Лабораторная работа номер 4

Malkov Roman Sergeevich

01.03.2024

Цель работы

Изучить понятие гармонического осциллятора, построить фазовый портрет и найти решение уравнения гармонического осциллятора.

Теоретическое введение

- Гармонический осциллятор [1] — система, которая при смещении из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x.
- Гармоническое колебание [2] - колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение и др.), изменяются по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).

Теоретическое введение

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ - параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 - собственная частота колебаний. Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

Теоретическое введение

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Теоретическое введение

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Теоретическое введение

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x = y \\ y = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным

Задачи

1. Разобраться в понятии гармонического осциллятора
2. Ознакомиться с уравнением свободных колебаний гармонического осциллятора
3. Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения на языках Julia и Open Modelica гармонического осциллятора для следующих случаев:

- Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Задание

Вариант 59:

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 30x = 0$;
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 10\dot{x} + 20x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 17\dot{x} + 3x = 0.9cos(10t)$

На интервале $t \in [0; 77]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.0, y_0 = -0.6$.

Выполнение лабораторной работы

Код программы для первого случая:

```
using Plots
using DifferentialEquations

w = 30.0
g = 0.0
x₀ = 0.0
y₀ = -0.6


function ode_fn(du, u, p, t)
  x, y = u
  du[1] = u[2]
  du[2] = -(w*w)*u[1] - g*u[2]
end

v₀ = [x₀, y₀]
tspan = (0.0, 77.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v₀, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
plt = plot(
        layout=(1,2),
        dpi=300,
        legend=false)

plot!(
      plt[1],
      T,
      X,
      title="Решение уравнения",
      color=:blue)

plot!(
      plt[2],
      X,
```

Выполнение лабораторной работы

Код программы для второго случая:

```
using Plots
using DifferentialEquations

w = 20.0
g = 10.0
x₀ = 0.0
y₀ = -0.6


function ode_fn(du, u, p, t)
  x, y = u
  du[1] = u[2]
  du[2] = -(w*w)*u[1] - g*u[2]
end

v₀ = [x₀, y₀]
tspan = (0.0, 77.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v₀, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
plt = plot(
           layout=(1,2),
           dpi=300,
           legend=false)

plot!(
      plt[1],
      T,
      X,
      title="Решение уравнения",
      color=:blue)

plot!(
      plt[2],
```

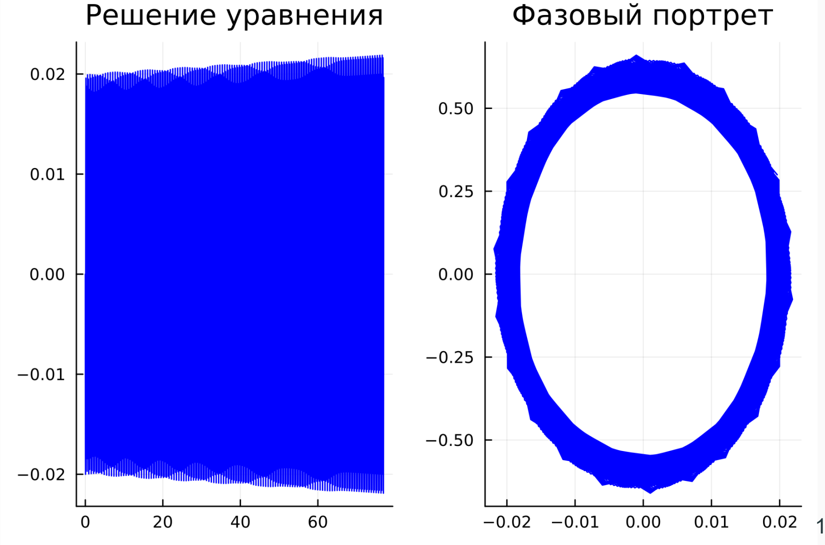
Выполнение лабораторной работы

Код программы для третьего случая:

```
using Plots
using DifferentialEquations

w = 3.0
g = 17.0
x₀ = 0.0
y₀ = -0.6


function ode_fn(du, u, p, t)
  x, y = u
  du[1] = u[2]
  du[2] = -(w*w)*u[1] - g*u[2] + 0.9*cos(10*t)
end

v₀ = [x₀, y₀]
tspan = (0.0, 77.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v₀, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
plt = plot(
        layout=(1,2),
        dpi=300,
        legend=false)

plot!(
      plt[1],
      T,
      X,
      title="Решение уравнения",
      color=:blue)

plot!(
      plt[2],
      X,
      Y,
```

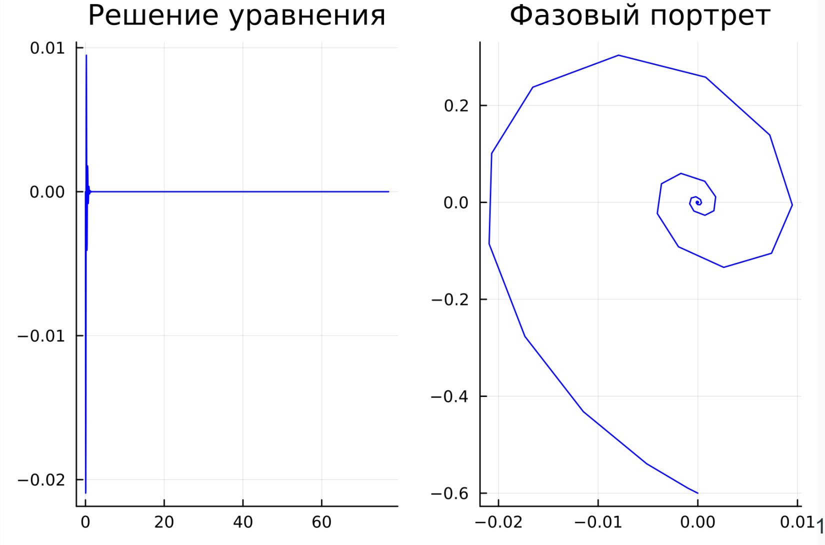
Выполнение лабораторной работы

Первый случай:



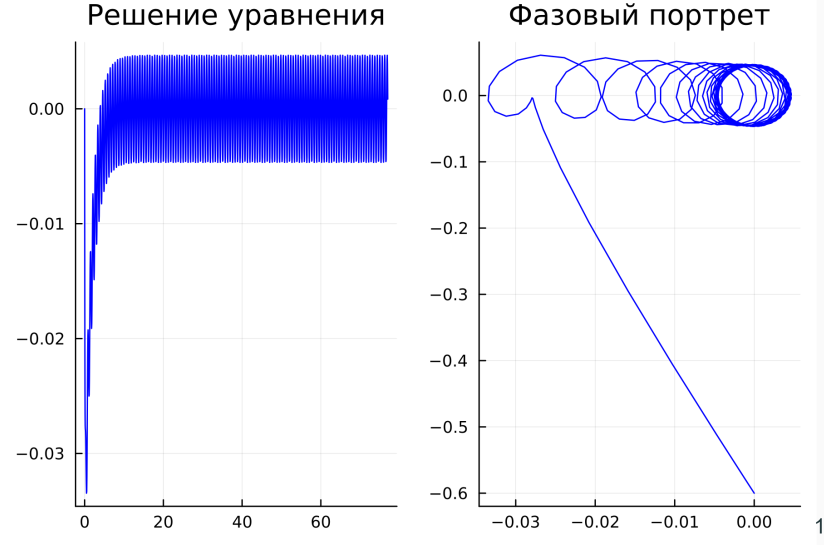
Выполнение лабораторной работы

Второй случай:



Выполнение лабораторной работы

Третий случай:



Выполнение лабораторной работы

Код программы для первого случая:

```
model lab41
Real x;
Real y;
Real w = 30.0;
Real g = 0.0;
Real t = time;
initial equation
x = 0.0;
y = -0.6;
equation
der(x) = y;
der(y) = -(w*w)*x - g*y;
end lab41;
```

Рис. 7: “Modelica”

Выполнение лабораторной работы

Код программы для второго случая:

```
model lab42
Real x;
Real y;
Real w = 20.0;
Real g = 10.0;
Real t = time;
initial equation
x = 0.0;
y = -0.6;
equation
der(x) = y;
der(y) = -(w*w)*x - g*y;
end lab42;
```

Рис. 8: “Modelica”

Выполнение лабораторной работы

Код программы для третьего случая:

```
model lab43
Real x;
Real y;
Real w = 3.0;
Real g = 17.0;
Real t = time;
initial equation
x = 0.0;
y = -0.6;
equation
der(x) = y;
der(y) = -(w*w)*x - g*y + 0.9*sin(10*t);
end lab43;
```

Рис. 9: “Modelica”

Выполнение лабораторной работы

Первый случай:

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

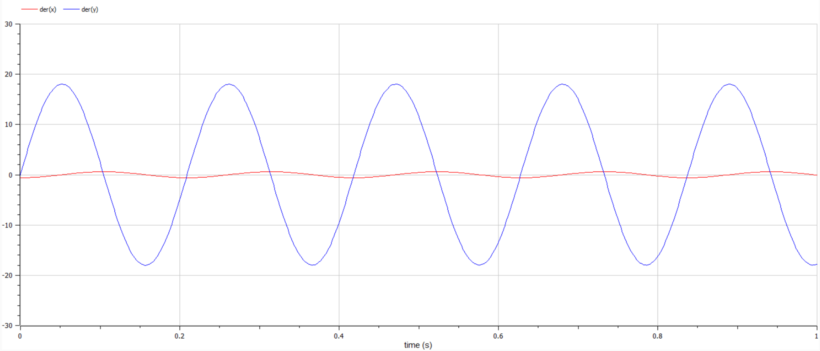


Рис. 10: “Решение уравнения и фазовый портрет для колебания

Выполнение лабораторной работы

Второй случай:

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

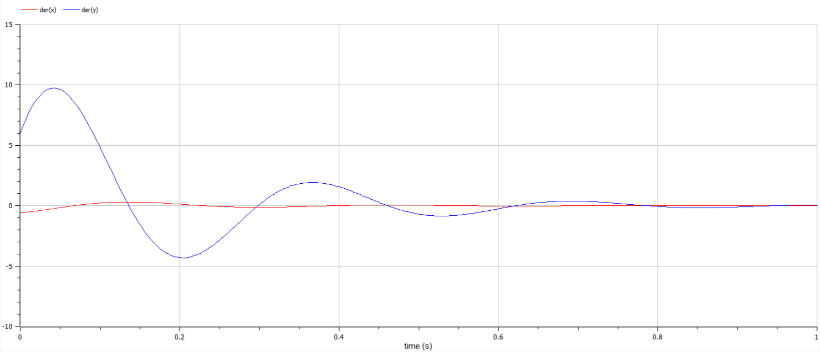


Рис. 11: “Решение уравнения и фазовый портрет для колебания

Выполнение лабораторной работы

Третий случай:

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

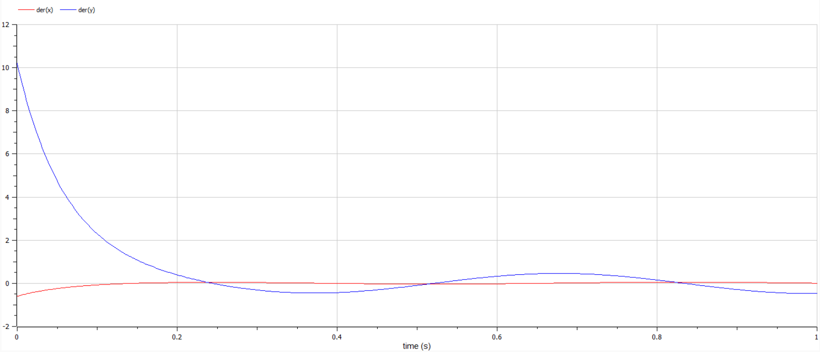


Рис. 12: “Решение уравнения и фазовый портрет для колебания

Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили три графика для вышеуказанных моделей на языках Julia и OpenModelica. Построение моделей колебания на языке OpenModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были построены решения уравнения гармонического осциллятора и фазовые портреты гармонических колебаний без затухания, с затуханием и при действии внешней силы на языках Julia и Open Modelica.