



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق

درس سیستم های کنترل خطی

استاد: دکتر حمیدرضا تقی راد

پاسخ تمرین سری پنجم

نام و نام خانوادگی	محمد امین محمدیون شبستری
شماره دانشجویی	۴۰۱۲۲۵۰۳
تاریخ	دی ۱۴۰۳



فهرست مطالب

۵	۱ سوال اول	۵
۵	۱.۱ تابع تبدیل حلقه باز سیستم	۵
۵	۲.۱ بررسی حاشیه بهره	۵
۵	۳.۱ بررسی حاشیه فاز	۵
۶	۴.۱ بررسی پایداری	۶
۶	۲ سوال دوم	۶
۷	۱.۲ بررسی حاشیه فاز	۷
۷	۲.۲ تایید نتیجه در مطلب	۷
۸	۳ سوال سوم	۸
۸	۱.۳ رسم نمودار بودی	۸
۱۰	۲.۳ پیدا کردن ω_{gc}	۱۰
۱۱	۳.۳ محاسبه فاز	۱۱
۱۱	۴.۳ محاسبه حاشیه فاز	۱۱
۱۱	۵.۳ محاسبه فرکانس گذر فاز	۱۱
۱۲	۶.۳ محاسبه GM	۱۲
۱۳	۷.۳ بررسی پایداری	۱۳
۱۳	۴ سوال چهارم	۱۳
۱۳	۱.۴ پیدا کردن فرکانس گذر بهره	۱۳
۱۳	۲.۴ محاسبه حاشیه فاز	۱۳
۱۴	۳.۴ محاسبه فرکانس گذر فاز	۱۴
۱۴	۴.۴ محاسبه حاشیه بهره	۱۴
۱۴	۵.۴ رسم نمودار بودی	۱۴



فهرست تصاویر

۸ margin(G)	۱
۹ اطلاعات مربوط به تابع تبدیل برای رسم نمودار بودی	۲
۹ نمودار بودی رسم شده به صورت دستی	۳
۱۰ نمودار بودی رسم شده توسط MATLAB	۴
۱۱ ریشه‌های معادله درجه ۴	۵
۱۲ نمودار رسم شده توسط دستور margin	۶
۱۴ margin(G) with a = 0.5	۷
۱۵ margin(G) with a = 1.5	۸



فهرست جداول



فهرست برنامه‌ها



۱ سوال اول

داخل این سوال از ما خواسته شده که حد فاز و حد بهره سیستم شکل زیر را بدست آوری و شرایط پایداری سیستم را بررسی کنیم.

۱.۱ تابع تبدیل حلقه باز سیستم

تابع تبدیل حلقه باز سیستم ما برابر هست با:

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{s} \quad (۱)$$

۲.۱ بررسی حاشیه بهره

برای حاشیه بهره ما میدانیم که باید ابتدا $\omega_{\text{phase crossover}}$ را پیدا کنیم. این فرکانس جایی هست که نمودار فاز ما در بودی، -180° را قطع می‌کند. در نتیجه:

$$\text{Phase}(G(j\omega_p)) = -\pi \quad (۲)$$

انتگرال گیر به ما 90° فاز می‌دهد. تاخیر ما هم دارای فاز $\omega_p T$ هست. در نتیجه فاز ما برابر خواهد بود با:

$$\text{Phase}(G) = -\frac{\pi}{2} - \omega_p T = -\pi \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{2} = \omega_p T \quad (۴)$$

$$\omega_p = \frac{\pi}{2T} \quad (۵)$$

حالا برای اینکه حاشیه بهره را بدست بیاوریم داریم:

$$\text{GM} = -20 \cdot \log(|G(j\omega_p)|) \quad (۶)$$

$$\text{GM} = -20 \cdot \log\left(\left|K \cdot \frac{2T}{\pi}\right|\right) \quad (۷)$$

۳.۱ بررسی حاشیه فاز

برای اینکه حاشیه فاز را بررسی کنیم باید $\omega_{\text{gain crossover}}$ را پیدا کنیم. در این فرکانس نمودار اندازه بودی از 0 dB عبور می‌کند یا به عبارتی:

$$|G(j\omega_g)| = 1 \quad (۸)$$

با توجه به این موضوع داریم:

$$\frac{|K|}{\omega_g} = 1 \quad (۹)$$



$$K = \omega_g \quad (10)$$

برای بدست آوردن حاشیه فاز از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{PM} = \pi + \text{Phase}(G(j\omega_g)) \quad (11)$$

$$\text{PM} = \pi - \frac{\pi}{2} - \omega_g T \quad (12)$$

$$\text{PM} = \frac{\pi}{2} - \omega_g T \quad (13)$$

۴.۱ بررسی پایداری

برای پایداری هم حاشیه فاز و هم حاشیه بهره باید مثبت باشند. با توجه به این مورد داریم:

$$\text{PM} = \frac{\pi}{2} - \omega_g T > 0 \quad (14)$$

$$\frac{\pi}{2} > \omega_g T \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{2T} > K \quad (16)$$

$$\text{GM} = -20 \cdot \log \left(\left| K \cdot \frac{2T}{\pi} \right| \right) > 0 \quad (17)$$

$$K < \frac{\pi}{2T} \quad (18)$$

در نتیجه برای پایداری شرط بالا باید برقرار باشد.

۲ سوال دوم

در این سوال از ما خواسته شده که بهره را طوری تنظیم کنیم که حاشیه فاز ما برابر با ۴۵ درجه شود. تابع تبدیل حلقه باز سیستم ما به صورت زیر می‌باشد:

$$G(s) = k \cdot \frac{s+2}{s^2} \quad (19)$$



۱.۲ بررسی حاشیه فاز

با توجه به اینکه فاز ما قرار است ۴۵ درجه باشد داریم:

$$\text{PM} = \pi + \text{Phase}(G(j\omega_g)) \quad (20)$$

$$45 \text{ degrees} = \pi/4 \text{ radians}$$

$$\frac{\pi}{4} = \pi + \arctan\left(\frac{\omega_g}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (21)$$

$$\frac{\omega_g}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (22)$$

$$\omega_g = 2 \quad (23)$$

$$G(j\omega_g) = \frac{k \cdot (j\omega_g + 2)}{-\omega_g^2} \quad (24)$$

$$|G(j\omega_g)| = k \cdot \frac{\sqrt{4 + \omega_g^2}}{\omega_g^2} = 1 \quad (25)$$

$$k^2 = \frac{\omega_g^4}{4 + \omega_g^2} \quad (26)$$

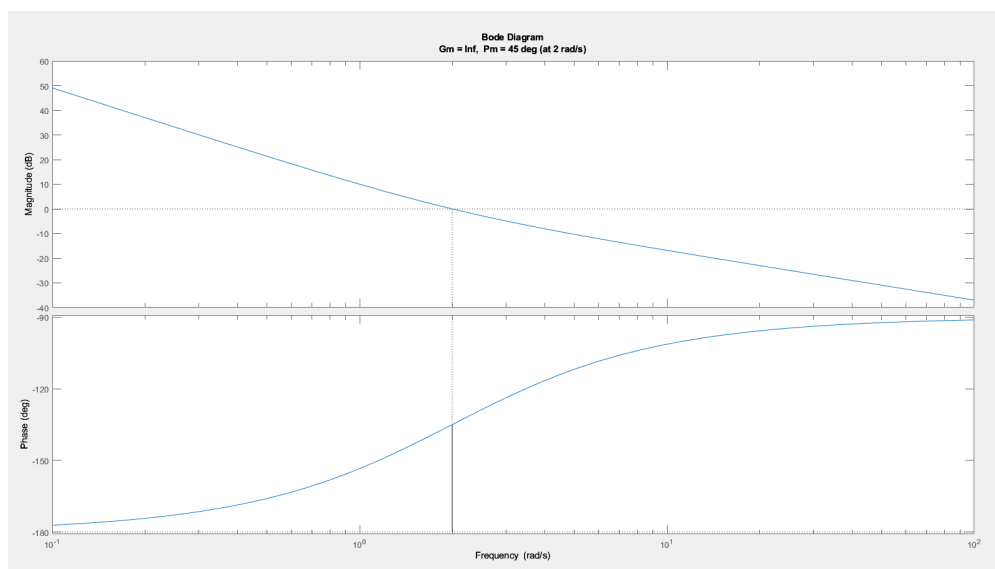
$$\omega_g = 2$$

$$k^2 = \frac{16}{8} \quad (27)$$

$$k = \sqrt{2} \approx 1.4142 \quad (28)$$

۲.۲ تایید نتیجه در متلب

با توجه به مقدار بهره بدست آمده، نتیجه ما در MATLAB با استفاده از دستور margin به صورت زیر قابل مشاهده است:

شکل ۱: $\text{margin}(G)$

۳ سوال سوم

در این سوال یک تاخیر داخل سیستم مشاهده می شود. $T = 2$ داده شده و با توجه به این موضوع تابع تبدیل سیستم ما برابر است با:

$$G(s) = \frac{5 \cdot e^{-2s} \cdot (s+1)}{(5s+1)(s)} \quad (29)$$

با استفاده از تقریب پاده مرتبه اول، با تاخیری که در سیستم داریم به صورت زیر رفتار می کنیم:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - Ts/2}{1 + Ts/2} \quad (30)$$

$$e^{-2s} \approx \frac{1-s}{1+s} \quad (31)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{5 \cdot (1-s) \cdot (s+1)}{(5s+1)(s)(1+s)} \quad (32)$$

۱.۳ رسم نمودار بودی

برای رسم نمودار بودی به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱. 5 به ما اندازه $20 \log 5$ نمودار اندازه را شیفیت می دهد.

۲. $1/s$ به ما به اندازه -20 db/dec شیب می دهد و به اندازه -90 درجه هم فاز.

۳. $s+1$ به ما به اندازه $+20 \text{ db/dec}$ شیب می دهد و $+90$ درجه هم فاز.

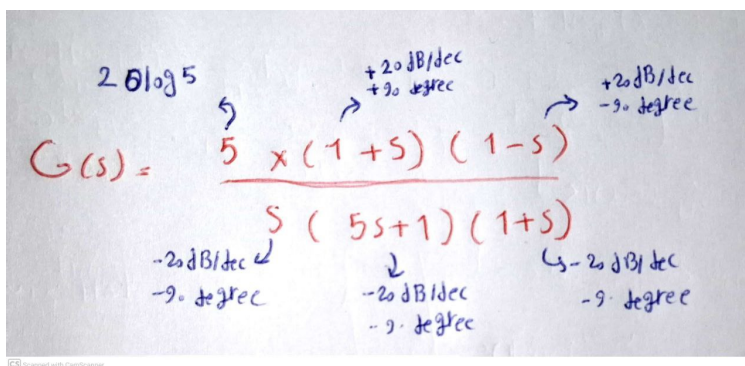


۴. $1/(5s+1)$ به ما در فرکانس 1/5 به اندازه -20 db/dec شیب می دهد و به اندازه -90 درجه هم فاز می دهد.

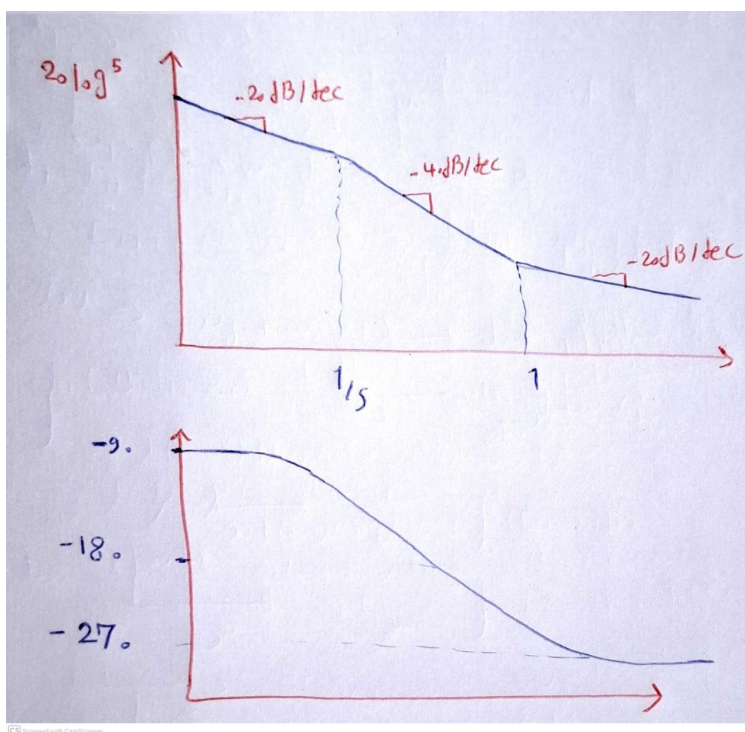
۵. $1-s$ به ما اندازه +20 db/dec شیب می دهد در فرکانس 1 و به اندازه -90 درجه فاز می دهد چون صفر غیرکمینه فاز داریم.

۶. $1/(1+s)$ به ما به اندازه -20 db/dec در فرکانس 1 شیب می دهد و به اندازه -90 درجه هم فاز می دهد.

در نهایت رسم دستی ما به صورت زیر خواهد بود:

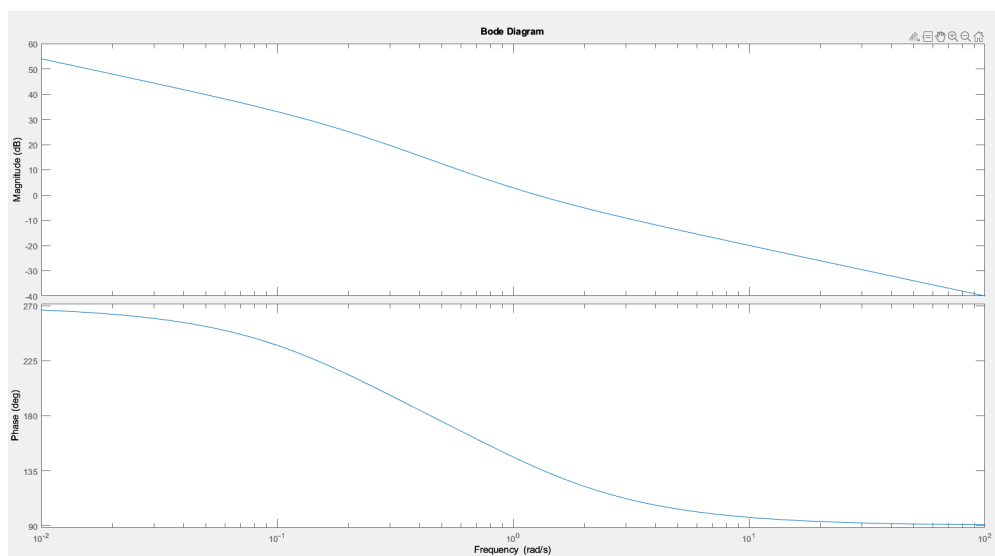


شکل ۲: اطلاعات مربوط به تابع تبدیل برای رسم نمودار بودی



شکل ۳: نمودار بودی رسم شده به صورت دستی

نتیجه نمودار بودی رسم شده توسط MATLAB را نیز در شکل زیر می توان مشاهده کرد:



شکل ۴: نمودار بودی رسم شده توسط MATLAB

۲.۳ پیدا کردن ω_{gc}

$$|G(j\omega_{gc})| = 1 \quad (۳۳)$$

می‌دانیم که برای پیدا کردن اندازه داریم:

$$\sqrt{\text{imaginary}^2 + \text{real}^2} \quad (۳۴)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$|G(j\omega_{gc})| = \frac{5 \cdot \sqrt{1 + \omega_{gc}^2}}{\sqrt{25\omega_{gc}^4 + \omega_{gc}^2}} = 1 \quad (۳۵)$$

$$5 \cdot \sqrt{1 + \omega_{gc}^2} = \sqrt{25\omega_{gc}^4 + \omega_{gc}^2} \quad (۳۶)$$

$$25 \cdot (1 + \omega_{gc}^2) = 25\omega_{gc}^4 + \omega_{gc}^2 \quad (۳۷)$$

$$25\omega_{gc}^4 - 24\omega_{gc}^2 - 25 = 0 \quad (۳۸)$$

با توجه به معادله بالا ریشه‌های آن برابر خواهد بود با:



```
>> roots([25,0, -24 ,0, -25])
```

```
ans =
```

```
1.2606 + 0.0000i
-1.2606 + 0.0000i
0.0000 + 0.7932i
0.0000 - 0.7932i
```

شکل ۵: ریشه‌های معادله درجه ۴

با توجه به نتایج بدست آمده فرکانس گذر بهره ما 1.26 هست تقریباً.

۳.۳ محاسبه فاز

$$\text{Phase}(G(j\omega_{gc})) = -\arctan(\omega_{gc}) - \frac{\pi}{2} - \arctan(5\omega_{gc}) \quad (39)$$

$$\text{Phase}(G(1.26j)) = -\arctan(1.26) - \frac{\pi}{2} - \arctan(5 \cdot 1.26) = -3.88 \quad (40)$$

۴.۳ محاسبه حاشیه فاز

$$\text{PM} = \pi + \text{Phase}(G(j\omega_{gc})) = \pi - 3.88 = -0.74 \text{ radians} \quad (41)$$

$$-0.74 \cdot \frac{180}{\pi} = -42.4^\circ \quad (42)$$

۵.۳ محاسبه فرکانس گذر فاز

$$\text{Phase}(G(j\omega_{pc})) = -\pi \quad (43)$$

$$-\arctan(\omega_{pc}) - \frac{\pi}{2} - \arctan(5\omega_{pc}) = -\pi \quad (44)$$



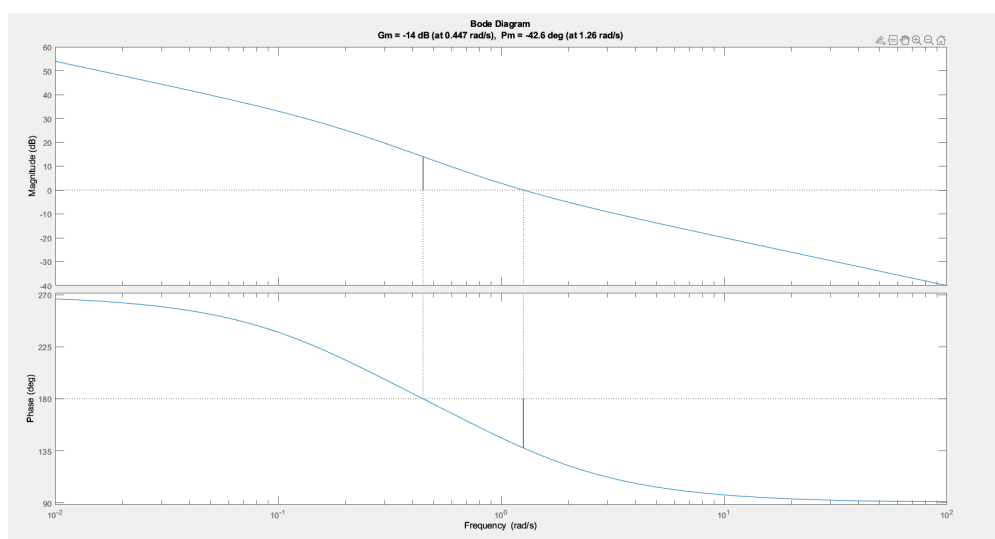
از قانون زیر برای ساده‌سازی استفاده می‌کنیم:

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \quad (45)$$

در نتیجه داریم:

$$\arctan\left(\frac{6\omega_{pc}}{1-5\omega_{pc}^2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (46)$$

از طرفین اگر \tan بگیریم مشخص می‌شود که یک سمت تساوی تعریف نشده خواهد بود. اما با توجه به نمودار زیر که توسط MATLAB و دستور margin رسم شده این فرکانس تقریباً برابر با 0.447 خواهد بود که از طریق روش‌های عددی می‌توان آن را محاسبه کرد.



شکل ۶: نمودار رسم شده توسط دستور margin

۶.۳ محاسبه GM

$$GM = -20 \cdot \log(|G(j\omega_{pc})|) \quad (47)$$

$$|G(j\omega_{pc})| = \frac{5 \cdot \sqrt{1 + \omega_{pc}^2}}{\sqrt{\omega_{pc}^2 + 25\omega_{pc}^4}} \quad (48)$$

$$\omega_{pc} = 0.447 \quad (49)$$

$$|G(0.447j)| = 5.16 \quad (50)$$

$$GM = -20 \cdot \log(5.16) = -14.25 \quad (51)$$



۷.۳ بررسی پایداری

از آنجایی که هم حاشیه فاز و هم حاشیه بهره ما منفی هستند در حالت کلی این سیستم ما ناپایدار می‌باشد.

۴ سوال چهارم

در این سوال از ما خواسته شده تا حد فاز و حد بهره سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را به ازای $a > 0$ پیدا کنیم.

$$G(s) = \frac{4a^2}{(s+a)^2} \quad (52)$$

۱.۴ پیدا کردن فرکانس گذر بهره

$$|G(j\omega_{gc})| = 1 \quad (53)$$

$$\frac{4a^2}{\omega_{gc}^2 + a^2} = 1 \quad (54)$$

$$\omega_{gc} = \sqrt{3}a \quad (55)$$

۲.۴ محاسبه حاشیه فاز

$$PM = \pi + \text{Phase}(G(j\omega_{gc})) \quad (56)$$

$$\text{Phase}(G(j\omega_{gc})) = 0 - 2 \arctan\left(\frac{\omega_{gc}}{a}\right) \quad (57)$$

$$PM = \pi - 2 \arctan\left(\frac{\omega_{gc}}{a}\right) \quad (58)$$

$$PM = \pi - 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{3}a}{a}\right) \quad (59)$$

$$PM = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ radians} = 60^\circ \quad (60)$$



۳.۴ محاسبه فرکانس گذر فاز

$$\text{Phase}(G(j\omega_{pc})) = -\pi \quad (۶۱)$$

$$0 - 2 \arctan\left(\frac{\omega_{pc}}{a}\right) = -\pi \quad (۶۲)$$

$$\arctan\left(\frac{\omega_{pc}}{a}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (۶۳)$$

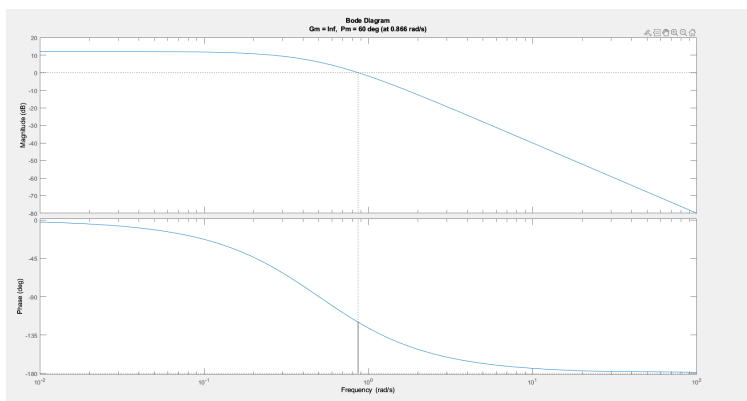
اگر از طرفین \tan بگیریم حاصل تعریف نشده خواهد بود.

۴.۴ محاسبه حاشیه بهره

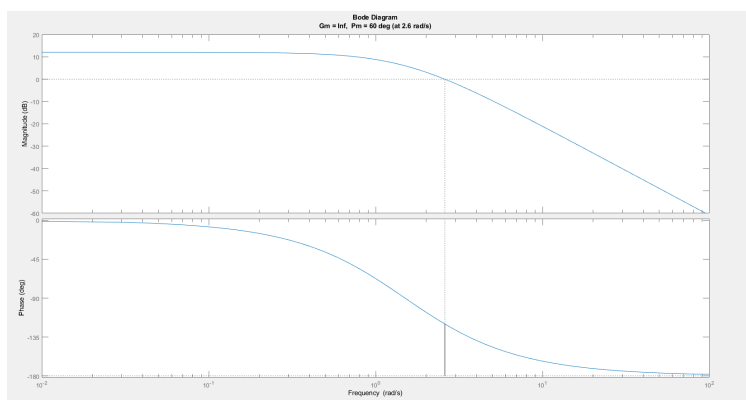
$$GM = \infty \quad (۶۴)$$

۵.۴ رسم نمودار بودی

در تصاویر زیر به ازای $a = 0.5$ و $a = 1.5$ توسط MATLAB نمودار بودی تابع تبدیل را به همراه حد فاز و حد بهره رسم کردیم:



شکل ۷: $\text{margin}(G)$ with $a = 0.5$



شکل ۸: $\text{margin}(G)$ with $a = 1.5$