微分積分学A 演習問題 第1回

問題 1.1.
Archimedes の公理を述べなさい.

問題 1.2.
Cantor の公理を述べなさい.

問題 1.3.
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，三角不等式を述べなさい.

問題 1.4.
次の問いに答えることで，$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ となることを示しなさい.
(1) $a \in \mathbb{N}$ に対して，a^2 が 2 の倍数ならば a も 2 の倍数となることを示しなさい.
(2) $\sqrt{2}$ は有理数ではないことを示しなさい.

問題 1.5.
次の問いに答えることで，$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ となることを示しなさい.
(1) $a \in \mathbb{N}$ に対して，a^2 が 3 の倍数ならば a も 3 の倍数となることを示しなさい.
(2) $\sqrt{3}$ は有理数ではないことを示しなさい.

問題 1.6.
反例を作ることにより,「a^2 が 4 の倍数ならば a も 4 の倍数となる」が正しくないことを説明しなさい.

問題 1.7.
$a, b \in \mathbb{N}$ だが，$a - b \notin \mathbb{N}, a \div b \notin \mathbb{N}$ となる a, b の例をあげなさい.

問題 1.8.
自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ を数学的帰納法で示せ. つぎに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$ を求めよ.

問題 1.9.
自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を数学的帰納法で示せ. つぎに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$ を求めよ.

問題 1.10.
自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ を数学的帰納法で示せ. つぎに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$ を求めよ.

問題 1.11.
次の文の間違いを指摘し, 下線部を修正して正しい文に書きかえよ.
(1) 「すべての学生が合格する」の否定は「<u>すべての学生は合格しない</u>」である.
(2) 「クラスに誕生日が同じ学生が少なくとも一組存在する」の否定は「<u>クラスに誕生日が異なる学生が少なくとも一組存在する</u>」である. (注意: 「少なくとも一組存在しない」は日本語としては正しくない. 「存在しない」を使わずに書き換えよ)
(3) 「60 点以上ならば合格する」の否定は「<u>60 点未満ならば合格しない</u>」である.
(4) 「りんご かつ みかんが好き」の否定は「<u>りんご かつ みかんが好きではない</u>」である.

微分積分学 A 演習問題　第 2 回

問題 2.1.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 $a \in \mathbb{R}$ に収束する，すなわち，$a_n \to a \quad (n \to \infty)$ であることの定義を述べなさい．

問題 2.2.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $+\infty$ に発散する，すなわち，$a_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$ であることの定義を述べなさい．

問題 2.3.
$\dfrac{n}{2n+3} \to \dfrac{1}{2} \quad (n \to \infty)$ となることを ε-N 論法で示しなさい．

問題 2.4.
$\dfrac{n}{3n+1} \to \dfrac{1}{3} \quad (n \to \infty)$ となることを ε-N 論法で示しなさい．

問題 2.5.
a, b をそれぞれ学生番号の 10 の位，1 の位とする．このとき，$\dfrac{2n+b+1}{n+a+1} \to 2 \quad (n \to \infty)$ となることを ε-N 論法で示しなさい．

問題 2.6.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとする．別の数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|b_n - a| \leq |a_n - a|$$

をみたすならば，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も a に収束することを示しなさい．

問題 2.7.
$a_n = \dfrac{1}{n^3}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1))$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めなさい．

問題 2.8.
$a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めなさい．

問題 2.9.
$a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+2)}$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めなさい．

問題 2.10.
$a_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $+\infty$ に発散することを示しなさい．ε-N 論法は使わなくてよい (ヒント $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8}$ である．$m \in \mathbb{N}$ に対して $n = 2^m$ として，この不等式を使うと，a_n はどんな数より大きいといえるか？)．

微分積分学 A 演習問題　第 3 回

問題 3.1.
$0 < r < 1$ に対し，等比数列 $a_n = r^n$ $(n \in \mathbb{N})$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを ε-N 論法で示しなさい.

問題 3.2.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + 2b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + 2\lim_{n\to\infty} b_n$$

となることを ε-N 論法で示しなさい.

問題 3.3.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n + b_n) = 2\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

を ε-N 論法で示しなさい.

問題 3.4.
$c \in \mathbb{R}$ とする．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

となることを ε-N 論法で示しなさい.

問題 3.5.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

となることを ε-N 論法で示しなさい.

問題 3.6.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき,

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$$

となることを ε-N 論法で示しなさい (ヒント: 三角不等式を用いる).

問題 3.7.
$b > 0$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n} = 0$ となることを ε-N 論法で示しなさい.

問題 3.8 (教科書の例 1.2 と同じだが，定理 1.8 は使わない)**.**
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ となることを示そう (ε-N 論法を用いなくてよい).

(1) $x > 0$ とする. すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が成り立つことを示しなさい.

(2) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対して, $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ とおく．このとき $h_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ を示しなさい (ヒント: $1 + h_n = \sqrt[n]{n}$ に (1) を使う).

(3) $|h_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ となることと $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ であることが同値であることを認めて, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ となることを示しなさい.

問題 3.9.
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ となることを ε-N 論法を用いて示しなさい.

微分積分学 A 演習問題　<u>第 4 回</u>

問題 4.1.
集合 $S \subset \mathbb{R}$ が有界であることの定義を述べなさい.

問題 4.2.
Weierstrass の定理を述べなさい.

問題 4.3.
α が集合 $S \subset \mathbb{R}$ の上限 $\alpha = \sup S$ であることの，ε 論法を用いた定義を述べなさい (最小の上界を答えるのではない).

問題 4.4.
$A = (-2, 3)$ とする．$\sup A = 3$ となることを証明しなさい．なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 4.5.
$A = (-1, 5)$ とする．$\inf A = -1$ となることを証明しなさい．なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 4.6.
$A = (-2, 3)$ とする．$\inf A = -2$ となることを証明しなさい．なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 4.7.
実数 a, b は $a < b$ をみたすとする．$I = (a, b)$ とするとき $\sup I$ を求め, その証明を与えなさい.

問題 4.8.
実数 a, b は $a < b$ をみたすとする．$I = (a, b)$ とするとき $\inf I$ を求め, その証明を与えなさい.

問題 4.9.
収束する数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$b_n \neq 0$ と $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ をみたすとする．このとき，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n \geq N$ に対して $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$ となることを示しなさい.

問題 4.10.
収束する数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$b_n \neq 0$ と $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ をみたすとする．このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

となることを ε-N 論法で示しなさい.

微分積分学 A 演習問題　第 5 回

問題 5.1.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であることの定義を述べなさい.

問題 5.2.
有界な単調数列の収束性に関する定理を述べなさい.

問題 5.3.
自然対数の底の定義を述べなさい.

問題 5.4.
有界な数列に対する Bolzano-Weierstrass の定理を述べなさい.

問題 5.5.
$a_0 = 1, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定められた数列がある.
(1) $a_0 < a_1$ を示しなさい.
(2) $n = 1, 2, 3 \ldots$ に対して, $a_{n-1} \leq a_n$ を示しなさい.
(3) $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して, $a_n \leq 2$ を示しなさい.
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示しなさい.

問題 5.6.
$a_0 = 5, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定められた数列がある.
(1) $a_0 > a_1$ を示しなさい.
(2) $n = 1, 2, 3 \ldots$ に対して, $a_{n-1} \geq a_n$ を示しなさい.
(3) $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して, $a_n \geq 2$ を示しなさい.
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示しなさい.

問題 5.7.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界かつ単調減少となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

となることを示しなさい.

問題 5.8 (優収束定理)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく.
(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となることを示しなさい.
(2) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq b_n$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k < \infty$ をみたすとする. このとき $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示しなさい.

微分積分学A 演習問題　<u>第6回</u>

問題 6.1.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べなさい.

問題 6.2.
実数の完備性に関する定理を述べなさい.

問題 6.3.
$a_0 > -1,\ a_n = \sqrt{3 + 2a_{n-1}}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ がある.
(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n > 0$ を示しなさい.
(2) $0 \leq L < 1$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

を示しなさい．L をどのようにとればよいか.
(3) 縮小写像の原理を認めて，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束することと，その極限値を求めなさい.

問題 6.4.
$a_0 > -1,\ a_n = \sqrt{12 + a_{n-1}}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ がある.
(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n > 0$ を示しなさい.
(2) $0 \leq L < 1$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

を示しなさい．L をどのようにとればよいか.
(3) 縮小写像の原理を認めて，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束することと，その極限値を求めなさい.

問題 6.5.
数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して, ある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする. このとき, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m > n$ ならば

$$|a_m - a_n| \leq \frac{L^n}{1 - L}|a_1 - a_0|$$

となることを示しなさい (ヒント

$$\begin{aligned}
a_m - a_n &= (a_m - a_{m-1}) + a_{m-1} - a_n \\
&= (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + a_{m-2} - a_n \\
&= (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)
\end{aligned}$$

と三角不等式を使う).

問題 6.6.
関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

をみたすとする. このとき, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

により定まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束することを示しなさい.

微分積分学 A 演習問題　第 7 回

問題 7.1.

実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) $A \subset X$ に対して, f の A による像 $f(A)$ の定義を述べなさい.

(2) f が単射であることの定義を述べなさい.

問題 7.2.

次を求めなさい.

(1) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\arctan(1)$

(4) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\right)$

問題 7.3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) := -x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := -x^2 \quad (x \in (0, \infty))$$

で定める.

(1) 像 $f([-1, 3])$ を求めなさい.

(2) f は単射でないこと, g は単射となることを示しなさい.

問題 7.4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in (0, \infty))$$

で定める.

(1) 像 $f([-2, 1])$ を求めなさい.

(2) f は単射でないこと, g は単射となることを示しなさい.

問題 7.5.

指数法則と逆関数の性質を用いて，次の対数の性質を示しなさい.

(1) $M, N > 0$ に対して，$\log(MN) = \log M + \log N$

(2) $M > 0, k \in \mathbb{R}$ に対して，$\log M^k = k \log M$

問題 7.6.

正の実数 $a >$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して，$a^x = \exp(a \log x)$ と定義する．exp の指数法則，対数の性質は認めて，任意の正の実数 $a, b > 0$ と $r, s \in \mathbb{R}$ と $\in \mathbb{R}$ に対して，指数法則

$$a^r a^s = a^{r+s}, \qquad (ab)^r = a^r b^r, \tag{7.1}$$

を示しなさい[1].

---

[1]高校の教科書によると，$a^{\sqrt{2}}$ は $\sqrt{2}$ に収束する有理数の数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて，$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}$ で定義されている．しかし，この定義では $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がどんな有理数の数列でも同じ値に収束するのかを議論しなければならない (well-defined かどうかを議論するなどという)．他方で，この問題の定義を用いると，$a^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \log a)$ となり，自然対数の底に関する指数関数と対数関数が定義できればよいことがわかる.

微分積分学 A 演習問題　第 8 回

問題 8.1.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to a$ のときに, $f(x)$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べなさい.

問題 8.2.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x^3}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えなさい.

問題 8.3.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^3}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えなさい.

以下の問題では $I \subset \mathbb{R}$ を開区間, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \to A$, $g(x) \to B \quad (x \to a)$ とする.

問題 8.4.
$|f(x)| \to |A| \quad (x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明しなさい.

問題 8.5.
$(f(x) - g(x)) \to A - B \quad (x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明しなさい.

問題 8.6.
実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して $cf(x) \to cA \quad (x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明しなさい.

問題 8.7.
$A > 0$ とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{A}{2}$$

とできることを示しなさい.

問題 8.8.
ある $M > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{a\}$ に対して $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ が成り立つと仮定する. このとき,

$$f(x)g(x) - AB = (f(x) - A)g(x) + A(g(x) - B)$$

を用いて, $(f(x)g(x)) \to AB \quad (x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明しなさい.

問題 8.9.
$A \neq 0$ とする. すべての $x \in I \setminus \{a\}$ に対して $|f(x)| \leq \dfrac{|A|}{2}$ が成り立つと仮定する. このとき, $\dfrac{1}{f(x)} \to \dfrac{1}{A} \quad (x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明しなさい.

微分積分学 A 演習問題　第 9 回

問題 9.1.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to a$ のときに, $f(x)$ が $+\infty$ に発散することの定義を述べなさい.

問題 9.2.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to a$ のときに, $f(x)$ が $-\infty$ に発散することの定義を述べなさい.

問題 9.3.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to a+0$ のときに, $f(x)$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べなさい.

問題 9.4.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to a-0$ のときに, $f(x)$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べなさい.

問題 9.5.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to +\infty$ のときに, $f(x)$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べなさい.

問題 9.6.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to -\infty$ のときに, $f(x)$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べなさい.

問題 9.7.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to a+0$ のときに, $f(x)$ が $+\infty$ に発散することの定義を述べなさい.

問題 9.8.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \to a-0$ のときに, $f(x)$ が $-\infty$ に発散することの定義を述べなさい.

問題 9.9.
$x^2 \to 4$ $(x \to -2)$ を ε-δ 論法で証明しなさい.

問題 9.10.
$x^2 \to 9$ $(x \to -3)$ を ε-δ 論法で証明しなさい.

問題 9.11.
$a \in \mathbb{R}$ に対して, $x^2 \to a^2$ $(x \to a)$ を ε-δ 論法で証明しなさい.

問題 9.12.
$\displaystyle\lim_{x \to -1+0} \frac{|x^2-1|}{x+1}$, $\displaystyle\lim_{x \to -1-0} \frac{|x^2-1|}{x+1}$ を求めなさい.

微分積分学A 演習問題　<u>第10回</u>

問題 10.1.
$I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続であることの定義を ε-δ 論法で述べなさい.

問題 10.2.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

で定める．このとき, f が $x = 0$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて証明しなさい(ヒント:$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ の証明とほとんど同じ).

問題 10.3.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \cos x$ で定める．f が $x = a \in \mathbb{R}$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて証明しなさい.

問題 10.4.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. f が $x = -3$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示しなさい.

問題 10.5.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. f が $x = -4$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示しなさい.

問題 10.6.
$I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f, g : I \to \mathbb{R}$ は $x = a \in I$ で連続であるとする．このとき，$f + g$ もまた，$x = a$ で連続であることを示しなさい.

問題 10.7.
$I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は $x = a \in I$ で連続であるとする．このとき，$c \in \mathbb{R}$ に対して，cf もまた，$x = a$ で連続であることを示しなさい.

問題 10.8.
$I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f, g : I \to \mathbb{R}$ は $x = a \in I$ で連続であるとする．このとき，fg もまた，$x = a$ で連続であることを示しなさい.

問題 10.9.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続ならば, $|f| : I \to \mathbb{R}$ も I 上連続であることを示しなさい. なお, 任意の $x \in I$ に対して, $|f|(x) := |f(x)|$ で定義する.

問題 10.10.
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

を示しなさい.

問題 10.11.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続であれば, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ も連続になることを示しなさい. なお, $x \in I$ に対して

$$\max\{f, g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad \min\{f, g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

と定義する.

微分積分学 A 演習問題　第 11 回

問題 11.1.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して，Weierstrass の最大値定理の主張を述べなさい.

問題 11.2.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して，中間値の定理の主張を述べなさい.

問題 11.3.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上一様連続であることの定義を述べなさい.

問題 11.4.
Heine-Cantor の定理の主張を述べなさい.

問題 11.5.
方程式 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}=0$ が 2 と 3 の間に解をもつことを示しなさい.

問題 11.6.
方程式 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}=0$ が 3 と 4 の間に解をもつことを示しなさい.

問題 11.7.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続であるとき，

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

となることを示しなさい.

問題 11.8.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x):=x^3+x-1$ とおく．このとき，$f(x)=0$ となる実数解 $x\in\mathbb{R}$ が存在することを示しなさい. どの範囲に実数解があるか？

問題 11.9.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とする．$f(a)f(b)<0$ ならば，$f(x)=0$ となる実数解 $x\in[a,b]$ が存在することを示しなさい.

問題 11.10.
$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続であるとする．「すべての $x\in I\cap\mathbb{Q}$ に対して $f(x)=g(x)$」が成り立つならば，「すべての $x\in I$ に対して $f(x)=g(x)$」となることを示しなさい.

問題 11.11.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^2$ で定義する．f が $x=a\in\mathbb{R}$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示しなさい.