Tentamen

exempeltentamen

Förklaringar

Lösningen till en uppgift ska formuleras noggrant och kortfattat. Den ska ha en klar logisk struktur, och innehålla nödvändiga matematiska fakta. Både ord och symboler ska användas, i en lämplig kombination. Typiska delar av lösningen kan formuleras som separata enheter.

Bilder i en lösning ska utformas noggrant, fullständigt och i rätt storlek. Det går att använda en linjal och en passare. Den information som förknippas med en bild ska klart framgå.

På ett blad ska det inte finnas lösningar till fler än en uppgift.

För betyget P räcker det med hälften av det totala antalet poäng.

Uppgifter

Uppgift 1 (4 poäng + 4 poäng)

Två mängder är givna:

$$A = \{(x, y) \in R \times R \mid x + 2y - 2 = 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y - 2x = 0\}$$

a) Rita grafer till dessa mängder i koordinatplanet.

b) Mängden C är snittet av mängderna A och B. Specificera denna mängd genom att ange alla dess element. Rita grafen till C i koordinatplanet.

Lösning

a)

Grafen till mängden A består av de punkter i koordinatplanet vars koordinater uppfyller ekvationen $x + 2y - 2 = 0$. Det är en rät linje. För att rita den linjen, räcker det att bestämma dess skärningspunkter med koordinataxlarna.

$x + 2 \cdot 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$0 + 2 \cdot y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Skärningspunkterna är $(2, 0)$ och $(0, 1)$.

Grafen till mängden B består av de punkter i koordinatplanet vars koordinater uppfyller ekvationen $x^2 + y - 2x = 0$, det vill säga ekvationen $y = -x^2 + 2x$. Det är en parabel som ligger under en horisontell linje. För att rita den, räcker det att bestämma dess skärningspunkter med x–axeln och dess vertex.

Skärningspunkter med x–axeln:

$0 = -x^2 + 2x \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Skärningspunkterna är $(0, 0)$ och $(2,0)$.

Vetex:

$x = \frac{0+2}{2} = 1, y = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

Vertex är $(1, 1)$.

Rita här grafer till A och B i samma koordinatplan.

b)

$C = A \cap B =$
$\{(x, y) \in R \times R \mid x + 2y - 2 = 0\} \cap$
$\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y - 2x = 0\} \rightarrow$
$C = \{(x, y) \in R \times R \mid x + 2y - 2 = 0 \ \land \ x^2 + y - 2x = 0\}$

Mängden C består av de element (x, y) i domänen $R \times R$ som uppfyller predikaten $x + 2y - 2 = 0 \land x^2 + y - 2x = 0$.

$x + 2y - 2 = 0 \ \land \ x^2 + y - 2x = 0$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \ \land \ y = -x^2 + 2x$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \ \land \ -\frac{1}{2}x + 1 = -x^2 + 2x$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \ \land \ 2x^2 - 5x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \ \land \ \left(x = \frac{1}{2} \ \lor \ x = 2\right)$
$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \land y = -\frac{1}{2}x + 1\right) \lor \left(x = 2 \land y = -\frac{1}{2}x + 1\right)$
$\Leftrightarrow (x = \frac{1}{2} \land y = \frac{3}{4}) \lor (x = 2 \land y = 0)$

Snittet C är:

$$C = \{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), (2, 0) \}$$

Grafen till C i koordinatplanet består av punkterna $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ och $(2, 0)$, som är skärningspunkter mellan den räta linjen och parabeln.

Rita här grafen till C i ett koordinatplan (den räta linjen och parabeln ska finnas streckade).

■

Uppgift 2 (2 poäng + 2 poäng + 2 poäng)

Takfunktionen $\lceil x \rceil$ är definierad på följande vis:

$$\lceil x \rceil : R \to Z, \quad \lceil x \rceil = minimum\ (\{n \in Z \mid n \geq x\})$$

a) Rita grafen till funktionen i ett koordinatplan.

b) Är funktionen udda? Bevisa ditt påstående.

c) Är funktionen injektiv? Bevisa ditt påstående.

Lösning

a)

Se grafen till ”the least integer function” i slutet av avsnitt P.5 i ”Calculus”-boken.

b)

Definition – udda funktioner:

$En\ funktion\ f, definierad\ i\ en\ domän\ D \subseteq R,$ är $udda$
$\Leftrightarrow\ (\forall x \in D)\ (f(-x) = -f(x))$

Enligt definitionen, för att $\lceil x \rceil$ ska vara en udda funktion, är det nödvändigt att likheten $\lceil -x \rceil = -\lceil x \rceil$ gäller i hela domänen R. Men så är det inte fallet. Till exempel gäller inte villkoret för $x = 1.5$:

$\lceil -x \rceil = \lceil -1.5 \rceil = -1 \quad \wedge \quad -\lceil x \rceil = -\lceil 1.5 \rceil = -2$
$\rightarrow\ \lceil -1.5 \rceil \neq -\lceil 1.5 \rceil\}$

Funktionen $\lceil x \rceil$ är inte udda.

Funktionens graf är inte symmetrisk i origo. Det betyder att funktionen inte är udda.

c)

Definition – injektiva funktioner:

$En\ funktion\ f: X \rightarrow Y$ är $injektiv$
$\Leftrightarrow\ (\forall x_1, x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2)\ \rightarrow\ x_1 = x_2)$

Enligt definitionen, för att $\lceil x \rceil$ ska vara en injektiv funktion, är det nödvändigt att, för två godtyckliga element x_1 och x_2 i domänen, likheten $\lceil x_1 \rceil = \lceil x_2 \rceil$ medför likheten $x_1 = x_2$. Med andra ord, olika argument ska ha olika bilder. Men så är det inte fallet. Detta visas med följande exempel:

$\lceil x_1 \rceil = \lceil 1.2 \rceil = 2 \ \wedge \ \lceil x_2 \rceil = \lceil 1.5 \rceil = 2 \rightarrow \ \lceil 1.2 \rceil = \lceil 1.5 \rceil$
$\lceil 1.2 \rceil = \lceil 1.5 \rceil \ \wedge \ 1.2 \neq 1{,}5$

Funktionen $\lceil x \rceil$ är inte injektiv.

Funktionens graf visar att funktionen kan ha samma värde för flera argument. Då är det funktionen inte injektiv. För att en funktion ska vara injektiv, måste varje element i funktionens definitionsmängd ha en *unik* bild i funktionens målmängd.

■

Uppgift 3 (2 poäng + 4 poäng)

Tre komplexa tal är givna:

$$u = 1 - 2i, \ \ v = -3 + 11i, \ \ w = 1 - i$$

Lös följande ekvationer i domänen av alla komplexa tal C:

a) $u \cdot z = v$

b) $z^2 = w$

Lösning

a)

$u \cdot z = v$

$\Leftrightarrow (1 - 2i) \cdot z = -3 + 11i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3 + 11i}{1 - 2i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3 + 11i}{1 - 2i} \cdot \dfrac{1 + 2i}{1 + 2i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3 - 6i + 11i + 22i^2}{1^2 + (-2)^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-25 + 5i}{5}$

$\Leftrightarrow z = -5 + i$

Lösningen är: $z_1 = -5 + i$

b)

$w = 1 - i$

$\leftrightarrow |w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \ \wedge \ Arg\, w = -\dfrac{\pi}{4}$

$\leftrightarrow w = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$z^2 = w$

$\Leftrightarrow z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4}}{2} + i \sin\dfrac{-\frac{\pi}{4}}{2})$

$\vee \ z = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{2} + i \sin\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{2})$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{8} + i \sin\dfrac{-\pi}{8}\right)$

$$\vee \; z = \sqrt[4]{2}\,(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8})$$

Lösningar är:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{8} + i\sin\frac{-\pi}{8}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\,(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8})$$

■

Uppgift 4 (2 poäng + 2 poäng)

Betrakta följande logiska argument:

$$\begin{array}{c} p \;\rightarrow\; q \\ \sim p \\ \hline \therefore \;\sim q \end{array}$$

a) Motbevisa det här argumentet: finn en instans av argumentet då alla premisser är sanna, men slutsatsen är falsk.

b) Bevisa med hjälp av en sanningstabell att det här argumentet inte är giltigt.

Lösning

a)

Låt x vara ett reellt tal, och p och q följande propositioner:

$$p: x > 1, \quad q: x^2 > 1$$

I så fall är argumentet:

$$\begin{array}{c} x > 1 \; \rightarrow \; x^2 > 1 \\ \sim(x > 1) \\ \hline \therefore \; \sim(x^2 > 1) \end{array}$$

eller:

$$\begin{array}{c} x > 1 \; \rightarrow \; x^2 > 1 \\ x \leq 1 \\ \hline \therefore \; x^2 \leq 1 \end{array}$$

Premissen $x > 1 \; \rightarrow \; x^2 > 1$ är sann. Låt även premissen $x \leq 1$ vara sann. I så fall är båda premisser sanna, men slutsatsen behöver inte vara sann. Om $x < -1$, till exempel om $x = -2$, är inte $x^2 \leq 1$.

b)

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

Det finns två kritiska rader, där båda premisserna $p \rightarrow q$ och $\sim p$ är sanna. Men i en av dessa rader är slutsatsen $\sim q$ inte sann. Det betyder att argumentet inte är giltigt.

■

Uppgift 5 (3 poäng + 3 poäng)

Bevisa följande påståenden:

a) Om n är ett heltal, är $n(n^2 - 1)(n + 2)$ delbart med 4.

b) Om p är ett primtal, så finns det ett primtal q som är större än p.

Lösning

a)

Låt n vara ett heltal.

Beteckna heltalet $n(n^2 - 1)(n + 2)$ med p. I så fall är:

$$p = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$$

Enligt divisionsteoremet kan n representeras på precis ett av följande vis:

$$4q, 4q+1, 4q+2, 4q+3, q \in Z$$

Fall $n = 4q$:

$p = (n-1) \cdot 4q \cdot (n+1)(n+2)$

$p = 4 \cdot (n-1)q(n+1)(n+2) = 4l, l \in Z.$

Fall $n = 4q + 1$:

$p = (4q + 1 - 1) \cdot n(n+1)(n+2)$

$p = 4 \cdot qn(n+1)(n+2) = 4l, l \in Z.$

Fall $n = 4q + 2$:

$p = (n-1)n(n+1) \cdot (4q + 2 + 2)$

$p = 4 \cdot (n-1)n(n+1)(q+1) = 4l, l \in Z.$

Fall $n = 4q + 3$:

$p = (n-1)n \cdot (4q + 3 + 1) \cdot (n+2)$

$p = 4 \cdot (n-1)n(q+1)(n+2) = 4l, l \in Z.$

I vilket som helst fall är $p = 4l$ för något heltal l. Heltalet $n(n^2-1)(n+2)$ är delbart med 4.

b) Se beviset i artikeln *Uppfinna matematiska bevis* av *Fadil Galjic*.

■