

微分積分学 A 理解度確認試験

2024 年 7 月 25 日 第 2 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい.

- | | |
|--|---|
| <p>(1) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
$f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow a$) の定義を述べなさい.</p> <p>(2) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
$f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow a$) の定義を述べなさい.</p> <p>(3) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
$f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow a+0$) の定義を述べなさい.</p> | <p>(4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow -\infty$) の
定義を述べなさい.</p> <p>(5) $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続
であることの定義を ε-δ 論法で述べなさい.</p> <p>(6) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, Weierstrass の最大
値定理の主張を述べなさい.</p> |
|--|---|

(7) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 中間値の定理の主張を述べなさい.

(10) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$ を求めなさい.

(8) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上一様連続であることの定義を述べなさい.

(11) $y = \arctan x$ ($x \in \mathbb{R}$) のグラフの概形を書きなさい.

(9) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := -x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) で定める. 像 $f([-1, 4])$ を求めなさい.

(12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} - x)$ を求めなさい.

(13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 11x + 6}$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2}$ を求めなさい.

(15) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin(x^2)$ を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$(x - 1) \sin \left(\frac{1}{(x - 1)^2} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$ となることを ε - δ 論法で示したい.

(1) $(x - 1) \sin \left(\frac{1}{(x - 1)^2} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$ の ε - δ 論法を用いた定義を述べなさい.

(2) $(x - 1) \sin \left(\frac{1}{(x - 1)^2} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$ を ε - δ 論法を用いて示しなさい.

問題 3.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := x^2 - x$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義する. f が $x = -1$ で連続となることを ε - δ 論法で示したい.

- (1) 示すべきこと (f が $x = -1$ で連続となることの ε - δ 論法を用いた定義) を述べなさい.
- (2) f が $x = -1$ で連続となることを ε - δ 論法で示しなさい.

問題 4.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $f(x) := \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義する. f が \mathbb{R} 上一様連続であることを示したい.

- (1) 示すべきこと (f が \mathbb{R} 上一様連続であることの定義) を述べなさい.
- (2) f が \mathbb{R} 上一様連続であることを示しなさい. なお, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $|\sin \theta| \leq |\theta|$ は断わりなしに使ってよい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．