

Komplexa tal

1. Komplexa tal i det komplexa talplanet

Följande komplexa tal är givna:

$$z_1 = 1 - 2i,$$

$$z_2 = -4 + i,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

a) Representera dessa komplexa tal med punkter i det komplexa talplanet.

b) Representera dessa komplexa tal med pilar i det komplexa talplanet.

2. Operationer med komplexa tal i det komplexa talplanet

Följande komplexa tal är givna:

$$z_1 = 4 + i,$$

$$z_2 = -1 + 2i,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$z_4 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

a) Beräkna $z_1 + z_2$ och $z_1 - z_2$. Representera dessa operationer i det komplexa talplanet.

b) Beräkna $z_3 \cdot z_4$ och z_3/z_4 . Representera dessa operationer i det komplexa talplanet.

3. Områden i det komplexa talplanet

Följande mängder med komplexa tal är givna:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i + 1| < \sqrt{2}\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{6}\},$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) \geq \frac{2\pi}{3} \wedge \operatorname{Arg}(z) < \frac{5\pi}{6}\},$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) \geq \frac{2\pi}{3}\}$$

Representera dessa mängder i det komplexa talplanet.

4. Operationer med komplexa tal

Följande komplexa tal är givna:

$$z_1 = 2 - i,$$

$$z_2 = 3 + 4i,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

a) Beräkna $z_1 \cdot z_2$ och z_1/z_2 .

b) Beräkna $z_3 + z_4$ och $z_3 - z_4$.

5. Operationer med komplexa tal

Följande komplexa tal är givna:

$$z = \sqrt{3} + i,$$

$$w = -\sqrt{3} + 3i,$$

- a) Beräkna $z \cdot w$ och z/w .
- b) Representera z och w i polär form, och beräkna sedan $z \cdot w$ och z/w . Yttra resultatet i rektangulär form.
- c) Beräkna z^2 , z^6 , z^{12} , \bar{z}^{12} och w^{10} .

6. Trigonometriska formler genom operationer med komplexa tal

Betrakta följande formelhärledning:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \Rightarrow \\ (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cos \theta) \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow$$

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

Härled på ett liknande sätt följande formler:

$$\begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4\sin^3 \theta \end{cases}$$

7. Huvudrötter till komplexa tal

Följande komplexa tal är givna:

$$z = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$u = -4i,$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

a) Beräkna följande huvudrötter: \sqrt{z} , $\sqrt[3]{z}$ och $\sqrt[4]{z}$.

b) Beräkna följande huvudrötter: $\sqrt[4]{u}$, $\sqrt[4]{v}$ och $\sqrt[4]{w}$.

8. Binomiska ekvationer

Följande binomiska ekvationer är givna:

$$z^2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$z^3 = -4i,$$

$$z^4 = 1 - i\sqrt{3},$$

$$z^5 = -32$$

Beräkna rötter till ekvationerna. Representera dessa rötter i det komplexa talplanet.