

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق

درس سیستم های کنترل خطی
استاد: دکتر حمیدرضا تقی راد
پاسخ تمرین سری دوم

نام و نام خانوادگی	محمدامین محمدیون شبستری
شماره دانشجویی	۴۰۱۲۲۵۰۳
تاریخ	آبان ۱۴۰۳



فهرست مطالب

۵	۱ سوال اول	
۵	۱.۱ پیدا کردن ζ	
۶	۲.۱ پیدا کردن ω_n	
۶	۳.۱ پیدا کردن k	
۷	۴.۱ محاسبه تابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته	
۷	۵.۱ شبیه سازی در MATLAB	
۸	۶.۱ کد متلب	
۹	۲ سوال دوم	
۹	۱.۲ بخش (الف) - محاسبه تابع تبدیل	
۹	۱.۱.۲ تابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته	
۱۰	۲.۲ بخش (ب) - تحلیل پاسخ به ورودی پله	
۱۰	۱.۲.۲ محاسبه خطای ماندگار	
۱۰	۲.۲.۲ شبیه سازی و کد متلب	
۱۴	۳ سوال سوم	
۱۴	۱.۳ الف به ازای $k = 16$ خطای حالت ماندگار، فراجش و زمان نشست را برای ورودی پله بدست آورید.	
۱۴	۱.۱.۳ محاسبه تابع تبدیل	
۱۴	۲.۱.۳ پیدا کردن ζ ، ω_n	
۱۴	۳.۱.۳ محاسبه فراجش	
۱۵	۴.۱.۳ محاسبه خطای حالت ماندگار	
۱۵	۵.۱.۳ پیدا کردن زمان نشست	
۱۵	۲.۳ ب چنانچه خواسته های مسئله به صورتی باشد که $M_p = 5\%$ ، محدوده k را مشخص کنید.	
۱۶	۳.۳ ج پاسخ سیستم مربوط به قسمت ب را شبیه سازی و نتایج را تحلیل کنید.	
۱۷	۴.۳ د به ازای $k = 4$ مقدار فراجش را بدست آورید و پاسخ خود را تحلیل کنید.	
۱۹	۴ سوال چهار	
۱۹	۱.۴ محاسبه خطای ماندگار به ازای ورودی اغتشاش پله	
۱۹	۲.۴ محاسبه خطای ماندگار به ازای ورودی اصلی $R(t)$	
۲۰	۵ سوال پنجم (امتیازی)	



فهرست تصاویر

۵ سیگنال خروجی مربوط به پرسش یک	۱
۷ نمودار شبیه سازی شده سیستم برای سیستم حلقه باز و سیستم حلقه بسته	۲
۸ اطلاعات مربوط به سیستم حلقه باز	۳
۸ اطلاعات مربوط به سیستم حلقه بسته	۴
۹ بلوک دیاگرام یک سیستم کنترل موتور DC	۵
۱۲ بررسی پاسخ حلقه باز و حلقه بسته	۶
۱۲ پارامترهای سیستم حلقه باز	۷
۱۳ پارامترهای سیستم حلقه بسته	۸
۱۳ خطای حالت ماندگار سیستم حلقه باز و حلقه بسته	۹
۱۳ پارامترهای ثابت زمانی، فرکانس، و برای سیستم حلقه بسته	۱۰
۱۳ پارامترهای ثابت زمانی، فرکانس، و برای سیستم حلقه باز	۱۱
۱۴ بلوک دیاگرام سیستم شماره ۳	۱۲
۱۶ خروجی سیستم	۱۳
۱۷ پارامترهای مختلف سیستم	۱۴
۱۸ خروجی سیستم به ازای $k=4$	۱۵
۱۸ پارامترهای مختلف سیستم به ازای $k=4$	۱۶
۱۹ بلوک دیاگرام سیستم شماره ۴	۱۷
۲۰ معادله مربوط به سوال امتیازی پنجم	۱۸
۲۱ پاسخ سوال پنجم	۱۹



فهرست جداول



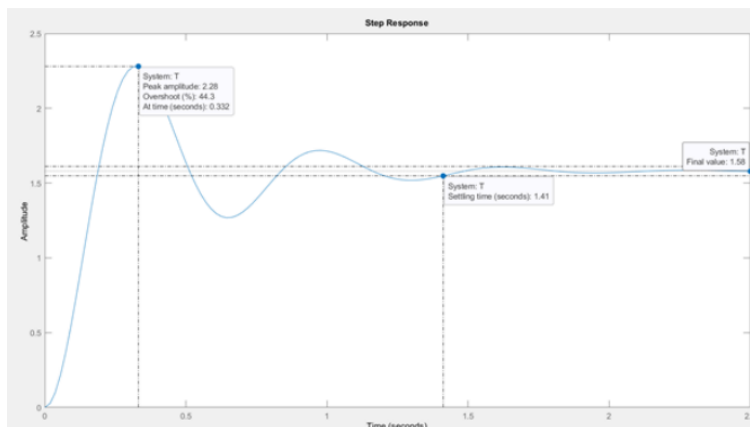
فهرست برنامه‌ها

۸	کد شبیه سازی سیستم حلقه باز و حلقه بسته	۱
۱۱	کد شبیه سازی سیستم حلقه باز و حلقه بسته و بررسی پارامترهای خواسته شده در صورت سوال	۲
۱۶	کد شبیه سازی متلب با توجه به k بدست آمده	۳
۱۷	کد شبیه سازی متلب برای سیستم با $k=4$ با توجه به k بدست آمده	۴



۱ سوال اول

در یک سیستم حلقه بسته با فیدبک قصد شناسایی سیستم حلقه باز مسیر پیشرو را داریم. با دادن ورودی پله واحد به سیستم حلقه بسته به فرم $T(s) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$ ، سیگنال خروجی به صورتی که در شکل ۱ مشاهده می‌شود به دست آمده است. تابع تبدیل سیستم حلقه باز مسیر پیشرو را به دست آورید و سپس با استفاده از نرم‌افزار MATLAB درستی پاسخ خود را بررسی کرده و سیستم حلقه باز و حلقه بسته را با هم مقایسه کنید. (معیار زمان نشست را ۲٪ در نظر بگیرید.)



شکل ۱: سیگنال خروجی مربوط به پرسش یک

۱.۱ پیدا کردن ζ

با توجه به اطلاعاتی که در سیگنال خروجی نمایش داده شده است، می‌دانیم که میزان فراجهش (overshoot) برابر با ۴۴.۳ درصد است. از طرفی با توجه به فرمول زیر می‌توانیم مقدار ζ را پیدا کنیم:

$$\%M_p = e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (۱)$$

$$0.443 = e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (۲)$$

$$\ln(0.443) = \frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (۳)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln(0.443)^2}{\pi^2 + \ln(0.443)^2}} \quad (۴)$$

بنابراین مقدار ζ برابر است با:

$$\zeta = 0.2508 \quad (۵)$$

۲.۱ پیدا کردن ω_n

همچنین می‌دانیم که برای پیدا کردن ω_n می‌توانیم از روش‌های مختلفی استفاده کنیم. ω_n با هر یک از روش‌های زیر که محاسبه شود، مقدار متفاوتی به ما می‌دهد که این به دلیل تقریب‌هایی است که در فرمول‌های مختلف به وجود آمده است.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (۶)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} \quad (۷)$$

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \cdot t_s} \quad (۸)$$

با توجه به مقدار متفاوتی که وجود دارد، مقداری که از رابطه مربوط به t_p به دست آمده بود، مقدار نزدیک‌تری است به خروجی که سوال به ما داده است. در نتیجه داریم:

$$t_p = 0.332 \quad (۹)$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (۱۰)$$

بنابراین مقدار ω_n برابر است با:

$$\omega_n = 9.775 \quad (۱۱)$$

۳.۱ پیدا کردن k

مقدار نهایی که خروجی ما به آن همگرا می‌شود با توجه به داده‌های سوال 1.58 است. برای اینکه مقدار k را به دست آوریم می‌توانیم از قضیه مقدار نهایی استفاده کنیم.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (۱۲)$$

با توجه به این موضوع داریم:

$$1.58 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot k \cdot \omega_n^2}{s \cdot (s^2 + 2\zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2)} \quad (۱۳)$$

بنابراین مقدار k برابر است با:

$$k = 1.58 \quad (۱۴)$$



۴.۱ محاسبه تابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته

در نهایت تابع تبدیل سیستم حلقه بسته ما به فرم زیر خواهد بود:

$$T(s) = \frac{150.969958}{s^2 + 4.90314s + 95.55063} \quad (۱۵)$$

این سیستم حلقه بسته ما است.

می دانیم سیستم حلقه باز ما $G(s)$ است و داریم:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (۱۶)$$

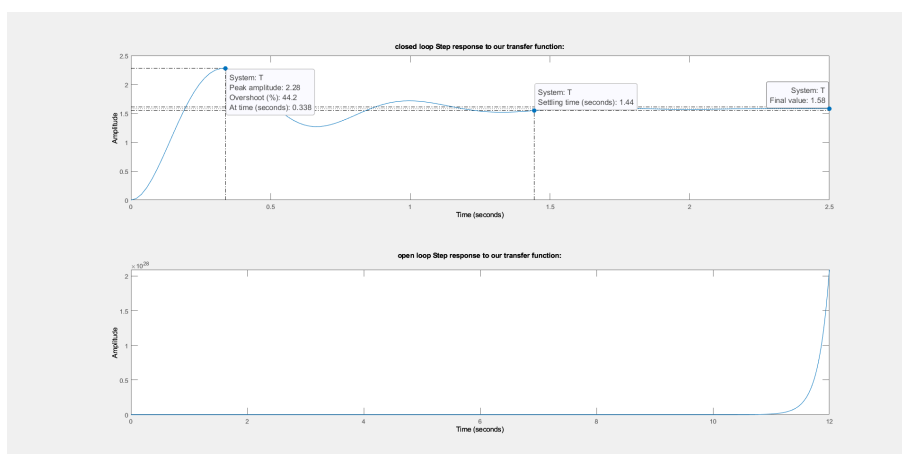
در نتیجه داریم:

$$G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} \quad (۱۷)$$

$$G(s) = \frac{151s^2 + 1.517}{s^4 + 49.94s^2 - 5075} \quad (۱۸)$$

۵.۱ شبیه سازی در MATLAB

در این قسمت، محاسباتی که انجام شده را با MATLAB بررسی می کنیم و مشخص است که با بسته شدن حلقه، سیستم پایدار می شود.



شکل ۲: نمودار شبیه سازی شده سیستم برای سیستم حلقه باز و سیستم حلقه بسته

کاملا از نتایج واضح هست که سیستم حلقه باز ناپایدار بوده و با بستن حلقه و فیدبک سیستم پایدار شده.



```
RiseTime: NaN
TransientTime: NaN
SettlingTime: NaN
SettlingMin: NaN
SettlingMax: NaN
Overshoot: NaN
Undershoot: NaN
Peak: Inf
PeakTime: Inf
```

شکل ۳: اطلاعات مربوط به سیستم حلقه باز

```
RiseTime: 0.1299
TransientTime: 1.4435
SettlingTime: 1.4435
SettlingMin: 1.2706
SettlingMax: 2.2787
Overshoot: 44.2243
Undershoot: 0
Peak: 2.2787
PeakTime: 0.3380
```

شکل ۴: اطلاعات مربوط به سیستم حلقه بسته

۶.۱ کد متلب

```
1 s = tf('s');
2 %First we define our main parameters of the system which has been
3 %calculated through related formulas.
4 k = 1.58;
5 zeta = sqrt((log(0.443)^2)/(pi^2 + log(0.443)^2));
6 wn = pi / (0.332 * sqrt(1-zeta^2));
7
8 %here we define the transfer function of our system; Y(S) / R(S)
9 T = (k*wn^2) / (s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2);
10 subplot(2,1,1);
11 step(T)
12 title('closed loop Step response to our transfer function:')
```



```

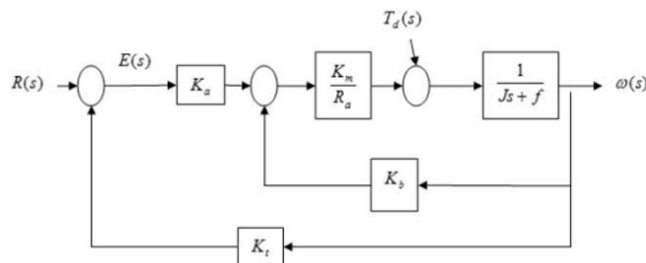
13 stepinfo(T)
14 s
15 %open loop transfer function is G(s):
16 subplot(2,1,2);
17 G = T / (1 - T);
18 step(G)
19 title('open loop Step response to our transfer function:')
20 stepinfo(G)

```

بسته حلقه و باز حلقه سیستم سازی شبیه کد: Code 1

۲ سوال دوم

یک سیستم کنترل سرعت موتور DC دارای بلوک دیاگرامی به صورت شکل زیر است که مقادیر پارامترهای آن برابر با $k_b = 0.5$, $k_t = 1$ و $k_a = 1$ و $K_m = 0.8$, $R_a = 2$, $J = 1$, $f = 0.2$ است. توجه کنید که برای حالت حلقه باز $k_t = 0$ و برای حالت حلقه بسته $k_t = 1$ در نظر گرفته می شود.



شکل ۵: بلوک دیاگرام یک سیستم کنترل موتور DC

۱.۲ بخش (الف) - محاسبه تابع تبدیل

۱.۱.۲ تابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته

تابع تبدیل سیستم را در دو حالت حلقه باز و حلقه بسته محاسبه می کنیم.
در این قسمت نمودار بلوکی داده شده را ساده می کنیم و با جایگذاری مقادیر داده شده برای تابع تبدیل سیستم حلقه باز ($k_t = 0$) به صورت زیر هست:

$$\frac{k_m}{r_a} \cdot \frac{1}{(js + f)} = A \quad (19)$$



با ساده کردن، داریم:

$$\frac{A}{(1 + k_b A)} \quad (20)$$

و به شکل زیر:

$$\frac{k_a A}{(1 + k_b A)} \quad (21)$$

در نهایت:

$$\frac{0.4}{(s + 0.4)} \quad (22)$$

برای تابع تبدیل سیستم حلقه بسته داریم:

$$\frac{\frac{0.4}{(s+0.4)}}{1 + \frac{0.4}{(s+0.4)}} \quad (23)$$

که ساده می شود به:

$$\frac{0.4}{(s + 0.8)} \quad (24)$$

۲.۲ بخش (ب) - تحلیل پاسخ به ورودی پله

پاسخ سیستم حلقه باز به ورودی پله و پاسخ سیستم حلقه بسته به ورودی پله را در یک شکل رسم می کنیم. همچنین خطای حالت ماندگار، ثابت زمانی، زمان خیز و زمان نشست سیستم های حلقه باز و حلقه بسته را با هم مقایسه و تحلیل خواهیم کرد.

۱.۲.۲ محاسبه خطای ماندگار

برای محاسبه خطای حالت ماندگار ابتدا برای هر دو حالت حلقه باز و حلقه بسته $E(s)$ را محاسبه می کنیم:

$$E(s) = (1 - M(s))R(s) \quad (25)$$

در نهایت، خطای حالت ماندگار برابر خواهد بود با:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (26)$$

۲.۲.۲ شبیه سازی و کد متلب

با توجه به خروجی کد متلب مشخص هست که سیستم حلقه باز به حالت ماندگار 1 همگرا میشود و تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به 0.5 همگرا میشود. همچنین در سیستم حلقه بسته پارامترهای مختلف نسبت به سیستم حلقه باز کاهش یافته است. همچنین به دلیل مرتبه یک بودن سیستم overshoot نداریم.

در ادامه نتایج شبیه سازی برای بدست آوردن پارامترهای مختلف داخل گزارش آمده است:

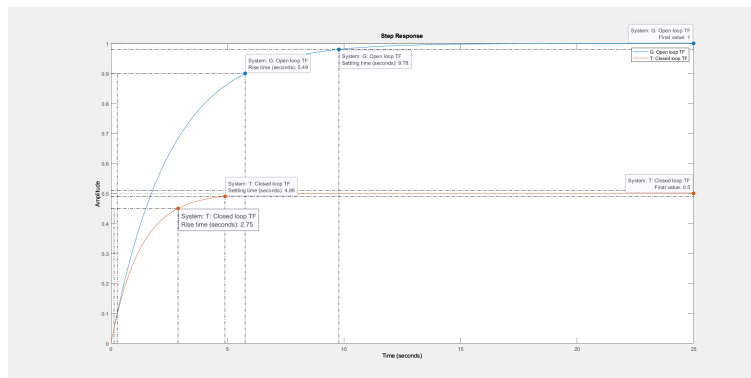


```
1 %defining the open loop and the closed loop systep and plot them
2 s = tf('s');
3 figure;
4 hold on
5 G = 0.4 / (s + 0.4);
6 step(G)
7 T = 0.4 / (s + 0.8);
8 step(T)
9 legend ('G: Open loop TF', 'T: Closed loop TF')
10 hold off
11
12 %use stepinfo to fine related infos:
13 stepinfo(G)
14 stepinfo(T)
15
16 % our input to the system is step function; so:
17 R = 1 / s;
18 %find steady state Error:
19 syms s_
20 G_ = 0.4 / (s_ + 0.4);
21 T_ = 0.4 / (s_ + 0.8);
22 R_ = 1 / s_;
23
24 E_openloop = (1 - G_) * R_;
25 E_closedloop = (1 - T_) * R_;
26
27 ess_closed = limit(E_closedloop*s_, s_, 0);
28 ess_open = limit(E_openloop*s_, s_, 0);
29
30
31 disp('Steady-State Error for Open-Loop System is:')
32 disp(ess_open)
33 disp('Steady-State Error for Closed-Loop System is:')
34 disp(ess_closed)
35
36
```



```
37 % damp gives us infos like zeta, wn, time constant, ...  
38 damp(G)  
39 damp(T)
```

سوال صورت در شده خواسته پارامترهای بررسی و بسته حلقه و باز حلقه سیستم سازی شبیه کد: Code 2:



شکل ۶: بررسی پاسخ حلقه باز و حلقه بسته

```
RiseTime: 5.4925  
TransientTime: 9.7802  
SettlingTime: 9.7802  
SettlingMin: 0.9045  
SettlingMax: 1.0000  
Overshoot: 0  
Undershoot: 0  
Peak: 1.0000  
PeakTime: 26.3646
```

شکل ۷: پارامترهای سیستم حلقه باز



```
RiseTime: 2.7463
TransientTime: 4.8901
SettlingTime: 4.8901
SettlingMin: 0.4523
SettlingMax: 0.5000
Overshoot: 0
Undershoot: 0
Peak: 0.5000
PeakTime: 13.1823
```

شکل ۸: پارامترهای سیستم حلقه بسته

Steady-State Error for Open-Loop System is:
0

Steady-State Error for Closed-Loop System is:
1/2

شکل ۹: خطای حالت ماندگار سیستم حلقه باز و حلقه بسته

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
-4.00e-01	1.00e+00	4.00e-01	2.50e+00

شکل ۱۰: پارامترهای ثابت زمانی، فرکانس، و برای سیستم حلقه بسته

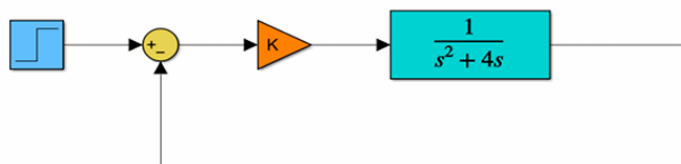
Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
-8.00e-01	1.00e+00	8.00e-01	1.25e+00

شکل ۱۱: پارامترهای ثابت زمانی، فرکانس، و برای سیستم حلقه باز



۳ سوال سوم

سیستم زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱۲: بلوک دیاگرام سیستم شماره ۳

۱.۳ الف به ازای $k = 16$ خطای حالت ماندگار، فراجش و زمان نشست را برای ورودی پله بدست آورید.

۱.۱.۳ محاسبه تابع تبدیل

در این قسمت به ازای $k = 16$ داریم:

$$G = \frac{k}{s^2 + 4s}$$

$$T = \frac{G}{1 + G} = \frac{\frac{16}{s^2 + 4s}}{1 + \frac{16}{s^2 + 4s}} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

۲.۱.۳ پیدا کردن ω_n ، ζ

با توجه به اینکه سیستم مرتبه ۲ هست میتوان گفت:

$$2\zeta\omega_n = 4$$

$$\omega_n^2 = 16$$

در نتیجه:

$$\omega_n = 4$$

$$\zeta = \frac{4}{2 \times 4} = 0.5$$

۳.۱.۳ محاسبه فراجش

برای محاسبه فراجش (overshoot) داریم:

$$\%M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_p = 100 \times e^{-0.5\pi/\sqrt{1-0.5^2}}$$



۴.۱.۳ محاسبه خطای حالت ماندگار

همچنین خطای حالت ماندگار را به صورت زیر مینویسیم:

$$E(s) = (1 - M(s)) \times R(s)$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$E(s) = \frac{s^2 + 4s}{s(s^2 + 4s + 16)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

۵.۱.۳ پیدا کردن زمان نشست

برای محاسبه زمان نشست از فرمول‌هایی که با تقریب‌های مختلف وجود دارند میتوان استفاده کرد:

$$t_s(\%2) = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{2} = 2$$

$$t_s(\%5) = \frac{5}{2} = 2.5$$

در این سوال من معیار ۲ درصد را در نظر گرفتم چرا که سوال در مورد این موضوع صحبتی نکرده بود.

۲.۳ ب چنانچه خواسته‌های مسئله به صورتی باشد که $M_p = 5\%$ ، محدوده k را مشخص کنید.

برای این قسمت با توجه به اینکه میزان فراجش ۵ درصد داده شده است می‌توانیم K را پیدا کنیم.
می‌دانیم:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln(0.05)^2}{\pi^2 + \ln(0.05)^2}} \quad (27)$$

$$\text{zeta} = 0.6901$$

از طرفی با توجه به تابع تبدیلی که برای سیستم پیدا کردیم داریم:

$$2\zeta\omega_n = 4 \quad (28)$$

$$\omega_n = \frac{2}{0.6901} \quad (29)$$

$$\omega_n = 2.8981$$

در نتیجه مجدد بر اساس تابع تبدیل پیدا شده می‌توان گفت:

$$k = \omega_n^2 = 8.3989 \quad (30)$$



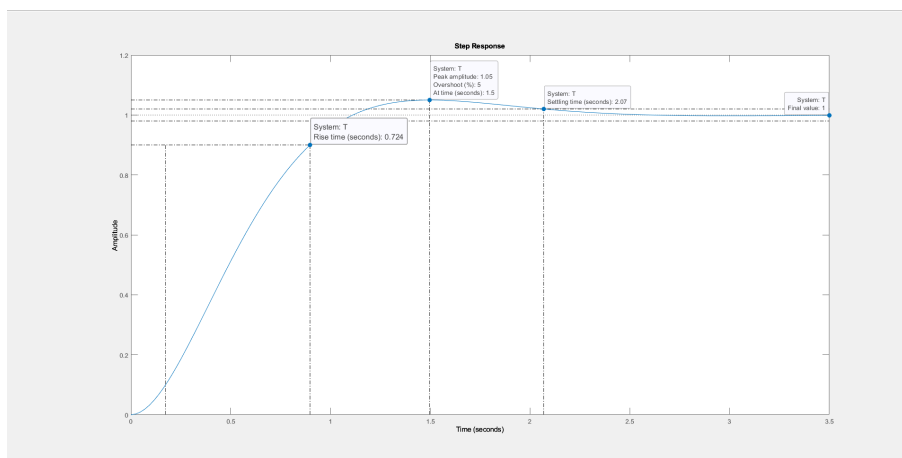
۳.۳ ج پاسخ سیستم مربوط به قسمت ب را شبیه سازی و نتایج را تحلیل کنید.

با توجه به شبیه سازی های متلب داریم:

```
1 s = tf('s');
2 %define the system parameters
3 wn = 2.8981; % wn
4 k = 2.8981^2; % wn^2
5 zeta = 0.6901;
6
7 %Transfer function (closed_loop):
8 T = wn^2 / (s^2 + 2*s*wn*zeta + wn^2);
9 step(T)
10 stepinfo(T)
```

آمده بدست k به توجه با متلب سازی شبیه کد: Code 3

در ادامه خروجی سیستم شبیه سازی شده ما در متلب در شکل زیر آمده است:



شکل ۱۳: خروجی سیستم



```

RiseTime: 0.7236
TransientTime: 2.0687
SettlingTime: 2.0687
SettlingMin: 0.9005
SettlingMax: 1.0500
Overshoot: 5.0003
Undershoot: 0
Peak: 1.0500
PeakTime: 1.4967

```

شکل ۱۴: پارامترهای مختلف سیستم

۴.۳ د به ازای $k = 4$ مقدار فراجاهش را بدست آورید و پاسخ خود را تحلیل کنید.

در این حالت داریم:

$$k = 4 = \omega_n^2 \quad (۳۱)$$

$$\omega_n = 2 \quad (۳۲)$$

$$2\zeta\omega_n = 4 \quad (۳۳)$$

$$\zeta = 1 \quad (۳۴)$$

در این حالت داریم:

$$M_p = 100e^{-\pi/(\sqrt{1-1^2})} \quad (۳۵)$$

$$e^{-\infty} \quad (۳۶)$$

$$M_p = 0 \quad (۳۷)$$

این یعنی در نهایت به مقداری که حالت ماندگار هست رسیده و در این بین از این مقدار هیچوقت نمودار ما بیشتر نشده. پس فراجاهش ما صفر خواهد بود. این پاسخ critical damping نام دارد که سریع ترین پاسخ را بدون نوسان ایجاد خواهد کرد. در ادامه نتیجه شبیه سازی های MATLAB را خواهیم دید:

```

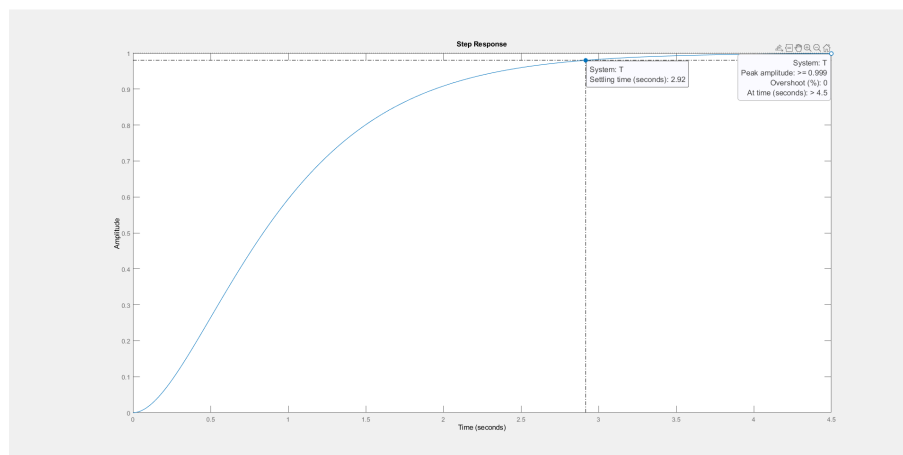
1 s = tf('s');
2 %define the system parameters

```



```
3 wn = 2; % wn
4 k = 4; % wn^2
5 zeta = 1;
6
7 %Transfer function (closed_loop):
8 T = wn^2 / (s^2 + 2*s*wn*zeta + wn^2);
9 step(T)
10 stepinfo(T)
```

آمده بدست k به توجه با $k=4$ با سیستم برای متلب سازی شبیه‌کد: Code 4:



شکل ۱۵: خروجی سیستم به ازای $k=4$

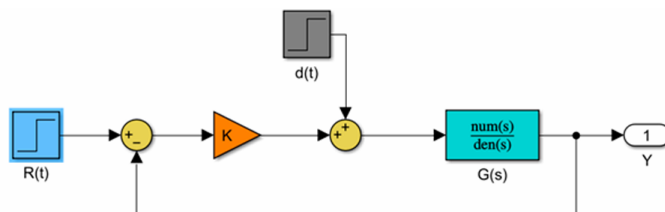
```
RiseTime: 1.6790
TransientTime: 2.9170
SettlingTime: 2.9170
SettlingMin: 0.9008
SettlingMax: 0.9991
Overshoot: 0
Undershoot: 0
Peak: 0.9991
PeakTime: 4.6900
```

شکل ۱۶: پارامترهای مختلف سیستم به ازای $k=4$



۴ سوال چهار

خطای ماندگار سیستم حلقه بسته زیر به سیگنال اغتشاش پله $d(t) = u(t)$ برابر $-B$ است. میزان خطای ماندگار ناشی از ورودی $r(t) = u(t)$ چه مقداری است؟



شکل ۱۷: بلوک دیاگرام سیستم شماره ۴

۱.۴ محاسبه خطای ماندگار به ازای ورودی اغتشاش پله

در این قسمت ابتدا ورودی اصلی که ورودی R هست را صفر می‌کنیم. در نتیجه تابع تبدیل سیستم ما به صورت زیر می‌شود:

$$T = \frac{G(s)}{1 + KG(s)} \quad (38)$$

ارور ما برابر است با اختلاف خروجی و ورودی. ورودی هم پله است؛ پس داریم:

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} \quad (39)$$

$$E(s) = \frac{1}{s(1 + KG(s))} \quad (40)$$

با استفاده از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -B \quad (41)$$

از اینجا می‌توان بدست آورد که:

$$G(0) = \frac{-1 - B}{BK} \quad (42)$$

۲.۴ محاسبه خطای ماندگار به ازای ورودی اصلی $R(t)$

مجدد تابع تبدیل نسبت خروجی به ورودی R را می‌نویسیم:

$$T = \frac{KG}{1 + KG} \quad (43)$$



مجدد در این قسمت داریم:

$$E(s) = \frac{1}{s(1 + KG(s))} \quad (44)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + KG(s)} \quad (45)$$

در این قسمت $G(0)$ را مجدد جایگذاری کرده و در نهایت باز به جواب $-B$ خواهیم رسید. در نتیجه خطای ماندگار ناشی از ورودی اغتشاش پله و ورودی اصلی پله برابر $-B$ است.

۵ سوال پنجم (امتیازی)

تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی به صورت زیر است. با فرض پایداری، اگر $e(t)$ خطای سیستم به ورودی پله واحد باشد، معیار $I = \int_0^\infty e(t) dt$ را محاسبه کنید.

$$T(S) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{(A_1s + 1)(A_2s + 1) \cdots (A_ns + 1)}{(B_1s + 1)(B_2s + 1) \cdots (B_ms + 1)} \quad m > n$$

شکل ۱۸: معادله مربوط به سوال امتیازی پنجم



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sE(s)}{s} = E(0)$$

↓ استفاده از تاپلاس یک طرفه

$$E(s) = \frac{1}{s} - Y(s)$$
$$Y(s) = \frac{T(s)}{s} = \frac{G(s)}{s(1+G(s))}$$
$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{\sum_{i=1}^n (A_i s + p_i)}{s \prod_{j=1}^m (B_j s + p_j)}$$
$$\lim_{s \rightarrow 0} E(s) \Rightarrow \sum_{j=1}^m B_j - \sum_{i=1}^n A_i$$

شکل ۱۹: پاسخ سوال پنجم