دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق

درس سیستم های کنترل خطی

استاد: دکتر حمیدرضا تقی راد

پاسخ تمرین سری سوم

نام و نام خانوادگی	محمدامین محمدیون شبستری
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۱۲۲۵۰۳
تاریخ	آذر ۱۴۰۳

فهرست مطالب

۱ سوال اول ۵
۱.۱ پیدا کردن سیستم حلقه بسته ۵
۲.۱ معادله مشخصه سیستم حلقه بسته ۵
۳.۱ Routh-Hurwitz ۵
۴.۱ بررسی پایداری ۶

۲ سوال دوم ۶
۱.۲ رسم مکان هندسی ۷

۳ سوال سوم ۸
۱.۳ الف - رسم مکان هندسی ۸
۲.۳ ب - بررسی بهره ۱۰

۴ سوال ۴ ۱۱
۱.۴ پیدا کردن بهره: ۱۲

۵ سوال پنجم ۱۲
۱.۵ االف - صفرها و قطب ها ۱۳
۲.۵ ب) ورودی پله به سیستم اعمال کنید و پاسخ آن را رسم کنید. مقادیر زیر را محاسبه و تحلیل کنید: ۱۳
۳.۵ کد متلب سیستم شبیه سازی شده ۱۴
۴.۵ کنترلر PD ۱۵
۵.۵ پاسخ سیستم با استفاده از کنترلر PD ۱۵
۶.۵ مقایسه و بهبودهای حاصل ۱۵

۶ سوال ششم امتیازی ۱۶
۱.۶ پاسخ سوال امتیازی ۱۶

فهرست تصاویر

۱ مکان هندسی سوال دو ۸
۲ مکان هندسی سوال سه ۱۱
۳ نمودار مکان هندسی پرسش چهار ۱۲
۴ صفر و قطب های سیستم ۱۳
۵ نمودار پاسخ پله سیستم ۱۴
۶ سیستم طراحی شده در سیمولینک ۱۵
۷ پاسخ سیستم طراحی شده در سیمولینک ۱۵

فهرست جداول

۱ Routh-Hurwitz ۵
۲ Table Routh-Hurwitz ۱۰

فهرست برنامه‌ها

۱ کد سیستم شبیه سازی شده ۱۴

۱ سوال اول

در سیستم زیر

$$G_H = \frac{K(s+a)}{(s+b)(s+2)^2(s+4)}$$

رابطه a، b و k را چنان تعیین نمایید که سیستم پایدار باشد.

۱.۱ پیدا کردن سیستم حلقه بسته

ما میدانیم که با داشتن تابع تبدیل حلقه باز میتوانیم تابع تبدیل حلقه بسته را به فرمت زیر بدست بیاریم:

$$\frac{G}{1+G}$$ (۱)

در نتیجه داریم:

$$\frac{K(s+a)}{(s+b)(s+2)^2(s+4)+K(s+a)}$$ (۲)

۲.۱ معادله مشخصه سیستم حلقه بسته

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر خواهد بود با:

$$(s+b)(s+2)^2(s+4)+K(s+a)$$ (۳)

اگر معادله رو باز کنیم داریم:

$$s^4+(8+b)s^3+(20+8b)s^2+(16+20b+k)s+(16b+ka)$$ (۴)

۳.۱ Routh-Hurwitz

با استفاده از معیار پایداری راث- هرویتز پایداری سیستم داده شده را بررسی میکنیم:

جدول ۱: Routh-Hurwitz

۱	$8b+20$	$ka+16b$	s^4
$(8+b)$	$(20b+16+k)$	۰	s^3
$\frac{(8+b)(8b+20)-(20b+16+k)}{(8+b)}=A$	$ka+16b$	۰	s^2
$\frac{A(20b+16+k)-(8+b)(ka+16b)}{A}=C$	۰	۰	s^1
$ka+16b$	۰	۰	s^0

۴.۱ بررسی پایداری

برای پایداری در ستون اول نباید تغییر علامت داشته باشیم:

برای پایداری، نباید تغییر علامت در ستون اول وجود داشته باشد:

$$8 + b > 0 \quad \Rightarrow b > -8 \tag{۵}$$

$$ka + 16b > 0 \quad \Rightarrow ka > -16b \tag{۶}$$

$$A > 0 \quad \Rightarrow (8+b)(8b+20) - (20b+16+k) > 0 \tag{۷}$$

$$64b + 160 + 8b^2 + 20b - 20b - 16 - k > 0 \tag{۸}$$

$$8b^2 + 64b + 144 > k \tag{۹}$$

$$C > 0 \quad \Rightarrow A(20b+16+k) > (8+b)(ka+16b) \tag{۱۰}$$

$$\frac{(8+b)(8b+20) - (20b+16+k)}{(8+b)^2}(20b+16+k) > ka + 16b \tag{۱۱}$$

$$8b^2 - 64b + 144 - k > 0 \tag{۱۲}$$

به ازای $k > 16$ مقادیر $b_1, 2$ حقیقی هستند.

۲ سوال دوم

مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^3 + 4s^2 + 5s}$$

به ازای مقادیر مثبت K رسم کنید. (تمامی روابط مربوط به نقطه شکست، زاویه خروج از قطب و ورود به صفر، مجانب‌ها محاسبه شوند.)
در خصوص پایداری و عملکرد سیستم حلقه بسته به ازای تغییرات K از صفر تا بی‌نهایت بحث نمایید.

۱.۲ رسم مکان هندسی

- مرحله ۱: قطب‌های حلقه بسته سیستم به ازای $k = 0$ همان قطب‌های حلقه باز سیستم هستند. یعنی شروع مکان هندسی از $k = 0$ است.
- مرحله ۲: صفرهای سیستم حلقه بسته به ازای $k = \infty$ همان قطب‌های سیستم حلقه باز هستند. یعنی پایان مکان هندسی برای $k = \infty$ خواهد بود.
- مرحله ۳: برای $k > 0$، باید بخش‌هایی از محور حقیقی را در نظر گرفت که سمت راست آن‌ها تعداد فرد صفر و قطب حقیقی وجود دارد.
- مرحله ۴: نقاط شکست از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{s^3+4s^2+5s}\right)=0 \qquad (۱۳)$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(s^3+4s^2+5s)-(s+1)(3s^2+8s+5)=0 \qquad (۱۴)$$

و به معادله زیر منتهی می‌شود:

$$2s^3+7s^2-8s-5=0 \qquad (۱۵)$$

حل معادله به ریشه‌های $s_0 = -2.1974$، $s_1, s_2 = -0.6513 \pm 0.8474$ منجر می‌شود. بنابراین، نقطه شکست نداریم، چون ریشه‌های حقیقی ما در ناحیه $k > 0$ قرار نگرفته‌اند.

- مرحله ۵: محل تقاطع مجانب‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{(0-2+j-2-j)-(-1)}{3-1} = \frac{-3}{2} \qquad (۱۶)$$

- مرحله ۶: زاویه مجانب‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta = \frac{(2x+1)\pi}{n-m} = \frac{(2x+1)\pi}{2} \qquad (۱۷)$$

برای $x = 0$، $\theta = \frac{\pi}{2}$ و برای $x = 1$، $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

- مرحله ۷: بررسی پایداری با روش راث-هرویتز. اما این مرحله در این مثال نیازی نیست زیرا که دو قطب به سمت مجانب‌ها و قطب دیگر به سمت صفری که در -1 هست حرکت می‌کنند و سیستم هیچگاه ناپایدار نمی‌شود.
- مرحله ۸: زاویه خروج از قطب‌ها:

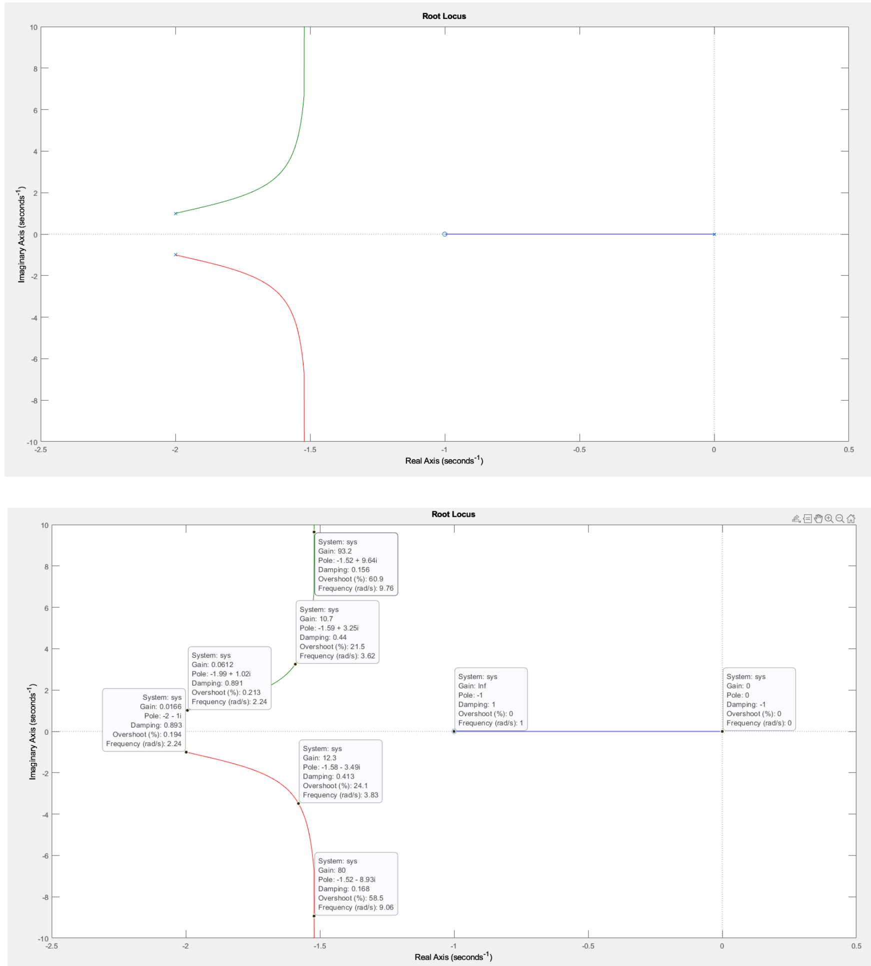
$$\theta_z - (\theta + \theta_1 + \theta_2) = 180 \qquad (۱۸)$$

$$180 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - \left(\theta + 90 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 180\right) = 180 \qquad (۱۹)$$

$$\theta = (-0.78 - \pi - 0.46 - \pi) \times \frac{180}{\pi} \approx -71.04 \qquad (۲۰)$$

زاویه خروج از قطب‌ها $-71.04°$ است.

- نمودار مکان هندسی: در نهایت، نمودار مکان هندسی ما به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۱: مکان هندسی سوال دو

۳ سوال سوم

معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)+k(s+3)=0 \tag{۲۱}$$

- الف) مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه را به ازای تغییرات $k>0$ رسم کنید.
- ب) به ازای چه بهره‌ای سیستم نوسانی می‌شود؟ فرکانس نوسان را نیز محاسبه کنید.

۱.۳ الف - رسم مکان هندسی

معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)+k(s+3)=0 \tag{۲۲}$$

مرحله ۱: ابتدا معادله داده شده را به فرم استاندارد تابع تبدیل تبدیل می‌کنیم:

$$1 + \frac{k(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} = 0 \tag{۲۳}$$

که به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} \tag{۲۴}$$

مرحله ۲: صفرها و قطب‌ها به ازای $k = 0$ و $k = \infty$:

- یک صفر در $s = -3$ داریم و بقیه صفرها در بی‌نهایت هستند (برای $k = \infty$).
- قطب‌ها در $s = 0$، $s = -5$، $s = -6$، $s = -1 + j$ و $s = -1 - j$ قرار دارند (برای $k = 0$).

مرحله ۳: برای $k > 0$ باید نقاطی از محور حقیقی را در نظر گرفت که سمت راست آن‌ها تعداد فرد صفر و قطب وجود دارد.

مرحله ۴: برای پیدا کردن نقطه شکست مشتق تابع تبدیل را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) - (s+3)\Big(&(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) + s(s+6)(s^2+2s+2) \\ &+ s(s+5)(s^2+2s+2) + s(s+6)(s+5)(2s+2)\Big) = 0 \end{aligned}$$

ساده‌سازی معادله به شکل زیر منتهی می‌شود:

$$(s^3 + 11s^2 + 30)(s^2 + 2s + 2) - (s+3)(5s^4 + 52s^3 + 102s^2 + 164s + 120) = 0 \tag{۲۵}$$

حل معادله ریشه‌های زیر را به دست می‌دهد:

$$s_1 \approx -5.52, \quad s_2, s_3 \approx -3.33 \pm 1.204j, \quad s_4, s_5 \approx -0.65 \pm 0.467j \tag{۲۶}$$

نقطه شکست قابل قبول در ناحیه مکان هندسی برابر با $s = -5.52$ است.

مرحله ۵: محل برخورد مجانب‌ها:

$$\sigma = \frac{(0 - 1 + j - 1 - j - 5 - 6) - (-3)}{4} = \frac{-10}{4} = -2.5 \tag{۲۷}$$

مرحله ۶: زاویه مجانب‌ها برای $k > 0$:

$$\theta = \frac{(2x+1)\pi}{m-n} = \frac{(2x+1)\pi}{4} \tag{۲۸}$$

که برای مقادیر مختلف x داریم:

- برای $x = 0$، $\theta = \frac{\pi}{4}$
- برای $x = 1$، $\theta = \frac{3\pi}{4}$
- برای $x = 2$، $\theta = \frac{7\pi}{4}$
- برای $x = 3$، $\theta = \frac{5\pi}{4}$

مرحله ۷: زاویه خروج از قطب‌ها:

$$\theta_z - (\theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 90) = 180 \quad (۲۹)$$

که برای محاسبه زاویه‌ها داریم:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right), \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \quad \theta_3 = 180 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (۳۰)$$

$$\theta_z = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (۳۱)$$

در نتیجه، زاویه خروج از قطب‌ها:

$$\theta \approx -43^\circ \quad (۳۲)$$

۲.۳ ب - بررسی بهره

معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60+k)s + 3k = 0 \quad (۳۳)$$

جدول ۲: Table Routh-Hurwitz

1	54	$60+k$	s^5
13	82	$3k$	s^4
47.6	$\frac{780+10k}{13}$	0	s^3
$\frac{3123.2-10k}{47.6}$	$3k$	0	s^2
$\frac{\left(\frac{3123.2-10k}{47.6}\right)\left(\frac{780+10k}{13}\right)-142.8k}{\frac{3123.2-10k}{47.6}} = A$	0	0	s^1
$3k$	0	0	s^0

برای پیدا کردن نقاطی که از محور موهوی توسط نمودار مکان هندسی قطع شده، سطر $A = 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$(65.61 - 0.21k)(60 + 0.769k) - 142.8k = 0 \quad (۳۴)$$

ساده‌سازی معادله به شکل زیر است:

$$3936.6 + 50.45k - 12.6k - 0.1614k^2 - 142.8k = 0 \quad (۳۵)$$

$$0.1614k^2 + 104.95k - 3936.6 = 0 \quad (۳۶)$$

حل معادله برای k به دو ریشه می‌دهد:

$$k_1 = 35.56, \quad k_2 = -625.56 \quad (۳۷)$$

از آنجا که $k > 0$ است، $k_1 = 35.56$ قابل قبول است.

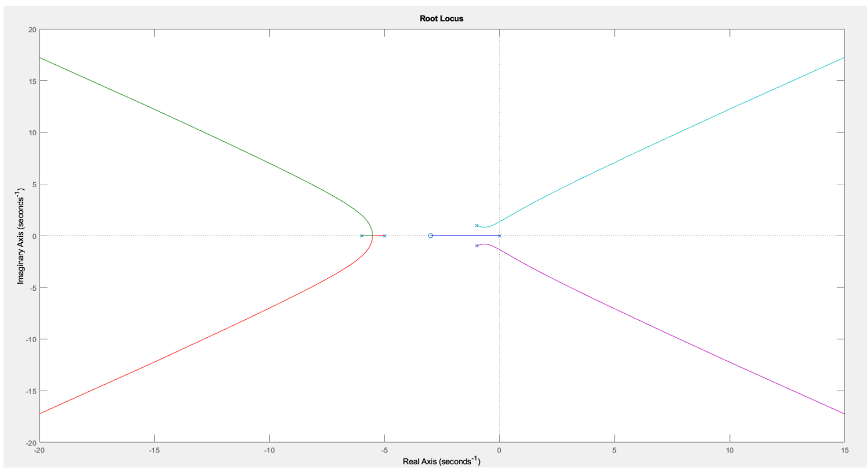
حال از معادله کمکی استفاده می‌کنیم:

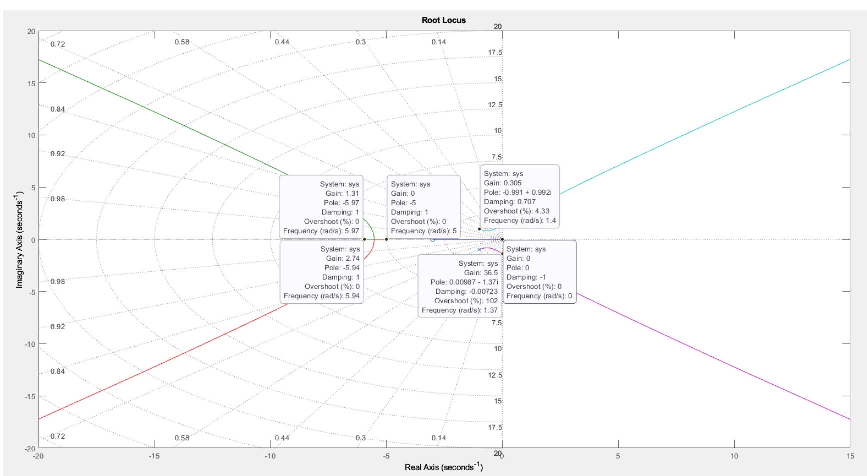
$$\frac{(3123.2 - 355.6)}{47.6} s^2 + 3(35.56) = 0 \qquad (۳۸)$$

حل معادله برای s به دو ریشه می‌دهد:

$$s_1 = 1.35j, \qquad s_2 = -1.35j \qquad (۳۹)$$

در نتیجه، به ازای $k = 35.56$ سیستم نوسانی است و فرکانس نوسان آن برابر با 1.35 است.

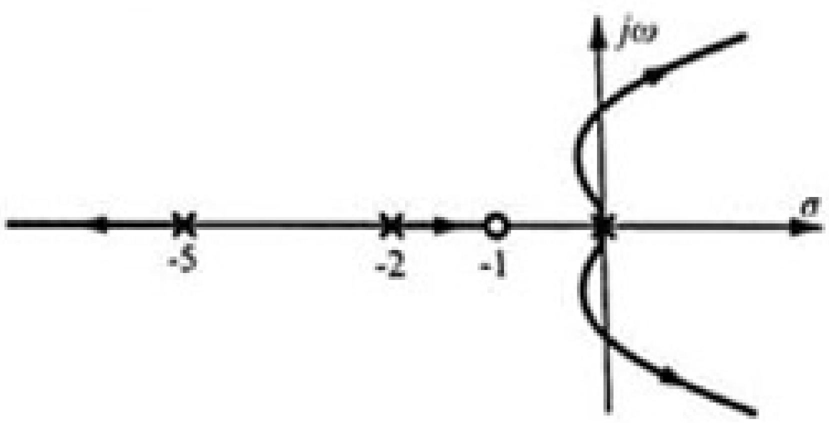




شکل ۲: مکان هندسی سوال سه

۴ سوال ۴

برای سیستمی که مکان هندسی ریشه های آن در شکل زیر نشان داده شده است، مقدار بهره را طوری تعیین کنید که خطای حالت ماندگار به ورودی سهمی برابر ۰.۱ گردد.



شکل ۳: نمودار مکان هندسی پرسش چهار

۱.۴ پیدا کردن بهره:

در این بخش به تحلیل سیستم و محاسبات مربوط به خطای ماندگار و تیپ سیستم پرداخته می‌شود.

خطای ماندگار به ورودی سهمی مطابق اطلاعات سوال برابر با $e_{\text{ss}} = 0.1$ است. از این رو سیستم تیپ ۲ است که به این معنی است که قطب‌های مبدا دو عدد هستند.

$$e_{\text{ss}} = 0.1 \tag{۴۰}$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{1}{k_a} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad k_a = 10 \tag{۴۱}$$

سپس مقدار k_a را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$k_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2(s+1)k}{s^2(s+2)(s+5)} = 10 \tag{۴۲}$$

در نهایت، مقدار k به صورت زیر بدست می‌آید:

$$k = 100 \tag{۴۳}$$

۵ سوال پنجم

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{5s+10}{s^2+4s+5}$$

- الف) سیستم بالا را در محیط متلب تعریف کنید و صفرها و قطب‌های آن را به دست آورید.
- ب) ورودی پله به سیستم اعمال کنید و پاسخ آن را رسم کنید. مقادیر زیر را محاسبه و تحلیل کنید:
  - فراجهش
  - زمان نشست
  - زمان تاخیر
  - زمان صعود
  - خطای حالت ماندگار
- ج) یک کنترلر PD در محیط سیمولینک طراحی کنید و مقادیر Kd و Kp را گزارش کنید.
- د) دوباره ورودی پله به سیستم اعمال کنید و پاسخ سیستم را با استفاده از کنترلر PD رسم کنید.
- ه) پاسخ سیستم در حالت‌های بدون کنترلر (بخش ب) و با کنترلر PD (بخش د) را مقایسه کنید و بهبودهای حاصل را تحلیل کنید.

۱.۵ االف – صفرها و قطب ها

پس از تعریف سیستم از طریق کدی که در ادامه آمده میتوان صفرها و قطب ها را پیدا کرد:

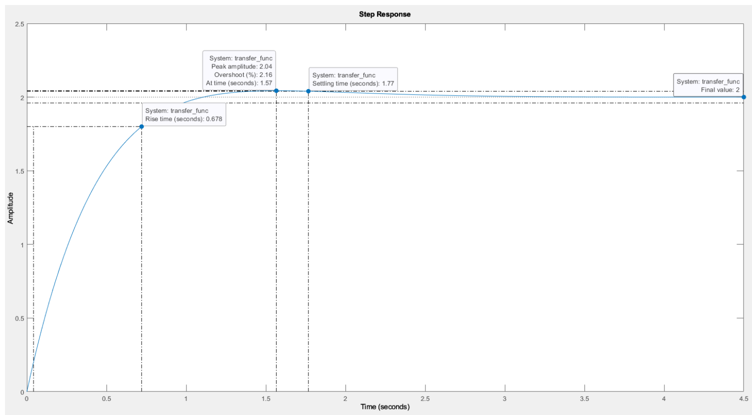
```
Poles:

ans =

  -2.0000 + 1.0000i
  -2.0000 - 1.0000i

Zeros:

ans =

    -2

with step function as input:

ans =

  struct with fields:

        RiseTime: 0.6784
   TransientTime: 1.7671
    SettlingTime: 1.7671
     SettlingMin: 1.8146
     SettlingMax: 2.0432
       Overshoot: 2.1606
      Undershoot: 0
            Peak: 2.0432
        PeakTime: 1.5658
```

شکل ۴: صفر و قطب های سیستم

۲.۵ ب) ورودی پله به سیستم اعمال کنید و پاسخ آن را رسم کنید. مقادیر زیر را محاسبه و تحلیل کنید:

پاسخ پله سیستم و اطلاعات سیستم به صورت زیر خواهد بود:

```
     RiseTime: 0.6784
TransientTime: 1.7671
 SettlingTime: 1.7671
  SettlingMin: 1.8146
  SettlingMax: 2.0432
    Overshoot: 2.1606
   Undershoot: 0
         Peak: 2.0432
     PeakTime: 1.5658
```



شکل ۵: نمودار پاسخ پله سیستم

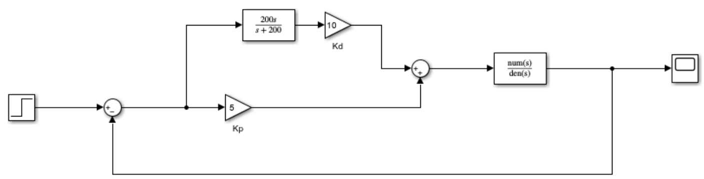
۳.۵ کد متلب سیستم شبیه سازی شده

```
num = [5 10];
den = [1 4 5];

transfer_func = tf(num, den);
disp('G(s):')
transfer_func


disp('Poles:')
pole(transfer_func)
disp('Zeros:')
zero(transfer_func)


step(transfer_func)
```

```
disp('with step function as input:')
stepinfo(transfer_func)
```

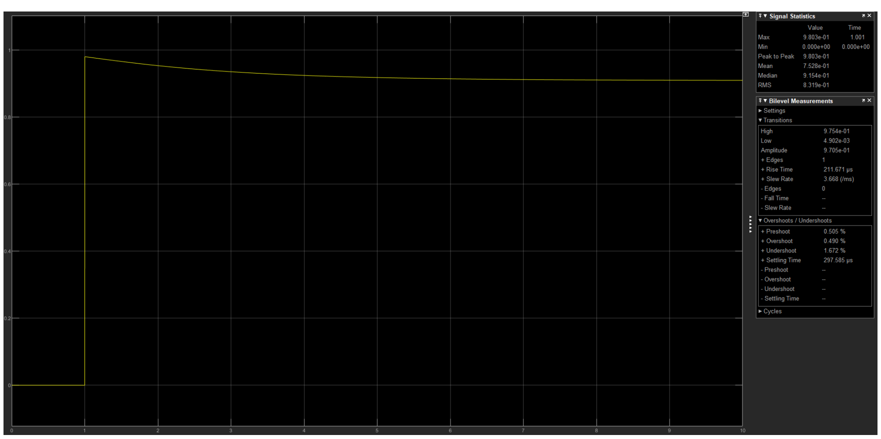
Code 1: کد سیستم شبیه سازی شده

۴.۵ کنترلر PD



شکل ۶: سیستم طراحی شده در سیمولینک

۵.۵ پاسخ سیستم با استفاده از کنترلر PD



شکل ۷: پاسخ سیستم طراحی شده در سیمولینک

۶.۵ مقایسه و بهبودهای حاصل

اگر صرفاً $G(s)$ را بدون هیچ فیدبک حلقه و یا هیچ کنترلری تعریف کنیم و به آن ورودی پله بدهیم، همانطور که در نتایج مشخص است:

$$\text{Rise time} = 678 \text{ ms}$$

Overshoot = 2.16%

Peak = 2.04

Settling time = 1.77 s

Final value = 2

خطای حالت ماندگار هم برابر با یک است، زیرا که به ازای ورودی پله واحد باید به حالت ماندگار ۱ برسیم. چون سیستم به ۲ رسیده است، در نتیجه یک واحد خطا داریم.
اما زمانی که کنترلر PD به سیستم اضافه شد:

Rise time = 211.671 microseconds

Overshoot = 0.49%

Settling time = 297.585 microseconds

Peak = 0.9803

کاملاً مشخص است که سیستم بهبود پیدا کرده است. همچنین مقدار Final value هم بسیار به ۱ نزدیک شده و خطای حالت ماندگار نیز کاهش یافته و تقریباً صفر شده است. این بدین معنی است که خروجی ورودی را دقیقاً دنبال کرده است.

۶ سوال ششم امتیازی

برای مدلی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{0.2}{s(s+1)}$ کنترل کننده‌ای پس‌فاز طراحی کنید به صورتی که $\zeta = 0.45$ و حداقل ضریب خطای سرعت (K_v) برابر با ۱۰ باشد.

۱.۶ پاسخ سوال امتیازی

$$H(s) = \frac{k(T_d s + 1)}{(T_p s + 1)} \tag{۴۴}$$

حاصل ضرب حلقه باز:

$$L(s) = H(s)G(s), \qquad K_v = 10 \tag{۴۵}$$

$$\lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} \left(\frac{k(T_d s + 1)}{(T_p s + 1)} \cdot \frac{0.2}{s(s+1)} \right) \tag{۴۶}$$

$$0.2k = 10 \quad \Rightarrow \quad k = 50 \tag{۴۷}$$

سیستم حلقه باز:

$$\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\frac{10(T_d s+1)}{(T_p s+1)s(s+1)}}{1+\frac{10(T_d s+1)}{(T_p s+1)s(s+1)}} = \frac{1}{\left(\frac{10(T_d s+1)}{(T_p s+1)s(s+1)}+1\right)} \tag{۴۸}$$

$$\zeta = 0.45 \tag{۴۹}$$

دو انتخاب داریم:

$$T_d = 1, \quad T_p = T_d \tag{۵۰}$$

در واقع $T_d = 1$ است زیرا با انتخاب $T_d = T_p$ کنترلر بهره ثابت می‌شود. در نتیجه:

$$\text{if } T_d = 1 \quad \text{then} \quad \frac{10}{T_p}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{5}{T_p}s+\frac{10}{T_p}} \tag{۵۱}$$

$$\omega_n^2 = \frac{10}{T_p}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{10}{T_p}} \tag{۵۲}$$

$$2\zeta\omega_n = 0.9\omega_n = \frac{1}{T_p}, \quad T_p = \frac{10}{81} = 0.123 \tag{۵۳}$$

بنابراین:

$$H(s) = \frac{50(s+1)}{0.123s+1} \tag{۵۴}$$