

# 微分積分学 A 中間試験

2025 年 6 月 12 日 第 2 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

## 問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみを書くこと.

(1) Archimedes の公理を述べなさい.

(4) 集合  $S \subset \mathbb{R}$  が上に有界であることの定義を述べなさい.

(2) Cantor の公理を述べなさい.

(5) 空でない集合  $S \subset \mathbb{R}$  に対して Weierstrass の定理を述べなさい. なお, 必要に応じて,  $S_U := \{M \in \mathbb{R} : \forall x \in S \text{ に対して } x \leq M\}$  を用いてよい.

(3) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $a \in \mathbb{R}$  に収束する, すなわち  $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$  であることの定義を述べなさい.

(6)  $\alpha$  が集合  $S \subset \mathbb{R}$  の下限  $\alpha = \inf S$  であることの,  $\varepsilon$  論法を用いた定義を述べなさい.

(7) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が (広義) 単調増加であることの定義を述べなさい.

(10) 有界な数列に対する Bolzano-Weierstrass の定理を述べなさい.

(8) 単調増加な数列の収束性に関する定理を述べなさい.

(11) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が Cauchy 列であることの定義を述べなさい.

(9) 自然対数の底  $e$  の定義を述べなさい.

(12) 実数の完備性に関する定理を述べなさい.

- (13) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  はそれぞれ  $a, b \in \mathbb{R}$  に収束するとし, すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $a_n < b_n$  をみたすとする. このとき,  $a < b$  は成り立つか? 成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例をあげなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

- (14) 正の数  $r > 0$  に対して, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$  を求めなさい.

- (15) 漸化式  $a_n = -\sqrt{3 - 2a_{n-1}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 初項  $a_0 = 1$  で定められた数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  は収束する. その極限値を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$\frac{3n+2}{5n+3} \rightarrow \frac{3}{5} \quad (n \rightarrow \infty)$  となることを  $\varepsilon$ - $N$  論法で示したい.

- (1)  $\frac{3n+2}{5n+3} \rightarrow \frac{3}{5} \quad (n \rightarrow \infty)$  の  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いた定義を述べなさい.
- (2)  $\frac{3n+2}{5n+3} \rightarrow \frac{3}{5} \quad (n \rightarrow \infty)$  を  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いて示しなさい.

**問題 3.**

収束する数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して,  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  とおく.

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) = 2a - b$  となることの  $\varepsilon$ - $N$  論法による定義を述べなさい.
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) = 2a - b$  なることを  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いて示しなさい.

**問題 4.**

$A := (6, 12)$  とおく.  $\inf A = 6$  を示したい.

- (1)  $\inf A = 6$  の定義を述べなさい.
- (2)  $\inf A = 6$  を証明しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．