Tests D'Hypothèses

Cours de Bio-Statistiques

Medouer Nawel

n.meddouer@univ-batna2.dz

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce cours est de répondre à la problématique suivante :

On est souvent conduit à prendre une décision au sujet d'une population à partir des informations données sur un échantillon. Les tests d'hypothèses consistent à choisir entre deux hypothèses H_0 et H_1.
Il y a deux types de tests : test de conformité et test d'homogénéité.

2 Procédure générale d'un test

1) Formulation des hypothèses.

Remarque :

les deux hypothèses doivent être *contradictoires*.

2) Calcul de la statistique de test observée T_0.

3) Identification du seuil critique

— Choix du seuil de signification α (généralement donné dans l'énoncé) (sinon par convention, on prend $\alpha = 0.05$).

Test bilatéral	**Test Unilatéral droit**	**Test Unilatéral gauche**
Hypothèse nulle égale	Hypothèse nulle égale	Hypothèse nulle égale
Contre	Contre	Contre
Hypothèse alternative inégale	Hypothèse alternative supérieure	Hypothèse alternative inférieure

— La lecture de la valeur du seuil critique (soit à partir de la table Normale : **Table 1**, soit de la table de Student : **Table 2**).

4) Décision :

— **Conclusion statistique** : conservation ou rejet de l'hypothèse H_0.
— **Conclusion pratique** : répondre à la question donnée.

Test de conformité

3 Test de conformité

Notations. . .

— ✓ n : taille de l'échantillon.
— ✓ m : moyenne de l'échantillon.
— ✓ S : écart-type de l'échantillon (corrigé).
— ✓ μ : moyenne de la population.
— ✓ σ : écart-type de la population (*connu ou inconnu*).
— ✓ P : proportion théorique.
— ✓ $\tilde{P}$: *proportion observée de l'échantillon.*

On distingue deux types de test de conformité :

a) Comparaison de la moyenne de l'échantillon m à une moyenne vraie de la population μ. Données : n taille de l'échantillon, σ l'écart-type de la population et S l'écart-type de l'échantillon.

b) Comparaison d'une proportion
calculée $\tilde{P}$ (de l'échantillon) et une proportion vraie P (de la population).

1. **Détermination des hypothèses à tester H_0 et H_1.**

	Test bilatéral	**Test unilatéral droit**	**Test unilatéral gauche**
Test de conformité de la moyenne	$H_0 : m = \mu$ $H_1 : m \neq \mu$	$H_0 : m = \mu$ $H_1 : m > \mu$	$H_0 : m = \mu$ $H_1 : m < \mu$
Test de conformité de la proportion	$H_0 : \tilde{P} = P$ $H_1 : \tilde{P} \neq P$	$H_0 : \tilde{P} = P$ $H_1 : \tilde{P} > P$	$H_0 : \tilde{P} = P$ $H_1 : \tilde{P} < P$

2. **Les cas possibles d'un test de comformité : Moyennes ou fréquences**

	Cas 1	Cas 2
Conditions	$n \geq 30$ σ connu	$n \geq 30$ σ inconnu
La statistique de test T_0	$T_0 = \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$T_0 = \frac{m-\mu}{S/\sqrt{n}}$
Le seuil critique	test bilatéral $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test unilatéral à droite $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test unilatéral à gauche $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$	test bilatéral $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test unilatéral à droite $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test unilatéral à gauche $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$

	Cas 3	Cas 4
Conditions	$n < 30$ σ connu loi normale	$n < 30$ σ inconnu loi normale
La statistique de test T_0	$T_0 = \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$T_0 = \frac{m-\mu}{S/\sqrt{n}}$
Le seuil critique	test bilatéral $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test unilatéral à droite $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test unilatéral à gauche $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$	test bilatéral t_α Test unilatéral à droite $t_{2\alpha}$ Test unilatéral à gauche $-t_{2\alpha}$

Remarques

1. *Pour identifier le seuil critique (test de conformité ou test d'homogénéité), on utilise la table normale pour les cas 1,2,3 et 5, par contre on utilise la table de Student pour le cas 4.*
2. *Pour un test bilatéral : le seuil critique $\bar{Z}_\alpha$ se lit dans la table 2 (table de la variable normale réduite) ou bien $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dans la table 1 (la table 1 de la fonction de répartition de la loi normale).*

Remarques

3. *Pour un test unilatéral à gauche ou à droite, le seuil critique $\bar{Z}_{2\alpha}$ se lit dans la table 2 (table de la variable normale réduite) ou bien $Z_{1-\alpha}$ dans la table 1 (la table 1 de la fonction de répartition de la loi normale).*
4. *L'écart-type corrigé $S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m)^2}{n-1}}$ de l'échantillon est donné dans l'énoncé*

	Cas 5
Conditions	$n \geq 30$ $nP > 5$ $n(1-P) > 5$
La statistique de test T_0	$T_0 = \frac{\tilde{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$
Le seuil critique	test bilatéral $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test unilatéral à droite $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test unilatéral à gauche $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$

sous le nom de « écart-type de l'échantillon ». Si l'écart-type n'est pas donné, vous devez le calculer.

Remarques

a) *Cas1 : des données brutes ou des données regroupées dans un tableau statistique. On utilise la calculatrice, après la saisie des données vous choisissez* ***xn−1***.

Remarques

a) *Cas2 : dans l'énoncé vous avez les deux sommes $\sum(x_i)$ et $\sum(x_i)^2$, alors :*
- *calculer l'écart-type empirique de l'échantillon :*

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{\sum(x_i)^2}{n} - m^2} \quad \text{telle que} \quad m = \frac{\sum(x_i)}{n}$$

- *Pour identifier l'écart-type de l'échantillon S, on utilise la relation :*

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\tilde{S}$$

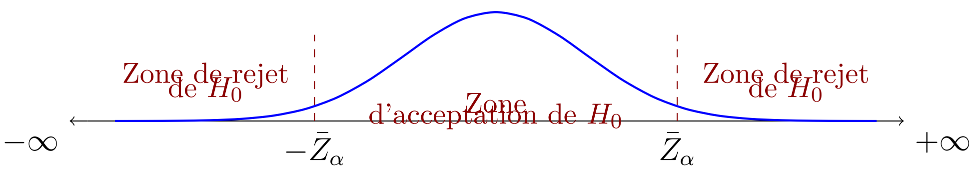
A retenir

seuil de signfication
- Si $\alpha = 0{,}05$: le résultat est **significatif**.
- Si $\alpha = 0{,}01$: le résultat est **hautement significatif**.
- Si $\alpha = 0{,}001$: le résultat est **très hautement significatif**.

A retenir

Les Décisions selon le type du test (cas 1, 2, 3 et 5)

Test bilatéral : (égale contre inégale)



A retenir

Les Décisions selon le type du test (cas 1, 2, 3 et 5)

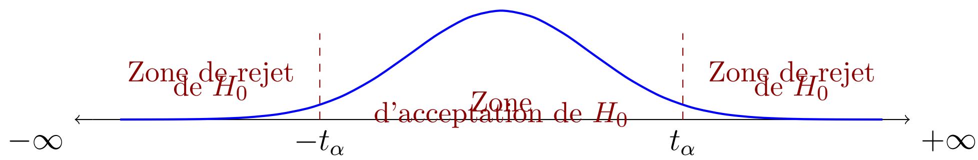
Test unilatéral à droite : (égale contre supérieure)

Test unilatéral à gauche : (égale contre inférieure)

A retenir

Les Décisions selon le type du test (cas 4)

Test bilatéral : (égale contre inégale)



A retenir

Les Décisions selon le type du test (cas 4)

Test unilatéral à droite : (égale contre supérieure)

Test unilatéral à gauche : (égale contre inférieure)

Test d'homogénéité

4 Test d'homogénéité

Notations...

- ✓ $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$ tailles des échantillons
- ✓ $\bar{\mathbf{X}}$ et $\bar{\mathbf{Y}}$ moyennes des échantillons
- ✓ $\mathbf{S_X},\ \mathbf{S_Y}$ écarts-types des échantillons
- ✓ μ_1 et μ_2 moyennes des populations
- ✓ $\sigma_X,\ \sigma_Y$ écarts-types des populations (*connus ou inconnus*)
- ✓ $\mathbf{S_C^2}$ variance commune

telle que

$$S_C^2 = \frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}$$

Notations aussi que...

- $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ proportions observées dans les échantillons
- P_1 et P_2 proportions théoriques
- $\tilde{P}$ proportion commune *telle que* $\tilde{P} = \dfrac{n_1\tilde{P}_1 + n_2\tilde{P}_2}{n_1+n_2}$

Formulation des hypothèses

	Test bilatéral	Test Unilatéral droit	Test Unilatéral gauche
Test d'homogénéité de la moyenne	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$
Test d'homogénéité de la proportion	$H_0 : P_1 = P_2$ $H_1 : P_1 \neq P_2$	$H_0 : P_1 = P_2$ $H_1 : P_1 > P_2$	$H_0 : P_1 = P_2$ $H_1 : P_1 < P_2$

Les cas possibles d'un test d'homogénéité : Moyennes ou fréquences

	Cas 1	Cas 2
Conditions	$n_1 \geq 30,\ n_2 \geq 30,\ \sigma_X,\ \sigma_Y$ connus	$n_1 \geq 30,\ n_2 \geq 30,\ \sigma_X,\ \sigma_Y$ inconnus
Statistique de test T_0	$T_0 = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_2}}}$	$T_0 = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_1} + \dfrac{S_Y^2}{n_2}}}$
Seuil critique	Test bilatéral : $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test à droite : $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test à gauche : $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$	Test bilatéral : $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test à droite : $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test à gauche : $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$

	Cas 3
Conditions	$n_1 < 30$ et (ou) $n_2 < 30$ σ_X, σ_Y connus – loi normale
Statistique de test T_0	$T_0 = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_1}+\frac{\sigma_Y^2}{n_2}}}$
Seuil critique	test bilatéral $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test unilatéral à droite $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test unilatéral à gauche $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$

	Cas 4	Cas 5
Conditions	$n_1 < 30$ et/ou $n_2 < 30$ σ_X, σ_Y inconnus, égaux – loi normale	$n_1, n_2 \geq 30$ $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ valides (> 5)
Statistique de test T_0	$T_0 = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_c\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ avec $s_c^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}$ appelée variance commune	$T_0 = \dfrac{\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2}{\sqrt{\tilde{P}(1 - \tilde{P})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ avec $\tilde{P} = \dfrac{n_1\tilde{P}_1 + n_2\tilde{P}_2}{n_1 + n_2}$ appelée proportion commune
Seuil critique	Test bilatéral : t_α Test à droite : $t_{2\alpha}$ Test à gauche : $-t_{2\alpha}$	Test bilatéral : $\bar{Z}_\alpha = Z_{1-\alpha/2}$ Test à droite : $\bar{Z}_{2\alpha} = Z_{1-\alpha}$ Test à gauche : $-\bar{Z}_{2\alpha} = -Z_{1-\alpha}$

5 Exercices

Exercice 1

On étudie la dépendance à un médicament. Une région du cerveau, appelée VTA, contient des récepteurs (GABA-A) qui, exposés à l'enzyme anhydrase carbonique contrôlent le basculement d'un état de non-accoutumance à un état d'accoutumance.

Chez les sujets à risque, le dosage de l'activité de cet enzyme suit une loi normale d'espérance 10,7 et d'écart-type inconnu. Une série de dosages effectués sur une personne a donné :
12,9 ; 8,7 ; 9,0 ; 1,2 ; 2,7 ; 9,7 ; 9,1 ; 10,3

Cette personne peut-elle être considérée comme à risque au seuil de 5% ?
Solution :

$$m = \frac{\sum(x_i)}{n} = 7{,}95 \qquad S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m)^2}{n-1}} = 3{,}949$$

Ou directement utiliser la calculatrice, après la saisie des données vous choisissez $x\sigma n-1$.

(test de conformité cas 4)

1. **Choix des hypothèses :** $H_0 : m = \mu \quad H_1 : m \neq \mu$
   Il s'agit d'un **test bilatéral** (égale contre inégale)
2. **Calcul de la statistique de test observée :**

$$T_0 = \frac{m-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = -1{,}9693$$

Alors on cherche le seuil critique dans la table 3 (de Student)

3. **Identification de seuil critique :**

$$n < 30 \quad - \sigma \text{ inconnu} \quad - \text{loi normale}$$

   Alors on cherche le seuil critique dans la table 3 (de Student)

$$\alpha = 0{,}05 \quad \text{ddl} = n-1 = 7 \quad t_\alpha = \mathbf{2{,}365}$$

4. **Décision :**

$$-t_\alpha \leq T_0 \leq t_\alpha$$
$$-2{,}365 \leq T_0 \leq 2{,}365$$

Décision :

Décision statistique : La statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de H_0

Décision pratique : La personne est considérée comme étant en risque

Exercice 2

1. Pour mesurer le pH d'une solution, on utilise un pH-mètre qui affiche un résultat dont la loi est $N(\mu; 0{,}05)$, où μ est la vraie valeur du pH de la solution. On a mesuré le pH d'une solution A par 12 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de 7,4, et le pH d'une solution B par 10 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de 7,5.

   Peut-on considérer que les deux solutions ont même pH (au seuil 1%) ?

2. Pour mesurer le pH d'une solution, on utilise un nouveau pH-mètre qui affiche un résultat dont la loi est $N(\mu; \sigma)$, où μ est la vraie valeur du pH de la solution et où σ n'a pas été déterminé.

   On a mesuré le pH d'une solution A par 12 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de 7,4 et un écart-type S_A de 0,09, et le pH d'une solution B par 10 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de 7,5 et un écart-type S_B de 0,08.

   Peut-on considérer que les deux solutions ont même pH (au seuil 1%) ?

Solution :

Question 1 :

1. Il s'agit d'un **test bilatéral** (égale contre inégale)
2. **Choix des hypothèses :**

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \qquad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

3. **Calcul de la statistique de test observée :**

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = -4{,}67$$

4. **Identification du seuil critique :**

$$n_A < 30 \quad \text{et} \quad n_B < 30 \quad \text{et} \quad \sigma_X = \sigma_Y = \sigma \text{ (connus)} \Rightarrow \text{Loi normale}$$

On cherche le seuil critique dans la table 2 de la loi Normale

$$\alpha = 0{,}01 \quad \bar{Z}_\alpha = 2{,}575$$

Décision :

Test bilatéral : (égale contre inégale)

$$T_0 \notin \left[-\bar{Z}_\alpha \; ; \; \bar{Z}_\alpha\right]$$

Décision statistique : la statistique de test observée se trouve dans la zone de rejet de H_0.

Décision pratique : On conclut que les deux solutions n'ont pas le même pH.

Question 2

1. **Choix des hypothèses :**

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \qquad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

2. **Calcul de la statistique de test observée :**

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{s_c\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} \quad \text{avec}$$

Variance combinée :

$$s_c^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

$$s_c^2 = \frac{(11)(0{,}09)^2 + (9)(0{,}08)^2}{20} = \frac{0{,}0891 + 0{,}0576}{20} = \frac{0{,}1467}{20} \approx \boxed{0{,}007335}$$

$$s_c \approx \sqrt{0{,}007335} \approx 0{,}08564$$

Alors la statistique de test :

$$T_0 = \frac{-0{,}1}{0{,}08564 \times \sqrt{0{,}1833}} = \frac{-0{,}1}{0{,}08564 \times 0{,}4282} = \frac{-0{,}1}{0{,}03666} \approx \boxed{-2{,}73}$$

3. **Identification du seuil critique :**

$$n_A < 30 \quad \text{et} \quad n_B < 30 \qquad \sigma_X, \sigma_Y \text{ (inconnus) mais égaux}$$

$$\text{(échantillons extraits de la même population)} \quad \Rightarrow \quad \text{Loi Normale}$$

Conclusion : $T_0 = -2{,}73 \in [-2{,}845, +2{,}845] \Rightarrow$ **On ne rejette pas** H_0

Interprétation pratique : Les deux solutions peuvent avoir le **même pH** (au seuil de 1%).

Exercice 3

Un laboratoire pharmaceutique garantit que son médicament destiné au traitement d'une affection cutanée est efficace dans 80% des cas. Un groupe indépendant a collecté les données de cabinets médicaux d'une région de 40 patients atteints par l'affection ont été traités par le médicament. Parmi eux, 28 ont été définitivement guéris. Pour les 12 autres patients le médicament a été sans effet, ils ont dû changer de traitement.

Ces résultats sont-ils conformes à l'affirmation du laboratoire pharmaceutique ? ($\alpha = 0{,}05$ ***).***

Solution :

1) **Choix des hypothèses :** *(test de conformité cas 5)*

$$H_0 : \tilde{P} = P \quad \text{l'affirmation du laboratoire est vraie}$$
$$H_1 : \tilde{P} < P \quad \text{l'affirmation du laboratoire est fausse}$$

Il s'agit d'un **test unilatéral à gauche** (égale contre inférieure)

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$T_0 = \frac{\tilde{P} - P}{\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}}} = 1{,}5811$$

3) **Identification de seuil critique :**
Le test est valable car les trois conditions sont bien remplies :

$$n > 30 \qquad nP = 28 > 5 \qquad n(1-P) = 8 > 5$$

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2 (de la variable normale réduite)

$$\alpha = 0{,}05 \qquad \bar{Z}_{2\alpha} = 1{,}645$$

Décision :

Test unilatéral à gauche : (égale contre inférieure)

Zone de rejet de H_0 *Zone d'acceptation de H_0*

$$-\infty \longrightarrow -\bar{Z}_{2\alpha} = -1{,}645 \longrightarrow +\infty$$

$$-1{,}645 < -1{,}5811 = T_0$$

Décision statistique : la statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de H_0.
Décision pratique : l'affirmation du laboratoire est vraie.

Les échantillons appariés

6 Les échantillons appariés

Des échantillons appariés sont des échantillons construits de façon à ce qu'ils soient composés d'individus possédant les mêmes caractéristiques. C'est le cas par exemple lorsque l'on mesure le même caractère sur les mêmes individus à deux moments différents (avant et après).

Exemple

Les valeurs de cet indice sur les neuf patients sont les suivantes : *Neuf malades présentant des symptômes d'anxiété reçoivent un traitement. On évalue l'état des malades avant et après traitement par un indice que le médecin traitant calcule d'après les réponses à une série de questions. Si le traitement est efficace, l'indice doit diminuer.*

Les valeurs de cet indice sur les neuf patients sont les suivantes :

Patient	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Avant	*1.83*	*0.50*	*1.62*	*2.48*	*1.68*	*1.88*	*1.55*	*3.06*	*1.30*
Après	*0.88*	*0.65*	*0.59*	*2.05*	*1.06*	*1.29*	*1.06*	*3.14*	*1.29*

Le traitement est-il efficace au seuil de 0.05 ?

Solution :

Patient *1* *2* *3* *4* *5* *6* *7* *8* *9*
Différence *0.95* *-0.15* *1.03* *0.43* *0.62* *0.59* *0.49* *-0.08* *0.01*

Différence $=$ *avant* $-$ *après*

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = 0{,}43222 \qquad S_D = \sqrt{\frac{\sum(D_i - \bar{D})^2}{n-1}} = 0{,}42845$$

Remarque : *directement utiliser la touche* ***xσn-1*** *dans la calculatrice pour identifier* S_D

1) ***Choix des hypothèses :*** *(test de conformité cas 5)*

Il s'agit d'un ***test unilatéral à droite*** *(égale contre supérieure) Parce qu'on discute la diminution de l'indice (avant* $-$ *après* > 0*)*

$$H_0 : \mu = 0$$
$$H_1 : \mu > 0$$

2) Calcul de la statistique de test observée :

$$T_0 = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} = 3{,}0239$$

3) Identification de seuil critique :

$$\alpha = \mathbf{0{,}05} \qquad ddl = n - 1 = 8 \qquad t_{2\alpha} = 1{,}86$$

4) Décision :

$$T_0 > t_{2\alpha} \qquad 3{,}0239 > 1{,}86$$

Test unilatéral à droite : (égale contre supérieure)

Zone d'acceptation de H_0 *Zone de rejet de H_0*

$$-\infty \longrightarrow t_{2\alpha} \longrightarrow +\infty$$

Décision statistique : *La statistique de test se trouve dans la zone de rejet de H_0*
Décision pratique : *Le traitement est efficace*

MES NOTES PERSONNELLES

MES NOTIONS À REVOIR

Points clés de cours