

Reella funktioner av en reell variabel

1. Linjära funktioner

Följande linjära funktioner är givna:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = -1,$$

$$f_2: R \rightarrow R, f_2(x) = -\frac{1}{3}x,$$

$$f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = 3x + 1,$$

$$f_4: R \rightarrow R, f_4(x) = 3(x + 1)$$

a) Bestäm definitionsmängd (domän), målmängd (kodomän) och värdemängd för dessa funktioner.

b) Bestäm funktionernas nollställen.

c) Rita grafer till dessa funktioner.

d) Vilken är relation mellan grafen till f_2 och grafen till f_3 ?
Varför?

e) Vilken är relation mellan grafen till f_3 och grafen till f_4 ?
Varför?

2. Linjära funktioner

Linjära funktioner f , g och h är givna.

Grafen till f är en rät linje som går genom punkterna $(-1, -3)$ och $(2, 3)$.

Grafen till g är en rät linje som går genom punkten $(2, 0)$ och är ortogonal till grafen till f .

Grafen till h är en rät linje som går genom punkten $(2, 0)$ och har riktningskoefficient 2.

- a) Rita grafer till funktionerna f , g och h .
- b) Bestäm funktionerna f , g och h .
- c) Bestäm den punkt på grafen till h vars avstånd från punkten $(2, 0)$ är $\sqrt{5}$.

3. Andragradsfunktioner

Följande andragradsfunktioner är givna:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = x^2 - 1,$$

$$f_2: R \rightarrow R, f_2(x) = -x^2 + 1,$$

$$f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = 2(x + 1)^2,$$

$$f_4: R \rightarrow R, f_4(x) = 2x^2 + 2x - 1$$

- a) Bestäm definitionsmängd (domän), målmängd (kodomän) och värdemängd för dessa funktioner.
- b) Bestäm funktionernas nollställen.
- c) Rita grafer till dessa funktioner.
- d) Bestäm skärningspunkter mellan grafen till f_1 och grafen till f_2 .
- e) Bestäm ekvation till symmetrilinjen till grafen av f_4 och grafens vertex.

4. Linjära och andragsradsfunktioner

Funktionen f är definierad på följande vis:

$$f: R \setminus \{x \in R \mid x > -1 \wedge x < 1\} \rightarrow R, \\ f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1 \\ 1 - (x - 1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Bestäm funktionens definitionsmängd, målmängd och värdemängd.
- b) Bestäm $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$ och $f(3)$.
- c) Bestäm funktionens nollställen.
- d) Rita grafen till f .

5. En ekvation och en funktion

Följande ekvation har två reella variabler x och y :

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

Lösningssmängden till ekvationen är G .

- a) Formulera mängden G och rita dess graf.
- b) Formulera en funktion vars graf delvis sammanfaller med grafen till G . Rita grafen till den funktionen.
- c) Hur många funktioner, vars graf delvis sammanfaller med grafen G , finns?

6. Jämna och udda funktioner

Funktioner f , g och h är definierade på följande vis:

$$f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 10x + 9$$

$$g: R \rightarrow R, g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

$$h: R \rightarrow R, h(x) = x^3 - 4x$$

För var och en av dessa funktioner:

- Bestäm skärningspunkter mellan grafen till funktionen och koordinataxlar.
- Skissa grafen till funktionen. Är grafen symmetrisk kring någon rät linje eller i någon punkt?
- Bestäm om funktionen är jämn, udda, eller varken jämn eller udda.

7. Flytta en graf

a) Rita grafer till följande funktioner:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = 2x$$

$$f_2: R \rightarrow R, f_2(x) = 2(x - 1)$$

$$f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = 2(x + 1) - 1$$

Vilken är relation mellan graferna?

b) Rita grafer till följande funktioner:

$$g_1: R \rightarrow R, g_1(x) = 2x^2$$

$$g_2: R \rightarrow R, g_2(x) = 2(x - 1)^2$$

$$g_3: R \rightarrow R, g_3(x) = 2(x + 1)^2 - 1$$

Vilken är relation mellan graferna?

c) Rita grafer till följande funktioner:

$$h_1: R \rightarrow R, h_1(x) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$h_2: R \rightarrow R, h_2(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$$

$$h_3: R \rightarrow R, h_3(x) = 2\sqrt[3]{x+1} - 1$$

Vilken är relation mellan graferna?

8. Spegla grafer i räta linjer

b) Rita grafer till följande funktioner:

$$f_1: R^+ \cup \{0\} \rightarrow R, f_1(x) = \sqrt{x}$$

$$f_2: R^+ \cup \{0\} \rightarrow R, f_2(x) = -\sqrt{x}$$

Vilken är relation mellan graferna?

b) Rita grafer till följande funktioner:

$$g_1: R^+ \cup \{0\} \rightarrow R, g_1(x) = \sqrt{x}$$

$$g_2: R^- \cup \{0\} \rightarrow R, g_2(x) = \sqrt{-x}$$

Vilken är relation mellan graferna?

c) Rita grafer till följande funktioner:

$$h_1: R^+ \cup \{0\} \rightarrow R, h_1(x) = \sqrt{x}$$

$$h_2: \{x \in R \mid x \geq 1\} \rightarrow R, h_2(x) = \sqrt{x-1}$$

$$h_3: \{x \in R \mid x \leq 1\} \rightarrow R, h_3(x) = \sqrt{1-x}$$

Vilken är relation mellan graferna?

9. Golv- och takfunktionerna

Rita grafer till följande funktioner:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = [x] + 1$$

$$f_2: R \rightarrow R, f_2(x) = 2[x]$$

$$f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = [x] + [x]$$

$$f_4: R \rightarrow R, f_4(x) = [x] - [x]$$

10. Polynom

Tre polynom p , q och r är definierade på följande vis:

$$p: R \rightarrow R, p(x) = 8x^2 - 2x - 1,$$

$$q: R \rightarrow R, q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3,$$

$$r: R \rightarrow R, r(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

- Bestäm polynomens nollställen och multipliciteten till dessa nollställen.
- Representera polynomen som produkt av reella faktorer.

11. Rationella funktioner - representation

Funktioner f och g är definierade på följande vis:

$$D = \{x \in R \mid x \neq -1 \wedge x \neq 1\},$$

$$f: D \rightarrow R, f(x) = \frac{4x^3 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1},$$

$$g: D \rightarrow R, g(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$$

Representera funktioner på formen

$$p(x) + \frac{q(x)}{x^2 - 1},$$

där p är en förstgradspolynom, och q är antingen 0 eller ett polynom vars grad är högst 1.

12. Rationella funktioner - representation

Rationella funktioner f_1 , f_2 , f_3 och f_4 är representerade på två olika sätt:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{3x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 3}, \\ f_2(x) &= \frac{2x^2 + 5x - 1}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x + 2}, \\ f_3(x) &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 2} = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 2}, \\ f_4(x) &= \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

a) För var och en av funktionerna: bestäm konstanterna i den högra representationen, så att likheten gäller i hela (underförstådda) definitionsmängden.

b) Representera även följande funktion som summa av bråk:

$$f_5(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)(x^2 + 4)}$$

13. Rationella funktioner - representation

Rationella funktioner f_1 , f_2 och f_3 är representerade på två olika sätt:

$$f_1(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2},$$

$$f_2(x) = \frac{x-1}{x^2(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2},$$

$$f_3(x) = \frac{x^2-2}{x(x^2+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2} + \frac{dx+e}{(x^2+2)^2}$$

a) För var och en av funktionerna: bestäm konstanterna i den högra representationen, så att likheten gäller i hela (underförstådda) definitionsmängden.

b) Representera även följande funktion som summa av bråk:

$$f_4(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+4)}$$

14. Trigonometriska funktioner - sinus

Följande funktioner är givna:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = \sin x$$

$$f_2: R \rightarrow R, f_2(x) = \sin(-x)$$

$$f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_4: R \rightarrow R, f_4(x) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Rita grafer till f_1 och f_2 i ett koordinatsystem, och grafer till f_3 och f_4 i ett annat koordinatsystem.

15. Trigonometriska funktioner - cosinus

Följande funktioner är givna:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = \cos x$$

$$f_2: R \rightarrow R, f_2(x) = \cos(2x)$$

$$f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = 4\cos(2(x - \frac{\pi}{2}))$$

$$f_4: R \rightarrow R, f_4(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{2})$$

Rita grafer till f_1 och f_2 i ett koordinatsystem, och grafer till f_3 och f_4 i ett annat koordinatsystem.

16. Trigonometriska funktioner – secans och cosecans

Följande funktioner är givna:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = \cos x$$

$$f_2: \{x \in R \mid \cos x \neq 0\} \rightarrow R, f_2(x) = \sec x$$

$$f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = \sin x$$

$$f_4: \{x \in R \mid \sin x \neq 0\} \rightarrow R, f_4(x) = \csc x$$

a) Rita grafer till f_1 och f_2 i ett koordinatsystem, och grafer till f_3 och f_4 i ett annat koordinatsystem.

b) Vilken är relation mellan f_1 och f_2 där de båda två funktionerna är definierade?

c) Vilken är relation mellan f_3 och f_4 där de båda två funktionerna är definierade?

17. Trigonometriska funktioner – tangens och cotangens

Följande funktioner är givna:

$$f_1: \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{\pi}{2} \wedge x < \frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \tan x$$

$$f_2: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < \pi\} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \cot x$$

- a) Rita grafer till f_1 och f_2 i samma koordinatsystem.
- b) Vilken är relation mellan f_1 och f_2 där de båda två funktionerna är definierade?