

Masterarbeit

Fakultät für Mathematik und Informatik

Lehrgebiet für Stochastik und Mathematische Physik

Ein mehrdimensionales Analogon zum starken Szegö Theorem

Marc Schulmeister

Masterstudiengang Mathematik

Matrikelnummer: 4453630

Fernuniversität in Hagen

Prüfer: Prof. Dr. Wolfgang Spitzer

Abgabetermin: 01.11.2022

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die Masterarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für enthaltene Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthalten Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Wolfsburg, den 24. Januar 2023

.....

Marc Schulmeister

Inhaltsverzeichnis

1	Starker Grenzwertsatz von Szegő	1
1.1	Mehrdimensionales Analogon vom starken Grenzwertsatz von Szegő	6
2	Beweis vom starken Grenzwertsatz von Szegő	10
3	Beweis vom mehrdimensionalen Analogon des starken Grenzwertsatz von Szegő	22

Kapitel 1

Starker Grenzwertsatz von Szegő

Aufbauend auf dem von Mark Kac erbrachten kombinatorischen Beweis des starken Grenzwertsatz von Szegő [1] gelang es I. Yu. Linnik ein mehrdimensionales Analogon von ebenjenem Grenzwertsatz herzuleiten [2]. In der vorliegenden Masterarbeit werden die beiden Grenzwertsätze für den Fall, dass die Erzeugerfunktion positiv und sowohl in der Wiener als auch in der Krein Algebra enthalten ist, bewiesen.

Im Folgenden steht L für eine strikt positive Konstante, welche die Breite des symmetrischen Intervalls $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ steuert. Auf diesem Intervall betrachten wir die strikt positive, sowie Lebesgue-integrierbare Funktion $F(\lambda)$. Unter diesen Voraussetzungen können für beliebiges $k \in \mathbb{R}$ die Fourier-Koeffizienten

$$\mathcal{F}_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-2\pi i k \lambda} F(\lambda) d\lambda \quad (1.1)$$

von der Funktion $F(\lambda)$ berechnet werden. Um mithilfe der Fourier-Koeffizienten \mathcal{F}_k das zentrale mathematische Objekt dieser Masterarbeit definieren zu können, benötigen wir die Indexmenge

$$L^{-1}\mathbb{N}_n = [0, n] \cap \underbrace{\{0, 1L^{-1}, 2L^{-1}, 3L^{-1}, \dots\}}_{L^{-1}\mathbb{N}}. \quad (1.2)$$

Man beachte, dass wenn im Folgenden die Notation $k \in L^{-1}\mathbb{N}_n$ verwendet wird, damit gemeint ist, dass die Elemente der Indexmenge $L^{-1}\mathbb{N}_n$ in der Reihenfolge

$$0, 1L^{-1}, 2L^{-1}, 3L^{-1}, \dots \quad (1.3)$$

durchlaufen werden. Schreibt man nun für festes $n \in \mathbb{N}$ die Fourier-Koeffizienten \mathcal{F}_k wie folgt in eine Matrix

$$T_n(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{k-l})_{k,l \in L^{-1}\mathbb{N}_n}, \quad (1.4)$$

so erhält man den Hauptakteur dieser Arbeit. Das Ziel des weiteren Vorgehens wird es sein, zu verstehen, von welcher Größenordnung die Determinante der Matrix $T_n(\mathcal{F})$ für großes $n \in \mathbb{N}$ ist. Um diesem Ziel näher zu kommen, setzen wir zunächst einmal den Wert der Konstanten L auf 1. Damit hat die

Matrix $T_n(\mathcal{F})$ die Gestalt

$$T_n(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{k-l})_{k,l \in \{0,1,\dots,n\}} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_0 & \mathcal{F}_{-1} & \mathcal{F}_{-2} & \mathcal{F}_{-3} & \dots & \mathcal{F}_{-n} \\ \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_0 & \mathcal{F}_{-1} & \mathcal{F}_{-2} & \dots & \mathcal{F}_{-n+1} \\ \mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_0 & \mathcal{F}_{-1} & \dots & \mathcal{F}_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_n & \mathcal{F}_{n-1} & \mathcal{F}_{n-2} & \mathcal{F}_{n-3} & \dots & \mathcal{F}_0 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Man sieht, dass die Matrix $T_n(\mathcal{F})$ Größe $n+1$ hat und quadratisch ist. Das Besondere an der Matrix $T_n(\mathcal{F})$ aber ist, dass die Haupt- und Nebendiagonalen konstant sind. Matrizen mit dieser Eigenschaft werden zu Ehren des deutschen Mathematikers Otto Toeplitz, als Toeplitz-Matrizen bezeichnet. Ihre Relevanz folgt sofort daraus, dass sich eine Vielzahl an Anwendungsfällen aus verschiedensten Gebieten der Mathematik finden lassen. Exemplarisch seien an dieser Stelle die Zeitreihenanalyse, numerische Mathematik und mathematische Physik genannt. Konkrete Beispiele finden sich Lehrbuch [3] von Grenander und Szegö.

Des Weiteren gilt $\mathcal{F}_{-k} = \overline{\mathcal{F}_k}$, woraus folgt, dass die Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ hermitesch ist und folglich reelle Eigenwerte hat. Ferner sollte nicht unerwähnt bleiben, dass die Funktion $F(\lambda)$ in der Literatur Erzeugerfunktion oder Symbol von der Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ genannt wird. Ebenfalls gelten die zuvor erwähnten Eigenschaften, im wesentlichen auch für den Fall $L \neq 1$. Der größte Unterschied ist, dass bei beliebigen L die Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ die Größe $\text{card}^a(L^{-1}\mathbb{N}_n)$ hat.

Nachdem wir nun mit der Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ näher vertraut sind, kommen wir nun wieder auf die Frage nach der Größenordnung der Determinanten zurück. Für jedes feste, aber beliebige $n \in \mathbb{N}$ ist die reellwertige Determinante der Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ wohldefiniert. Diese Feststellung erlaubt es uns die Folge

$$\{\det T_n(\mathcal{F})\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (1.6)$$

hinzuschreiben. Damit stellt sich die naheliegende Frage, ob und wenn ja gegen welchen Wert die Folge konvergiert. Eine der ersten Antworten auf diese Frage gab der ungarische Mathematiker Gabör Szegö im Jahre 1915 [4]. Seine Antwort lautete, dass für n gegen unendlich der Quotient

$$\frac{\det T_n(\mathcal{F})}{\det T_{n-1}(\mathcal{F})} \quad (1.7)$$

gegen den geometrischen Mittelwert

$$\exp \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln {}^b F(\lambda) d\lambda \right) \quad (1.8)$$

der Erzeugerfunktion konvergiert. Dieses Resultat wird (schwacher) Grenzwertsatz von Szegö genannt. Fast 30 Jahre nach Veröffentlichung dieses Resultats versuchte der später mit dem Nobelpreis in Chemie ausgezeichnete theoretische Physiker Lars Onsager eine exakte Lösung für das zweidimensionale

^aKardinalitätsfunktion - Ordnet Menge die Anzahl ihrer Elemente zu.

^bNatürlicher Logarithmus

Ising Modell zu finden. Dabei stieß er auf das Problem, dass er ein stärkeres Resultat als Szegő's ursprünglichen (schwachen) Grenzwertsatz benötigte. Auf Anraten seines Kollegen Shizuo Kakutani kontaktierte er Szegő mit der Bitte ein stärkeres Resultat zu beweisen. Trotz oder gerade wegen, dass drei Jahrzehnte nach dem Beweis des (schwachen) Grenzwertsatzes vergangen waren, gelang es Szegő tatsächlich, unter zusätzlichen Bedingungen an die Glattheit der Erzeugerfunktion $F(\lambda)$ zu zeigen, dass sich das folgende Grenzverhalten einstellt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(- \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln F(\lambda) d\lambda \right) \det T_n(\mathcal{F}) \\ = \exp \left(\frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{L} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i k \lambda}{L}} \ln F(\lambda) d\lambda \right) \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i k \theta}{L}} \ln F(\theta) d\theta \right) \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

In Einklang mit der vorherigen Namensgebung wird dieses verblüffende Ergebnis (starker) Grenzwertsatz von Szegő genannt. Ein näherer Blick auf (1.9) verrät, dass

$$\exp \left(- \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln F(\lambda) d\lambda \right) \quad (1.10)$$

dem Wachstum der Determinanten $\det T_n(\mathcal{F})$ entgegenwirkt. Das besondere an dieser Normalisierung ist, dass das Ergebnis ein konstanter Wert, nämlich

$$\exp \left(\frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{L} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i k \lambda}{L}} \ln F(\lambda) d\lambda \right) \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i k \theta}{L}} \ln F(\theta) d\theta \right) \right) \quad (1.11)$$

ist. Wir merken noch kurz an, dass aus Sicht der angewandten Mathematik der Term (1.9) im Vergleich zum geometrischen Mittelwert (1.8) deutlich komplizierter zu berechnen ist. Für Leser, die trotzdem an einem Beispiel interessiert sind, sei auf Kapitel 5.2 „Ising Model and Onsager Formula“ aus dem Lehrbuch [5] von Böttcher und Silbermann oder auf das Forschungspapier [6] von Deift et al. verwiesen.

Da der Beweis vom (starken) Grenzwertsatz von Szegő wesentlich zum Verständnis des Beweises des mehrdimensionalen Analogons beiträgt, werden wir in Kapitel 2 den Grenzwertsatz (1.9) ausführlich beweisen. Dabei werden wir annehmen, dass die beiden Summierbarkeitsbedingungen

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |\mathcal{F}_k| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |k| |\mathcal{F}_k|^2 < \infty \quad (1.12)$$

erfüllt sind. In beiden Reihen steht $L^{-1}\mathbb{Z}$ für die Indexmenge

$$\{..., -3L^{-1}, -2L^{-1}, -1L^{-1}, 0, 1L^{-1}, 2L^{-1}, 3L^{-1}, ...\}. \quad (1.13)$$

Die beiden Voraussetzungen aus (1.12) sind die zuvor erwähnten zusätzlichen Anforderungen an die Glattheit der Erzeugerfunktion $F(\lambda)$. Im Speziellen stellen die beiden Bedingungen sicher, dass das Integral auf der linken Seite und die Reihe auf der rechten Seite im Ausdruck (1.9) wohldefiniert sind. Der Grund dafür ist, dass die beiden Bedingungen aus (1.12) implizieren, dass auch für die Fourier-

Koeffizienten

$$(\ln \mathcal{F})_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-2\pi i k \lambda} \ln F(\lambda) d\lambda \quad (1.14)$$

die beiden Summierbarkeitsbedingungen

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |(\ln \mathcal{F})_k| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |k| |(\ln \mathcal{F})_k|^2 < \infty \quad (1.15)$$

erfüllt sind. Den Beweis dieser Behauptung, der sich vollständig in Kapitel 5 des Lehrbuches „Introduction to large truncated Toeplitz matrices“ [5] befindet, wollen wir als Nächstes kurz skizzieren.

Die Menge aller integrierbaren Funktionen, deren Fourier-Koeffizienten die erste Summierbarkeitsbedingung erfüllen, bilden eine kommutative Algebra. Diese Algebra wird zu Ehren des US-amerikanischen Mathematikers Norbert Wiener als Wiener Algebra bezeichnet und wir werden demzufolge die Bezeichnung W verwenden. Wissenswert ist, dass die Menge aller stetigen Funktionen in der Wiener Algebra W enthalten ist. Demzufolge gilt unsere Variante vom (starken) Grenzwertsatz von Szegő nur für stetige Funktionen. Resultate für Erzeugerfunktionen, die Nullstellen oder Sprungstellen haben, kann man in der Literatur unter dem Stichwort Fisher-Hartwig Vermutung finden. Ein lesenswerter Artikel in diesem Zusammenhang ist [7].

Für die zweite Bedingung gilt

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |k| |\mathcal{F}_k|^2 < \infty \iff \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} (|k| + 1) |\mathcal{F}_k|^2 < \infty. \quad (1.16)$$

Die Menge aller integrierbaren Funktionen und im wesentlichen beschränkten Funktionen für die

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} (|k| + 1) |\mathcal{F}_k|^2 < \infty \quad (1.17)$$

gilt, bilden eine assoziative Algebra. Diese Menge wird nach ihrem Entdecker, dem ukrainischen Mathematiker Mark Krein, auch als Krein-Algebra bezeichnet [8]. Schränkt man die Krein-Algebra auf quadratisch integrierbare Funktionen ein, so erhält man den Sobolev-Raum $H^{1/2}$. Der Sobolev-Raum $H^{1/2}$ ist der Raum derjenigen reellwertigen Funktionen $u \in L^2(\Omega)$, deren gemischte partielle schwache Ableitungen bis zur Ordnung $1/2$ im Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$ liegen.

Man kann zeigen, dass die Schnittmenge

$$W \cap H^{1/2} = \left\{ F \in W : \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} (|k| + 1) |\mathcal{F}_k|^2 < \infty \right\} \quad (1.18)$$

eine (nicht-abgeschlossene) Unter algebra der Wiener Algebra ist. Man kann zeigen, dass wenn man man die Algebra $W \cap H^{1/2}$ mit der Norm

$$\|F\| = \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |\mathcal{F}_k| + \sqrt{\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} (|k| + 1) |\mathcal{F}_k|^2} \quad (1.19)$$

ausstattet, es sich um eine Banachalgebra handelt. Daraus folgt

$$F(\lambda) \in W \cap H^{1/2} \Rightarrow \ln F(\lambda) \in W \cap H^{1/2}. \quad (1.20)$$

In Kombination mit der Definition der Banachalgebra $W \cap H^{1/2}$ folgt die Behauptung.

Bevor wir uns dem mehrdimensionalen Analogon widmen, noch einige Anmerkungen zum eindimensionalen Fall. Für die Spur der k -ten Potenz der Toeplitz Matrix $T_n(\mathcal{F})$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_n(\mathcal{F}))^k &= \text{Tr}(\underbrace{T_n(\mathcal{F}) \times \dots \times T_n(\mathcal{F})}_{k\text{-faches Matrix Produkt}}) \\ &= \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (F(\lambda))^k d\lambda \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k}{l(k-l)} \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (F(\lambda))^l d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i m \theta}{L}} (F(\theta))^{k-l} d\theta \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Das ist insoweit interessant, als nach dem Approximationssatz von Weierstraß jede stetige Funktion G definiert auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig durch eine Folge von Polynomen approximiert werden kann. Damit lässt sich die Spur von $\text{Tr } G(T_n(\mathcal{F}))$ mit Hilfe der Identität (1.21) berechnen. Das ist zudem aufgrund der Matrix-Identität

$$\ln \det A = \text{Tr } \ln A \quad (1.22)$$

eine natürliche Erweiterung des starken Grenzwertsatzes von Szegö. Mehr Details zu diesem Thema finden sich in Kapitel 2. Als Nächstes widmen wir uns dem Zusammenhang von (unendlichen) Toeplitz-Matrizen, Fourier-Koeffizienten und beschränkten linearen Operatoren. Dieser Einschub wird es uns erlauben, das mehrdimensionale Analogon besser zu verstehen.

Satz 1. *Es sei $L = 1$. Die unendliche Toeplitz-Matrix $\{A_{k-l}\}_{k,l=1}^{\infty}$ erzeugt einen beschränkten linearen Operator auf dem Folgenraum $l^2(\mathbb{N})$ genau dann, wenn eine im wesentlichen beschränkte Funktion F existiert deren Folge von Fourier-Koeffizienten $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ gleich der Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist.*

Beweis. Der vollständige Beweis befindet sich in der Monographie „Analysis of Toeplitz operators“ von Böttcher und Silberman [9]. Der ursprüngliche Beweis ist Teil der Habilitationsschrift [10] von Otto Toeplitz aus dem Jahre 1911. \square

Die Quintessenz von Satz 1 ist, dass die Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ die Matrixdarstellung eines beschränkten linearen Operators ist. Das führt zu der naheliegenden Frage, wie der beschränkte lineare Operator, der von der Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ erzeugt wird, konkret aussieht. Es sei hierzu

$$l^2(L^{-1}\mathbb{N}_n) := \left\{ (x_i)_{i \in L^{-1}\mathbb{N}_n} \left| \sum_{i \in L^{-1}\mathbb{N}_n} |x_i|^2 < \infty \right. \right\} \quad (1.23)$$

der Raum aller quadratisch summierbaren Folgen auf der Menge $L^{-1}\mathbb{N}_n$. Sei nun $\Psi = (\Psi(l))_{l \in L^{-1}\mathbb{N}_n}$ eine solche Folge. Bildet man das Matrixprodukt $T_n(\mathcal{F})\Psi$, so erhält man eine neue Folge in $l^2(L^{-1}\mathbb{N}_n)$.

Jedes Element dieser Folge kann mithilfe des Operators

$$(\mathcal{F} * \Psi)_k = \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{N}_n} \mathcal{F}_{k-l} \Psi(l) = \frac{1}{L} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{N}_n} \psi(l) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-2\pi i(k-l)\lambda} F(\lambda) d\lambda \quad (k \in L^{-1}\mathbb{N}_n) \quad (1.24)$$

bestimmt werden. Der Operator $(\mathcal{F} * \Psi)_k$ ist so zu verstehen, dass der Operator das Element $\Psi(k)$, durch den Wert der sich der rechten Seite ergibt, ersetzt. Operatoren von dieser Art, werden in der Literatur diskrete Faltungsoperatoren genannt. Der Vorteil der Darstellung (1.24) gegenüber der Matrixdarstellung $T_n(\mathcal{F})$ ist, dass wenn man alle eindimensionalen Bestandteile durch mehrdimensionale ersetzt, man in natürlicher Weise ein mehrdimensionales Analogon erhält. Auch für diesen mehrdimensionalen Operator kann man die Größenordnung der Determinante analysieren. Das Ergebnis wird ein mehrdimensionales Analogon zum starken Grenzwertsatz von Szegő sein. Die Details sind Thema des nächsten Abschnittes.

1.1 Mehrdimensionales Analogon vom starken Grenzwertsatz von Szegő

Wir betrachten anstelle der eindimensionalen Folge $\Psi(l)$ die quadratisch summierbaren Folge

$$\Phi(l) : L^{-1}\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.25)$$

für $m \geq 2$. Wir ersetzen die Summation über die Indexmenge $L^{-1}\mathbb{N}_n$ durch das Summieren über eine Teilmenge G des \mathbb{R}^m ($m \geq 2$). Im Speziellen sei $G \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit positiver Gaußscher Krümmung und zweimal-stetig differenzierbaren Rand ∂G . Sei $T > 0$. Mit G_T bezeichnen wir die dilatierte Menge

$$\{Tx : x \in G\} \quad (1.26)$$

und G_* steht für die Indexmenge

$$G_T \cap L^{-1}\mathbb{Z}^m. \quad (1.27)$$

Die Menge G_* wird die Indexmenge $L^{-1}\mathbb{N}_n$ ersetzen. Ferner schreiben wir ν_* für die Anzahl der Elemente in der Schnittmenge $G_T \cap L^{-1}\mathbb{Z}^m$. Des Weiteren betrachten wir anstelle von $l^2(L^{-1}\mathbb{N})$ den Folgenraum

$$l^2(G_*) := \left\{ (x_i)_{i \in G_*} \left| \sum_{i \in G_*} |x_i|^2 < \infty \right. \right\} \quad (1.28)$$

über der Indexmenge G_* . Ebenfalls benötigen wir die strikt positive, sowie Lebesgue-integrierbare Funktion $H(\lambda)$ auf dem Würfel $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m$.

Die mehrdimensionalen Fourier-Koeffizienten der Funktion $H(\lambda)$ lauten

$$\mathcal{H}_k = \frac{1}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{-2\pi i k \cdot \lambda} H(\lambda) d\lambda, \quad (k \in \underbrace{G_T \cap L^{-1}\mathbb{Z}^m}_{G_*}) \quad (1.29)$$

wobei $k \cdot \lambda$ für das Standardskalarprodukt steht. Insgesamt erhalten wir so den trankierten mehrdimensionalen diskreten Faltungsoperator

$$(\mathcal{H} * \Phi)_k = \sum_{l \in G_*} \mathcal{H}_{k-l} \Phi(l) = \frac{1}{L^m} \sum_{l \in G_*} \Phi(l) \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{-2\pi i(k-l) \cdot \lambda} H(\lambda) d\lambda \quad (k \in G_*, \Phi \in l^2(G_*)). \quad (1.30)$$

Fixiert man eine Reihenfolge in der die Elemente der Indexmenge G_* durchlaufen werden, so lässt sich für jedes $T \in \mathbb{R}$ der mehrdimensionale Faltungsoperator als Toeplitz-Matrix

$$T_T(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}_{k-l})_{k,l \in G_*} \quad (1.31)$$

darstellen und damit auch die Determinante berechnen. Damit können wir wieder die Frage stellen, ob und wenn ja gegen welchen Wert die Folge

$$\{\det T_T(\mathcal{H})\}_{T \in \mathbb{N}} \quad (1.32)$$

konvergiert. Falls die beiden Summierbarkeitsbedingungen

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} |\mathcal{H}_k| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} |k|^c |\mathcal{H}_k|^2 < \infty \quad (1.33)$$

erfüllt, so lautet die Antwort:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \ln \det T_T(\mathcal{H}) &= \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} \ln H(\lambda) d\lambda + \frac{L^m T^{m-1}}{2} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma |\widehat{\ln H(k)}|^2 \\ &\quad + o(T^{m-1}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Hier ist $\widehat{\ln H(k)}$ der k -te Fourier-Koeffizient von der Funktion $\ln H(\lambda)$. Der Ausdruck $n(\sigma) \in \mathbb{R}^m$ steht für den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor^d an der Stelle $\sigma \in \partial G$ und $d\sigma$ ist das kanonische Oberflächenmaß.

Diese Variante vom starken Grenzwertsatz von Szegö geht auf den russischen Mathematiker I. Ju. Linnik [2] zurück und wird vollständig in Kapitel 3 bewiesen. Bei der Beweisführung werden wir auf eine Vielzahl von Ideen und Techniken, die wir beim Beweis vom eindimensionalen Grenzwertsatz von Szegö erarbeitet haben, zurückgreifen. Daher empfiehlt es sich, die beiden Beweise in chronologischer Reihenfolge zu lesen.

Aber bevor wir zu den Beweisen kommen, wollen wir an dieser Stelle noch einige Anmerkungen machen. Zunächst einmal gilt für die Anzahl der Elemente in der Menge G_* die Abschätzung

$$|\nu_* - L^m T^m \text{vol}(G)| \leq \left(\frac{L^m T^{m-1}}{2} \int_{\partial G} d\sigma + o(T^{m-1}) \right). \quad (1.35)$$

^c $|k| = |k_1| + \dots + |k_m|$

^dDer Normalenvektor $n(\sigma)$ am Punkt $\sigma \in \partial G$ ist derjenige Vektor der orthogonal zur Tangentialhyperebene am Punkt $\sigma \in \partial G$ ist und die Länge 1 hat.

Diese Abschätzung ist aus dem Forschungsartikel [11] von Betke und Böröczky. Die Interpretation (1.35) ist, dass der erste Term aus (1.34) mit T^m und der zweite Term mit T^{m-1} skaliert. Das ist auch der wesentliche Unterschied zum eindimensionalen Fall, da ansonsten die Terme von der Struktur her sehr ähnlich sind. Damit „vererbt“ sich die Problematik, dass der zweite Term kompliziert zu berechnen ist, auf den mehrdimensionalen Fall. Eine weitere erwähnswerte Gemeinsamkeit ist, dass auch wieder die Spur der k -ten Potenz der Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{H})$ berechnet werden kann. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Tr } T_T(\mathcal{H})^k &= \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} (H(\lambda))^k d\lambda \\ &+ \frac{L^m T^{m-1}}{2} \sum_{n \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, n \cdot n(\sigma)\} d\sigma \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k}{l(k-l)} H^{*l} H^{*k-l}(n) + o(T^{m-1}), \end{aligned} \quad (1.36)$$

wobei

$$H^{*l} H^{*k-l}(n) = \left(\frac{1}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{-2\pi i n \cdot \lambda} (H(\lambda))^l d\lambda \right) \left(\frac{1}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{2\pi i n \cdot \lambda} (H(\lambda))^{k-l} d\lambda \right) \quad (1.37)$$

ist. Folglich lässt sich das Ergebnis erneut auf die Berechnung von $\text{Tr } G(T_n(\mathcal{H}))$ verallgemeinern, vorausgesetzt, die Funktion G lässt sich gleichmäßig durch ein Polynom approximieren.

Zum Abschluss des ersten Kapitels wollen wir noch eine Variante des mehrdimensionalen Grenzwertsatzes von Szegő präsentieren. Ersetzt man das Gebiet G durch ein konvexes Gitterpolytop P ,^e so erhält man das folgende Grenzverhalten der Determinante

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \ln \det T_T(\mathcal{H}) &= \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} \ln H(\lambda) d\lambda + \frac{L^m T^{m-1}}{2} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \sum_{j=1}^J \mu(P_j) \max\{0, k \cdot n(P_j)\} |\widehat{\ln H(k)}|^2 \\ &+ o(T^{m-1}). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Hier ist $\mu(P_j)$ das normalisierte Volumen der j -ten von insgesamt J Facetten des Gitterpolytops P . Des Weiteren ist die Anzahl der Elemente in der Menge v_* von der Größenordnung

$$L^m \left(T^m \text{vol}(G) + T^{m-1} \sum_{j=1}^J \frac{n(F_j)}{2} + O(T^{m-2}) \right). \quad (1.39)$$

Dieses Ergebnis folgt sofort aus dem Satz von Ehrhart. Details zu diesem Satz finden sich im Lehrbuch [12] von Matthias Beck und Sinai Robins. Der Unterschied zur vorherigen Variante ist, dass wir anstelle des Integrals

$$\int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma, \quad (1.40)$$

die Summe

$$\sum_{j=1}^J \mu(P_j) \max\{0, k \cdot n(P_j)\} \quad (1.41)$$

^ePolytop, dessen sämtliche Ecken ganzzahlige Koordinaten haben.

haben. Man sieht, dass je größer die Facette ist, desto schneller das Wachstum der Determinante. Des Weiteren hat die Position der Fourier-Koeffizienten Einfluss auf das Wachstum der Determinante. Damit ist alles Wesentliche zum starken Grenzwertsatz von Szegő gesagt und wir kommen nun zu den Beweisen. In Kapitel 2 wird der eindimensionale Fall und in Kapitel 3 der mehrdimensionale Fall gezeigt.

Kapitel 2

Beweis vom starken Grenzwertsatz von Szegö

Zur Erinnerung: Der Buchstabe L steht für eine strikt positive Konstante und die Fourier-Koeffizienten \mathcal{F}_k der Erzeugerfunktion $F(\lambda)$ ergeben sich aus dem Integral

$$\mathcal{F}_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-2\pi i k \lambda} F(\lambda) d\lambda. \quad (2.1)$$

Satz 2 (Starker Grenzwertsatz von Szegö). *Sei $F(\lambda) : [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \rightarrow (0, 1]$ eine strikt positive, sowie Lebesgue-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft*

$$\sup_{\lambda \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} F(\lambda) = 1. \quad (2.2)$$

Erfüllen zusätzlich die Fourier-Koeffizienten \mathcal{F}_k von der Funktion $F(\lambda)$ die beiden Summierbarkeitsbedingungen

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |\mathcal{F}_k| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |k| |\mathcal{F}_k|^2 < \infty. \quad (2.3)$$

Dann gilt für

$$\det T_n(\mathcal{F}) = \det(\{\mathcal{F}_{k-l}\}_{k,l \in L^{-1}\mathbb{N}_n}) \quad (2.4)$$

das folgende Grenzwverhalten

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(- \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln F(\lambda) d\lambda \right) \det T_n(\mathcal{F}) \\ = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i k \lambda}{L}} \ln F(\lambda) d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i k \theta}{L}} \ln F(\theta) d\theta \right) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dem aufmerksamen Leser wird aufgefallen sein, dass wir fordern, dass das Supremum der Erzeugerfunktion $F(\lambda)$ gleich eins ist. Das ist aufgrund der Multilinearität der Determinante^a und der Struktur der Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ keine Einschränkung, wird aber die Beweisführung erleichtern. Der Beweis, der im Folgenden präsentiert wird, beruht auf dem Inhalt von Kapitel 6.5 aus der Monografie [13] von Barry Simon. Die Beweisidee geht auf Mark Kac [1] zurück und ist von kombinatorischer Natur. Für

^a $\det(cA) = c^n \det A$, für eine $n \times n$ Matrix A und eine Zahl $c \in \mathbb{R}$.

Leser, die an einem alternativen Beweis interessiert sind, sei auf die Monografie [13] verwiesen, in der sich neben diesem Beweis noch fünf weitere befinden.

Beweis. Für den Beweis benötigen wir die auf dem Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ definierte Hilfsfunktion

$$G(\lambda) = 1 - F(\lambda). \quad (2.6)$$

Damit gilt $F(\lambda) = F_{h=1}(\lambda)$, wobei

$$F_h(\lambda) = 1 - hG(\lambda) = 1 - h + hF(\lambda) \quad (h \in \mathbb{R}) \quad (2.7)$$

ist. Des Weiteren gilt aufgrund der Voraussetzungen an die Erzeugerfunktion $F(\lambda)$:

$$\sup_{\lambda \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} G(\lambda) = \|G\|_\infty < 1. \quad (2.8)$$

Als Nächstes ersetzen wir in der Toeplitz-Matrix $T_n(\mathcal{F})$ die Erzeugerfunktion $F(\lambda)$ durch

$$F_h(\lambda) = 1 - hG(\lambda). \quad (2.9)$$

Man rechnet leicht nach, dass das Ergebnis die Toeplitz-Matrix

$$E - hT_n(\mathcal{G}) \quad (2.10)$$

ist, wobei E die Einheitsmatrix mit Größe $\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)$ und $T_n(\mathcal{G})$ die Toeplitz-Matrix $\{\mathcal{G}_{k-l}\}_{k,l \in L^{-1}\mathbb{N}_n}$ ist. Man beachte, dass \mathcal{G}_k für den k -ten Fourier-Koeffizienten der Hilfsfunktion $G(\lambda)$ steht. Des Weiteren ist klar, dass auch die Hilfsfunktion $G(\lambda)$ die beiden Summierbarkeitsbedingungen erfüllt.

Für den nächsten Beweisschritt benötigen wir zwei Hilfsmittel. Zum einen werden wir verwenden, dass für $|h||x| < 1$ die Mercator-Newton Reihe

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hx)^k}{k}. \quad (2.11)$$

gegen $\ln(1 - hx)$ konvergiert. Wir merken an, dass $F_h(\lambda)$ eingeführt wurde, damit diese Reihenentwicklung durchgeführt werden kann. Zum anderen benötigen wir die folgende Matrix-Identität.

Lemma 1. *Sei A eine quadratische und invertierbare Matrix. Dann gilt*

$$\ln(\det(A)) = \text{Tr}(\ln(A)). \quad (2.12)$$

Beweis. Wir wählen eine Matrix B , sodass $e^B = A$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\det(e^B) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \det \left(I + \frac{B}{N} \right)^N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\text{Tr } B}{N} \right)^N \\ &= e^{\text{Tr}(B)}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Beim ersten Schritt haben wir Darstellung der Exponentialfunktion $\exp(x)$ als Grenzwert der Folge

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^N\tag{2.14}$$

und beim zweiten Schritt die quadratische Approximation der Determinante

$$\det(I + \delta A) = I + \delta \text{Tr}(A) + \mathcal{O}(\delta^2)\tag{2.15}$$

für kleines δ verwendet. Wendet man nun auf beiden Seiten den Logarithmus an und ersetzt e^B durch A , sowie im Ausdruck $\text{Tr}(B)$ die Matrix B durch $\ln(A)$, so folgt die Behauptung. \square

Aus den beiden Hilfsmitteln folgt, dass für die Determinante der Toeplitz-Matrix $E - hT_n(\mathcal{G})$ die Darstellung

$$\ln \det(E - hT_n(\mathcal{G})) = \text{Tr}(\ln(E - hT_n(\mathcal{G}))) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k} \text{Tr}(T_n(\mathcal{G}))^k\tag{2.16}$$

gilt. Im letzten Schritt haben wir die Linearität des Spuroperators verwendet. An dieser Stelle sei erwähnt, dass wir diesen Trick auch beim Beweis des mehrdimensionalen Analogons anwenden werden. Im Speziellen folgen beide Beweise der gleichen Struktur, in dem Sinne, dass die Spur $\text{Tr}(T_n(\mathcal{G}))^k$ berechnet werden muss und technische Details zu klären sind, wie zum Beispiel, ob die Newton-Mercator Reihe konvergiert oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k} \text{Tr}(T_n(\mathcal{G}))^k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h^k}{k} \text{Tr}(T_n(\mathcal{G}))^k\tag{2.17}$$

ist. Nach diesem kleinen Einschub beginnen wir nun mit der Berechnung von $\text{Tr}(T_n(\mathcal{G}))^k$. Hierzu benötigen wir die beiden Funktionen

$$m^*(x_1, \dots, x_j) = \max(0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_j)\tag{2.18}$$

und

$$R(x_1, \dots, x_j) = m^*(x_1, \dots, x_j) + m^*(-x_1, \dots, -x_j).\tag{2.19}$$

Unter Zuhilfenahme dieser beiden Funktionen lässt sich die Spur $\text{Tr } T_n(\mathcal{G})^k$ durch die Mehrfachreihe

$$\text{Tr } T_n(\mathcal{G})^k = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} F(n; j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \quad (2.20)$$

ausdrücken, wobei

$$F(n; j_1, \dots, j_k) = \text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n) - \min^b(\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n), R(j_1, \dots, j_k)) \quad (2.21)$$

ist. Damit haben wir die Berechnung der Spur $\text{Tr } T_n(\mathcal{G})^k$ in ein kombinatorisches Problem überführt. Da die Identität (2.20) keinesfalls offensichtlich ist, folgt nun der Beweis.

Beweis. Wir beginnen mit

$$\text{Tr } T_n(\mathcal{G})^k = \sum_{\substack{m_1 \in L^{-1}\mathbb{N}_n \\ \vdots \\ m_k \in L^{-1}\mathbb{N}_n}} \mathcal{G}_{m_1 - m_2} \mathcal{G}_{m_2 - m_3} \dots \mathcal{G}_{m_k - m_1}. \quad (2.22)$$

Diese Mehrfachreihe erhält man, indem man sich die Formel für Matrizenmultiplikation in Erinnerung ruft und schlussendlich über die Diagonalelemente summiert. Als Nächstes benötigen wir die Mengenfunktion

$$\tilde{F}(n; j_1, \dots, j_k) = \text{card}(\{(m_1, \dots, m_k) \mid m_l \in L^{-1}\mathbb{N}_n; m_l - m_{l+1} = j_l, l = 1, \dots, k\}), \quad (2.23)$$

wobei wir m_{k+1} als m_1 interpretieren. Es ist klar, dass

$$\text{Tr } T_n(\mathcal{G})^k = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \tilde{F}(n; j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \quad (2.24)$$

ist. Um den Beweis abzuschließen genügt es zu zeigen, dass unter der Nebenbedingung $j_1 + \dots + j_k = 0$ die beiden Abbildungen

$$\tilde{F}(n; j_1, \dots, j_k) \quad (2.25)$$

und

$$F(n; j_1, \dots, j_k) \quad (2.26)$$

übereinstimmen. Da $j_1 + \dots + j_k = 0$ ist, können wir die Bedingung $m_k - m_1 = j_k$ weglassen, da diese Bedingung bereits aus den Gleichungen $m_l - m_{l+1} = j_l$ für $l = 1, \dots, k-1$ folgt. Die Lösungen dieser $k-1$ Gleichungen lauten

$$m_2 = m_1 - j_1 \quad m_3 = m_1 - j_1 - j_2, \dots \quad (2.27)$$

^b $\min(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|}{2}$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\tilde{F}(n; j_1, \dots, j_k) &= \text{card}(\{m_1 | 0 \leq \min(m_1, m_1 - j_1, m_1 - j_1 - j_2, \dots) \\ &\leq \max(m_1, m_1 - j_1, m_1 - j_1 - j_2, \dots) \leq \text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)\})\end{aligned}\quad (2.28)$$

ist. Als Nächstes benötigen wir noch die zwei einfach zu beweisenden Identitäten

$$\max(m_1, m_1 - j_1, \dots) = m_1 + m^*(-j_1, \dots, -j_{k-1}) \quad (2.29)$$

und

$$\min(m_1, m_1 - j_1, \dots) = -\max(-m_1, -m_1 + j_1, \dots) = m_1 - m^*(j_1, \dots, j_{k-1}). \quad (2.30)$$

Damit können wir die Mengenfunktion (2.28) umzuschreiben zu

$$\begin{aligned}\tilde{F}(n; j_1, \dots, j_k) &= \text{card}(\{m_1 | m^*(j_1, \dots, j_{k-1}) \leq m_1 \leq \text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n) - m^*(-j_1, \dots, -j_{k-1})\}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } R(j_1, \dots, j_{k-1}) \geq \text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n) \\ \text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n) - R(j_1, \dots, j_{k-1}) & \text{falls } R(j_1, \dots, j_{k-1}) < \text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n). \end{cases}\end{aligned}\quad (2.31)$$

Des Weiteren folgt aus $j_1 + \dots + j_k = 0$, dass

$$R(j_1, \dots, j_{k-1}) = R(j_1, \dots, j_k) \quad (2.32)$$

ist. Damit haben wir gezeigt, dass die Gleichheit

$$\tilde{F}(n; j_1, \dots, j_k) = F(n; j_1, \dots, j_k) \quad (2.33)$$

gilt, womit der Beweis beendet ist. \square

Mithilfe dieser Umformungen können wir nun den Term auf der linken Seiten vom starken Grenzwertsatz von Szegö ohne größere Schwierigkeiten bestimmen. Hierzu überlegt man sich unter Zuhilfenahme des Faltungstheorem, dass

$$\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n) \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} = \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (G(\lambda))^k d\lambda \quad (2.34)$$

ist. Einsetzen in die Newton-Mercator Reihe (2.16) ergibt den ersten Term, da

$$\begin{aligned}-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k} \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (G(\lambda))^k d\lambda &= \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k} (G(\lambda))^k d\lambda \\ &= \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln(1 - hG(\lambda)) d\lambda \stackrel{(h=1)}{=} \frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln(F(\lambda)) d\lambda\end{aligned}\quad (2.35)$$

ist. Die Reihe konvergiert, da $G(\lambda)$ der Definition nach positiv und kleiner als eins ist. Des Weiteren

dürfen Integral und Reihe nach dem Satz von Fubini-Tonelli vertauscht werden.

Für die Bestimmung vom zweiten Term müssen wir deutlich mehr Aufwand betreiben. Als ersten Schritt zeigen wir, dass aufgrund vom Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \min(\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n), R(j_1, \dots, j_k)) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\
&= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \min(\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n), R(j_1, \dots, j_k)) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\
&= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} R(j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

gilt. Man sieht, dass das die Berechnung der Mehrfachreihe deutlich vereinfachen würde.

Beweis. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz genügt es zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} |R(j_1, \dots, j_k)| |\mathcal{G}_{j_1}| \dots |\mathcal{G}_{j_k}| \tag{2.37}$$

endlich ist. Unter der Voraussetzung $j_1 + \dots + j_k = 0$ gelten für Index $l \leq k$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
|j_1 + \dots + j_l| &\leq |j_1 + \dots + j_l|^{1/2} |j_{l+1} + \dots + j_k|^{1/2} \\
&\leq \left[\left(\sum_{k=1}^l |j_k|^{1/2} \right) \left(\sum_{h=l+1}^k |j_h|^{1/2} \right) \right] \\
&\leq \sum_{\substack{h, p \in \{1, 2, \dots, k\} \\ h < p}} |j_h|^{1/2} |j_p|^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|R(j_1, \dots, j_k)| &= |m^*(j_1, \dots, j_k) + m^*(-j_1, \dots, -j_k)| \\
&\leq \sum_{\substack{h, p \in \{1, 2, \dots, k\} \\ h \neq p}} |j_h|^{1/2} |j_p|^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Aus (2.39) folgt in Kombination mit der Symmetrie der Fourier-Koeffizienten \mathcal{F}_k die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} |R(j_1, \dots, j_k)| |\mathcal{G}_{j_1}| \dots |\mathcal{G}_{j_k}| \\
&= 2 \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \binom{k}{2} |j_1|^{1/2} |j_k|^{1/2} |\mathcal{G}_{j_1}| \dots |\mathcal{G}_{j_k}| \\
&\leq \binom{k}{2} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} (|j_1| |\mathcal{G}_{j_1}|^2 + |j_k| |\mathcal{G}_{j_k}|^2) (|\mathcal{G}_{j_2}| \dots |\mathcal{G}_{j_{k-1}}|) \\
&\leq 2 \binom{k}{2} \left(\sum_{j \in L^{-1}\mathbb{Z}} |j| |\mathcal{G}_j|^2 \right) \left(\sum_{j \in L^{-1}\mathbb{Z}} |\mathcal{G}_j| \right)^{k-2} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Beim letzten Schritt haben wir die beiden Summierbarkeitsbedingungen verwendet. Damit dürfen Integral und Reihe vertauscht werden und die Behauptung ist gezeigt. \square

Als Nächstes benötigen wir eine bemerkenswerte kombinatorische Identität die nach den drei Mathematikern Freeman Dyson, Hunt und Mark Kac benannt ist. Sei $k \in \mathbb{N}$ und a_1, \dots, a_k beliebige reelle Zahlen. Des Weiteren bezeichnen wir mit S_k die Menge aller Permutation σ der Zahlen $1, 2, \dots, k$. Für jedes

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \dots & \sigma_{k-1} & \sigma_k \end{pmatrix} \in S_m$$

schreiben wir

$$a_\sigma = (a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_k}). \tag{2.41}$$

Mit $N(\sigma)$ bezeichnen wir die Anzahl der positiven Einträge unter den k Termen

$$a_{\sigma_1}, a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_k}. \tag{2.42}$$

Des Weiteren ist $\theta(x)$ die Heavyside-Funktion, also $\theta(x) = 1$ falls $x > 0$ und 0 falls $x \leq 0$ ist. Als letztes benötigen wir noch die Funktion

$$m_j^*(a_\sigma) = \begin{cases} \max(0, a_{\sigma_1}, a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_j}), & j = 1, \dots, k \\ 0, & j = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

um den Satz von Dyson, Hunt und Kac formulieren zu können.

Satz 3. Für beliebige reellen Zahlen a_1, \dots, a_k und $j = 1, \dots, k$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_k} [m_j^*(a_\sigma) - m_{j-1}^*(a_\sigma)] &= \sum_{\sigma \in S_k} \frac{\max(0, a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_j})}{j} \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} a_{\sigma_1} \theta(a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_j}).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Beweis. Diese bemerkenswerte kombinatorische Identität wurde erstmals im Forschungspapier [1] von Mark Kac erwähnt und der Beweis skizziert. Ein vollständiger Beweis findet sich in der Veröffentlichung „Generalized Hunt-Dyson formula and Bohnenblust-Spitzer theorem“ [14] von Gioev. \square

Summiert man beide Seite über j von 1 bis k so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \sum_{\sigma \in S_k} [m_j^*(a_\sigma) - m_{j-1}^*(a_\sigma)] &= \sum_{\sigma \in S_k} m_k^*(a_\sigma) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in S_k} \frac{\max(0, a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_j})}{j} = \sum_{\sigma \in S_k} N(\sigma) a_{\sigma_1}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Als Nächstes werden wir zeigen, dass aus (2.45) die Identität

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} R(j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k}{l(k-l)} \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (G(\lambda))^l d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (G(\lambda))^{k-l} d\lambda \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

folgt. Interessant ist, dass die rechte Seite dem zweiten Term für die Spur der k -ten Potenz der Toeplitz Matrix $T_n(\mathcal{F})$ entspricht.

Beweis. Da das Produkt der Fourier-Koeffizienten $\mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k}$ symmetrisch in j_1, \dots, j_k ist, gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} m_k^*(j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \left(\sum_{\sigma \in S_k} m_k^*(j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_k}) \right) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \left(\sum_{\sigma \in S_k} j_{\sigma_1} N(\sigma) \right) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} j_1 N(e) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \sum_{l=1}^{k-1} j_1 \theta(j_1 + \dots + j_l) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \sum_{l=1}^{k-1} \left[\frac{j_1 + \dots + j_l}{l} \right] \theta(j_1 + \dots + j_l) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Im dritten Schritt steht das e in $N(e)$ für die identische Permutation. Ersetzt man $m^*(j_1, \dots, j_k)$ durch

$m^*(-j_1, \dots, -j_k)$, so erhält man unter der Voraussetzung $j_1 + \dots + j_k = 0$ die Gleichung

$$\frac{-j_1 - \dots - j_l}{l} \theta(-j_1 - \dots - j_l) = \frac{j_{l+1} + \dots + j_k}{l} \theta(j_{l+1} + \dots + j_k). \quad (2.48)$$

Betrachtet man anstelle von l die Differenz $k - l$ und passt die j entsprechend an, so gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} m_k^*(-j_1, \dots, -j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \sum_{l=1}^{k-1} \left[\frac{j_1 + \dots + j_l}{k-l} \right] \theta(j_1 + \dots + j_l) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{k-l} = \frac{k}{l(k-l)} \quad (2.50)$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} R(j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k}{l(k-l)} \sum_{\substack{m=1 \\ j_1 + \dots + j_l = mL^{-1} \\ j_{l+1} + \dots + j_k = -mL^{-1}}}^{\infty} m \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k}{l(k-l)} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (G(\lambda))^l d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (G(\lambda))^{k-l} d\lambda \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

und die Behauptung ist gezeigt. \square

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \min(\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n), R(j_1, \dots, j_k)) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \min(\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n), R(j_1, \dots, j_k)) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} R(j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \end{aligned} \quad (2.52)$$

ist. Denn daraus folgt der zweite Term im starken Grenzwertsatz von Szegő durch Einsetzen in die

Newton-Mercator Reihe:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} R(j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \\
& = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k} \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k}{l(k-l)} \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (G(\lambda))^l d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (G(\lambda))^{k-l} d\lambda \right) \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i m \lambda}{L}} \ln(1 - hG(\lambda)) d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i m \theta}{L}} \ln(1 - hG(\theta)) d\theta \right) \\
& =_{h=1} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i m \lambda}{L}} \ln F(\lambda) d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i m \theta}{L}} \ln F(\theta) d\theta \right).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Hier haben wir verwendet, dass sich die Funktion $\ln(1 - hx) \ln(1 - hy)$ als Cauchy-Produkt darstellen lässt:

$$\begin{aligned}
\ln(1 - hx) \ln(1 - hy) & = \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hx)^k}{k} \right) \left(- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(hy)^l}{l} \right) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^n x^k y^{n-k}}{k(n-k)} \right).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Wie bereits erwähnt zeigen wir jetzt, dass Grenzwert und Reihe vertauscht werden dürfen. Dazu müssen wir nach dem Satz von der dominierten Konvergenz zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \underbrace{\min(\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n, R(j_1, \dots, j_k)))}_{F(n; j_1, \dots, j_k)} \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \right| < \infty \tag{2.55}$$

ist. Hierzu werden wir auf den in Kapitel 1 erläuterten Zusammenhang von Toeplitz-Matrizen und beschränkten Faltungsoperatoren zurückgreifen. Wir bezeichnen mit A^k die Matrixdarstellung des Faltungsoperator

$$(G^k * \Psi)_h = \frac{1}{L} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{N}} \Psi(l) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i (h-l)\lambda}{L}} (G(\lambda))^k d\lambda \quad (h \in L^{-1}\mathbb{N}). \tag{2.56}$$

Des Weiteren steht $P_n A^m P_n$ für die Restriktion der Matrix A^k auf die ersten $\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)$ Zeilen und Spalten. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass wir A an der Stelle von A^1 schreiben. Als Nächstes überlegen wir uns, dass die folgende Darstellung gilt:

$$- \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} F(n; j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} = \text{Tr}((P_n A P_n)^k) - \text{Tr}(P_n A^k P_n). \tag{2.57}$$

Wir wissen, dass

$$\text{Tr } T_n(\mathcal{G})^k = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} F(n; j_1, \dots, j_k) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \tag{2.58}$$

ist. Außerdem ist klar, dass

$$\mathrm{Tr} T_n(\mathcal{G})^k = \mathrm{Tr}((P_n A P_n)^k) \quad (2.59)$$

ist. Des Weiteren ist

$$\mathrm{Tr}(P_n A^k P_n) = \frac{\mathrm{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (G(\lambda))^k d\lambda, \quad (2.60)$$

woraus die Behauptung folgt. Der Trick ist es jetzt den Term

$$|\mathrm{Tr}((P_n A P_n)^k) - \mathrm{Tr}(P_n A^k P_n)| \quad (2.61)$$

abzuschätzen. Hierzu beweisen wir die Ungleichung:

$$|\mathrm{Tr}((P_n A^k P_n)) - \mathrm{Tr}((P_n A P_n)^k)| \leq \frac{k(k-1)}{2} \|A\|^{k-2} \|(1-P_n)AP_n\|_2 \|P_n A(1-P_n)\|_2. \quad (2.62)$$

Dabei ist $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf dem Hilbertraum $l^2(L^{-1}\mathbb{N})$, $\|\cdot\|_2$ die Spur Norm und $\|\cdot\|_2$ die Hilbert-Schmidt Norm. Des Weiteren ist

$$(1-P_n)AP_n = (\mathcal{F}_{k-l})_{\substack{k \in L^{-1}\mathbb{N}_n \\ l \in L^{-1}\mathbb{N} \setminus L^{-1}\mathbb{N}_n}} \quad (2.63)$$

und

$$P_n A(1-P_n) = (\mathcal{F}_{k-l})_{\substack{k \in l \in L^{-1}\mathbb{N} \setminus L^{-1}\mathbb{N}_n \\ l \in L^{-1}\mathbb{N}_n}}. \quad (2.64)$$

Beweis. Wir schreiben Q anstelle von $(1-P_n)$ und lassen das n in P_n weg. Für die Hilbert-Schmidt Norm gilt die Ungleichung

$$\|CD\|_2 \leq \|C\|_2 \|D\|. \quad (2.65)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|QA^l P\|_2 &\leq \|QA^{l-1}(P+Q)AP\|_2 \\ &\leq \|QA^{l-1}P\|_2 \|PAP\| + \|QA^{l-1}Q\|_2 \|QAP\| \\ &\leq \|A\| \|QA^{l-1}P\|_2 + \|A\|^{l-1} + \|QAP\|_2. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ersetzt man $\|QA^{l-1}P\|_2$ wiederholt durch die Abschätzung aus (2.66) so erhält man für $l \geq 1$

$$\|QA^l P\|_2 \leq l \|A\|^{l-1} \|QAP\|_2 \quad (2.67)$$

Aus der Ungleichung $\|CD\|_1 \leq \|C\|_2 \|D\|_2$ in Kombination mit (2.67) folgt

$$\begin{aligned} \|PA^k P - (PAP)PA^{k-1}P\|_1 &= \|PAQQA^{k-1}P\|_1 \\ &\leq (m-1) \|A\|^{k-2} \|PAQ\|_2 \|QAP\|_2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Des Weiteren gilt

$$\|(PAP)^j PA^{k-j} P - (PAP)^{j+1} PA^{k-j-1} P\|_1 \leq (k-j-1) \|A\|^{k-2} \|PAQ\|_2 \|QAP\|_2. \quad (2.69)$$

Insgesamt erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& |\operatorname{Tr}((P_n A^k P_n)) - \operatorname{Tr}((P_n A P_n)^k)| \\
& \leq \|P A^k P - (P A P)^k\|_1 \\
& \leq (1 + \dots + (k-1)) \|A\|^{k-2} \|P A Q\|_2 \|Q A P\|_2 \\
& \leq \frac{k(k-1)}{2} \|A\|^{k-2} \|P A Q\|_2 \|Q A P\|_2
\end{aligned} \tag{2.70}$$

und die Behauptung ist gezeigt. \square

Als Nächstes schätzen wir

$$\frac{k(k-1)}{2} \|A\|^{k-2} \|(1 - P_n) A P_n\|_2 \|P_n A (1 - P_n)\|_2 \tag{2.71}$$

ab. Für die Operatornorm einer Toeplitz-Matrix, die von einer im wesentlichen beschränkten Funktion H erzeugt wurde, gilt

$$\|T(\mathcal{H})\| = \|H\|_\infty. \tag{2.72}$$

Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [5]. Damit gilt zunächst einmal

$$\|A\|^{k-2} < \|G\|_\infty. \tag{2.73}$$

Des Weiteren gilt

$$\|(1 - P_n) A P_n\|_2^2 = \sum_{\substack{k \in L^{-1}\mathbb{N}_n \\ l \in L^{-1}\mathbb{N} \setminus L^{-1}\mathbb{N}_n}} |\mathcal{G}_{k-l}|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \min(|k|, \operatorname{card}(L^{-1}\mathbb{N}_n)) |\mathcal{G}_{kL^{-1}}|^2 \tag{2.74}$$

Aus der zweiten Summierbarkeitsbedingung folgt, dass die Reihe endlich ist. Insgesamt erhalten wir so

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sup_n \left| \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} \min(n+1, R(j_1, \dots, j_k)) \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_k} \right| \\
& \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} k(k-1) \underbrace{\|G\|_\infty^{k-2}}_{<1} \underbrace{\sum_{h \in \mathbb{Z}} |h| |\mathcal{G}_{hL^{-1}}|^2}_{<\infty} < \infty
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Damit ist der starke Grenzwertsatz von Szegő bewiesen. \square

Kapitel 3

Beweis vom mehrdimensionalen Analogon des starken Grenzwertsatz von Szegö

Zur Erinnerung: Der Buchstabe L steht für eine strikt positive Konstante und $G \subset \mathbb{R}^m$ ist ein beschränktes Gebiet mit positiver Gaußscher Krümmung und zweimal-stetig differenzierbaren Rand ∂G . Mit G_T bezeichnen wir die dilatierte Menge $\{Tx : x \in G\}$ und wir schreiben ν_* für die Anzahl der Elemente in der Schnittmenge $G_T \cap L^{-1}\mathbb{Z}^m$. Die Fourier-Koeffizienten \mathcal{H}_k von der Erzeugerfunktion $H(\lambda)$ sind definiert durch

$$\mathcal{H}_k = \frac{1}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{-2\pi i k \cdot \lambda} H(\lambda) d\lambda. \quad (k \in \underbrace{G_T \cap L^{-1}\mathbb{Z}^m}_{G_*}). \quad (3.1)$$

Des Weiteren steht $\widehat{\ln H(k)}$ für den k -ten Fourier-Koeffizienten der Funktion $\ln H(\lambda)$.

Satz 4 (Mehrdimensionales Analogon vom starken Grenzwertsatz von Szegö). *Sei*

$$H(\lambda) : \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]^m \rightarrow (0, 1] \quad (3.2)$$

eine strikt positive, sowie Lebesgue-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\sup_{\lambda \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} H(\lambda) = 1. \quad (3.3)$$

Erfüllen zusätzlich die Fourier-Koeffizienten \mathcal{H}_k der Erzeugerfunktion H die beiden Summierbarkeitsbedingungen

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} |\mathcal{H}_k| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} |k| |\mathcal{H}_k|^2 < \infty. \quad (3.4)$$

Dann gilt für die Determinante der Matrixdarstellung $\det T_T(\mathcal{H})$ des trankierten mehrdimensionalen Faltungsooperators

$$(\mathcal{H} * \Phi)_k = \sum_{l \in G_*} \mathcal{H}_{k-l} \Phi(l) \quad (k \in G_*, \Phi \in l^2(G_*)) \quad (3.5)$$

das folgende Grenzwverhalten

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \ln \det T_T(\mathcal{H}) &= \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} \ln H(\lambda) d\lambda + \frac{L^m T^{m-1}}{2} \sum_{k \in L^{-1} \mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma |\widehat{\ln H(k)}|^2 \\ &+ o(T^{m-1}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Beweis. Zum Einstieg sei angemerkt, dass die ersten Beweisschritte im Wesentlichen denen vom eindimensionalen Fall entsprechen. Wir bezeichnen mit

$$\tilde{\mathbf{I}}(\lambda) : \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]^m \rightarrow 1 \quad (3.7)$$

die Einsfunktion und definieren auf dem Würfel $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m$ die Hilfsfunktion

$$G(\lambda) = \tilde{\mathbf{I}}(\lambda) - H(\lambda). \quad (3.8)$$

Damit gilt $H(\lambda) = H_{h=1}(\lambda)$, wobei

$$H_h(\lambda) = \tilde{\mathbf{I}}(\lambda) - hG(\lambda) = \tilde{\mathbf{I}}(\lambda) - \tilde{\mathbf{I}}(\lambda)h + hH(\lambda) \quad (3.9)$$

ist. Insbesondere gilt aufgrund der Voraussetzungen an die Erzeugerfunktion $H(\lambda)$, dass

$$\sup_{\lambda \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} G(\lambda) = \|G\|_\infty < 1 \quad (3.10)$$

ist. Als Nächstes ersetzen wir im Faltungsoperator die Erzeugerfunktion $H(\lambda)$ durch die Hilfsfunktion $H_h(\lambda)$ und erhalten

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_h * \Phi)_k &= \sum_{l \in G_*} \frac{\Phi(l)}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{-2\pi i(k-l) \cdot \lambda} (\tilde{\mathbf{I}}(\lambda) - hG(\lambda)) d\lambda \\ &= \Phi(k) - h \sum_{l \in G_*} \mathcal{G}_{k-l} \Phi(l). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Matrixdarstellung des Faltungsoperators (3.11) lautet

$$E - h\mathcal{G}_{\text{MAT}}, \quad (3.12)$$

wobei \mathcal{G}_{MAT} die entsprechende Toeplitz-Matrix und E die Einheitsmatrix mit Größe ν_* ist. Für die Konstruktion der Matrix \mathcal{G}_{MAT} sei auf Kapitel 1 verwiesen. Um die Determinante der Matrix $E - h\mathcal{G}_{\text{MAT}}$ berechnen zu können, greifen wir erneut auf den Trick zurück, das Problem mithilfe der Newton-Mercator Entwicklung umzuschreiben. Es gilt vollkommen analog zu Kapitel 2, dass

$$\ln \det(E - h\mathcal{G}_{\text{MAT}}) = \text{Tr} \ln(E - h\mathcal{G}_{\text{MAT}}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} \text{Tr} \mathcal{G}_{\text{MAT}}^n. \quad (3.13)$$

ist. Im Folgenden geht es um die Berechnung und Abschätzung der Spur der n -ten Potenz der Toeplitz-Matrix \mathcal{G}_{MAT} . Hierzu benötigen wir die Menge

$$q = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in (L^{-1}\mathbb{Z}^m)^n, \quad (3.14)$$

sowie die Funktion $H(q) : (L^{-1}\mathbb{Z}^m)^n \rightarrow \mathbb{C}$ die definiert ist als

$$H(q) = \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_n-k_1}. \quad (3.15)$$

Zusätzlich benötigen wir die Teilmenge

$$U_T = \{G_* \times (L^{-1}\mathbb{Z}^m)^{n-1}\} \setminus (G_*)^n \subset (L^{-1}\mathbb{Z}^m)^n, \quad (3.16)$$

sowie die Reihe

$$B_n(T) = \sum_{q \in U_T} H(q). \quad (3.17)$$

Als Nächstes zeigen wir, dass für die Spur der n -ten Potenz der Toeplitz-Matrix \mathcal{G}_{MAT}

$$\underbrace{\text{Tr } \mathcal{G}_{\text{MAT}}^n}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} |G(\lambda)|^n d\lambda}_{\in \mathbb{R}} - B_n(T) \quad (3.18)$$

gilt. Aus (3.18) folgt, dass der Imaginärteil von $B_n(T) = 0$ ist, da die Diagonalelemente von hermiteschen Matrizen reell sind. Für den Beweis verwenden wir wie in Kapitel 2 die Formel für Matrizenmultiplikation.

Beweis. Sei $\mathbb{1}_G(k)$ die Indikatorfunktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Tr } \mathcal{G}_{\text{MAT}}^n &= \sum_{k_1 \in G_*} \sum_{k_2, \dots, k_n \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_n-k_1} \mathbb{1}_{G_*}(k_2) \dots \mathbb{1}_{G_*}(k_n) \\ &= \sum_{k_1 \in G_*} \sum_{k_2, \dots, k_n \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \mathcal{G}_{k_2} \mathcal{G}_{k_3} \dots \mathcal{G}_{k_{n-1}} \mathcal{G}_{k_2-k_3-\dots-k_n} (1 - \mathbb{1}_{L^{-1}\mathbb{Z}^m \setminus G_*}(k_2)) \times \dots \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{L^{-1}\mathbb{Z}^m \setminus G_*}(k_n)) \\ &= \nu_* \underbrace{\sum_{k_2, \dots, k_n \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \mathcal{G}_{k_2} \mathcal{G}_{k_3} \dots \mathcal{G}_{k_{n-1}} \mathcal{G}_{k_2-k_3-\dots-k_n}}_{\text{Faltungstheorem anwenden}} - B_n(T) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Im zweiten Schritt haben wir einen Variablentausch durchgeführt, sowie die Rechenregel

$$\mathbb{1}_G(k) + \mathbb{1}_{G^c}(k) = 1 \quad (3.20)$$

verwendet. □

Um das Grenzverhalten bestimmen zu können, müssen wir

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} \text{Tr } \mathcal{G}_{\text{MAT}}^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} \left[\frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} |G(\lambda)|^n d\lambda - B_n(T) \right] \quad (3.21)$$

für $T \rightarrow \infty$ berechnen und die Frage klären, ob die Reihe konvergiert. Für den ersten Term gilt

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} |G(\lambda)|^n d\lambda \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} |G(\lambda)|^n d\lambda \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} \ln(1 - hG(\lambda)) d\lambda \\ =_{(\text{für } h=1)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\nu_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} \ln H(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nach dem Satz von Fubini-Tonelli dürfen Reihe und Integral miteinander vertauscht werden. Des Weiteren konvergiert die Newton-Mercator Reihe, da nach Voraussetzung für $h = 1$, die Abschätzung $|hG(\lambda)| < 1$ gilt. Damit ist der erste Term gezeigt. Für das Grenzverhalten der Reihe $B_n(T)$ gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{B_n(T)}{T^{m-1}} = \frac{L^m}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n}{r(n-r)} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma G^{*r} G^{*n-r}(k) + o(1), m \quad (3.23)$$

wobei

$$G^{*r} G^{*n-r}(k) = \left(\frac{1}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{-2\pi i k \cdot \lambda} (G(\lambda))^r d\lambda \right) \underbrace{\left(\frac{1}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} e^{2\pi i k \cdot \lambda} (G(\lambda))^{n-r} d\lambda \right)}_{\mathcal{G}_k^{*n-r}} \quad (3.24)$$

ist. Einsetzen in die Newton-Mercator Reihe liefert den zweiten Term des starken Grenzwertsatzes:

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} \frac{L^m T^{m-1}}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n}{r(n-r)} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma G^{*r} G^{*n-r}(k) \\ = -\frac{L^m T^{m-1}}{2} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r(n-r)} \frac{h^n}{n} G^{*r} G^{*n-r}(k) \\ = \frac{L^m T^{m-1}}{2} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma |\widehat{\ln H(k)}|^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Der letzte Schritt folgt, wie in Kapitel 2 aus der Darstellung von $\ln(1 - hx) \ln(1 - hy)$ als Cauchy-Produkt. Bei der Berechnung haben wir die Vertauschung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} = \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \sum_{n=1}^{\infty} \quad (3.26)$$

durchgeföhrt. Diese Umformung dürfen wir nach dem Satz von Fubini-Tonelli durchföhren. Des Weiteren haben wir angenommen, dass die Reihe

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r(n-r)} \frac{h^n}{n} G^{*r} G^{*n-r}(k) \quad (3.27)$$

konvergiert. Im Folgenden werden wir zeigen, dass (3.27) konvergiert und den Term (3.23) herleiten.

Für die Berechnung der Reihe $B_n(T)$ benötigen wir die Abbildung

$$\gamma_{T,r}(l) = \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_*} \underbrace{\mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r-l} \mathcal{G}_{l-k_1}^{*n-r}}_{H_n(l, k_1, \dots, k_r)} \quad (l \in \mathbb{R}^m, 1 \leq r \leq n-1). \quad (3.28)$$

Das entscheidende an der Abbildung $\gamma_{T,r}(l)$ ist, dass wenn man die Reihe

$$B_{n,r}(T) = \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \setminus G_*} \gamma_{T,r}(l) \quad (3.29)$$

bildet und anschließend über r summiert man wieder die Reihe $B_n(T)$ erhält. Konkret gilt

$$B_n(T) = \sum_{r=1}^{n-1} B_{n,r}(T) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \setminus G_*} \gamma_{T,r}(l), \quad (3.30)$$

da für $r = 1, \dots, n-1$ die Mengen

$$\{(G_*)^r \times (L^{-1}\mathbb{Z}^m \setminus G_*) \times (L^{-1}\mathbb{Z}^m)^{n-r-1}\} \quad (3.31)$$

eine Partition von der Menge

$$U_T = \{G_* \times (L^{-1}\mathbb{Z}^m)^{n-1}\} \setminus (G_*)^n \quad (3.32)$$

bilden. Für $\Delta > 0$ sei G^Δ diejenige Menge an Punkten im \mathbb{R}^m deren euklidischer Abstand^a zum Gebiet G kleiner als Δ ist. Mit G_T^Δ bezeichnen wir die Menge

$$\{Tx : x \in G^\Delta\}. \quad (3.33)$$

Damit können wir die Differenzmenge $L^{-1}\mathbb{Z}^m \setminus G_*$ in die beiden Mengen

$$L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T) \quad \text{und} \quad L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta) \quad (3.34)$$

^a $\inf\{\|l - x\|_2 : x \in G_T\}$

zerlegen. Damit erhalten wir für $B_{n,r}(T)$ die Darstellung

$$B_{n,r}(T) = \underbrace{\sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} \gamma_{T,r}(l)}_{A_r(T)} + \underbrace{\sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta)} \gamma_{T,r}(l)}_{C_r(T)}. \quad (3.35)$$

Als Nächstes zerlegen wir die Reihe $A_r(T)$ noch weiter. Sei hierzu $\rho(l)$ der euklidische Abstand von einem Punkt $l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m$ zum Gebiet G_T . Damit können wir die Menge $L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)$ in Schichten $x \leq \rho(l) < x+1$ für $x = 0, 1, 2, \dots$ zerlegen. Ganz konkret erhalten wir so die Reihe

$$A_r(T) = \sum_{x=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} \gamma_{T,r}(l) \mathbb{1}_{x \leq \rho(l) < x+1}}_{A_{r,x}(T)}. \quad (3.36)$$

Insgesamt haben wir $B_n(T)$, wie folgt zerlegt

$$B_n(T) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} A_{r,x}(T) + \sum_{r=1}^{n-1} C_r(T). \quad (3.37)$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{B_n(T)}{T^{m-1}} = \underbrace{\sum_{r=1}^{n-1} \frac{L^m}{2} \frac{n}{r(n-r)} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d\sigma G^{*r} G^{*n-r}(k)}_{A_r(T)} + \underbrace{o(1)}_{C_r(T)} \quad (3.38)$$

gilt. Um das beweisen zu können, benötigen wir zunächst einmal einige Abschätzungen. Als Hilfsmittel, um die Abschätzungen durchführen zu können, benötigen wir die Funktion

$$G_j(l, \xi) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{2\pi i l \lambda_j} G(\lambda) d\lambda_j \quad \left(\xi \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]^{m-1}, 1 \leq j \leq m, l \in L^{-1}\mathbb{Z} \right). \quad (3.39)$$

Unter Berücksichtigung der Funktion $G_j(l, \xi)$ zeigen wir als nächstes, dass

$$\frac{1}{L^{m-1}} \sum_{j=1}^m \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^{m-1}} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}} |l| |G_j(l, \xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \sum_{j=1}^m |k_j| |\mathcal{G}_k|^2. \quad (3.40)$$

ist. Man beachte, dass aufgrund der Summierbarkeitsbedingungen beide Seiten endlich sind.

Beweis. Der Übersichtlichkeit halber zeigen wir nur den Fall $m = 2$. Der allgemeine Fall folgt analog.

Im Speziellen wir wollen zeigen, dass

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}} |l| \left| \frac{1}{L} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} e^{2\pi i l \lambda_1} G(\lambda) d\lambda_1 \right|^2 d\lambda_2 \\
& + \frac{1}{L} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}} |l| \left| \frac{1}{L} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} e^{2\pi i l \lambda_1} G(\lambda) d\lambda_2 \right|^2 d\lambda_1 \\
& = \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} (|k_1| + |k_2|) \left| \frac{1}{L^2} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^2} e^{i(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)} G(\lambda) d\lambda \right|^2
\end{aligned} \tag{3.41}$$

gilt. Wir schreiben die Funktion $G(\lambda_1, \lambda_2) : [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^2 \rightarrow (0, \infty)$ als Fourier-Reihe

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{(m,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} c_{m,n} e^{2\pi i(m\lambda_1 + n\lambda_2)} \tag{3.42}$$

mit Koeffizienten $c_{m,n} \in \mathbb{C}$. Wir werden zeigen, dass die linke Seite gleich dem Ausdruck

$$\sum_{(l,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} |l| (|c_{l,n}|^2 + |c_{n,l}|^2) \tag{3.43}$$

und die rechte Seite gleich dem Ausdruck

$$\sum_{(k_1, k_2) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} (|k_1| + |k_2|) |c_{k_1, k_2}|^2 \tag{3.44}$$

ist. Man kann leicht überprüfen, dass die beiden Ausdrücke übereinstimmen, woraus die Behauptung folgen würde. Wir müssen also nur noch die beiden Ausdrücke (3.43) und (3.44) zeigen. Sei hierzu

$$\begin{aligned}
I_l &:= \frac{1}{L} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} e^{2\pi i l \lambda_1} G(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 = \frac{1}{L} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} e^{2\pi i l \lambda_1} \sum_{(m,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} c_{m,n} e^{2\pi i(m\lambda_1 + n\lambda_2)} d\lambda_1 \\
&= \sum_{(m,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} c_{m,n} e^{2\pi i n \lambda_2} \mathbb{1}(m=l) = \sum_{n \in L^{-1}\mathbb{Z}} c_{l,n} e^{2\pi i n \lambda_2}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

und

$$|I_l|^2 = I_l \bar{I}_l = \sum_{(m,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} c_{l,m} \bar{c}_{l,n} e^{i(m-n)\lambda_2}. \tag{3.46}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{L} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} |I_l|^2 d\lambda_2 = \sum_{(m,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} c_{l,m} \bar{c}_{l,n} \mathbb{1}(m=n) = \sum_{n \in L^{-1}\mathbb{Z}} |c_{l,n}|^2. \tag{3.47}$$

Damit ist der erste Summand gleich

$$\sum_{(l,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} |l| |c_{l,n}|^2. \tag{3.48}$$

Vollkommen analog kann man zeigen, dass der zweite Summand gleich

$$\sum_{(l,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} |l| |c_{n,l}|^2 \quad (3.49)$$

ist. Damit ist der erste Ausdruck gezeigt. Für den zweiten Ausdruck gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L^2} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^2} e^{i(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)} F(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{L^2} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^2} e^{i(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)} \sum_{(m,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} c_{m,n} e^{i(m\lambda_1 + n\lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \sum_{(m,n) \in L^{-1}\mathbb{Z}^2} c_{m,n} \mathbb{1}(m = k_1, n = k_2) = c_{k_1, k_2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Womit auch die zweite Identität gezeigt ist und der Beweis ist beendet. \square

Als Nächstes benötigen wir das $L^2([-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}])$ Stetigkeitsmodul

$$\omega_j(\delta; \xi, G) = \sup_{|t| \leq \delta} \sqrt{\int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} |G(\lambda_j + t; \xi) - G(\lambda_j; \xi)|^2 d\lambda_j} \quad (3.51)$$

der Funktion $G(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ als Funktion in λ_j mit festem $\xi = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m)$. Man beachte, dass das Stetigkeitsmodul $\omega_j(\delta; \xi, G)$ für $\delta \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Des Weiteren benötigen wir die Funktion

$$\omega^2(\delta, G) = \sum_{j=1}^m \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^{m-1}} \omega_j^2(\delta, \xi; G) d\xi. \quad (3.52)$$

Damit gelten für $x \in L^{-1}\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die beiden Abschätzungen

$$\sum_{\substack{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: \\ |k_1| + \dots + |k_m| > mx}} |\mathcal{G}_k|^2 \leq C_1 \omega^2\left(\frac{1}{x+1}, G\right) \quad (3.53)$$

und

$$C_2 \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \sum_{j=1}^m |k_j| |\mathcal{G}_k|^2 < \sum_{x=1}^{\infty} \omega^2\left(\frac{1}{x}, G\right) < C_3 \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \sum_{j=1}^m |k_j| |\mathcal{G}_k|^2 \quad (3.54)$$

wobei C_1 , C_2 und C_3 absolute Konstanten sind.

Beweis. Nach Satz 1 aus dem Forschungspapier [15] von Geronimus gilt

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} |k| |\mathcal{G}_k|^2 < \infty \iff 2 \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}} \omega^2\left(\frac{1}{k}, G\right) < \infty. \quad (3.55)$$

Für die erste Abschätzung verwenden wir die Identität

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: |k_j| > x} |\mathcal{G}_k|^2 = \frac{1}{L^{m-1}} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^{m-1}} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}: |l| > x} |G_j(l, \xi)|^2. \quad (3.56)$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{\substack{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: \\ |k_1| + \dots + |k_m| > mx}} |\mathcal{G}_k|^2 < \sum_{j=1}^m \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: |k_j| > x} |\mathcal{G}_k|^2 \quad (3.57)$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{1}{L^{m-1}} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^{m-1}} \sum_{|l| > x} |G_j(l, \xi)|^2 \quad (3.58)$$

$$< C_1 \sum_{j=1}^m \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^{m-1}} \omega_j^2 \left(\frac{1}{x+1}, \xi; G \right) = C_1 \omega^2 \left(\frac{1}{x+1}, G \right) \quad (3.59)$$

ist. Die zweite Abschätzung folgt unmittelbar aus der zuvor bewiesenen Identität

$$\frac{1}{L^{m-1}} \sum_{j=1}^m \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^{m-1}} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}} |l| |G_j(l, \xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \sum_{j=1}^m |k_j| |\mathcal{G}_k|^2 \quad (3.60)$$

in Kombination mit (3.55). \square

Nachdem wir die erforderlichen Hilfsmittel gezeigt haben kommen wir jetzt zu den eigentlichen Abschätzungen. Im Folgenden sind Q_i und $a(i)$ für $i = 0, 1, \dots$ positive Konstanten die nur vom Gebiet G, Δ und der Hilfsfunktion $G(\lambda)$ abhängen. Mit Hilfe von Lemma 2 können wir jetzt die Ausdrücke $C_r(T)$, $A_{r,x}(T)$ und damit auch $B_n(T)$ abschätzen.

Lemma 2. *Es sei $n \geq 2$ und*

$$B_n(T) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} A_{r,x}(T) + \sum_{r=1}^{n-1} C_r(T). \quad (3.61)$$

Für den Term $C_r(T)$ gilt zum einen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_r(T)}{T^{m-1}} = 0 \quad \implies C_r(T) \in o(T^{m-1}) \quad (3.62)$$

und zum anderen

$$|C_r(T)| < Q_1 \|G(\lambda)\|_{\infty}^n n T^{m-1} L^m. \quad (3.63)$$

Für den Term $A_{r,x}(T)$ gilt die Abschätzung

$$|A_{r,x}(T)| < a(x)n \|G(\lambda)\|_{\infty}^{n-1} T^{m-1} L^m, \quad \text{wobei} \quad \sum_{x=0}^{\infty} a(x) < \infty. \quad (3.64)$$

ist. Ferner ist $B_n(T)$ nach oben beschränkt. Es gilt

$$|B_n(T)| < Q_7 \|G(\lambda)\|_\infty^n n^2 T^{m-1} L^m. \quad (3.65)$$

Beweis. Für die erste Abschätzung wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf den Term $\gamma_{T,r}(l)$ bezüglich der Variablen k_1 an und schätzt mithilfe des Faltungstheorems ab. Bei der zweiten Ungleichung verwendet man immer wieder Cauchy-Schwarz-Ungleichung, aber dieses mal bezüglich l .

$$\begin{aligned}
|C_r(T)| &= \left| \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta)} \underbrace{\sum_{k_1, \dots, k_r \in G_*} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r-l} \mathcal{G}_{l-k_1}^{*n-r}}_{\gamma_{T,r}(l)} \right| \\
&\leq \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta)} \sqrt{\sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}|^2} \sqrt{\sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}^{*n-r}|^2} \\
&\leq \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} \sqrt{\sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta)} \left| \sqrt{\sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}|^2} \right|^2} \sqrt{\sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta)} \left| \sqrt{\sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}^{*n-r}|^2} \right|^2} \\
&\leq \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} \sqrt{\sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta)} \sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}|^2} \sqrt{\sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (\mathbb{R}^m \setminus G_T^\Delta)} \sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}^{*n-r}|^2} \\
&\leq \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} \nu_* \sqrt{\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: |k^1|+\dots+|k^m|>\Delta T} |\mathcal{G}_k|^2} \sqrt{\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: |k^1|+\dots+|k^m|>\Delta T} |\mathcal{G}_k^{*n-r}|^2} \\
&\leq \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} Q_2 T^{m-1} L^m \sqrt{|T|^2 \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: |k^1|+\dots+|k^m|>\Delta T} |S(k)|^2 \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: |k^1|+\dots+|k^m|>\Delta T} |S^{*n-r}(k)|^2} \\
&\leq \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} Q_2 T^{m-1} L^m \sqrt{\underbrace{\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m: |k^1|+\dots+|k^m|>\Delta T} |k| |S(k)|^2}_{0 \text{ für } T \rightarrow \infty} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} |k| |S^{*n-r}(k)|^2}
\end{aligned} \quad (3.66)$$

Teilt man beide Seite in (3.66) durch T^{m-1} und führt den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ durch, so folgt die erste Behauptung. Für die Abschätzung (3.63) nutzt man für den ersten Term unter der Wurzel die Voraussetzung, dass

$$\sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} |k| |\mathcal{G}_k|^2 < \infty. \quad (3.67)$$

ist und für den zweiten Term die Abschätzung (3.54). Da die Abschätzung von $A_{r,x}$ nahezu analog

erfolgt fassen wir uns kürzer.

$$\begin{aligned}
|A_{r,x}(T)| &= \left| \sum_{l \in L^{-1} \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_*} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r-l} \mathcal{G}_{l-k_1}^{*n-l} \mathbb{1}_{x \leq \rho(l) < x+1}(l) \right| \\
&\leq \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} \sum_{l \in L^{-1} \mathbb{Z} \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} \sqrt{\sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}|^2} \sqrt{\sum_{k \in G_*} |\mathcal{G}_{l-k}^{*n-r}|^2} \mathbb{1}_{x \leq \rho(l) < x+1}(l) \\
&< Q_3 \|G(\lambda)\|_\infty^{r-1} T^{m-1} L^m \sqrt{\sum_{k \in L^{-1} \mathbb{Z}^m: |k^1| + \dots + |k^m| \geq x} |\mathcal{G}_k|^2 \sum_{k \in L^{-1} \mathbb{Z}^m: |k^1| + \dots + |k^m| \geq x} |\mathcal{G}_k^{*n-r}|^2}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Wendet man die Abschätzungen (3.53) und (3.54) an, so erhält man

$$|A_{r,x}(T)| \leq Q_4 n \|G(\lambda)\|_\infty^n T^{m-1} L^m \underbrace{\omega^2 \left(\left(\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + 1 \right)^{-1}, G \right)}_{a(x)}, \tag{3.69}$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion ist. Damit können wir jetzt $|B_n(T)|$ abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
|B_n(T)| &= \left| \sum_{r=1}^{n-1} A_r(T) + \sum_{r=1}^{n-1} C_r(T) \right| \\
&= \left| \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} A_{r,x}(T) \right| + \left| \sum_{r=1}^{n-1} C_r(T) \right| \\
&\leq \underbrace{\left| \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} a(x) n M^{n-1} T^{m-1} L^m \right|}_{Q_5 < \infty} + \left| \sum_{r=1}^{n-1} n Q_1 \|G(\lambda)\|_\infty^n T^{m-1} L^m \right| \\
&< (n-1) n Q_5 L^m T^{m-1} \|G(\lambda)\|_\infty^{n-1} + (n-1) Q_1 n T^{m-1} L^m \|G(\lambda)\|_\infty^n \\
&< n^2 Q_7 L^m T^{m-1} \|G(\lambda)\|_\infty^n.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Die Reihe $\sum_{x=0}^{\infty} a(x)$ ist endlich aufgrund der Abschätzung (3.54) und der zweiten Summierbarkeitsbedingung. \square

Bevor wir zum nächsten Thema kommen, merken wir noch kurz an, dass aus (3.62) der Term $o(T^{m-1})$ im Grenzwertsatz folgt. Als Nächstes geht es um die Berechnung der Reihe $B_n(T)$. Sei hierzu $d \in \mathbb{N}$ und $\Delta > 0$ und

$$a_{d,r}(T) = \frac{1}{L^m T^{m-1}} \underbrace{\sum_{x=0}^{d-1} \sum_{l \in L^{-1} \mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_*} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{l-k_1}^{*n-r} \mathbb{1}_{x \leq \rho(l) < x+1}}_{A_{r,x}(T)}. \tag{3.71}$$

Wir betrachten zunächst einmal die Reihe

$$\frac{1}{L^m T^{m-1}} \sum_{x=0}^{d-1} \sum_{l \in L^{-1} \mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} g(l) \mathbb{1}_{x \leq \rho(l) < x+1} \quad (3.72)$$

mit einer nicht näher spezifizierten Funktion $g(l) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ genauer. Man sieht, dass für $T\Delta > d$ über diejenigen Funktionswerte $g(l)$ summiert wird, bei denen der Index l in einer Schale der Menge G_T mit Dicke d liegt. Bemerkenswert ist, dass die Anzahl der Elemente in dieser Schale mit dem Faktor $T^{m-1}L^m$ skaliert. Verschiebt man nun in „sinnvollerweise“ Art und Weise die Punkte aus der Schale um G_T in die Schale mit gleicher Dicke um das Gebiet G und passt die Funktion $g(l)$ entsprechend an, so lässt sich die Reihe aus (3.72) für $T \rightarrow \infty$ als Integral darstellen. Dieses Vorgehen könnte man auch als Quasi-Monte Carlo Integration bezeichnen. Wie all das zuvor erwähnte im Detail funktioniert, klären wir als Nächstes.

Zur Erinnerung $n(\sigma)$ ist der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor. Wir ordnen nun jedem Punkt y aus der Schale $G_T^\Delta \setminus G_T$ das durch die Gleichung

$$\sigma + un(\sigma) = y \quad (3.73)$$

bestimmte Tupel $(u, \sigma) \in (\mathbb{R}_+, \partial G_T)$ zu. Wir wählen im folgenden $\Delta > 0$ so, sodass zu jedem Punkt $y \in G_T^\Delta \setminus G_T$ genau ein Tupel existiert. Ferner benötigen wir die Mehrfachreihe

$$\begin{aligned} \gamma_{T,r}(u, T\omega) &= \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_* - T\sigma - un(\sigma)} \underbrace{\mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r}}_{H_n(0, k_1, \dots, k_r)} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_*} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r-T\sigma-un(\sigma)} \mathcal{G}_{T\sigma+un(\sigma)-k_1}^{*n-r}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Auf den Grund für die Verschiebung des Gebiets $G_* - T\sigma - un(\sigma)$ kommen wir zu einem späteren Zeitpunkt zu sprechen. Des Weiteren bezeichnen wir mit μ_T dasjenige Maß, welches jedem Punkt $y = (u, \omega)$ aus der Menge $(G^\Delta \setminus G) \subset \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft das $T\omega + un(\omega)$ in der Schnittmenge $L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap G_T^\Delta \setminus G_T$ liegt, das Gewicht $(L^m T^{m-1})^{-1}$ zuordnet. Alle anderen Elemente erhalten das Gewicht null. Damit gilt für $T\Delta > d$, dass

$$a_{d,r}(T) = \frac{1}{L^m T^{m-1}} \sum_{x=0}^{d-1} A_{r,x}(T) = \int_{[0,d] \times \partial G} \gamma_{T,r}(u, T\omega) d\mu_T \quad (3.75)$$

ist. Als Nächstes zeigen wir, dass für $T \rightarrow \infty$ das Maß μ_T auf der Menge $X = [0, d] \times \partial G$ schwach gegen das Produktmaß

$$\mu([0, d] \times \partial G) = \lambda([0, d]) \mathbb{H}(\partial G) \quad (3.76)$$

konvergiert, wobei λ das Lebesgue-Maß und \mathbb{H} das kanonische Oberflächenmaß ist. Um den Beweis führen zu können, benötigen wir zunächst noch einige Definitionen.

Für eine reelle Zahl x , sei $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ der ganzzahlige Teil. Des Weiteren ist $\text{frac}(x) = x - [x]$ der Nachkommaanteil von x . Sei $\omega = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Für

eine positive Zahl N und eine Teilmenge E vom Intervall $I = [0, 1)$, sei die Zählfunktion $A(E; N; \omega)$ definiert, als die Anzahl der Folgenglieder $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$ die in der Teilmenge E liegen. In mathematischer Schreibweise:

$$A(E; N; \omega) = \text{card}\{1 \leq n \leq N : \text{frac}(x) \in E\}. \quad (3.77)$$

Damit können wir die Gleichverteilung modulo 1 einer reellen Zahlenfolge definieren.

Definition 1. Die Folge $\omega = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt gleichverteilt modulo 1, falls für jedes Paar a, b von reellen Zahlen mit $0 \leq a < b \leq 1$ gilt, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} = b - a \quad (3.78)$$

ist.

In anderen Worten ausgedrückt die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt gleichverteilt modulo 1, wenn für jedes Intervall $[a, b] \subset [0, 1]$ die relative Anzahl der Folgenglieder in diesem Intervall gegen die Länge des Intervalls strebt. Eine häufig verwendete Beweistechnik, die Gleichverteilung modulo 1 einer Folge zu überprüfen, stellt das Weyl-Kriterium dar.

Satz 5. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichverteilt modulo 1 genau dann, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = 0 \quad \forall h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.79)$$

gilt.

Als letztes Hilfsmittel benötigen wir noch die Abschätzung.

Lemma 3. Es seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$, und f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit $f''(x) \geq C > 0$ für $x \in [a, b]$. Dann existiert eine positive Konstante $M_L > 0$ in Abhängigkeit von L , sodass

$$\left| \sum_{n \in [a, b] \cap L^{-1}\mathbb{Z}} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq (|f'(b) - f'(a)|) \frac{M_L}{\sqrt{C}} \quad (3.80)$$

ist.

Den Beweis von Satz 5 und Lemma 3, sowie viele weitere Informationen zum Thema Gleichverteilung modulo 1 finden sich Lehrbuch [16] von Kuipers und Niederreiter. Ausgestattet mit diesen Hilfsmitteln, können wir jetzt das folgende Lemma beweisen.

Lemma 4. Seien a_i und b_i reelle Zahlen mit $a_i < b_i$ für $i = 1, 2, \dots, r$. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\psi(t_1, \dots, t_r) \in C^2((a_1, b_1) \times \dots \times (a_r, b_r)) \quad (3.81)$$

mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial^2 \psi}{\psi t_i^2} \geq C > 0. \quad (3.82)$$

für $i = 1, 2, \dots, r$. Des Weiteren ist

$$\xi = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i). \quad (3.83)$$

Sei nun P_T ein Maß auf dem Intervall $[0, 1]$ bestehend aus Atomen mit Gewicht $(LT)^{-r}$ an den Punkten

$$\text{frac}(T\psi(l_1/T, \dots, l_r/T))_{l_1 \in (Ta_1, Tb_1) \cap L^{-1}\mathbb{Z}^r} \dots l_r \in (Ta_r, Tb_r) \cap L^{-1}\mathbb{Z}^r \quad (3.84)$$

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert für $T \rightarrow \infty$ das Maß $\frac{1}{\xi} P_T$ schwach gegen das Lebesgue-Maß auf dem Intervall $[0, 1]$.

Die Quintessenz von Lemma 4 ist, dass wenn man die Funktion $\psi(t_1, \dots, t_r)$ in den Punkten

$$(Ta_1, Tb_1) \times \dots \times (Ta_r, Tb_r) \cap L^{-1}\mathbb{Z}^r \quad (3.85)$$

auswertet, der Nachkommaanteil der Funktionswerte für $T \rightarrow \infty$ gleichverteilt modulo 1 ist.

Beweis. Wir setzen l_2, \dots, l_r auf beliebige Werte in $L^{-1}\mathbb{Z}^r$ und betrachten das Intervall

$$K = (Ta_1, Tb_1) \times l_2 \times \dots \times l_r \subset \mathbb{R}^r. \quad (3.86)$$

Wir bezeichnen mit $\#K$ die Kardinalität der Menge $K \cap L^{-1}\mathbb{Z}^r$. Um das Weyl-Kriterium anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\#K} \sum_{n \in K \cap L^{-1}\mathbb{Z}^r} e^{2\pi i h T \psi(T^{-1}n)} = 0 \quad \text{für alle } h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.87)$$

ist. Es gilt

$$\frac{\partial T\psi(T^{-1}t_1, l_2, \dots, l_r)}{\partial t_1} = \psi'(T^{-1}t_1, l_2, \dots, l_r) \quad (3.88)$$

und

$$\frac{\partial^2 T\psi(T^{-1}t_1, l_2, \dots, l_r)}{\partial t_1^2} = T^{-1}\psi''(T^{-1}t_1, l_2, \dots, l_r) \geq T^{-1}C. \quad (3.89)$$

Anwenden von Lemma 4 liefert die Gleichverteilung modulo 1, da

$$\sum_{n \in K \cap L^{-1}\mathbb{Z}^r} e^{2\pi i h T \psi(T^{-1}n)} \leq |\psi'(b_1) - \psi'(a_1)| \frac{hM_L}{C} \sqrt{T} \quad (3.90)$$

ist und die Differenz der ersten Ableitungen ausgewertet an den Randpunkten a und b beschränkt ist.

Da l_2, \dots, l_r beliebig gewählt waren, und die Anzahl der Elemente in der Menge

$$(Ta_1, Tb_1) \times \dots \times (Ta_r, Tb_r) \cap L^{-1}\mathbb{Z}^r \quad (3.91)$$

von der Größenordnung $\xi T^r L^r$ ist, folgt die Behauptung. \square

Mithilfe von Lemma 4 können wir jetzt den folgenden Satz beweisen.

Satz 6. Für $T \rightarrow \infty$ konvergiert das Maß μ_T auf der Menge $X = [0, d] \times \partial G$ schwach gegen das Produktmaß

$$\mu([0, d] \times \partial G) = \lambda([0, d])\mathbb{H}(\partial G), \quad (3.92)$$

wobei λ das Lebesgue-Maß und \mathbb{H} das kanonische Oberflächenmaß ist.

Beweis. Wir bezeichnen mit e_1, \dots, e_m die m Standardbasisvektoren des \mathbb{R}^m . Zu jedem Basisvektor e_j mit $j = 1, \dots, m$, gibt es eine eindeutig bestimmte Hyperebene $V_j \subset \mathbb{R}^m$, für die

$$\sum_{i=1}^m e_j^i x^i = 0 \quad \forall x \in V_j \quad (3.93)$$

gilt. Jede ausreichend kleine, sowie offene Teilmenge K vom Rand ∂G kann durch den Graphen einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\psi : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$, wobei γ eine Teilmenge der Hyperebene V_j ist, dargestellt werden. Wir fixieren nun eine solche Teilmenge K . Damit einhergehen ein Basisvektor e_j , eine Teilmenge γ , sowie eine Funktion ψ für die $\psi(\gamma) = K$ gilt.

Im Folgenden benötigen wir neben einem offenen $(m-1)$ -dimensionalen Parallelotop $\Pi \subset \gamma$ mit Kanten parallel zu den Basisvektoren e_1, \dots, e_m , noch die Funktion

$$t(n(\sigma), e_j) = \frac{n(\sigma^j)}{\sqrt{(n(\sigma^1))^2 + \dots + (n(\sigma^m))^2}}. \quad (3.94)$$

Als Nächstes bestimmen wir $t(\sigma, e_j)$ für alle $\sigma \in K$. Falls $t(\sigma) > 0$ für alle $\sigma \in K$ ist tun wir nichts weiter, falls $t(\sigma) < 0$ tauschen wir einfach das Vorzeichen vom Basisvektor e_j . Bei gemischten Vorzeichen spalten wir die Menge K entsprechend auf. Des Weiteren setzen wir $\eta = \max_{\sigma \in K} t(\sigma)$ und wählen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $0 < a < b < d\eta^{-1}$ gilt. Damit können wir jetzt die Teilmenge $H_T \subset \mathbb{R}^m$ definieren:

$$H_T = \left\{ p + \left(T\psi\left(\frac{p}{T}\right) + sq \right) e_j \mid p \in T\Pi; a < q < b \right\} \quad (s \in \{-1, 1\}) \quad (3.95)$$

Die Interpretation der Menge H_T ist, dass die Funktion ψ zunächst gestreckt und anschließend um den Faktor T vergrößert wird. Zusätzlich erhält die Funktion $T\psi(\frac{p}{T})$ einen Rand mit Dicke $b-a$. Wir wählen $s \in \{-1, 1\}$, sodass für genügend großes T die Teilmengenbeziehung $H_T \subset G_T^\Delta \setminus G_T$ gilt. Aus Lemma 4 folgt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{L^m T^{m-1}} \text{card}(H_T \cap L^{-1}\mathbb{Z}^m) = \text{vol}(\xi)(b-a), \quad (3.96)$$

wobei $\text{vol}(\xi)$ das $(m-1)$ -dimensionale Lebesgue-Maß vom Parallelotop Π ist. In anderen Worten $\text{vol}(\xi)$ ist das Produkt der Kantenlängen. Bei der Berechnung haben wir verwendet, dass der Nachkommaan-

teil der Funktionswerte von ψ gleichverteilt modulo 1 ist. Folglich sind für großes T und $x \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap T\Pi$ im Intervall

$$[\psi(x), \psi(x) + (b - a)] \quad (3.97)$$

„durchschnittlich“ $L(b - a)$ Werte aus der Menge $L^{-1}\mathbb{Z}$ enthalten.

Als Nächstes benötigen wir die Funktion $W : G_T^\Delta \setminus G_T \rightarrow [0, \infty) \times \partial G$ mit Abbildungsvorschrift

$$W(y) = \left(u, \frac{\omega}{T}\right). \quad (3.98)$$

Daraus folgt in Kombination mit (3.96), dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(W(H_T)) = \text{vol}(\xi)(b - a) \quad (3.99)$$

ist. Für $T \rightarrow \infty$ konvergiert die Menge $W(H_T) \subset X$ gegen die Menge

$$F = \{(u, \sigma) | \sigma \in \psi(\Pi), at(n(\sigma), e_j) < u < bt(n(\sigma), e_j)\} \subset X. \quad (3.100)$$

Diese Behauptung wird ersichtlich, anhand der folgenden Abbildung.

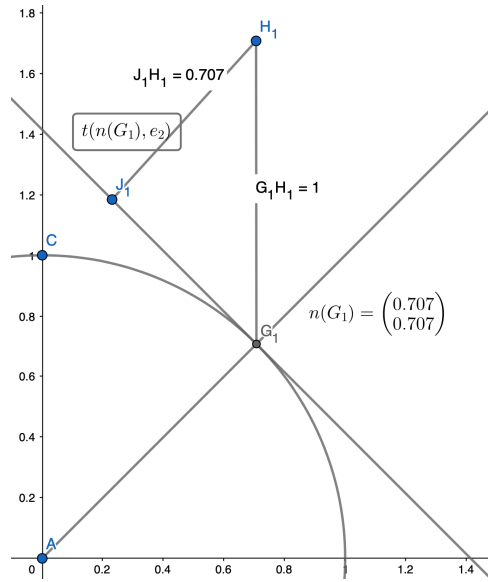


Abbildung 3.1: Abstand von Punkt zur einer Hyperebene

Man sieht, dass der kürzeste Abstand vom Punkt H_1 zur Tangentialhyperebene vom Punkt G_1 gleich $t(n(G_1), e_2)$ ist. Für wachsendes T nähert sich der Kreis zumindest in einer kleinen Umgebung um G_1 immer weiter der Tangentialhyperebene an. Daher konvergiert die Menge $W(H_T)$ gegen die Menge F . Zum Abschluss überlegt man sich noch, dass

$$\mu(F) = \text{vol}(\xi)(b - a) \quad (3.101)$$

ist. Da K, a, b und Π beliebig gewählt waren und (3.99) und (3.101) gleich sind, folgt die Behauptung.

□

Damit haben wir den ersten Teil der Berechnung von

$$a_{d,r}(T) = \frac{1}{L^m T^{m-1}} \underbrace{\sum_{x=0}^{d-1} \sum_{y \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_* - y} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} \mathbb{1}_{x \leq \rho(l) < x+1}}_{A_{r,x}(T)} \quad (3.102)$$

abgeschlossen. Als Nächstes geht es um die Berechnung der Mehrfachreihe

$$\sum_{k_1, \dots, k_r \in G_* - y} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r}. \quad (3.103)$$

Da y ein Element der Menge $L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)$ ist, können wir y das Tupel

$$(u, \omega) \in (\mathbb{R}_+, \partial G_T) \quad (3.104)$$

zuordnen. Man überlegt sich leicht, dass die Verschiebung $G_* - y$ im Halbraum $k \cdot n(\sigma) < -u$ liegt. Zusätzlich existiert zu jedem Element x aus dem Halbraum $k \cdot n(\omega) < -u$ ein $T > 0$, sodass x in der Menge $G_* - y$ enthalten ist. Das ist eine Konsequenz aus der positiven Gaußschen Krümmung vom Gebiet G . Aus diesen Bemerkungen folgt, dass

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_* - \sigma T - u n(\sigma)} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} - \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot n(\sigma) < -u}} \dots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot n(\sigma) < -u}} \underbrace{\mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r}}_{H_n(0, k_1, \dots, k_r)} \right| = 0. \quad (3.105)$$

ist. Im Weiteren wird es darum gehen, eine alternative Darstellung für den Term

$$\sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot n(\sigma) < -u}} \dots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot n(\sigma) < -u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} \quad (3.106)$$

herzuleiten. Hierzu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 5. *Sei $n \geq 2$ und $F(\lambda)$ eine 1-dimensionale Funktion, welche den Voraussetzungen vom starken Grenzwertsatz von Szegö genügt. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z} \setminus L^{-1}\mathbb{N}} \sum_{k_1, \dots, k_r \in L^{-1}\mathbb{N}} \mathcal{F}_{k_1-k_2} \mathcal{F}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{F}_{k_r-l} \mathcal{F}_{l-k_1}^{*n-r} \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{n}{l(n-l)} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (F(\lambda))^l d\lambda \right) \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{2\pi i m \lambda}{L}} (F(\lambda))^{n-l} d\lambda \right). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Beweis. Wir wissen aus Kapitel 2, dass wir die Spur $\text{Tr } T_T(\mathcal{F})^k$ durch

$$\frac{\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_T)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (F(\lambda))^k d\lambda - \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \in L^{-1}\mathbb{Z} \\ j_1 + \dots + j_k = 0}} P(T; j_1, \dots, j_k) \mathcal{F}_{j_1} \dots \mathcal{F}_{j_k} \quad (3.108)$$

ausdrücken können, wobei

$$P(T; j_1, \dots, j_k) = \min(\text{card}(L^{-1}\mathbb{N}_T), R(j_1, \dots, j_k)) \quad (3.109)$$

ist. Zu Beginn dieses Kapitels haben wir Darstellung

$$\text{Tr } \mathcal{G}_{MAT}^n = \frac{v_*}{L^m} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} (G(\lambda))^k d\lambda - \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \setminus G_*} \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_*} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r-l} \mathcal{G}_{l-k_1}^{*n-r} \quad (3.110)$$

bewiesen. Ersetzt man in die Funktion $G(\lambda)$ durch die eindimensionale Funktion $F(\lambda)$ und das Gebiet G_* durch

$$L^{-1}\mathbb{N}_T = [0, T] \cap \underbrace{\{0, 1L^{-1}, 2L^{-1}, 3L^{-1}, \dots\}}_{L^{-1}\mathbb{N}}, \quad (3.111)$$

so erhält man für $T \rightarrow \infty$ den Ausdruck auf der linken Seite von (3.107). Bildet man die Differenz von (3.108) und (3.110) und verwendet anschließend (2.46), so folgt die Behauptung. \square

Damit kommen wir jetzt zum letzten Lemma.

Lemma 6. Sei $1 \leq r \leq n-1$ und τ ein Vektor aus dem \mathbb{R}^m mit $\|\tau\|_2 = 1$. Dann gilt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \text{Re} \int_{-\infty}^0 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot \tau < u}} \dots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot \tau < u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} du \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r(n-r)} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \max\{0, k \cdot \tau\} d\sigma G^{*r} G^{*n-r}(k). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Beweis. Wir beginnen mit $\tau = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Anwenden vom Faltungstheorem ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \text{Re} \int_{-\infty}^0 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot \tau < u}} \dots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot \tau < u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \dots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} du \\ &= \frac{1}{L^{m-1}} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} \frac{2}{n} \text{Re} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z} \setminus L^{-1}\mathbb{N}} \sum_{k_1, \dots, k_r \in L^{-1}\mathbb{N}} \mathcal{G}_1(k_1 - k_2, \xi) \mathcal{G}_1(k_2 - k_3, \xi) \\ & \quad \dots \times \mathcal{G}_1(k_{r-1} - k_r, \xi) \mathcal{G}_1(k_r - l, \xi) \mathcal{G}_1^{*n-r}(l - k_1, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Dabei ist

$$\mathcal{G}_1(l, \xi) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{2\pi i l \lambda_1} G(\lambda) d\lambda_1 \quad \left(\xi \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]^{m-1}; l \in L^{-1}\mathbb{Z} \right). \quad (3.114)$$

Für festes ξ kann man Lemma 5 auf (3.113) anwenden. Man erhält

$$\frac{1}{L^{m-1}} \int_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^m} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r(n-r)} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{N}} k \mathcal{G}_1^{*r}(-k, \xi) \mathcal{G}_1^{*n-r}(k, \xi) d\xi. \quad (3.115)$$

Erneutes anwenden vom Faltungstheorem liefert die Behauptung für $\tau = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Um das Lemma für allgemeines τ beweisen zu können, benötigen wir die Menge Λ . Die Menge Λ enthält alle Vektoren τ aus dem \mathbb{R}^m mit $\|\tau\|_2 = 1$ und der Eigenschaft, dass ein $\alpha > 0$ existiert, sodass $\alpha\tau$ ein Element von $L^{-1}\mathbb{Z}^m$ ist. Seien $\tau \in \Lambda$ nun ein solcher Vektor. Dann existieren Vektoren $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}^m$, sodass τ und τ_1 kollinear sind, τ_1 orthogonal zu den Vektoren τ_2, \dots, τ_m ist, sowie jedes $k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m$ als Linearkombination

$$k = \sum_{j=1}^m d_j \tau_j \quad (3.116)$$

mit $d = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{Z}^m$ dargestellt werden kann. Ersetzt man die Reihen

$$\sum_{\substack{k_i \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_i \cdot \tau < u}} \quad (3.117)$$

durch die Reihen

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}^m \\ k_i = \sum_{j=1}^m \tau_j d_j \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ \sum_{j=1}^m \tau_j d_j \cdot \tau < u}} \quad (3.118)$$

und schreibt

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}^m \\ k = \sum_{j=1}^m \tau_j d_j \in L^{-1}\mathbb{Z}^m}} \max \left\{ 0, \sum_{j=1}^m \tau_j d_j \cdot \tau \right\} \quad (3.119)$$

für die Reihe auf der rechten Seite, so erhält man aufgrund der vorausgesetzten Orthogonalität der τ_1, \dots, τ_m den bereits gezeigten Fall. Für den Fall $\tau \notin \Lambda$ benötigen wir die Abschätzung

$$\left| \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot \tau < u}} \cdots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot \tau < u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \cdots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} \right| < Q_6 M^{r-1} \omega^2 \left(\left(\left\lfloor \frac{|u|}{m} \right\rfloor + 1 \right)^{-1}, G \right). \quad (3.120)$$

Da die Herleitung analog zu denen aus Lemma 2 erfolgt, verzichten wir auf den Beweis. Falls $\tau \notin \Lambda$ dann existiert eine Folge $\tau_N \in \Lambda$ mit $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N = \tau$. Ferner ist die Menge aller u mit der Eigenschaft

$$\{t | t \in \mathbb{R}^m, t \cdot \tau = u\} \cap L^{-1}\mathbb{Z}^m \neq \emptyset \quad (3.121)$$

abzählbar. Damit gilt das bezüglich u

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot \tau_N < u}} \cdots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot \tau_N < u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \cdots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} \\
&= \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot \tau < u}} \cdots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot \tau < u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \cdots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r}
\end{aligned} \tag{3.122}$$

fast überall gilt. Aufgrund der Abschätzung (3.120) dürfen wir den Limes in das Integral aus (3.112) hineinziehen und die Behauptung ist gezeigt. \square

Damit können wir $B_n(T)$ berechnen und damit den Beweis beenden. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{L^m T^{m-1}} \sum_{x=0}^{d-1} \sum_{l \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \cap (G_T^\Delta \setminus G_T)} \sum_{k_1, \dots, k_r \in G_* - l} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \cdots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} \mathbb{1}_{x \leq \rho(l) < x+1} \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\partial G} \int_{-d}^0 \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot n(\sigma) < u}} \cdots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot n(\sigma) < u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \cdots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} d u d \sigma
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Hier haben Lemma 5 und die Bemerkung (3.105) verwendet. Aus Lemma 6 folgt, dass

$$\begin{aligned}
& \lim_{d \rightarrow \infty} 2 \operatorname{Re} \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\partial G} \int_{-d}^0 \sum_{\substack{k_1 \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_1 \cdot n(\sigma) < u}} \cdots \sum_{\substack{k_r \in L^{-1}\mathbb{Z}^m \\ k_r \cdot n(\sigma) < u}} \mathcal{G}_{k_1-k_2} \mathcal{G}_{k_2-k_3} \cdots \mathcal{G}_{k_r} \mathcal{G}_{-k_1}^{*n-r} d u d \sigma \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n}{r(n-r)} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d \sigma G^{*r} G^{*n-r}(k)
\end{aligned} \tag{3.124}$$

ist. Insgesamt erhalten wir so

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2B_n(T)}{T^{m-1}L^m} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T^{m-1}L^m} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{x=0}^{\infty} A_{r,x}(T) + \sum_{r=1}^{n-1} C_r(T) \right] \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n}{r(n-r)} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d \sigma G^{*r} G^{*n-r}(k) + o(1).
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Aus der Abschätzung

$$|B_n(T)| < Q_7 \|G(\lambda)\|_{\infty}^n n^2 T^{m-1} L^m \tag{3.126}$$

in Kombination mit $\|G(\lambda)\|_{\infty} < 1$ folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n}{r(n-r)} \frac{h^n}{n} \sum_{k \in L^{-1}\mathbb{Z}^m} \int_{\partial G} \max\{0, k \cdot n(\sigma)\} d \sigma G^{*r} G^{*n-r}(k) \tag{3.127}$$

konvergiert. Damit ist der Beweis des mehrdimensionalen Analogons erbracht. \square

Literaturverzeichnis

- [1] M. Kac, “Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory,” *Duke Mathematical Journal*, vol. 21, no. 3, pp. 501–509, 1954.
- [2] I. J. Linnik, “A multidimensional analog of a limit theorem of G. Szegő,” *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 9, no. 6, p. 1323, 1975.
- [3] U. Grenander and G. Szegő, *Toeplitz forms and their applications*. Univ of California Press, 1958.
- [4] G. Szegő, “Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion,” *Mathematische Annalen*, vol. 76, no. 4, pp. 490–503, 1915.
- [5] A. Böttcher and B. Silbermann, *Introduction to large truncated Toeplitz matrices*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] P. Deift, A. Its, and I. Krasovsky, “Toeplitz matrices and Toeplitz determinants under the impetus of the Ising model. Some history and some recent results,” *arXiv preprint arXiv:1207.4990*, 2012.
- [7] E. L. Basor and C. A. Tracy, “The Fisher-Hartwig conjecture and generalizations,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 177, no. 1-3, pp. 167–173, 1991.
- [8] N. Nikolski, *Toeplitz matrices and operators*, vol. 182. Cambridge University Press, 2020.
- [9] A. Böttcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] O. Toeplitz, “Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen,” *Mathematische Annalen*, vol. 70, no. 3, pp. 351–376, 1911.
- [11] U. Betke and K. Böröczky, “Asymptotic formulae for the lattice point enumerator,” *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 51, no. 2, pp. 225–249, 1999.
- [12] M. Beck and S. Robins, *Computing the continuous discretely*, vol. 61. Springer, 2007.
- [13] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle*. American Mathematical Soc., 2005.
- [14] D. Gioev, “Generalized Hunt-Dyson formula and Bohnenblust-Spitzer theorem,” *International Mathematics Research Notices*, vol. 2002, no. 32, pp. 1703–1722, 2002.
- [15] J. L. Geronimus, “On a problem of Szegő, Kac, Baxter and Hirschman,” *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 1, no. 2, p. 273, 1967.
- [16] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*. Courier Corporation, 2012.