دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق

درس سیستم های کنترل خطی

استاد: دکتر حمیدرضا تقی راد

پاسخ تمرین سری چهارم

نام و نام خانوادگی	محمدامین محمدیون شبستری
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۱۲۲۵۰۳
تاریخ	آذر ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فهرست برنامه‌ها

۱ سوال اول

۱.۱ تحلیل نمودار نایکوئیست

در ابتدا، j را از مخرج حذف می‌کنیم با ضرب مزدوج عبارت $-1 + Tj\omega$ در صورت و مخرج. در نهایت با ساده‌سازی، تابع به فرمت زیر نوشته می‌شود:

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}(G(j\omega)) + j\,\mathrm{Im}(G(j\omega)) \tag{۱}$$

که:

$$G(j\omega) = -\frac{T}{1+T^2\omega^2} + j\frac{-1-Tj\omega}{\omega(1+T^2\omega^2)}. \tag{۲}$$

حال ابتدا ω را به سمت صفر میل می‌دهیم. در این حالت داریم:

$$\mathrm{Re} = -T, \quad \mathrm{Im} = \infty. \tag{۳}$$

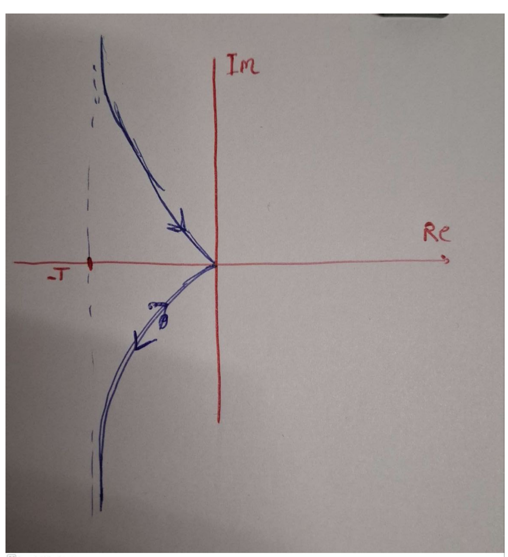
اگر مجدد ω را این‌بار به سمت ∞ میل دهیم:

$$\mathrm{Re} = 0, \quad \mathrm{Im} = 0. \tag{۴}$$

برای پیدا کردن برخورد نمودار با محور حقیقی و مشخص کردن نقاط قطع، قسمت موهومی $G(j\omega)$ را صفر قرار می‌دهیم. در این مثال، محور حقیقی در نقطه‌ای قطع نمی‌شود.

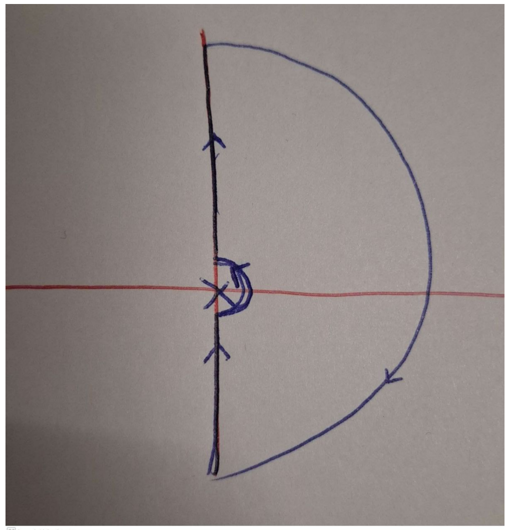
۲.۱ نمودار نایکوئیست

نمودار به شکل زیر خواهد بود:



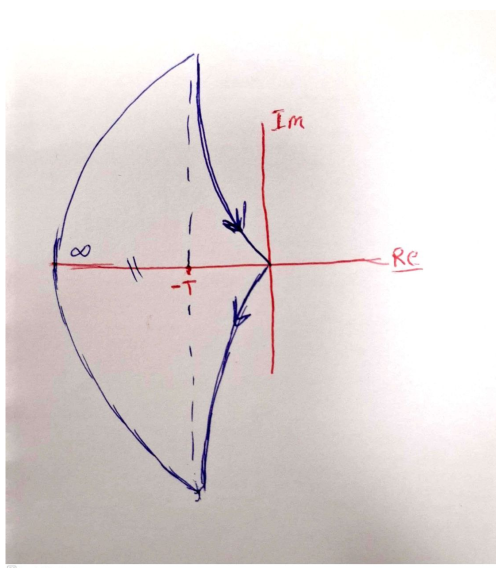
شکل ۱: Nyquist diagram در $\omega = 0$ و $\omega = \infty$

اما هنوز رسم ما کامل نشده است. چون در مبدأ یک قطب داریم، کانتور Nyquist ما از روی آن عبور نخواهد کرد و از y^- با -90 درجه به y^+ با $+90$ درجه قطب را دور می‌زند و عبور می‌کند. مطابق تصویر زیر:

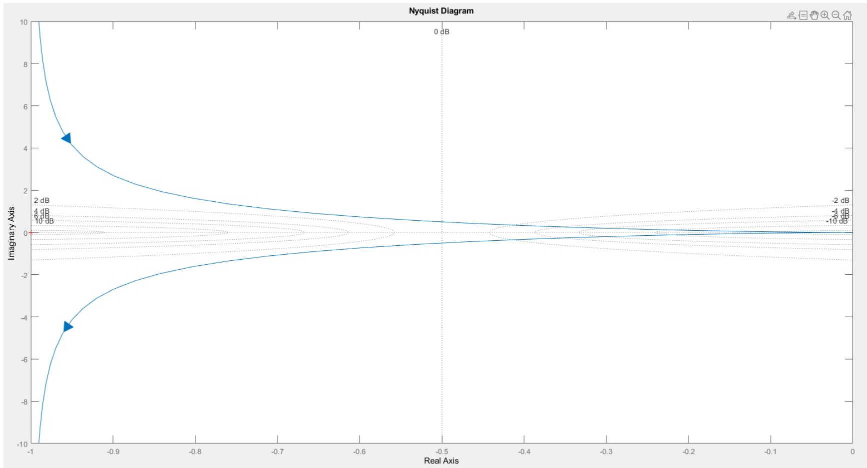


شکل ۲: کانتور Nyquist

در نتیجه، در نمودار اصلی ما از $+\infty$ محور موهومی تا $-\infty$ محور موهومی با جهت ساعتگرد دور خواهیم زد.



شکل ۳: نمودار Nyquist $G(s)$



شکل ۴: نتیجه شبیه سازی متلب با فرض T = ۱

با فرض اینکه T مثبت باشد، در نتیجه یک قطب ناپایدار در سیستم حلقه باز خواهیم داشت. یعنی $P = 1$. بنابراین N باید -1 باشد؛ یعنی نمودار Nyquist باید در جهت پادساعتگرد نقطه $-1/k$ را دور بزند.

اما مشکلی وجود دارد: هیچ نقطه‌ای از نمودار Nyquist وجود ندارد که به ازای آن نمودار نقطه $-1/k$ را پادساعتگرد دور بزند. در نتیجه، این سیستم ناپایدار خواهد بود برای تمامی مقادیر k.

۲ سوال دوم

۱.۲ پیدا کردن فرکانس **PC**

برای حل این سوال، حد بهره به ما داده شده. ما می‌دانیم که در یک فرکانس خاصی به اسم ω_{pc} یا فرکانس phase crossover، فاز سیستم برابر -180 است:

$$\text{phase}(G(j\omega_{pc})) = -180 \tag{۵}$$

در همین فرکانس، اندازه سیستم برابر A است، و در نتیجه $1/A$ می‌شود حد بهره ما.

از آنجایی که حد بهره را داریم می‌توانیم k را پیدا کنیم. برای محاسبه ω_{pc}، فاز سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{phase}(G(j\omega_{pc})) = 0 - (\text{phase}(j\omega) + \text{phase}(j\omega+1) + \text{phase}(j\omega+10)) = -\pi \tag{۶}$$

فاز هر قسمت به صورت زیر است:

$$\text{phase}(j\omega) = \frac{\pi}{2}, \tag{۷}$$

$$\text{phase}(j\omega+1) = \arctan(\omega), \tag{۸}$$

$$\text{phase}(j\omega + 10) = \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right). \tag{۹}$$

با استفاده از این معادلات:

$$\arctan(\omega) + \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{۱۰}$$

با حل معادله بالا:

$$\omega_{pc} = 3.16. \tag{۱۱}$$

۲.۲ محاسبه اندازه $G(j\omega)$ و پیدا کردن **k**

حال با داشتن این فرکانس، اندازه $G(j\omega)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|G(j\omega)| = \frac{|k|}{|j\omega||j\omega + 1||j\omega + 10|}. \tag{۱۲}$$

عبارات هر بخش به صورت زیر هستند:

$$|j\omega| = \omega, \qquad |j\omega + a| = \sqrt{\omega^2 + a^2}. \tag{۱۳}$$

بنابراین:

$$|G(j3.16)| = \frac{|k|}{3.16 \cdot \sqrt{3.16^2 + 1} \cdot \sqrt{3.16^2 + 100}}. \tag{۱۴}$$

$$|G(j3.16)| = \frac{|k|}{3.16 \cdot 3.31 \cdot 10.48}. \tag{۱۵}$$

با توجه به اینکه حد بهره 1.1 است، داریم:

$$-20\log_{10}(\omega) = 1.1 \tag{۱۶}$$

$$10^{\frac{-1.1}{20}} = \omega = 0.88 \tag{۱۷}$$

$$|G(j3.16)| = \frac{|k|}{109.617} = 0.88 \tag{۱۸}$$

$$k = 0.88 \times 109.617 = 96.5 \tag{۱۹}$$

در نتیجه مقدار k برابر است با 96.5.

۲.۳ محاسبه خطا

حال برای محاسبه خطای سیستم، ورودی داده‌شده برابر است با:

$$(1+t)u(t).$$

تبدیل لاپلاس ورودی به صورت زیر است:

$$\mathcal{L}((1+t)u(t)) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}. \quad (۲۰)$$

ورودی شامل یک شیب و یک پله است. از آنجایی که سیستم تیپ یک است (چون یک قطب در مبدا دارد)، خطا نسبت به ورودی پله صفر است.

خطا نسبت به ورودی شیب برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v}, \quad (۲۱)$$

که در آن:

$$k_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k}{(s+1)(s+10)}. \quad (۲۲)$$

با جایگذاری:

$$k_v = \frac{k}{10} = \frac{96.5}{10} = 9.65. \quad (۲۳)$$

بنابراین:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{10}{96.5} = 0.104. \quad (۲۴)$$

در نتیجه خطای سیستم نسبت به ورودی داده شده برابر است با:

$$e_{ss,\text{total}} = 0 + 0.104. \quad (۲۵)$$

۳ سوال سوم

۱.۳ تحلیل سیستم با تقریب پاده

در این سوال همانطور که در سیستم داده شده قابل مشاهده است، سیستم دارای یک ترم نمایی e^{-Ts} به ازای $T = 2$ است که برای ما داخل سیستم تاخیر ایجاد کرده. برای تاخیر معمولاً از یک تقریب به نام Pade استفاده می‌شود. بر اساس این تقریب داریم:

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-Ts/2}}{e^{Ts/2}} \approx \frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}} \quad \text{(تقریب مرتبه اول)} \quad (۲۶)$$

$$\approx \frac{1-\frac{Ts}{2}+\frac{T^2s^2}{8}}{1+\frac{Ts}{2}+\frac{T^2s^2}{8}} \quad \text{(تقریب مرتبه دوم)} \quad (۲۷)$$

در اینجا برای ساده‌سازی مدل سیستم از تقریب مرتبه اول استفاده می‌کنیم. به ازای $T = 2$ خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{5}{5s+1} \cdot \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{s+1}{s} \quad (۲۸)$$

۲.۳ رسم نمودار بودی

حال برای رسم بودی این سیستم مرحله به مرحله اجزای سیستم را بررسی می‌کنیم:

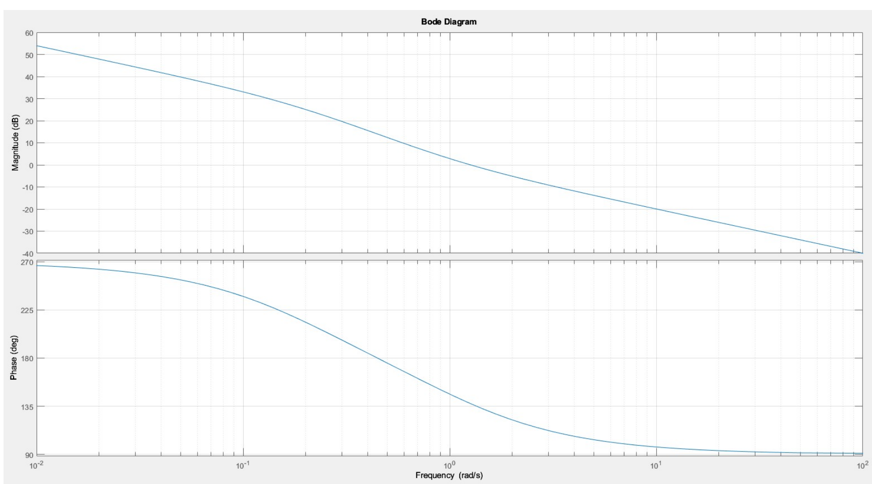
- 5: این مقدار ثابت باعث می‌شود نمودار اندازه به میزان $20\log_{10}5$ شیفت کند. فاز آن نیز صفر است چون مثبت است.
- $s-1$: صفر غیرکمینه فاز دارد. نمودار اندازه همانند PD است ولی فاز تغییر کرده و منفی شده است.
- $s+1$: این بخش یک سیستم PD است که از $1/\tau$ به قبل صفر و بعد از آن با شیب $+20\text{dB/decade}$ افزایش می‌یابد. فاز این سیستم نیز از صفر تا $+90$ درجه تغییر می‌کند.
- $\frac{1}{1+\tau s}$: این یک سیستم Lag است که باعث ایجاد تاخیر فازی 90 درجه می‌شود و نمودار اندازه از 0 تا -90 تغییر می‌کند.
- $\frac{1}{s}$: این بخش یک انتگرال‌گیر است که نمودار اندازه آن با شیب -20dB/decade کاهش می‌یابد و فاز آن -90 درجه است.

با بررسی یک‌به‌یک اجزا مشخص می‌شود که در $20\log_{10}(5)+40$ مراسم شروع می‌شود و تا نقطه $1/5$ با شیب کاهشی -20dB/decade کاهش می‌یابد که به دلیل $\frac{1}{5s+1}$ است.

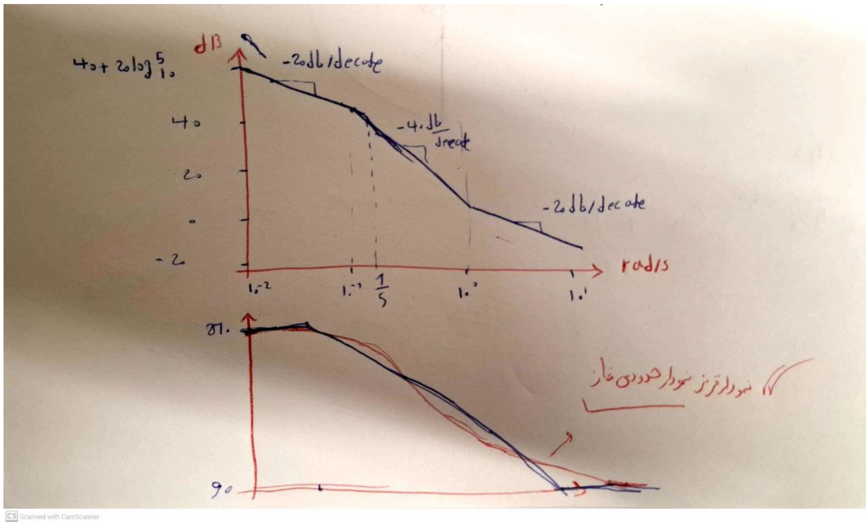
در نهایت مجدد 20 dB افزایش می‌یابد.

برای نمودار فاز نیز $s+1$ و $-s+1$ یکدیگر را به دلیل اینکه نمودار فازشون دقیقا برعکس همدیگه هست خنثی می‌کنند. برای مخرج نیز دو فرم Lag داریم که هرکدام -90 درجه و در مجموع -180 درجه فاز می‌دهند. $\frac{1}{s}$ نیز فاز -90 دارد که در نهایت از -90 تا -270 درجه فاز خواهیم داشت. با افزودن $+360$ درجه، فاز ما از 90 تا 270 تغییر خواهد کرد.

تصاویر زیر نمودار ترسیم شده به صورت دستی و نمودار ترسیم شده توسط MATLAB را نمایش می‌دهد:



شکل ۵: نمودار متلب

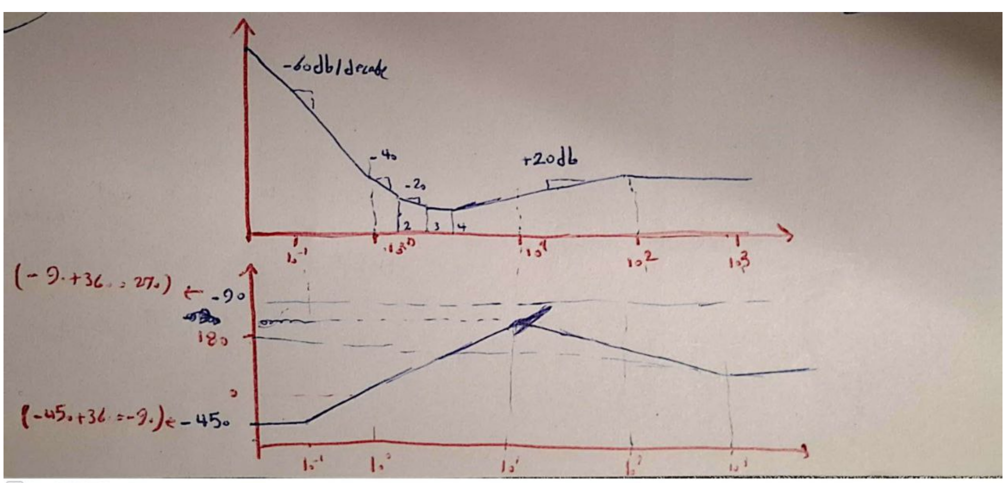


شکل ۶: نمودار رسم شده به صورت دستی

۴ سوال چهارم

۱.۴ رسم دستی نمودار بودی

برای این سوال ابتدا نمودار بودی را به صورت حدودی رسم کردم که مطابق شکل زیر شد:



شکل ۷: نمودار Bode

۲.۴ پیدا کردن فرکانس های مهم

مطابق نمودار فاز از ۹۰− درجه شروع شده که یک بار از صفر و یک بار از ۱۸۰ عبور کرده. با پیدا کردن $G(j\omega)$ و قرار دادن قسمت موهومی مساوی با صفر میتوانیم مقادیر حقیقی که نمودار نایکوئیست ما قطع شده را پیدا کنیم. با توجه به نمودار بودی، یک بار صفر درجه و یک بار در ۱۸۰ درجه محور حقیقی نمودار نایکوئیست قطع شده و در نهایت فاز به ۱۸۰ میرا شده:

$$G(j\omega) = \frac{-(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+4)j(j\omega+100)}{\omega^3(\omega^2+100)} \tag{۲۹}$$

با ساده‌سازی قسمت موهومی ما برابر خواهد بود با:

$$-\frac{j(90\omega^4 - 3450\omega^2 + 2400)}{\omega^3(\omega^2+10^4)} = 0 \tag{۳۰}$$

که با حل معادله بالا داریم:

$$90\omega^4 - 3450\omega^2 + 2400 = 0 \tag{۳۱}$$

با محاسبه ریشه‌های معادله بالا، فرکانس‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\omega = \pm 0.84, \pm 6.13 \tag{۳۲}$$

۳.۴ محاسبه تقاطع نایکوئیست با محور حقیقی

در این فرکانس‌ها محور نایکوئیست ما قطع شده است. مقدار $\mathrm{Re}(G(j\omega))$ به ازای فرکانس‌های مشخص شده برابر است با:

$$G(j\cdot 6.13) \approx -0.087 \tag{۳۳}$$

$$G(j\cdot 0.84) \approx 0.6 \tag{۳۴}$$

بنابراین، یک بار در صفر درجه و فرکانس 0.84 و یک بار در ۱۸۰ درجه و فرکانس 6.13، نمودار نایکوئیست محور حقیقی را قطع می‌کند.

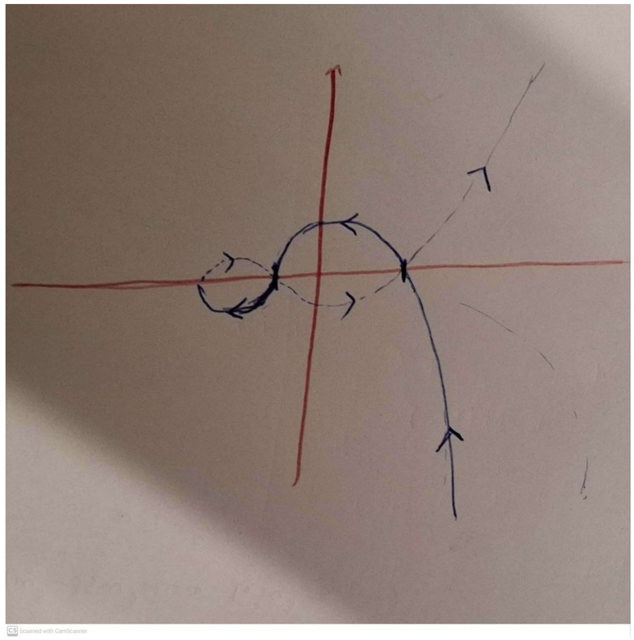
در نهایت داریم:

$$G(\infty) = -1 \tag{۳۵}$$

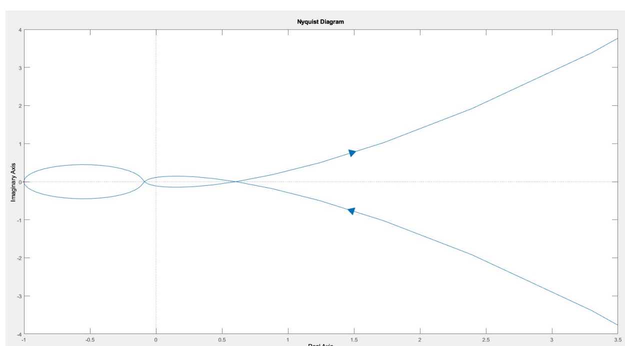
یعنی در فرکانس بی‌نهایت، نمودار نایکوئیست با زاویه $180°$ در نقطه -1 محور حقیقی قرار دارد.

۴.۴ رسم نمودار نایکوئیست

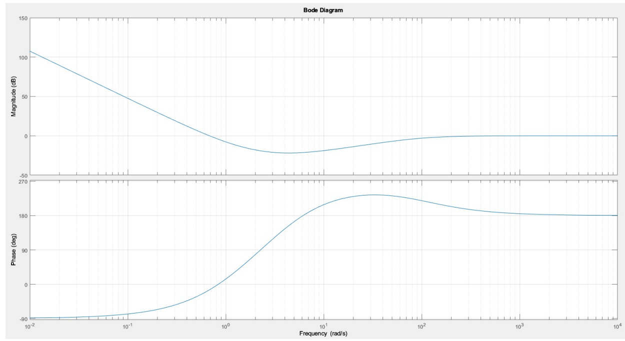
در نتیجه نمودار نایکوئیست ما به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۸: نمودار حدودی نایکوئیست



شکل ۹: نمودار دقیق نایکوئست با متلب



شکل ۱۰: نمودار دقیق بودی با متلب

۵ سوال پنجم

۱.۵ پیدا کردن تابع تبدیل سیستم

با توجه به نمودار بودی که داده شده تحلیل من به صورت زیر می‌باشد:

ابتدا فرکانس‌های پایین را بررسی می‌کنیم. در فرکانس‌های کم نمودار ما flat است یا به‌اصطلاح ظاهراً در این نقاط صفر و قطبی نداریم. کمی فرکانس را بیشتر کنیم نمودار ما شروع به افزایش می‌کند با شیب $+20\,\mathrm{dB/decade}$.

یعنی در این نقطه که نمودار ما افزایشی شده (به‌اصطلاح فرکانس گوشه) ما یک صفر در سیستم داریم. در حدود 10^1 این نمودار افزایشی شده پس تقریباً می‌توانیم بگوییم فرکانس گوشه ما همین 10^1 است. در نتیجه صفر ما به شکل زیر خواهد بود:

$$0.1s + 1 \tag{۳۶}$$

در ادامه، این شیب افزایشی $+20$ تا بی‌نهایت ادامه‌دار نشده و در حدود 10^2 این شیب افزایشی $+20$ صفر شده، یعنی یک شیب $-20\,\mathrm{dB/decade}$ داریم. این یعنی یک قطب در فرکانس گوشه 10^2 داریم.

در نتیجه، قطب ما به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{0.01s + 1} \tag{۳۷}$$

در ادامه نمودار اندازه صفر شده است یعنی صفر و قطبی دیگر نداریم. همچنین برای تعیین k از قسمت‌هایی از نمودار که در فرکانس‌های پایین flat است استفاده می‌کنیم. اگر فرکانس پایین نمودار flat نداشت، از سایر نقاط نمودار که flat است استفاده می‌کنیم. در این مثال در $-20\,\mathrm{dB}$ نمودار ما flat است. یعنی داریم:

$$20 \log_{10} k = -20 \tag{۳۸}$$

در نتیجه مقدار k از اینجا برابر می‌شود با:

$$k = 0.1 \tag{۳۹}$$

با توجه به موارد گفته شده، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته ما برابر خواهد بود با:

$$G(s) = \frac{0.1(0.1s + 1)}{0.01s + 1} \tag{۴۰}$$

۲.۵ رسم نمودار نایکوئیست

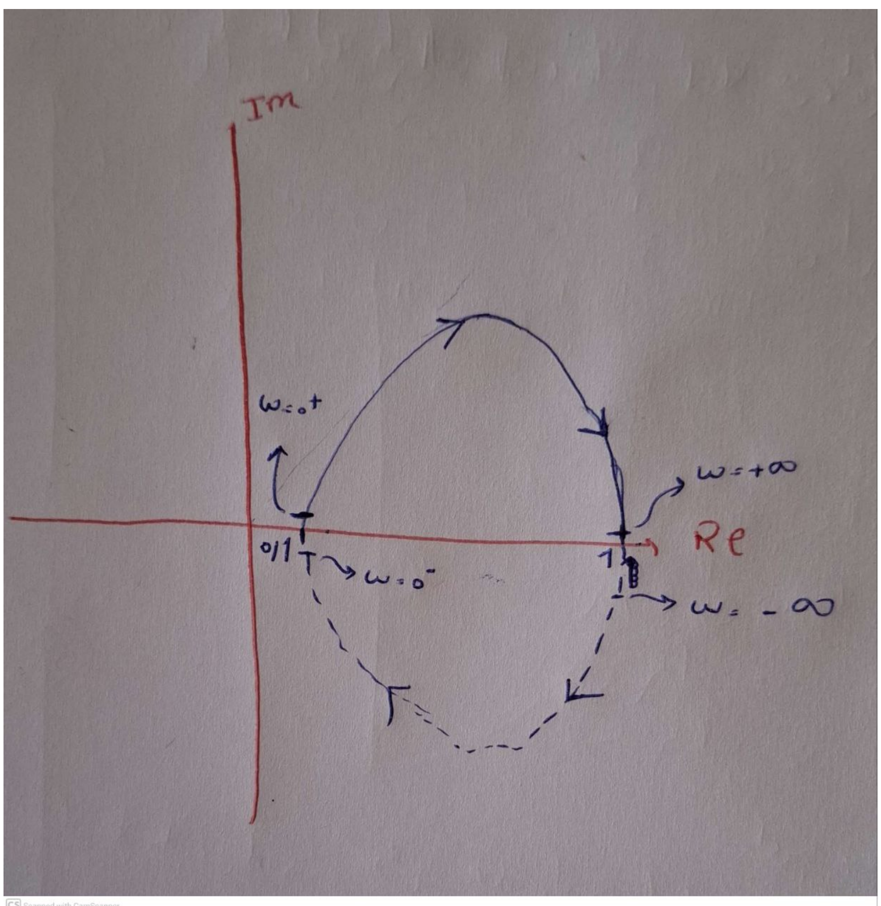
در ادامه می‌توانیم با استفاده از نمودار bode، نمودار نایکوئیست را رسم کنیم. ابتدا فرکانس‌های پایین را بررسی می‌کنیم؛ در فرکانس‌های 0^+ اندازه ما $-20\,\mathrm{dB}$ است. در نتیجه داریم:

$$10^{\frac{-20}{20}} = 0.1 \tag{۴۱}$$

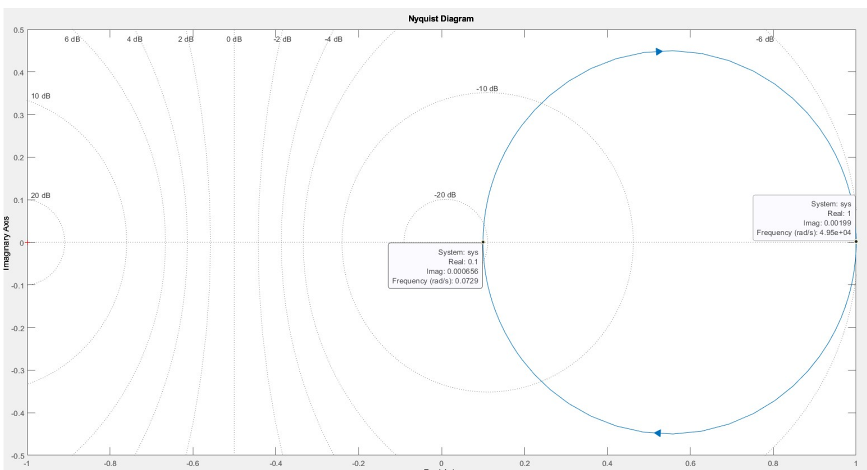
ما می‌دانیم نمودار اندازه bode به ما فاصله از مبدا را در نمودار نایکوئیست می‌دهد؛ در نتیجه الان می‌دانیم در نمودار نایکوئیست برای فرکانس‌های 0^+، ما از نقطه 0.1 محور حقیقی با زاویه $0°$ شروع خواهیم کرد. نمودار ما طوری تغییر می‌کند که زاویه آن به سمت $60°$ می‌رود؛ ولی تا قبل از اینکه به $60°$ برسد، نمودار دور می‌زند و برمی‌گردد پایین. در فرکانس‌های $+\infty$ مقدار $0\,\mathrm{dB}$ را در نمودار bode داریم؛ در نتیجه اندازه آن در محور حقیقی برابر خواهد بود با:

$$10^{\frac{0}{20}} = 1 \tag{۴۲}$$

پس برگشت ما تا نقطه 1 محور حقیقی ادامه خواهد داشت. قرینه همین نمودار برای فرکانس‌های منفی رسم می‌شود.



شکل ۱۱: نمودار نایکوئیست_رسم دستی



شکل ۱۲: نمودار نایکوئیست_متلب