دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق

درس سیستم های کنترل خطی

استاد: دکتر حمیدرضا تقی راد

پاسخ تمرین سری اول

نام و نام خانوادگی	محمدامین محمدیون شبستری
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۱۲۲۵۰۳
تاریخ	مهر ۱۴۰۳

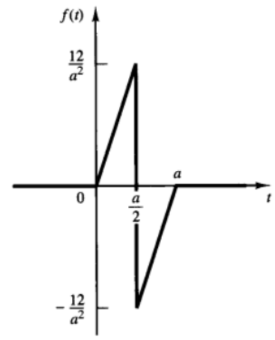
فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فهرست برنامه‌ها

۱ نمودار شکل زیر مربوط به حوزه زمان هست. تبدیل لاپلاس این تابع را بیابید.



شکل ۱: نمودار حوزه زمان تابع f(t)

۱.۱ معادله تابع:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{24}{a^3}t & \text{for} 0 < t \leq \frac{a}{2} \\ \frac{24}{a^3}t - \frac{24}{a^2} & \text{for} \frac{a}{2} < t \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{۱}$$

معادله تابع را نیز بر حسب توابع ویژه و با استفاده از تابع پله مینویسیم:

$$f(t) = \frac{24}{a^3}t\left(u(t) - u\left(t - \frac{a}{2}\right)\right) + \left(\frac{24}{a^3}t - \frac{24}{a^2}\right)\left(u\left(t - \frac{a}{2}\right) - u(t-a)\right) \tag{۲}$$

$$\begin{aligned} &\frac{24}{a^3}tu(t) - \frac{24}{a^3}tu(t-\frac{a}{2}) + \frac{24}{a^3}tu(t-\frac{a}{2}) - \frac{24}{a^3}tu(t-a) \\ &- \frac{24}{a^2}u(t-\frac{a}{2}) + \frac{24}{a^2}u(t-a) = \frac{24}{a^3}tu(t) \\ &+ u(t-\frac{a}{2})\left(-\frac{24}{a^3}t + \frac{24}{a^3}t\right) + u(t-a)\left(-\frac{24}{a^3}t + \frac{24a}{a^3}\right) \\ &- u(t-\frac{a}{2})\frac{24}{a^2} = \frac{24}{a^3}tu(t) + u(t-a)(t-a)\left(-\frac{24}{a^3}\right) - u(t-\frac{a}{2})\frac{24}{a^2} \end{aligned} \tag{۳}$$

۲.۱ از رابطه بالا تبدیل لاپلاس میگیریم:

ما میدانیم که:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{dF}{dS} \tag{۴}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-aS} \tag{۵}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t)\} = \frac{F(S)}{S} \tag{۶}$$

با توجه به این روابط از رابطه (۳) تبدیل لاپلاس میگیریم:

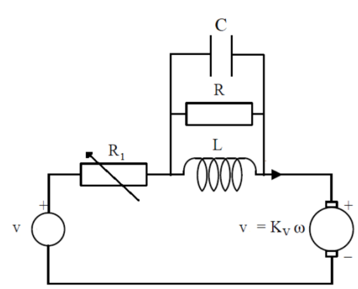
$$\mathcal{L}\{24tu(t)\} = \frac{24}{a^3 s^2} \tag{۷}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)(t-a)\left(\frac{24}{a^3}\right)\} = \frac{24}{a^3 S^2}e^{-aS} \tag{۸}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-\frac{a}{2})\frac{24}{a^2}\} = \frac{24}{a^3 S}e^{-\frac{aS}{2}} \tag{۹}$$

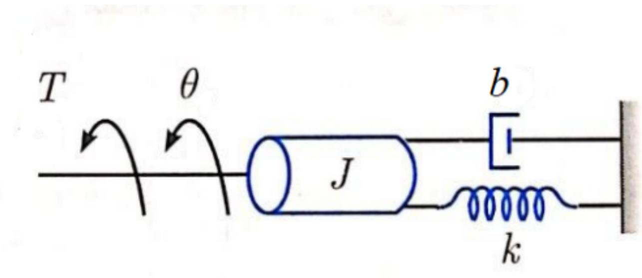
$$F(S) = \frac{24}{a^3 S^2} - \frac{24}{a^3 S^2}e^{-aS} - \frac{24}{a^3 S}e^{-\frac{aS}{2}} \tag{۱۰}$$

۲ در یک موتور DC مدار الکتریکی به شکل زیر هست:



شکل ۲: مدل مدار موتور DC

اگر مدل بخش مکانیکی این موتور به صورتی باشد که در شکل ۳ نشان داده شده است، به سوالات مربوطه پاسخ دهید؛



شکل ۳: مدل بخش مکانیکی موتور DC

۱.۲ الف : موتور DC داده شده را مدلسازی کنید.

۱.۱.۲ بخش الکتریکی:

از آنجایی که خازن و یک مقاومت با سلف موازی شدند، تقسیم جریان اتفاق خواهد افتاد. در نتیجه نمی‌توان نوشت $V_L = L\frac{dI}{dt}$. باید مقاومت معادل R_{eq} را محاسبه نماییم:

مقاومت:

$$\frac{V}{I} = R \tag{۱۱}$$

سلف:

$$\mathcal{L}\left(L\frac{dI}{dt}\right) = LSI \tag{۱۲}$$

$$LSI = V_L \tag{۱۳}$$

$$\frac{V_L}{I} = LS \tag{۱۴}$$

خازن:

$$I = C\frac{dv}{dt} \tag{۱۵}$$

$$\mathcal{L}\left(C\frac{dv}{dt}\right) = CSV(S) \tag{۱۶}$$

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{CS} \tag{۱۷}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R_{eq}} = CS + \frac{1}{R} + \frac{1}{LS} \tag{۱۸}$$

$$R_{eq} = \frac{RLS}{CS^2RL + LS + R} \tag{۱۹}$$

با پیدا کردن مقاومت معادل می‌توانیم معادلات مربوط به مدار موتور DC را بنویسیم:

$$V(t) = R_1 I(t) + R_{eq} I(t) + V_{emf} \tag{۲۰}$$

$$\mathcal{L}(v(t)) = V(S) = R_1 I(S) + R_{eq} I(S) + V_{emf} \tag{۲۱}$$

ما می‌دانیم که $V_{emf} = K_v \omega(S)$، در نتیجه داریم:

$$V(S) = R_1 I(S) + R_{eq} I(S) + K_v \omega(S) \tag{۲۲}$$

۲.۱.۲ بخش مکانیکی:

برای بخش مکانیکی خواهیم داشت:

$$\tau = b \cdot \omega(t) + J \frac{d\omega}{dt} + K\theta(t) \tag{۲۳}$$

میدانیم که:

$$\tau = K_m I \tag{۲۴}$$

و همچنین:

$$\omega(s) = \theta \cdot s \tag{۲۵}$$

در نتیجه:

$$\mathcal{L}\{\tau(t)\} = \tau(S) = K_m I(S) = b \cdot \omega(S) + JS \cdot \omega(S) + \frac{K \cdot \omega(S)}{S} \tag{۲۶}$$

در نهایت با مدل‌سازی این موتور DC معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$K_m I(S) = b \cdot \omega(S) + JS \cdot \omega(S) + \frac{K \cdot \omega(S)}{S} \tag{۲۷}$$

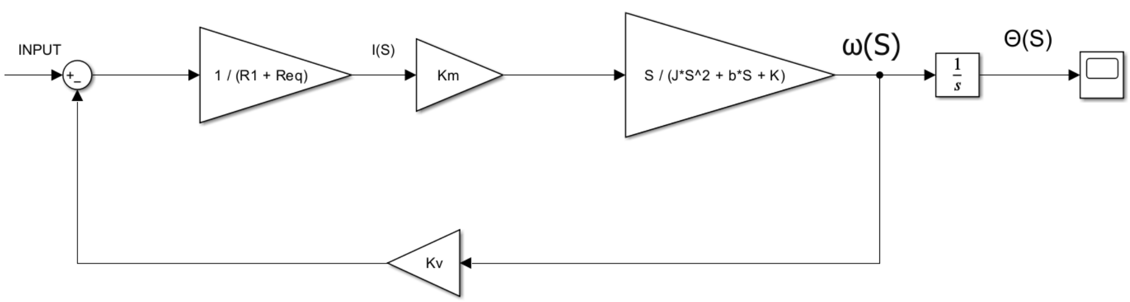
$$V(S) = R_1 I(S) + R_{eq} I(S) + K_v w(S) \tag{۲۸}$$

در معادلات بالا:

- K_v نشان دهنده رابطه بین سرعت دورانی و ولتاژ است.
- K_m نشان دهنده ارتباط بین جریان و گشتاور تولیدی موتور است.
- b ضریب اصطکاک ویسکوز است که نشان‌دهنده مقاومت در برابر حرکت می‌باشد.
- J ممان اینرسی موتور است که نمایانگر تمایل موتور به حفظ سرعت زاویه‌ای خود است.

۲.۲ ب : نمودار بلوکی این سیستم را رسم نمایید.

نمودار بلوکی این سیستم به شکل زیر خواهد بود:



شکل ۴: شبیه‌سازی نمودار بلوکی در سیمولینک که ورودی ما ولتاژ و خروجی نیز θ است.

۳.۲ ج: اگر ولتاژ ورودی سیستم یک تابع پله باشد و R_1 یک مقاومت متغیر باشد، تابع تبدیل $\frac{\theta}{R_1}$ را محاسبه نمایید.

اگر ولتاژ ما تابع پله باشد و بخواهیم $\frac{\theta}{R_1}$ را پیدا کنیم به مشکل خواهیم خورد. اما مطابق سوال تا جایی که امکان دارد پیش خواهیم رفت:

$$V = (R_1 + R_{eq})I(S) + K_v \cdot S \cdot \theta \tag{۲۹}$$

$$K_m \cdot I(S) = J \cdot S^2 \cdot \theta + b \cdot S \cdot \theta + K \cdot \theta \tag{۳۰}$$

$$I(S) = \frac{V - K_v \cdot S \cdot \theta}{R_1 + R_{eq}} = \frac{(J \cdot S^2 + b \cdot S + K) \cdot \theta}{K_m} \tag{۳۱}$$

$$\frac{V}{R_1 + R_{eq}} = \left(\frac{K_v \cdot S}{R_1 + R_{eq}} + \frac{J \cdot S^2 + b \cdot S + K}{K_m}\right) \cdot \theta \tag{۳۲}$$

پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

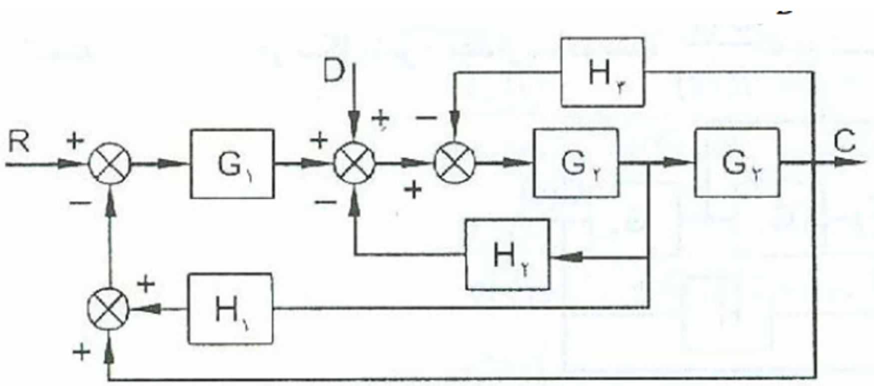
$$\frac{V \cdot K_m}{R_1} \Big/ \left(K_m \cdot K_v \cdot S + (R_1 + R_{eq})(J \cdot S^2 + b \cdot S + K)\right) = \frac{\theta}{R_1} \tag{۳۳}$$

با جایگذاری $\mathcal{L}\{U(t)\} = V(S) = \frac{1}{S}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{K_m}{S \cdot R_1}}{K_m \cdot K_v \cdot S + (R_1 + R_{eq})(J \cdot S^2 + b \cdot S + K)} \tag{۳۴}$$

در این سوال فرض کردیم که اغتشاشی به سیستم وارد نیست، چون داخل شکل هم هیچ اغتشاشی وجود نداشت. در نتیجه از T_L صرف نظر شد.

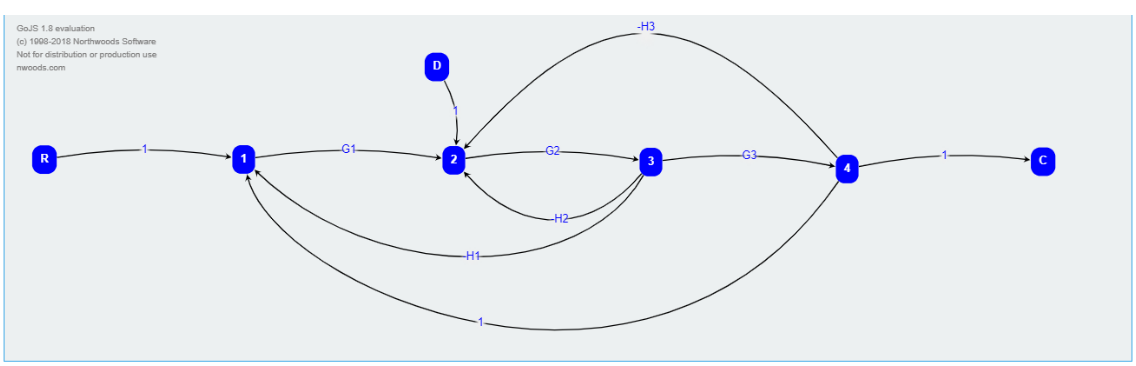
۳ سیستم با نمودار بلوکی زیر را در نظر بگیرید و به سوالات مربوطه پاسخ دهید.



شکل ۵: نمودار بلوکی سیستم

۱.۳ الف: نمودار جریان سیگنال این سیستم را رسم کنید و با ساده سازی نمودار، بهره $Y(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ را بیابید.

نمودار جریان سیگنال سیستم را مشابه نمودار زیر رسم میکنیم:



شکل ۶: نمودار جریان سیگنال سیستم SFG

در این سیستم یک ورودی R هست و ورودی دیگر اغتشاش یعنی D هست. برای بررسی سیستم باید هر ورودی را جداگانه بررسی کنیم. اگر ورودی را R در نظر بگیریم داریم:

$$M_1\,(\text{forward\_path}) = 1 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot 1 \tag{۳۵}$$

$$L_{11} = -G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 \tag{۳۶}$$

$$L_{12} = -G_2 \cdot H_2 \tag{۳۷}$$

$$L_{13} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \tag{۳۸}$$

$$L_{14} = -G_2 \cdot G_3 \cdot H_3 \tag{۳۹}$$

$$\Delta_1 = 1 \tag{۴۰}$$

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14}) = 1 - (-G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 - G_2 \cdot H_2 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 - G_2 \cdot G_3 \cdot H_3) \tag{۴۱}$$

بر اساس قانون Mason خواهیم داشت:

$$\text{Transfer Function} = \sum_{k=1}^{n} \left(M_k \cdot \frac{\Delta_k}{\Delta} \right) \tag{۴۲}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{1 + (G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 + G_2 \cdot H_2 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_3 \cdot H_3)} \tag{۴۳}$$

۲.۳ ب : با اصلاح مقادیر بهره در سیستم تاثیر اغتشاش D را از بین ببرید.

در این قسمت هدف کم کردن اثر اغتشاش هست. اگر تابع تبدیل را نسبت به ورودی اغتشاش بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{C}{D} = \frac{G_2 \cdot G_3}{1 + (G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 + G_2 \cdot H_2 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_3 \cdot H_3)} \tag{۴۴}$$

این تابع تبدیل باید به صفر میل کند تا در نتیجه بتوانیم اثر اغتشاش را کم کنیم. اما به هر پارامتر دلخواه دسترسی نداریم که تغییر بدهیم.

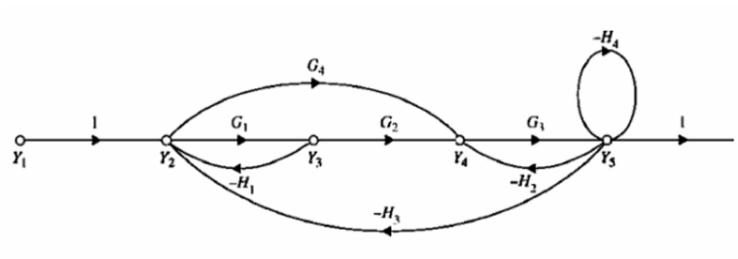
مهم‌ترین پارامتری که داریم کنترلر ما هست که در این مثال می‌توان G_1 را به عنوان کنترلر در نظر گرفت.

فرض کنید ما ورودی اغتشاش را جا به جا کنیم به سمت چپ. در این صورت بهره $\frac{1}{G_1}$ برای D خواهیم داشت.

پر واضح است که اگر ما بتوانیم مقدار کنترلر G_1 را بسیار زیاد کنیم، در نتیجه می‌توانیم اثر اغتشاش را کم کنیم.

G_1 در واقع همون تشبیه به جنم هست که سر کلاس توسط استاد ارائه شد که اگر افزایش یابد میتواند اثر اغتشاش (رئال مادرید) را کاهش دهد.

۴ سیستم با نمودار SFG را در نظر بگیرید:



شکل ۷: نمودار جریان سیگنال

در اینجا داریم:

$$T_1 = \frac{Y_5(S)}{Y_1(S)} \quad \text{و} \quad T_2 = \frac{Y_5(S)}{Y_2(S)} \tag{۴۵}$$

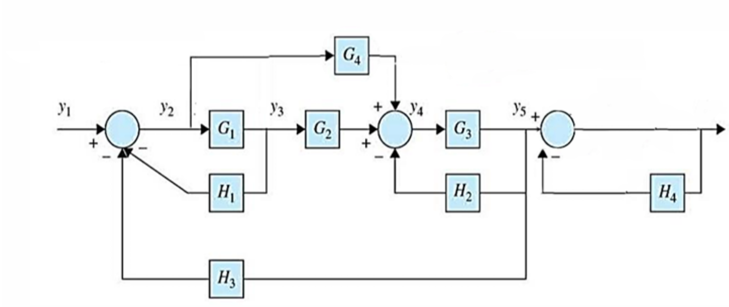
همچنین مطابق جدول زیر بهره‌ها مشخص هستند:

$G_4(S) = \frac{S}{S+1}$	$G_3(S) = \frac{1}{S^2+1}$	$G_2(S) = 2S+1$	$G_1(S) = \frac{1}{S}$
$H_4(S) = \frac{1}{S+2}$	$H_3(S) = \frac{S}{S^2+3S+1}$	$H_2(S) = \frac{S-1}{S+3}$	$H_1(S) = \frac{3}{S}$

جدول ۱: جدول بهره‌های سیستم

۱.۴ الف : مقادیر بهره **T1 , T2** را با استفاده از دستورات متلب بیابید.

در نگاه اول اینطور به نظر می‌رسد که $T_1 = T_2$ اما اگر نمودار بلوک دیاگرام سیستم را رسم کنیم مشاهده می‌شود که این دو با هم برابر نیستند. $T_1 = \frac{Y_5}{Y_1}$ در واقع نسبت خروجی سیستم به ورودی است، اما $T_2 = \frac{Y_5}{Y_2}$ نسبت خروجی سیستم به تابع خطا است. همانطور که



شکل ۸: نمودار بلوکی سیستم

مشخص است $Y_2 = [Y_1 - H_3 - H_1]$.

برای نسبت خروجی به ورودی، تابع تبدیل زیر را خواهیم داشت:

```
From input "Y1" to output "Y5":
                    3 s (s+3) (s+2.618) (s+2) (s+0.382) (s^2 + s + 0.3333)
---------------------------------------------------------------------------------------------------
(s+2.444) (s+0.9276) (s+0.3896) (s^2 + 6.083s + 9.52) (s^2 + 0.2081s + 0.6491) (s^2 - 0.05238s + 3.847)
```

شکل ۹: بهره مربوط به T1

اما برای نسبت Y_5/Y_2 چون Y_2 ورودی نیست نمی‌توانیم به صورت مستقیم محاسبه تابع تبدیل را انجام دهیم. در نتیجه با استفاده از تناسب مقدار $\frac{Y_5/Y_1}{Y_2/Y_1}$ را محاسبه می‌کنیم. حاصل این قسمت نیز برابر خواهد بود با:

```
T2 =

  From input "Y2" to output "Y5":
             3 (s+3) (s+2) (s^2 + s + 0.3333)
  -------------------------------------------------
  s (s+1) (s^2 + 5.727s + 8.627) (s^2 + 0.2727s + 0.8114)
```

شکل ۱۰: بهره مربوط به T2

در ادامه کد متلب این سوال به صورت کامل نوشته شده است. در این کد برای T_1 که به راحتی نسبت خروجی به ورودی $\frac{Y_5}{Y_1}$ محاسبه شده است. اما برای T_2 ابتدا نسبت $\frac{Y_2}{Y_1}$ محاسبه شد و سپس با تناسب $\frac{T_1}{\frac{Y_2}{Y_1}}$ به پاسخ نهایی یعنی $T_2 = \frac{Y_5}{Y_2}$ رسیدیم.

۲.۴ ب : با استفاده از متلب قطب های سیستم را پیدا کنید.

قطب‌های سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$-2.4444 + 0.0000i$$
$$-0.9276 + 0.0000i$$
$$-0.3896 + 0.0000i$$
$$0.0262 + 1.9612i$$
$$0.0262 - 1.9612i$$
$$-3.0414 + 0.5200i$$
$$-3.0414 - 0.5200i$$
$$-0.1041 + 0.7989i$$
$$-0.1041 - 0.7989i$$

```
clear all

s = zpk('s'); %zpk = zero-pole-gain; here, defining S in zpk format
% allows us to efine systems using S.

% in this part we define Gains.
G1 = 1 / s;
G2 = 2 * s + 1;
G3 = 1 / (s^2 + 1);
G4 = s / (s + 1);
H1 = 3 / s;
H2 = (s - 1) / (s + 3);
H3 = s / (s^2 + 3*s + 1);
H4 = 1 / (s + 2);

%T1 = Y5 / Y1
systemnames = 'G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3 H4';

% the inpu and output of the system should be defined
inputvar = '[Y1]';
outputvar = '[G3-H4]';
```

```
input_to_G1 = '[Y1 - H3 - H1]';
input_to_G2 = '[G1]';
input_to_G3 = '[G2 + G4 - H2]';
input_to_G4 = '[Y1 - H3 - H1]';
input_to_H1 = '[G1]';
input_to_H2 = '[G3 - H4]';
input_to_H3 = '[G3 - H4]';
input_to_H4 = '[G3 - H4]';

sysoutname = 'SFG_T1_ic';
cleanupsysic= 'yes'; % removing unused parts of system
sysic
% System Interconnection Command is used when we have multiple systems
% (like transfer functions, feedback loops, gains, etc) and we intend
% to create an interconnected system.

SFG_T1_ic.outputname = {'Y5'};
T_1 = minreal(SFG_T1_ic);
T_1
poles_T1 = pole(T_1);
disp(poles_T1)

%(Y2/Y1)
systemnames = 'G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3 H4';
inputvar = '[Y1]';
outputvar = '[Y1 - H3 -  H1]';
input_to_G1 = '[Y1 - H3 - H1]';
input_to_G2 = '[G1]';
input_to_G3 = '[G2 + G4 - H2]';
input_to_G4 = '[Y1 - H3 - H1]';
input_to_H1 = '[G1]';
input_to_H2 = '[G3 - H4]';
input_to_H3 = '[G3 - H4]';
input_to_H4 = '[G3 - H4]';

sysoutname = 'SFG_ic';
```

```
cleanupsysic= 'yes';
sysic
SFG_ic.inputname = {'Y1'};
SFG_ic.outputname = {'Y2'};
SFG_ic = minreal(SFG_ic);

% T2 = T1 / (Y2/Y1) = Y5 / Y2
T2 = minreal (SFG_T1_ic / SFG_ic);
T2
```

Code 1: Complete code