

# 微分積分学 A 追試験

担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

## 問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみでよい. 答えがどれかわかるように書くこと.

(1) 开区間  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in I$ ,  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  
 $f(x) \rightarrow A$  ( $x \rightarrow a$ ) の定義を述べなさい.

(4)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow \infty$ )  
の定義を述べなさい.

(2) 开区間  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in I$ ,  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  
 $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow a$ ) の定義を述べなさい.

(5)  $I \subset \mathbb{R}$  上の関数  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  が  $x = a \in I$  で連続  
であることの定義を  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で述べなさい.

(3) 関数  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  $f(x) \rightarrow A$   
( $x \rightarrow a+0$ ) の定義を述べなさい.

(6)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対して, Weierstrass の最大  
値定理の主張を述べなさい.

(7)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対して, 中間値の定理の主張を述べなさい.

(10)  $\arcsin(\sin(-\pi))$  を求めなさい.

(8)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が  $[a, b]$  上一様連続であることの定義を述べなさい.

(11)  $y = \arctan x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) のグラフの概形を書きなさい.

(9)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) := x^2 + 2x + 3$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で定める. 像  $f([-3, 4])$  を求めなさい.

(12)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$  を求めなさい.

(13)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2}$  を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) \sin(3x)}{x^2}$  を求めなさい.

(15)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos(x^2) \sin(x)$  を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

**問題 2.**

$(x-1) \sin\left(x + \frac{1}{(x-1)^2}\right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$  となることを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で示したい.

(1)  $(x-1) \sin\left(x + \frac{1}{(x-1)^2}\right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$  の  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いた定義を述べなさい.

(2)  $(x-1) \sin\left(x + \frac{1}{(x-1)^2}\right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$  を  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いて示しなさい.

## 問題 3.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) := x^3 - x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で定義する.  $f$  が  $x = 2$  で連続となることを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で示したい.

- (1) 示すべきこと ( $f$  が  $x = 2$  で連続となることの  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いた定義) を述べなさい.
- (2)  $f$  が  $x = 2$  で連続となることを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で示しなさい.

問題 4.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を,  $f(x) := -2 \cos x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で定義する.  $f$  が  $\mathbb{R}$  上一様連続であることを示したい. なお,  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して  $|\sin \theta| \leq |\theta|$  は断りなしに用いてよい.

- (1) 示すべきこと ( $f$  が  $\mathbb{R}$  上一様連続であることの定義) を述べなさい.
- (2)  $f$  が  $\mathbb{R}$  上一様連続であることを示しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．