

微分積分学 A 理解度確認試験

2025 年 7 月 24 日 第 2 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみでよい. 答えがどれかわかるように書くこと.

(1) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
 $f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a)$ の定義を述べなさい.

(4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$ の
定義を述べなさい.

(2) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
 $f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow a)$ の定義を述べなさい.

(5) $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続
であることの定義を ε - δ 論法で述べなさい.

(3) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対
し, $f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a-0)$ の定義を述べな
さい.

(6) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, Weierstrass の最大
値定理の主張を述べなさい.

(7) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 中間値の定理の主張を述べなさい.

(10) $\arccos(\cos(-\pi))$ を求めなさい.

(8) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上一様連続であることの定義を述べなさい.

(11) $y = \arccos x$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフの概形を書きなさい.

(9) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := -x^4$ ($x \in \mathbb{R}$) で定める. 像 $f([-1, 2])$ を求めなさい.

(12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$ を求めなさい.

(13) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 9x + 10}{x^2 - x - 6}$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2 \sin(2x)}$ を求めなさい.

(15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cos(x^2)$ を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$x \sin \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$ となることを ε - δ 論法で示したい.

(1) $x \sin \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$ の ε - δ 論法を用いた定義を述べなさい.

(2) $x \sin \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$ を ε - δ 論法を用いて示しなさい.

問題 3.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := x^2 - 3x$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義する. f が $x = 1$ で連続となることを ε - δ 論法で示したい.

- (1) 示すべきこと (f が $x = 1$ で連続となることの ε - δ 論法を用いた定義) を述べなさい.
- (2) f が $x = 1$ で連続となることを ε - δ 論法で示しなさい.

問題 4.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $f(x) := -3x + 5$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義する. f が \mathbb{R} 上一様連続であることを示したい.

(1) 示すべきこと (f が \mathbb{R} 上一様連続であることの定義) を述べなさい.

(2) f が \mathbb{R} 上一様連続であることを示しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．