

Equações Diferenciais Numéricas

Trabalho Prático 4: Equação do Transporte e Equação de Laplace

Mateus Ryan de Castro Lima

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

 github.com/Mryan31/tp4_EDN

Novembro de 2025

Sumário

1	Introdução	3
2	Parte 1: Equação do Transporte	3
2.1	Análise dos Esquemas Numéricos	3
2.1.1	Esquema Upwind	3
2.1.2	Esquema de Lax-Friedrichs	3
2.1.3	Esquema de Lax-Wendroff	4
2.2	Estabilidade Linear (Von Neumann)	4
2.3	Implementação (Python)	4
2.4	Resultados Numéricos	5
3	Parte 2: Equações de Laplace e Poisson	5
3.1	Princípio do Máximo e Unicidade	5
3.2	Contra-Exemplo: Singularidades	6
3.3	Método das Diferenças Finitas (Esquema de 5 Pontos)	6
3.4	Resultados Numéricos e Convergência	6
4	Conclusão	8

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é a implementação e análise de métodos de diferenças finitas para duas classes fundamentais de Equações Diferenciais Parciais (EDPs): hiperbólicas e elípticas.

Na **Parte 1**, estudamos a Equação do Transporte Linear ($u_t + au_x = 0$), que modela a advecção pura de uma quantidade escalar. O foco reside na estabilidade condicional (CFL) e na dicotomia entre esquemas dissipativos (Upwind, Lax-Friedrichs) e dispersivos (Lax-Wendroff).

Na **Parte 2**, abordamos a Equação de Laplace ($\Delta u = 0$), protótipo das EDPs elípticas, descrevendo estados estacionários. Analisamos o Princípio do Máximo, provamos a unicidade da solução e implementamos o método das diferenças finitas via iteração de Gauss-Seidel.

Os resultados são validados através de comparações com soluções analíticas e estudos de ordem de convergência.

2 Parte 1: Equação do Transporte

A equação do transporte unidimensional é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

A solução exata é uma onda viajante $u(x, t) = u_0(x - at)$, onde u_0 é a condição inicial. A informação propaga-se ao longo das curvas características definidas por $dx/dt = a$.

Definimos o **Número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)** como:

$$\nu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}.$$

2.1 Análise dos Esquemas Numéricos

2.1.1 Esquema Upwind

O esquema Upwind ("vento a favor") utiliza a direção da velocidade a para escolher o ponto da malha espacial. Para $a > 0$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu(U_j^n - U_{j-1}^n).$$

Este método é de **primeira ordem** no tempo e no espaço, com erro de truncamento $O(\Delta t, \Delta x)$. Embora estável para $0 \leq \nu \leq 1$, ele é altamente *dissipativo*, tendendo a suavizar a solução excessivamente (efeito de viscosidade artificial).

2.1.2 Esquema de Lax-Friedrichs

Substitui U_j^n pela média espacial na aproximação da derivada temporal:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Apesar de estável sob a condição $|\nu| \leq 1$, o Lax-Friedrichs introduz um erro de difusão significativo, proporcional a $\Delta x^2/\Delta t$, tornando-o pouco preciso para longos períodos de simulação.

2.1.3 Esquema de Lax-Wendroff

Derivado da expansão de Taylor de segunda ordem, este esquema busca corrigir a difusão dos métodos anteriores:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n).$$

É um método de **segunda ordem** $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Sua principal desvantagem é ser *dispersivo*, gerando oscilações espúrias (Fenômeno de Gibbs) próximas a descontinuidades fortes (como ondas quadradas), embora preserve bem a amplitude de funções suaves (gaussianas).

2.2 Estabilidade Linear (Von Neumann)

Para que os esquemas explícitos sejam estáveis, a condição CFL deve ser respeitada:

$$|\nu| = \left| \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

Fisicamente, isso significa que o domínio de dependência numérico deve conter o domínio de dependência real da EDP. Se $|\nu| > 1$, a informação "viaja" mais rápido que a malha numérica consegue capturar, resultando em crescimento exponencial do erro.

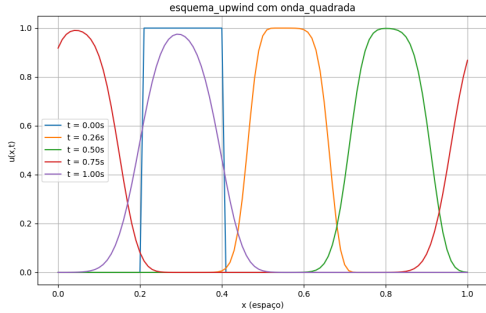
2.3 Implementação (Python)

```
1 def esquema_upwind(U_n, a, cfl):
2     U_nm1 = U_n.copy()
3     c = cfl * np.sign(a)
4     if a > 0:
5         # Diferença regressiva
6         U_nm1[1:-1] = U_n[1:-1] - c * (U_n[1:-1] - U_n[0:-2])
7     else:
8         # Diferença progressiva
9         U_nm1[1:-1] = U_n[1:-1] - c * (U_n[2:] - U_n[1:-1])
10    return U_nm1
11
12 def esquema_lax_friedrichs(U_n, a, cfl):
13     U_nm1 = U_n.copy()
14     c = cfl * np.sign(a)
15     U_nm1[1:-1] = 0.5*(U_n[2:] + U_n[0:-2]) - 0.5*c*(U_n[2:] - U_n[0:-2])
16    return U_nm1
17
18 def esquema_lax_wendroff(U_n, a, cfl):
19     U_nm1 = U_n.copy()
20     c = cfl * np.sign(a)
21     # Termo advectivo + Termo de correção difusiva
22     U_nm1[1:-1] = U_n[1:-1] - 0.5*c*(U_n[2:] - U_n[0:-2]) + \
23         0.5*(c**2)*(U_n[2:] - 2*U_n[1:-1] + U_n[0:-2])
24    return U_nm1
```

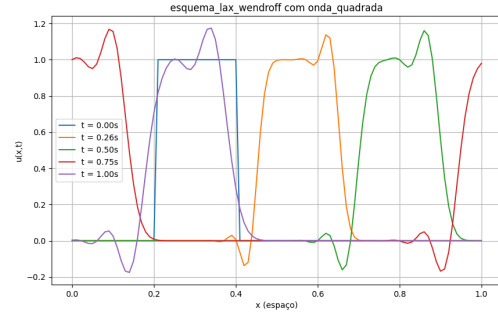
Listing 1: Implementação dos esquemas para a Eq. do Transporte

2.4 Resultados Numéricos

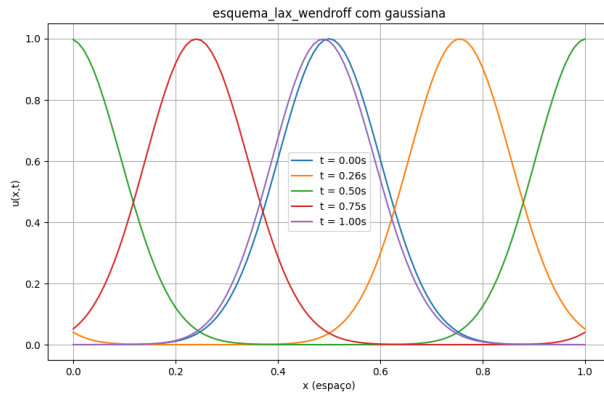
A Figura 1 destaca a diferença fundamental entre esquemas de primeira e segunda ordem ao tratar descontinuidades. O Upwind sofre com a difusão numérica, "borrando" a onda quadrada, enquanto o Lax-Wendroff preserva melhor as bordas, mas introduz oscilações (Gibbs).



(a) Upwind: Forte suavização (Difusão).



(b) Lax-Wendroff: Oscilações (Dispersão).



(c) Lax-Wendroff na Gaussiana: Excelente preservação da forma.

Figura 1: Comportamento dos esquemas numéricos para $CFL = 0.8$.

3 Parte 2: Equações de Laplace e Poisson

A Equação de Laplace $\Delta u = 0$ modela potenciais eletrostáticos, escoamento irrotacional e distribuição de temperatura em equilíbrio.

3.1 Princípio do Máximo e Unicidade

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo Forte). *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ uma função harmônica ($\Delta u = 0$) em um domínio limitado Ω . Se u não é constante, então u atinge seus valores máximo e mínimo estritamente na fronteira $\partial\Omega$.*

Demonstração da Unicidade: O Princípio do Máximo garante a unicidade da solução para o problema de Dirichlet. Sejam u_1 e u_2 duas soluções para $\Delta u = 0$ em Ω com $u = f$

em $\partial\Omega$. Defina $w = u_1 - u_2$. Então:

$$\Delta w = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$w|_{\partial\Omega} = f - f = 0$$

Pelo princípio do máximo, $\max w = \max_{\partial\Omega} w = 0$. Pelo princípio do mínimo, $\min w = \min_{\partial\Omega} w = 0$. Logo, $w \equiv 0$ em todo Ω , implicando $u_1 = u_2$. \square

3.2 Contra-Exemplo: Singularidades

As funções $u_1(x, y) = 1 - \ln(x^2 + y^2)$ e $u_2(x, y) = 1 + \ln(x^2 + y^2)$ não violam o princípio da unicidade, apesar de poderem compartilhar valores na borda de um anel, por exemplo.

Razão: Elas possuem uma singularidade na origem $(0, 0)$. Se a origem estiver no interior do domínio, as funções não são harmônicas em *todo* o domínio (falham em $C^2(\Omega)$), invalidando a aplicação do teorema.

3.3 Método das Diferenças Finitas (Esquema de 5 Pontos)

Discretizando o operador Laplaciano com diferenças centradas de segunda ordem ($\Delta x = \Delta y = h$):

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

Isolando $U_{i,j}$, obtemos a propriedade da média:

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \quad (2)$$

Este sistema linear esparsa é resolvido iterativamente (Gauss-Seidel ou SOR).

3.4 Resultados Numéricos e Convergência

```

1 def solver_numerico_laplace(dx, dy, tol=1e-6):
2     M, N = int(1.0/dx)+1, int(1.0/dy)+1
3     x, y = np.linspace(0, 1, M), np.linspace(0, 1, N)
4     X, Y = np.meshgrid(x, y)
5     U = np.zeros((N, M))
6
7     # Condições de Fronteira (exemplo: u(x,0) = sin(pi*x))
8     U[-1, :] = np.sin(np.pi * x)
9
10    erro = tol + 1.0
11    while erro > tol:
12        U_old = U.copy()
13        # Atualização Gauss-Seidel
14        for j in range(1, N-1):
15            for i in range(1, M-1):
16                U[j, i] = 0.25*(U[j, i+1] + U[j, i-1] + U[j+1, i] +
17                               U[j-1, i])
18            erro = np.max(np.abs(U - U_old))
19    return X, Y, U

```

Listing 2: Solver de Laplace via Gauss-Seidel

A validação foi feita comparando a solução numérica com a analítica para uma malha refinada ($h = 0.0625$).

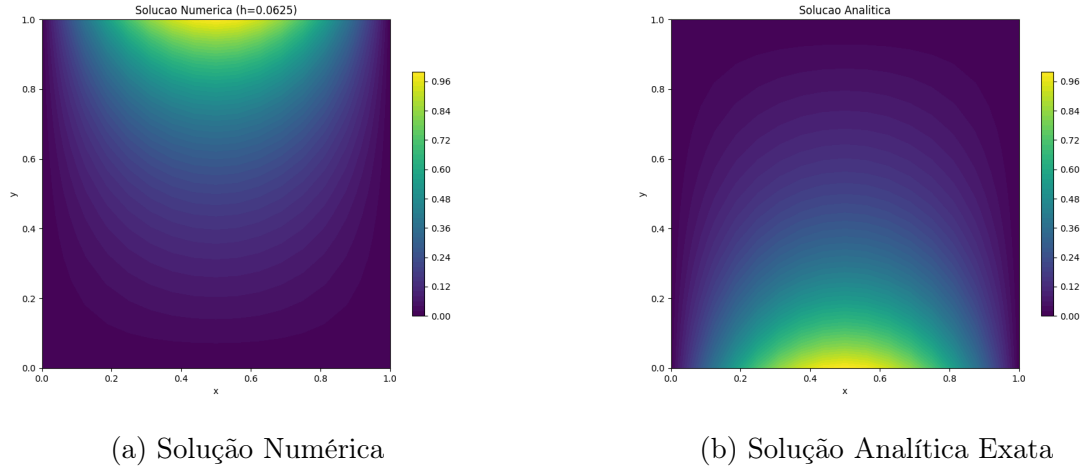


Figura 2: Comparação visual demonstra a correção qualitativa do método.

A Tabela 1 e a Figura 3 apresentam a análise de erro. Ao reduzirmos h pela metade, o erro cai aproximadamente por um fator de 4, confirmando a convergência quadrática $O(h^2)$.

Tabela 1: Análise de Convergência no ponto $(0.5, 0.5)$

Passo (h)	U_{num}	U_{exata}	Erro Absoluto
0.5000	0.200164	0.190268	9.90×10^{-3}
0.2500	0.192801	0.190268	2.53×10^{-3}
0.1250	0.190906	0.190268	6.38×10^{-4}
0.0625	0.190428	0.190268	1.60×10^{-4}

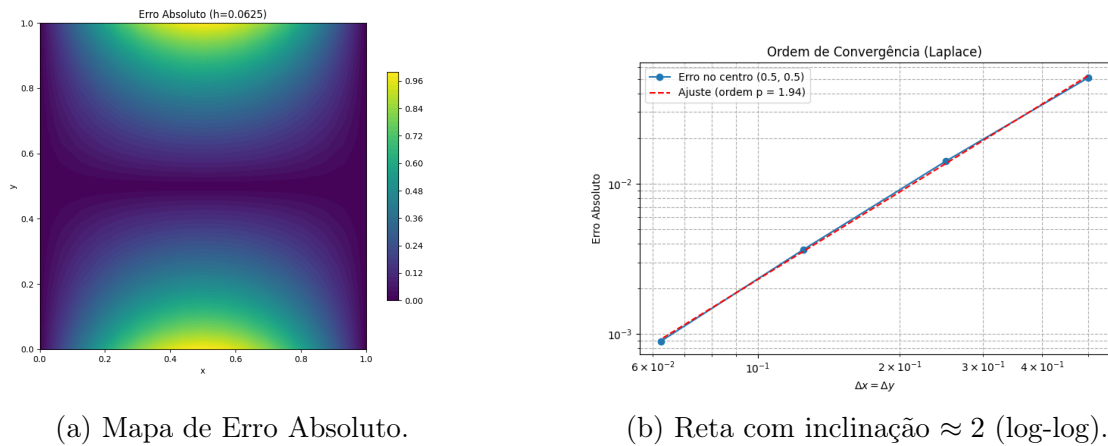


Figura 3: Análise quantitativa do erro para a Equação de Laplace.

4 Conclusão

O estudo permitiu verificar na prática as propriedades teóricas das EDPs. Para a equação do transporte, conclui-se que o esquema de Lax-Wendroff, embora gere oscilações em descontinuidades, oferece melhor precisão global para dados suaves em comparação aos métodos de primeira ordem (Upwind/Lax-Friedrichs).

Para a equação de Laplace, o método de diferenças finitas provou ser consistente e estável, respeitando o Princípio do Máximo discreto e convergindo quadraticamente para a solução analítica, validando a implementação do solver iterativo.

Referências

- [1] MILANÉS, Aniura. *Equações Diferenciais Numéricas: Notas de Aula*. Departamento de Matemática, UFMG, 2021.
- [2] LEVEQUE, Randall J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, 2007.
- [3] ATKINSON, K.; HAN, W.; STEWART, D. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 2011.