

BÀI 1: BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

- Một vectơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d thì được gọi là vectơ chỉ phương của d .
- Từ hình vẽ ta thấy hai vectơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$; \vec{a} có giá trùng với đường thẳng d , \vec{b} có giá song song với đường thẳng d nên cả hai vectơ \vec{a}, \vec{b} đều được gọi là vectơ chỉ phương của d .

Lưu ý:

- Nếu \vec{a} là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k\vec{a}$ ($k \neq 0$) cũng là một vectơ chỉ phương của d .
- Nếu có cặp vectơ \vec{u}, \vec{v} không cùng phương và có giá vuông góc với đường thẳng d thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

Định nghĩa

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad \text{với } t \text{ là tham số thực.}$$

Trong phương trình tham số trên, mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.

Định nghĩa

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì có phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

II

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1. Nhắc lại tính chất cùng phương, đồng phẳng của vector

- Hai vector \vec{a}, \vec{b} là cùng phương khi và chỉ khi $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

2. Vị trí tương đối hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng d_1, d_2 với d_1 qua A , có vector chỉ phương \vec{u}_1 ; d_2 qua B , có vector chỉ phương \vec{u}_2 .

- Nếu hai vector \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương thì d_1, d_2 song song hoặc trùng nhau, ta có:

$$- d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{AB}] \neq \vec{0} \end{cases} \quad (\text{nghĩa là } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương mà } \vec{u}_1, \vec{AB} \text{ không cùng phương}).$$

$$- d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{AB}] = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{nghĩa là cả ba vector } \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB} \text{ cùng phương với nhau}).$$

- Nếu hai vector \vec{u}_1, \vec{u}_2 không cùng phương thì d_1, d_2 cắt nhau hoặc chéo nhau, ta có:

$$- d_1, d_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases} \quad (\text{nghĩa là } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương và } \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB} \text{ đồng phẳng}).$$

$$- d_1, d_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} \neq 0 \quad (\text{nghĩa là } \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB} \text{ không đồng phẳng}).$$

III

GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng d_1, d_2 có vector chỉ phương lần lượt là \vec{u}_1, \vec{u}_2 . Góc giữa d_1, d_2 được tính:

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}.$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng d vector chỉ phương \vec{u} và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến \vec{n} . Góc giữa d và (P) được tính:

$$\sin(d, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

Xét hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có vector pháp tuyến lần lượt là \vec{n}_1, \vec{n}_2 . Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ được tính:

$$\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

4. Điều kiện vuông góc

- Xét hai đường thẳng d_1, d_2 có vector chỉ phương lần lượt là \vec{u}_1, \vec{u}_2 . Ta có: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.
- Xét đường thẳng d có vector chỉ phương \vec{u} và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến \vec{n} . Ta có: $d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{n}$ là hai vector cùng phương $\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{n}, k \in \mathbb{R}$.

IV VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Xét đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad (*)$

- Nếu $(*)$ có nghiệm duy nhất $(x_1; y_1; z_1)$ thì d cắt (P) tại một điểm có tọa độ $(x_1; y_1; z_1)$.
- Nếu $(*)$ vô nghiệm thì d song song với (P) .
- Nếu $(*)$ có vô số nghiệm thì d chứa trong (P) .

V BÀI TẬP THỰC HÀNH

Dạng 1. TÌM VECTOR CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

❓ Câu 1 Tìm một vector chỉ phương và một điểm của đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) $d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \xrightarrow{HD} d_1$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-1; 3; 1)$;

b) $d_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} ;$

c) $d_3 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1} \xrightarrow{HD} d_3$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_3 = (3; -2; 1)$;

d) $d_4 : \frac{x-10}{30} = \frac{y+12}{27} = \frac{z-20}{25}.$

e) $d_5 : \begin{cases} x = 6 - t \\ y = 3 + t \\ z = -1 \end{cases} ;$

f) $d_6 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-5};$



❓ Câu 2 Tìm một vector chỉ phương của đường thẳng d biết rằng:

- a) d qua hai điểm $A(1; -1; 0), B(2; 3; -6) \xrightarrow{HD} d$ qua hai điểm A, B nên có một vector chỉ phương là $\vec{AB} = (1; 4; -6)$.
- b) d qua hai điểm $A(-1; 1; -2), B(2; 3; -6)$.
- c) d song song với trục $Ox \xrightarrow{HD} d$ song song với Ox nên có một vector chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
- d) d song song với trục Oz .
- e) d vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $3x - 2y + 3z - 2 = 0 \xrightarrow{HD} d$ vuông góc với (P) nên có một vector chỉ phương $\vec{u}_d = \vec{n}_P = (3; -2; 3)$.
- f) d vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $3x + y + 3z + 11 = 0$.

📌 Dạng 2. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

❓ Câu 1 Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d biết rằng:

- a) d qua điểm $A(1; 3; -4)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$.
- b) d qua hai điểm $A(-1; 0; -2), B(0; 2; 3)$.
- c) d trùng với trục Oy .
- d) d qua điểm $A(-1; 4; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -1)$.
- e) d qua hai điểm $A(-1; -1; 0), B(1; -3; 3)$.
- f) d trùng với trục Oz .
- g) d qua điểm $A(4; 0; -4)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; -1; 0)$.
- h) d qua hai điểm $A(1; -3; 0), B(2; 2; 3)$.
- i) d trùng với trục Ox .

❓ Câu 2 Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d biết rằng:

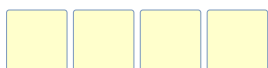
- a) d qua điểm $M(0; 3; -6)$ và song song với AB biết $A(-1; 0; -2), B(0; 2; 3)$.
- b) d qua điểm $A(-3; 3; -6)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$.
- c) d qua điểm $B(1; 0; -2)$ và vuông góc với mặt phẳng $y + z = 0$.
- d) d qua điểm $M(-3; 0; -1)$ và song song với AB biết $A(1; 2; -2), B(0; 2; 3)$.
- e) d qua điểm $A(-1; -2; 2)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-4}$.
- f) d qua điểm $B(-1; 6; -6)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y + 1 = 0$.
- g) d qua $M(-1; 3; 0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là $d_1 : \frac{x-5}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}, d_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.
- h) d qua điểm $A(-1; -4; 7)$, vuông góc với $\Delta : \frac{x}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z}{2}$ và song song với mặt phẳng $(Q) : x - 2y - z - 1 = 0$.
- i) d qua trọng tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết $A(3; 3; 2), B(-1; 1; -2), C(4; -1; 2)$.

❓ Câu 3 Viết phương trình tham số của đường thẳng d biết rằng:

- a) d qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3}, d_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-2}$.
- b) d qua điểm $A(-1; -1; 1)$, vuông góc với $\Delta : \frac{x}{-3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{2}$ và song song với mặt phẳng $(Q) : x - y + 8 = 0$.
- c) d qua trọng tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết $A(0; -1; 2), B(3; 1; 2), C(0; 3; 5)$.

❓ Câu 4 Viết phương trình tham số của đường thẳng d biết rằng:

- a) d qua $A(-1; -1; 1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình $x - y - z = 0, 2y + z + 3 = 0$.
- b) d là giao tuyến hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình $3x + y - z = 0, x - z - 1 = 0$.
- c) d qua $A(-2; -1; 0)$ và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình $x - y = 0, x - y + z - 1 = 0$.
- d) d là giao tuyến hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình $x + y - z + 2 = 0, x - y = 0$.



Dạng 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

❓ Câu 1 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1, d_2 trong các trường hợp sau:

a) $d_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, d_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + 3t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases};$

b) $d_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = -6t \end{cases}, d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3};$

c) $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}, d_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}.$

d) $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 2 + 5t' \\ z = 3 + t' \end{cases};$

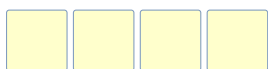
e) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $d' : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-9}{6};$

f) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases};$

g) $d : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ và $d' : \frac{x-4}{9} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-2}{3};$

h) $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}$ và $d' : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4};$

i) $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}.$



❓ Câu 2 Kiểm tra tính vuông góc của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{1}$ và $d': \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 7 + t \\ z = 9 - 8t \end{cases}$;

b) $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{1}$ và $d': \frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-9}{1}$.

❓ Câu 3 Kiểm tra tính vuông góc của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ và $d': \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -6 + 2t \end{cases}$;

b) $d: \frac{x+2}{7} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{1}$ và $d': \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-5}{2}$.

🔗 Dạng 4. TÌM CÁC LOẠI GÓC. ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC

❓ Câu 1 Tính góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 biết rằng:

a) $d_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 + \sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t' \\ y = 4 + t' \\ z = 5 \end{cases}$;

b) $d_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$, $d_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$.

❓ Câu 2 Tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a) $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và Ox ;

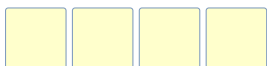
b) $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$, $d': \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

❓ Câu 3 Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) biết rằng:

- a) $(P) : x + y + 1 = 0, (Q) : x + z - 2 = 0;$
b) $(P) : 2x + 4y - z = 0, (Q) : 3x + 5y + 26z - 11 = 0.$

❓ Câu 4 Tính góc giữa hai mặt phẳng sau:

- a) $(\alpha) : 3x + 4y + 5z - 1 = 0, (\beta) : 2x + y + z - 3 = 0;$
b) $(\alpha) : x - y + 2z - 1 = 0, (\beta) : x + 2y - z + 3 = 0;$
c) $(P) : x + y - 2z + 9 = 0$ và $(P') : 3x - 5y + z + 2024 = 0;$
d) $(P) : x + y + 24 = 0$ và $(P') : y + z + 24 = 0;$
e) $(P) : 2x + 4y - z + 23 = 0$ và $(P') : 3x + 5y + 26z + 2025 = 0.$

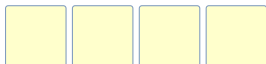


❓ Câu 5 Tính góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) biết rằng: a) $\Delta :$

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}, (P) : \sqrt{3}x + z - 2 = 0; \text{ b) } \Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}, (P) : x + y + z - 4 = 0.$$

❓ Câu 6 Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

- a) $d : \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{1}$ và $(P) : x + z + 24 = 0;$
b) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $(P) : 2x + 4y - 2z + 23 = 0;$
c) $\Delta : \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $(P) : \sqrt{3}x + z - 2 = 0;$
d) $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $(P) : x + y + z - 4 = 0.$



❓ Câu 7 Tìm tham số m để hai đường thẳng sau vuông góc nhau:

a) $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+1}{2}, d_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + mt \end{cases};$

b) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + (m-1)t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, d_2 : \frac{x-3}{m+1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1};$

c) $d_1 : \frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}; d_2 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 - mt \end{cases};$

d) $d_1 : \begin{cases} x = 3 + mt \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}; d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-1}{5}.$

❓ Câu 8 Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) :

a) $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-3}{2}, (P) : mx + 2y + 2mz + 5 = 0.$

b) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + (m-1)t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, (P) : (2m-1)x + y - 2z - 4 = 0;$

c) $d : \frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{-1}, (P) : x - (m+1)y + 2z + 3 = 0;$

d) $d : \begin{cases} x = -1 + (m-2)t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, (P) : (m+2)x - 2y + z + 1 = 0.$

🔧 Dạng 5. XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

❓ Câu 1 Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (P) biết rằng:

- a) $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, (P) : x + 2y + z + 7 = 0;$
- b) $d : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-3}, (P) : 3x - y + z - 12 = 0;$
- c) $d : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-3}, (P) : 3x - y + z + 5 = 0.$

❓ Câu 2 Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (P) biết rằng:

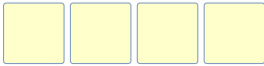
- a) $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3}; (P) : 3x - y + 2z - 5 = 0;$
- b) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}; (P) : 3x + 2y - z + 2 = 0;$
- c) $d : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}; (P) : x + 2y - z - 7 = 0;$
- d) $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}; (P) : 2x - y + z = 0;$
- e) $d : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}; (P) : 3x + y - z - 8 = 0;$
- f) $d : \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}; (P) : x + 3y + 2z - 1 = 0.$



❓ Câu 3 Tìm tham số m để:

- a) Đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ cắt mặt phẳng $(P) : 2x - y + mz + 3 = 0.$
- b) Đường thẳng $d : \frac{x-m}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ cắt mặt phẳng $(P) : x + my + z - 2 = 0.$
- c) Đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = \frac{z}{-1}$ song song với mặt phẳng $(P) : x - y + 3z + m = 0.$

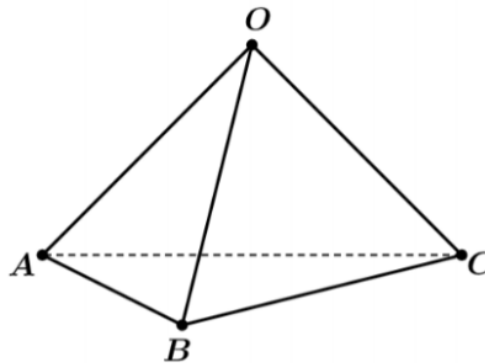
- d) Đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ chứa trong mặt phẳng $(P) : x + 3y + z + m - 5 = 0$.



Dạng 6. TỌA ĐỘ HÓA CÁC HÌNH KHÔNG GIAN

❓ Câu 1 Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ và $C(0; 0; 7)$.

- a) Tìm tọa độ một vector chỉ phương của mỗi đường thẳng AB , AC .
b) Vector $\vec{v} = (-1; 2; 0)$ có là vector chỉ phương của đường thẳng AB không?



❓ Câu 2 Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $OBC \cdot O'B'C'$ với $O(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $O'(0; 0; 4)$.

- a) Tính góc α giữa hai đường thẳng BO' và $B'C'$.
b) Tính góc β giữa đường thẳng $B'C'$ và mặt phẳng $(O'BC)$.

[Không tìm thấy ảnh]

Dạng 7. BÀI TOÁN THỰC TIỄN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

❓ Câu 1 Trong hệ trục $Oxyz$ với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0; 10; 0)$ với vận tốc $\vec{v} = (150; 150; 40)$. Giả sử trong một khoảng thời gian ban đầu thì đường bay là đường thẳng Δ .

- a) Viết phương trình tham số đường thẳng Δ .
- b) Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

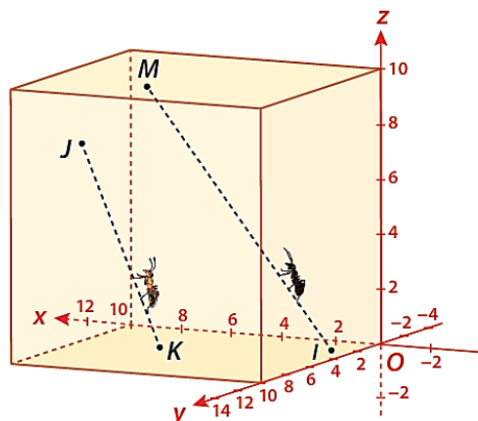


❓ Câu 2 Một nhóm bạn đi cắm trại đã dựng một chiếc lều có dạng hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 4 m, chiều cao bằng 3 m. Với hệ trục tọa độ như hình vẽ, hãy tính các góc giữa hai cạnh bên kề nhau của chiếc lều, giữa cạnh bên và cạnh đáy chiếc lều, giữa cạnh bên và mặt đáy chiếc lều (kết quả tìm góc được viết gần đúng đến hàng phút).

[Không tìm thấy ảnh]

Câu 3 Trong không gian $Oxyz$ cho trước (1 đơn vị = 1 cm), có một chú kiến vàng và một chú kiến đen bò trên hai sợi dây thẳng khác nhau. Giả sử tại thời điểm t (tính bằng phút), kiến vàng ở vị trí $M(6+t; 8-t; 3+t)$ trên d_1 . Cùng thời điểm đó, kiến đen ở vị trí $N(1+t; 2+t; 2t)$ trên d_2 .

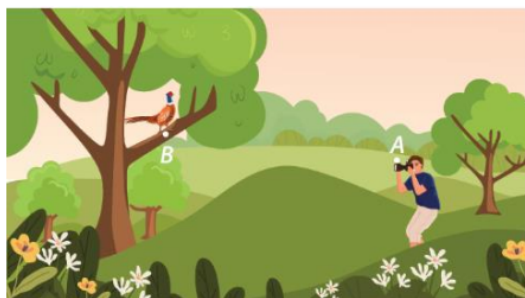
- Chứng minh rằng hai chú kiến bò trên hai đường thẳng chéo nhau.
- Tính khoảng cách giữa hai chú kiến tại các thời điểm $t = 0$ và $t = 10$.
- Hỏi tại thời điểm nào thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất? Tính khoảng cách đó.



[Image of two skew lines in 3D space with two points representing objects moving over time]

Câu 4 Anh Bình là một nhiếp ảnh gia chuyên săn ảnh chim hoang dã. Giả sử với hệ trục $Oxyz$ cho trước, anh Bình đang ngắm qua ống kính ở vị trí $A(200; 685; 436)$ thì có một con gà lôi tía xuất hiện ở vị trí $B(640; 550; 474)$.

- Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa đoạn thẳng nối hai vị trí ống kính ngắm của anh Bình và con gà lôi tía.
- Nếu một quả đồi có tọa độ đỉnh $C(420; 617, 5; 450)$. Hỏi C có thuộc đường ngắm AB không? Anh Bình có ngắm thấy con gà lôi tía này không?



❓ Câu 5 Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm bằng cách đu đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 sang vị trí B cao 10 m của tháp 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị: mét), tọa độ $A(3; 2; 5; 15)$ và $B(21; 27; 5; 10)$.

- Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.
- Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

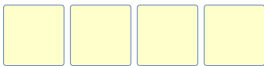


❓ Câu 6 Giả sử một máy bay thương mại M đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ D đến E có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CB . Tại D , máy bay bay cách mặt đất là 9000 m và tại E là 12000 m. Một radar được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C là 20000 m, cách B là 16000 m và $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị: 1000 m) với O là vị trí đặt radar, B thuộc tia Oy , C thuộc tia Ox , khi đó ta có tọa độ các điểm như vẽ. Giả sử radar có bán kính dò tìm tối đa là 16000 m. Hỏi radar này có thể dò tìm được tín hiệu của máy bay M khi bay trên bầu trời từ D đến E hay không? Vì sao?

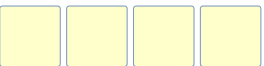
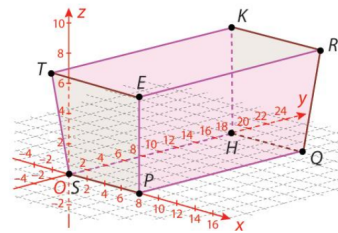
[Không tìm thấy ảnh]

❓ Câu 7 Hình ảnh bên dưới là hình ảnh Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng Oxy là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz , trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m. Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ.

- Tính độ dài MN , biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m.
- Người ta có thể dùng đoạn dây dài 100 m để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?



beginex Một khuôn nướng bánh mì được mô phỏng trong không gian $Oxyz$ như vẽ sau với $S(0; 0; 0), P(8; 0; 0), Q(8; 18; 0), T(-1; -1; 7), R(9; 19; 7)$. Tính góc giữa hai cạnh kề nhau, giữa cạnh bên và mặt đáy, giữa mặt bên và mặt đáy của khuôn.

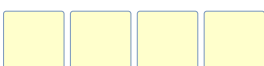


ata/im/PTDTL-Q42.png!

❓ Câu 9 Trên phần mềm thiết kế chiếc cầu treo, cho đường thẳng d trên trụ cầu và đường

thẳng d' trên sàn cầu có phương trình lần lượt là $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 50 + t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 20 \\ y = t' \\ z = 50 \end{cases}$. Xét vị trí

tương đối giữa d và d' .



.....

❓ Câu 10 Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$.

Cho biết trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' có phương trình lần lượt là: $d : \begin{cases} x = t \\ y = 20 \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$

và $d' : \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 9 \end{cases}$. Xét vị trí tương đối giữa d và d' , chúng có vuông góc với nhau không?



.....

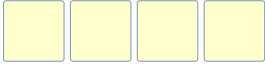
❓ Câu 11 Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính góc giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ và $d' : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{9}$.



.....

❓ Câu 12 Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa tia sáng có phương trình $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt sàn sân khấu có phương trình $z = 0$.

[Không tìm thấy ảnh]

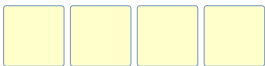
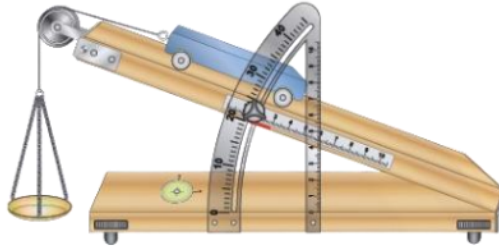


.....

.....

.....

❓ Câu 13 Để làm thí nghiệm về chuyển động trong mặt phẳng nghiêng, người làm thí nghiệm đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng nghiêng $(P) : 4x + 11z + 5 = 0$ và mặt sàn $(Q) : z - 1 = 0$.



.....

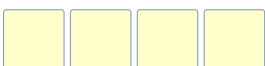
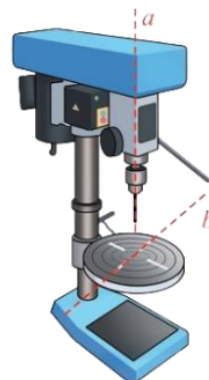
.....

.....

❓ Câu 14 Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan lần lượt là a :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{và } b : \begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 6 \end{cases}.$$

- a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.
- b) Tìm giao điểm của a và b .



.....

.....

.....

- ❓ Câu 15** Trên một cánh đồng điện mặt trời, người ta đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Hai tấm pin năng lượng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng $(P) : 2x + 2z + 1 = 0$ và $(P') : x + z + 7 = 0$.
- a) Tính góc giữa (P) và (P') .
- b) Tính góc hợp bởi (P) và (P') với mặt đất (Q) có phương trình $z = 0$.



.....

.....

.....

