Funktioner

1. En funktion

Mängderna A och B är delmängder av mängden av naturliga tal N:

$$A = \{2, 4, 6\},$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Låt $x \rightarrow y$ betyda ”till ett matematiskt objekt x tilldelas ett matematiskt objekt y”. I så fall definieras följande tilldelningar:

$$f_1: A \rightarrow B, \{2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 7\},$$

$$f_2: A \rightarrow B, \{2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 5\},$$

$$f_3: A \rightarrow B, \{2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 7, 6 \rightarrow 9\},$$

$$f_4: A \rightarrow B, \{2 \rightarrow 3, 6 \rightarrow 7\},$$

$$f_5: A \rightarrow N, \{2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 7\},$$

$$f_6: N \rightarrow N, \{2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 7\}$$

a) Representera dessa tilldelningar grafiskt på ett lämpligt sätt.

b) Vilka av dessa tilldelningar är funktioner? Varför?

c) Bestäm definitionsmängd (domän), målmängd (kodomän) och värdemängd för de av dessa tilldelningar som är funktioner.

2. En funktion

Betrakta följande tilldelningar:

$$f\colon\ R \to Z, f(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil, & x \leq 0 \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g\colon\ Q \to Z, g(q) = q\text{:}s\ täljare + q\text{:}s\ nämnare$$

$$h\colon R \to R, h(x) = \sqrt{x}$$

$$s\colon R \times R \to R, s((x, y)) = x + y$$

a) Bestäm $f(0)$, $g(1/2)$, $g(2/4)$, $h(-1)$, $s((1, 2))$ och $s((-2, 5))$.

b) Vilka av dessa tilldelningar är funktioner? Varför?

3. Definitionsmängder och målmängder av olika typer

Betrakta följande funktioner:

$$f_1\colon N \to Z, f_1(n) = n - 1,$$

$$f_2\colon N \to \{T, F\}, f_2(n) = 2 \mid n,$$

$$f_3\colon N \setminus \{0\} \to N \times N, f_3(n) = (n - 1, n),$$

$$f_4\colon \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \to N, f_4(X) = |X|,$$

$$f_5\colon \{T, F\} \times \{T, F\} \to \{T, F\}, f_5(p, q) = p \leftrightarrow q$$

a) Bestäm funktionernas definitionsmängd, målmängd och värdemängd.

b) Representera dessa funktioner grafiskt på ett lämpligt sätt.

4. Reella funktioner av en reell variabel

Funktioner f, g och h är definierade på följande vis:

$$f\colon\ R \to R, f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 3x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g\colon\ \{x \in R \mid x \geq -2\ \land\ x \leq 2\} \to R, g(x) = x^2 + 1$$

$$h\colon R \setminus \{x \in R \mid x > -1\ \land\ x < 1\} \to R, h(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Bestäm $f(-1)$, $f(0)$, $g(-2)$, $g(2)$, $h(-1)$ och $h(4)$.

b) Rita grafer för dessa funktioner.

c) Bestäm definitionsmängder, målmängder och värdemängder för dessa funktioner.

5. Surjektiva, injektiva och bijektiva funktioner

Följande funktioner är givna:

$$f_1\colon N \to N, f_1(n) = n^2,$$

$$f_2\colon R \to R, f_2(x) = x^3,$$

$$f_3\colon N \times N \to N, f_3(m, n) = m + n,$$

$$f_4\colon Z \to Z \times Z, f_4(n) = (n, n + 1),$$

$$f_5\colon R \to Z, f_5(x) = \lfloor x \rfloor,$$

$$f_6\colon R^+ \to R, f_6(x) = \frac{1}{x},$$

$$f_7\colon R^+ \to R^+, f_7(x) = \frac{1}{x}$$

a) Vilka av dessa funktioner är surjektioner? Varför?

b) Vilka av dessa funktioner är injektioner? Varför?

c) Vilka av dessa funktioner är bijektioner? Varför?

6. Inversa funktioner

Mängderna A, B och C är delmängder tlll mängden av naturliga tal N:

$$A = \{1, 2, 3\},$$
$$B = \{2, 4, 6\},$$
$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

Funktioner f, g och h är definierade på följande vis:

$$f: A \rightarrow B,$$

n	*f(n)*
1	*2*
2	*4*
3	*6*

$$g: A \rightarrow C,$$

n	*g(n)*
1	*8*
2	*6*
3	*4*

$$h: C \rightarrow C,$$

n	$h(n)$
2	8
4	6
6	4
8	2

a) Vilka av dessa funktioner har inversa funktioner? Varför?

b) Bestäm inversa fnktioner för de av dessa funktioner som är inverterbara.

7. Inversa funktioner

Funktioner f, g och h är definierade på följande vis:

$$f\colon\ R \to R, f(x) = 4x - 1,$$

$$g\colon\ R^{+} \cup \{0\} \to \{x \in R|\ x \geq 1\}, g(x) = x^2 + 1,$$

$$h\colon R \times R \to R \times R, h((x, y)) = (2x, 2y)$$

a) Bevisa att dessa funktioner har inversa funktioner.

b) Bestäm de inversa funktionerna f^{inv}, g^{inv} och h^{inv}.

c) Bestäm $f^{inv}(f(x))$, $f(f^{inv}(x))$, $g^{inv}(g(x))$, $g(g^{inv}(x))$ och $h^{inv}(h((x, y)))$, $h(h^{inv}((x, y)))$.

8. Inversa funktioner

Funktionen f är definierad på följande vis:

$$f\colon\ Z \to Z, f(x) = \begin{cases} x - 1, x\ jämn \\ x + 1, x\ udda \end{cases}$$

a) Bevisa att f är en inverterbar funktion.

b) Bestäm den inversa funktionen f^{inv}.

9. Sammansatta funktioner

Mängderna A, B och C är delmängder tlll mängden av naturliga tal N:

$$A = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\},$$
$$C = \{1, 3, 5, 7\}$$

Funktioner f och g är definierade på följande vis:

$$f\colon\ A \to B, f(n) = 2n,$$

$$g\colon B \to C, g(n) = n - 1$$

a) Bestäm den sammansatta funktionen $g \circ f$. Bestäm $(g \circ f)(3)$.

b) Bestäm $(g \circ f)^{inv}$. Bestäm $(g \circ f)^{inv}(5)$.

c) Bevisa att $(g \circ f)^{inv} = f^{inv} \circ g^{inv}$.

Gäller detta för alla inverterbara funktioner $f\colon\ X \to Y$ och $g\colon\ Y \to Z$?