

Logik

1. Propositioner

Betrakta följande propositioner:

$$\begin{aligned}p_1: & (\sqrt{2} \in R) \wedge \sim(\sqrt{2} \in Q), \\p_2: & 1/2 \in Z \vee 1/2 \in Q, \\p_3: & \sim(-4 \in N) \rightarrow \sim(-4 \in Z), \\p_4: & 2.5 \in Q \leftrightarrow 2.5 \in R\end{aligned}$$

- a) Yttra dessa propositioner med ord.
- b) Vilka av dessa propositioner är sanna?

2. Universella och existentiella propositioner

Betrakta följande propositioner:

$$\begin{aligned}p_1: & (\forall a \in R) (1/a \in R), \\p_2: & (\forall x \in R) (x \in Z \rightarrow x \in Q), \\p_3: & (\forall n \in Z) (n - 1 \in Z), \\p_4: & (\exists n \in Z) \sim(n \in N), \\p_5: & (\forall x, y \in R) (x^2 = y^2 \leftrightarrow x = y)\end{aligned}$$

- a) Yttra dessa propositioner med ord.
- b) Vilka av dessa propositioner är sanna?

3. Universella och existentiella propositioner

Betrakta följande propositioner:

$$\begin{aligned}p_1: & (\forall x \in R)(\exists n \in N) (n > x), \\p_2: & (\exists n \in N)(\forall x \in R) (n > x), \\p_3: & (\exists n_1 \in N)(\exists n_2 \in N) (n_1 < n_2), \\p_4: & (\forall k_1, k_2 \in Z)(\exists k \in Z) (k_1 < k < k_2)\end{aligned}$$

- a) Yttra dessa propositioner med ord.
- b) Vilka av dessa propositioner är sanna?

4. Predikater

Betrakta följande predikater med heltalsvariabler:

$$\begin{aligned}p_1(n): & 5 \mid n \wedge \sim(10 \mid n), \\p_2(n): & 6 \mid n \rightarrow 2 \mid n, \\p_3(m, n, k): & m < n < k, \\p_4(m, n): & m < n \leftrightarrow n > m\end{aligned}$$

- a) Yttra dessa predikater med ord.
- b) Skapa en proposition utifrån var och en av dessa predikater genom att specificera variablernas värden.
- c) Skapa en proposition utifrån var och en av dessa predikater genom användning av kvantifierare.
- d) Bestäm predikaternas sanningsmängder.

5. Universell ekvivalens

Predikater p och q med heltalsvariabeln n är:

$$\begin{aligned}p(n): & 2 \mid n \wedge 3 \mid n, \\q(n): & 6 \mid n\end{aligned}$$

- a) Bestäm predikaternas sanningsmängder.

b) Vilka av följande propositioner är sanna?

$$u_1: (\forall n \in \mathbb{Z}) (p(n) \rightarrow q(n) \wedge q(n) \rightarrow p(n)),$$

$$u_2: (\forall n \in \mathbb{Z}) (p(n) \leftrightarrow q(n)),$$

$$u_3: p(n) \Rightarrow q(n) \wedge q(n) \Rightarrow p(n),$$

$$u_4: p(n) \Leftrightarrow q(n),$$

$$u_5: 2 \mid n \wedge 3 \mid n \Leftrightarrow 6 \mid n$$

6. Universell implikation

Predikater p och q med heltalsvariabeln n är:

$$p(n): 6 \mid n,$$

$$q(n): 3 \mid n$$

a) Bestäm predikaternas sanningsmängder.

b) Vilka av följande propositioner är sanna?

$$u_1: (\forall n \in \mathbb{Z}) (p(n) \rightarrow q(n)),$$

$$u_2: (\forall n \in \mathbb{Z}) (p(n) \leftrightarrow q(n)),$$

$$u_3: p(n) \Rightarrow q(n),$$

$$u_4: q(n) \Rightarrow p(n),$$

$$u_5: p(n) \Leftrightarrow q(n),$$

$$u_6: 6 \mid n \Rightarrow 3 \mid n$$

7. Ett påstående om påståenden

Predikaten s har propositioner p , q och r som sina variabler:

$$s(p, q, r): p \wedge q \rightarrow r$$

a) Rita sanningstabellen till predikaten s .

b) Bestäm sanningsmängden till predikaten s .

c) Skapa två instanser av predikaten s .

8. Logiska ekvivalenser

Predikater u och v har propositioner p och q som sina variabler:

$$\begin{aligned} u(p, q): & \sim(p \wedge q), \\ v(p, q): & \sim p \vee \sim q \end{aligned}$$

a) Vilka av följande påståenden är sanna?

$$\begin{aligned} w_1: & (\forall \text{ propositioner } p, q) (u(p, q) \rightarrow v(p, q)) \\ w_2: & u(p, q) \Rightarrow v(p, q) \\ w_3: & (\forall \text{ propositioner } p, q) (v(p, q) \rightarrow u(p, q)) \\ w_4: & v(p, q) \Rightarrow u(p, q) \\ w_5: & (\forall \text{ propositioner } p, q) (u(p, q) \leftrightarrow v(p, q)) \\ w_6: & u(p, q) \Leftrightarrow v(p, q) \end{aligned}$$

b) Välj konkreta propositioner p och q , och undersök sanningen av följande ekvivalens:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

c) Är följande proposition sann?

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

9. Logiska implikationer

Predikaten s har propositioner p , q och r som sina variabler:

$$s(p, q, r): ((p \wedge r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \wedge r)$$

a) Bestäm sanningsmängder till påståendena $(p \wedge r) \wedge (p \rightarrow q)$ och $(q \wedge r)$.

b) Är påståendet s en tautologi?

c) Är följande proposition sann?

$$(p \wedge r) \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow (q \wedge r)$$

10. En tautologi och en kontradiktion

Låt p_1, p_2, \dots, p_n vara godtyckliga propositioner. Betrakta följande predikat:

$$s: p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \rightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$$

a) Är predikaten s en tautologi?

c) Är predikaten s en kontradiktion?

c) Är följande proposition sann?

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$$

11. Negation av påståenden

Låt p, q och r vara godtyckliga påståenden, och n ett naturligt tal, $n \geq 2$. Följande predikater är givna:

$$\begin{aligned} s_1: & \sim(p \wedge q \wedge \sim r), \\ s_2: & \sim(\sim(p \wedge q) \vee r), \\ s_3: & \sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n), \\ s_4: & \sim(p \rightarrow (q \wedge r)), \\ s_5: & \sim(p \leftrightarrow (q \wedge r)) \end{aligned}$$

Skriv dessa predikater i ekvivalent form genom att applicera negationen så långt det går.

12. Negation av påståenden

Följande propositioner är givna:

$$\begin{aligned} s_1: & \sim(\forall x \in R) (x < x^2), \\ s_2: & \sim(\exists n \in N) (n + 2 = 1), \\ s_3: & \sim(\forall n \in Z) (3 \mid n \rightarrow 6 \mid n), \\ s_4: & \sim(\forall n \in Z) (2 \mid n \vee 3 \mid n), \\ s_5: & \sim(\forall n \in N)(\exists k \in N) (k = n^2) \end{aligned}$$

- Vilka av dessa propositioner är falska?
- Skriv dessa propositioner utan negationssymbolen.

13. Ekvivalenta transformationer av påståenden

Låt p , q och r vara godtyckliga påståenden. Betrakta följande transformation av påståenden:

$$\begin{aligned} & \sim((p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \\ \Leftrightarrow & (p \wedge q) \wedge \sim(p \rightarrow r) \\ \Leftrightarrow & (p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim r) \\ \Leftrightarrow & p \wedge q \wedge p \wedge \sim r \\ \Leftrightarrow & p \wedge p \wedge q \wedge \sim r \\ \Leftrightarrow & p \wedge q \wedge \sim r \end{aligned}$$

- Är den här kedjan av ekvivalenser korrekt?
- Är följande påstående sant?

$$\begin{aligned} & (\forall \text{ propositioner } p, q, r) (\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \sim r) \end{aligned}$$

c) Är följande påstående sant?

$$\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge \sim r$$