Analyse Combinatoire

Cours de Bio-Statistiques

Medouer Nawel

n.meddouer@univ-batna2.dz

Table des matières

1 Comment compter les objets ? 1

2 Arrangements 1

2.1 Arrangement sans répétition 1

2.2 Arrangement avec répétition 2

3 Permutations 2

3.1 Permutations sans répétition 2

3.2 Permutations avec répétition 3

4 Combinaisons 3

4.1 Combinaisons sans répétition 3

4.2 Combinaisons avec répétitions 4

5 Exercices d'applications 6

1 Comment compter les objets ?

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes spécifiques largement utilisées en théorie des probabilités.

2 Arrangements

2.1 Arrangement sans répétition

Définition

Soit un ensemble E contenant n éléments. Une **disposition sans répétition** est toute séquence ordonnée composée de p éléments sélectionnés parmi ces n éléments. *L'ordre des éléments est important.*

Le nombre de dispositions sans répétition est donné par :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$. Les dispositions de 2 éléments parmi cet ensemble sont :

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb$$

Ainsi, il y a 6 dispositions.

2.2 Arrangement avec répétition

Définition

Dans une disposition **avec répétition**, chaque élément peut apparaître plusieurs fois. Le nombre total de dispositions est donné par :

$$R_n^p = n^p$$

Un médecin doit prescrire un traitement sur 3 jours, en choisissant parmi 4 médicaments disponibles :

— `a : Médicament A` , `b : 2 Médicament B`, `c : Médicament C`, `d : Médicament D`.

Le médecin peut prescrire :

— Le même médicament chaque jour.
— Un médicament différent chaque jour.
— Une combinaison quelconque de médicaments.

`Question` : Combien de schémas de prescription différents peut-on envisager pour ce traitement sur 3 jours ?

Ce problème est un cas typique d'arrangements avec répétition, car :

— L'ordre des prescriptions est important (par exemple, prescrire A-B-C est différent de C-B-A).
— Chaque médicament peut être répété plusieurs fois.

La formule pour calculer les arrangements avec répétition est donnée par : $R_n^p = n^p$

Ainsi :

$$R_4^3 = 4^3 = 64$$

Il y a donc **64 schémas de prescription possibles**. Voici quelques exemples de schémas de prescription possibles :

— A-A-A : Le médicament A est prescrit pendant les 3 jours.
— A-B-C : Trois médicaments différents sont prescrits, un chaque jour.
— B-B-C : Le médicament B est prescrit les deux premiers jours, et C le troisième.
— D-D-D : Le médicament D est prescrit pendant les 3 jours.

3 Permutations

3.1 Permutations sans répétition

Définition

Une **permutation sans répétition** d'un ensemble E de n éléments est une séquence ordonnée contenant tous les n éléments. Le nombre total de permutations est donné par :

$$P_n = n!$$

Exemple

Combien de mots peuvent être construits à partir des lettres du mot "table" ?

$$P_5 = 5! = 120$$

3.2 Permutations avec répétition

Si certains éléments sont répétés, la formule devient :

$$P = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

où $r_1, r_2, \dots, r_k$ représentent les fréquences des répétitions.

Exemple

Combien de mots peuvent être formés avec les lettres du mot "cellule" ? Étant donné que certaines lettres se répètent, le nombre total est réduit proportionnellement.

Question Combien de mots peuvent être formés avec les lettres du mot "cellule" ?

- Le mot "cellule" contient 7 lettres au total.
- Fréquence des lettres :
  - `c : 1 fois`, `e : 2 fois`, `l : 3 fois`, `u : 1 fois`.

    Pourquoi les répétitions réduisent-elles le total ?
- Si toutes les lettres étaient différentes, le nombre total de permutations serait $7! = 5040$.
- Cependant, les lettres qui se répètent (comme "e" et "l") créent des arrangements indiscernables lorsqu'elles changent de position.
- Par exemple :
  - Si l'on permute les deux "e" dans un mot, celui-ci reste identique.
  - De même, permuter les trois "l" entre eux ne change pas le mot.
- Pour corriger cette sur-comptabilisation, on divise par les factorielles des fréquences des lettres répétées :
- Calculons le nombre de permutations :

$$\text{Nombre de permutations} = \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{5040}{12} = 420$$

Conclusion Il est possible de former **420 mots différents** avec les lettres du mot "cellule".

4 Combinaisons

4.1 Combinaisons sans répétition

3.1.1 Définition : Étant donné un ensemble E de n éléments, une combinaison de p éléments sans répétition correspond à toute sélection non ordonnée de p éléments parmi n. L'ordre des éléments est ignoré. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n sans répétition est donné par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Pourquoi ? Dans les combinaisons, l'ordre des éléments n'a pas d'importance. Chaque ensemble unique d'éléments est compté une seule fois.

Étant donné un ensemble $E = \{a, b, c\}$, les combinaisons de deux éléments de E sont : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$. Chaque combinaison non ordonnée correspond à deux arrangements ordonnés. Par conséquent, le nombre de combinaisons sans répétition est :

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Exemple : Former une délégation de 4 étudiants parmi un groupe de 100 est une combinaison sans répétition où $p = 4$ et $n = 100$. Le nombre de combinaisons possibles est :

$$C_{100}^4 = \frac{100!}{4!(100-4)!}$$

Propriétés

1. $C_n^0 = 1$
2. $C_n^n = 1$

Formule de Pascal : L'identité de Pascal pour les combinaisons est donnée par :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

Propriété de symétrie : Le coefficient binomial est symétrique :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

4.2 Combinaisons avec répétitions

3.2.1 Définition :

Étant donné un ensemble E de n éléments, on appelle **combinaison de p éléments avec répétition** toute liste de p éléments parmi les n éléments.

C'est-à-dire l'ordre n'est pas important.

Le nombre de combinaisons avec répétitions de p éléments pris parmi n sans répétition est noté par :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Voici Pourquoi ?

Étant donné un ensemble E de 5 éléments

$$E = \{a, b, c, d, f\}$$

Alors, pour avoir le nombre de combinaisons avec répétition de 3 lettres, on distingue trois catégories :

1. **Nombre de combinaisons de trois lettres différentes est**

$$C_5^3$$

2. **Nombre de combinaisons de deux lettres différentes et une lettre redondante (deux identiques)**
   C'est-à-dire

$$C_5^2 \times 2$$

   (C_5^2 : choix de deux lettres, la $1^{\text{ère}}$ redondante figure deux fois et la $2^{\text{ème}}$ une seule fois)
   (2 : lorsque je permute les deux lettres)

3. **Nombre de combinaisons de trois lettres identiques**

$$C_5^1$$

En utilisant la formule de Pascal

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

Soit

$$C_5^3 + C_5^2 \times 2 + C_5^1 = (C_5^3 + C_5^2) + (C_5^2 + C_5^1) = C_6^3 + C_6^2 = C_7^3$$

On obtient :

$$K_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3$$

Par récurrence, on trouve :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Remarque :

Dans le cas des combinaisons avec répétition, le nombre d'éléments p peut être supérieur ou égal au nombre total n, soit $p \geq n$.

5 Exercices d'applications

Exercice 1 : Génétique cellulaire

Dans le codage génétique de biologie cellulaire, l'alphabet de base est constitué de 4 nucléotides désignés par les lettres :

— A (Adénine), C (Cytosine),
— G (Guanine), U (Uracile).

On admet que les acides aminés sont des *mots* formés par une chaîne de 3 nucléotides.

1. Combien y a-t-il théoriquement d'acides aminés de ce genre ?
2. Parmi ces acides, combien y en a-t-il qui contiennent 3 nucléotides différents ?
3. Combien y en a-t-il d'acides aminés contenant 3 nucléotides identiques ?
4. En déduire le nombre d'acides aminés contenant 2 nucléotides identiques.

Solution

— 1. Nombre Théorique d'acides aminés :

$$4^3 = 64$$

— 2. Acides aminés avec 3 nucléotides différents :

$$C_4^3 = 24$$

— 3. Acides aminés avec 3 nucléotides identiques :

$$4$$

— 4. Acides aminés avec 2 nucléotides identiques :

$$64 - 24 - 4 = 36$$

Ou directement ce nombre égale à

$$C_4^2 \times 2 \times 3 = 36$$

Exercice 2 : Combinaison de séquences d'ADN

Dans une étude génétique, un biologiste souhaite combiner des segments de séquences d'ADN composés de 6 paires de bases. Chaque segment peut être combiné dans n'importe quel ordre. Combien de façons différentes peut-on réarranger ces segments ?

*Solution Le nombre total de réarrangements des 6 segments est donné par le nombre de permutations, noté P_n :

$$P_6 = 6! = 720$$

Exercice 3 : Analyse des mutations génétiques

Dans une étude génétique, des chercheurs analysent les mutations génétiques chez des patients souffrant d'une maladie spécifique. Il existe 4 types possibles de mutations génétiques (A, B, C, D) pouvant affecter les patients. L'étude doit être menée sur 7 patients, en s'assurant que chaque type de mutation soit représenté chez au moins un patient.

— (a) Combien de façons différentes peut-on sélectionner 7 patients en s'assurant que chaque type de mutation soit représenté au moins une fois ?

— (b) Quel est le nombre total de façons de sélectionner un groupe de 7 patients sans considérer la répartition des types de mutation ?

Solution

— (a) Pour s'assurer qu'au moins un patient est affecté à chaque type de mutation, nous appliquons les combinaisons avec répétition. Tout d'abord, nous assignons un patient à chaque type de mutation, ce qui occupe 4 patients. Cela laisse 3 patients à répartir librement.

Le nombre de façons de répartir les 3 patients restants parmi les 4 types de mutations est donné par la formule des combinaisons avec répétition :

$$C_{3+4-1}^{3} = C_{6}^{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

— (b) Sans considérer les types de mutation, nous sélectionnons simplement 7 patients parmi un total de n. En supposant $n = 20$, nous avons :

$$C_{20}^{7} = \frac{20!}{7!(20-7)!} = 77520$$

Exercice 4 : Sélection de patients pour une étude clinique

Un laboratoire mène une étude clinique sur un nouveau médicament. 10 patients sont disponibles pour participer, mais seulement 4 peuvent être choisis.

— (a) Combien de façons différentes peut-on choisir 4 patients parmi les 10 ?

— (b) Si l'ordre dans lequel les patients sont choisis importe (par exemple, pour les assigner à différents groupes), combien de sélections possibles existe-t-il ?

Solution

— (a) Le nombre de façons de choisir 4 patients parmi 10, sans tenir compte de l'ordre, est donné par une combinaison, notée C_n^k :

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

— (b) Si l'ordre des patients choisis importe, on calcule le nombre d'arrangements de 4 patients parmi 10, noté A_n^k :

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$