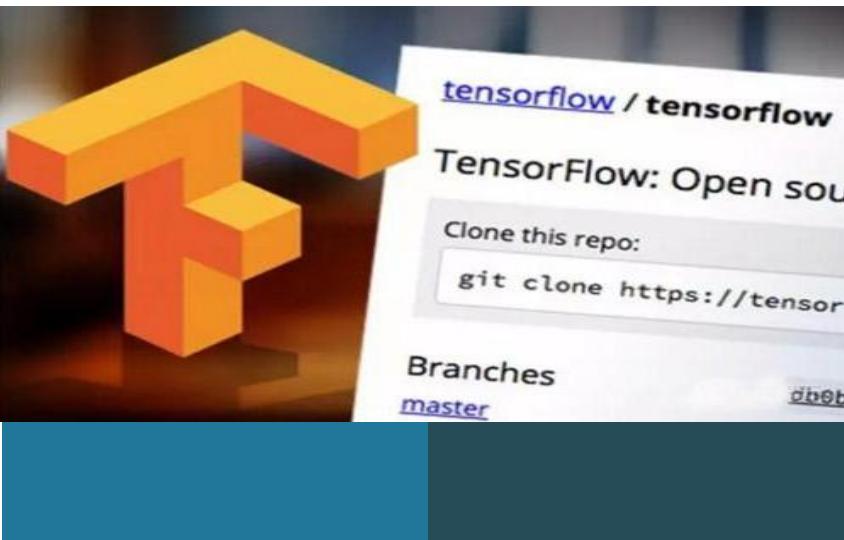




## 09 回归问题

西安科技大学 牟琦  
[muqi@xust.edu.cn](mailto:muqi@xust.edu.cn)



## 9.1 机器学习基础

# 9.1 机器学习基础



日晕三更雨，月晕午时风  
有雨山戴帽，无雨云拦腰  
朝霞不出门，晚霞行千里

早晨东云长，有雨不过晌  
早晨云挡坝，三天有雨下  
早晨浮云走，午后晒死人  
空中鱼鳞天，不雨也风颠  
天上豆荚云，不久雨将临  
天上铁砧云，很快大雨淋

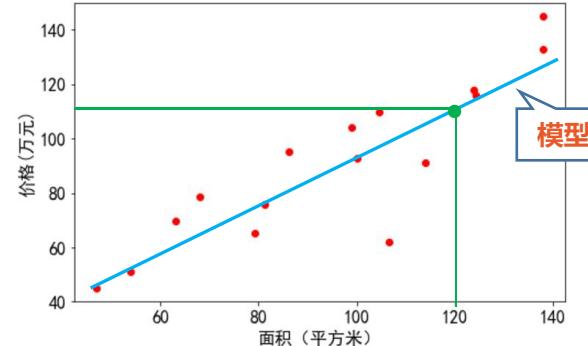
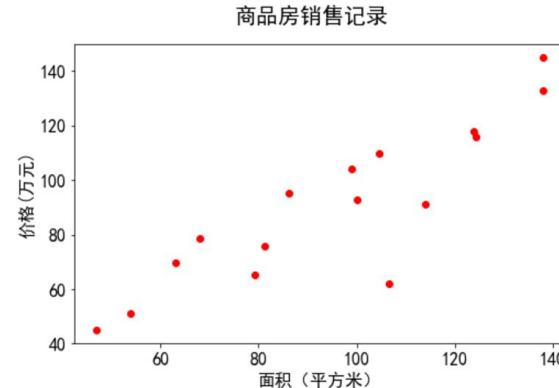


## ■ 机器学习：从数据中学习

- 建立模型
- 学习模型
- 预测房价

**例：**房屋销售记录

序号	面积 (平方米)	销售价格 (万元)	序号	面积 (平方米)	销售价格 (万元)
1	137.97	145.00	9	106.69	62.00
2	104.50	110.00	10	138.05	133.00
3	100.00	93.00	11	53.75	51.00
4	124.32	116.00	12	46.91	45.00
5	79.20	65.32	13	68.00	78.50
6	99.00	104.00	14	63.02	69.65
7	124.00	118.00	15	81.26	75.69
8	114.00	91.00	16	86.21	95.30



**学习算法：**从数据中产生模型的算法



兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## □ 监督学习 (Supervised Learning)

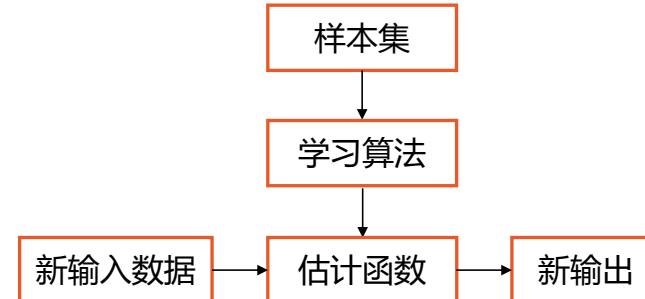
通过对**数据**的学习,寻找**属性**和**标记**之间的映射关系

### ■ 数据集 (data set) / 样本集 (sample set)

- **示例** (instance) / **样本** (sample)
- **属性** (attribute) / **特征** (feature)
- **标记/标签** (label)

### ■ 模型/假设/估计函数/学习器 (learner)

### ■ 真相/真实 (ground truth)



**回归** (regression) : 预测**连续值**

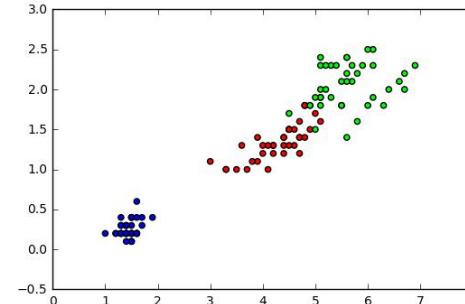
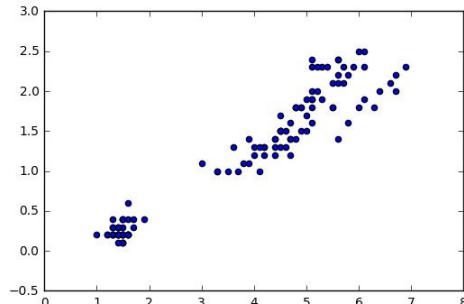
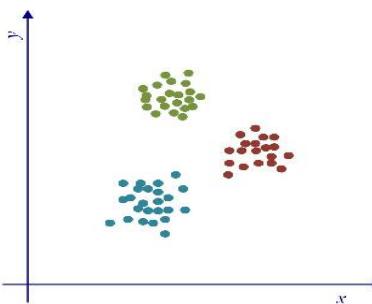
**分类** (classification) : 预测**离散值**



## 口 无监督学习 (Unsupervised Learning)

在样本数据**没有标记**的情况下，挖掘出**数据**内部蕴含的**关系**

聚类：把**相似度**高的样本聚合在一起



## 口 半监督学习(Semi-Supervised Learning)

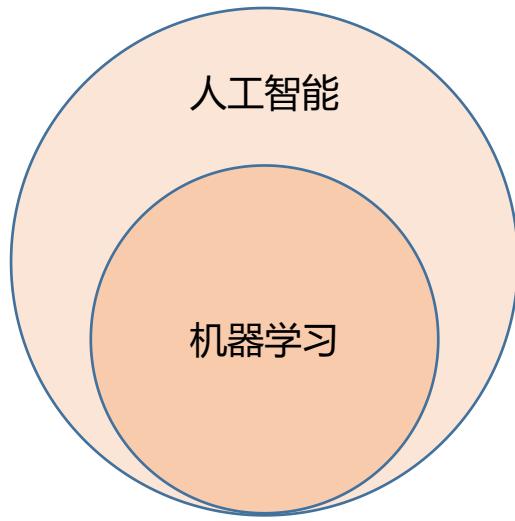
将有监督学习和无监督学习相结合，综合使用**大量的没有标记数据**和**少量有标记的数据**共同进行学习



复旦科技大学

计算机科学与技术学院

## ■ 机器学习的发展和应用





## 9.2 一元线性回归

## ■ 一元线性回归(Simple linear regression)

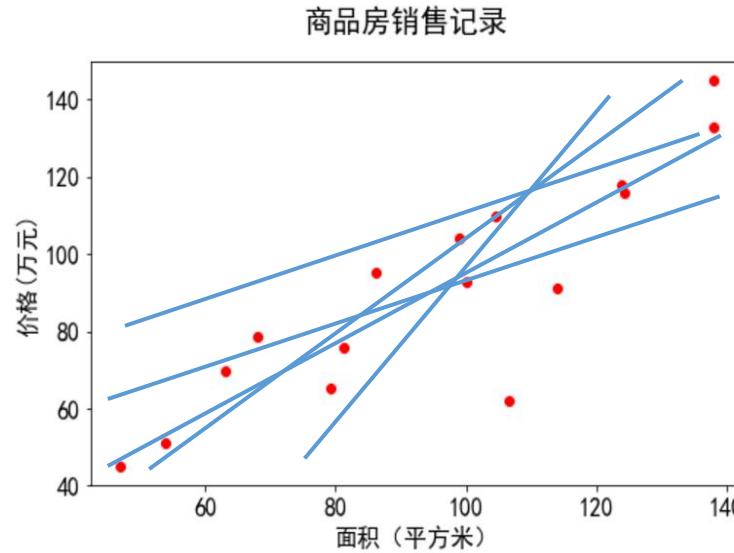
模型:  $y = wx + b$

模型变量:  $x$

模型参数

■  $w$ : 权重 (weights)

■  $b$ : 偏置值 (bias)



西安科技大学

计算机科学与技术学院

## 9.2 一元线性回归

最佳拟合直线应该使得所有点的残差累计值最小

### □ 残差和最小

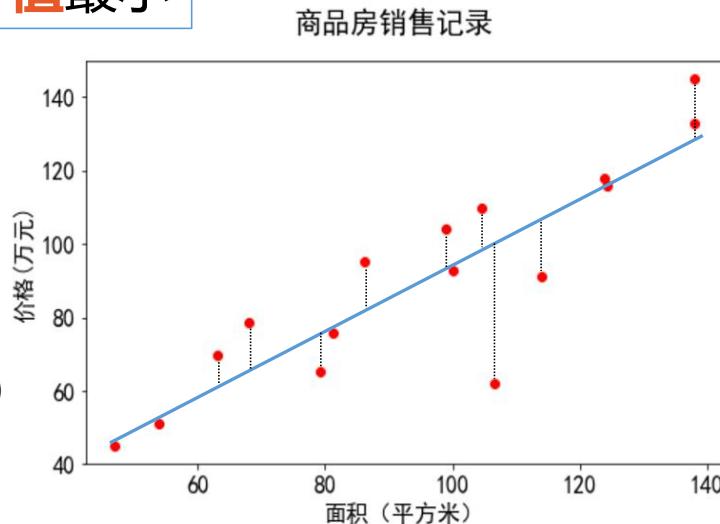
$$Loss = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i - (wx_i + b))$$

### □ 残差绝对值和最小

$$Loss = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - (wx_i + b)|$$

### □ 残差平方和最小

$$Loss = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - (wx_i + b))^2$$



兰州交通大学

计算机科学与技术学院

■ **损失函数/代价函数** (cost function): 估量模型的**预测值与真实值**的不一致程度

□ **平方损失函数** (Square Loss)

$$Loss = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - (wx_i + b))^2$$

□ **均方误差** (Mean Squre Error)

$$Loss = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (y_i - (wx_i + b))^2$$

■ **最小二乘法**: 基于**均方误差最小化**来进行模型求解的方法



## 9.2 一元线性回归

$$Loss = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - (wx_i + b))^2$$

已知：样本点  $(x_i, y_i)$   
未知：变量为  $w, b$

求极值问题： $w, b$  取何值时，损失函数最小？

极值点的偏导数为零

解析解 (Analytical solution)

封闭解 (Closed-form solution)

$$\frac{\partial Loss}{\partial w} = \sum_{i=1}^n (y_i - b - wx_i)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial Loss}{\partial b} = \sum_{i=1}^n (y_i - b - wx_i)(-1) = 0$$

$$w = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - w \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

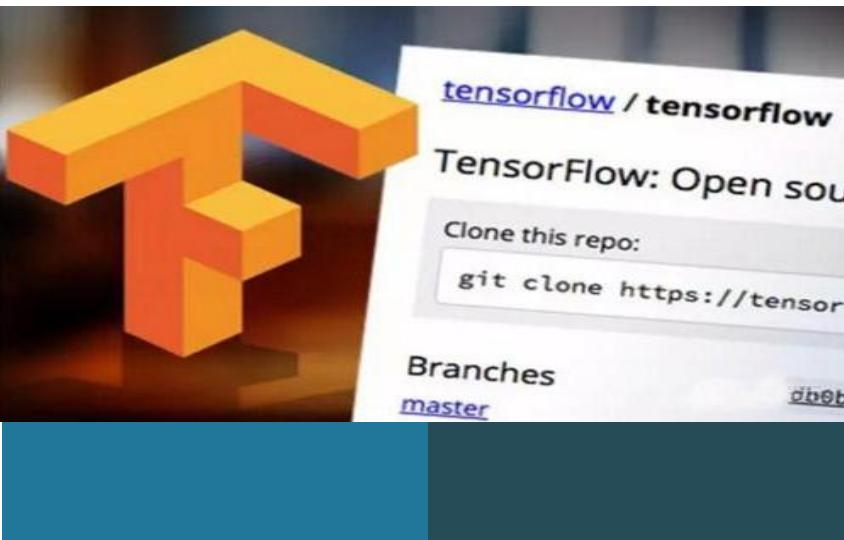
$$w = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - w \bar{x}$$



西安科技大学

计算机科学与技术学院



## 9.3 实例：解析法实现一元线性回归

## 9.3 实例：解析法实现一元线性回归

### ■ 房屋销售记录

序号	面积 (平方米)	销售价格 (万元)	序号	面积 (平方米)	销售价格 (万元)
1	137.97	145.00	9	106.69	62.00
2	104.50	110.00	10	138.05	133.00
3	100.00	93.00	11	53.75	51.00
4	124.32	116.00	12	46.91	45.00
5	79.20	65.32	13	68.00	78.50
6	99.00	104.00	14	63.02	69.65
7	124.00	118.00	15	81.26	75.69
8	114.00	91.00	16	86.21	95.30

### ■ 待评估的房屋面积

[128.15, 45.00, 141.43, 106.27, 99.00, 53.84, 85.36, 70.00]

□ 加载样本数据：x, y

□ 学习模型：计算w,b

$$w = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - w\bar{x}$$

□ 预测房价

$$\hat{y} = wx + b$$



西安科技大学

计算机科学与技术学院

## 9.3 实例：解析法实现一元线性回归

- 导入库，设置字体
- 加载样本数据

```
In [1]: import numpy as np
import tensorflow as tf
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']

In [2]: x=tf.constant([137.97, 104.50, 100.00, 124.32, 79.20, 99.00, 124.00, 114.00,
                   106.69, 138.05, 53.75, 46.91, 68.00, 63.02, 81.26, 86.21])
y=tf.constant([145.00, 110.00, 93.00, 116.00, 65.32, 104.00, 118.00, 91.00,
               62.00, 133.00, 51.00, 45.00, 78.50, 69.65, 75.69, 95.30])
```



## 9.3 实例：解析法实现一元线性回归

### □ 学习模型——计算 $w, b$

```
In [3]: meanX=tf.reduce_mean(x)  
meanY=tf.reduce_mean(y)  
  
sumXY=tf.reduce_sum((x-meanX)*(y-meanY))  
sumX=tf.reduce_sum((x-meanX)*(x-meanX))  
  
w=sumXY/sumX  
b= meanY-w*meanX
```

$$w = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - w\bar{x}$$

```
In [4]: print("权值w=",w.numpy(),"\n偏置值b=",b.numpy())  
print("线性模型:y=",w.numpy(),"*x+",b.numpy())
```

权值w= 0.8945604  
偏置值b= 5.4108505  
线性模型:y= 0.8945604 \*x+ 5.4108505



## □ 预测房价

```
In [5]: x_test=np.array([128.15, 45.00, 141.43, 106.27, 99.00, 53.84, 85.36, 70.00])
y_pred=(w*x_test+b).numpy()
```

```
In [6]: print("面积\t估计房价")
n=len(x_test)
for i in range(n):
    print(x_test[i], "\t", round(y_pred[i], 2))
```

面积	估计房价
128.15	120.05
45.0	45.67
141.43	131.93
106.27	100.48
99.0	93.97
53.84	53.57
85.36	81.77
70.0	68.03



## 9.3 实例：解析法实现一元线性回归

### □ 数据和模型可视化

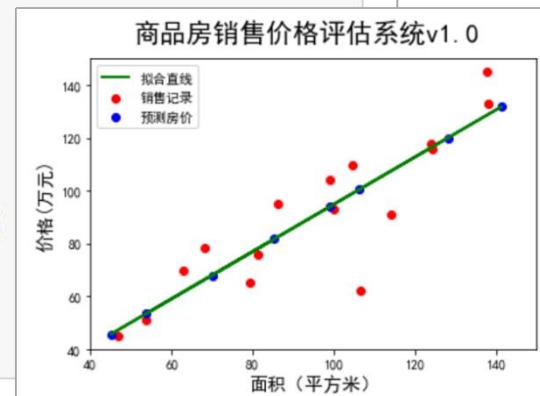
```
In [7]: plt.figure()

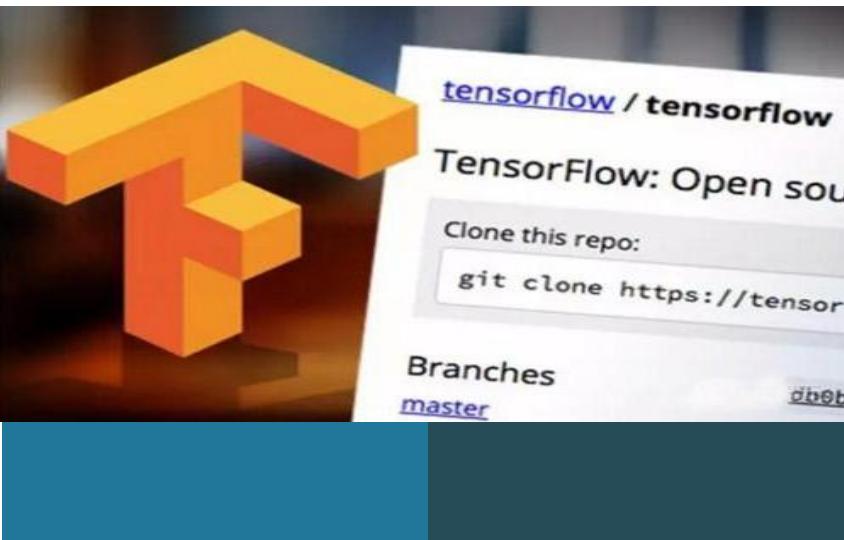
plt.scatter(x, y, color="red", label="销售记录")
plt.scatter(x_test, y_pred, color="blue", label="预测房价")
plt.plot(x_test, y_pred, color="green", label="拟合直线", linewidth=2)

plt.xlabel("面积 (平方米)", fontsize=14)
plt.ylabel("价格(万元)", fontsize=14)

plt.xlim((40, 150))
plt.ylim((40, 150))

plt.suptitle("商品房销售价格评估系统v1.0", fontsize=20)
plt.legend(loc="upper left")
plt.show()
```

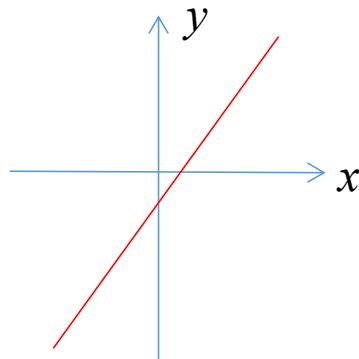




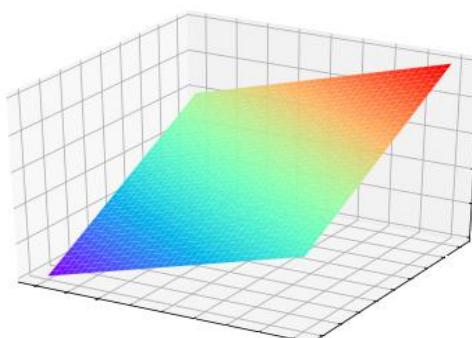
## 9.4 多元线性回归

- **多元回归** (Multivariate Regression) : 回归分析中包括**两个或两个以上**的自变量
- **多元线性回归** (Multivariate Linear Regression) : 因变量和自变量之间是**线性**关系

$$y = wx + b$$



$$y = w_1x_1 + w_2x_2 + b$$



$$y = w_1x_1 + \dots + w_mx_m + b$$

**超平面** (Hyperplane):  
直线在**高维空间**中的推广



## 9.4 多元线性回归

模型:  $\hat{y} = w_1 x^1 + \dots + w_m x^m + b$  令  $b=w_0, x^0=1$

$x^1, x^2, \dots, x^m$  样本属性  
 $w_1, w_2, \dots, w_m$  权值

$x^1$ : 面积,  $x^2$ : 房间数,  $x^3$ : 楼层数

$w_1=0.6, w_2=0.3, w_3=0.1$

向量形式:  $\hat{y} = w_0 x^0 + w_1 x^1 + \dots + w_m x^m = W^T X$

$n$  个样本  $(X_i, y_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$

$$W = (w_0, w_1, \dots, w_m)^T$$

$$X = (x^0, x^1, \dots, x^m)^T$$

$$\hat{y}_i = W^T X_i$$

损失函数:  $Loss = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - W^T X_i)^2$



复旦科技大学

计算机科学与技术学院

## 9.4 多元线性回归

**损失函数:**  $Loss = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - W^T X_i)^2$

$$Loss = (Y - XW)^T (Y - XW)$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

$$X_i = (x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^m)$$

**极值问题:** 参数**向量** $W$  取何值时,  $Loss$ 函数达到最小?

函数 $f(x)$ 最小化时自变量 $x$ 的取值

$$\arg \min_x f(x)$$

函数 $f(x)$ 最大化时自变量 $x$ 的取值

$$\arg \max_x f(x)$$

$$\boxed{\arg \min_w (Y - XW)^T (Y - XW)}$$



## 求解模型参数

$$Loss = (Y - XW)^T (Y - XW)$$

$$\frac{\partial Loss}{\partial W} = \frac{\partial ((Y - XW)^T (Y - XW))}{\partial W}$$

$$= 2X^T(XW - Y)$$

$$= 2X^T XW - 2X^T Y = 0$$

→  $X^T XW = X^T Y$

→  $W = (X^T X)^{-1} X^T Y$  (  $X^T X$  为满秩矩阵)



## 9.4 多元线性回归

### 线性方程组

$$w_0 + w_1 x_1^1 + \dots + w_j x_1^j + \dots + w_m x_1^m = \hat{y}_1$$

$$w_0 + w_1 x_2^1 + \dots + w_j x_2^j + \dots + w_m x_2^m = \hat{y}_2$$

...

$$w_0 + w_1 x_i^1 + \dots + w_j x_i^j + \dots + w_m x_i^m = \hat{y}_i$$

...

$$w_0 + w_1 x_n^1 + \dots + w_j x_n^j + \dots + w_m x_n^m = \hat{y}_n$$

$m$  个属性

$n$  个样本

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \dots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式： $XW = \hat{Y}$

损失函数：

$$Loss = (Y - \hat{Y})^2 = (Y - XW)^2$$

$$\frac{\partial Loss}{\partial W} = 2X^T(XW - Y) = 0$$

$$\rightarrow W = (X^T X)^{-1} X^T Y$$



哈尔滨科技大学

计算机科学与技术学院

## 9.4 多元线性回归

n维向量：向量中的元素个数为n

$(1,2,3)^T$ : 3维向量

$(1,2,3,4,5)^T$ : 5维向量

$(1,2,\dots,n)^T$ : n维向量

$X = (x^0, x^1, \dots, x^m)^T$  : m+1维向量

$m \times n$ 矩阵：由  $m \times n$  个数排成的m行n列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2^1 & \cdots & x_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}$$

$n \times (m+1)$

多维数组 (TensorFlow/NumPy...)

rank=1	
--------	--

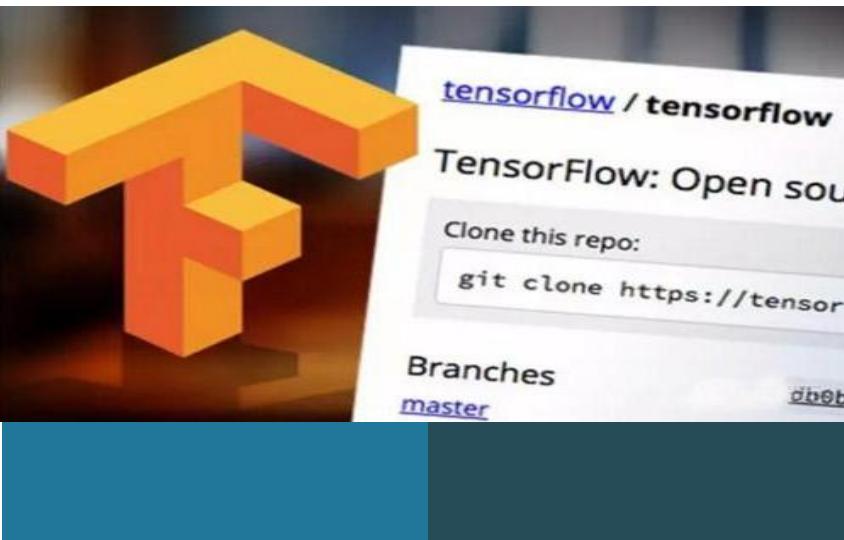
rank=2	
--------	--

rank=3	
--------	--



兰州交通大学

计算机科学与技术学院



## 9.5 实例：解析法实现多元线性回归

# 9.5 实例：解析法多元线性回归

## 商品房销售记录

序号	面积 (平方米)	房间数	销售价格 (万元)	序号	面积 (平方米)	房间数	销售价格 (万元)
1	137.97	3	145.00	9	106.69	2	62.00
2	104.50	2	110.00	10	138.05	3	133.00
3	100.00	2	93.00	11	53.75	1	51.00
4	124.32	3	116.00	12	46.91	1	45.00
5	79.20	1	65.32	13	68.00	1	78.50
6	99.00	2	104.00	14	63.02	1	69.65
7	124.00	3	118.00	15	81.26	2	75.69
8	114.00	2	91.00	16	86.21	2	95.30

$x_1$

$x_2$

$y$

$x_1$

$x_2$

$y$

- 加载样本数据
- 数据处理
- 学习模型：计算  $W$   
$$W = (X^T X)^{-1} X^T Y$$
- 预测房价



西安科技大学

计算机科学与技术学院

# 9.5 实例：解析法多元线性回归

## ■ 加载样本数据

```
In [1]: import numpy as np
```

```
In [2]: x1=np.array([137.97, 104.50, 100.00, 124.32, 79.20, 99.00, 124.00, 114.00,  
                  106.69, 138.05, 53.75, 46.91, 68.00, 63.02, 81.26, 86.21])  
x2=np.array([3, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 2])  
y=np.array([145.00, 110.00, 93.00, 116.00, 65.32, 104.00, 118.00, 91.00,  
            62.00, 133.00, 51.00, 45.00, 78.50, 69.65, 75.69, 95.30])
```

```
In [3]: x1.shape, x2.shape, y.shape
```

```
Out[3]: ((16,), (16,), (16,))
```



# 9.5 实例：解析法多元线性回归

## ■ 数据处理

$$Y = X W$$

$n \times (m+1)$   $(m+1) \times 1$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix}$$

16×3

n=16, m=2

```
In [4]: x0=np.ones(len(x1))
```

```
In [5]: X=np.stack((x0,x1,x2), axis = 1)  
X
```

(16, )  
(16, 3)

```
Out[5]: array([[ 1. , 137.97, 3. ],  
 [ 1. , 104.5 , 2. ],  
 [ 1. , 100. , 2. ],  
 [ 1. , 124.32, 3. ],  
 [ 1. , 79.2 , 1. ],  
 [ 1. , 99. , 2. ],  
 [ 1. , 124. , 3. ],  
 [ 1. , 114. , 2. ],  
 [ 1. , 106.69, 2. ],  
 [ 1. , 138.05, 3. ],  
 [ 1. , 53.75, 1. ],  
 [ 1. , 46.91, 1. ],  
 [ 1. , 68. , 1. ],  
 [ 1. , 63.02, 1. ],  
 [ 1. , 81.26, 2. ],  
 [ 1. , 86.21, 2. ]])
```



# 9.5 实例：解析法多元线性回归

## ■ 数据处理

$$Y = X W$$

$n \times (m+1)$     $(m+1) \times 1$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix}$$

**16×1**

```
In [6]: Y= np.array(y).reshape(-1, 1)  
Y
```

```
Out[6]: array([[145.  ],  
                [110.  ],  
                [ 93.  ],  
                [116.  ],  
                [ 65.32],  
                [104.  ],  
                [118.  ],  
                [ 91.  ],  
                [ 62.  ],  
                [133.  ],  
                [ 51.  ],  
                [ 45.  ],  
                [ 78.5 ],  
                [ 69.65],  
                [ 75.69],  
                [ 95.3 ]])
```



西安科技大学

计算机科学与技术学院

# 9.5 实例：解析法多元线性回归

## ■ 求解模型参数

$$W = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

### 功能函数

矩阵相乘 np.matmul( )

矩阵转置 np.transpose( )

矩阵求逆 np.linalg.inv( )

```
In [7]: Xt=np.transpose(X) #计算X'  
XtX_1 = np.linalg.inv(np.matmul(Xt,X)) #计算(X'X)-1  
XtX_1_Xt= np.matmul(XtX_1,Xt) #计算(X'X)-1X'  
W= np.matmul(XtX_1_Xt,Y) #W=((X'X)-1)X'Y
```

```
In [8]: W
```

```
Out[8]: array([[11.96729093],  
[ 0.53488599],  
[14.33150378]])
```

```
In [9]: W=W.reshape(-1)  
W
```

```
Out[9]: array([11.96729093, 0.53488599, 14.33150378])
```

```
In [10]: print("多元线性回归方程: ")  
print("Y=",W[1],"*x1+",W[2],"*x2+",W[0])
```

多元线性回归方程:

Y= 0.5348859949724747 \*x1+ 14.331503777673149 \*x2+ 11.967290930535732



兰州交通大学

计算机科学与技术学院

# 9.5 实例：解析法多元线性回归

## ■ 预测房价

```
In [11]: print("请输入房屋面积和房间数，预测房屋销售价格：")  
x1_test=float(input("商品房面积："))  
x2_test=int(input("房间数："))  
  
y_pred = W[1]*x1_test+W[2]*x2_test+W[0]  
print ("预测价格：" ,round(y_pred, 2), "万元")
```

请输入房屋面积和房间数，预测房屋销售价格：  
商品房面积:140  
房间数: 3  
预测价格: 129.85 万元

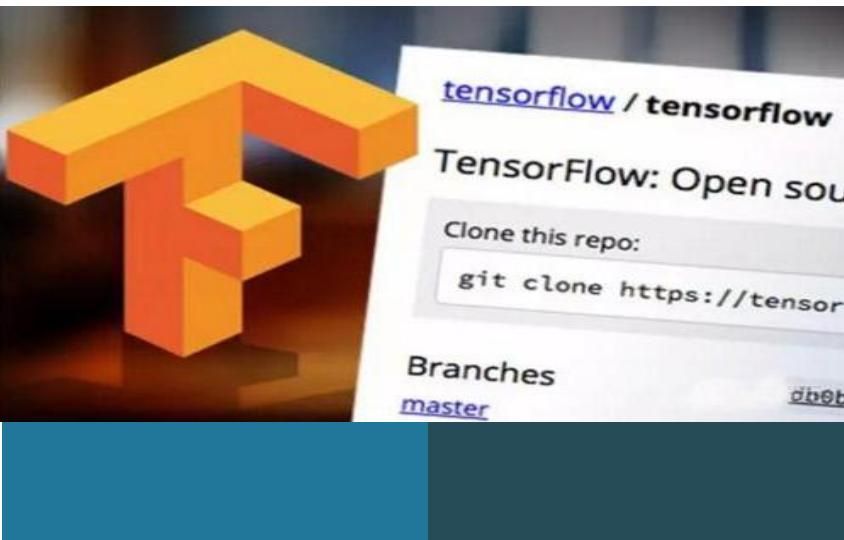
请输入房屋面积和房间数，预测房屋销售价格：  
商品房面积:140  
房间数: 4  
预测价格: 144.18 万元



## ■ NumPy数组运算函数

功 能	函 数
数组堆叠	<code>np.stack( )</code>
改变数组形状	<code>np.reshape( )</code>
矩阵相乘	<code>np.matmul( )</code>
矩阵转置	<code>np.transpose( )</code>
矩阵求逆	<code>np.linalg.inv( )</code>





## 9.6.1 三维数据可视化

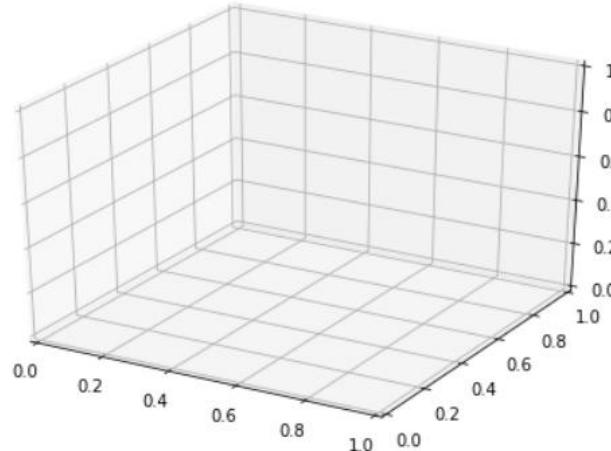
## 9.6.1 三维数据可视化

### mplot3d工具集

- 绘制三维图形
- 内置于Matplotlib
- Figure对象
- Axes3d对象

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt  
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

```
In [2]: fig=plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
plt.show()
```

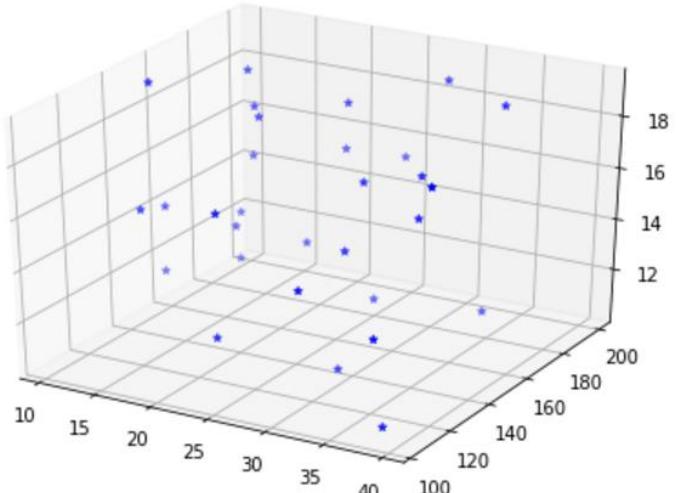


兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.1 三维数据可视化

### 绘制散点图——随机点



In [3]:

```
import numpy as np
```

In [4]:

```
x=np.random.uniform(10, 40, 30)  
y=np.random.uniform(100, 200, 30)  
z=np.random.uniform(10, 20, 30)
```

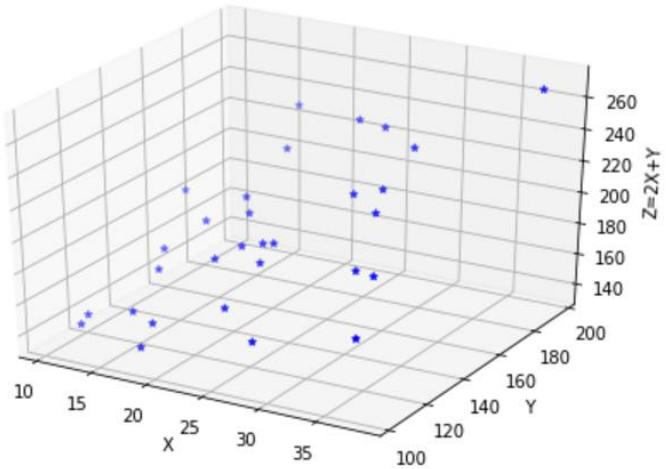
In [5]:

```
fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
ax3d.scatter(x, y, z, c='b', marker='*')  
plt.show()
```



## 9.6.1 三维数据可视化

### 绘制散点图—— $z=2x+y$



In [6]:

```
x=np.random.uniform(10, 40, 30)  
y=np.random.uniform(100, 200, 30)  
z=2*x+y
```

In [7]:

```
fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
  
ax3d.scatter(x, y, z, c='b', marker='*')  
  
ax3d.set_xlabel('X')  
ax3d.set_ylabel('Y')  
ax3d.set_zlabel('Z=2X+Y')  
  
plt.show()
```

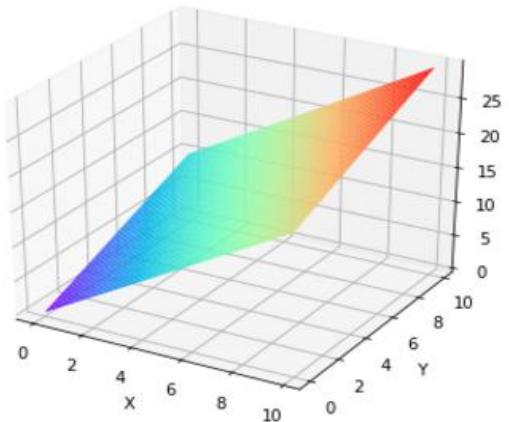


兰州交通大学

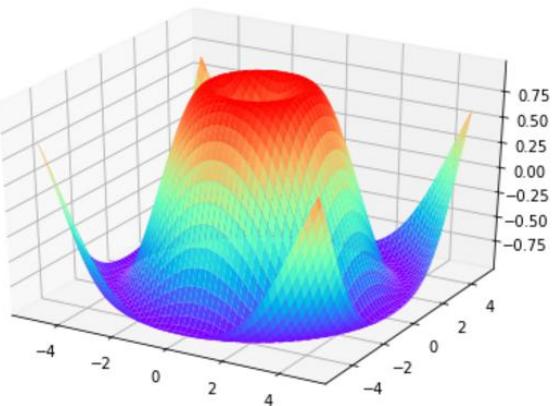
计算机科学与技术学院

## 9.6.1 三维数据可视化

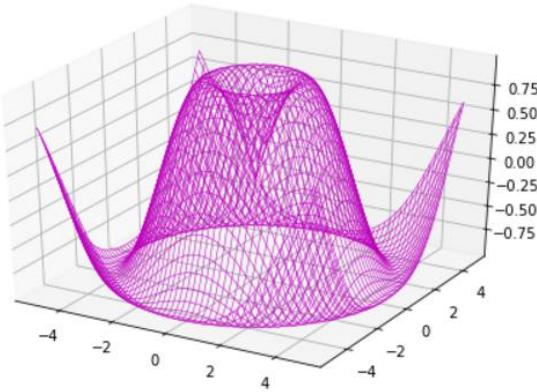
平面图



曲面图

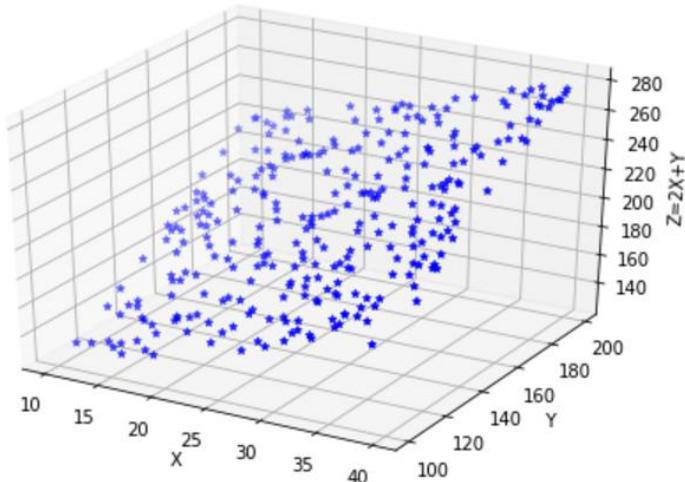


线框图



## 9.6.1 三维数据可视化

### 绘制散点图—— $z=2x+y$



In [8]:

```
x=np.random.uniform(10, 40, 300)  
y=np.random.uniform(100, 200, 300)  
z=2*x+y
```

In [9]:

```
fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
  
ax3d.scatter(x, y, z, c='b', marker='*')  
  
ax3d.set_xlabel('X')  
ax3d.set_ylabel('Y')  
ax3d.set_zlabel('Z=2X+Y')  
  
plt.show()
```

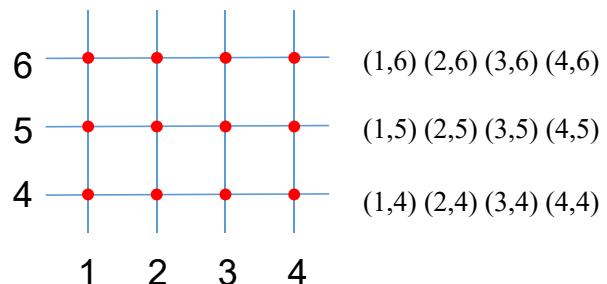


西安科技大学

计算机科学与技术学院

## 网格点坐标矩阵

$$\begin{aligned} X &= (1, 2, 3, 4) \\ Y &= (4, 5, 6) \end{aligned}$$



`np.meshgrid()`: 生成网格点坐标矩阵

```
In [10]: x=[1, 2, 3, 4]
y=[4, 5, 6]
X, Y=np.meshgrid(x, y)
```

```
In [11]: X
Out[11]: array([[1, 2, 3, 4],
[1, 2, 3, 4],
[1, 2, 3, 4]])
```

```
In [12]: Y
Out[12]: array([[4, 4, 4, 4],
[5, 5, 5, 5],
[6, 6, 6, 6]])
```



## 9.6.1 三维数据可视化

### 绘制平面图—— $z=2x+y$

```
In [13]: x=np.arange(1, 5)  
y=np.arange(1, 5)  
X, Y=np.meshgrid(x, y)
```

```
In [14]: X.shape, Y.shape
```

```
Out[14]: ((4, 4), (4, 4))
```

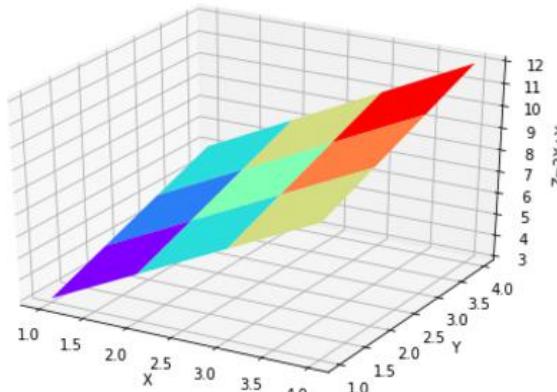
```
In [15]: Z=2*X+Y
```

```
In [16]: Z.shape
```

```
Out[16]: (4, 4)
```

### plot\_surface(): 绘制平面/曲面图

```
In [17]: fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
  
ax3d.plot_surface(X, Y, Z, cmap="rainbow")  
  
ax3d.set_xlabel('X')  
ax3d.set_ylabel('Y')  
ax3d.set_zlabel('Z=2X+Y')  
plt.show()
```

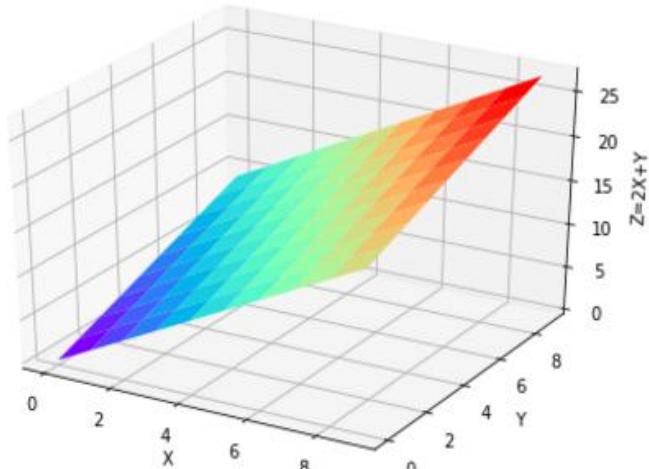


兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.1 三维数据可视化

绘制平面图—— $z=2x+y$



In [18]:

```
x=np.arange(0, 10)  
y=np.arange(0, 10)  
X, Y=np.meshgrid(x, y)  
Z=2*X+Y
```

In [19]:

```
fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
  
ax3d.plot_surface(X, Y, Z, cmap="rainbow")  
  
ax3d.set_xlabel('X')  
ax3d.set_ylabel('Y')  
ax3d.set_zlabel('Z=2X+Y')  
plt.show()
```

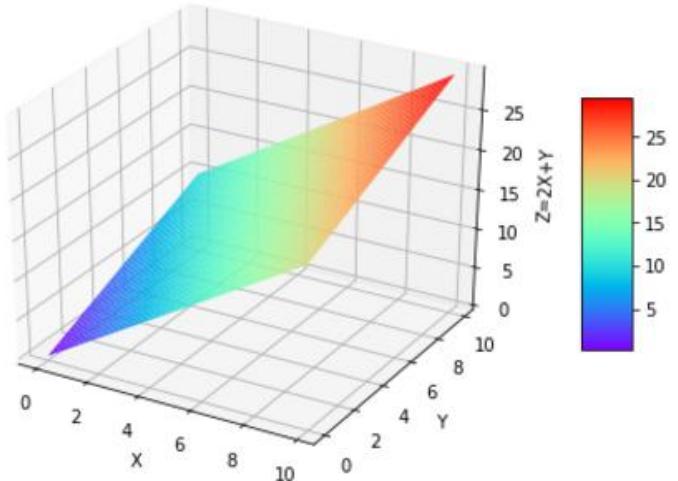


兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.1 三维数据可视化

### 绘制平面图—— $z=2x+y$



```
In [20]: x=np.arange(0, 10, 0.1)  
y=np.arange(0, 10, 0.1)  
X, Y=np.meshgrid(x, y)  
Z=2*X+Y
```

```
In [21]: Z.shape
```

```
Out[21]: (100, 100)
```

```
In [22]: fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
  
surf=ax3d.plot_surface(X, Y, Z, cmap="rainbow")  
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)  
  
ax3d.set_xlabel('X')  
ax3d.set_ylabel('Y')  
ax3d.set_zlabel('Z=2X+Y')  
plt.show()
```

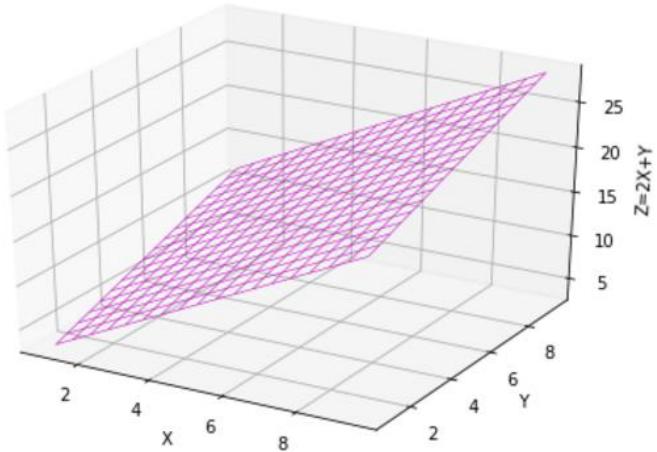


兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.1 三维数据可视化

绘制线框图—— $z=2x+y$



`plot_wireframe()`: 绘制线框图

In [23]:

```
x=np.arange(1, 10, 0.5)
y=np.arange(1, 10, 0.5)
X, Y=np.meshgrid(x, y)
Z=2*X+Y
```

In [24]:

```
fig = plt.figure()
ax3d = Axes3D(fig)

ax3d.plot_wireframe(X, Y, Z, color="m", linewidth=0.5)

ax3d.set_xlabel('X')
ax3d.set_ylabel('Y')
ax3d.set_zlabel('Z=2X+Y')
plt.show()
```

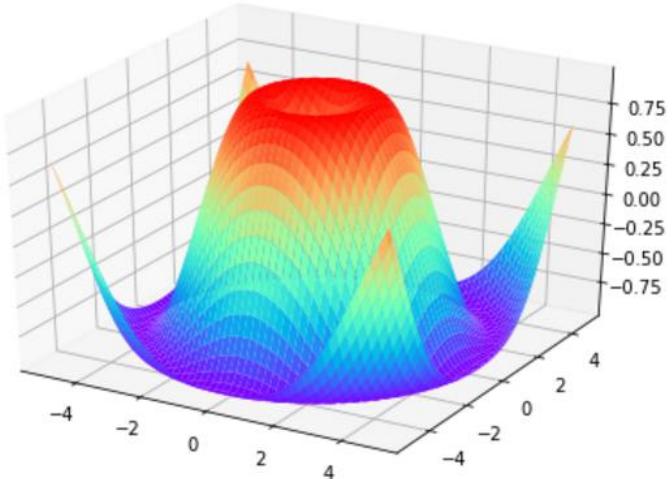


兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.1 三维数据可视化

绘制曲面图—— $z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$



In [25]:

```
x=np.arange(-5, 5, 0.1)
y=np.arange(-5, 5, 0.1)
X, Y=np.meshgrid(x, y)
Z=np.sin(np.sqrt(X**2+Y**2))
```

In [26]:

```
fig = plt.figure()
ax3d = Axes3D(fig)

ax3d.plot_surface(X, Y, Z, cmap="rainbow")

plt.show()
```

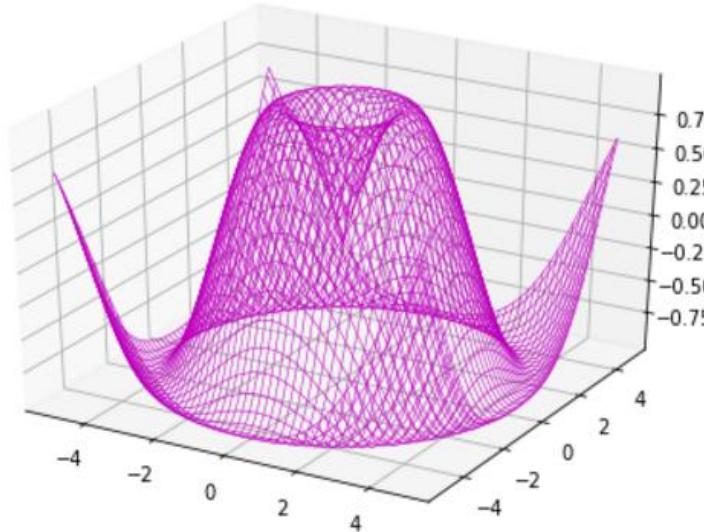


兰州交通大学

计算机科学与技术学院

### 绘制曲面的线框图

```
In [27]: fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
  
ax3d.plot_wireframe(X, Y, Z, color="m", linewidth=0.5)  
  
plt.show()
```

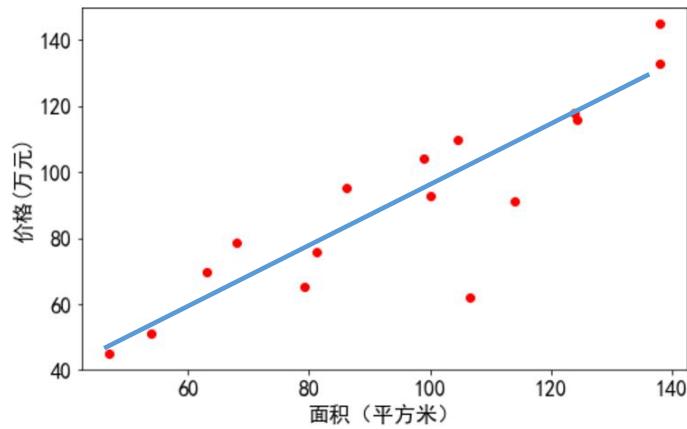




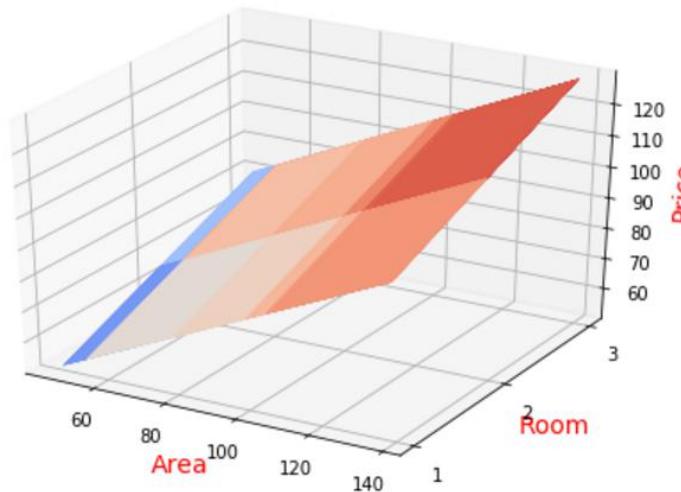
## 9.6.2 实例：线性回归模型可视化

## 9.6.2 线性回归模型可视化

一元线性回归



二元线性回归



## 9.6.2 线性回归模型可视化

### ■ 加载数据

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
```

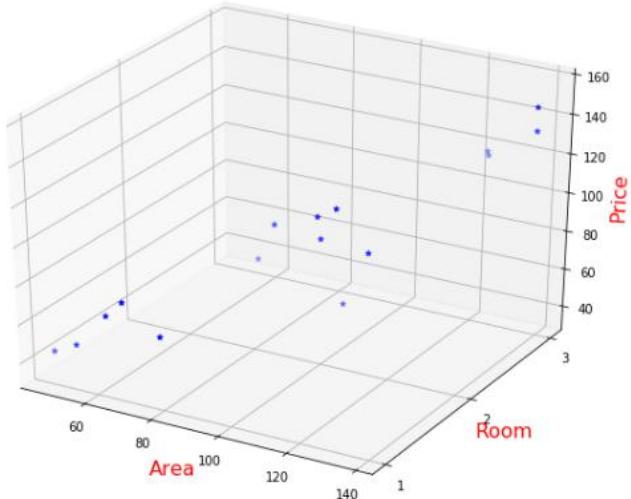
```
In [2]: x1=np.array([137.97, 104.50, 100.00, 124.32, 79.20, 99.00, 124.00, 114.00,
                 106.69, 138.05, 53.75, 46.91, 68.00, 63.02, 81.26, 86.21])
x2=np.array([3, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 2])
y=np.array([145.00, 110.00, 93.00, 116.00, 65.32, 104.00, 118.00, 91.00,
            62.00, 133.00, 51.00, 45.00, 78.50, 69.65, 75.69, 95.30])
```

```
In [3]: W=np.array([11.96729093, 0.53488599, 14.33150378])
y_pred=W[1]*x1+W[2]*x2+W[0]
```



## 9.6.2 线性回归模型可视化

### ■ 绘制散点图



In [4]:

```
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax3d = Axes3D(fig)

ax3d.scatter(x1, x2, y, color="b", marker="*")

ax3d.set_xlabel('Area', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_ylabel('Room', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_zlabel('Price', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_yticks([1, 2, 3])
ax3d.set_zlim3d(30, 160)

plt.show()
```



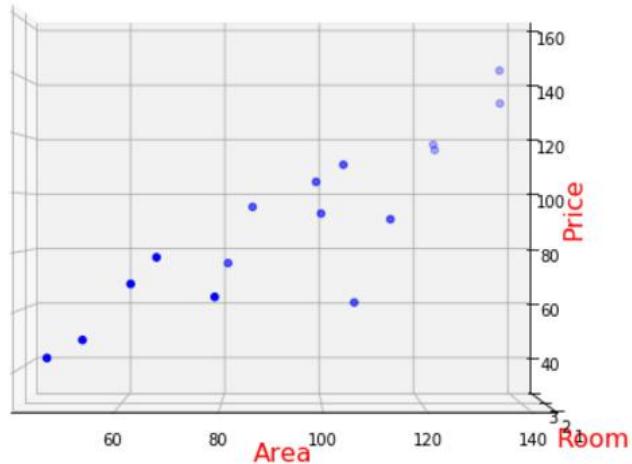
兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.2 线性回归模型可视化

### 改变视角

view\_init(elev,azim)



In [5]:

```
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax3d = Axes3D(fig)
ax3d.view_init(elev=0, azim=-90)

ax3d.scatter(x1, x2, y, color='b')

ax3d.set_xlabel('Area', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_ylabel('Room', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_zlabel('Price', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_yticks([1, 2, 3])
ax3d.set_zlim3d(30, 160)

plt.show()
```



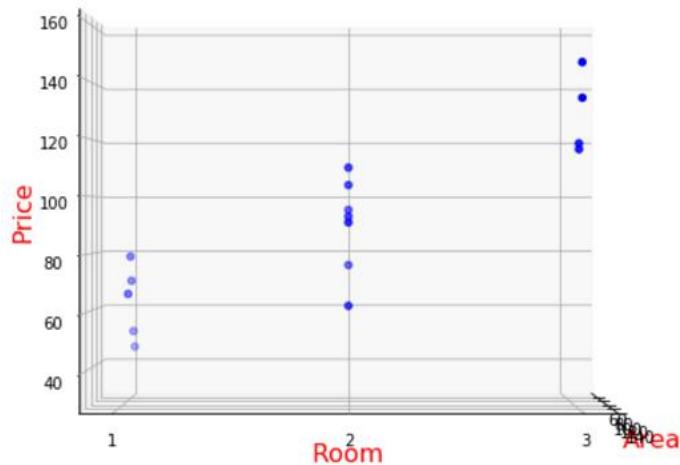
兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.2 线性回归模型可视化

### 改变视角

view\_init(elev,azim)



In [6]:

```
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax3d = Axes3D(fig)
ax3d.view_init(elev=0, azim=0)

ax3d.scatter(x1, x2, y, color='b')

ax3d.set_xlabel('Area', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_ylabel('Room', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_zlabel('Price', color='r', fontsize=16)
ax3d.set_yticks([1, 2, 3])
ax3d.set_zlim3d(30, 160)

plt.show()
```

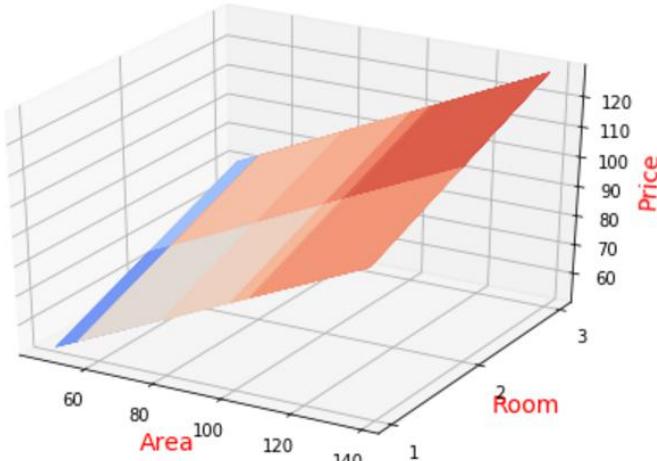


兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.2 线性回归模型可视化

### 绘制平面图



In [7]:

```
X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)  
Y_PRED = W[0] + W[1]*X1 + W[2]*X2
```

In [8]:

```
fig = plt.figure()  
ax3d = Axes3D(fig)  
  
ax3d.plot_surface(X1, X2, Y_PRED, cmap="coolwarm")  
  
ax3d.set_xlabel('Area', color='r', fontsize=14)  
ax3d.set_ylabel('Room', color='r', fontsize=14)  
ax3d.set_zlabel('Price', color='r', fontsize=14)  
ax3d.set_yticks([1, 2, 3])  
  
plt.show()
```



兰州交通大学

计算机科学与技术学院

## 9.6.2 线性回归模型可视化

### ■ 绘制散点图和线框图

```
In [9]: plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']

fig = plt.figure()
ax3d = Axes3D(fig)

ax3d.scatter(x1, x2, y, color='b', marker='*', label="销售记录")
ax3d.scatter(x1, x2, y_pred, color='r', label="预测房价")
ax3d.plot_wireframe(X1, X2, Y_PRED, color='c', linewidth=0.5, label="拟合平面")

ax3d.set_xlabel('Area', color='r', fontsize=14)
ax3d.set_ylabel('Room', color='r', fontsize=14)
ax3d.set_zlabel('Price', color='r', fontsize=14)
ax3d.set_yticks([1, 2, 3])

plt.suptitle("商品房销售回归模型", fontsize=20)
plt.legend(loc="upper left")
plt.show()
```



## 9.6.2 线性回归模型可视化

