

微分積分学 B 理解度確認試験

2025 年 1 月 23 日 第 3 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい.

- | | |
|---|---|
| (1) 閉区間 $[1, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の線形性を述べなさい. | (4) 閉区間 $[1, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の三角不等式を述べなさい. |
| (2) 閉区間 $[1, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の加法性を述べなさい. | (5) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数に対する積分の平均値の定理を述べなさい. |
| (3) 閉区間 $[1, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の順序保存性を述べなさい. | (6) 関数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べなさい. |

(7) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, S が f の不定積分であることの定義を述べなさい.

(10) $e^{3x} \cos(2x)$ の原始関数を一つ求めなさい.

(8) $[0, \infty)$ 上連続な関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ が収束することの定義を述べなさい.

(11) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を求めなさい.

(9) $[0, \infty)$ 上連続な関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ が絶対収束することの定義を述べなさい.

(12) $\int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) dx$ を求めなさい.

(13) $\int_0^1 \log x \, dx$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14) 自然数 m に対して $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \cos(mx) \, dx$ を求めなさい.

(15) $\alpha > 0$ に対して, $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{3\alpha}} \, dx$ が収束するための α に対する必要十分条件を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。

問題 2.

$f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[-2, 1]$ 上連続とする. このとき, f の $[-2, 1]$ 上の定積分 $\int_{-2}^1 f(x) dx$ の定義を述べなさい. ただし, 「分割」, 「分割の長さ」, 「Riemann 和」の定義を含めること.

問題 3.

閉区間 $[1, 3]$ 上連続な関数 $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ は $x \in [1, 3]$ に対して $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, 直線 $x = 1$, 直線 $x = 3$, グラフ $y = f(x)$ で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $\pi \int_1^3 (f(x))^2 dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明しなさい.

問題 4.

$\alpha > 0$ に対して, $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^\alpha} dx$ を考える.

(1) $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^\alpha} dx$ の定義を述べなさい.

(2) 定義にもとづいて, $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^\alpha} dx$ が収束する $\alpha > 0$ の必要十分条件を求めて, 収束するときの積分の値を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。