

Отчёт по лабораторной работе №8

Математическое моделирование

Модель конкуренции двух фирм. Вариант №59

Выполнила: Мальков Роман Сергеевич,
НФИбд-02-21, 1032217048

Содержание

Цель работы	4
Теоретическое введение. Построение математической модели.	5
Задание	8
Задачи	10
Выполнение лабораторной работы	11
Решение с помощью программ	11
Julia	11
Результаты работы кода на Julia	15
OpenModelica	16
Результаты работы кода на OpenModelica	18
Анализ полученных результатов. Сравнение языков.	19
Вывод	20
Список литературы. Библиография.	21

Список иллюстраций

1	График конкуренции двух фирм для первого случая, построенный на языке Julia	15
2	График конкуренции двух фирм для второго случая, построенный на языке Julia	15
3	График конкуренции двух фирм для первого случая, построенный с помощью OpenModelica	18
4	График конкуренции двух фирм для второго случая, построенный с помощью OpenModelica	18

Цель работы

Изучить и построить модель конкуренции двух фирм.

Теоретическое введение. Построение математической модели.

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт длительного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N - число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ - длительность производственного цикла

p - рыночная цена товара

\tilde{p} - себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции

δ - доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек

k - постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров длительного использования часто представляют в про-

стейшей форме:

$$Q = q - k \frac{p}{S} = q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)p - k$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \left(-\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ . При заданном M уравнение описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) = 0$$

равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr} \left(1 - \frac{M\delta}{\tau \tilde{p} Nq}\right)$$

Тогда уравнения динамики оборотных средств приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau}\left(\frac{p}{p_{cr}} - 1\right) - M^2\left(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}}\right)^2\frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Это уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt = 0$

$$\widetilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq\left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}\right), b = kNq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Получается, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы.

При $b \ll a$ стационарные значения M равны

$$\widetilde{M}_+ = Nq\frac{\tau}{\delta}\left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right)\tilde{p}, \widetilde{M}_- = k\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние \widetilde{M}_+ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние \widetilde{M}_- неустойчиво, так, что при $M < \widetilde{M}_-$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу \widetilde{M}_- соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

Задание

Вариант 59

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}$$

$$a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$$

$$b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}$$

$$c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$$

$$c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

также введена нормировка $t = c_1 \Theta$

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0.00049\right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами

$$M_0^1 = 8.8 \quad M_0^2 = 9.9$$

$$p_{cr} = 30 \quad N = 80 \quad q = 1$$

$$\tau_1 = 10.1 \quad \tau_2 = 11.5$$

$$\tilde{p}_1 = 10.1 \quad \tilde{p}_2 = 11.5$$

Задачи

1. Изучить модель конкуренции двух фирм
2. Построить графики изменения оборотных средств двух фирм для обоих случаев

Выполнение лабораторной работы

Решение с помощью программ

Julia

Код программы для первого случая:

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations
```

```
p_cr = 40
```

```
tau1 = 25
```

```
p1 = 8
```

```
tau2 = 20
```

```
p2 = 8.5
```

```
N = 45
```

```
q = 1
```

```
a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q)
```

```
a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q)
```

```
b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p1 * p2 * p2 * N * q)
```

```
c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1)
```

```
c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2)
```

```

function ode_fn(du, u, p, t)
    M1, M2 = u
    du[1] = u[1] - b / c1*u[1] * u[2] - a1 / c1*u[1] * u[1]
    du[2] = c2 / c1*u[2] - b / c1*u[1] * u[2] - a2 / c1*u[2] * u[2]
end

```

```

v0 = [7, 8.9]
tspan = (0.0, 30.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
M1 = [u[1] for u in sol.u]
M2 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

```

```

plt = plot(
    dpi = 300,
    legend = true)

```

```

plot!(
    plt,
    T,
    M1,
    label = "Оборотные средства фирмы 1",
    color = :blue)

```

```

plot!(
    plt,
    T,

```

```

M2,
label = "Оборотные средства фирмы 2",
color = :green)

savefig(plt, "j11.png")

```

Код программы для второго случая:

```

using Plots
using DifferentialEquations

p_cr = 40
tau1 = 25
p1 = 8
tau2 = 20
p2 = 8.5
N = 45
q = 1

a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q)
a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q)
b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p1 * p2 * p2 * N * q)
c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1)
c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2)

function ode_fn(du, u, p, t)
    M1, M2 = u
    du[1] = u[1] - (b / c1 + 0.00049)*u[1] * u[2] - a1 / c1*u[1] * u[1]
    du[2] = c2 / c1*u[2] - b / c1*u[1] * u[2] - a2 / c1*u[2] * u[2]
end

```

```

end

v0 = [7, 8.9]
tspan = (0.0, 30.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
M1 = [u[1] for u in sol.u]
M2 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi = 300,
    legend = :topright)

plot!(
    plt,
    T,
    M1,
    label = "Оборотные средства фирмы 1",
    color = :blue)

plot!(
    plt,
    T,
    M2,
    label = "Оборотные средства фирмы 2",
    color = :green)

savefig(plt, "jl2.png")

```

Результаты работы кода на Julia

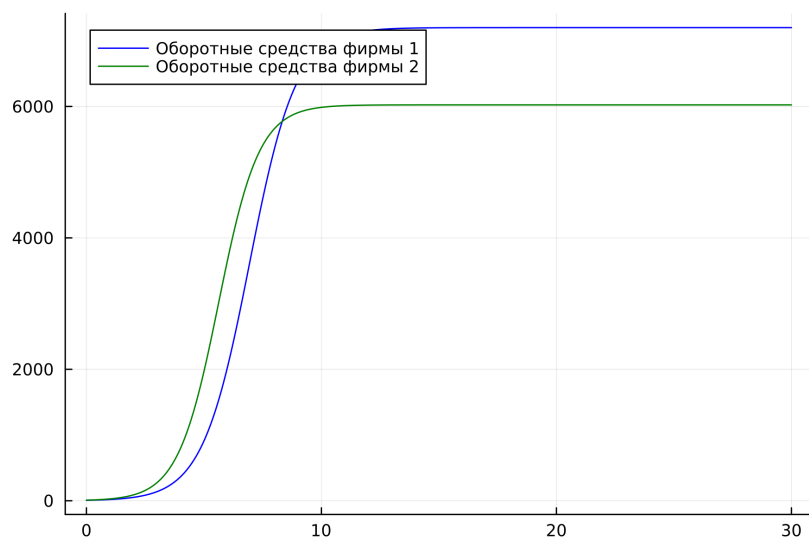


Рис. 1: График конкуренции двух фирм для первого случая, построенный на языке Julia

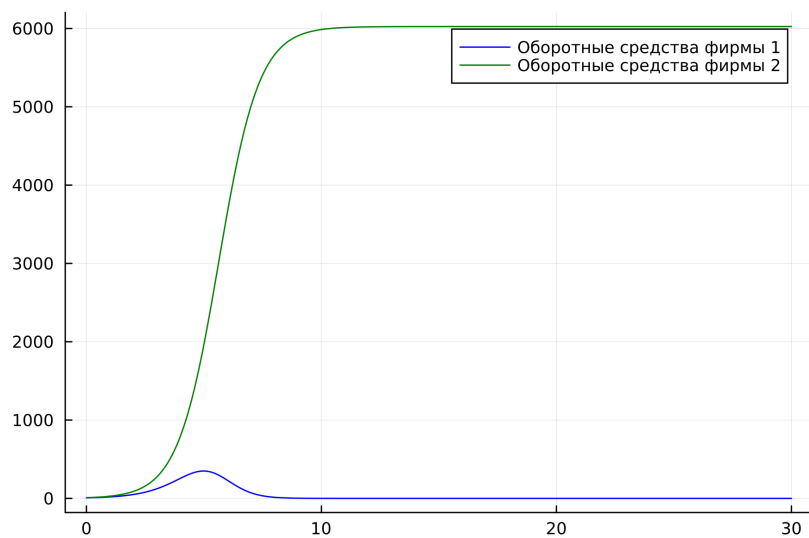


Рис. 2: График конкуренции двух фирм для второго случая, построенный на языке Julia

OpenModelica

Код программы для первого случая:

```
model lab08_1
  Real p_cr = 40;
  Real tau1 = 25;
  Real p1 = 8;
  Real tau2 = 20;
  Real p2 = 8.5;
  Real N = 45;
  Real q = 1;

  Real a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q);
  Real a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q);
  Real b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p1 * p2 * p2 * N * q);
  Real c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1);
  Real c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2);

  Real M1;
  Real M2;
initial equation
  M1 = 7;
  M2 = 8.9;
equation
  der(M1) = M1 - b/c1*M1*M2 - a1/c1*M1*M1;
  der(M2) = c2/c1*M2 - b/c1*M1*M2 - a2/c1*M2*M2;
  annotation(
    experiment(StartTime = 0, StopTime = 30, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));
end lab08_1;
```


Код программы для второго случая:

```
model lab08_2

Real p_cr = 40;
Real tau1 = 25;
Real p1 = 8;
Real tau2 = 20;
Real p2 = 8.5;
Real N = 45;
Real q = 1;

Real a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q);
Real a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q);
Real b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p1 * p2 * p2 * N * q);
Real c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1);
Real c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2);

Real M1;
Real M2;

initial equation
M1 = 7;
M2 = 8.9;

equation
der(M1) = M1 - (b / c1 + 0.00049) * M1 * M2 - a1 / c1 * M1 * M1;
der(M2) = c2 / c1 * M2 - b / c1 * M1 * M2 - a2 / c1 * M2 * M2;

annotation(
  experiment(StartTime = 0, StopTime = 30, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));

end lab08_2;
```

Результаты работы кода на OpenModelica

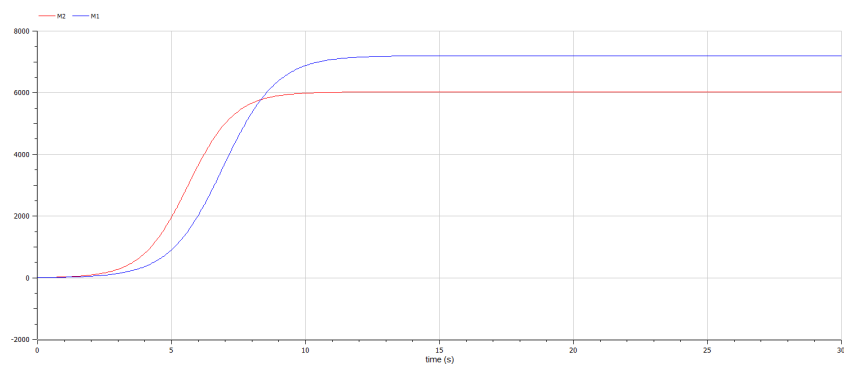


Рис. 3: График конкуренции двух фирм для первого случая, построенный с помощью OpenModelica

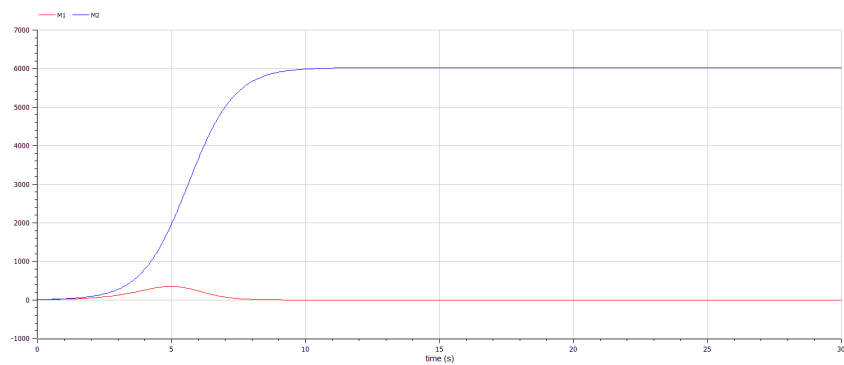


Рис. 4: График конкуренции двух фирм для второго случая, построенный с помощью OpenModelica

Анализ полученных результатов.

Сравнение языков.

В итоге проделанной работы на языках Julia и OpenModelica мы построили графики изменения оборотных средств для двух фирм для случаев, когда конкурентная борьба ведётся только рыночными методами и когда, помимо экономического фактора влияния, используются еще и социально-психологические факторы.

Построение модели конкуренции двух фирм на языке OpenModelica занимает значительно меньше строк кода, чем аналогичное построение на Julia.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель конкуренции двух фирм и в дальнейшем построена модель на языках Julia и Open Modelica.

Список литературы. Библиография.

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Мальтузианская модель роста: <https://www.stolaf.edu/people/mckelvey/envision.dir/malthus.html>
- [5] Математические модели конкурентной среды: <https://dspace.spbu.ru/bitstream/11701/12019/1/Goryn>
- [6] Разработка математических моделей конкурентных процессов: <https://www.academia.edu/9284004/>