

Diagonalizacja macierzy metodą potęgową.

Tomasz Chwiej

27 marca 2018

1 Zadania do wykonania

1. Utworzyć macierz symetryczną A rzędu $n = 7$, której elementy są dane wzorem

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 + |i - j|}} \quad (1)$$

gdzie: $i, j = 0, 1, \dots, n - 1$. Macierz jest symetryczna więc ma wszystkie wartości własne rzeczywiste, podobnie jak składowe wszystkich wektorów własnych.

2. Wartości własne wyznaczymy iteracyjnie, przy użyciu metody potęgowej, zgodnie z poniższym algorytmem

$$\begin{aligned} W_0 &= A && \text{(inicjalizacja macierzy iterującej)} \\ \text{for}(k = 0; k < K_{val}; k++) \{ \\ &\mathbf{x}_k^0 = [1, 1, \dots, 1] && \text{(inicjalizacja wektora startowego)} \\ &\text{for}(i = 1; i \leq IT_MAX; i++) \{ \\ &\quad \mathbf{x}_k^{i+1} = W_k \mathbf{x}_k^i \\ &\quad \lambda_k^i = \frac{(\mathbf{x}_k^{i+1})^T \mathbf{x}_k^i}{(\mathbf{x}_k^i)^T \mathbf{x}_k^i} \\ &\quad \mathbf{x}_k^i = \frac{\mathbf{x}_k^{i+1}}{\|\mathbf{x}_k^{i+1}\|_2} \\ &\quad \} \\ &W_{k+1} = W_k - \lambda_k^i \mathbf{x}_k^i (\mathbf{x}_k^i)^T && \text{(iloczyn tensorowy)} \\ &\} \end{aligned}$$

gdzie:

- k - numer wyznaczanej wartości własnej,
- i - numer iteracji dla określonego k ,
- A - macierz pierwotna,
- W_k - macierz iteracji,
- λ_k^i - przybliżenie k -tej wartości własnej w i -tej iteracji,
- \mathbf{x}_k^i - i -te przybliżenie k -tego wektora własnego,
- $K_{val} = n$ - liczba wartości własnych do wyznaczenia,
- $IT_MAX = 12$ - maksymalna liczba iteracji dla każdego k .

Dla każdego k zapisać kolejne przybliżenia wartości własnych λ_k^i do pliku. W kolumnach macierzy X zachowujemy wyznaczone wektory własne

$$X = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] \quad (2)$$

3. Wyznaczyć postać macierzy D zdefiniowanej jako iloczyn

$$D = X^T A X \quad (3)$$

Macierz D zapisać do pliku.

4. W sprawozdaniu przedyskutować kolejność znalezionych wartości własnych, liczbę iteracji potrzebną do znalezienia każdej z nich oraz postać macierzy D . Sporządzić rysunek, na którym proszę umieścić kolejne przybliżenia znalezionych wartości własnych.

2 Uwagi

Do wyznaczania iloczynów: macierz-wektor, wektor-wektor, macierz-macierz oraz modyfikacji macierzy W_{k+1} proszę stworzyć oddzielne funkcje. Dzięki temu kod zyska na przejrzystości.