微分積分学 A 定期試験問題

2019 年 7 月 29 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず**.** 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^2 + 2x + 2$ で定義するとき, 像 $f([-2,3])$ を求めよ.

(2) $\arcsin(\sin(3\pi))$ を求めよ.

(3) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)\right)$ を求めよ.

(4) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(ax)}{\sin^2(bx)}$ を求めよ.

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x \sin(2x)$ を求めよ.

(6) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ を求めよ (ヒント : $y = \arcsin x$ とおく).

(7) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$ を求めよ.

(8) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x}$ と $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x}$ をそれぞれ求めよ.

(9) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(10) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の ε-N 論法による主張を述べよ.

(11) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ とする.

(a) $A \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

(b) $A \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = \infty$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

(12) $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする.

(a) $x_0 \in I$ に対して, f が $x = x_0$ で連続であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

(b) $x_0 \in I$ に対して, f が $x = x_0$ で連続ではないことを ε-δ 論法を用いて述べよ.

(c) f が I 上一様連続であることの定義を述べよ.

(13) 方程式 $5x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ の実数解が $a \leq x \leq a + 1$ をみたすように, 整数 a を定めよ.

(14) 有界だが最小値が存在しない関数の例を挙げよ. ただし, 定義域, 値域を明記すること.

(15) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ を $[-2,2]$ 上連続な関数とする.

(a) $f(-2) < f(2)$ とする. 中間値の定理を述べよ.

(b) Weierstrass の最大値定理で最大値に関する主張を sup を用いて述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

次が正しいか否か答えよ.

(1) $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つとする: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x, x' \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |x' - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. このとき, f は $x \to x_0$ のときに, ある実数に収束する.

(2) $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ を I 上連続な関数とする. このとき, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda f + \mu g$ は I 上連続となる.

(3) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上連続ならば, 合成関数 $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ も $\mathbb{R}$ 上連続となる.

(4) $I \subset \mathbb{R}$ を有界な閉区間としたとき, I 上連続な関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は最大値を持つ.

(5) $I \subset \mathbb{R}$ を有界な閉区間としたとき, I 上連続な関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は I 上一様連続となる.

問題 3.

次が正しいか否か答えよ.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$ は単射である.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x \ (x \in \mathbb{R})$ は単射である.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ は単射である.

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続である.

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| \ (x \in \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続である.

問題 4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^3 \ (x \in \mathbb{R})$ で定める. このとき, f は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ. また, f は $\mathbb{R}$ 上一様連続かどうか考察せよ.