Tentamen

Förklaringar

Lösningen till en uppgift ska formuleras noggrant och kortfattat. Den ska ha en klar logisk struktur, och innehålla nödvändiga matematiska fakta. Både ord och symboler ska användas, i en lämplig kombination. Typiska delar av lösningen kan formuleras som separata enheter.

Bilder i en lösning ska utformas noggrant, fullständigt och i rätt storlek. Det går att använda en linjal och en passare. Den information som förknippas med en bild ska klart framgå.

På ett blad ska det inte finnas lösningar till fler än en uppgift.

För betyget P räcker det med hälften av det totala antalet poäng.

Uppgifter

Uppgift 1 (4 poäng + 4 poäng)

Två mängder är givna:

$$A = \{(x, y) \in R \times R \mid x + 2y = 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 - y - 2x = 0\}$$

a) Rita grafer till dessa mängder i koordinatplanet.

b) Mängden C är snittet av mängderna A och B. Specificera denna mängd genom att ange alla dess element. Rita grafen till C i koordinatplanet.

Lösning

a)

Grafen till mängden A består av de punkter i koordinatplanet vars koordinater uppfyller ekvationen $x + 2y = 0$. Det är en rät linje. För att rita den linjen, räcker det att bestämma två punkter på linjen.

$x = 0$: $0 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$x = 2$: $2 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -1$

Punkterna på linjen är $(0, 0)$ och $(2, -1)$.

Grafen till mängden B består av de punkter i koordinatplanet vars koordinater uppfyller ekvationen $x^2 - y - 2x = 0$, det vill säga ekvationen $y = x^2 - 2x$. Det är en parabel som ligger ovanför en horisontell linje. För att rita den, räcker det att bestämma dess skärningspunkter med x–axeln och dess vertex.

Skärningspunkter med x–axeln:

$0 = x^2 - 2x \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Skärningspunkterna är $(0, 0)$ och $(2,0)$.

Vetex:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, y = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

Vertex är $(1, -1)$.

Rita här grafer till A och B i samma koordinatplan.

b)

$C = A \cap B =$
$\{(x, y) \in R \times R \mid x + 2y = 0\} \cap$
$\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 - y - 2x = 0\} \rightarrow$
$C = \{(x, y) \in R \times R \mid x + 2y = 0 \ \wedge \ x^2 - y - 2x = 0\}$

Mängden C består av de element (x, y) i domänen $R \times R$ som uppfyller predikaten $x + 2y = 0 \wedge x^2 - y - 2x = 0$.

$$x + 2y = 0 \ \wedge \ x^2 - y - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x \ \wedge \ y = x^2 - 2x$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x \ \wedge \ -\frac{1}{2}x = x^2 - 2x$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x \ \wedge \ 2x^2 - 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x \ \wedge \ x(2x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x \ \wedge \ \left(x = 0 \ \vee \ x = \frac{3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \wedge y = -\frac{1}{2}x\right) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{1}{2}x\right)$$

$$\Leftrightarrow (x = \ 0 \wedge y = 0) \ \vee \ \left(x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{3}{4}\right)$$

Snittet C är:

$$C = \{ (0,0), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right) \}$$

Grafen till C i koordinatplanet består av punkterna $(0,0)$ och $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, som är skärningspunkter mellan den räta linjen och parabeln.

Rita här grafen till C i ett koordinatplan (den räta linjen och parabeln ska finnas streckade).

■

Uppgift 2 (2 poäng + 2 poäng + 2 poäng)

Golvfunktionen $\lfloor x \rfloor$ är definierad på följande vis:

$$\lfloor x \rfloor : R \to Z, \ \ \lfloor x \rfloor = maximum\ (\{n \in Z \mid n \leq x\})$$

a) Rita grafen till funktionen i ett koordinatplan.

b) Är funktionen jämn? Bevisa ditt påstående.

c) Är funktionen surjektiv? Bevisa ditt påstående.

Lösning

a)

Se grafen till ”the greatest integer function” i slutet av avsnitt P.5 i ”Calculus”-boken.

b)

Definition – jämna funktioner:

$En\ funktion\ f, definierad\ i\ en\ domän\ D \subseteq R,$ är $jämn$
$\Leftrightarrow\ (\forall x \in D)\ (f(-x) = f(x))$

Enligt definitionen, för att $\lfloor x \rfloor$ ska vara en jämn funktion, är det nödvändigt att likheten $\lfloor -x \rfloor = \lfloor x \rfloor$ gäller i hela domänen R. Men så är det inte fallet. Till exempel gäller inte villkoret för $x = 1$:

$\lfloor -x \rfloor = \lfloor -1 \rfloor = -1 \ \wedge\ \lfloor x \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$
$\rightarrow\ \lfloor -1 \rfloor \neq \lfloor 1 \rfloor$

Funktionen $\lfloor x \rfloor$ är inte jämn.

Funktionens graf är inte symmetrisk kring den vertikala aveln. Det betyder att funktionen inte är jämn.

c)

Definition – surjektiva funktioner:

$En\ funktion\ f\colon X \rightarrow Y$ är $surjektiv$
$\Leftrightarrow\ (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$

Enligt definitionen, för att $\lfloor x \rfloor$ ska vara en surjektiv funktion, är det nödvändigt och tillräckligt att varje element y i målmängden Z är bild av något element x i definitionsmängden R. Funktionen $\lfloor x \rfloor$ uppfyller detta villkor. Varje heltal är bild av minst ett reellt tal x.

Låt y vara ett godtyckligt heltal. I så fall kan just detta heltal väljas för x: $x = y$. Eftersom y är ett heltal, gäller följande:

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor = y,$$

För ett godtyckligt $y \in Z$ har vi hittat ett $x \in R$, sådant att $\lfloor x \rfloor = y$. Funktionen är surjektiv.

Funktionens graf visar att varje heltal egentligen är bild av oändligt många reella tal.

■

Uppgift 3 (2 poäng + 4 poäng)

Tre komplexa tal är givna:

$$u = 2 - i,\ \ v = 7 - i,\ \ w = 1 + i$$

Lös följande ekvationer i domänen av alla komplexa tal C:

a) $u \cdot z = v$

b) $z^3 = w$

Lösning

a)

$u \cdot z = v$

$\Leftrightarrow (2 - i) \cdot z = 7 - i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{7 - i}{2 - i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{7 - i}{2 - i} \cdot \dfrac{2 + i}{2 + i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{14 + 7i - 2i - i^2}{2^2 + (-1)^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{15 + 5i}{5}$

$\Leftrightarrow z = 3 + i$

Lösningen är: $z_1 = 3 + i$

b)

$w = 1 + i$

$\leftrightarrow |w| = \sqrt{1^2 + 1^2} \ \wedge \ Arg\, w = \dfrac{\pi}{4}$

$\leftrightarrow w = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z^3 = w$

$\Leftrightarrow z^3 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}}{3})$

$\vee \ z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3})$

$$\vee \ z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\vee \ z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$\vee \ z = \sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12})$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\vee \ z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\vee \ z = \sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{-7\pi}{12} + i\sin\frac{-7\pi}{12})$$

Lösningar är:

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{-7\pi}{12} + i\sin\frac{-7\pi}{12})$$

■

Uppgift 4 (2 poäng + 2 poäng)

Betrakta följande logiska argument:

$$
\begin{array}{c}
p \;\rightarrow\; q \\
q \\
\hline
\therefore\; p
\end{array}
$$

a) Motbevisa det här argumentet: finn en instans av argumentet då alla premisser är sanna, men slutsatsen är falsk.

b) Bevisa med hjälp av en sanningstabell att det här argumentet inte är giltigt.

Lösning

a)

Låt x vara ett reellt tal, och p och q följande propositioner:

$$p\colon x > 1, \quad q\colon x^2 > 1$$

I så fall är instansen av argumentet:

$$
\begin{array}{c}
x > 1 \;\rightarrow\; x^2 > 1 \\
x^2 > 1 \\
\hline
\therefore\; x > 1
\end{array}
$$

Premissen $x > 1 \rightarrow \; x^2 > 1$ är sann. Låt även premissen $x^2 > 1$ vara sann. I så fall är båda premisser sanna, men slutsatsen behöver inte vara sann. Om $x < -1$, till exempel om $x = -2$, är inte $x > 1$.

b)

p	q	$p \rightarrow q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Det finns två kritiska rader, där båda premisserna $p \rightarrow q$ och q är sanna. Men i en av dessa rader är slutsatsen p inte sann. Det betyder att argumentet inte är giltigt.

■

Uppgift 5 (3 poäng + 3 poäng)

Bevisa följande påståenden:

a) Om n är ett heltal, är $n^3 - n$ delbart med 3.

b) Om r_1 och r_2 är rationella tal, är $r_1 + r_2$ ett rationellt tal.

Lösning

a)

Låt n vara ett heltal.

Beteckna heltalet $n^3 - n$ med p. I så fall är:

$$p = (n-1)n(n+1)$$

Enligt divisionsteoremet kan n representeras på precis ett av följande vis:

$$3q, 3q+1, 3q+2, q \in Z$$

Fall $n = 3q$:

$p = (n-1) \cdot 3q \cdot (n+1)$

$p = 3 \cdot (n-1)q(n+1) = 3l, l \in Z.$

Fall $n = 3q + 1$:

$p = (3q + 1 - 1) \cdot n(n+1)$

$p = 3 \cdot qn(n+1) = 3l, l \in Z.$

Fall $n = 3q + 2$:

$p = (n-1)n \cdot (3q + 2 + 1)$

$p = 3 \cdot (n-1)n(q+1) = 3l, l \in Z.$

I vilket fall som helst är $p = 3l$ för något heltal l. Heltalet $n^3 - n$ är delbart med 3.

b) Se beviset i artikeln *Uppfinna matematiska bevis* av *Fadil Galjic*.

■