微分積分学 B 中間試験

2024 年 11 月 14 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい．答えのみを書くこと.

(1) 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で微分可能であることの定義を述べなさい.

(2) $[a, b]$ 上連続，(a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し，Rolle の定理を述べなさい.

(3) $[a, b]$ 上連続，(a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し，(微分の) 平均値の定理を述べなさい.

(4) 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ と $c \in I$ に対し，f が $x = c$ で (狭義の) 極小であることの定義を述べなさい.

(5) $f(x) = (5x^3 + 1)^2$ $(x \in \mathbb{R})$ とおく．$f'(1)$ を求めなさい.

(6) $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\dfrac{e^{-x}}{x^n}$ の導関数を求めなさい.

学生番号　　　　　名前

(7) $x > 0$ に対して，$x^{\cos x}$ の導関数を求めなさい．

(8) $(\arccos x)^2$ の導関数を求めなさい．

(9) $a > 0$ に対して，$\sqrt{a^2 - x^2}$ の第二次導関数を求めなさい．

(10) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ を求めなさい．

(11) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \arcsin x}{x^3}$ を求めなさい．

(12) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)^{1-\cos x}$ を求めなさい．

(13) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(x\tan x - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos x}\right)$ を求めなさい.

(14) $\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + x^4 B(x)$ と書いたときに，$B(x) \to 0$ $(x \to 0)$ となるとき，a_4 を求めなさい.

(15) $\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 B(x)$ と書いたときに，$B(x) \to 0$ $(x \to 0)$ となるとき，a_3 を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{\sin(3x)-3x}$ を **de l'Hospital の定理**を用いずに求めたい.

(1) $e^{2x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^3B(x)$ と書いたときに $B(x)\to 0$ $(x\to 0)$ となるとき，a_0, a_1, a_2, a_3 を求めなさい (答えのみでよい).

(2) $\sin(3x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+x^3\tilde{B}(x)$ と書いたときに $\tilde{B}(x)\to 0$ $(x\to 0)$ となるとき，$b_0, b_1, b_2,$ b_3 を求めなさい (答えのみでよい).

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{\sin(3x)-3x}$ を **de l'Hospital の定理**を用いずに求めなさい.

学生番号　　　　　　名前

問題 3.

$a, b > 0$ に対して, $\log a + 3\log b \leq 4\log\left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right)$ を示したい．次の問いに答えなさい.

(1) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ が凸関数であることの定義を述べなさい.

(2) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0,\infty)$ に対して $f(x) = -\log x$ で定める．f が $(0,\infty)$ 上凸関数であることを示しなさい.

(3) $\log a + 3\log b \leq 4\log\left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right)$ を示しなさい.

問題 4.

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上微分可能な関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は $c \in I$ で最小になるとする．このとき，$f'(c) = 0$ を示しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．