

## 习题

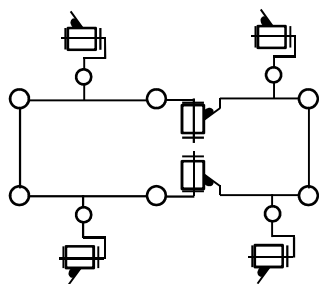
### 第1章 习题

- 习题 1.1: 机器人的定义多种多样, 你认为哪一种定义更加符合机器人的现状? 请简要叙述理由。
- 习题 1.2: 有人认为“认知机器人”是智能机器人, 如果对智能机器人进行定义, 你认为应如何定义?
- 习题 1.3: 什么是机器人的“示教再现”? “示教再现”的价值体现在哪里?
- 习题 1.4: 目前, 最具有代表性的机器人有哪些类型? 试举例说明其用途或前景。
- 习题 1.5: ISO 按照机器人的用途对机器人进行分类, 请问具体分为几类? ISO 对机器人分类的具体依据是什么?
- 习题 1.6: 机器人的主要分类方式有哪些? 按照几何结构分类时, 主要分为几类?
- 习题 1.7: 维/纳机器人有两种含义, 分别是什么? 较常见的微/纳机器人是哪一种?
- 习题 1.8: 机器人的主要研究领域有哪些? 你认为最重要的研究领域是什么?
- 习题 1.9: 试列出与机器人相关性较强的几种学术期刊。
- 习题 1.10: 试列出国内重要的几家机器人研究机构或企业, 并说明其特色。
- 习题 1.11: 机器人的发展趋势有哪些? 你认为哪一个方向是机器人最重要的发展方向? 为什么?
- 习题 1.12: 阿西莫夫提出的机器人三原则是什么?
- 习题 1.13: 为什么机器人被誉为“制造业皇冠顶端上的明珠”?
- 习题 1.14: 目前, 机器人已经应用于哪些领域? 试举例说明之。
- 习题 1.15: 何为机器人操作系统? 其作用是什么?
- 习题 1.16: 什么是演示编程? 什么是运动自编程?
- 习题 1.17: 机器人感知的研究内容主要有哪些方面? 机器人智能感知的内涵是什么?
- 习题 1.18: 何为“行为理解”? “行为理解”在智能机器人系统中具有什么作用?
- 习题 1.19: 你对机器人的通用性和适应性是如何理解的? 提高机器人对环境适应性的途径有哪些?
- 习题 1.20: 你对机器人的学习能力有何看法? 具有学习能力的机器人有何优势? 如何提高机器人的学习能力?

### 第2章 习题

- 习题 2.1: 什么是自由度? 在平面内运动的移动机器人具有几个自由度? 水下机器人具有几个自由度? 质点在三维空间内具有几个自由度? 单位矢量在三维空间内具有几个自由度?
- 习题 2.2: 什么是运动副? 低副和高副分别指什么样的运动副?
- 习题 2.3: 单关节和多关节分别是什么样的关节? 什么样的关节是平移关节? 什么样的关节是旋转关节?
- 习题 2.4: 什么样的机构是串联机构? 串联机构的手臂式球面坐标机器人、SCARA 结构的柱面坐标机器人、直角坐标机器人各有什么特点?
- 习题 2.5: 什么样的机构是并联机构? 常见的 3 自由度平面并联机构具有哪几种形式? 常见的三维并联机构具有哪几种形式?
- 习题 2.6: 什么是轮式机构? 轮式机构分为几种形式? 轮式机构具有什么特点?
- 习题 2.7: 常见的复合运动机构有哪些形式? 各有什么特点?
- 习题 2.8: 常见的仿生运动机构有哪些形式? 各有什么特点?
- 习题 2.9: 什么是变胞机构? 变胞方式有几种?

习题 2.10: 如下图所示的多构型变胞机构有几种构型? 请画出其不同构型的简图。



习题 2.10 附图 多构型变胞机构示意图

### 第 3 章 习题

习题 3.1: 利用齐次变换矩阵表示位姿矩阵  ${}^A T_B$  中, 有几个独立变量? 为什么?

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A p_B \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习题 3.2: 对于齐次变换矩阵  $T$ , 请写出其逆矩阵的表达式。

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习题 3.3: 请解释“右乘联体左乘基”的物理意义。

习题 3.4: 齐次坐标变换是否与变换顺序有关?

习题 3.5: 某 6 自由度机器人末端的当前位姿为

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 在  $T$  的基础上, 若机器人的末端先绕基坐标系的  $X$  轴旋转  $90^\circ$ , 再沿基坐标系的  $Y$  轴平移 100, 求机器人末端在基坐标系的位姿  $T_1$ 。

(2) 在  $T$  的基础上, 若机器人的末端先沿基坐标系的  $Y$  轴平移 100, 再绕基坐标系的  $X$  轴旋转  $90^\circ$ , 求机器人末端在基坐标系的位姿  $T_2$ 。

习题 3.6: 已知矢量  $\mathbf{u}$  和坐标系  $F$ ,  $\mathbf{u}$  为由  $F$  描述的一点。

$$\mathbf{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 确定表示同一点但由基坐标系描述的  $\mathbf{v}$ 。

(2) 首先让  $F$  绕基坐标系的  $Y$  轴旋转  $90^\circ$ , 然后沿基坐标系的  $X$  轴平移 20。求变换所得的新坐标系  $F'$ 。

(3) 确定基坐标系下同一点但由坐标系  $F'$  描述的矢量  $u'$ 。

(4) 作图表示  $u, v, u', F$  和  $F'$  之间的关系。

习题 3.7: 给定姿态矩阵  $R$ , 求通用旋转变换的转角  $\theta$  和转轴  $f$ 。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习题 3.8: 简述姿态描述的常用方式。

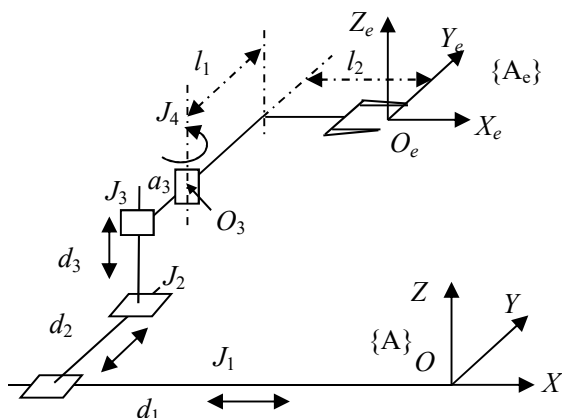
#### 第 4 章 习题

习题 4.1: 试简述 D-H 连杆 4 参数的含义。

习题 4.2: 请问连杆坐标系一般如何建立?

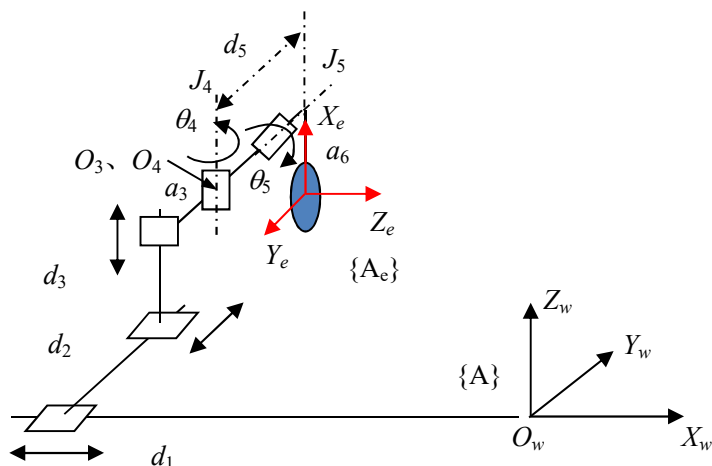
习题 4.3: 如果连杆坐标系建立在下一关节轴线  $J_{i+1}$  上, 试问相邻连杆坐标系之间的连杆变换矩阵的 4 次变换是什么?

习题 4.4: 某机器人由 3 个平移关节和 1 个旋转关节构成, 基坐标系和末端坐标系的建立如下图所示。请推导该机器人的运动学方程。



习题 4.4 附图 4 自由度直角坐标机器人

习题 4.5: 某机器人由 3 个平移关节和 2 个旋转关节构成, 基坐标系和末端坐标系的建立如下图所示。请推导该机器人的运动学方程。



习题 4.5 附图 5 自由度直角坐标机器人

- 习题 4.6: 对于 2-2-2 正交结构的并联机器人, 请以矩阵形式写出其增量式运动学方程。
- 习题 4.7: 写出双轮差动驱动的移动机器人的运动学速度模型及其非完整性约束, 并解释非完整性约束的物理意义。

## 第 5 章 习题

- 习题 5.1: 什么结构的串联关节机器人的逆向运动学有多解? 什么结构的串联关节机器人的逆向运动学有唯一解? 为什么?
- 习题 5.2: 球面坐标手臂式串联关节 6 自由度机器人的逆向运动学, 在非奇异位姿下最多有几个解? SCARA 型柱面坐标 4 自由度机器人的逆向运动学最多有几个解?
- 习题 5.3: 4 自由度 Adept Cobra 机器人逆向运动学有解的必要条件是什么?
- 习题 5.4: 6 自由度 Stewart 并联机器人逆向运动学如何求解?
- 习题 5.5: 推导习题 4.4 所示 4 自由度直角坐标机器人的逆向运动学。
- 习题 5.6: 推导习题 4.5 所示 5 自由度直角坐标机器人的逆向运动学。
- 习题 5.7: 欠驱动机器人的逆向运动学是否一定存在? 为什么?
- 习题 5.8: 冗余自由度串联关节机器人的逆向运动学求解方法有哪些?

## 第 6 章 习题

- 习题 6.1: 什么是串联关节机器人的微分运动? 微分运动具有什么性质?
- 习题 6.2: 简要说明微分等价变换的物理意义, 写出微分等价变换公式。

习题 6.3: 已知基坐标系  $\{W\}$  在坐标系  $\{E\}$  中的表示为:  ${}^E T_W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 坐标系  $\{B\}$

在坐标系  $\{E\}$  中的表示为:  ${}^E T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。相对于基坐标系的微分

运动, 其微分平移分量分别为沿基坐标系的  $x$  轴平移 -0.1 mm, 沿基坐标系的  $y$  轴平移 0.2 mm, 沿基坐标系的  $z$  轴平移 0.1 mm, 微分旋转分量分别为绕基坐标系的  $x$  轴旋转 0.01 rad, 绕基坐标系的  $y$  轴旋转 -0.02 rad, 绕基坐标系的  $z$  轴旋转 0.01 rad。

(1) 求微分变换  $dB$ 。

(2) 求相对于坐标系  $\{B\}$  的等价微分平移  ${}^B d$  和等价微分旋转  ${}^B \delta$ 。

- 习题 6.4: 对于两个坐标系  $\{A\}$  和  $\{B\}$ , 它们在基坐标系  $\{W\}$  中的位姿分别为

$${}^W T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^W T_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有一个平面，在坐标系{A}中的方程为  $X_A + 2Y_A - Z_A + 2 = 0$ ，试求该平面分别在基坐标系{W}和坐标系{B}中的方程。

习题 6.5：串联关节机器人的雅可比矩阵的物理意义是什么？

习题 6.6：利用矢量积法和微分变换法求取串联关节机器人的雅可比矩阵，有何不同？

习题 6.7：简述利用微分变换法求取串联关节机器人雅可比矩阵的步骤。

习题 6.8：推导习题 4.4 所示 4 自由度直角坐标机器人的雅可比矩阵。

习题 6.9：推导习题 4.5 所示 5 自由度直角坐标机器人的雅可比矩阵。

习题 6.10：在串联关节机器人的雅可比矩阵满秩时，利用末端速度如何转换出关节速度？

习题 6.11：串联关节机器人的末端广义静力如何转换为关节空间的静力？

习题 6.12：已知坐标系{C}在基坐标系{W}的表示为：
$${}^WT_C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
，在坐标系

{C}中施加广义力 ${}^CF = [10 \ 0 \ -10 \ 5 \ 0.1 \ 2]^T$ 。求在基坐标系{W}中的等效广义力 $F$ 。

习题 6.13：利用机器人的逆向运动学可以控制机器人的运动，利用机器人的 Jacobian 矩阵也可以控制机器人的运动。试比较两者的不同之处，说明各自的特点。

## 第 7 章 习题

习题 7.1：串联关节机器人关节空间的运动规划主要有哪些方式？3 次 B 样条插值具有什么特点？

习题 7.2：串联关节机器人的末端运动轨迹是如何规划的？

习题 7.3：串联关节机器人只进行末端轨迹规划，将轨迹规划点尽可能密集，是否可以避免关节空间的运动规划？为什么？

习题 7.4：对串联关节机器人末端的运动轨迹按照直线进行规划，规划点之间的末端轨迹是否能够保证是直线？

习题 7.5：点到点的运动与路径跟踪运动的区别是什么？

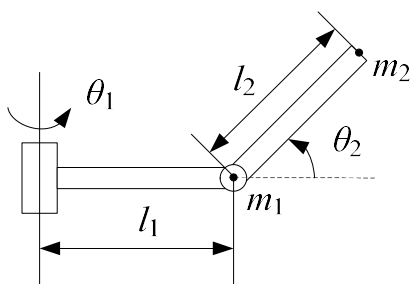
习题 7.6：路径跟踪运动时，能否做到实际运动路径与期望路径严格一致，为什么？

习题 7.7：试比较多项式插值与抛物线过渡的线性插值的优缺点。

## 第 8 章 习题

习题 8.1：简述串联关节机器人的动力学求解步骤。

习题 8.2：如下图所示，两个连杆的质量均集中于连杆末端，连杆的长度分别为  $l_1$  和  $l_2$ ，其质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ，利用拉格朗日法建立该系统的动力学方程。



习题 8.2 附图 两连杆机器人

## 答案

### 第1章 习题答案

习题 1.3: 工业机器人经过示教后回放工作的方式,称为示教再现(Teaching/playback)方式(简称 T/P 方式)。示教盒示教方式不仅可以提高示教操作精度,而且使用非常简单,普通操作员经过简单培训就能操作。示教再现使机器人具有使用方式的通用性和灵活性,对工业机器人大规模进入工厂发挥了非常重要的促进作用。

习题 1.4: 最具有代表性的机器人包括工业机器人、服务机器人和人形机器人。  
工业机器人已经成为工厂自动化的重要装备,广泛用于汽车、机械加工、电子、食品、物流等行业,仅 2017 年全球销售工业机器人 38 万多台。  
服务机器人也已经进入实用化阶段,并呈现出快速发展的趋势,主要用于物流、国防、公共服务、奶业、医疗等领域。  
目前,波士顿动力公司的人形机器人不仅能在崎岖不平的地形上行走自如,还能自己开门走出房间,穿越白雪覆盖的林地,表现出极强的越障性能和环境自适应能力,有望应用于复杂场景的自主作业。

习题 1.5: ISO 按照机器人的用途将机器人分为两大类,分别为工业机器人和服务机器人。用于工业自动化用途的 3 轴及以上的机器人,分类为工业机器人。除工业机器人之外的机器人,分类为服务机器人。

习题 1.6: 机器人的主要分类方式包括按照用途、几何结构、移动性分类。按照几何结构分类时,可以利用坐标特性分类、利用机构特性分类、利用几何尺寸分类等。其中,利用坐标特性,可以将工业机器人分类为直角坐标机器人、柱面坐标机器人和球面坐标机器人;利用机构特性,可以将工业机器人分类为串联机器人和并联机器人;按照尺寸分类,机器人可以分为大型机器人、一般机器人、微小型机器人。

习题 1.7: 维/纳机器人有两种含义,维/纳机器人有两种含义,一种是尺度上为微米或纳米的机器人,一种是精度为微米或纳米的机器人。较常见的微/纳机器人是尺度上为微米或纳米的机器人。

习题 1.8: 机器人的主要研究领域包括机构、感知、驱动、建模、规划、控制、编程、交互、计算、应用等。

习题 1.9: 与机器人相关性较强的学术期刊:《IEEE Transactions on Robotics》、《IEEE Transactions on Automation Science and Engineering》、《IEEE Transactions on Cybernetics》、《IEEE/ASME Transaction on Mechatronics》、《IEEE Transactions on Industrial Electronics》、《International Journal of Robotics Research》、《Autonomous Robot》等。

习题 1.10: 中国科学院沈阳自动化研究所,工业机器人,水下机器人  
中国科学院自动化研究所,机器鱼,智能机器人  
哈尔滨工业大学,维纳精度机器人  
北京航空航天大学,医疗机器人,远程手术  
北京理工大学,人形机器人  
沈阳新松机器人自动化股份有限公司,工业机器人  
安徽埃夫特智能装备有限公司,工业机器人  
广州数控设备有限公司,工业机器人

习题 1.11: 机器人的发展趋势包括智能化、灵巧化、群体化、计算机化等。

习题 1.12: 阿西莫夫提出的机器人三原则是:(1) 机器人不得伤害人类,或坐视人类受到伤害。(2) 除非违背第一条原则,机器人必须服从人类的命令。(3) 在不违背前两条原则的前提下,机器人必须保护自己。

- 习题 1.13: 机器人作为智能制造的重要载体, 被誉为“制造业皇冠顶端上的明珠”。
- 习题 1.14: 工业机器人已经成为工厂自动化的重要装备, 广泛用于汽车、机械加工、电子、食品、物流等行业, 仅 2017 年全球销售工业机器人 38 万多台。工业机器人密度最高的行业是汽车制造业, 目前汽车生产线已经普遍采用工业机器人进行作业。服务机器人也已经进入实用化阶段, 并呈现出快速发展的趋势, 主要用于物流、国防、公共服务、奶业、医疗等领域。达芬奇手术机器人, 在医生的操作下可以完成复杂的微创外科手术。
- 习题 1.15: 机器人操作系统 ROS 是斯坦福大学在 2005 年左右发起的机器人开源代码库, 是仿照计算机操作系统的一种机器人开发环境。ROS 提供一系列程序库和工具, 提供了硬件抽象、设备驱动、函数库、可视化工具、消息传递和软件包管理等功能, 能够帮助软件开发者快速创建机器人应用软件。
- 习题 1.16: 对于服务机器人, 可以通过视觉系统提取人演示过程中的运动轨迹, 经过处理后转化成机器人的运动轨迹, 机器人就可以模仿人的动作。这种通过演示完成机器人运动编程的过程, 称为演示编程。  
工业机器人为用户提供许多运动函数或者 G 代码, 用于用户对机器人的运动控制。利用这些运动函数或者 G 代码, 可以实现机器人的运动自编程。
- 习题 1.17: 机器人感知的研究内容主要有传感器、传感系统、感知方法的研究。具有智能性的感知被称为智能感知, 机器人智能感知的内涵是指通过对传感信息的深度加工获得机器人的外部或内部信息。
- 习题 1.18: “行为理解”是对行为意图和行为目标的理解, 力图弄清楚要做什么、有什么边界条件、要达成什么目标, 包括运动过程、运动约束和终止条件等。目前的学习方法注重动作或者轨迹的模仿, 对行为缺乏理解, 对行为的意图更是没有涉及。对行为意图的理解, 不仅对于技能学习具有重要作用, 而且对于行为的复现具有深远的影响。行为理解有助于提高机器人的技能学习效率和自主作业的适应能力。

## 第 2 章 习题答案

- 习题 2.1: 物体能够对坐标系进行的独立运动称为自由度, 独立运动的数量称为自由度数量。  
在平面内运动的移动机器人具有 3 个自由度, 分别为 2 个平移自由度和 1 个旋转自由度。  
水下机器人具有 6 个自由度, 分别为 3 个平移自由度和 3 个旋转自由度。  
质点在三维空间内具有 3 个自由度, 为平移自由度。  
单位矢量在三维空间内具有 2 个自由度, 为旋转自由度。
- 习题 2.2: 运动副是两个构件直接接触并能产生相对运动的机械联接。按照运动副的接触形式分类, 面接触的运动副在接触部分的压强较低, 被称为低副; 点或线接触的运动副在接触部分的压强较高, 被称为高副。
- 习题 2.3: 具有 1 个自由度的关节称为单关节, 多于 1 个自由度的关节称为多自由度关节。  
具有 1 个旋转自由度的关节称为旋转关节, 具有 1 个平移自由度的关节称为平移关节。
- 习题 2.4: 串联机构是指不同关节之间为串联, 不同连杆之间为串联的机构。  
串联机构的手臂式球面坐标机器人的特点: (1) 关节 1~5 处于同一个平面内。(2) 关节 2 和关节 3 的轴线平行。(3) 关节 4~6 的轴线相交于一点。(4) 调整末端位置和姿态时, 需要 6 个关节联动。  
SCARA 结构的柱面坐标机器人的特点: (1) 4 个关节轴线平行。(2) 关节 1~3 可



以认为在平行于 XOY 的平面内。(3) 位置与姿态的耦合性较弱, 末端 Z 坐标位置只受关节 4 影响, 独立于其它关节; 关节 3 只用于确定末端姿态, 不影响末端位置; 末端的 X、Y 坐标位置由关节 1 和关节 2 确定。

直角坐标机器人的特点: (1) 3 个平移关节轴线相互垂直。(2) 各个平移关节的运动相互解耦。

习题 2.5: 并联机构是指不同关节之间为并联, 不同连杆之间为并联的机构。

常见的 3 自由度平面并联机构包括 RPR 型和 RRR 型。RPR 型平面 3 自由度并联机构, 由 3 组 RPR 型运动支链构成。每组运动支链的移动副为主动运动, 转动副为被动运动。RRR 型平面 3 自由度并联机构, 由 3 组 RRR 型运动支链构成。每组运动支链的固定端转动副为主动运动, 其它转动副为被动运动。

三维空间并联机器人常见的构型包括 Delta(俗称蜘蛛手)结构、Stewart 结构、正交结构、绳索结构等。蜘蛛手结构的并联机器人, 每组支链采用 RRR 构型, 通常由 3 组或者 4 组支链构成。Stewart 结构的并联机器人, 每组支链采用 SPS 构型, 通常由 6 组支链构成, 末端具有 6 个自由度。正交结构的并联机器人, 一般由 6 组 PS 运动支链构成, 分布在 3 个正交方向上。绳索结构的并联机器人, 采用 6 条绳索牵引移动端, 移动端具有 6 个自由度。

习题 2.6: 轮式机构是通过轮子旋转进行运动的机构, 是移动机器人的常用移动机构。

按照车轮的数量, 轮式机构可以分为单轮、双轮、多轮。按照车轮的运动特性, 轮式机构可以分为普通轮和全向轮。

轮式机构的移动机器人运动速度快, 反应灵敏, 应用广泛。但只采用车轮的移动机器人越障能力一般较差, 需要结合其它方式的机构提高越障能力。

习题 2.7: 常见的复合运动机构包括轮腿、摆臂、履带等。

轮腿分为两种类型, 一种为腿状轮, 即车轮具有腿的形状, 可以提高机器人的越障能力; 一种为腿加轮, 即在腿的足部加装车轮, 用于提高腿足机器人的运动能力。摆臂主要用于增加越障能力, 例如上下楼梯等。履带机构广泛应用于野外作业机器人, 具有地形适应性强、越障能力强的特点。

习题 2.8: 常见的仿生运动机构包括足式运动机构、游动机构、扑翼机构等。

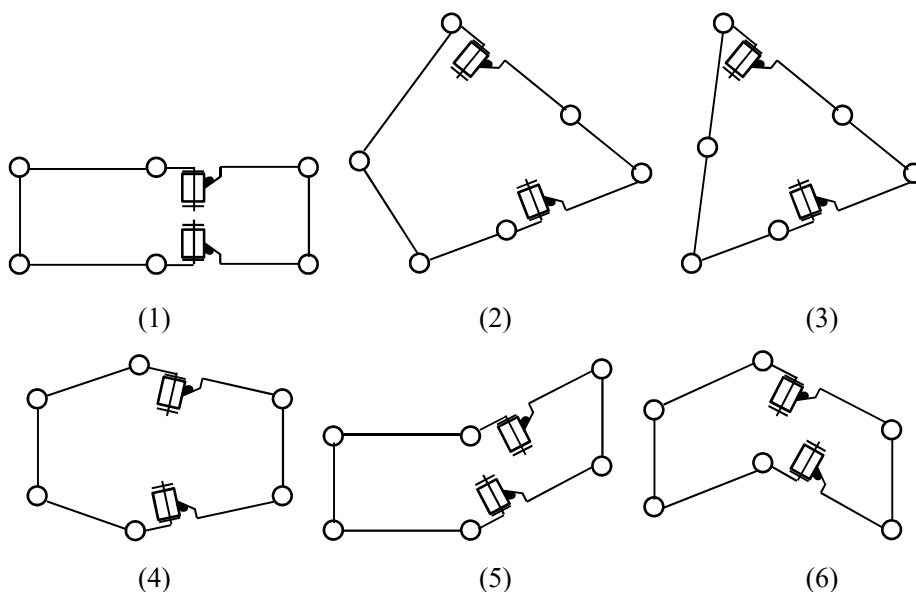
足式运动机构一般为偶数腿足。其中, 两足机构是仿人的腿足机构, 四足机构是仿狗、豹等四足动物的腿足机构, 六足机构是仿昆虫的腿足机构。足式运动机构具有地形适应性强、越障能力强的特点。

游动运动机构是利用摆动形成运动的机构, 各个连杆之间串联。机器海豚能够上浮、下潜、跃出水面、快速转弯等, 机器蛇能够蜿蜒运动、将身体的某些部分抬起或放下。游动运动机构表现出很好的运动灵活性。

扑翼运动机构是利用扇动形成运动的机构。德国 Festo 公司研制的机器蜻蜓 BionicOpter, 能够朝着任何方向飞行, 能够快速加速、减速、转弯、后退, 并能稳定悬停, 表现出很好的运动灵活性。

习题 2.9: 变胞机构是一类具有变拓扑的结构, 通常其构件数和自由度可发生改变。变胞方式主要包括力变胞、几何变胞、电磁变胞、组合变胞、固结变胞等。

习题 2.10: 具有 6 种构型, 其构型简图如下图所示。



变胞机器人身体的 6 种构型，(1) 矩形，(2) 四边形，(3) 三角形，(4) 六边形，(5) 一端抬起，(6) 中间隆起

### 第 3 章 习题答案

习题 3.1：利用齐次变换矩阵表示位姿矩阵  ${}^4T_B$  中，有 6 个独立变量。其中， ${}^4p_B$  中有 3 个独立变量，对应于 3 个平移自由度； ${}^4R_B$  是单位正交阵， ${}^4R_B$  中有 3 个独立变量，对应于 3 个旋转自由度。

习题 3.2：对于齐次变换矩阵  $T$ ，其逆矩阵的表达式如下。

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p \cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习题 3.3：“右乘联体左乘基”指以联体坐标系为基础进行的变换采用右乘，以基坐标系为基础进行的变换采用左乘。例如， $T=T_1T_2T_3$ ，从联体变换的角度可以理解为在变换  $T_1$  基础上进行了变换  $T_2$ ，在变换  $T_2$  基础上进行了变换  $T_3$ ；从基坐标系变换的角度可以理解为在基坐标系基础上进行了变换  $T_3$ ，然后在基坐标系基础上进行了变换  $T_2$ ，再在基坐标系基础上进行了变换  $T_1$ 。

习题 3.4：纯平移变换与变换次序无关，旋转变换与变换次序有关，复合变换与变换次序有关。

习题 3.5：由于是在基坐标系下的变换，所以采用左乘。

(1)

$$\begin{aligned}
T_1 &= \text{Trans}(0,100,0)\text{Rot}(X,90^\circ)T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 200 \\ -1 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
T_2 &= \text{Rot}(X,90^\circ)\text{Trans}(0,100,0)T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 200 \\ -1 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & -1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

习题 3.6: (1)

$$\begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 故 } v = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}.$$

(2)

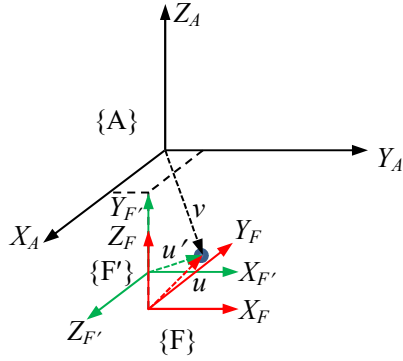
$$\begin{aligned}
F' &= \text{Trans}(20,0,0)\text{Rot}(Y,90^\circ)F \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} = F' \begin{bmatrix} u' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ 1 \end{bmatrix} = F'^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4)



$u, v, u', F$  和  $F'$  之间的关系示意图

习题 3.7:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

$$\theta = \text{atan}(\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}, n_x + o_y + a_z - 1)$$

$$= \text{atan}(2, 0) = 90^\circ$$

$$\begin{cases} f_x = (o_z - a_y) / (2 \sin \theta) = 0 \\ f_y = (a_x - n_z) / (2 \sin \theta) = 0 \\ f_z = (n_y - o_x) / (2 \sin \theta) = 1 \end{cases}$$

通用旋转变换的转轴  $f = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$ , 转角  $\theta = 90^\circ$ 。换言之, 通用旋转变换是绕 Z 轴旋转  $90^\circ$ 。

习题 3.8: 姿态描述的常用方式包括姿态矩阵、转轴和转角、欧拉角、四元数。

#### 第 4 章 习题答案

习题 4.1: D-H 连杆 4 参数包括连杆长度  $a$ 、连杆扭转角  $\alpha$ 、连杆偏移量  $d$  和旋转角  $\theta$ 。

连杆长度: 两个关节的关节轴线  $J_i$  与  $J_{i+1}$  的公垂线距离为连杆长度, 记为  $a_i$ 。

连杆扭转角: 由  $J_i$  与公垂线组成平面  $P$ ,  $J_{i+1}$  与平面  $P$  的夹角为连杆扭转角, 记为  $\alpha_i$ 。

连杆偏移量: 一个关节的相邻两条公垂线  $a_i$  与  $a_{i-1}$  的距离为连杆偏移量, 记为  $d_i$ 。

关节角: 关节  $J_i$  的相邻两条公垂线  $a_i$  与  $a_{i-1}$  在以  $J_i$  为法线的平面上的投影的夹角为关节角, 记为  $\theta_i$ 。

习题 4.2: 对于相邻三个关节  $J_{i-1}$ 、 $J_i$  和  $J_{i+1}$  的两个连杆  $C_i$  和  $C_{i+1}$ , 按照以下方式建立连杆坐

标系。

(1) 中间连杆  $C_i$  坐标系的建立:

原点  $O_i$ : 取关节轴线  $J_i$  与  $J_{i+1}$  的公垂线在与关节轴线的交点为坐标系原点。

$Z_i$  轴: 取原点所在的关节轴线的方向为  $Z_i$  轴方向。

$X_i$  轴: 取公垂线指向  $O_i$  的方向为  $X_i$  轴方向。

$Y_i$  轴: 根据右手定则由  $X_i$  轴和  $Z_i$  轴确定  $Y_i$  轴的方向。

(2) 第一连杆  $C_1$  坐标系的建立:

原点  $O_1$ : 取基坐标系原点为坐标系原点。

$Z_1$  轴: 取  $J_1$  的方向为  $Z_1$  轴方向。

$X_1$  轴:  $X_1$  轴方向任意选取。

$Y_1$  轴: 根据右手定则由  $X_1$  轴和  $Z_1$  轴确定  $Y_1$  轴的方向。

(3) 最后连杆  $C_n$  坐标系的建立: 最后一个连杆一般是抓手。

原点  $O_n$ : 取抓手末端中心点为坐标系原点。

$Z_n$  轴: 取抓手的朝向, 即指向被抓取物体的方向为  $Z_n$  轴方向。

$X_n$  轴: 取抓手一个指尖到另一个指尖的方向为  $X_n$  轴方向。

$Y_n$  轴: 根据右手定则由  $X_n$  轴和  $Z_n$  轴确定  $Y_n$  轴的方向。

习题 4.3: 如果连杆坐标系建立在下一关节轴线  $J_{i+1}$  上, 相邻连杆坐标系之间的连杆变换矩阵的 4 次变换如下:

第一次: 以  $Z_{i-1}$  轴为转轴, 旋转  $\theta_i$  角度, 使新的  $X_{i-1}$  轴与  $X_i$  轴同向。

第二次: 沿  $Z_{i-1}$  轴平移  $d_i$ , 使新的  $O_{i-1}$  移动到关节轴线  $J_i$  与  $J_{i+1}$  的公垂线在与  $J_i$  的交点。

第三次: 沿新的  $X_{i-1}$  轴( $X_i$  轴)平移  $a_i$ , 使新的  $O_{i-1}$  移动到  $O_i$ 。

第四次: 以  $X_i$  轴为转轴, 旋转  $\alpha_i$  角度, 使新的  $Z_{i-1}$  轴与  $Z_i$  轴同向。

习题 4.4: 在  $O_3$  处建立坐标系  $\{A_3\}$ , 其坐标轴的方向与基坐标系坐标轴的方向相同。基坐标系  $\{A\}$  到坐标系  $\{A_3\}$  的变换矩阵为  $T_3$ :

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将旋转关节的关节角记为  $\theta_4$ 。坐标系  $\{A_3\}$  到末端坐标系  $\{A_e\}$  的变换矩阵为  $T_4$ :

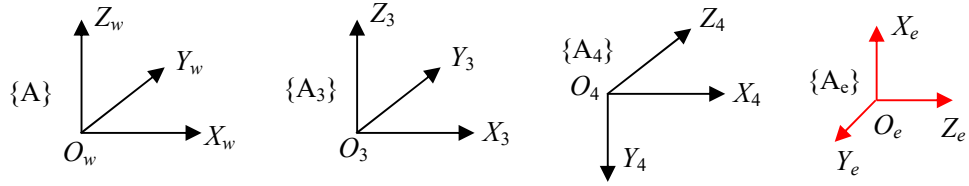
$$T_4 = \text{Rot}(Z, \theta_4) \text{Trans}(l_2, l_1, 0) = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

运动学方程为:

$$\begin{aligned}
T = T_3 T_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 + d_1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 + d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

习题 4.5:



坐标系的建立如上图所示。在  $O_3$  处建立坐标系  $\{A_3\}$ ，其坐标轴的方向与基坐标系坐标轴的方向相同。基坐标系  $\{A\}$  到坐标系  $\{A_3\}$  的变换矩阵为  $T_3$ ：

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在  $O_4$  处建立坐标系  $\{A_4\}$ ，其  $Z_4$  轴的方向为关节轴线  $J_5$  方向，初始状态下与  $Y_w$  轴方向相同；其  $X_4$  轴的方向初始状态下与  $X_w$  轴方向相同；其  $Y_4$  轴的方向初始状态下与  $Z_w$  轴方向相反。坐标系  $\{A_3\}$  到坐标系  $\{A_4\}$  的变换矩阵为  $T_4$ ：

$$\begin{aligned}
T_4 &= \text{Rot}(Z, \theta_4) \text{Rot}(X, -90^\circ) = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

坐标系  $\{A_4\}$  到坐标系  $\{A_e\}$  的变换矩阵为  $T_5$ ：

$$\begin{aligned}
T_5 &= \text{Rot}(Z, \theta_5) \text{Trans}(0, a_6, d_5) \text{Rot}(Z, -90^\circ) \text{Rot}(X, -90^\circ) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & -a_6 \sin \theta_5 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & a_6 \cos \theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

运动学方程为:

$$\begin{aligned}
T &= T_3 T_4 T_5 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 & d_1 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & d_2 + a_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 + d_1 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 & -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 + d_2 + a_3 \\ \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & -a_6 \cos \theta_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

习题 4.6: 对于 2-2-2 正交结构的并联机器人, 其矩阵形式的增量式运动学方程为:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/(2d) & 1/(2d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(2d) & 1/(2d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/(2d) & 1/(2d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \\ \Delta l_4 \\ \Delta l_5 \\ \Delta l_6 \end{bmatrix}$$

习题 4.7: 双轮差动驱动的移动机器人的运动学速度模型为:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{v_1 + v_2}{2} \cos \theta \\ \dot{y} = \frac{v_1 + v_2}{2} \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v_1 - v_2}{L} \end{cases}$$

其非完整性约束为：

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$

双轮差动驱动的移动机器人的非完整性约束，其物理意义是移动机器人不能沿驱动轮的旋转轴的轴向运动。

## 第 5 章 习题答案

习题 5.1：球面坐标手臂式串联关节 6 自由度机器人的逆向运动学有多解，SCARA 型柱面坐标 4 自由度机器人的逆向运动学有多解，6 自由度直角坐标机器人的逆向运动学有多解。上述串联关节机器人的末端笛卡尔空间到关节空间的映射，是复射，具有多解。例如，球面坐标手臂式串联关节 6 自由度机器人在非奇异位姿下最多有 6 个解，SCARA 型柱面坐标 4 自由度机器人的逆向运动学有 2 个解，6 自由度直角坐标机器人的逆向运动学，在绕  $y$  轴旋转角度  $\theta = \pm\pi/2$  时，其它绕  $x$  轴和  $z$  轴旋转的两个角度有无穷多解。

习题 4.4 所示的 4 自由度直角坐标机器人，习题 4.5 所示的 5 自由度的直角坐标机器人，在可达空间内其逆向运动学具有唯一解。在可达空间内，其姿态与关节角是一一对应关系。旋转关节的关节角确定后，可以确定出移动关节的唯一位置。

习题 5.2：球面坐标手臂式串联关节 6 自由度机器人的逆向运动学，在非奇异位姿下最多有 6 个解，SCARA 型柱面坐标 4 自由度机器人的逆向运动学最多有 2 个解。

习题 5.3：4 自由度 Adept Cobra 机器人逆向运动学有解的必要条件是：

$$\left| p_x^2 + p_y^2 - a_1^2 - a_2^2 \right| \leq 2a_1a_2$$

如果  $\theta_2$  的取值范围覆盖  $[0, 2\pi]$ ，则上式变成 4 自由度 Adept Cobra 机器人逆向运动学有解的充分必要条件。

习题 5.4：6 自由度 Stewart 并联机器人的逆向运动学问题，是根据给定的末端位姿求连杆长度。给定末端位姿后，可以计算出联接动平台的各个端点在基坐标系中的位置。然后，结合各个固定端点在基坐标系中的位置，利用两端点之间的距离计算出各个连杆长度。

习题 5.5：习题 4.4 所示 4 自由度直角坐标机器人的正向运动学为：

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 + d_1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 + d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于给定的末端位姿



$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & 0 & p_x \\ n_y & o_y & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用对应元素相等，得到：

$$\begin{cases} \theta_4 = \text{atan}(n_y, n_x) \\ d_1 = p_x - l_2 \cos \theta_4 + l_1 \sin \theta_4 \\ d_2 = p_y - l_2 \sin \theta_4 - l_1 \cos \theta_4 - a_3 \\ d_3 = p_z \end{cases}$$

习题 5.6：习题 4.5 所示 5 自由度直角坐标机器人的正向运动学为：

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 + d_1 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 & -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 + d_2 + a_3 \\ \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & -a_6 \cos \theta_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于给定的末端位姿

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & 0 & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用对应元素相等，得到：

$$\begin{cases} \theta_4 = \text{atan}(o_x, -o_y) \\ \theta_5 = \text{atan}(-a_z, n_z) \\ d_1 = p_x + a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \sin \theta_4 \\ d_2 = p_y + a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \cos \theta_4 - a_3 \\ d_3 = p_z + a_6 \cos \theta_5 \end{cases}$$

习题 5.7：欠驱动机器人的逆向运动学是不一定存在。由于受到机器人结构的约束，存在某些位姿是不可达的。

习题 5.8：冗余自由度串联关节机器人的逆向运动学求解方法包括：优化方法求解、分配自由度求解和约束求解等。

## 第 6 章 习题答案

习题 6.1：当串联关节机器人的运动量很小趋近于 0 时，称为机器人的微分运动。运动量很小的平移运动称为微分平移，运动量很小的旋转运动称为微分旋转。

微分运动具有的性质：在忽略高次项的前提下，微分变换与次序无关，即微分变换具有无序性。

习题 6.2：微分等价变换是基坐标系下的微分变换与联体坐标系下的微分变换之间的等价关系，它把在基坐标系下的微分运动等价于联体坐标系下的微分运动。

微分等价变换公式:

$$\begin{cases} {}^T d_x = n \cdot (\delta \times p + d) \\ {}^T d_y = o \cdot (\delta \times p + d), \\ {}^T d_z = a \cdot (\delta \times p + d) \end{cases} \quad \begin{cases} {}^T \delta_x = \delta \cdot n \\ {}^T \delta_y = \delta \cdot o \\ {}^T \delta_z = \delta \cdot a \end{cases}$$

$\delta \times p + d$  是基坐标系下的旋转和平移引起的末端位置矢量的平移量, 利用  $n$ 、 $o$ 、 $a$  分别点乘表示分别向  $n$ 、 $o$ 、 $a$  投影, 即表示成相对于末端坐标系的平移或旋转运动量。

习题 6.3: (1) 坐标系  $\{B\}$  在基坐标系  $\{W\}$  中的表示为:

$$\begin{aligned} {}^W T_B &= {}^W T_E {}^E T_B = {}^E T_W^{-1} {}^E T_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

基坐标系下的微分运动量为:

$$\begin{cases} d = -0.1\bar{i} + 0.2\bar{j} + 0.1\bar{k} \\ \delta = 0.01\bar{i} - 0.02\bar{j} + 0.01\bar{k} \end{cases}$$

微分变换矩阵  $\Delta$  为:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 & -0.02 & -0.1 \\ 0.01 & 0 & -0.01 & 0.2 \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

微分变换  $dB$  为:

$$\begin{aligned} dB &= \Delta {}^W T_B = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 & -0.02 & -0.1 \\ 0.01 & 0 & -0.01 & 0.2 \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.02 & 0 & 0.01 & -0.21 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & 0.19 \\ 0 & -0.02 & -0.01 & 0.19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 先计算  $\delta \times p$ , 再计算  $\delta \times p + d$ :

$$\delta \times p = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -0.11\bar{i} - 0.01\bar{j} + 0.09\bar{k}$$

$$\delta \times p + d = -0.21\bar{i} + 0.19\bar{j} + 0.19\bar{k}$$

由微分等价变换的公式，得到：

$$\begin{cases} {}^B d_x = n \cdot (\delta \times p + d) = 0.19 \\ {}^B d_y = o \cdot (\delta \times p + d) = 0.21 \\ {}^B d_z = a \cdot (\delta \times p + d) = -0.19 \end{cases}, \quad \begin{cases} {}^B \delta_x = \delta \cdot n = 0.01 \\ {}^B \delta_y = \delta \cdot o = -0.01 \\ {}^B \delta_z = \delta \cdot a = 0.02 \end{cases}$$

相对于坐标系{B}的等价微分平移和等价微分旋转为：

$$\begin{cases} {}^B d = 0.19\bar{i} + 0.21\bar{j} - 0.19\bar{k} \\ {}^B \delta = 0.01\bar{i} - 0.01\bar{j} + 0.02\bar{k} \end{cases}$$

习题 6.4: 将空间点在坐标系{A}和{B}和基坐标系{W}中的坐标记为 $(X_A, Y_A, Z_A)$ 、 $(X_B, Y_B, Z_B)$ 、 $(X_W, Y_W, Z_W)$ ，则该空间点在不同坐标系下的坐标具有下列关系：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ 1 \end{bmatrix} &= ({}^W T_A)^{-1} {}^W T_B \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \\ 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_B - 1 \\ Z_B + 10 \\ X_B - 9 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ 1 \end{bmatrix} &= ({}^W T_A)^{-1} \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_W - 1 \\ -Y_W + 5 \\ -Z_W + 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将上述关系代入平面方程  $X_A + 2Y_A - Z_A + 2 = 0$ ，得到该平面分别在基坐标系{W}

和坐标系{B}中的方程：

$$X_W - 2Y_W + Z_W + 10 = 0$$

$$-X_B + Y_B + 2Z_B + 30 = 0$$

习题 6.5: 串联关节机器人的雅可比矩阵的物理意义是关节速度到末端笛卡尔空间速度的传动比。

习题 6.6: 矢量积法求解雅可比矩阵时，机器人末端的运动速度是在基坐标系中的运动速度。

微分变换法求解雅可比矩阵时，机器人末端的运动速度是在末端坐标系中的运动

速度。

习题 6.7: 利用微分变换法求取串联关节机器人雅可比矩阵的步骤如下:

(1) 求取末端相对于第  $i-1$  连杆坐标系的变换矩阵  ${}^{i-1}T_6$ 。

(2) 利用末端相对于第  $i-1$  连杆坐标系的变换矩阵  ${}^{i-1}T_6$ , 计算雅可比矩阵的第  $i$  列  $J_i$ 。若第  $i$  关节为平移关节, 则雅可比矩阵的第  $i$  列  $J_i$  为:

$$J_i = \begin{bmatrix} {}^i n_z & {}^i o_z & {}^i a_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

若第  $i$  关节为旋转关节, 则雅可比矩阵的第  $i$  列  $J_i$  为:

$$J_i = \begin{bmatrix} ({}^i p \times {}^i n)_z & ({}^i p \times {}^i o)_z & ({}^i p \times {}^i a)_z & {}^i n_z & {}^i o_z & {}^i a_z \end{bmatrix}^T$$

${}^i p$ 、 ${}^i n$ 、 ${}^i o$  和  ${}^i a_z$  是末端在第  $i-1$  个连杆坐标系中的位姿矩阵  ${}^{i-1}T_6$  的矢量。

习题 6.8: 习题 4.4 所示 4 自由度直角坐标机器人的第 4 个关节为旋转关节, 第 3 连杆坐标系到末端坐标系的连杆变换矩阵为:

$${}^3T_4 = T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p \times n = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 & 0 \\ \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \end{vmatrix} = -l_1 \bar{k}$$

$$p \times o = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 & 0 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{vmatrix} = l_2 \bar{k}$$

雅可比矩阵的第 4 列为:

$$J_4 = \begin{bmatrix} ({}^4 p \times {}^4 n)_z & ({}^4 p \times {}^4 o)_z & ({}^4 p \times {}^4 a)_z & {}^4 n_z & {}^4 o_z & {}^4 a_z \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} -l_1 & l_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

第 3 个关节为沿 Z 轴的平移关节, 第 2 连杆坐标系到末端坐标系的变换矩阵为:

$${}^2T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在关节坐标系中的微分运动为  $d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T dq_i$ ,  $\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ 。雅可比矩阵的第 3 列为:

$$J_3 = \begin{bmatrix} {}^3 n_z & {}^3 o_z & {}^3 a_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

第 2 个关节为沿 Y 轴的平移关节, 第 1 连杆坐标系到末端坐标系的变换矩阵为:

$${}^1T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 + d_3 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在关节坐标系中的微分运动为  $d = [0 \ 1 \ 0]^T dq_i$ ,  $\delta = [0 \ 0 \ 0]^T$ 。雅可比矩阵的第 2 列为:

$$J_2 = [{}^2n_y \quad {}^2o_y \quad {}^2a_y \quad 0 \ 0 \ 0]^T = [\sin \theta_4 \quad \cos \theta_4 \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

第 1 个关节为沿 X 轴的平移关节, 基坐标系到末端坐标系的变换矩阵为:

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_2 \cos \theta_4 - l_1 \sin \theta_4 + d_1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \sin \theta_4 + l_1 \cos \theta_4 + d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在关节坐标系中的微分运动为  $d = [1 \ 0 \ 0]^T dq_i$ ,  $\delta = [0 \ 0 \ 0]^T$ 。雅可比矩阵的第 1 列为:

$$J_1 = [{}^1n_x \quad {}^1o_x \quad {}^1a_x \quad 0 \ 0 \ 0]^T = [\cos \theta_4 \quad -\sin \theta_4 \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

雅可比矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & -l_1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$J$  的第 4、5 行为 0, 说明关节速度对绕 X、Y 轴的旋转没有贡献。换言之, 该机器人的末端不能绕 X、Y 轴旋转。由于该机器人为 4 自由度机器人, 以第 4 行对应于绕 Z 轴旋转, 则其雅可比矩阵可以改写为 4×4 的矩阵:

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & -l_1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以发现,  $J$  始终是满秩的。

习题 6.9: 习题 4.5 所示 5 自由度直角坐标机器人的第 5 个关节为旋转关节, 第 4 连杆坐标系到末端坐标系的连杆变换矩阵为:

$${}^4T_5 = T_5 = \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p \times n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a_6 \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 & d_5 \\ \sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{vmatrix}, (p \times n)_z = 0\vec{k}$$

$$p \times o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a_6 \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 & d_5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, (p \times o)_z = 0\vec{k}$$

$$p \times a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a_6 \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 & d_5 \\ \cos \theta_5 & \sin \theta_5 & 0 \end{vmatrix}, (p \times a)_z = -a_6\vec{k}$$

雅可比矩阵的第 5 列为：

$$J_5 = \begin{bmatrix} ({}^5p \times {}^5n)_z & ({}^5p \times {}^5o)_z & ({}^5p \times {}^5a)_z & {}^5n_z & {}^5o_z & {}^5a_z \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

第 4 个关节为旋转关节，第 3 连杆坐标系到末端坐标系的连杆变换矩阵为：

$${}^4T_5 = T_4 T_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & a_6 \cos \theta_5 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 & -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 \\ \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & -a_6 \cos \theta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p \times n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 & -a_6 \cos \theta_5 \\ \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 \sin \theta_5 & \cos \theta_5 \end{vmatrix}$$

$$(p \times n)_z = -d_5 \sin \theta_5 \vec{k}$$

$$p \times o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 & -a_6 \cos \theta_5 \\ \sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(p \times o)_z = a_6 \sin \theta_5 \vec{k}$$

$$p \times a = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 & -a_6 \cos \theta_5 \\ \cos \theta_4 \cos \theta_5 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 \end{vmatrix}$$

$$(p \times a)_z = -d_5 \cos \theta_5 \bar{k}$$

雅可比矩阵的第 4 列为:

$$J_4 = \begin{bmatrix} ({}^4p \times {}^4n)_z & ({}^4p \times {}^4o)_z & ({}^4p \times {}^4a)_z & {}^4n_z & {}^4o_z & {}^4a_z \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} -d_5 \sin \theta_5 & a_6 \sin \theta_5 & -d_5 \cos \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 \end{bmatrix}^T$$

第 3 个关节为沿 Z 轴的平移关节, 第 2 连杆坐标系到末端坐标系的变换矩阵为:

$${}^2T_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 & -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 \\ \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & -a_6 \cos \theta_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在关节坐标系中的微分运动为  $d = [0 \ 0 \ 1]^T dq_i$ ,  $\delta = [0 \ 0 \ 0]^T$ 。雅可比矩阵的第 3 列为:

$$J_3 = \begin{bmatrix} {}^3n_z & {}^3o_z & {}^3a_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

第 2 个关节为沿 Y 轴的平移关节, 第 1 连杆坐标系到末端坐标系的变换矩阵为:

$${}^1T_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 & -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 + d_2 + a_3 \\ \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & -a_6 \cos \theta_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在关节坐标系中的微分运动为  $d = [0 \ 1 \ 0]^T dq_i$ ,  $\delta = [0 \ 0 \ 0]^T$ 。雅可比矩阵的第 2 列为:

$$J_2 = \begin{bmatrix} {}^2n_y & {}^2o_y & {}^2a_y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 \sin \theta_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

第 1 个关节为沿 X 轴的平移关节, 第 0 连杆坐标系到末端坐标系的变换矩阵为:

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \sin \theta_4 + d_1 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 & -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & -a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \cos \theta_4 + d_2 + a_3 \\ \cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & -a_6 \cos \theta_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在关节坐标系中的微分运动为  $d = [1 \ 0 \ 0]^T dq_i$ ,  $\delta = [0 \ 0 \ 0]^T$ 。雅可比矩阵的第 1 列为:

$$J_1 = \begin{bmatrix} {}^1n_x & {}^1o_x & {}^1a_x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \cos \theta_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

雅可比矩阵为：

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_4 \cos \theta_5 & \cos \theta_5 & -d_5 \sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 & a_6 \sin \theta_5 & 0 \\ \cos \theta_4 \cos \theta_5 & \sin \theta_4 \sin \theta_5 & \sin \theta_5 & -d_5 \cos \theta_5 & -a_6 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

习题 6.10：在串联关节机器人的雅可比矩阵满秩时，利用末端速度和雅可比矩阵的广义逆，可以转换出关节速度。

$$\dot{q} = (J^T J)^{-1} J^T \dot{x}$$

习题 6.11：串联关节机器人的末端广义静力转换为关节空间的静力： $\tau = J^T {}^E F$ 。

习题 6.12：坐标系{C}在基坐标系{W}的表示为：

$${}^w T_C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p \times n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 0\vec{j} + 10\vec{k}, \quad p \times o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$p \times a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k}$$



$$J_d^T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 & 0 & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 & 0 & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 & 0 & 0 \\ (p \times n)_x & (p \times o)_x & (p \times a)_x & n_x & o_x & a_x \\ (p \times n)_y & (p \times o)_y & (p \times a)_y & n_y & o_y & a_y \\ (p \times n)_z & (p \times o)_z & (p \times a)_z & n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = J_d^T {}^c F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \\ 5 \\ 0.1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \\ -100.1 \\ 105 \\ 102 \end{bmatrix}$$

习题 6.13: 利用机器人的逆向运动学控制机器人运动, 需要根据给定的机器人末端位姿, 通过逆向运动学求解得到各个关节的期望坐标。利用该期望关节坐标, 在机器人关节空间进行位置控制, 构成位置闭环系统。可实现性好, 在机器人的可达空间内, 都可以控制机器人到达期望位姿。

利用 Jacobian 矩阵控制控制机器人运动, 需要求解 Jacobian 矩阵的伪逆矩阵, 利用该伪逆矩阵将给定的机器人末端速度转换为期望的机器人关节速度。利用该期望关节速度, 在机器人关节空间进行速度控制, 构成速度闭环系统。当 Jacobian 矩阵不满秩时, 存在奇异问题。

## 第 7 章 习题答案

习题 7.1: 机器人关节空间的运动规划主要有以下方式: 多项式插值、抛物线过渡的线性插值、3 次 B 样条插值等。

3 次 B 样条插值的特点: (1) 是连续可导的函数, (2) 每个区间的函数是多个不同的 3 次 B 样条函数的组合, 每个区间的函数可以单独设计。

习题 7.2: 串联关节机器人的末端运动轨迹规划包括位置规划和姿态规划。位置规划在期望的末端轨迹上均匀选取位置点。进行姿态规划时, 首先根据起始姿态和终止姿态计算出机器人末端需要运动的姿态, 然后将需要运动的姿态转换为转轴和转角, 将转角均匀分成若干等份, 机器人末端每次绕转轴旋转一等份转角, 计算出每次旋转之后机器人末端的姿态。

习题 7.3: 即使末端轨迹规划的点很密集, 也不能避免关节空间的运动规划。因为相邻两个空间点对应的位姿即使非常接近, 也有可能有关节空间的关节角发生较大变化, 特别是机器人处于奇异位姿时这种现象尤其明显, 所以为了保证机器人的运动平

稳性，每个控制周期内关节空间的运动量不能过大或者突变，需要进行关节空间的运动规划。

习题 7.4: 规划点之间的末端轨迹不是直线。可以保证所有的规划点都在直线上，机器人末端也经过这些直线上的规划点，但相邻两个规划点之间的路径是由多个关节运动组合而形成的末端曲线。相邻两个规划点之间的距离越小，其间的曲线也越接近于直线。

习题 7.5: 点到点的运动只关注起点和终点的位姿，不关心中间位姿，只需要进行关节空间的运动规划。路径跟踪要求机器人的末端轨迹按照期望路径运动，需要进行笛卡尔空间的运动规划和关节空间的运动规划。

习题 7.6: 不能够做到严格一致。规划点都在期望路径上，但相邻两个规划点之间的路径是由多个关节运动组合而形成的末端曲线，与期望路径不一致。

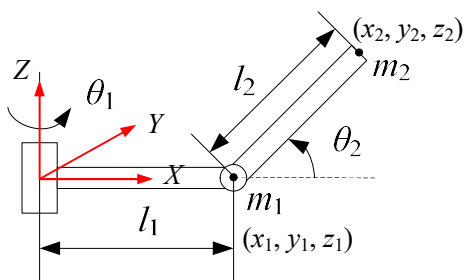
习题 7.7: 多项式插值利用一个表达式实现关节插值，形成的轨迹严格过路径点。多项式插值在路径点的位置、速度、加速度连续且可控，但中间过程的加速度有时偏大。抛物线过渡的线性插值，利用抛物线作为不同的线性段之间、或启停段与线性段之间的过渡，加速度可控。但抛物线过渡的线性插值不能严格过路径点。

## 第 8 章 习题答案

习题 8.1: 串联关节机器人的动力学求解步骤如下:

- (1) 求质点的位置和速度
- (2) 求质点的动能
- (3) 求质点的位能
- (4) 求连杆的动能和位能
- (5) 对能量函数求导，获得动力学方程

习题 8.2: 按照下图所示，在第 1 个关节位置建立坐标系，以关节 1 的轴线方向作为 Z 轴，以连杆 1 的初始方向作为 X 轴。



- (1) 求质点的位置和速度

质点  $m_1$  的位置:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

质点  $m_2$  的位置:

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ z_2 = l_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

分别对位置求时间的导数，得到：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{z}_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 - l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{z}_2 = l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

两个质点的速度平方分别为：

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 \\ &= (-l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 - l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 \\ &\quad + (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 \\ &= l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 - 2l_2 l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ &\quad + l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 - 2l_2 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 - 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ &\quad + l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &= (l_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_2^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + l_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_2^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + (2l_2 l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - 2l_2 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ &\quad + (l_2^2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + l_2^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ &= (l_1^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 = (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

当然，线速度的值也可以利用角速度和旋转半径求取。

(2) 求质点的动能

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

(3) 求质点的位能

$$P = m_2 g z_2 = m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

(4) 构造拉格朗日函数

$$L = K - P = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

分别计算  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}$  和  $\frac{\partial L}{\partial \theta_i}$ ，然后计算  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}$ 。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2$$

$$T_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$T_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$