont rares.
— Chaque cas se produit indépendamment des autres.
— Le nombre moyen d'infections par semaine est constant.

La loi de Poisson est définie par :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

où :
— λ : le nombre moyen d'événements (ici $\lambda = 3$)
— k : le nombre d'événements observés (ici $k = 5$)

Nous cherchons $P(X = 5)$:

$$P(X = 5) = \frac{3^5 e^{-3}}{5!}$$

$$P(X = 5) = \frac{243 \times 0,0498}{120} = \frac{12,1014}{120} \approx 0,1008$$

La probabilité d'observer exactement 5 cas d'infections nosocomiales au cours d'une semaine est donc d'environ :

$$\boxed{10,08\%}$$

2 Lois Continues

2.1 Loi Normale

Qu'est-ce qu'une distribution normale ? La **loi normale** (ou **loi de Gauss**) est une distribution continue qui modélise de nombreux phénomènes naturels (physique, médecine, sociologie, etc.). Elle est représentée par une courbe en cloche et symétrique.

Pourquoi la loi normale est-elle intéressante ? La loi normale décrit des phénomènes influencés par plusieurs facteurs indépendants et équivalents, comme la pression artérielle, la taille des individus, ou les erreurs de mesure.

Définition : La **loi normale**, également appelée **loi de Gauss**, est une distribution de probabilité continue utilisée pour modéliser des phénomènes naturels où les observations tendent à se concentrer autour d'une moyenne.

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

Fonction de densité de probabilité : La fonction de densité de la loi normale est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

— μ : moyenne (centre de la distribution)
— σ : écart-type (dispersion des données)

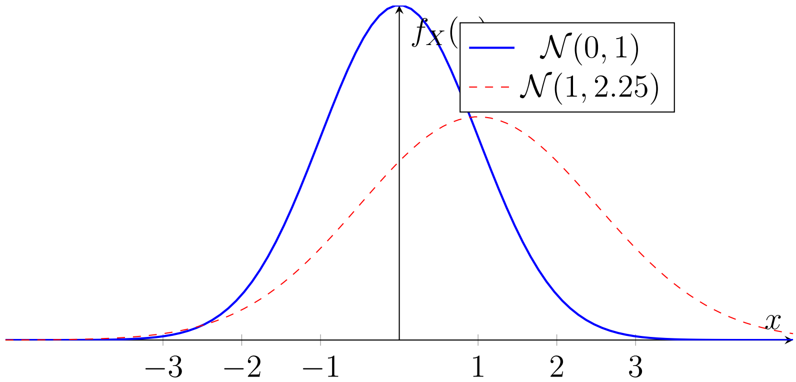
Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la loi normale

— **Symétrie** : La courbe est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$.
— **Maximum** : Le maximum est atteint en $x = \mu$.
— **Aire totale** : L'aire sous la courbe est égale à 1.

Représentation graphique

Densité de probabilité d'une loi normale



La courbe bleue représente une loi normale centrée réduite ($\mu = 0$, $\sigma = 1$). La courbe rouge est décalée et plus étalée ($\mu = 1$, $\sigma = 1,5$).

2.2 Loi normale centrée réduite

Pourquoi utiliser la loi normale centrée réduite ?

Parce qu'il y a un nombre illimité de lois normales, les mathématiciens ont simplifié les choses en calculant les aires sous une loi normale spéciale de paramètres :

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \sigma = 1.$$

Cette distribution est connue sous le nom de ***loi normale centrée réduite***.
Cette dernière est une ***loi tabulée***.
Elle est obtenue par le changement de variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Cette transformation permet d'utiliser directement les tables tabulées de la loi normale sans calcul complexe.

Propriétés de la loi normale centrée réduite

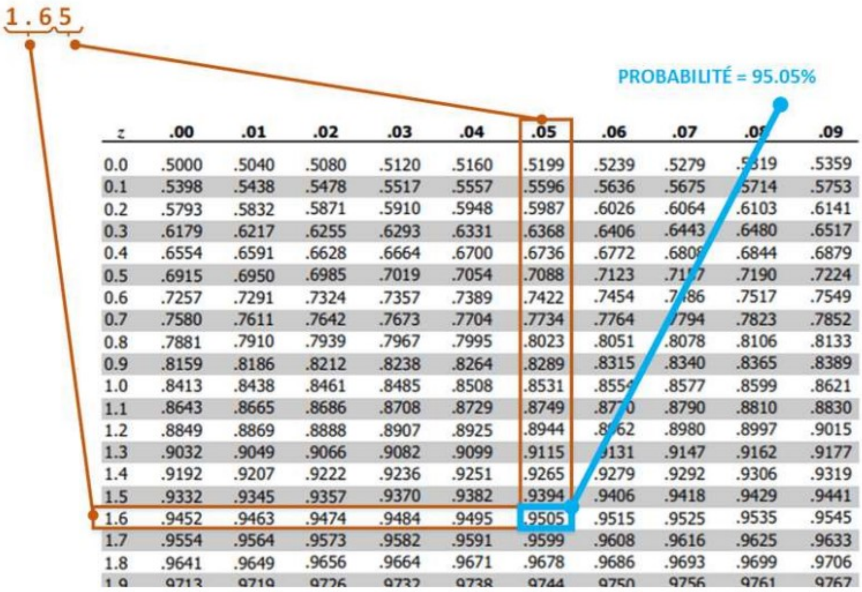
1. $\mu = 0$ et $\sigma = 1$
2. **Loi Tabulée** : Table tabulée disponible pour les probabilités associées.

Lecture de la table de la loi normale centrée réduite : Pour lire la table de la loi normale centrée réduite, on procède comme suit :

— La valeur de z est décomposée en deux parties : la partie entière et la partie décimale.
— La ligne correspond à la partie entière et au premier chiffre décimal.
— La colonne correspond au second chiffre décimal.

Exemple : Pour lire la probabilité associée à $Z = 1,65$: , on repère la ligne 1,6 et la colonne 0,05. On trouve :

$$\Pi(1,65) = 0,9505$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

FIGURE 1 – Loi Normale centré réduite

A RETENIR

Pour a nombre positif :

- ☐ $P(Z \leq a) = \Pi(a)$
- ☐ $P(Z \leq -a) = \Pi(-a)$
- ☐ $P(Z \geq a) = 1 - \Pi(a)$
- ☐ $P(Z \geq -a) = \Pi(a)$
- ☐ $P(Z \leq 0) = \Pi(0) = 0,5$
- ☐ $P(a \leq X \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)$
- ☐ $P(-a \leq X \leq a) = 2\Pi(a)$ - 1

Remarque : Dans la table 1 :

$$\text{Pour } z \geq 3.49, \quad \pi(z) \approx 1$$

1. Comment calculer $\Pi(z)$ pour une valeur $z < 0$?

   On passe par la formule :

$$\Pi(z) = 1 - \Pi(-z) \quad \text{pour } z \in \mathbb{R}$$

$$\Pi(-1,65) = 1 - \Pi(1,65) = 1 - 0,9505 = 0,0005$$

2. **Calculer** $P(-1,33 \leq Z \leq 1,33)$:

$$\Pi(1,33) = 0,9082$$

$$P(-1,33 \leq Z \leq 1,33) = 2\Pi(1,33) - 1 = 2 \times 0,9082 - 1 = 0,8164$$

Exemple 2 : Calculer z pour les situations suivantes :

$$P(Z \leq z) = 0,67, \quad P(Z \leq z) = 0,95, \quad P(Z \geq z) = 0,45, \quad P(Z \geq z) = 0,7$$

1. $P(Z \leq z) = 0,67$

$$\Pi(z) = 0,67$$

La valeur se figure dans la table 1, alors :

$$z = 0,44$$

2. $\Pi(z) = 0,95$

La valeur ne figure pas dans la table 1, mais vous avez deux adjacentes droite et gauche :

$$0,9405 \quad \text{et} \quad 0,9505$$

tels que :

$$\Pi(1.64) = 0,9405 \quad \text{et} \quad \Pi(1.65) = 0,9505$$

On prend le centre des deux primitives des deux adjacentes droite et gauche :

$$\Pi\left(\frac{1.64 + 1.65}{2}\right) = \Pi(1.645) = 0,95$$

3. $P(Z \geq z) = 0,45$

$$P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 0,45$$

Donc :

$$P(Z \leq z) = 1 - 0,45 = 0,55$$

La valeur ne figure pas dans la table 1, mais vous avez deux adjacentes droite et gauche.

Avec des écarts respectivement 0.0022 et 0.0017.

On prend la primitive de l'adjacente la plus proche des deux adjacentes droite et gauche :

$$\Pi(0.13) \approx 0.55$$

1.65

PROBABILITÉ = 95.05%

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

FIGURE 2 – Table 1 : Loi Normale centré réduite

4. $P(Z \geq z) = 0,67$

$$P(Z \leq z) = 1 - P(Z \geq z) = 1 - 0,67 = 0,33$$

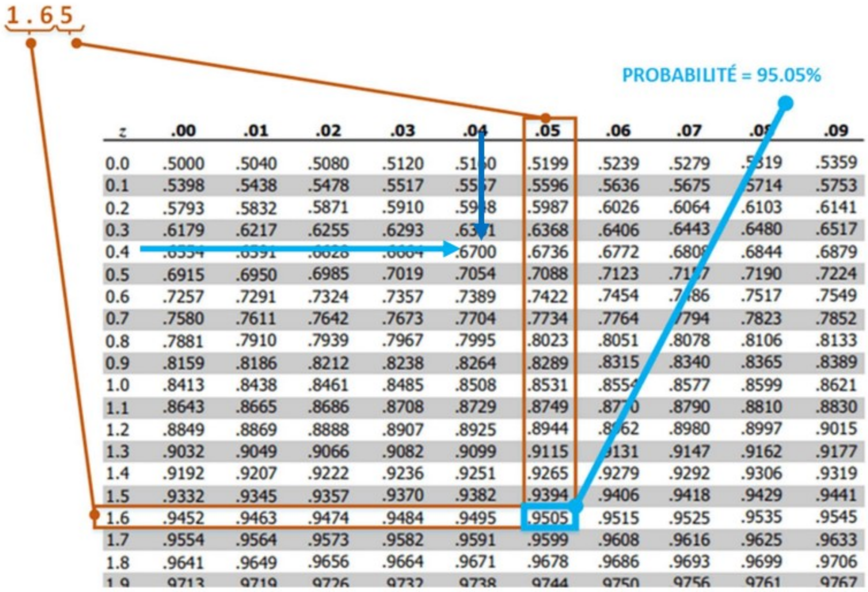
Les valeurs figurant dans la table 1 sont toutes supérieures à 0.5, ceci signifie que cette valeur est une valeur négative.

Comment résoudre ce problème ?

La réponse : On cherche $\Pi(-z)$:

$$\Pi(-z) = 1 - \Pi(z) = 0,67$$

Avec la table 1 de la loi Normale, on trouve $-z = 0.44$
Alors $z = -0.44$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

FIGURE 3 – Table 1 : Loi Normale centré réduite

Remarque :

Si la valeur ne figure pas dans la table 1 vous avez deux choix :

1. On prend le centre des deux primitives des deux adjacentes
2. On prend la primitive de l'adjacente la plus proche

Exercice : Un laboratoire mesure la tension artérielle systolique d'un échantillon de patients et constate que cette tension suit une loi normale de moyenne $\mu = 120$ mmHg et d'écart-type $\sigma = 15$ mmHg.

Quelle est la probabilité que la tension d'un patient choisi au hasard soit comprise entre 100 et 140 mmHg ?

On cherche : $P(100 \leq X \leq 140)$

Étape 1 : Centrage et réduction On applique la transformation :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$P(100 \leq X \leq 140) = P\left(\frac{100 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{140 - 120}{15}\right)$$

$$Z_1 = \frac{100 - 120}{15} = -\frac{20}{15} = -1,33$$

$$Z_2 = \frac{140 - 120}{15} = \frac{20}{15} = 1,33$$

$$= P(-1,33 \leq Z \leq 1,33)$$

Étape 2 : Lecture dans la table de la loi normale : À l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, on lit dans la table :

$$\Pi(1,33) \approx 0,9082$$

$$P(-1,33 \leq Z \leq 1,33) = 2 \times \Pi(1,33) - 1$$

$$= 2 \times 0,9082 - 1 = 1,8164 - 1 = 0,8164$$

La probabilité est d'environ 81,64%.

Conclusion :

La loi normale est un outil puissant en statistiques. Son approximation permet de simplifier les calculs dans divers contextes, notamment en médecine où elle est couramment utilisée pour analyser des mesures biologiques.

3 Approximation des lois

POURQUOI L'APPROXIMATION DES LOIS ?

Dans la pratique, il arrive que le calcul de probabilité avec la loi identifiée est trop lourd ; dans ce cas sous certaines conditions il est possible d'approximer la loi initiale par une autre dans le but de simplifier le calcul.

Appriximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson :

Les conditions :
Soit $X \sim B(n; p)$ tels que

$$1) \quad n \geq 30 \quad 2) \quad np < 5$$

Alors $\quad X \approx Y \quad$ tel que $\quad Y \sim P(np)$

Appriximation de la loi Binomiale par la loi Normale :

Les conditions :
Soit $X \sim B(n; p)$ tels que

$$1) \quad n \geq 30 \quad 2) \quad np \geq 5 \quad 3) \quad nq \geq 5$$

Alors $\quad X \approx Y \quad$ tel que $\quad Y \sim N(np, \sqrt{npq})$

Approximation de la loi de Poisson par la loi Normale :

Les conditions :
Soit $X \sim P(\lambda)$ tel que

$$\lambda \geq 5$$

Alors $\quad X \approx Y \quad$ tel que $\quad Y \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$

Remarque :

L'approximation des lois est un outil facultatif ! ! C'est-à-dire vous pouvez l'appliquer comme vous pouvez le laisser tomber (bien sûr dans le cas où les conditions d'approximation sont satisfaites).

Mais ! ! L'approximation des lois devient obligatoire si :
- ☐ Le calcul est trop lourd en utilisant la loi initiale
- ☐ L'énoncé de l'exercice vous oblige à utiliser la loi approximée

3.1 Correction de Continuité :

Pourquoi avons-nous besoin d'une correction de continuité ?

ATTENTION ! ! !

Un point délicat résulte du fait que la loi initiale (Binomiale ou Poisson) est une Loi discrète mais la loi approximée (loi Normale) est une loi continue.

Soient :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{pour } X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad \text{pour } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Tandis que :

$$P(Y = k) = 0 \quad \text{pour } Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

LA SOLUTION ! ! !

Pour éviter le paradoxe dans le cas où la loi initiale (Binomiale ou Poisson) est une Loi discrète et la loi approximée (loi Normale) est une loi continue, il est nécessaire

De calculer la probabilité non de Y soit égale à k mais la probabilité que Y soit inclus dans un intervalle autour de k.

C'est-à-dire :

$$P(X = k) = P(k - 0,5 < Y < k + 0,5)$$

Quand ?

- ✗ **Loi Binomiale approximée par la loi de Poisson**
- ✓ **Loi Binomiale approximée par la loi Normale**
- ✔ **Loi de Poisson approximée par la loi de Normale**

Soit X une loi de probabilité discrète (Binomiale ou Poisson) approximée par une loi Normale Y.

3.2 Formules de la correction de continuité

Correction de continuité :		
■	$P(X = n) \approx P(n - 0.5 \leq Y \leq n + 0.5)$	(1)
■	$P(m \leq X \leq n) \approx P(m - 0.5 \leq Y \leq n + 0.5)$	(2)
■	$P(m < X < n) = P(m + 1 \leq X \leq n - 1)$	de (2), on obtient :
■	$P(m < X < n) \approx P(m + 1 - 0.5 \leq Y \leq n - 1 + 0.5)$	
■	$P(m + 0.5 \leq Y \leq n - 0.5)$	(3)
■	$P(m \leq X < n) = P(m \leq X \leq n - 1)$	de (2)
■	$P(m \leq X < n) \approx P(m - 0.5 \leq Y \leq n - 1 + 0.5)$	
■	$P(m - 0.5 \leq Y \leq n - 0.5)$	(4)
■	$P(m < X \leq n) = P(m + 1 \leq X \leq n)$	de (2), on obtient :
■	$P(m < X \leq n) \approx P(m + 1 - 0.5 \leq Y \leq n + 0.5)$	
■	$P(m + 0.5 \leq Y \leq n + 0.5)$	(5)
■	$P(X \leq n) \approx P(Y \leq n + 0.5)$	(6)
■	$P(X < n) \approx P(Y < n + 0.5)$	(7)

Exercice 1

Un hôpital réalise un test de dépistage pour une maladie rare. La probabilité qu'un patient soit atteint est de $p = 0.001$. L'hôpital teste $n = 5000$ patients en une journée.

Nous voulons calculer la probabilité que exactement 4 patients soient atteints. Les conditions d'approximation sont :

— $n \geq 30 \quad \Rightarrow \quad 5000 \geq 30$ Vérifié.

— $np < 5 \quad \Rightarrow \quad 5000 \times 0.001 = 5$ À la limite mais acceptable.

On approxime $X \sim B(5000, 0.001)$ par une loi de Poisson avec $\lambda = np = 5$:

$$X \approx Y \sim P(5)$$

La formule de la loi de Poisson est :

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Pour $k = 4$ et $\lambda = 5$:

$$P(Y = 4) = \frac{5^4 e^{-5}}{4!} = \frac{625 \times 0.0067}{24} \approx 0.1745$$

La probabilité que exactement 4 patients soient atteints est d'environ 0.1745 (soit 17.45

Exercice 2

Une clinique effectue **1000 tests de dépistage** d'une maladie infectieuse. On sait que la probabilité qu'un patient soit atteint est de **5%**.

— Quelle est la distribution suivie par la variable aléatoire X représentant le nombre de patients testés positifs ?
— Quelle est la probabilité que **45 patients** soient testés positifs ?
— Quelle est la probabilité qu'au moins **60 patients** soient testés positifs ?
— Approximons ces probabilités en utilisant **la loi normale**.

Soit X le nombre de patients testés positifs. On modélise ce phénomène par une loi binomiale :

$$X \sim B(n = 1000, p = 0.05)$$

Nous cherchons :

$$P(X = 45) \quad \text{et} \quad P(X \geq 60)$$

L'approximation de la loi binomiale par la loi normale est valide si :
— $n \geq 30$ (car $n = 1000$)
— $np \geq 5$ (car $np = 1000 \times 0.05 = 50$)
— $nq \geq 5$ (car $nq = 1000 \times 0.95 = 950$)

Toutes les conditions sont vérifiées, donc l'approximation par la loi normale est valide.
On approxime X par une variable normale :

$$X \sim B(1000, 0.05) \approx Y \sim N(\mu, \sigma)$$

avec :

$$\mu = np = 1000 \times 0.05 = 50$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \times 0.05 \times 0.95} = \sqrt{47.5} \approx 6.89$$

Nous voulons approximer :

$$P(X = 45)$$

En utilisant la **correction de continuité** :

$$P(44.5 \leq Y \leq 45.5)$$

On standardise avec la variable centrée réduite Z :

$$Z_1 = \frac{44.5 - 50}{6.89} = \frac{-5.5}{6.89} \approx -0.80$$

$$Z_2 = \frac{45.5 - 50}{6.89} = \frac{-4.5}{6.89} \approx -0.65$$

En utilisant la table de la loi normale :

$$P(Z \leq -0.65) \approx 0.2578$$

$$P(Z \leq -0.80) \approx 0.2119$$

Ainsi,

$$P(44.5 \leq Y \leq 45.5) = P(Z \leq -0.65) - P(Z \leq -0.80)$$

$$P(44.5 \leq Y \leq 45.5) = 0.2578 - 0.2119 = 0.0459$$

Donc :

$$P(X = 45) \approx 4.59\%$$

Nous cherchons :

$$P(X \geq 60)$$

Avec la correction de continuité :

$$P(X \geq 60) \approx P(Y \geq 59.5)$$

On standardise avec la variable centrée réduite Z :

$$Z = \frac{59.5 - 50}{6.89} = \frac{9.5}{6.89} \approx 1.38$$

En utilisant la table de la loi normale :

$$P(Z \leq 1.38) \approx 0.9162$$

Donc :

$$P(X \geq 60) = 1 - P(Z \leq 1.38) = 1 - 0.9162 = 0.0838$$

— La probabilité que **45 patients** soient testés positifs est d'environ 4.59%.
— La probabilité qu'au moins **60 patients** soient testés positifs est d'environ 8.38%.